Проф. Унів. В. ЧУДИНІВ - БОГУН

ОСНОВИ ТРИГОНОМЕТРІЇ

III-є ВИДАННЯ ПЕРЕРОБЛЕНЕ

1946

Українська Студентська Громада в Регенсбурзі

Проф. Унів. В. ЧУДИНІВ - БОГУН

ОСНОВИ ТРИГОНОМЕТРІЇ

III-є ВИДАННЯ ПЕРЕРОБЛЕНЕ

1946

Українська Студентська Громада в Регенсбурзі

Присвячую Світлої пам'яті покійній Матусі моїй.

ПОДЯКА

Управа Української Студентської Громади в Регенсбурзі складає щиру подяку Високоповажаному Панові Професору Володимирові Чудинову-Богунові за безкорисливий дозвіл на передрук і поміч при перевиданні цього підручника.

Регенсбург, дня 25 травня 1946.

Українська Студентська Громада.

Весь прибуток з цього видання, за згодою автора, переходить на зміцнення видавничого фонду Студентської Громади в Регенсбурзі.

Видано 800 примірників.

ВСТУП

Третім виданням цього підручника:

Основи тригонометрії — починає Українська Студентська Громада в Регенсбурзі як перевидання наших підручників з математики, так і видання нових, а саме:

I. Основи альгебри (III. видання)
II. Основи нарисної геометрії (III. вид.)
III. Основи аналітичної геометрії (II. в.)
IV. Таблиці логаритмів (III. видання)
V. Основи вищої альгебри (I. видання)
VI. Аналітична геометрія (II. видання)
VII. Диференціяльне числення (I. видан.)
VIII. Інтегральне числення (I. видання)
IX. Диференціяльні рівнання (I. вид.)
X. Теорія імовірностей (I. видання).

Якщо не перешкодять непередбачені обставини, перші п'ять мають вийти протягом 1946 р., а останні п'ять — протягом наступного року.

Увесь тягар видання цього підручника — основи тригонометрії — взяла на себе Управа Студентської Громади в складі п. п. Приходька Константина, Рожка Ст. і Куземського Ів., за що й висловлюємо їм тут свою сердечну подяку.

РОЗДІЛ ПЕРШИЙ.

§ 1. Основні формули.

Коли з прямокутнього трикутника з гіпотенузою c, катетами a і b і гострим кутом α (рис. 1) візьмемо відношення:

$$\frac{a}{c},\quad \frac{b}{c}\quad \text{і}\quad \frac{c}{b},$$

то ці величиьи будуть тотожні для всіх прямокутних трикутників, що мають той самий кут α.

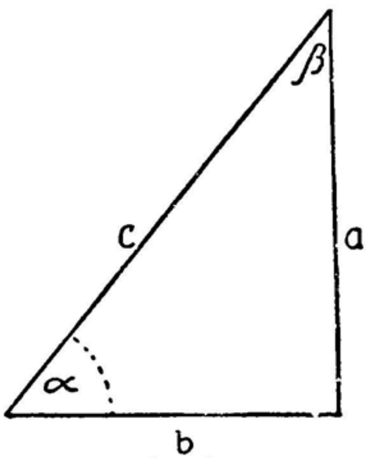


Рис. 1.

Справді, припустімо, що в трикутнику з катетами a', b' і гіпотенузою c' кут α' (рис. 2) дорівнює кутові α у попередньому трикутнику. Тоді ці трикутники будуть

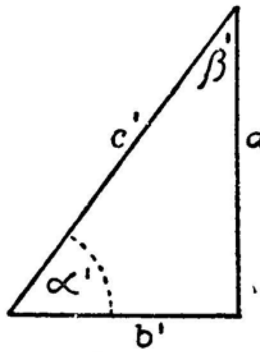


Рис. 2.

подібні, а відношення відповідних боків тотожні; себто

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'};\quad \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'};\quad \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}.$$

Відношення:

$$\frac{a}{c},\quad \frac{b}{c},\quad \frac{a}{b}$$

відносно кута α звуть відповідно — синус, косинус, тангенс і вкорочено записують:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c};\quad \cos\alpha=\frac{b}{c};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$$

Себто синусом даного гострого кута α звемо відношення протилежного катета до гіпотенузи;

косинусом кута α звемо відношення прилежного катета до гіпотенузи;

тангенсом кута α звемо відношення протилежного катета до прилежного.

Величини

$$\frac{c}{a}, \quad \frac{c}{b} \quad і \quad \frac{b}{a},$$

що є обернені до величин

$$\frac{a}{c}, \quad \frac{b}{c} \quad і \quad \frac{a}{b},$$

відносно кута α звуть відповідно — косеканс, секанс, котангенс і пишуть скорочено:

$$csc\alpha = \frac{c}{a}; \quad sc\alpha = \frac{c}{b}; \quad ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

Себто косекансом даного гострого кута α звемо відношення гіпотенузи до протилежного катета;

секансом кута α звемо відношення гіпотенузи до прилежного катета.

котангенсом кута α звемо відношення прилежного катета до протилежного.

Через те, що обернена величина дорівнює одиниці, поділеній на пряму величину, себто в даній випадку.

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}}; \quad \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}}; \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}},$$

виходить, що

$$csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}; \quad sc\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \quad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

З рівнання $a^2 + b^2 = c^2$ маємо:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,$$

себто

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \ldots\ldots /I/$$

Цією формулою користаємося, щоб визначити одну з величин із розмірів другої: в розміру $\sin\alpha$ розмір $\cos\alpha$, і навпаки.

Відношення $\frac{a}{b}$, що є тангенс кута α, через поділ чисельника і знаменника на c перепишеться:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha \quad \ldots\ldots /II/$$

а $ctg\,\alpha$, як обернена величина, буде дорівнювати:

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots /III/$$

З формули $csc\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ можна записати:

$$csc^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},$$

а замінивши 1 на $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$, дістанемо:

$$csc^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1 + ctg^2\alpha \quad /IV/$$

З формули $sc\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ дістанемо:

$$sc^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha. \quad /V/$$

З IV-ої формули маємо:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + ctg^2\alpha}}. \quad /VI/$$

а з формули V-ої:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \quad /VII/$$

На підставі попередніх формул можна з розміру одної тригонометричної величини визначити всі інші.

Так хай $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, тоді на підставі формули (I) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, або $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$. Підставивши значення $\sin\alpha$ будемо мати

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

На підставі формули II-ої

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

або в нашім прикладі

$$tg\,\alpha = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}.$$

$ctg\,\alpha$, $sc\,\alpha$ і $csc\,\alpha$, як обернені величини, будуть:

$$ctg\,\alpha = \frac{4}{3},\ csc\,\alpha = \frac{5}{3} \text{ і } sc\,\alpha = \frac{5}{4}$$

Вправи. 1) З розміру $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ визначити решту тригонометричних величин кута α.

2) З розміру $tg\,\alpha = 1$ визначити решту тригонометричних величин кута α.

§ 2. Залежність між тригонометричними величинами гострого кута та кута, що доповнює даний до 90°.

Відношення $\frac{a}{c}$, що е синус кута α (рис. 1), відносно кута β буде косинусом, себто

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta$$

Отже, синус даного гострого кута дорівнює косинусові кута, що доповнює даний до 90 степенів, бо $\alpha + \beta = 90^0$.

Відношення $\frac{a}{b}$, що е тангенс кута α, відносно кута β буде котангенсом, себто

$$\frac{a}{b}\ \ tg\alpha = ctg\,\beta$$

Отже, тангенс даного гострого кута дорівнює котангенсові кута, що доповнює даний до 90°.

На підставі попередніх залежностей маємо можливість визначати розмір тригонометричних величин гострих кутів більших, як 45°, з розміру тригонометричних величин кутів менших ніж 45°.

Дійсно, $\sin 70^0$ визначиться з розміру $\cos 20^0$, бо $\sin 70^0 = \cos 20^0$, $tg\,80^0$ — з $ctg\,10^0$, бо $tg\,80^0 = ctg\,10^0$, і т. д.

§ 3. Розміри тригонометричних величин кутів 30°, 45°, 60°.

У практиці дуже часто трапляються задачі прямокутнього трикутника з гострим кутом 30°, 45°, 60°. Отже, потрібно пам'ятати залежності між катетом та гіпотенузою у прямокутніх трикутниках з такими кутами, а також розміри тригонометричних величин цих кутів.

З геометрії відомо, що катет проти кута 30° дорівнює половині гіпотенузи. На цій підставі можемо сказати, що розмір синуса 30° дорівнює:

$$\sin 30^0 = {}^1/_2.$$

Дійсно, означивши гіпотенузу через c, а катет проти кута 30° через a, будемо мати:

$$a = \frac{c}{2},$$

$$\sin 30^0 = \frac{c}{2} : c = \frac{1}{2}.$$

тоді косинус 30° дорівнює:

$$\cos 30^0 = \sqrt{1 - \sin^2 30^0} = \\ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Тангенс 30° дорівнює:

$$tg\,30^0 = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \\ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

А косеканс, секанс і котангенс, як обернені величини, будуть дорівнювати:

$$csc\ 30^0 = 2,$$

$$sc\ \ 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$ctg\ 30^0 = \sqrt{3}$$

Коли один гострий кут прямокутнього трикутника дорівнює 45°, тоді й другий гострий кут дорівнює теж 45°, а катети рівні між собою. Такий трикутник звемо рівнораменним прямокутнім трикутником.

Означивши кожен катет через x, а гіпотенузу через c, на підставі Пітагорової теореми запишемо:

$$x^2 + x^2 = c^2$$
$$2x^2 = c^2$$
$$x = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

себто катет проти кута 45° дорівнює гіпотенузі, поділеній на корінь квадратовий з 2.

На цій підставі синус кута 45° дорівнює:

$$\sin 45^0 = \frac{x}{c} = \frac{c}{\sqrt{2}} : c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Так само і косинус кута 45° буде дорівнювати:

$$\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Тангенс 45°:

$$sg\ 45^0 = \frac{x}{x} = 1.$$

Косеканс, секанс і котангенс, як обернені величини, будуть дорівнювати:

$$\csc 45^0 = \sqrt{2}$$
$$sc\ 45^0 = \sqrt{2}$$
$$\mathrm{ctg}\ 45^0 = 1.$$

Коли один гострий кут у прямокутнім трикутнику дорівнює 60°, другий дорівнює 30°. Означивши гіпотенузу через c, катет проти кута 30° через $\frac{c}{2}$ (катет проти кута 30° дорівнює половині гіпотенузи), а катет проти кута 60° через x, будемо мати:

$$x^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = c^2$$

$$x^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3}{4}\ c^2$$

$$x = \frac{c\sqrt{3}}{2},$$

себто катет проти кута 60° дорівнює половині гіпотенузи, помноженій на корінь квадратовий з 3.

На цій підставі синус кута 60° буде дорівнювати:

$$\sin 60^0 = \frac{c\sqrt{3}}{2} : c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Косинус кута 60° дорівнює синусові кута доповнення до 90°, себто синусові 30°:

$$\cos 60^0 = \sin 30^0 = {}^1/_2.$$

Тангенс кута 60°:

$$\mathrm{tg}\ 60^0 = \mathrm{ctg}\ 30^0 = \sqrt{3}.$$

Косеканс, секанс і котангенс, як обернені величини, будуть дорівнювати:

$$\csc 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}};\quad sc\ 60^0 = 2;$$

$$\mathrm{ctg}\ 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

Написавши попередні результати у вигляді таблички, дістанемо:

кути	$\sin\alpha$	$\csc\alpha$	$\cos\alpha$	$sc\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

II. 1. Збудуймо чверть кола (рис. 2 а) радіюса OA = r. Через точки A і B обводу кола проведімо дотичні до нього AP і BT.

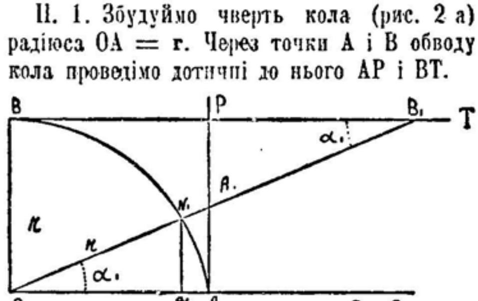


Рис 2 а.

Дотичну AP назовімо віссю тангенсів, а дотичну BT віссю котангенсів. Визначмо довільний осередковий кут α_1; подовжім рамено $0 N_1$ до перетину в точці A_1 з віссю тангенсів і в точці B_1 з віссю котангенсів; з точки N_1 спустимо нормаль $N_1 a_1$ на OA. Рамено $0 N_1$ будемо звати рухомим раменом кута α_1. Тригонометричні величини кута α_1, виходячи з рис. 2 а, можна визначити з відношення:

$$\sin \alpha_1 = \frac{N_1 a_1}{O N_1} = \frac{N_1 a_1}{r}$$
$$\cos \alpha_1 = \frac{Oa_1}{ON_1} = \frac{Oa_1}{r} \quad (N)$$
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{AA_1}{OA} = \frac{AA_1}{r}$$
$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{B B_1}{O B} = \frac{BB_1}{r}$$
$$\operatorname{sc} \alpha_1 = \frac{OA_1}{OA} = \frac{OA_1}{r}$$
$$\operatorname{csc} \alpha_1 = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OB_1}{r}$$

в яких знаменник є спільний і рівний r (радіюсові кола).

Відтинки:

$a_1 N_1$, Oa_1, AA_1, BB_1, OA_1, і OB_1 відносно кута α_1 звуть:

$a_1 N_1$	—	лінією	синуса	кута	α_1
$O a_1$	—	,,	косинуса	,,	,,
$A A_1$	—	,,	тангенса	,,	,,
$B B_1$	—	,,	котангенса	,,	,,
$O A_1$	—	,,	секанса	,,	,,
$O B_1$	—	,,	косеканса	,,	,,

Потрібно пам'ятати, що (A_1) точка перетину рухомого рамена ON_1, кута α_1 з віссю тангенсів є одночасно кінець лінії секанса і тангенса, а (B_1) точка перетинку рухомого рамена ON_1 кута α_1 з віссю котангенсів — є кінець лінії косеканса і котангенса. Початок у лінії секанса і косеканса є спільний (вершок кута α_1); початок лінії тангенса (A) є точка дотику вісі тангенсів з обводом кола, а початок (B) лінії котангенса є точка дотику вісі котангенсів до обводу кола.

Якщо покласти радіюс кола OA рівний одиниці, тоді числові значення тригонометричних ліній кута α_1 будуть тригонометричними величинами кута α_1.

Дійсно, для цього випадку відношення (N) приймуть вигляд:

$$\sin \alpha_1 = \frac{a_1 N_1}{1} = a_1 N_1$$
$$\cos \alpha_1 = \frac{O a_1}{1} = O a_1$$
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{A A_1}{1} = A A_1$$
$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{B B_1}{1} = B B_1$$
$$\operatorname{sc} \alpha_1 = \frac{O A_1}{1} = O A_1$$
$$\operatorname{csc} \alpha_1 = \frac{O B_1}{1} = O B_1$$

В дальшому будемо припускати, що радіюс кола дорівнює 1 (одиниці маштабу)

II. 2. Межі зміни тригонометричних величин кута α_1 при зміні його розмірів від 0^0 до 90^0.

Якщо кут α_1 зменшується до нуля, тоді як легко бачити з рис. (2в), лінія синуса і тангенса зменшується до 0, а лінія косинуса збільшується до одиниці, лінія секанса зменшується до одиниці (радіюс кола уважаємо рівним одиниці). Це дає підставу покласти:

$$\sin 0^0 = 0 \qquad \operatorname{tg} 0^0 = 0$$
$$\cos 0^0 = 1 \qquad \operatorname{sc} 0^0 = 1$$

Лінії котангенса і косеканса при зменшені кута α_1 до 0^0 весь час зростають й притому так, що можуть стати більшими за всяку на перед задану будь яку велику скінчену величину.

Такого роду величини звуть безмежно великими величинами і означають їх знаком: ∞

Це дає підставу покласти:

$$\operatorname{ctg} 0^\circ = \infty$$
$$\csc 0^\circ = \infty$$

Якщо кут α_1 зростає до 90°, то лінія синуса росте до 1 (величини радіюса кола), лінія косинуса зменшується до 0, лінія котангенса зменшується до 0, лінія косеканса зменшується до одиниці (до величини радіюса кола).

Це дає підставу покласти:

$\operatorname{Sin} 90^0 = 1$; $\operatorname{Ctg} 90^0 = 0$;
$\operatorname{Cos} 90^0 = 0$; $\operatorname{Csc} 90^0 = 1$.

Лінії ж секанса і тангенса, коли кут α_1 зростає до 90° весь час збільшується й при тому так, що можуть стати більшими за всяку наперед задану скінчену велику величину.

Це дає підставу покласти:

$$\operatorname{Tg} 90^0 = \infty$$
$$\operatorname{Sc} 90^0 = \infty$$

§ 4. Розміри тригонометричних величин кутів.

Розміри тригонометричних величин для кутів 5°, 10°, 15° . . . . 45°, визначмо графічним способом. Для цього візьмім чверть кола радіюса 10 см. (Рис. 3).

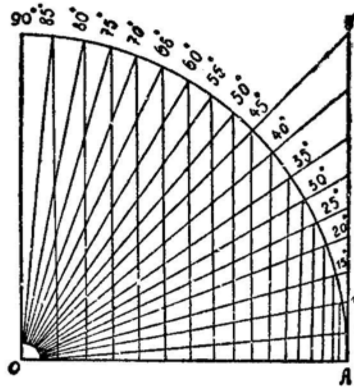


Рис 3

Визначмо в ньому зазначені кути і відповідно до кожного з них побудуймо прямокутнього трикутника так, щоб гіпотенуза дорівнювала радіюсові (див. рис. 3.), через точку A обводу кола проведімо дотичну до нього AN і подовжім рамена, що визначають кути в 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40° і 45° до перетину з дотичною AN.

Розміри синуса, косинуса і тангенса кутів, 5°, 10°, 15° . . . 45° визначмо безпосередньо з рисунка, вже з них обчислім розміри секанса, косеканса і котангенса, як величини обернених до них.

Розміри ж тригонометричних величин кутів більших за 45° (50°, 55° . . . . . 85°) визначмо з розмірів тригонометричних величин кутів доповнення до 90°, усі розміри визначмо до сотих часток, уклавши їх у таку табличку натуральних тригонометричних величин:

ТАБЛИЦЯ

натуральних тригонометричних величин для кутів 0°, 5° . . . . 90°.

o	sin	d	csc	d	tg	d	ctg	d	sc	d	cos	d	o
0	0,00	9	∞		0,00	9	∞		1,00		1,00		90
5	0,09	8	11,47		0,09	9	11,43		1,00	2	1,00	1	85
10	0,17	9	5,76		0,18	9	5,67		1,02	2	0,99	2	80
15	0,26	8	3,86	94	0,27	9	3,73	98	1,04	2	0,97	3	75
20	0,34	8	2,92	55	0,36	11	2,75	60	1,06	4	0,94	3	70
25	0,42	8	2,37	37	0,47	11	2,15	42	1,10	6	0,91	4	65
30	0,50	7	2,00	26	0,58	12	1,73	30	1,16	6	0,87	5	60
35	0,57	7	1,74	18	0,70	14	1,43	24	1,22	8	0,82	5	55
40	0,64	7	1,56	15	8,84	16	1,19	19	1,31	10	0,77	6	50
45	0,71	6	1,41	10	1,00	19	1,00	16	1,41	15	0,71	7	45
50	0,77	5	1,31	9	1,19	24	0,84	14	1,56	18	0,64	7	40
55	0,82	5	1,22	6	1,43	30	0,70	12	1,74	26	0,57	7	35
60	0,87	4	1,16	6	1,73	42	0,58	11	2,00	37	0,50	8	30
65	0,91	3	1,10	4	2,15	40	0,47	11	2,37	55	0,42	8	25
70	0,94	3	1,06	2	2,75	98	0,36	9	2,92	94	0,34	8	20
75	0,97	3	1,04	2	3,73	194	0,27	9	3,86		0,26	9	15
80	9,99	1	1,02	2	5,67		0,18	9	5,76		0,17	8	10
85	1,00	0	1,00				0,09	9	11,47		0,09	9	5
90	1,00		1,00		∞		0,00		∞		0,00		0
o	cos	d	sc	d	ctg	d	tg	d	csc	d	sin	d	o

В стовбчиках під рубрякою d зазначені табличні різниці між наступними та попередніми значіннями тригонометричних величин.

Аналізуючи цю табличку зробимо висновок, що при зміні кута 0° — 90°:

синус змінюється	від	0	до	1
косеканс	„	„	∞	до	1
косинус	„	„	1	до	0
секанс	„	„	1	до	∞
тангенс	„	„	0	до	∞
котангенс	„	„	∞	до	0

§ 5. Залежність між боками та тригонометричними величинами відповідних кутів у прямокутнім трикутнику.

З виразів $\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta$

та $\frac{b}{c} = \sin\beta = \cos\alpha$

(див. рис. 4) маємо:

$$a = c\ .\ \sin\alpha = c\ .\ \cos\beta;$$
$$b = c\ .\ \sin\beta = c\ .\ \cos\alpha;$$

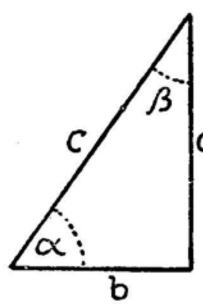


Рис. 4.

Отже, катет дорівнює гіпотенузі, помноженій на синус протилежного або косинус прилежного кута.

З попередніх виразів маємо також:

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\cos\beta},$$

$$c = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

себто гіпотенуза дорівнює катетові, поділеному на синус кута протилежного до катета або на косинус кута прилежного до катета

З виразів

$$\frac{a}{b} = tg\alpha = ctg\beta,$$

$$\frac{b}{a} = tg\beta = ctg\alpha$$

маємо:

$$a = b \cdot tg\alpha = b \quad ctg\beta;$$
$$b = a \cdot tg\beta = a \quad ctg\alpha;$$

або даний катет дорівнює другому катетові, помноженому на тангенс протилежного або котангенс прилежного кута.

§ 6. Розв'язування прямокутнього трикутника.

Задача I. Припустімо, що катет прямокутнього трикутника $a = 57$ м., а відповідний йому кут $\alpha = 35^\circ$ (див. рис. 4). Визначити катет b, гіпотенузу c, кут β і площу трикутника.

Виходячи з того, що даний катет дорівнює другому катетові, помноженому на котангенс прилежного кута

$$b = a \cdot ctg\ \alpha,$$

підставивши розмір a і з таблиці натуральних тригонометричних величин $ctg\,\alpha$, дістанемо:

$$b = 57 \cdot 1{,}42 = 80{,}94\ m$$

Гіпотенуза c дорівнює катетові, поділеному на синус кута протилежного до катета; отже, підставивши з таблиці розмір $\sin\ 35^\circ$, дістанемо:

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{57}{0{,}57} = 100\,m$$

Кут β, як доповнення до 90°, буде дорівнювати:

$$\beta = 90^0 - 35^0 = 55.$$

Площа

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{57 \cdot 80{,}94}{2} = 2306{,}79\ m^2$$

Задача 2. Гіпотенуза $c = 100$ м, кут $\beta = 30^0$. Знайти решту величин.

$$<\alpha = 90^0 - 30^0 = 60^0$$

$$a = c \cdot \cos\beta = 100 \cdot 0.87 = 87\ m$$
$$b = c \cdot \sin\beta = 100 \cdot 0{,}5 = 50\ m$$

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{87 \cdot 50}{2} = 2175\,m^2$$

Задача 3. Гіпотенуза $c = 60$ м, катет $a = 30$ м. Знайти решту величин.

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \quad \text{або в даній задачі}$$

$$\sin\alpha = \frac{30}{60} = 0{,}5$$

З таблиці тригонометричних величин знаходимо, що синусови рівному 0,5 відповідає кут 30°, себто

$$\alpha = 30^\circ,$$

тоді $\qquad \beta = 90^0 - 30^0 = 60^0.$

Катет b дорівнює:

$$b = c \cdot \sin\beta$$
$$b = 60 \cdot 0{,}87 = 52{,}2$$

Визначаючи ж катет b за Пітагоровою теоремою, дістали б той самий розмір катета b. Справді,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3600 - 900} =$$
$$= \sqrt{2700} = 52{,}2$$

Вправи. 1) Катет $a = 50$ м, кут $\alpha = 25^0$. Обчислити катет b, гіпотенузу c, кут β і площу трикутника.

2) Гіпотенуза $c = 40$ м, катет $b = 20$ м. Обчислити катет a, кути α і β і площу трикутника.

РОЗДІЛ ДРУГИЙ

§ 7. Тригонометричні величини кутів у межах 0° — 360°.

П. 1. У попередніх параграфах ми визначили тригонометричні величини кутів у межах 0° — 90°, що дало нам можливість розв'язувати задачі прямокутнього трикутника. А для розв'язування задач всякого трикутника є потреба визначення тригонометричних величин і тупих кутів. Для цього проведім на площі (рис. 5) дві взаемно нормальні прості $X\bar{X}$ та $У\bar{У}$, точку перетину їх означмо через O.

Приймім напрям $O\bar{X}$ за додаткій, а OX за від'емний.

Напрямчу просту $X\bar{X}$ звуть віссю абсцис,

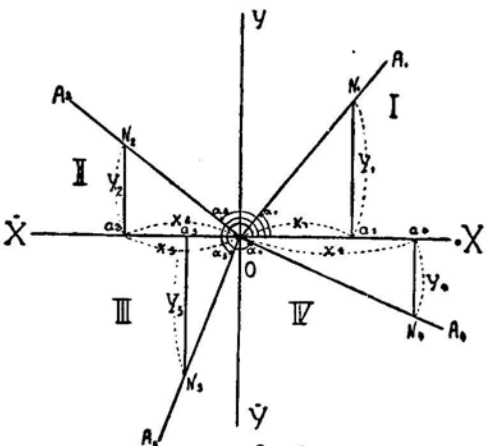


Рис 5.

а $У\bar{У}$ — віссю ординат, а разом координатними осями прямокутньої системи координат.

Утворені координатними осями чотири прямі кути звуть квадрантами і занумеровують в напрямі зворотному до руху годинної стрілки.

Через початок координат O проведім пів просту OA, яку будемо обертати довкола точки O в тому напрямі, як занумеровано прямі кути.

Тоді OA при рухові в 1-му квадрантові утворить кути в межах 0° — 90°,

в 2-му квадрантові утворить кути в межах 90° — 180°,

в 3-му квадрантові утворить кути в межах 180° — 270°,

в 4-му квадрантові утворить кути в межах 270° — 360°.

Візьмім чотири довільні точки N_1, N_2, N_3, N_4, (по одній в кожнім із 4 квадрантів) і спустімо з них нормалі на вісь абсцис $X\bar{X}$. Визначмо одиницю маштабу, напрям нормалі aN будемо уважати за додатний, якщо він відповідае додатньому напрямі осі ординати (OУ), за від'емний — в противнім випадкові $(O\bar{У})$.

Себто напрям нормалі, що міститься в першому або другому квадрантові будемо уважати за додатний, а в третьому і четвертому квадрантах за від'емний. Число, що в заданій одиниці маштабу визначае міру й напрям нормалі aN спущеної з заданої точки N на вісь абсцис, звуть ординатою точки N і зазначують його через y; при чому напрям нормалі беруть від вісі абсцис до точки N.

Ординату точки	N_1 $(a_1 N_1)$	зазнач. через y_1 (рис. 5)
„ „	N_2 $(a_2 N_2)$	„ „ y_2 „
„ „	N_3 $(a_3 N_3)$	„ „ y_3 „
„ „	N_4 $(a_4 N_4)$	„ „ y_4 „

Згідно умови, ординати y_1 і y_2 точок N_1 і N_2 першого й другого квадрантів є додатні, а y_3, y_4 (точок III-го і IV-го квадрантів) — від'ємні.

Число, що в заданій одиниці маштабу визначає міру й напрям відтинка Oa, який відтинає нормаль, спущена з точки N на вісь абсцис $X\overline{X}$ (за початок відтинка уважають початок координат), звуть **а б с ц и с о ю** точки N і зазначують через x.

Абсцису точки	N_1 (Oa_1)	зазнач. через x_1 (рис. 5)
„ „	N_2 (Oa_2)	„ „ x_2 „
„ „	N_3 (Oa_3)	„ „ x_3 „
„ „	N_4 (Oa_4)	„ „ x_4 „

Тому, що напрям відтинка Oa_1 і Oa_4 відповідає додатному напряму осі абсциси (OX), а Oa_2 і Oa_3 від'ємному напряму осі абсцис $(O\overline{X})$, абсциси точок N_1 і N_4 (1-го і 4-го квадрантів) x_1 і x_4 додатні, а абсциси x_2 і x_3 точок N_2 і N_3 другого й третього квадрантів від'ємні.

x_1 і y_1 звуть координатами точки N_1 відносно заданої прямокутньої системи координат і записують:

$$N_1\ (x_1,\ y_1)$$

x_2, y_2 звуть координатами точки N_2 і записують:

$$N_2\ (x_2;\ y_2)\ \ldots\ldots\ \text{і т. д.}$$

Ордината точки, що міститься на осі абсцис, дорівнює нулеві, абсциса точки, що міститься на осі ординат $(У\overline{У})$ дорівнює нулеві. Абсциса й ордината початку системи координатів очевидно дорівнюють нулеві.

Знаки координат для точок чотирох квадрантів запишім у вигляді таблички:

	I	II	III	IV
X	+	−	−	+
У	+	+	−	−

П. 2. Означення тригонометричних величин довільного кута α.

Синусом кута α звуть відношення ординати довільної точки N рухомого рамена кута α до віддалі точки N од початку координат; так (рис. 5):

$$\sin\alpha_1 = \frac{y_1}{ON_1};\quad \sin\alpha_2 = \frac{y_2}{ON_2};$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{y_3}{ON_3};\quad \sin\alpha_4 = \frac{y_4}{ON_4}$$

Отже синус для кутів у межах 0° — 180° буде додатний (ординати y в I-му і II-му квадрантах додатні), а для кутів у межах 180° — 360° синус від'ємний. — (ординати y в III-м і IV-му квадрантах від'ємні).

Косинусом даного кута α звуть відношення абсциси довільної точки N рухомого рамена кута α до віддалі точки N від початку координат, так:

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_1}{ON_1};\quad \cos\alpha_2 = \frac{x_2}{ON_2};$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{x_3}{ON_3};\quad \cos\alpha_4 = \frac{x_4}{ON_4}.$$

Отже, косинус для кутів у межах 0° — 90° і 270° — 360° (I-му і IV квадрантах) буде додатний, а в межах 90° — 270° (другого і III-го квадранту) — від'ємний.

Тангенсом кута α будемо звати відношення ординати до абсциси довільної точки N рухомого рамена кута α, так:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y_1}{x_1}; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{y_2}{x_2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{y_3}{x_3}; \quad \operatorname{tg}\alpha_4 = \frac{y_4}{x_4};$$

Отже тангенс для кутів у межах 0° — 90° і 180° — 270° (І-го й ІІІ-го квадранту) буде додатний, бо координати точок в І-му і ІІІ-му квадрантові мають однакові знаки; тангенс для кутів в межах 90° — 180° і 270° — 360° (ІІ-го і IV-го квадранту) буде від'ємний, бо координати точок в цих квадрантах мають різні знаки.

Величини обернені до синуса, косинуса і тангенса звуть відповідно косекансом, секансом і котангенсом,

себто:

$$\csc\alpha_1 = \frac{OA_1}{y_1}; \quad \csc\alpha_2 = \frac{OA_2}{y_2};$$

$$\csc\alpha_3 = \frac{OA_3}{y_3}; \quad \csc\alpha_4 = \frac{OA_4}{y_4};$$

$$\operatorname{sc}\alpha_1 = \frac{OA_1}{x_1}; \quad \operatorname{sc}\alpha_2 = \frac{OA_2}{x_2};$$

$$\operatorname{sc}\alpha_3 = \frac{OA_3}{x_3}; \quad \operatorname{sc}\alpha_4 = \frac{OA_4}{x_4};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{x_1}{y_1}; \quad \operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{x_2}{y_2};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_3 = \frac{x_3}{y_3}; \quad \operatorname{ctg}\alpha_4 = \frac{x_4}{y_4};$$

Отже знак у косеканса буде той самий, що і в синуса; знак секанса той самий, що і в косинуса, котангенса, що і в тангенса.

Знаки тригонометричних величин кутів у межах 0° — 360° запишім у вигляді таблички:

Квадранти	кути	$\sin\alpha$	$\csc\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{sc}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
I	0°-90°	+	+	+	+	+	+
II	90°-180°	+	+	−	−	−	−
III	180°-270°	−	−	−	−	+	+
IV	270°-360°	−	−	+	+	−	−

П. 3. Нарисуймо коло з центром у початку системи координат (рис. 5 а).

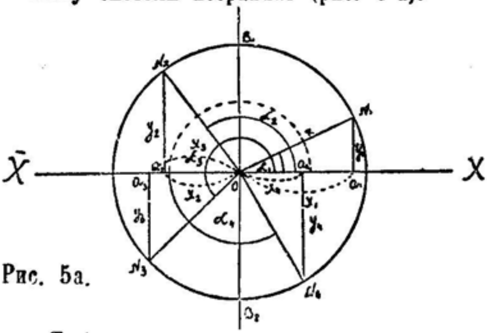


Рис. 5а.

Тоді вирази для тригонометричних величин синуса й косинуса для всіх кутів у межах 0° — 360° будуть мати один і тойже знаменник-радіус r, якщо для визначення їх розміру скористаємо координати точок обводу кола; тому що:

$$ON_1 = ON_2 = ON_3 = ON_4 = r.$$

вирази для синуса й косинуса приймуть вигляд:

$$\sin\alpha_1 = \frac{y_1}{r}; \quad \sin\alpha_2 = \frac{y_2}{r};$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{y_3}{r}; \quad \sin\alpha_4 = \frac{y_4}{r};$$

Напрямний відтинок $a_1 N_1$ звуть в цім випадкові лінією синуса кута α_1, напрямний відтинок $a_2 N_2$ — лінією синуса кута α_2, $a_3 N_3$ — лінією синуса кута α_3; $a_4 N_4$ — лінією синуса кута α_4.

Так само напрямний відтинок Oa_1 звуть лінією косинуса кута α_1,

Oa_2 лінією косинуса кута α_2
Oa_3 ,, ,, ,, α_3
Oa_4 ,, ,, ,, α_4

Якщо радіус кола покласти рівній одиниці (одиниці маштабу), тоді числові значіння ліній синуса й косинуса є синус і косинус відповідних кутів,

себто:

$$\sin \alpha_1 = y_1; \sin \alpha_2 = y_2;$$
$$\sin \alpha_3 = y_3; \sin \alpha_4 = y_4;$$

$$\cos \alpha_1 = x_1; \cos \alpha_2 = x_2;$$
$$\cos \alpha_3 = x_3; \cos \alpha_4 = x_4$$

Знаки для напрямних відтинків, які приймають за тригонометричні лінії синуса й косинуса кутів у межах 0°—360°, покладають ті самі, що для синуса й косинуса цих кутів, себто:

Кути	$0 - 90_0$	$90^0 - 180^0$	$180^0 - 275^0$	$275^0 - 360^0$
Знаки лінії синуса	+	+	—	—
Знаки лінії косинуса	+	—	—	+

Тому, що ординати точок, які містяться на вісі $X\overline{X}$ є рівні нулеві, значіння синуса для кутів 0°, 180° і 360°, виходячи з його означення, покладають рівним нулеві, себто:

$$\sin 0^0 = 0, \sin 180^0 = 0, \sin 360^0 = 0.$$

Рівні нулеві є і абсциси точок, що містяться на вісі $Y\overline{Y}$, з цих причин для косинуса кутів 90° і 270° покладають:

$$\cos 90^0 = 0$$
$$\cos 270^0 = 0$$

Тому, що ордината точки обводу кола B_1 є рівна $+ r$, а точки B_2 є рівна $- r$, (див. рис. 5а), значіння синуса для кутів 90° і 270°, виходячи з його означення, будуть дорівнювати

$$\sin 90^0 = \frac{+r}{r} = +1$$

$$\sin 270^0 = \frac{-r}{r} = -1$$

Тому, що абсциса точки обводу кола A_1 є рівна $+ r$, а точки A_2 є рівна $- r$; значіння косинуса для кутів 0°, 180° і 360° будуть дорівнювати:

$$\cos 0^0 = \frac{+r}{r} = +1$$

$$\cos 180^0 = \frac{-r}{r} = -1$$

$$\cos 360^0 = \frac{+r}{r} = +1$$

Запишім попередні висліди у вигляді таблички:

Кути	Синус	Косинус
0^0	0	+ 1
90^0	+ 1	0
180^0	0	— 1
270^0	— 1	0
360^0	0	+ 1

П. 4. Тригонометричні лінії тангенса, котангенса, секанса й косеканса довільного кута α.

Візьмім коло радіюса $OA = r$, з центром в початку системи координат (рис. 5в). Через точку A і B проведімо дотичні до кола QT та PS.

Дотичку PS будемо звати віссю тангенсів, а дотичку QT віссю котангенсів.

Приймім напрям AP у вісі тангенсів за додатній, а напрям AS — за від'ємний; так

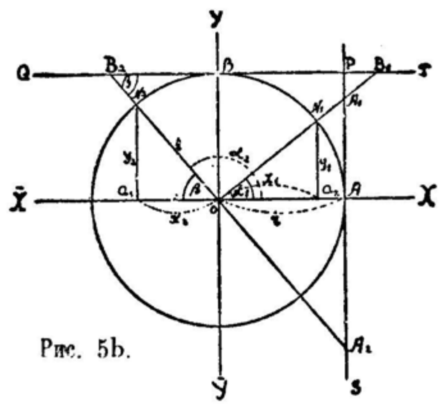


Рис. 5b.

само приймім BT у вісі котангенсів за додатній, а напрям BQ — за від'ємний.

Визначмо довільний осередковий кут першого квадранта через α_1, а другого квадранта — через α_2.

Продовжім рухоме рамено кута α_1 ON_1 (рис. 5 в) до перетину з віссю тангенсів в точці A_1, і з віссю котангенсів в точці B_1. Продовжім рухоме рамено кута α_2 ON_2 до перетину з віссю котангенсів в точці B_2, з віссю котангенсів — A_2 (для цього продовжім рухоме рамено кута a_2 в протилежнім напрямі).

З точок N_1, N_2 спустімо нормалі $N_1\,a_1$; $N_2\,a_2$ на вісь $X\bar{X}$.

Тригонометричні величини тангенс, котангенс, секанс, косеканс кутів α_1 і α_2 визначаться з відношень:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{AA_1}{OA} = \frac{AA_1}{r};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{BB_1}{OB} = \frac{BB_1}{r};$$

$$\operatorname{sc}\alpha_1 = \frac{OA_1}{OA} = \frac{OA_1}{r};$$

$$\operatorname{csc}\alpha_1 = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OB_1}{r};$$

Пр. a_1 (Рис. 5b). чит. a_2 і навпаки.

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{AA_2}{OA} = \frac{AA_2}{r};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{x_2}{y_2} = \frac{BB_2}{OB} = \frac{BB_2}{r};$$

$$\operatorname{sc}\alpha_2 = \frac{ON_2}{r} = \frac{ON_2}{OA} = \frac{ON_2}{r};$$

$$\operatorname{csc}\alpha_2 = \frac{ON_2}{y_2} = \frac{OB_2}{OB} = \frac{OB_2}{r};$$

Напрямні відтинки: AA_1; OA_2; BB_1; OB_1; звуть:

AA_1	тригонометричною лінією	тангенса	кута α_1
OA_1	,, ,,	секанса	,, ,,
BB_1	,, ,,	котангенса	,, ,,
OB_1	,, ,,	косеканса	,, ,,

Напрям цих тригонометричних ліній кута (a) першого квадранта приймаем за додатний.

Напрямні відтинки AA_2, OA_2, BB_2, OB_2, звуть:

AA_2	лінією	тангенса	кута α_2 (II квадранта)
OA_2	,,	секанса	,, ,,
BB_2	,,	котангенса	,, ,,
OB_2	,,	косеканса	,, ,,

Напрям ліній тангенса, секанса, котангенса важаються за від'ємний; а лінію косеканса за додатний.

Напрямні відтинки AA_3, OA_3, BB_3, OB_3 (див. рис. 5c) кутів (III-го квадранту) звуть:

AA_3	лінією	тангенса	кута α_3 (III. квадранту)
OA_3	,,	секанса	,, ,, ,, ,,
BB_3	,,	котангенса	,, ,, ,, ,,
OB_3	,,	косеканса	,, ,, ,, ,,

Напрям ліній тангенса і котангенса кутів III-го квадранту приймають за додатний, а ліній секанса і косеканса за від'ємний.

Напрямні відтинки AA_4, OA_4, BB_4, OB_4 (див. рис. 5c) кутів α_4 (IV-го квадранту) звуть:

AA_4 лінією тангенса кута α_4 (IV квадранту)
OA_4 „ секанса „ „ „ „
BB_4 „ котангенса „ „ „ „
OB „ косеканса „ „ „ „

Напрям ліній секанса кутів IV-го квадранту приймають за додатний, а напрям ліній тангенса, котангенса і косеканса за від'ємний.

Знаки тригонометричних ліній тангенса, котангенса, секанса і косеканса кутів у межах 0°—360° запишімо у вигляді таблички:

Квадран.	Кути	Знаки тригонометр. ліній			
		tg	ctg	sc	csc
I	$0^0 - 90^0$	+	+	+	+
II	$90^0 - 180^0$	—	—	—	+
III	$180^0 - 270^0$	+	+	—	—
IV	$270^0 - 360^0$	—	—	+	—

Себто знаки тригонометричних ліній ті самі, що у відповідних їм тригонометричних величин.

Якщо покласти радіюс кола рівний одиниці, тоді числові значення тригонометричних ліній стають тригонометричними величинами відповідних їм кутів.

В дальшому будемо припускати, що радіюс кола є рівний 1.

Коли кут α_2 (II-го квадр.) зменшується до 90°, то, як легко бачити з рис. 5 в, лінія тангенса і секанса, залишаючись від'ємними, весь час по абсолютному розміру ростуть і при тому так, що їх абсолютні розміри можуть стати і при дальшому зменшенні кута α_2 до 90° залишиться більшими за будь яку сталу наперед задачу велику величину; тому для кутів $\alpha_2 = 90°$ покладають:

$$tg\ 90^0 = -\infty$$
$$sc\ 90^0 = -\infty$$

Лінія котангенса для кута $\alpha_2 = 90°$ є рівна 0, а лінія секанса 1 (величині радіюса кола), тому покладають:

$$ctg\ 90^0 = 0$$
$$csc\ 90^0 = 1$$

Для кута $\alpha_2 = 180°$ лінія тангенса є рівна 0, а лінія секанса — 1; тому покладають:

$$tg\ 180^0 = 0$$
$$sc\ 180^0 = -1$$

Коли ж кут α_2 зростає до 180°, то, як легко бачити з рис. 5 в, лінія котангенса і косеканса, залишаючись перша від'ємною, а друга додатною, ростуть по абсолютному розміру і при тому так, що їх абсолютні розміри можуть стати і при дальшому збільшенні кута α_2 до 180° залишитися більшими за будь яку сталу наперед задану велику величину, тому для кута $\alpha_2 = 180°$ покладають:

$$ctg\ 180^0 = -\infty$$
$$csc\ 180^0 = +\infty$$

Якщо кут α_3 (III-го квадр.) зменшується до 180°, то лінії котангенса і косеканса (рис. 5 с), залишаючись перша додатною, а друга від'ємною, ростуть по абсолютному розміру і при тому так, що ці розміри можуть стати і при дальшому зменшенні кута α_3 до 180° залишитися більшими за будь-яку сталу наперед задану велику величину, тому для кута $\alpha_3 = 180°$, покладають:

$$ctg\ 180^0 = +\infty$$
$$csc\ 180^0 = -\infty$$

Лінія котангенса для кута $\alpha_3 = 270^\circ$ є рівна 0, а косеканса — 1; тому для кута $\alpha_3 = 270^\circ$ покладають:

$$\text{ctg } 270^0 = 0$$
$$\text{csc } 270^0 = -1$$

Коли ж кут α_3 збільшується до 270° (див. рис. 5 с), то лінії тангенса і секанса,

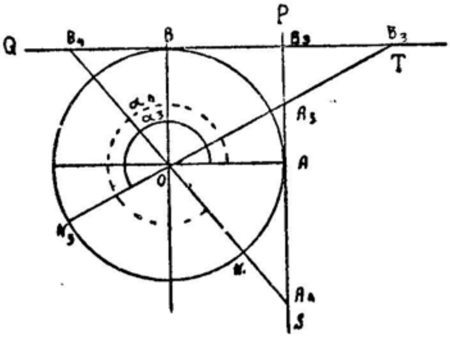


Рис. 5 с.

залишаючись перша додатною, а друга від'ємною, ростуть по абсолютному розміру і при тому так, що ці розміри можуть стати і при дальшому збільшенні кута α_3 до 270° залишитися більшими за-будь-яку сталу наперед задану велику величину; тому для кутів $\alpha_3 = 270^\circ$ покладають:

$$\text{tg } 270^0 = +\infty$$
$$\text{sc } 270^0 = -\infty$$

Якщо кут α_4 (IV-го квадр.) зменшується до 270° (див. рис. 5 с), то лінії тангенса і секанса, залишаючись перша від'ємною, а друга додатною, ростуть по абсолютному розміру і при тому так, що ці розміри можуть стати і при дальшому зменшенні кута α_4 до 270° залишитися більшими за будь-яку сталу на перед задану велику величину, тому для кута $\alpha_4 = 270^\circ$, покладають:

$$\text{tg } 270^0 = +\infty$$
$$\text{sc } 270^0 = +\infty$$

Для кута $\alpha_4 = 360^\circ$ лінія тангенса рівна 0, а секанса рівна 1, тому покладають:

$$\text{tg } 360^0 = 0$$
$$\text{sc } 360^0 = 1$$

Котангенс кута α_4 при збільшенні кута до 360°, залишаючись від'ємним, весь час по абсолютній величині росте і при тому так, що його абсолютний розмір може стати більшим за всяку наперед задану будь яку велику скінчену величину, тому котангенс кута 360° покладаємо:

$$\text{Ctg } 360^0 = -\infty$$

Косеканс кута α_4 при збільшенні кута до 360°, залишаючись від'ємним по абсолютному розміру весь час росте і при тому так, що його абсолютний розмір може стати більшим за всяку наперед задану будь яку велику скінчену величину, тому косеканс кута 360° покладаємо:

$$\text{CSc } 360^0 = -\infty$$

Запишімо попередні результати у вигляді таблиці:

	I	II	III	IV
кути / велич.	$0^\circ-90^\circ$	$90^\circ-180^\circ$	$180^\circ-270^\circ$	$270^\circ-360^\circ$
sin	$0\to+1$	$+1\to0$	$0\to-1$	$-1\to0$
cos	$+1\to0$	$0\to-1$	$-1\to0$	$0\to+1$
Tg	$0\to+\infty$	$-\infty\to0$	$0\to+\infty$	$-\infty\to0$
Ctg	$+\infty\to0$	$0\to-\infty$	$+\infty\to0$	$0\to-\infty$
Sc	$+1\to+\infty$	$-\infty\to-1$	$-1\to-\infty$	$+\infty\to+1$
Csc	$+\infty\to+1$	$+1\to+\infty$	$-\infty\to-1$	$-1\to-\infty$

§ 8. Формули зведення до першого квадранта.

П. 1. Розміри тригонометричних величин тупих кутів можемо визначити за допомогою розмірів тригонометричних величин гострих кутів на підставі таких залежностей:

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{aligned}
\sin\ (180^0 - \alpha) &= \sin\alpha\\
\sin\ (180^0 + \alpha) &= -\sin\alpha\\
\sin\ (360^0 - \alpha) &= -\sin\alpha\\[4pt]
\csc\ (180^0 - \alpha) &= \csc\alpha\\
\csc\ (180^0 + \alpha) &= -\csc\alpha\\
\csc\ (360^0 - \alpha) &= -\csc\alpha\\[4pt]
\cos\ (180^0 - \alpha) &= -\cos\alpha\\
\cos\ (180^0 + \alpha) &= -\cos\alpha\\
\cos\ (360^0 - \alpha) &= \cos\alpha\\[4pt]
\mathrm{sc}\ (180^0 - a) &= -\mathrm{sc}\,\alpha\\
\mathrm{sc}\ (180^0 + \alpha) &= -\mathrm{sc}\,\alpha\\
\mathrm{sc}\ (360^0 - \alpha) &= \mathrm{sc}\,\alpha\\[4pt]
\mathrm{tg}\ (180^0 - \alpha) &= -\mathrm{tg}\,\alpha\\
\mathrm{tg}\ (180^0 + \alpha) &= \mathrm{tg}\,\alpha\\
\mathrm{tg}\ (360^0 - \alpha) &= -\mathrm{tg}\,\alpha\\[4pt]
\mathrm{ctg}\ (180^0 - \alpha) &= -\mathrm{ctg}\,\alpha\\
\mathrm{ctg}\ (180^0 + \alpha) &= \mathrm{ctg}\,\alpha\\
\mathrm{ctg}\ (360^0 - \alpha) &= -\mathrm{ctg}\,\alpha
\end{aligned}
$$

Отже, тригонометрична величина кутів $(180^\circ - \alpha)$, $(180^\circ + \alpha)$, $(360^\circ - \alpha)$, дорівнює тригонометричній величині кута α тої ж назви і без переміни знака, якщо ця тригонометрична величина є додатня, і з протилежним знаком в противнім випадкові.

Кут α для кутів II-го квадранту є доповнена до 180°, для кутів III-го квадранту перевишка по над 180°, а для кутів IV-го квадранту — доповнення до 360°.

Так, тригонометричні величини для кутів 150°, 220° і 340° визначається з відповідних кутів:

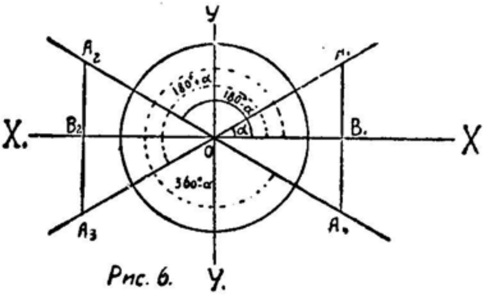


Рис. 6.

$$30^\circ,\ 40^\circ,\ 20^\circ;$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sin}\ 150^0 &= \sin\ (180^0 - 150^0) = \mathrm{Sin}\ 30^0\\
\mathrm{Csc}\ 150^0 &= \csc\ (180^0 - 30^0) = \mathrm{Csc}\ 30^0\\
\mathrm{Cos}\ 150^0 &= \cos\ (180^0 - 30^0) = -\mathrm{Cos}\ 30^0\\[4pt]
\mathrm{Sc}\ 150^0 &= \mathrm{Sc}\ (180^0 - 30^0) = -\mathrm{Sc}\ 30^0\\
\mathrm{tg}\ 150^0 &= \mathrm{tg}\ (180^0 - 30^0) = -\mathrm{tg}\ 30^0\\
\mathrm{Ctg}\ 150^0 &= \mathrm{Ctg}\ (180^0 - 30^0) = -\mathrm{Ctg}\ 30^0\\[4pt]
\mathrm{Sin}\ 220^0 &= \mathrm{Sin}\ (180^0 + 40^0) = -\mathrm{Sin}\ 40^0\\
\mathrm{Csc}\ 220^0 &= \mathrm{Csc}\ (180^0 + 40^0) = -\mathrm{Csc}\ 40^0\\
\mathrm{Cos}\ 220^0 &= \mathrm{Cos}\ (180^0 + 40^0) = -\mathrm{Cos}\ 40^0\\
\mathrm{Sc}\ 220^0 &= \mathrm{Sc}\ (180^0 + 40^0) = -\mathrm{Sc}\ 40^0\\
\mathrm{tg}\ 220^0 &= \mathrm{tg}\ (180^0 + 40^0) = -\mathrm{tg}\ 40^0\\
\mathrm{Ctg}\ 220^0 &= \mathrm{Ctg}\ (180^0 + 40^0) = -\mathrm{Ctg}\ 40^0\\[4pt]
\mathrm{Sin}\ 340^0 &= \mathrm{Sin}\ (360^0 - 20^0) = -\mathrm{Sin}\ 20^0\\
\mathrm{Csc}\ 340^0 &= \mathrm{Csc}\ (360^0 - 20^0) = -\mathrm{Csc}\ 20^0\\
\mathrm{Cos}\ 340^0 &= \mathrm{Cos}\ (360^0 - 20^0) = \mathrm{Cos}\ 20^0\\
\mathrm{Sc}\ 340^0 &= \mathrm{Sc}\ (360^0 - 20^0) = \mathrm{Sc}\ 20^0\\
\mathrm{tg}\ 340^0 &= \mathrm{tg}\ (360^0 - 20^0) = -\mathrm{tg}\ 20^0\\
\mathrm{Ctg}\ 340^0 &= \mathrm{Ctg}\ (360^0 - 20^0) = -\mathrm{Ctg}\ 20^0
\end{aligned}
$$

Як висновок з залежності (I.) маємо:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sin}(90^\circ+\beta) &= \mathrm{Sin}[180^\circ-(90^\circ-\beta)] = \mathrm{Sin}(90^\circ-\beta) = \mathrm{Cos}\,\beta\\
\mathrm{Sin}(270^\circ-\beta) &= \mathrm{Sin}[180^\circ+(90^\circ-\beta)] = -\mathrm{Sin}(90^\circ-\beta) = -\mathrm{Cos}\,\beta\\
\mathrm{Sin}(270^\circ+\beta) &= \mathrm{Sin}[360^\circ-(90^\circ-\beta)] = -\mathrm{Sin}(90^\circ-\beta) = -\mathrm{Cos}\,\beta\\[6pt]
\mathrm{Csc}(90^\circ+\beta) &= \mathrm{Csc}[180^\circ-(90^\circ-\beta)] = \mathrm{Csc}(90^\circ-\beta) = \mathrm{Sc}\,\beta\\
\mathrm{Csc}(270^\circ-\beta) &= \mathrm{Csc}[180^\circ+(90^\circ-\beta)] = -\mathrm{Csc}(90^\circ-\beta) = -\mathrm{Sc}\,\beta\\
\mathrm{Csc}(270^\circ+\beta) &= \mathrm{Csc}[360^\circ-(90^\circ-\beta)] = -\mathrm{Csc}(90^\circ-\beta) = -\mathrm{Sc}\,\beta
\end{aligned}
$$

$$\cos(90^\circ+\beta) = \cos[180^\circ-(90^\circ-\beta)] = -\cos(90^\circ-\beta) = -\sin\beta$$
$$\cos(270^\circ-\beta) = \cos[180^\circ+(90^\circ-\beta)] = -\cos(90^\circ-\beta) = -\sin\beta$$
$$\cos(270^\circ+\beta) = \cos[360^\circ-(90^\circ-\beta)] = \cos(90^\circ-\beta) = \sin\beta$$

$$Sc(90^\circ+\beta) = Sc[180^\circ-(90^\circ-\beta)] = -Sc(90^\circ-\beta) = -\cos\beta$$
$$Sc(270^\circ-\beta) = Sc[180^\circ+(90^\circ-\beta)] = -Sc(90^\circ-\beta) = -\cos\beta$$
(I') $$Sc(270^\circ+\beta) = Sc[360^\circ-(90^\circ-\beta)] = Sc(90^\circ-\beta) = \cos\beta$$

$$tg(90^\circ+\beta) = tg[180^\circ-(90^\circ-\beta)] = -tg(90^\circ-\beta) = -Ctg\beta$$
$$tg(270^\circ-\beta) = tg[180^\circ+(90^\circ-\beta)] = tg(90^\circ-\beta) = Ctg\beta$$
$$tg(270^\circ+\beta) = tg[360^\circ-(90^\circ-\beta)] = -tg(90^\circ-\beta) = -Ctg\beta$$

$$Ctg(90^\circ+\beta) = Ctg[180^\circ-(90^\circ-\beta)] = -Ctg(90^\circ-\beta) = -tg\beta$$
$$Ctg(270^\circ-\beta) = Ctg[180^\circ+(90^\circ-\beta)] = Ctg(90^\circ-\beta) = tg\beta$$
$$Ctg(270^\circ+\beta) = Ctg[360^\circ-(90^\circ-\beta)] = -Ctg(90^\circ-\beta) = -tg\beta$$

Отже, тригонометрична величина кутів $(90^\circ+\beta)$, $(270^\circ-\beta)$, $(270^\circ+\beta)$ дорівнює тригонометричній величині кута β але іншої назви (синус — косинусу, косинус — синусу, тангенс — котангенсові, котангенс — тангенсові, секанс — косекансові) і без переміни знака, якщо ця тригонометрична величина для даного кута є додатня і із переміною знака в противнім випадкові.

З залежности (I') користаються в тім випадкові, коли кути в залежностях (I') є більші за 45°.

Так, наприклад, коли тригонометричну величину для кута 110° вираховувати за схемою (I) тоді кут α буде дорівнювати 70°.

$$110^0 - 180^0 = 70^0$$

Кут же β буде дорівнювати 20°.

$$110^0 - 90^0 = 20^0$$

В цім випадкові користаються із залежностей (I')

$$\sin 110^0 = \sin(90^0+20) = \cos 20^0$$
$$Csc\ 110^0 = Csc(90^0+20) = Sc\ 20^0$$
$$\cos 110^0 = \cos(90^0+20) = -\sin 20^0$$
$$Sc\ 110^0 = Sc(90^0+20) = -Csc\ 20^0$$
$$tg\ 110^0 = tg(90^0+20) = -Ctg\ 20^0$$
$$Ctg\ 110^0 = Ctg(90^0+20) = -tg\ 20^0$$

Отже тригонометричну функцію тупого кута можна визначити за допомогою тригонометричної функції гострого кута $\alpha < 45^\circ$.

Тому, для розв'язання задач достатньо уложити таблицю тригонометричних величин у межах 0 — 45°.

П. 2. Обчислення тригонометричних величин для кутів більших від 360°.

Якщо кут γ є більший від 360°, тоді ми записуємо його у вигляді:

$$\gamma = K\ 360^0 + \alpha;$$

де K є ціле додатне число, а α кут менший від 360^0.

Тому, що тригонометрична величина кута α не змінить свого розміру, якщо ми α збільшимо на кут рівний:

K. 360^0 (K — ціле додатне числю),

то розміри тригонометричних величин кута γ можемо вирахувати користаючись з кута α.

Дійсно:

$$\sin(K.360^\circ + \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(K.360^\circ + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\text{(II)}\quad tg(K.360^\circ + \alpha) = tg\,\alpha$$
$$ctg(K.360^\circ + \alpha) = ctg\,\alpha$$
$$sc(K.360^\circ + \alpha) = sc\,\alpha$$
$$csc(K.360^\circ + \alpha) = csc\,\alpha$$

Число 360^0, а також K. 360^0 звуть періодом, а тригонометричні функції звуть періодичними функціями.

В тім випадкові коли кут α є тупий для обчислювання тригонометричних величин кута α заміняємо α на підставі залежностей I, або I на гострий кут.

Так, наприклад, величину синуса кута 1190° обчислимо з кута 20°, бо

$$\text{Sin } 1190^0 = \text{Sin } (3 \times 360^0 + 110^0) = $$
$$= \text{Sin } 110^0 = \text{Cos } 20$$

Синус кута 1250° буде рівний косинусови кута 20°.

Дійсно,

$$\text{Sin } 1250^0 = \text{Sin } (3 \times 360^0 + 70^0) =$$
$$= \text{Sin } 70^0 = \text{Cos } 20^0$$

Вправи. Визначити такі тригонометричні величини кута більшого за 90° через відповідні тригонометричні величини гострого кута.

Sin 1290^0, Sin 1190^0, Sin 207^0, Sin 219^0, Sin 959^0, Sin 302^0;

Sin 329^0, Sin 2047^0, Sin 4069^0; Sin 8743^0;

Cos 109^0, Cos 208^0, Cos 301^0, Cos 3140^0, Cos 5421^0;

tg 104^0, tg 210^0, tg 305^0, tg 7290^0, tg 3415^0,

Ctg 107^0, Ctg 201^0, Ctg 310^0, Ctg 317^0, Ctg 415^0, Ctg 790^0;

Ctg 3141^0,

Sc 105^0, Sc 205^0, Sc 307^0, Sc 8145^0, Sc 9720^0;

Csc 105^0, Csc 215^0, Csc319^0, Csc 81 20^0, Csc 7119^0,

tg 570^0, Ctg 920^0. Sc 840^0, Sin 619^0; Cos 804^0, Csc 745^0;

§ 9. Тригонометричні величини від'ємних кутів.

Поперелу ми розглянули лише кути, що утворювалися від руху рамена OA (рис. 6) в напряму протилежному до руху годинної стрілки; назвім їх додатними кутами. А кути, що утворюються від руху рамена OA за рухом годинної стрілки назвім від'ємними кутами. Тоді, як легко бачити з рис. 7, синуси двох рівних, щодо абсолютного размiру кутів, з яких один від'ємний, а другий додатній, є рівні розміром, але протилежні знаками, а косинуси їх тотожні; себто:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin[-(180^\circ - \alpha)] = -\sin(180^\circ - \alpha)$$
$$csc(-\alpha) = -csc\,\alpha$$
$$csc[-(180^\circ - \alpha)] = -csc(180^\circ - \alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos[-(180^\circ - \alpha)] = \cos(180^\circ - \alpha)$$
$$sc(-\alpha) = sc\,\alpha$$
$$sc[-(180^\circ - \alpha)] = sc(180^\circ - \alpha)$$

Для тангеса і котангеса на підставі попередніх залежностей дістанемо:

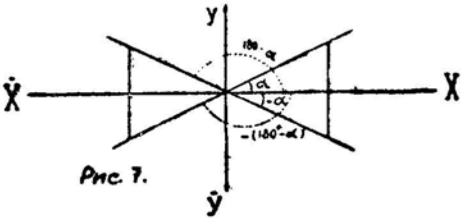


Рис. 7.

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}[-(180^\circ-\alpha)] = -\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}[-(180^\circ-\alpha)] = -\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)$$

Себто, від зміни знаків кута значення косинуса і секанса не змінюється, а значення решти тригонометричних величин змінюють лише свої знаки на протилежні.

Тому, що тригонометрична величина кута α (як додатнього так і від'емного) не змінить свого розміру, коли до нього додати кут

$$K.\ 360^\circ,$$

де K довільне, ціле число як додатне так і від'емне, то в залежностях (II) (ст. 22) для цілого числа K можна крім додатних значінь покладати також і від'емні значіння.

Так, наприклад, у виразі:

$$\sin(K\ 360^0 + \alpha) = \sin\alpha$$

для K можна покласти.

$$K = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots \text{ і т. д.}$$
$$K = -1; -2; -3; -4;\ .\ \text{і т. д.}$$

бо:

$$\sin\alpha = \sin(360^0+\alpha) = \sin(720^0+\alpha) = $$
$$= \sin(1080^0+\alpha) = \ldots$$
$$\sin\alpha = \sin(-360^0+\alpha) =$$
$$= \sin(-720^0+\alpha) = \sin(-1080^0+\alpha)\ldots$$

Себто у виразі періода тригонометричних функцій

$$K.\ 360^\circ.$$

Ціле число K може приймати також і безліч від'емних значінь.

§ 10. Радіяльні міри кута.

У попередніх розділах ми вживали градусної міри кута, а саме, за одиницю міри кута приймають осередковий кут, що спирається на дугу рівну радіюсові кола. Такий кут звуть **радіяном**.

Очевидно, повне коло має $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$, а пів кола — π радіянів, чверть кола $\frac{\pi}{2}$ радіянів, а восьма частина кола $\frac{\pi}{4}$ радіянів.

Дуже легко можна переводити градусні міри кута в радіяльні. Справді, коли градусна міра кута є α тоді його радіяльна міра визначиться з такої пропорції:

$$360^0 \ldots\ldots 2\pi$$
$$\underline{\alpha \ldots\ldots\ldots x?} \quad x = \frac{2\pi\alpha}{360^0} = \frac{\pi}{180^0}\alpha.$$

Запишім у вигляді таблиці радіяльні міри кутів, яких часто вживаемо в задачах.

Градусна міра кута	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Радіальна міра кута	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

Для переводу радіальної міри кута в градусну треба знати градусну міру радіяна, що визначимо з такої пропорції:

$$\frac{360^0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 2\pi}{x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1}$$

з точністю до одної секунди.

$$x = \frac{360^0}{2\pi} = 57^0\,17'\,44''$$

Вправа. Визначити радіяльну міру кутів 20°, 35°, 50°, 60°, 110°, 125°, 210°, 305°.

Визначити градусну міру радіяльних кутів:

$$\frac{\pi}{4};\quad \frac{\pi}{6};\quad \frac{\pi}{3};\quad \frac{\pi}{12};\quad \frac{\pi}{5};$$

На підставі попереднього можна скласти таку табличку тригонометричних величин для кутів:

Градусна міра кута	Радіяльна міра кута	$\sin\alpha$	$\csc\alpha$	$\cos\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0°	0	0	$\pm\infty$	1	1	0	$\pm\infty$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	1	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	-1	-1
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	$\pm\infty$	-1	-1	0	$\pm\infty$
210°	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
225°	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	1	1
240°	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{3}$	-2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	-1	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
300°	$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	2	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
315°	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	-1	-1
330°	$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
360°	2π	0	$\pm\infty$	1	1	0	$\pm\infty$

§ 11. Залежність між боками і тригонометричними величинами кутів у всяких трикутниках та формули площі трикутника.

У всякому трикутнику відношення боків дорівнює відношенню синусів протилежних їм кутів.

Справді (з рис. 8), маємо:

$$h = b \,.\, \sin\alpha$$
$$h = a \,.\, \sin\beta$$

звідки

$$a \,.\, \sin\beta = b \,.\, \sin\alpha$$

або

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

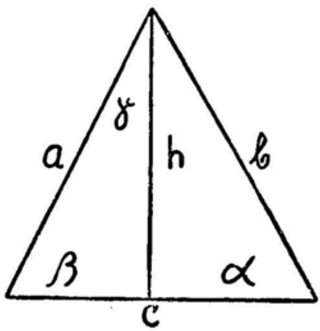


Рис. 8.

Так само знайдемо, що

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Площа всякого трикутника дорівнює пів добуткові з двох його боків на синус кута між ними.

Дійсно, S — площа трикутника (див. рис. 8) дорівнює

$$S = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$h = b \cdot \sin\alpha$$
$$h = a \cdot \sin\beta$$

Отже,

$$S = \frac{c \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$$

$$S = \frac{c \cdot a \cdot \sin\beta}{2}$$

Такою самою дорогою одержимо, що:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$

Квадрат боку трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших боків без подвоєного добутку тих самих боків на косинус кута між ними.

Дійсно (рис. 9),

$$h^2 = a^2 - x^2,$$

а також

$$h^2 = b^2 - (c - x)^2,$$

звідки

$$b^2 - (c - x)^2 = a^2 - x^2$$

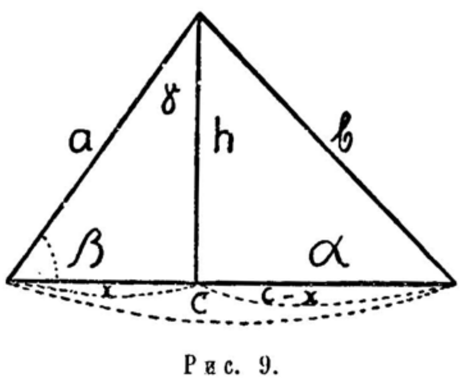


Рис. 9.

Спрощуючи останнє рівняння, знаходимо:

$$b^2 = a^2 - x^2 + (c - x)^2 = a^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Через те, що $x = a, \cos\beta$, останнє рівняння перепишеться:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac. \cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ми розглянули випадок, коли протилежний бокові кут гострий. Розгляньмо другий випадок, коли цей кут тупий.

З рисунка 10 маємо:

$$h^2 = b^2 - (a - x)^2,$$

а також

$$h^2 = c^2 - x^2,$$

звідки

$$b^2 - (a + x)^2 = c^2 - x^2.$$

Спрощуючи останнє рівняння, знаходимо:

$$b^2 = c^2 - x^2 + (a + x)^2 = c^2 - x^2 + a^2 + 2ax + x^2$$

$$b^2 = c^2 + a^2 + 2ax \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

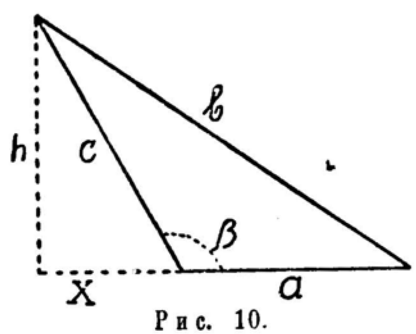


Рис. 10.

Через те, що x дорівнює:

$$x = c. \cos(180^0 - \beta) = - c, \cos\beta,$$

маємо:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac. \cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Отже, ми довели справедливість попереднього твердження для обох випадків.

З формул (2) і (4) виходить:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Себто, косинус даного кута дорівнює дробові, де чисельник є сума квадратів боків, що утворюють цей кут, мінус квадрат протилежного боку, а знаменник — подвоєний добуток боків, що утворюють даний кут. Останню формулу використовуємо тоді, коли відомі боки трикутника і потрібно визначити розміри кутів, а також і в інших задачах.

Площа S трикутника в залежності від його боків дорівнює:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

де через p означено половину периметра, а через a, b і c боки трикутника.

Справді (рис. 11), площа S трикутника дорівнює:

$$S = \frac{c\,.\,h}{2}.$$

Визначимо h у залежності від боків трикутника:

$$h^2 = a^2 - x^2 = (a + x)\;(a - x),$$

x з формули (1) § 11 дорівнює:

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c};$$

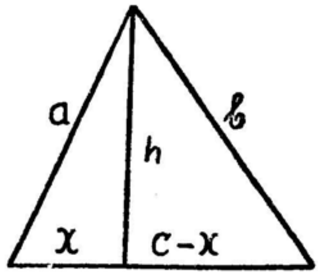


Рис. 11. c

підставивши його значення в попереднє рівнання, дістанемо:

$$h^2 = \left(a + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right) \cdot \left(a - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)$$

$$h^2 = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2c} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2c}\;;\; h^2 = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2c} \cdot \frac{b^2 - (a-c)^2}{2c}$$

$$h^2 = \frac{(a + c + b)\;(a + c - b)\;(b + a - c)\;(b - a + c)}{4c^2}$$

Означивши $a + b + c$ через 2 p, будемо мати:

$$\begin{aligned}
&a + c + b = 2p\\
&a + c - b = a + c + b - 2b = 2p - 2b = 2\,(p - b)\\
&b + a - c = b + a + c - 2c = 2p - 2c = 2\,(p - c)\\
&b - a + c = b + a + c - 2a = 2p - 2a = 2\,(p - a),
\end{aligned}$$

а h^2 буде дорівнювати:

$$h^2 = \frac{16p\;(p - a)\;(p - b)\;(p - c)}{4c^2}$$

$$h = \frac{2\sqrt{p\,(p - a)\;(p - b)\;(p - c)}}{c}$$

А формула площі S трикутника перепишеться:

$$S = \frac{c\,.\,h}{2} = \frac{c}{2}\,\frac{2}{c}\sqrt{p\,(p - a)\;(p - b)\;(p - c)},$$

або

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.)$$

Себто площа трикутника дорівнює кореневі квадратовому з добутку півпериметра трикутника на півпериметр без першого боку, на півпериметр без другого боку і на півпериметр без третього боку.

Попередня формула (5) справедлива для всіх трикутників.

Задача. Боки трикутника a, b і c відповідно дорівнюють 30, 40, 50 m. Визначити площу трикутника.

$$p = \frac{30 + 40 + 50}{2} = 60$$

$$S = \sqrt{60\,(60-30)\,(60-40)\,(60-50)} = \\ = \sqrt{60.30.20.10} = \sqrt{360000} = 600\,m^2.$$

§ 12. Розв'язування задач косокутнього трикутника.

Задача. 1. У трикутнику (рис. 12) основа c дорівнює 100 m, кути при основі α і β відповідно дорівнюють: $\alpha = 80°$, і $\beta = 70°$.

Обчислити третій кут трикутника — γ, инші два боки a і b і площу S трикутника.

Кут $\gamma = 180° - 70° - 80° = 30°$.

Розмір a визначаємо з відношення:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin 80°}{\sin 30°}.$$

звідки

$$a = c \,.\, \frac{\sin 80°}{\sin 30°} = 100 \,.\, \frac{0{,}98}{0{,}5} = 196\ m.$$

Розмір b визначуємо з відношення:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin 70°}{\sin 30°},$$

звідки

$$b = c \,.\, \frac{\sin 70°}{\sin 30°} = 100 \,.\, \frac{0{,}94}{0{,}5} = 188\ m.$$

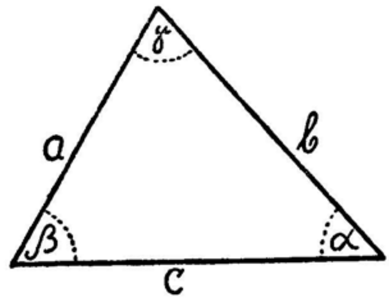


Рис. 12.

Площа S дорівнює:

$$S = \frac{a \,.\, c \,.\, \sin\beta}{2} = \frac{196.100.0{,}94}{2} = \\ = 9212\ m^2.$$

Задача 2. У трикутнику (13 рис.), a дорівнює 50 m, b = 25 m, кут β рівняється 30°. Визначити розміри решти величин.

Розмір кута α визначимо з відношення:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 30°} = \frac{50}{25} = 2$$

Звідки

$$\sin\alpha = 2 \,.\, \sin 30° = 2\,\frac{1}{2} = 1.$$

$$\alpha = 90°;$$
$$\gamma = 180° - 90° - 30° = 60°.$$

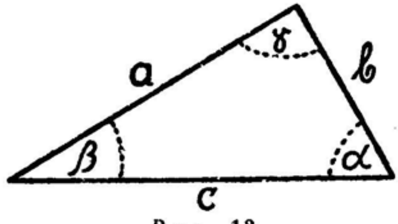


Рис. 13.

Розмір основи c визначимо з відпошення:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha};$$

$$\frac{c}{50} = \frac{\sin 60^0}{\sin 90^0} = \frac{0,87}{1};$$

$$c = \frac{50 \,.\, 0,87}{1} = 43,5\,m$$

$$S = \frac{a\,.\,c\,.\,\sin\beta}{2} = \frac{50\,.\,43,5}{2}\cdot\frac{1}{2} = 543,75 m^2$$

Задача 3. У трикутнику (рис. 14) боки a, b і c, відповідно дорівнюють 20 м, 30 м і 40 м, обчислити кути трикутника α, β і γ.

З формули (2) $\cos\alpha$ запишеться:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Підставивши розміри величин a, b і c дістанемо:

$$\cos\alpha = \frac{30^2 + 40^2 - 20^2}{2\,.\,30\,.\,40} = \frac{21}{24} = 0,87$$

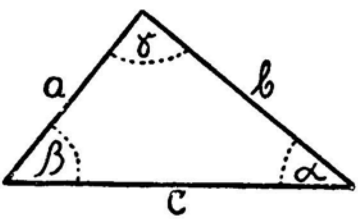


Рис. 14.

З розміру косинуса кута α знайдемо з таблички натуральних тригонометричних величин кут α.

Кут $\alpha = 30^\circ$.

У такий спосіб можна знайти величину і решти кутів трикутника.

Задача 4. У трикутнику (рис. 15) боки a і c відповідно дорівнюють 50 м і 100 м, а кут між ними β дорівнює 60°, обчислити решту величин.

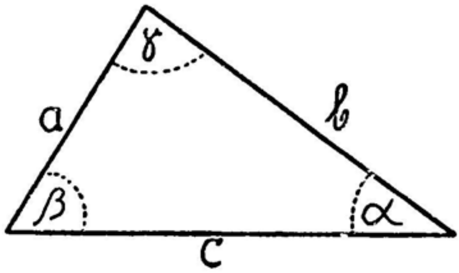


Рис. 15.

За формулою (2) § 11

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$

$$b^2 = 50^2 + 100^2 - 2.50.100.\frac{1}{2} = 7500$$

$b = 87$ з точністю до одного м.

Розмір кута визначимо з такого відношення:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 60^0} = \frac{50}{87}$$

$$\sin\alpha = \frac{50}{87}\sin 60^0 = \frac{50}{87}\cdot 0,87 = \frac{1}{2}$$

Себто, кут $\alpha = 30^\circ$.

Тоді кут $\gamma = 90^\circ$.

§ 13. Таблиці натуральних тригонометричних величин і логаритми в задачах тригонометрії.

У попередніх задачах розміри тригонометричних величин синуса і косинуса, а також розміри невідомих кутів на підставі розміру цих величин визначалися з таблиці натуральних тригонометричних величин, що ми її склали з рис. III. (§ 4) для кутів 0°, 5°, 10°, 15°, ... 45° . . . . 90°.

Ця табличка нас задовольняла тому, що складені задачі були пов'язані з розмірами кутів, визначених у цій таблиці. Коли б ми брали кути в таблиці не визначені, то розв'язання задач було б не можливе.

Тому існують інші таблиці натуральних тригонометричних величин для кутів, що різняться між собою на 30' (див. льогаритмічні таблиці Пржевальського), на 1' (таблиці Вега) то що. Ці таблиці складено не з рисунка, а іншими способами, що докладно будуть з'ясовані в наступних частинах курсу.

На підставі цих таблиць можна визначити з розмірів кутів розміри тригонометричних величин, і навпаки — з розмірів тригонометричних величин визначити розміри кутів, при чому з далеко більшою точністю, порівнюючи з таблицею натуральних тригонометричних величин, складеною на підставі рисунка.

У розглянених задачах розміри невідомих боків і кутів трикутника визначали на підставі відомих розмірів не через побудування трикутника, себто не графічним способом, як це роблять у геометрії, а на підставі залежностей між боками і тригонометричними величинами відповідних кутів.

Отже, їх точність залежала лише від точности тої таблиці тригонометричних величин, що нею користалися, і не пов'язана була з рисунком трикутника.

Тому, що можна скласти таблицю натуральних тригонометричних величин, з якою хочемо точністю, то невідомі елементи трикутника на підставі відомих можна визначити з довільною точністю, чого не можна досягти з рисунка. В цьому перевага тригонометричного способу розв'язування трикутника, перед геометричним способом.

Задачі трикутника можна розв'язувати за допомогою таблиці логаритмів чисел і таблиці логаритмів тригонометричних величин, таким чином обходячись без таблиці натуральних тригонометричних величин.

Справді, визначаючи розмір катета b (див. зад. 1 в § 6), можна спочатку визначити його логаритм

$$b = a. \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\lg b = \lg a + \lg \operatorname{ctg} \alpha,$$

а опісля з розміру логаритму b за допомогою таблиці логаритмів чисел визначити величину b.

Так само, щоб визначити гострий кут α (див. задачу 3 в 5 §) спочатку визначимо логаритм $\sin \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = 0,5$$

$$\lg \sin \alpha = \lg 0,5$$

а після з розміру логаритму $\sin \alpha$ за допомогою таблиці логаритмів тригонометричних величин визначимо величину кута α.

§ 14. Таблиці логаритмів тригонометричних величин.

Розв'язуючи задачі, крім таблиці натуральних тригонометричних величин, користаються також тоблицями логаритмів тригонометричних величин. Це з'ясовується тим, що складніші дії заміняються простішими (множення — додаванням, ділення — відійманням, ступенювання — множенням, коренювання — діленням).

Будова логаритмічних таблиць тригонометричних величин аналогічна з будовою логаритмічних таблиць цілих чисел (див. в алгебрі). У 1-ім стовпчику зазначено градусну міру кута через кожні 10 мінут від 0° до 45°; у 2-ім стовпчику з написом lg sin — логаритми синусів; у 3-ім під літерою d — різниці логаритмів синусів наступного та попереднього кута; у 4-ому логаритми тангенса; в 6-му логаритми котангенса, а в 5-ім стовпчику під написом d c (differentia communis — спільна різниця) — їх спільні табличні різниці; в останнім стовпчику зазначено кути, що доповнюють кути 1-го стовпчика до 90°.

У низу, під стовпчиком з написами lgsin lg tg, позначено відповідно lg cos, lg ctg.

Ці написи стосуються до кутів останнього стовпчика; їх позначено так тому, що логаритм синуса даного гострого кута є одночасно і логаритм косинуса кута, який доповнює його до 90°, логаритм тангенса є логаритм котангенса і т. д.

У рубриці під літерами Р. Р. зазначено табличні різниці з визначенням за правилом прямої пропорції, скільки з цієї різниці припадає на одну мінуту, 2' . . . . 9'.

Через те, що синуси і косинуси для всіх кутів, а також тангенси кутів 0° — 45° і котангенси кутів 45° — 90° є менші за одиницю, то їх логаритми від'ємні. Щоб уникнути від'ємних характеристик, їх збільшено на 10. Тангенси кутів 45° — 90° і котангенси кутів 0° — 45° більший за одиницю, логаритми їх додатні і тому вони записані в таблицях без зміни.

Цих таблиць уживають, розв'язуючи два питання: 1) визначення логаритму тригонометричної величини і 2) визначення за даним логаритмом тригонометричної величини.

§ 15. Визначення логаритмів тригонометричної величини.

З а д а ч а 1. Визначити логаритм синуса кута 32° 40' (див. табл. лог.). Логаритм sin 32° 40' дорівнює 9,7323. Зважаючи на те, що логаритм збільшено на 10 віднявши 10, дістанемо:

$$\lg \sin 32^{0}40' = 9{,}7323 - 10 = \bar{1}{,}7323.$$

З а д а ч а 2. Визначити логаритм косинуса кута 72° 20'. Логаритм cos 72° 20' дорівнює 9,4821. Віднявши 10, дістанемо:

$$\lg \cos 27^{0}20' = \bar{1}{,}4821.$$

З а д а ч а 3. Визначити логаритм тангенса кута 15° 10'. Логаритм tg 15° 10' дорівнює 9,4331. Віднявши 10, дістанемо:

$$\lg \operatorname{tg} 15^{0}10' = \bar{1}{,}4331,$$

З а д а ч а 4. Визначити логаритм синуса кута 7° 12'. Знаходимо в таблиці логаритм синуса кута 7° 10', до нього додаємо приріст мантиси, що відповідає 2', узявши його в рубриці Р. Р. у стовпчику під числом 99, що дорівнює табличній різниці кутів 7° 20' і 7° 10'.

Це обчислення логаритму можна записати так:

Кут	lg sin	
7°10'	9,0961,	d = 99, 2' — 19,8
2'	198	

$$\lg \sin 7^{0}\ 12' = 9{,}09808 - 10 = \bar{1}{,}09808.$$

або, залишивши в мантисі чотири знаки:

$$\lg \sin 7^{0}12' = \bar{1}{,}0981$$

§ 16. Визначення тригонометричної величини за даним логаритмом.

З а д а ч а 1. Логаритм синуса кута α дорівнює: $\lg \sin \alpha = \bar{1}{,}1863$, обчислити величину кута α.

Додавши до логаритму синуса α 10 одиниць, зважаючи на те, що в таблицях логаритмів тригонометричних величин від'ємні характеристики збільшено на 10, дістанемо:

$$\bar{1}{,}1863 + 10 = 9{,}1863$$

У стовпчику під написом lg sin шукаємо відповідну величину. Їй відповідає кут 8° 50'.

Отже кут α дорівнює:

$$\alpha = 8^{\circ}\ 50'$$

Задача 2. Логарифм тангенса кута α дорівнює: $\lg tg\,\alpha = \bar{1},7556$. Обчислити величину кута α. Додавши 10, до логарифму тангенса α, знаходимо:

$$\bar{1},7556 + 10 = 9,7556$$

У стовпчику під написом $\lg tg$ шукаємо відповідну величину. Їй відповідає кут $29^\circ 40'$.

Отже, $\alpha = 29^\circ 40'$

Вправи. Обчислити величину кута α, коли відомо, що

$$\lg \cos \alpha = \bar{1},9499$$
$$\lg \sin \alpha = \bar{1},7476$$
$$\lg tg\, \alpha = \bar{1},8533$$
$$\lg ctg\, \alpha = \bar{1},8125$$

Задача 3. Логарифм синуса кута α дорівнює: $\lg \sin \alpha = \bar{1},6912$

Обчислити величину кута α.

Додавши 10 до логарифму синуса кута α, дістанемо:

$$\bar{1},6912 + 10 = 9,6912.$$

Такого точного логарифму в таблиці немає, беремо з таблиці два найближчі логарифми, один з недостачею, другий — з перевишкою:

$$9,6901 - \lg \sin 29^\circ 20'$$
$$9,6923 - \lg \sin 29^\circ 30'$$

Таблична різниця $d = 22$. Різниця між даним логарифмом і найближчим узятим з недостачею, що її зазначимо через d', дорівнює: $d' = 11$.

Знаходимо приріст кута у мінутах, який відповідає приростові мантиси 11, або з пропорції:

$$\begin{array}{cc} 10' & 22 \\ x & 11 \end{array}$$

$$x = \frac{10 \times 11}{22} = 5'$$

або з рубрики Р. Р. числом 22, відшукавши в стовпчику приростів мантиси число 11 або найближче до нього і виписавши з першого стовпчика відповідний приріст кута.

В таблицях логарифмів знаходимо проти 11 приріст кута в 5'.

Отже кут α дорівнює:

$$\alpha = 29^\circ 20' + 5' = 29^\circ 25'$$

Це обчислення можна записати так:

$$\begin{array}{rr} \lg \sin \alpha = & 9,6912 \\ & 9,6901 \\ \hline & d' = 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Кут } 29^\circ 20' \quad d = 22;\ 11 - 5' \\ \qquad\qquad 5' \\ \hline \alpha = 29^\circ 25' \end{array}$$

Задача IV. Логарифм тангенса кута α дорівнює: $\lg tg\,\alpha = 0,2570$

Обчислити величину кута α.

Через те, що логарифм додатний, до нього 10 не додаємо і шукаємо задану величину в стовпчику тангенсів для кутів 45° — 90°.

Такого точного логарифму в таблиці немає, беремо найближчий менший до нього: 0.2562. Йому відповідає кут 61°, менший за відшукуваний.

$$d = 30,\ d' = 8,$$

У рубриці Р. Р. в стовпчику під числом 30 знаходимо приріст кута, що відповідає 8. У стовпчику приростів мантиси нема 8, а є найближче менше до нього 6: йому відповідає 2', узявши різницю між 8 і 6, дістаємо 2, а збільшивши в 10 разів, дістанемо 20. Шукаємо знову в стовпчику приростів мантиси число 20 або найближче до нього, знаходимо 21; йому відповідає 7. Зменшивши в 10 разів дістанемо 0,7' наближений приріст, що відповідатиме 2.

Оже кут α дорівнює

$$\alpha = 61^\circ + 2' + 0,7' = 61^\circ 2,7'$$

Записуємо це обчислення так:

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}2570$$
$$\underline{0{,}2562}$$
$$d' = 8$$
$$\underline{6}$$
$$2$$

$$\text{Кут } 61^0 \; d' = 8$$
$$6 \quad 2'$$
$$2 \quad \underline{0{,}7}$$
$$\alpha = 61^0 \; 2{,}7$$

Задача V. Логарити косинуса кута α дорівнює:

$$\lg \cos \alpha = 9{,}7780$$

Обчислити величину кута α

$$\lg \cos \alpha = 9{,}9780$$
$$\underline{9{,}9778}$$
$$d' = 2$$
$$\text{Кут } 18^0 10', \quad d = 4$$
$$\underline{5'}$$
$$\alpha = 18^0 10' - 5' = 18^0 \, 5'$$

Приріст кута 5' ми відняли тому, що додатньому приростові логаритму косинуса відповідає від'ємний приріст кута (косинус, себто, його логаритм, зростає тоді, коли кут зменшується).

Вправи. З логаритмів тригонометричних величин $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}2845$; $\lg \operatorname{ctg} \alpha = \bar{1}{,}6325$; $\lg \sin \alpha = \bar{1}{,}4924$; $\lg \cos \alpha = \bar{1}{,}2933$ визначіть відповідні їм гострі кути.

$$\beta = 90^0 - 49^0 23{,}8' = 40^0 36{,}2'$$
$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{70,}{\sin 49^0 23{,}8'}$$
$$\lg c = \lg 70 - \lg \sin 49^0 23{,}8'$$

Вправи. Розв'язати прямокутні трикутники за такими даними:

1) катет $a = 40$ м, кут $\alpha = 32^0 \, 10'$;
2) гіпотенуза $c = 60$ м, кут $\beta = 27^0 \, 20'$.

Задача 3. У трикутнику основа

§ 17. Розв'язування прямокутніх і косокутніх трикутників за допомогою логаритмічних таблиць.

Задача 1. Гіпотенуза прямокутнього трикутника $c = 57$ м, кут $\alpha = 34^0 \, 20'$: Визначити катети a, b і кут β.

$$\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 34^0 20' = 55^0 40'$$
$$a = c \cdot \sin \alpha = 57 \cdot \sin 34^0 20'$$
$$\lg a = \lg 57 + \lg \sin 34^0 20'$$
$$\left.\begin{array}{l} \lg \sin 34^0 20' = \bar{1}{,}7513 \\ \lg 57 \qquad\quad = 1{,}7559 \end{array}\right| +$$
$$\lg a = 1{,}5072$$
$$a = 32{,}15$$

$$b = c \cdot \cos \alpha = 57 \cdot \cos 34^0 20'$$
$$\lg b = \lg 57 + \lg \cos 31^0 20'$$
$$\left.\begin{array}{l} \lg \cos 34^0 20 \qquad \bar{1}{,}9169 \\ \lg 57 \qquad\quad = 1{,}7559 \end{array}\right| +$$
$$\lg b = 1{,}6728$$
$$b = 47{,}08$$

Задача 2. $a = 70$, $b = 60$. Визначити α, β і c.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{70}{60} = \frac{7}{6}$$
$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg 7 - \lg 6$$
$$\left.\begin{array}{l} \lg 7 = 0{,}8451 \\ \lg 6 = 0{,}7782 \end{array}\right| -$$
$$\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}0669$$
$$\alpha = 49^0 23{,}8'$$
$$\left.\begin{array}{l} \lg 70 = 1{,}8451 \\ \lg \sin 49^0 23{,}8 = \bar{1}{,}8804 \end{array}\right| -$$
$$\lg c = 1{,}9647$$

$$c = 92{,}2$$

$c = 80$ м, кути при основі дорівнюють: $\alpha = 79^0 \, 40'$ і $\beta = 68^0 \, 22'$.

Обчислити третій кут α і інші два боки a і b.

$$\gamma = 180^0 - 79^0 40' - 68^0 22' = 31^0 58'.$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin 79^0 40'}{\sin 31^0 58'}$$

$$a = \frac{c \cdot \sin 79^0 40'}{\sin 31^0 58'} = \frac{80 \cdot \sin 79^0 40'}{\sin 31^0 58'}$$

$$\lg a = \lg 80 + \lg \sin 79^0 40' - \lg \sin 31^0 58'$$

$$\begin{array}{lll|l}
\lg 80 & = & 1{,}9031 & \\
\lg \sin 79^0 40' & = & \bar{1}{,}9929 & + \\
\lg \sin 31^0 58' & = \bar{1}{,}7238, \text{ арит. доп.} & 10.2762 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\lg a = 12{,}1722 - 10 = 2{,}1722$$

$$a = 148{,}66$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin 68^0 22'}{\sin 31^0 58'}$$

$$b = \frac{c. \sin 68^0 22'}{\sin 31^0 58'} = \frac{80. \sin 68^0 22'}{\sin 31^0 58'}$$

$$\lg b = \lg 80 + \lg \sin 68^0 22' - \lg \sin 31^0 58'.$$

$$\begin{array}{lll|l}
\lg 80 & = & 1{,}9031 & \\
\lg \sin 68^0 22' & = & \bar{1}{,}9683 & + \\
\lg \sin 31'58' & = 1{,}7238, \text{ арит. доп.} & 10.2762 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\lg b = 12{,}1476 - 10 = 2{,}1476$$

$$b = 140{,}47$$

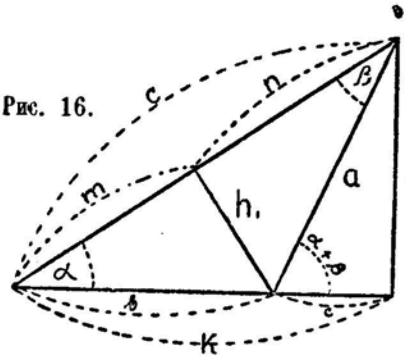
РОЗДІЛ ТРЕТІЙ

§ 18. Тригонометричні величини суми і різниці кутів.

У багатьох задачах потрібно з розмірів тригонометричних величин даних двох кутів визначити розмір тригонометричної величини суми або різниці цих кутів, так, наприклад, з розмірів синуса і косинуса кутів 30° і 45° визначити розмір синуса чи косинуса кута 75° або цих величин для кута 15°.

Щоб мати змогу розв'язувати такого роду задачі, установили залежність між синусом суми і різниці двох кутів α і β та синусом і косинусом цих кутів. Таку саму залежність встановили і для косинуса. До виводу цих залежностей і перейдімо. У трикутнику (рис. 16) з боками a, b, c, продовжмо в правий бік основу і спустім з вершка нормалю на продовження основи. Тоді

Рис. 16.



На рис. 16 в трик. a b c замінити c на d.

кут утворений раменами a і d буде дорівнювати сумі двох кутів трикутника α і β, а синус цього кута буде дорівнювати:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h}{a} \quad \dots\dots\dots 1.$$

Щоб одержати синус і косинус кута β спустім на бік c з протилежного вершка нормалю і означмо її через h_1. Тоді синус і косинус β будуть дорівнювати:

$$\sin\beta = \frac{h_1}{a}$$

$$\cos\beta = \frac{n}{a}$$

а синус і косинус α дорівнюють:

$$\sin\alpha = \frac{h_1}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{m}{b}$$

Щоб установити залежність між синусом суми двох кутів і синусом та косинусом складників, заміняємо h на вираз

$$h = c \,.\, \sin\alpha$$

або

$$h = (n + m) \,.\, \sin\alpha$$
$$n = a \,.\, \cos\beta$$
$$m = h_1 \,.\, \operatorname{ctg}\alpha$$

звідки:

$$h = (a \,.\, \cos\beta + h_1 \,.\, \operatorname{ctg}\alpha)\sin\alpha =$$
$$= a \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\beta + h_1 \,.\, \operatorname{ctg}\alpha \,.\, \sin\alpha =$$
$$= a \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\beta + h_1 \cos\alpha;$$

Підставляючи значення h до формули, (1) дістанемо:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{h}{a}=\frac{a\,.\sin\alpha\,.\cos\beta+h_1\,.\cos\alpha}{a}=\sin\alpha\,.\cos\beta+\frac{h_1\,.\cos\alpha_1}{a}$$

або

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\,.\cos\beta+\sin\beta\,.\cos\alpha\ \ldots\ldots (2)$$

Себто синус суми двох кутів дорівнює сумі добутків з синуса першого кута на косинус другого та з синуса другого кута на косинус першого. Таким способом установім і залежність між косинусом суми двох кутів і синусом та косинусом складників.

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{d}{a}=\frac{k-b}{a}$$

$$k=(n+m)\,.\cos\alpha$$

$$n=a\,.\cos\beta$$

$$m=b\,.\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{k-b}{a}=\frac{a\cos\alpha\cos\beta+b\,.\cos^2\alpha-b}{a}=$$

$$=\cos\alpha\,.\cos\beta-\frac{b\,.\sin^2\alpha}{a}=\cos\alpha\,.\cos\beta-\frac{h_1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{a},$$

або

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,.\cos\beta-\sin\alpha\,.\sin\beta\ \ldots\ldots (3)$$

Або косинус суми двох кутів дорівнює різниці між добутками з косинусів цих кутів та з синусів цих кутів.

Залежність між синусом і косинусом різниці двох кутів a і β та синусом і косинусом цих кутів одержимо як висновок із залежностей (2), (3).

Тому, що:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cos}(\alpha_1+\beta)&=\mathrm{Sin}[90^0-(\alpha_1+\beta)]=\mathrm{Sin}[(90^0-\alpha_1)-\beta]\\ \mathrm{Sin}(\alpha_1+\beta)&=\mathrm{Cos}[90^0-(\alpha_1+\beta)]=\mathrm{Cos}[(90^0-\alpha_1)-\beta]\end{aligned}\ \ldots (A.)$$

вирази $\mathrm{Sin}[(90^0-\alpha_1)-\beta]$ і $\mathrm{Cos}[(90^0-\alpha_1)-\beta]$ на основі залежностей (2), (3), дорівнюють:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sin}[(90^0-\alpha_1)-\beta]&=\mathrm{Cos}\,\alpha_1\,\mathrm{Cos}\,\beta-\mathrm{Sin}\,\alpha_1\,\mathrm{Sin}\,\beta\\ \mathrm{Cos}[(90^0-\alpha)-\beta]&=\mathrm{Sin}\,\alpha_1\,\mathrm{Cos}\,\beta+\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\alpha_1\end{aligned}\ \ldots (B.)$$

Замінивши в залежностях (В) $\mathrm{Cos}\,\alpha_1$ і $\mathrm{Sin}\,\alpha_1$ відповідно через $\mathrm{Sin}(90^0-\alpha_1)$ і $\mathrm{Cos}(90^0-\alpha_1)$ одержимо:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sin}[(90^0-\alpha_1)-\beta]&=\mathrm{Sin}(90^0-\alpha_1)\,\mathrm{Cos}\,\beta-\mathrm{Cos}(90^0-\alpha_1)\,\mathrm{Sin}\,\beta\\ \mathrm{Cos}[(90^0-\alpha_1)-\beta]&=\mathrm{Cos}(90^0-\alpha_1)\,\mathrm{Cos}\,\beta+\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}(90^0-\alpha)\end{aligned}\ (C.)$$

Нарешті означивши $(90-\alpha_1)$ через α — виразам (С) можна надати вигляду:

$$\mathrm{Sin}(\alpha-\beta)=\mathrm{Sin}\,\alpha\,.\,\mathrm{Cos}\,\beta-\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\alpha\ \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)=\mathrm{Cos}\,\alpha\ \ \mathrm{Cos}\,\beta+\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\alpha\ \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Себто синус різниці двох кутів дорівнює різниці двох добутків з синуса першого кута на косинус другого та синуса другого кута на косинус першого, а косинус різниці двох кутів дорівнює сумі двох добутків — з косинуса першого кута на косинус другого та з синуса першого кута на синус другого.

Ці залежности є справедливі для довільних кутів α і β. Залежність між тангенсом суми і різниці двох кутів та тангенсом цих кутів можна установити на підставі формул (2), (3), (4) і (5).

Справді,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha \, . \cos\beta+\sin\beta \, . \cos\alpha}{\cos\alpha \, . \cos\beta-\sin\alpha \, . \sin\beta}$$

Поділивши чисельник і знаменник дробу на добуток $\cos\alpha \cos\beta$ дістанемо:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha \, . \operatorname{tg}\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

так само знайдемо: $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha \, . \operatorname{tg}\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Отже, тангенс суми двох кутів дорівнює сумі тангенсів цих кутів, поділений на різницю між одиницею і добутком з тангенсів цих кутів; а тангенс різниці двох кутів дорівнює різниці тангенсів цих кутів, поділений па суму одиниці та добутку з тангенсів цих кутів.

§ 19. Тригонометричні величини подвійного та половинного кута.

Коли у формулах,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha \, . \cos\beta+\sin\beta \, . \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha \, . \cos\beta-\sin\alpha \, . \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha \, . \operatorname{tg}\beta}$$

$<\alpha$ дорівнює $<\beta$, то вони перепишуться:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha \, . \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

коли у формулі

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

замінимо $\cos^2\alpha$ на $1-\sin^2\alpha$, то вона перепишеться:

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,$$

А коли замінемо $\sin^2\alpha$ на $1-\cos^2\alpha$, то дістанемо:

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

з обох останніх рівнань виходить, що

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

А через те, що α є половина кута 2α, останні формули встановили залежність між косинусом даного кута та синусом і косинусом половинного кута.

Поклавши, що $2\alpha=z$, а $\alpha=\frac{z}{2}$ останню формулу перепишемо:

$$\sin\frac{z}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos z}{2}}$$

$$\cos\frac{z}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos z}{2}}$$

Отже, синус половинного кута дорівнює плюс-мінус корінь квадратовий з піврізниці між одиницею і косинусом цілого кута; а косинус половинного кута дорівнює плюс — мінус корінь квадратовий з півсуми одиниці і косинуса цілого кута.

Як легко бачити $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$ дорівнює:

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos z}{1+\cos z}},$$

а $\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$ дорівнює:

$$\operatorname{ctg}\frac{z}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos z}{1-\cos z}},$$

або тангенс половинного кута дорівнює плюс — мінус корінь квадратовий з різниці між одиницею і косинусом цілого кута, поділеної на суму одиниці і косинуса цілого кута, а вираз $\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$ є обернений виразові $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$.

§ 20. Перетворення формул до вигляду зручного для логаритмування.

В теорії логаритмів не визначено правила логаритмування суми та різниці величин, тому суму або різницю перетворюють до вигляду зручного для логаритмування (добутку або дробу).

Напишім формули:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,.\,\cos\beta + \sin\beta\cos\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\,.\,\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

Склавши їх та віднявши від першої другу, дістанемо:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\,.\,\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\,.\,\cos\alpha$$

Поклавши $\alpha+\beta = m$ і $\alpha-\beta = n$ знайдемо, що

$$\alpha = \frac{m+n}{2};$$

$$\beta = \frac{m-n}{2}.$$

Підставивши ці значення в попередні формули, дістанемо:

$$\sin m + \sin n = 2\sin\frac{m+n}{2}\,.\,\cos\frac{m-n}{2}$$

$$\sin m - \sin n = 2\sin\frac{m-n}{2}\,.\,\cos\frac{m+n}{2}$$

Себто сума синусів двох кутів дорівнює подвоєному добуткові з синуса півсуми на косинус піврізниці цих кутів; а різниця синусів двох кутів дорівнює подвоєному добуткові з синуса піврізниці на косинус півсуми цих кутів.

Так само перетворимо в добуток суму та різницю косинусів двох кутів:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,.\,\cos\beta - \sin\alpha\,.\,\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,.\,\cos\beta + \sin\alpha\,.\,\sin\beta$$

звідки

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\,.\,\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\,.\,\sin\beta$$

або на підставі попередніх означень будемо мати:

$$\cos m + \cos n = 2\cos\frac{m+n}{2}\cdot\cos\frac{m-n}{2}$$

$$\cos m - \cos n = -2\sin\frac{m+n}{2}\cdot\sin\frac{m-n}{2}$$

Отже, сума косинусів двох кутів дорівнює подвоєному добуткові з косинуса півсуми на косинус піврізниці цих кутів, а різниця косинусів дорівнює подвоєному добуткові з від'ємним знаком з синуса півсуми на синус піврізниці цих кутів.

§ 21. Теорема тангенсів.

Сума двох боків трикутника так відноситься до їх різниці, як тангенс півсуми протилежних кутів до тангенса піврізниці цих кутів.

Дійсно, з відношення:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(див. §. 11.)}$$

можна записати:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

(бо з аритметики відомо, що сума членів першого відношення так відноситься до їх різниці, як сума членів другого відношення до їх різниці).

Поділивши чисельник і знаменник на

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{2}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

дістанемо:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{2}}{\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{2}}$$

що й потверджує правдивість попереднього твердження.

Вправи: 1) Обчислити синус суми кутів 30° і 45°; синус різниці кутів 60° і 30°: косинус суми та різниці тих самих кутів.

2) За формулою половинного кута визначити: $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$.

3) Перетворити до вигляду зручного для логаритмування такі вирази:
$\sin 40^\circ + \sin 20^\circ$; $\sin 60^\circ + \sin 30^\circ$, $\cos 50^\circ + \cos 30^\circ$, $\cos 60^\circ + \cos 20^\circ$.

РОЗДІЛ ЧЕТВЕРТИЙ

Функції.

§ 22. Сталі величини.

За Евклідовою геометрією сума кутів кожного плоского трикутника є величина незмінна і незалежить від вигляду трикутника.

Числове значіння відношення ординати до абсциси кожної точки, що міститься на одній і тій же простій, є величина незмінна, не залежить від віддалі точки від початку координат.

Відношення обводу кола до діяметра (число π), є величина незмінна, не залежить від радіюса кола.

Відношення протилежного катета (кутові α) до гіпотенузи у всіх прямокутних трикутниках з тим самим гострим кутом є величина незмінна.

Атомну вагу водня, кисня, азоту і взагалі атомну вагу кожної речовини вважають за величину незмінну.

Швидкість тіла, що рухається рівномірно є величина незмінна для даних умов, хоча при інших умовах дане, або інше тіло може рухатися з іншою незмінною швидкістю.

Такі величини, що за даних, або за всяких умов не зміняють свого розміру, звуть сталими величинами; при чому, коли величина ні при яких обставинах не змінює свого розміру, її звуть універсально-сталою, а величину, що тільки в даному процесі, або в даній задачі не зміняє свого розміру, звуть параметром.

Так, сума кутів у трикутнику в Евклідовій геометрії, число π, атомна вага даної речовини є універсально-сталі величини, а вже швидкість рівномірного руху є параметр.

§ 23. Змінні величини. Функція. Аргумент.

П. 1. Надаючи різних розмірів кутові, одержимо різні розміри для даної тригонометричної величини. Змінюючи розмір радіюса кола, будемо змінювати площу і обвід кола.

Надаючи різних розмірів основі та висоті трикутника, дістанемо різні розміри площі трикутника.

Змінюючи довжину, ширину та грубину бруса, дістанемо різні розміри об'ємів його.

Ті величини, що в даному процесі, або досліді змінюють свої розміри, звуть змінними величинами. При тому величини, що змінюють свої розміри незалежно від розмірів інших величин звуть **незалежними** величинами, або **аргументами**; ті, що змінюють свої розміри залежно від розмірів інших величин звуть залежними величинами, або **функціями**.

Так, у попередніх прикладах кут супроти тригонометричної величини буде аргументом, а тригонометрична величина функцією кута; так само основа і висота трикутника будуть відносно його площі аргументами, а площа їх функцією; довжина ширина й грубина супроти об'єму бруса аргументами, а об'єм функцією їх і т. д.

П. 2. У різних задачах може та сама величина бути то аргументом, то функцією. Так нпр., коли в першому прикладі будемо змінювати тригонометричну величину, то буде змінюватися кут, що відповідатиме тригонометричній величині, себто кут буде функцією, а тригонометрична величина супроти кута — аргументом.

Зміна даної величини може залежати від зміни одного, двох, трьох і багатьох аргументів. Так нпр., тригонометрична величина залежить лише від числового значіння кута, себто є функцією одного аргументу; площа трикутника залежить від розмірів основи і висоти, отже є функцією двох аргументів; об'єм бруса залежить від довжини, ширини і грубини його, себто є функцією трьох аргументів і т. д.

Залежно від того, від скількох аргументів є функція залежна, її звуть функцією одного, двох, трьох, багатьох аргументів.

П. 3. Наявність функціонального зв'язку між двома змінними величинами вкорочено записують:

$$y = f(x),\ y = F(x),\ y = \Phi(x)$$

де через **x** означено аргумент, а через **y** функцію. Факт функціонального зв'язку між функцією і кількома її аргументами записують:

$y = f(x, z)$, $y = F(x, z)$, $y = \Phi(x, z, t)$ і т. д.

§ 24. Аналітичні функції.

П. 1. Для багатьох явищ наука встановила закони їх змін. Так, відомо, що об'єм газу при тій самій температурі є обернено пропорційний до його тиснення. Коли зазначімо тиснення через **x** — а відповідний йому об'єм через **y**, — функціональний зв'язок між ними зможемо визначити так:

$$y = \frac{C}{x}$$

де C є об'єм при $x = 1$.

Шлях пройдений тілом, яке падає в порожнечі, залежний від часу, при чому встановлено таку залежність:

$$y = \frac{gx^2}{2}$$

де **x** означає час, **g** постійну величину прискорення, яке дорівнює 981 см, а **y** пройдений шлях.

П. 2. Коли закон пов'язаности функції з аргументом записано у вигляді рівнання, то розміри функцій іноді можна визначити з розмірів аргументів.

Припустим, що об'єм газу при розмірі тиснення 1 дорівнює 5 дцм³, треба визначити об'єм газу при тисненні в 3 одиниці. За формулою об'єм буде дорівнювати:

$$y = \frac{5}{3}\ \mathrm{dcm}^3$$

Визначмо шлях, що його пройде тіло за 5 ск. падаючи в порожнечі:

$$y = \frac{981 \cdot 5^2}{2} = 7262{,}5\ \mathrm{cm}$$

П. 3. Тригонометричні функції записують у вигляді:

$$y = \sin x\ ;\ y = \cos x\ ;\ y = \operatorname{tg} x\ ;$$
$$y = \operatorname{ctg} x\ ;\ y = \operatorname{Sc} x\ ;\ y = \operatorname{Csc} x$$

Тому, що з цих виразів для довільного кута **x** не можна визначити тригонометричну функцію **y**, за допомогою вищої математики знайдемо для них вирази, з яких їх значіння можна обчислити, з яким хочемо ступенем точности.

Так для $\sin x$, $\cos x$ є такі вирази:

$$y = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \dots \dots \quad (A)$$

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \dots \dots \quad (B)$$

Число членів у виразах (А) і (В) є безмежно велике. через x зазначено радіяльну міру кута.

Ступінь точности значіння синуса й косинуса заданого кута x буде залежати від кількости членів. що ми їх вживемо до обчислення.

Функціональний зв'язок між змінними величинами, що його можна визначити рівнанням, звуть математичним або аналітичним, а самі функції математичними або аналітичними.

§ 25. Клясифікація аналітичних функцій.

Аналітичні функції поділяються на альгебричні й трансцендентні.

Альгебричними функціями звуть ті, що в них аналітичний зв'язок між функцією y та аргументом x визначаться за допомогою певного числа дій додавання, віднімання, множення, ділення, ступенювання й коренювання з незмінним — цілим, або дробовим показником, як наприклад:

$$y = 3x + 2; \quad y = \frac{c}{x}; \quad y = \frac{9x^2}{2};$$

$$y = \sqrt{x + 3}; \quad y = x^{\frac{2}{5}} - x + 1$$

Альгебрична функція зветься раціональною, коли для визначення її розміру треба над даним значенням аргументу провести лише дії додавання, віднімання, множення, ділення й ступенювання в цілий ступінь.

А коли над значенням аргументу треба перевести крім вище зазначених дій ще й коренювання, то альгебричну функцію звуть ірраціональною.

Так, у попередньому перші три приклади є функції раціональні, а останні два — ірраціональні. Раціональні функції поділяються на цілі, коли змінне не входить до знаменника, й дробові — в противнім випадку.

Так, перший приклад є ціла раціональна функція, а другий, — дробова.

Альгебричні функції поділяються на явні та неявні. Явними функціями звуть ті, що в них зазначено дії, які треба перевести над аргументом, щоб одержати значення функції. Так, наприклад, функції:

$$y = 3x^2 - 5x - 1;$$

$$y = \frac{\sqrt{x^3 + 5 + 3x}}{x^3 + 1}$$

є явні функції, — у першій для визначення розміру y потрібно перевести такі дії над аргументом: піднести його до квадрата, результат помножити на три, додати п'ятикратний розмір аргументу й відняти одиницю; у другій треба перевести над аргументом дії коренювання, множення, ступенювання і ділення.

А коли зазначено тільки рівнання, що містить в собі аргумент x та функцію y, але його не розв'язано відносно y, тоді функцію звуть неявною. Так, напр., $x^2 + 3y + y^2 - 2 = 0$ є неявна альгебрична функція.

Неявну функцію y можна зробити явною лише в тім випадку, коли рівняння, що її визначає, може бути розв'язане відносно y.

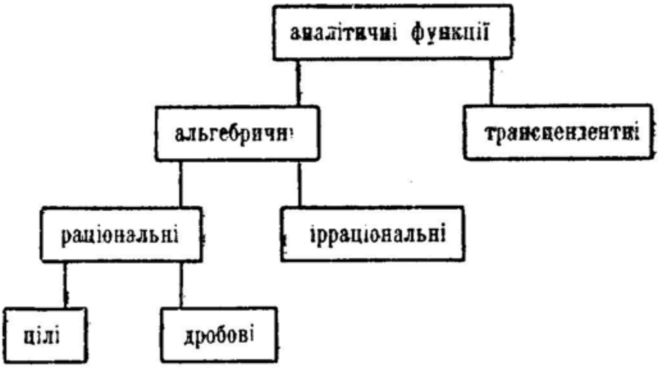
Усю решту аналітичних не альгебричних функцій звуть трансцедентними. Так, напр., функції:

$$y = \sin x; \; y = \cos x; \; y = tg\, x; \; y = ctg\, x; \; y = sc\, x; \; y = csc\, x.$$

$y = x^a$, коли a — є невимірне число:

$y = a^x$, (показникова функція).
$y = \log x$ (логаритмічна функція) — звуть функціями трансцендентними.

Для наочности попередню клясифікацію аналітичних функцій подамо у вигляді схеми:



§ 25. Властивості функцій.

Функції однозначні і многозначні.

Коли всяким значенням аргументів відповідає лише одно значення функції, то функцію звуть однозначною у противнім випадку — двозначною, многозначною залежно від того, скільки значень при тому має функція. Так наприклад у виразу:

$$y = 2x + 3$$

при всіх значеннях **x** функція **y** є однозначна.

Функція

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$$

двозначна, бо

$$y = -\sqrt{x^2 + 1}; \quad y = +\sqrt{x^2 + 1}$$

Щоб усунути в даним випадку двозначність, ми повинні брати

$$\text{або } y = +\sqrt{x^2 + 1}$$
$$\text{або } y = -\sqrt{x^2 - 1}$$

П. 1. Неперервна та перервна зміна.

Зміна величини може відбуватися різно. Так, є величини, що їх зміна визначається лише цілими числами напр., число зерен у колосі, кількість атомів у молекулі і т. д.

Таку зміну звуть зміною в цілих одиницях, перервною, несуцільною, дискретною, зміною стрибками.

Разом із тим є величини, що можуть у певних межах змінювати свій розмір неперервно, без стрибків, як напр. міра кута, довжина відтинка, розмір тятиви даного кола і т. п., себто можуть послідовно перебирати всі можливі розміри у певних межах своєї зміни.

Є й такого роду змінні величини, що змінюються то неперервно, то роблять стрибок, далі знову змінюються неперервно, знову роблять стрибок і т. д. Так, тангенс при збільшенні кута від 0° — 90° змінюється неперервно, а при 90° робить стрибок з додатної безконечности у від'ємну; далі знову при збільшенні кута до 270° змінюється неперервно, а при 270° робить повторний стрибок з від'ємної безконечности в додатню і т. д.

Означимо через **a** і **b** початкове і кінцеве значення змінної величини **x**. Якщо при переході від **a** до **b** змінна величина послідовно перебирає всі значення, що містяться між ними, то таку змінну звуть неперервною в цьому проміжку, а коли змінна величина перебирає не всі значення, то така змінна зветься переривною.

Якщо змінна x відбувається неперервно, то його розміри відкладені на простій (рис. 17) утворять суцільний відтинок AB з кординатами кінців a і b.

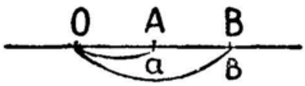


Рис. 17.

При переривній зміні значення x не утворить суцільного відтинка AB.

П. 2. Суцільність та переривність функцій. Далі ми будемо уважати, що аргумент перебирає лише дійсні значення і що зміна його відбувається неперервно; тому нам потрібно установити ознаки неперервности лише функцій. Коли функція $y = f(x)$ при $x = a$ набирає певного — скінченого чи рівного нулеві значення, тоді кажуть, що функція визначається при $x = a$, а коли результат підстановки $x = a$, у виразі $f(x)$ має неозначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, недійсне число або вираз, який визначається безконечністю, тоді кажуть, що функція не визначається при $x = a$.

Так само кажуть, що функція не визначається і в тім випадку, коли вона двозначна або многозначна.

Так напр. функція:

$$y = x^2 - 7$$

визначається при всіх дійсних значеннях x і вираз

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

визначається при всіх значеннях x, що відрізняється від

$$x = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{3}{2}\pi; \quad \frac{5}{2}\pi,$$

і т. д., бо попередній вираз при цих значеннях буде:

$$y = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$$

$$y = \frac{\sin \frac{3}{2}\pi}{\cos \frac{3}{2}\pi} = \frac{-1}{0}$$

і т. д.

Він немає змісту, бо не існує скінченого числа, яке помножене на нуль дало б додатну або від'ємну одиницю. Вираз $\frac{1}{0}$ вважають рівним $\pm\infty$ [1]).

Функція

$$y = \frac{1 - \cos x}{x}$$

при $x = 0$ 2π, 4π, 6π, не має певного значення, бо тоді вона дорівнює:

$$y = \frac{0}{0}$$

а $\frac{0}{0}$ є неозначений вираз, тому що його можна дорівняти довільному числу.

---

[1]) Діячи одиницю на 0, 1 ; 0, 01 ; 001 . . . . 0' 000001 і т. д.

На — 0,1 ; — 0,01 ; — 0,001 . . . . — 0,000001 і т. д.

Будемо мати: 10,100,1000 . . . . 1000000 і т. д.

— 10,—100,—1000.—1000000 і т. д.

Отже при зменшуванні подільника до нуля частка зростає до додатньої або від'ємної безконечности. ($\pm\infty$)

Справді, поклавши, що $\frac{0}{0}$ дорівнює — 1, 2, 5, 10 . . . . K будемо мати:

$$\frac{0}{0} = 1 \qquad 1 . 0 = 0,$$

$$\frac{0}{0} = 2 \qquad 2 . 0 = 0,$$

$$\frac{0}{0} = K \qquad 0 . K = 0,$$

Коли функція $y = f(x)$ визначається при $x = a$, то вона зветься суцільною для даного значення незалежної змінної.

А коли функція є суцільна для всіх дійсних значень незалежного змінного, що містяться в проміжку від „а" до „в", та вона зветься суцільною в цьому проміжку.

Якщо функція не визначається або для окремих значень незалежного змінного, або для значень, що містяться в певнім проміжку, то кажуть, що вона при значеннях цих зазнає розриву суцільности.

Отже функція:

$$y = x^2 - 7,$$

є суцільна для всіх дійсних значень x; тригонометрична функція:

$$y = \operatorname{tg} x$$

зазнає розриву суцільности при $x = \frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi; \ldots \frac{5}{2}\pi$; і т. д.

Для решти значень вона неперервна;

$$y = \frac{1 - \cos x}{x}$$

зазнає розриву лише при $x = 0$; а для решти значень вона суцільна.

§ 26. Графіки тригонометричних функцій.

П. 1. $\qquad y = \sin x$

Графіку функції $y = \sin x$ збудуємо на підставі такої таблиці:

X	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
-X	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\pi$	$-\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{11}{6}\pi$	-2
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

Поклавши, що $\pi = 3,1$ збудуємо графіку (рис. 18, ст. 45), її називають синусоїда.

I. Графіка функції $y = \sin x$

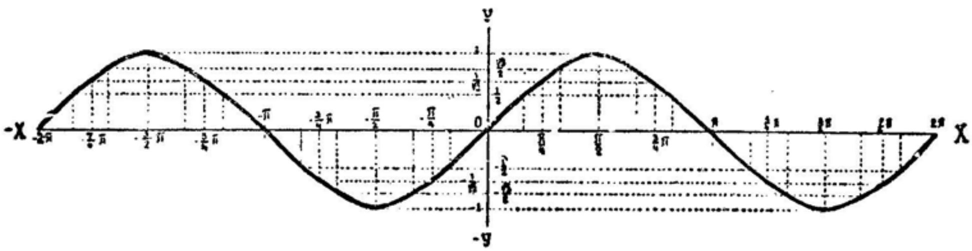


Рис 18. Синусоіда.

II. Графіка функції $y = \cos x$

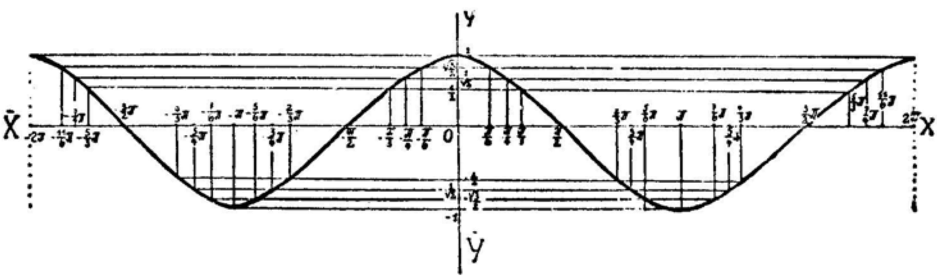


Рисунок 19. Косинусоїда.

II. 2. $y = \cos x$

Графіку функції $y = \cos x$ називають косинусоїдою (рис. 19.). Її збудуємо на підставі такої таблиці:

X	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
y	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$-X$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\pi$	$-\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{11}{6}\pi$	-2π
y	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Поклавши, що $\pi = 3{,}1$ збудуємо графіку (рис. 19) косинусоїди.

П. 3. $y = \operatorname{tg} x$

Як відомо з попереднього, функція $y = \operatorname{tg} x$ переривна для значень:

$x = \frac{\pi}{2}; \ \frac{3}{2}\pi; \ \frac{5}{2}\pi; \ \ldots\ldots\ldots \ K\frac{\pi}{2}$, де K — ціле непаристе число.

Графіку функції $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 20) збудуємо на підставі таблиці:

ТАБЛИЦЯ III.

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
y	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
-X	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\pi$	$-\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$
y	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

П. 4. $y = \operatorname{ctg} x$

Графіку функції $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 21) збудуємо на підставі таблиці:

ТАБЛИЦЯ IV

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
y	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
-X	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\pi$	$-\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$
y	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

III. Графіка функції $y = tg\ x$

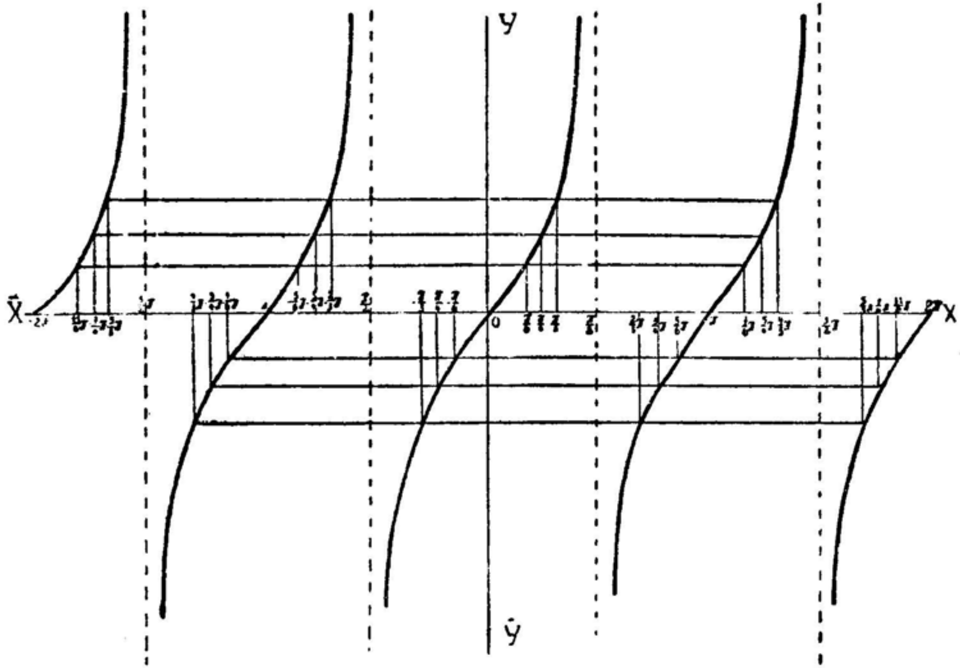


Рис. 20. Тангенсоїда.

IV. Графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$

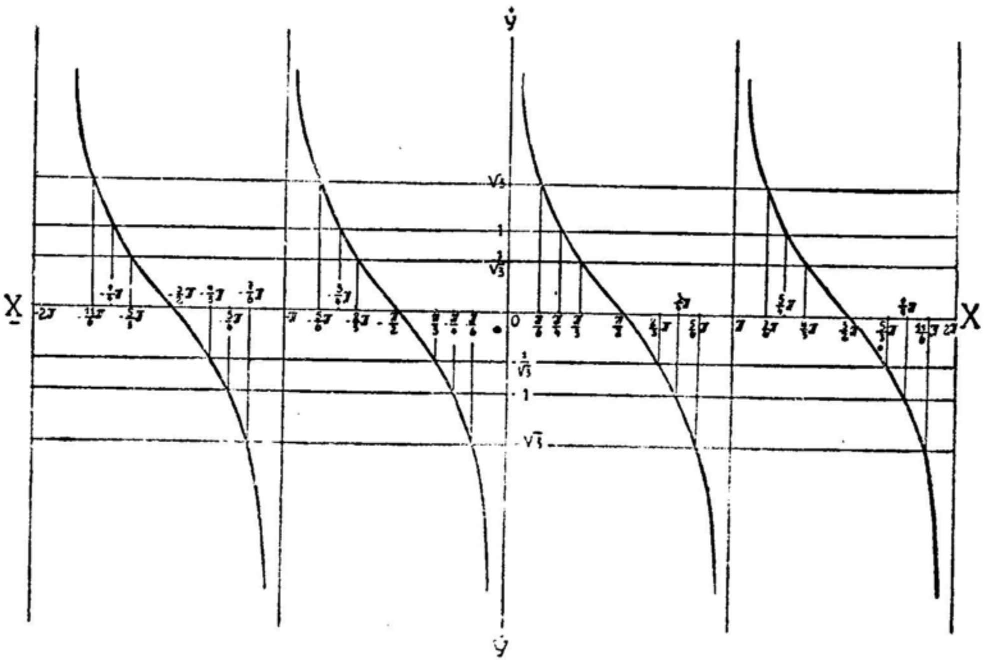


Рис. 21. Котангенсоїда.

Графіку функції $y = \mathrm{sc}\,x$ звуть секансоїдою (див. рис. 22). Її збудуємо на підставі такої таблиці:

V. Функція $y = \mathrm{Sc}\,x$

КУТ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
СЕКАНС	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\pm\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
КУТ	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\pi$	$-\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{11}{6}\pi$	-2π
СЕКАНС	1	$+\frac{2}{\sqrt{3}}$	$+\sqrt{2}$	$+2$	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\pm\infty$	2	$\sqrt{2}$	$+\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

Графіку функції $y = \csc x$ звуть косекансоїдою (див. рис. 23). Її збудуємо на підставі такої таблиці:

VI. Функція $y = \mathrm{Csc}\,x$

КУТ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
КОСЕКАНС	$\pm\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\pm\infty$
КУТ	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\pi$	$-\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{11}{6}\pi$	-2π
КОСЕКАНС	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\pm\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$

V. Графіка функції $y = \mathrm{Sc}\, x$

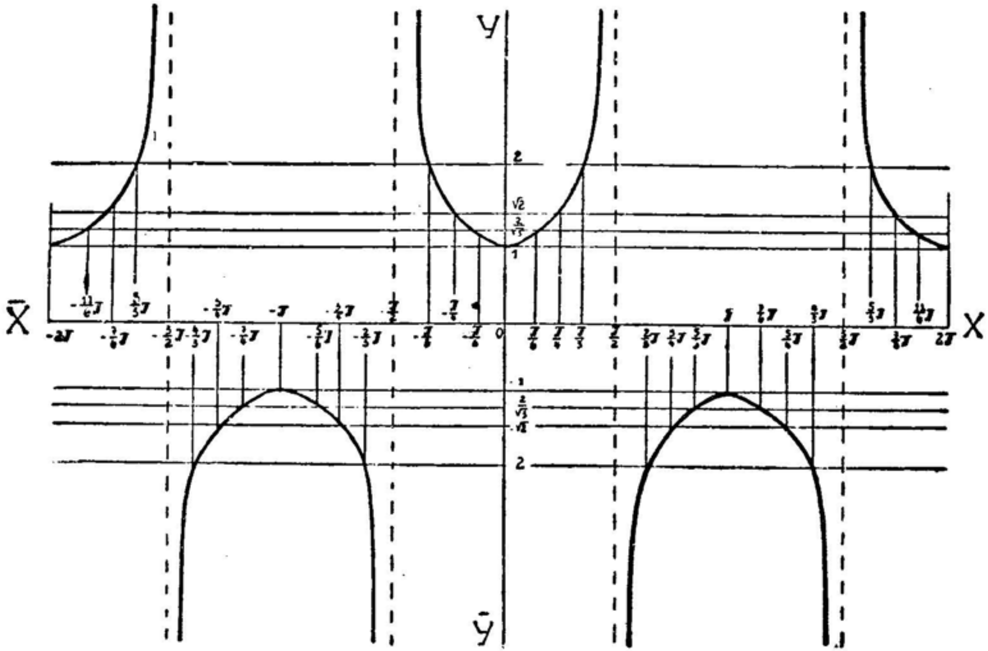


Рис. 22. Секансоїда.

VI. Графіка функції y = Csc x

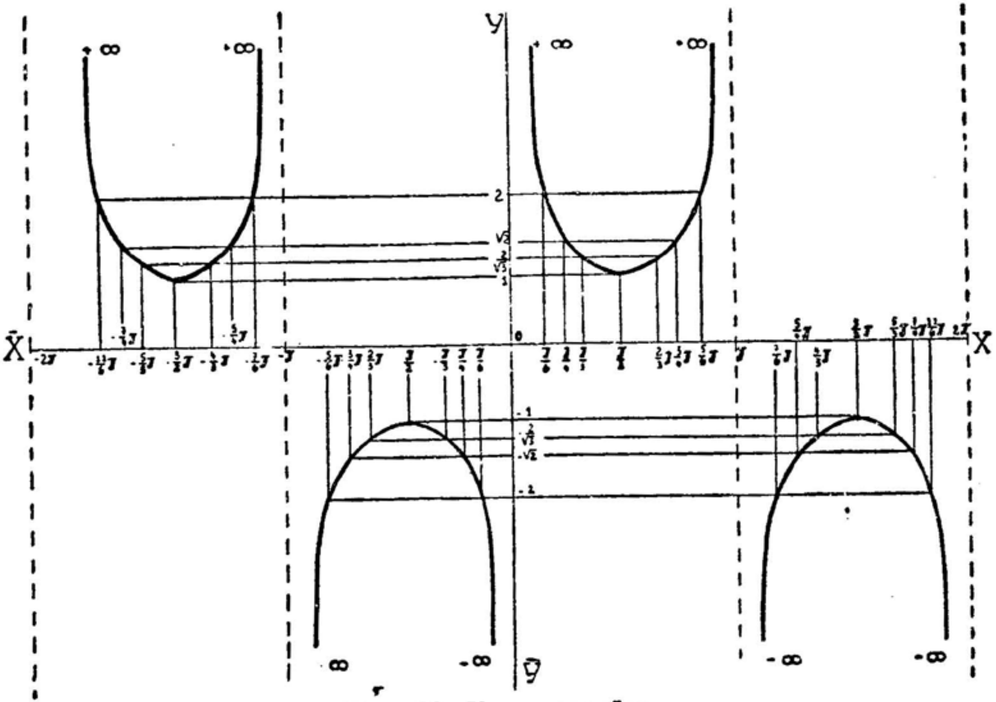


Рис. 23. Косекансоїда.

§ 27. Про обернені тригонометричні функції.

П. 1. Якщо ми в заданій функції одного аргументу приймемо функцією за аргумент, тоді аргумент її стане функцією. Вираз заданої функції, розв'язаний відносно аргументу, звуть в цім випадкові оберненою функцією відносно заданої.

Так, наприклад, коли ми в виразі:

$$y = 3x + 5 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

y покладемо за аргумент, то x буде функцією y.

Розв'язавши вираз (A) відносно x одержимо:

$$x = \frac{1}{3}y - \frac{5}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B)$$

Вираз (B) є обернена функція відносно заданої (A).

Вправи. З виразів:

$$1)\ y = \frac{3x+5}{5x+1} \quad 2)\ y = x^3 - 4$$

$$3)\ y = \sqrt{x^3+7} \quad 4)\ y = \lg_{10} x$$

$$5)\ y = a^x$$

визначіть обернені функції відносно заданої

П. 2. Обернені тригонометричні функції

якщо ми в тригонометричних функціях.

$$1)\ y = \sin x \quad 2)\ y = \cos x$$

$$3)\ y = \operatorname{tg} x \quad 4)\ y = \csc x$$

$$5)\ y = \operatorname{sc} x \quad 6)\ y = \operatorname{ctg} x \; . \; (C)$$

Числові значіння тригонометричної величини y приймемо за аргумент, тоді числові значіння відповідної їй дуги x стануть функціями тригонометричних величин y.

Так перебудовані функції звуть оберненими тригонометричними функціями і записують:

$$(1)\ x = \arcsin y \quad (2)\ x = \arccos y$$

$$(3)\ x = \operatorname{arctg} y \quad (4)\ x = \operatorname{arccsc} y$$

$$(5)\ x = \operatorname{arcsc} y \quad (6)\ x = \operatorname{arcctg} y$$

і читають:

1) x є аркус (дуга), синус якої є рівний y
2) x ,, ,, ,, косинус ,, ,, ,; y
3) x ,, ,, ,, тангенс ,, ,, ,; y
4) x ,, ,, ,, косеканс ,, ,, ,; y
5) x ,, ,, ,, секанс ,, ,, ,; y
6) x ,, ,, ,, котенгенс ,, ,, ,; y

або вкорочено аркус синус, аркус косинус, аркус тангенс і т. д.

Потрібно ще раз підкреслити, що в обернених тригонометричних функціях аргументом є тригонометрична величина, а функцією дуга, що їй відповідає.

Якщо тригонометричну функцію та її аргумент означити іншими літерами, як, наприклад:

$$x = \sin y \quad y = \cos z \quad s = \operatorname{tg} y,$$

тоді відповідні їм обернені тригонометричні функції запишуться:

$$y = \arcsin x \quad z = \arccos y$$

$$y = \operatorname{arctg} s$$

П. 3. Властивості обернених тригонометричних функцій.

В той час, як тригонометричні функції є назагал однозначні, себто кожному значінню дуги відповідає лише одне значіння тригонометричної величини (за винятком тангенса і секанса для кутів $(2k+1)\pi/2$ котангенса й косеканса для кутів $2k\pi$, де k довільне ціле число, як додатне, так і від'ємне, де ці функції зазнають розривности, роблячи скок з додатньої безмежности до від'ємної безмежности, або навпаки), обернені тригонометричні функції є многозначні.

Дійсно, якщо заданій тригонометричній величині x відповідає дуга y, то й для дуги:

$$x + 2k\pi,$$

де k ціле додатне число вона матиме те саме значіння.

Так з виразу

$$y_1 = \sin(x_1 + 2k\pi),$$

маємо:

$$x_1 + 2k\pi = \arcsin y_1$$

з виразу

$$y_2 = \cos(x_2 + 2k\pi)$$

маємо:

$$x_2 + 2k\pi = \arccos y_2 \quad \text{і т. д.}$$

Себто в обернених тригонометричних функціях кожному значінню аргумента відповідає безліч значінь функції. Отже, обернені тригонометричні функції є функції многозначні.

Припустімо:

$$\frac{1}{2} = \sin x \quad \text{себто} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

тоді також:

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

звідки:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi = \arcsin\frac{1}{2}$$

Тому, що

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \sin\frac{5}{6}\pi = \sin\left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right)$$

виходить, що також

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi = \arcsin\frac{\pi}{2}$$

Себто синусові $\frac{1}{2}$ відповідає безліч дуг, що визначаються формулами:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

в радіяльній мірі дуги, або

$30^0 + 2k \cdot 360^0 \qquad 150^0 + 2k \cdot 360^0$

де міра дуги визначена в градусах.

§ 27. Графіки обернених тригонометричних функцій.

П. 1. $y = \arcsin x$. Графіку функції аркус синуса збудуємо на підставі такої таблиці:

sin	arc		
X	Y		
0	0	$\cdots$	$2K\pi$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$(2K+\frac{1}{6})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$(2K+\frac{1}{4})\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$(2K+\frac{1}{3})\pi$
1	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$(2K+\frac{1}{2})\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$(2K+\frac{2}{3})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$(2K+\frac{3}{4})\pi$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$(2K+\frac{5}{6})\pi$
0	π	$\cdots$	$2K\pi$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$(2K+\frac{7}{6})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$(2K+\frac{5}{4})\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	$(2K+\frac{4}{3})\pi$
-1	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$(2K+\frac{3}{2})\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	$(2K+\frac{5}{3})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	$(2K+\frac{7}{4})\pi$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	$(2K+\frac{11}{6})\pi$
0	2π	$\cdots$	$2(K+1)\pi$

sin	arc		
X	Y		
0	0	$\cdots$	$-2K\pi$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$-(2K+\frac{1}{6})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$-(2K+\frac{1}{4})\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$-(2K+\frac{1}{3})\pi$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-(2K+\frac{1}{2})\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$-(2K+\frac{2}{3})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$-(2K+\frac{3}{4})\pi$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$-(2K+\frac{5}{6})\pi$
0	$-\pi$	$\cdots$	$-2K\pi$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$-(2K+\frac{7}{6})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$-(2K+\frac{5}{4})\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	$-(2K+\frac{4}{3})\pi$
1	$-\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$-(2K+\frac{3}{2})\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	$-(2K+\frac{5}{3})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	$-(2K+\frac{7}{4})\pi$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	$-(2K+\frac{11}{6})\pi$
0	-2π	$\cdots$	$-2(K+1)\pi$

П. 2. Графіку функції $y = \arccos x$ збудуємо за таблицею:

cos	arc		
x	y		
1	0	$\cdots$	$2k\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$(2k+\frac{1}{6})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$(2k+\frac{1}{4})\pi$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$(2k+\frac{1}{3})\pi$
0	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$(2k+\frac{1}{2})\pi$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$(2k+\frac{2}{3})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$(2k+\frac{3}{4})\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$(2k+\frac{5}{6})\pi$
-1	π	$\cdots$	$(2k+1)\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$(2k+\frac{7}{6})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$(2k+\frac{5}{4})\pi$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	$(2k+\frac{4}{3})\pi$
0	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$(2k+\frac{3}{2})\pi$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	$(2k+\frac{5}{3})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	$(2k+\frac{7}{4})\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	$(2k+\frac{11}{6})\pi$
1	2π	$\cdots$	$2(k+1)\pi$

cos	arc		
x	y		
1	0	$\cdots$	$-2k\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$-(2k+\frac{1}{6})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$-(2k+\frac{1}{4})\pi$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$-(2k+\frac{1}{3})\pi$
0	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-(2k+\frac{1}{2})\pi$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$-(2k+\frac{2}{3})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$-(2k+\frac{3}{4})\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$-(2k+\frac{5}{6})\pi$
-1	$-\pi$	$\cdots$	$-(2k+1)\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$-(2k+\frac{7}{6})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$-(2k+\frac{5}{4})\pi$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	$-(2k+\frac{4}{3})\pi$
0	$-\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$-(2k+\frac{3}{2})\pi$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	$-(2k+\frac{5}{3})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	$-(2k+\frac{7}{4})\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	$-(2k+\frac{11}{6})\pi$
1	-2π	$\cdots$	$-2(k+1)\pi$

I. Графіка функції $y = \arcsin x$ II. Графіка функції $y = \arccos x$

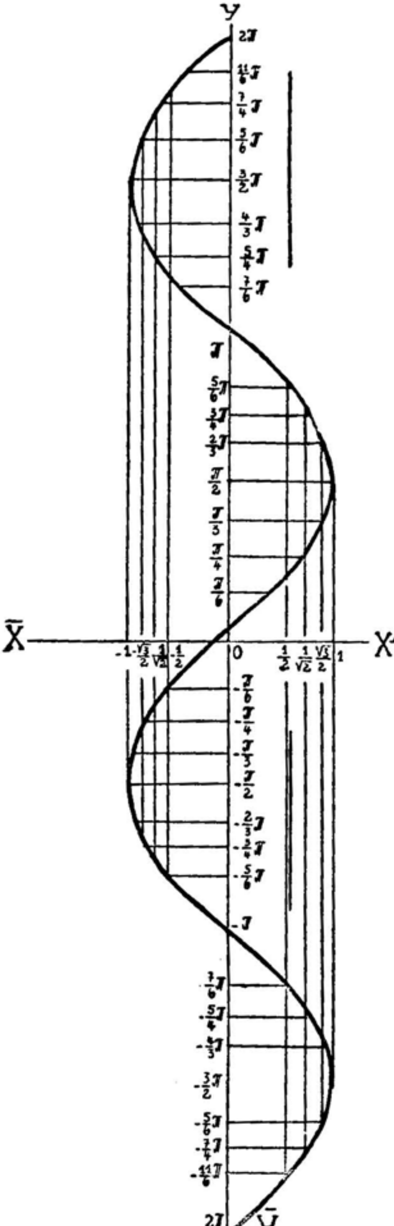


Рис. 24

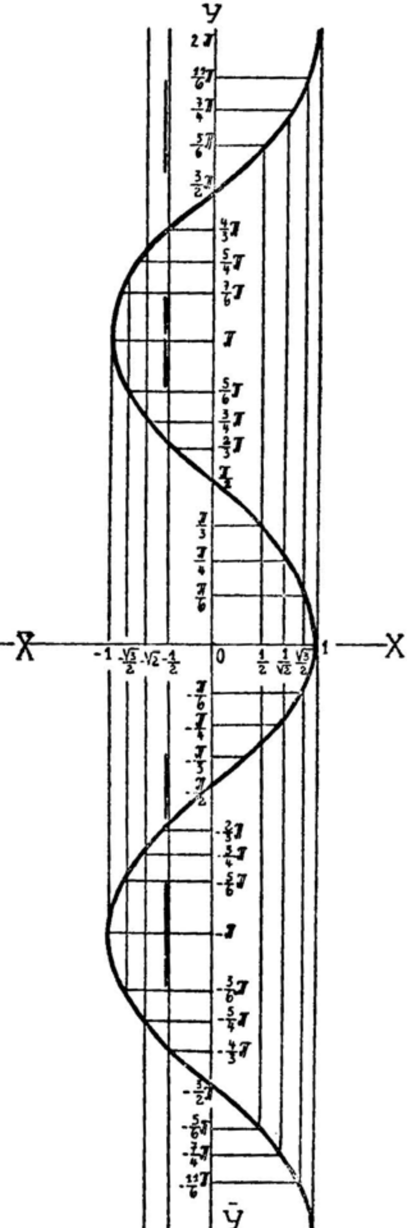


Рис. 25.

П. 3. Графіку функції $y = \mathrm{arctg}\, x$ збудуємо за тачлицею:

tg	arc		
X	Y		
0	0		$2K\pi$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}$		$(2K+\frac{1}{6})\pi$
1	$\frac{\pi}{4}$		$(2K+\frac{1}{4})\pi$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$		$(2K+\frac{1}{3})\pi$
$\pm\infty$	$\frac{\pi}{2}$		$(2K+\frac{1}{2})\pi$
$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\pi$		$(2K+\frac{2}{3})\pi$
-1	$\frac{3}{4}\pi$		$(2K+\frac{3}{4})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{6}\pi$		$(2K+\frac{5}{6})\pi$
0	π		$(2K+1)\pi$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{7}{6}\pi$		$(2K+\frac{7}{6})\pi$
1	$\frac{5}{4}\pi$		$(2K+\frac{5}{4})\pi$
$\sqrt{3}$	$\frac{4}{3}\pi$		$(2K+\frac{4}{3})\pi$
$\pm\infty$	$\frac{3}{2}\pi$		$(2K+\frac{3}{2})\pi$
$-\sqrt{3}$	$\frac{5}{3}\pi$		$(2K+\frac{5}{3})\pi$
-1	$\frac{7}{4}\pi$		$(2K+\frac{7}{4})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{11}{6}\pi$		$(2K+\frac{11}{6})\pi$
0	2π		$2(K+1)\pi$

tg	arc		
X	Y		
0	0		$-2K\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{6}$		$-(2K+\frac{1}{6})\pi$
-1	$-\frac{\pi}{4}$		$-(2K+\frac{1}{4})\pi$
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$		$-(2K+\frac{1}{3})\pi$
$\mp\infty$	$-\frac{\pi}{2}$		$-(2K+\frac{1}{2})\pi$
$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\pi$		$-(2K+\frac{2}{3})\pi$
1	$-\frac{3}{4}\pi$		$-(2K+\frac{3}{4})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{5}{6}\pi$		$-(2K+\frac{5}{6})\pi$
0	$-\pi$		$-(2K+1)\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{7}{6}\pi$		$-(2K+\frac{7}{6})\pi$
-1	$-\frac{5}{4}\pi$		$-(2K+\frac{5}{4})\pi$
$-\sqrt{3}$	$-\frac{4}{3}\pi$		$-(2K+\frac{4}{3})\pi$
$\mp\infty$	$-\frac{3}{2}\pi$		$-(2K+\frac{3}{2})\pi$
$\sqrt{3}$	$-\frac{5}{3}\pi$		$-(2K+\frac{5}{3})\pi$
1	$-\frac{7}{4}\pi$		$-(2K+\frac{7}{4})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{11}{6}\pi$		$-(2K+\frac{11}{6})\pi$
0	-2π		$-2(K+1)\pi$

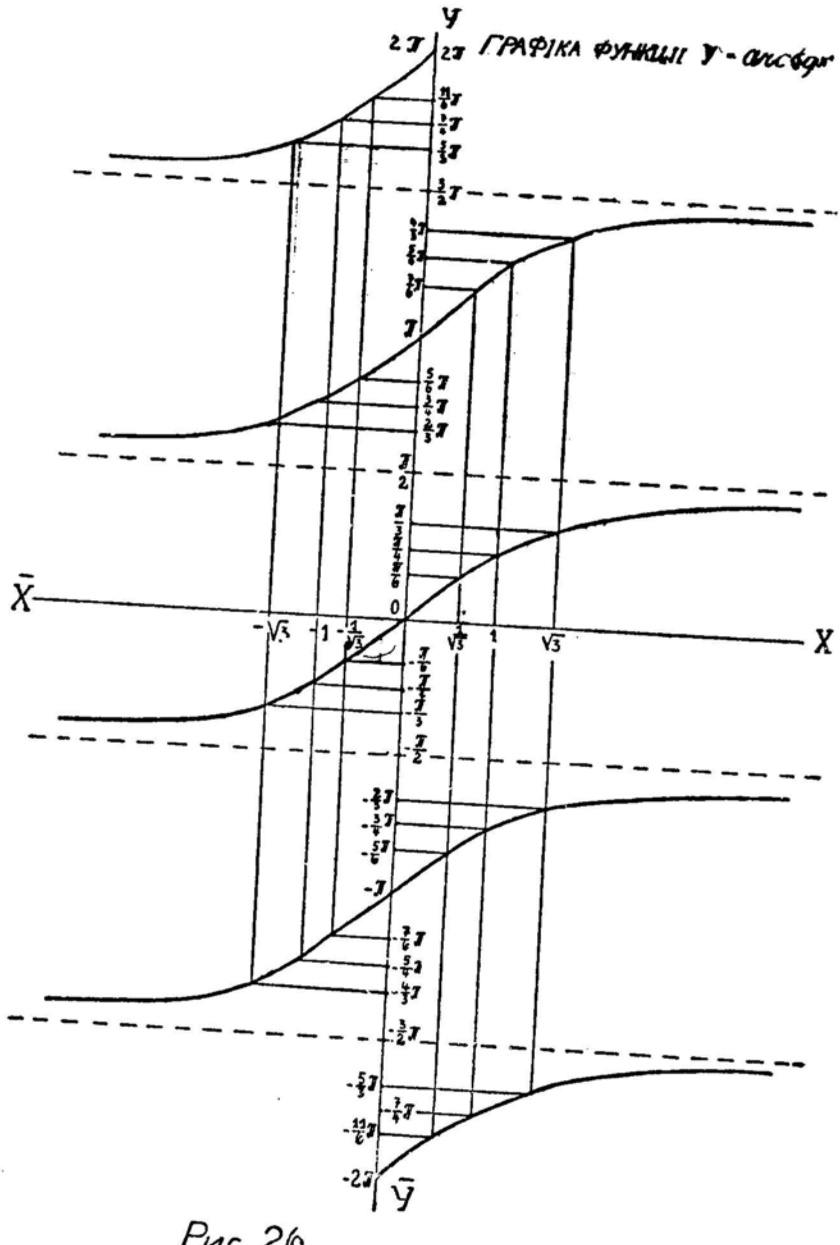


Рис. 26.

П. 4. Графіку функції $y = \operatorname{arcctg} x$ збудуємо за таблицею:

Ctg arc

X	Y		
∞	0		$2K\pi$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$		$(2K+\frac{1}{6})\pi$
1	$\frac{\pi}{4}$		$(2K+\frac{1}{4})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{3}$		$(2K+\frac{1}{3})\pi$
0	$\frac{\pi}{2}$		$(2K+\frac{1}{2})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3}\pi$		$(2K+\frac{2}{3})\pi$
-1	$\frac{3}{4}\pi$		$(2K+\frac{3}{4})\pi$
$-\sqrt{3}$	$\frac{5}{6}\pi$		$(2K+\frac{5}{6})\pi$
$\mp\infty$	π		$(2K+1)\pi$
$\sqrt{3}$	$\frac{7}{6}\pi$		$(2K+\frac{7}{6})\pi$
1	$\frac{5}{4}\pi$		$(2K+\frac{5}{4})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{3}\pi$		$(2K+\frac{4}{3})\pi$
0	$\frac{3}{2}\pi$		$(2K+\frac{3}{2})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{3}\pi$		$(2K+\frac{5}{3})\pi$
-1	$\frac{7}{4}\pi$		$(2K+\frac{7}{4})\pi$
$-\sqrt{3}$	$\frac{11}{6}\pi$		$(2K+\frac{11}{6})\pi$
$-\infty$	2π		$2(K+1)\pi$

Ctg arc

X	Y		
$-\infty$	0		$-2K\pi$
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{6}$		$-(2K+\frac{1}{6})\pi$
-1	$-\frac{\pi}{4}$		$-(2K+\frac{1}{4})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{3}$		$-(2K+\frac{1}{3})\pi$
0	$-\frac{\pi}{2}$		$-(2K+\frac{1}{2})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{3}\pi$		$-(2K+\frac{2}{3})\pi$
1	$-\frac{3}{4}\pi$		$-(2K+\frac{3}{4})\pi$
$\sqrt{3}$	$-\frac{5}{6}\pi$		$-(2K+\frac{5}{6})\pi$
$\pm\infty$	$-\pi$		$-(2K+1)\pi$
$-\sqrt{3}$	$-\frac{7}{6}\pi$		$-(2K+\frac{7}{6})\pi$
-1	$-\frac{5}{4}\pi$		$-(2K+\frac{5}{4})\pi$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{4}{3}\pi$		$-(2K+\frac{4}{3})\pi$
0	$-\frac{3}{2}\pi$		$-(2K+\frac{3}{2})\pi$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{5}{3}\pi$		$-(2K+\frac{5}{3})\pi$
1	$-\frac{7}{4}\pi$		$-(2K+\frac{7}{4})\pi$
$\sqrt{3}$	$-\frac{11}{6}\pi$		$-(2K+\frac{11}{6})\pi$
∞	-2π		$-2(K+1)\pi$

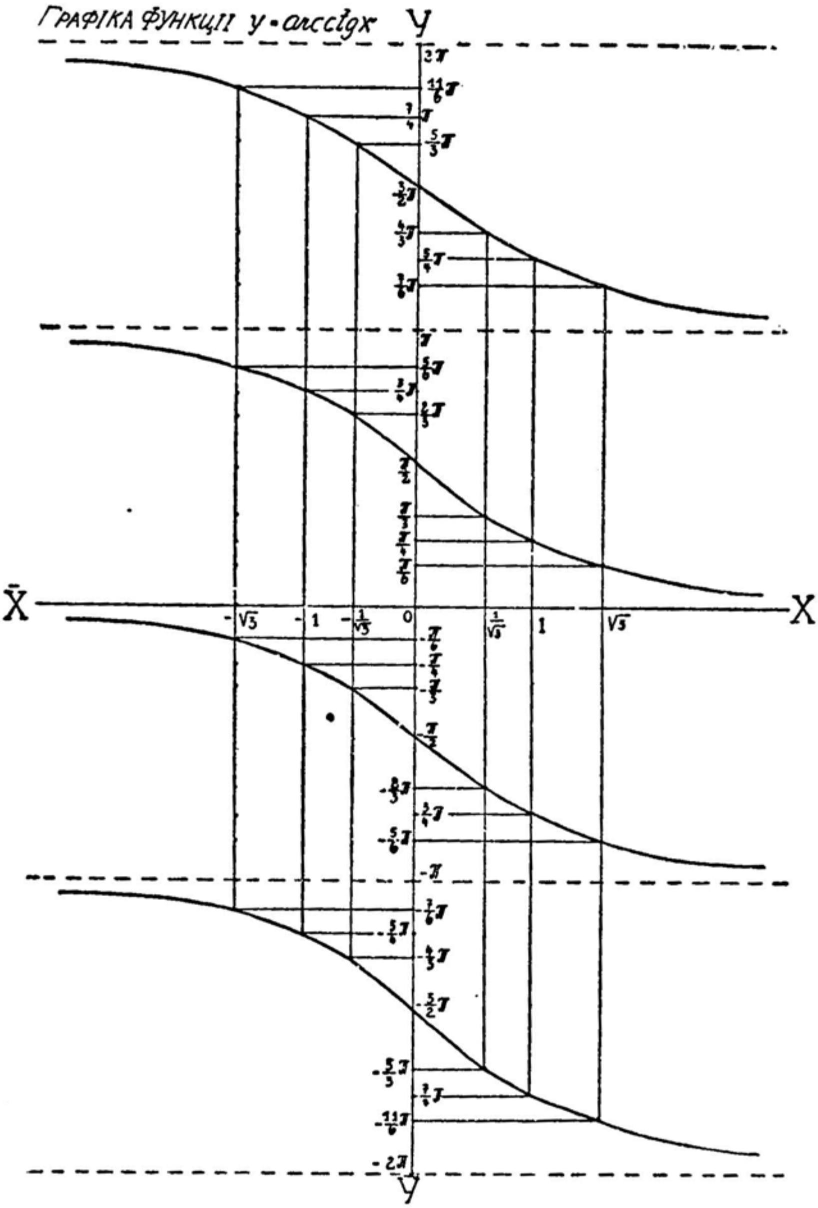


Рис. 27. Аркус-котангенсоїда.

П. 5. Графіку функції $y = \operatorname{arcsc} x$ збудуємо за таблицею

Sc arc

X	Y		
1	0		$2K\pi$
$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}$	..	$(2K+\frac{1}{6})\pi$
$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	..	$(2K+\frac{1}{4})\pi$
2	$\frac{\pi}{3}$	..	$(2K+\frac{1}{3})\pi$
$\pm\infty$	$\frac{\pi}{2}$	..	$(2K+\frac{1}{2})\pi$
-2	$\frac{2}{3}\pi$	..	$(2K+\frac{2}{3})\pi$
$-\sqrt{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	..	$(2K+\frac{3}{4})\pi$
$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{6}\pi$	..	$(2K+\frac{5}{6})\pi$
-1	π	..	$(2K+1)\pi$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{6}\pi$	..	$(2K+\frac{7}{6})\pi$
$-\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}\pi$	..	$(2K+\frac{5}{4})\pi$
-2	$\frac{4}{3}\pi$	..	$(2K+\frac{4}{3})\pi$
$\mp\infty$	$\frac{3}{2}\pi$	..	$(2K+\frac{3}{2})\pi$
2	$\frac{5}{3}\pi$	..	$(2K+\frac{5}{3})\pi$
$\sqrt{2}$	$\frac{7}{4}\pi$	..	$(2K+\frac{7}{4})\pi$
$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{11}{6}\pi$	..	$(2K+\frac{11}{6})\pi$
1	2π	..	$2(K+1)\pi$

Sc arc

X	Y		
1	0	..	$-2K\pi$
$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{6}$	..	$-(2K+\frac{1}{6})\pi$
$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	..	$-(2K+\frac{1}{4})\pi$
2	$-\frac{\pi}{3}$	..	$-(2K+\frac{1}{3})\pi$
$\pm\infty$	$-\frac{\pi}{2}$	..	$-(2K+\frac{1}{2})\pi$
-2	$-\frac{2}{3}\pi$	..	$-(2K+\frac{2}{3})\pi$
$-\sqrt{2}$	$-\frac{3}{4}\pi$	..	$-(2K+\frac{3}{4})\pi$
$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{5}{6}\pi$	..	$-(2K+\frac{5}{6})\pi$
-1	$-\pi$	..	$-(2K+1)\pi$
$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{7}{6}\pi$	..	$-(2K+\frac{7}{6})\pi$
$-\sqrt{2}$	$-\frac{5}{4}\pi$	..	$-(2K+\frac{5}{4})\pi$
-2	$-\frac{4}{3}\pi$	..	$-(2K+\frac{4}{3})\pi$
$\mp\infty$	$-\frac{3}{2}\pi$	..	$-(2K+\frac{3}{2})\pi$
2	$-\frac{5}{3}\pi$	..	$-(2K+\frac{5}{3})\pi$
$\sqrt{2}$	$-\frac{7}{4}\pi$	..	$-(2K+\frac{7}{4})\pi$
$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{11}{6}\pi$	..	$-(2K+\frac{11}{6})\pi$
1	-2π	..	$-2(K+1)\pi$

V. Графіка функції $y = \operatorname{arcsc} x$

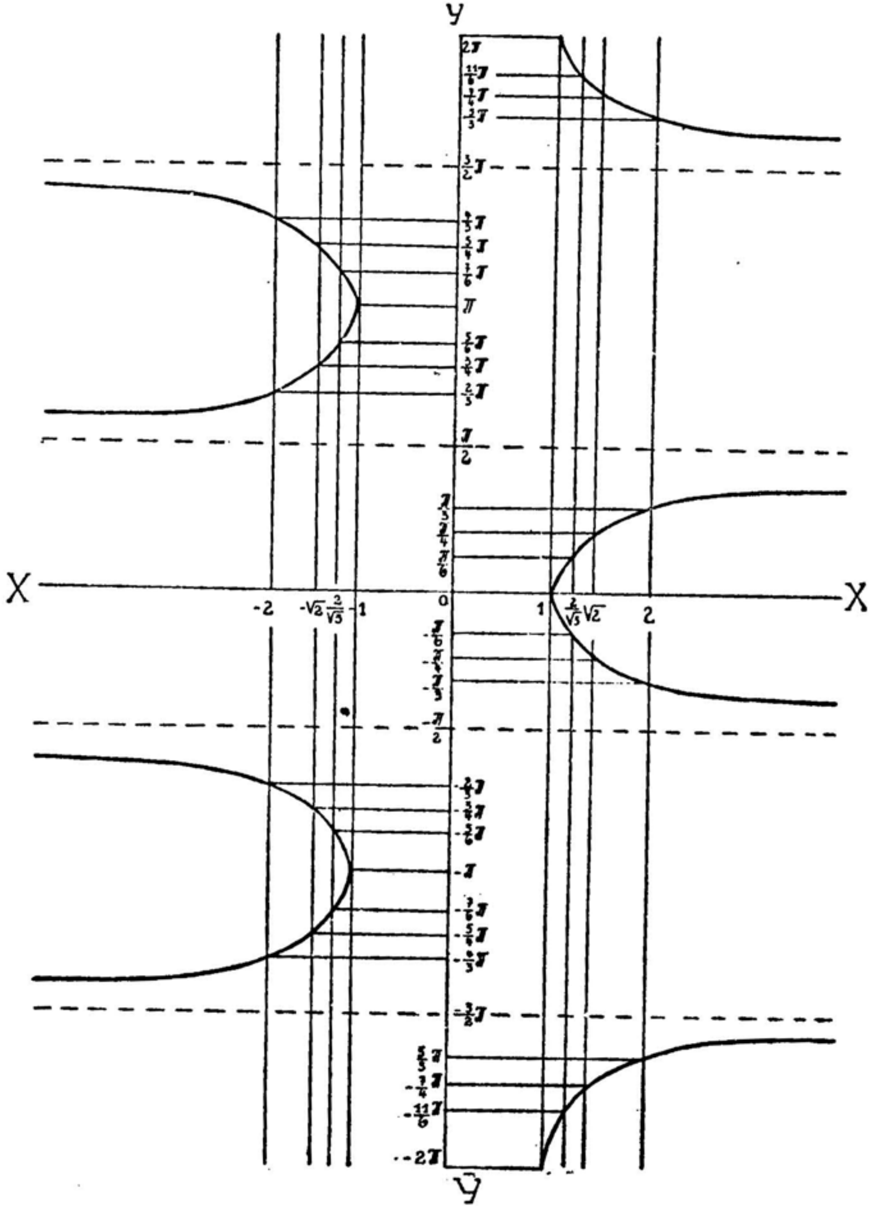


Рис. 28. Аркус-секансоїда.

П. 6. Графіку функції $y = \operatorname{arccsc} x$ збудуємо за таблицею:

csc arc　　　　　　　　　　csc arc

x	y			x	y		
∞	0		$2K\pi$	∞	0		$-2K\pi$
2	$\frac{\pi}{6}$		$(2K+\frac{1}{6})\pi$	-2	$\frac{\pi}{6}$		$-(2K+\frac{1}{6})\pi$
$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$		$(2K+\frac{1}{4})\pi$	$-\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$		$-(2K+\frac{1}{4})\pi$
$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{3}$		$(2K+\frac{1}{3})\pi$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{3}$		$-(2K+\frac{1}{3})\pi$
1	$\frac{\pi}{2}$		$(2K+\frac{1}{2})\pi$	-1	$-\frac{\pi}{2}$		$-(2K+\frac{1}{2})\pi$
$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3}\pi$		$(2K+\frac{2}{3})\pi$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{3}\pi$		$-(2K+\frac{2}{3})\pi$
$\sqrt{2}$	$\frac{3}{4}\pi$		$(2K+\frac{3}{4})\pi$	$-\sqrt{2}$	$-\frac{3}{4}\pi$		$-(2K+\frac{3}{4})\pi$
2	$\frac{5}{6}\pi$		$(2K+\frac{5}{6})\pi$	-2	$-\frac{5}{6}\pi$		$-(2K+\frac{5}{6})\pi$
$\pm\infty$	π		$(2K+1)\pi$	$\mp\infty$	$-\pi$		$-(2K+1)\pi$
-2	$\frac{7}{6}\pi$		$(2K+\frac{7}{6})\pi$	2	$-\frac{7}{6}\pi$		$-(2K+\frac{7}{6})\pi$
$-\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}\pi$		$(2K+\frac{5}{4})\pi$	$\sqrt{2}$	$-\frac{5}{4}\pi$		$-(2K+\frac{5}{4})\pi$
$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{3}\pi$		$(2K+\frac{4}{3})\pi$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{4}{3}\pi$		$-(2K+\frac{4}{3})\pi$
-1	$\frac{3}{2}\pi$		$(2K+\frac{3}{2})\pi$	1	$-\frac{3}{2}\pi$		$-(2K+\frac{3}{2})\pi$
$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{3}\pi$		$(2K+\frac{5}{3})\pi$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{5}{3}\pi$		$-(2K+\frac{5}{3})\pi$
$-\sqrt{2}$	$\frac{7}{4}\pi$		$(2K+\frac{7}{4})\pi$	$\sqrt{2}$	$-\frac{7}{4}\pi$		$-(2K+\frac{7}{4})\pi$
-2	$\frac{11}{6}\pi$		$(2K+\frac{11}{6})\pi$	2	$-\frac{11}{6}\pi$		$-(2K+\frac{11}{6})\pi$
$\mp\infty$	2π		$2(K+1)\pi$	$\pm\infty$	-2π		$-2(K+1)\pi$

VI. Графіка функції $y = \text{arccsc}\, x$

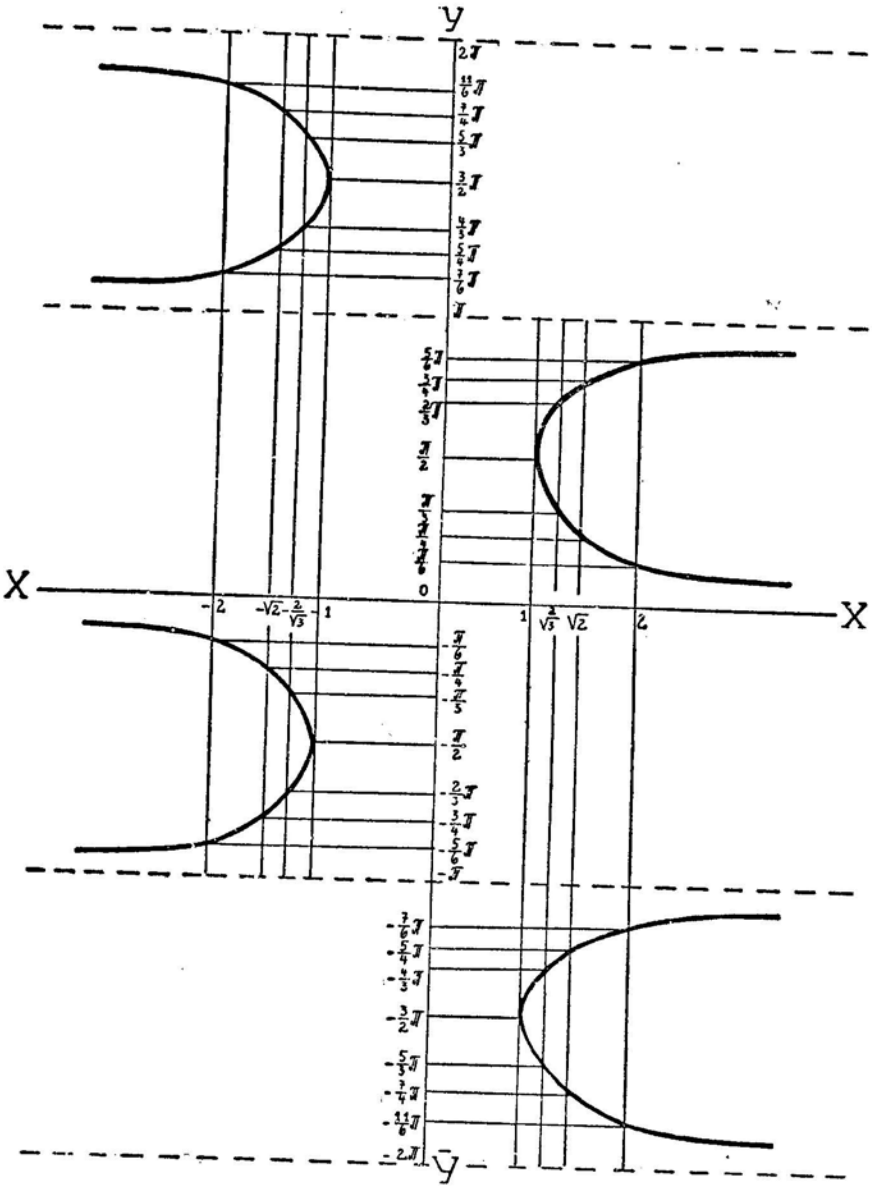


Рис. 29. Аркус-косекансоїда.

Помічені друкарські помилки

стор.	рядок		надруковано	має бути
5	1	знизу ліворуч	кут α	кут α'
7	15	„ „	кута α	кута β
7	12	„ праворуч	$\frac{c}{2}$; c	$\frac{c}{2} : c$
8	10	зверху „	30	30^0
9	14	„ „	Oa_1	OA_1
12	15	знизу ліворуч	$\alpha - 35^0$	$\alpha = 35^0$
13	14	зверху „	0X	$O\overline{X}$
16	11	знизу „	B	B_2
17	21	„ „	Визнаємо	Ознаємо
17	12	„ „	α	α_2
17	9	„ „	Xx	$X\overline{X}$
17	3	зверху праворуч	OA_2	ON_2
17	12	„ „	кута а	кута α
17	14	„ „	OB_2	OA_2
17	17	„ „	OB_2	OA_2
18	4	„ ліворуч	OB	OB_1
18	11	знизу „	за дачу	за дану
21	4, 5, 6	зверху праворуч	Cos β	Csc β
22	11	знизу ліворуч	або I	або I
23	15	„ „		У попередніх розділах ми вживали градусної міри кута, проте вживають ще іншої одиниці міри кута. А саме і т. д.
25	11	зверху праворуч	$(a - x)^2$	$(a + x)^2$
30	11	знизу ліворуч	1,09808	$\overline{1},09808$
30	5	„ „	1, 1863	$\overline{1}, 1863$
31	2	зверху „	1, 7556	$\overline{1}, 7556$
32	12	„ „	9, 7780	9, 7780 — 10
32	14	„ „	9, 7780	9, 7780 — 10
32	15	„ „	9, 7780	9, 7788 — 10
32	2	знизу праворуч	α	γ
36	4	„ ліворуч	$\text{Cos}^2\alpha$	Cos 22
36	7	„ прав.	$\text{Cos}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos}\,2\alpha}{2}}$	$\text{Cos}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos}2\alpha}{2}}$
42	8	„ лів.	бо $y = -\sqrt{x^2+1}$,	бо $y = +\sqrt{x^2+1}$
52	13	„ прав.	$2k + 1 . \Pi/9$	$(2k + 1)\,\Pi/2$