Ч. 5. [531 (02)]

На правах рукопису.

Ф. Гула

Теорія векторів

Видавниче т-во СІЯЧ при Українському Педаґоґічному Інституті ім. М. Драгоманова

Прага 1924 р.

ч. 5.

[531(02)]
На правах рукопису

Ф. Гула.

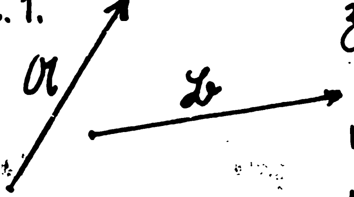
Теорія векторів

Лекції, читані в Укр. Вищ. Педагог. Інституті ім. М. Драгоманова у Празі.

Вид. тов. СіЯЧ при Укр. Вищ. Педаг. Інст. ім. М. Драгоманова
Прага - 1924 р.

Коли приглядаємося докладнійше різним, знаним з фізики величинам, то добачуємо між ними певну основну різницю. Деякі з них, як пр. маса, густота, температура і т.п. визначуються вповні через подання їх абсолютної вартости. Инші, як пр. сила, скорість, прискорення і т. п., вимагають до повного їх визначення не лише подання абсолютної вартости, але також і напряму. Величини першого роду назвемо СКАЛЯРНИМИ, або скалярами; величини другого роду ВЕКТОРОВИМИ, або ВЕКТОРАМИ. Скаляри будемо означувати латинськими буквами, а вектори готицькими. Графічно представляємо вектори при помочі відтинків

Рис. 1.



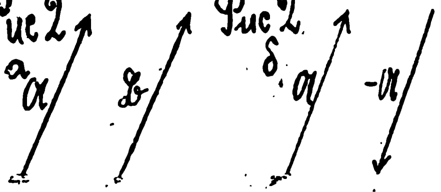
заосмотрених стрілками. Довжина відтинку дає тоді (по певній поділки) абсолютну вартість вектора, а стрілка його напрям, пр. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ на рис 1.

Вектор $\bar{\mathfrak{A}}$, котрого напрям є згідний з напрямом вектора $\mathfrak{A}$, а абсолютна вартість $|\bar{\mathfrak{A}}|=1$, назвемо одиничним вектором, такщо $\mathfrak{A}=A\bar{\mathfrak{A}}$ [1], коли $A=|\mathfrak{A}|$. При порівнуванню векторів треба уважати не лише на абсолютні вартости, але й на напрями. Тому два вектори, коли вони мають рівні абсолютні вартости й однакові напрями, назвемо рівними.

Отже рівність $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ (рис. 2a) заключує в собі дві рівности, а саме: $A=B$ і $\bar{\mathfrak{A}}=\bar{\mathfrak{B}}$.

Рис 2 a

Рис 2 б



Вектор, котрий з даним вектором має однакову абсолютну вартість, але противний напрям, назвемо відємним (рис. 2б).

Додавання і віднимання.

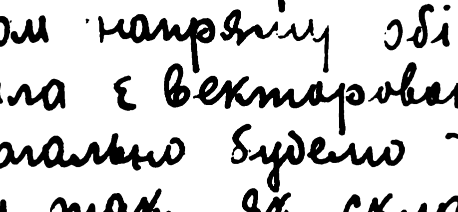
Томущо вектори здефініовані

---

1) Умовляємося приписувати дімензію $\mathfrak{A}$ його абсолютній величині A.

попередними увагами представляють новий тип величин, треба окремо умовлятися щодо аритметичних ділань тими величинами. Згадані умови улекшують нам певні з фізики знані досвіди. Нам відомо пр., що дві сили, котрі ділають на одну точку цілкого тіла, можна заступити одною висідною силою, яку дістаємо як перекутню рівнобічника збудованого на двох даних силах. Висідна сила заступає так під зглядом абсолютної вартости, як і під зглядом напряму обі складові. А що сила є векторовою величиною, то загально будемо додавати вектори так, як складаємо сили. До вектора $\mathfrak{A}$. додати вектор $\mathfrak{B}$. значить отже до кінця вектора $\mathfrak{A}$

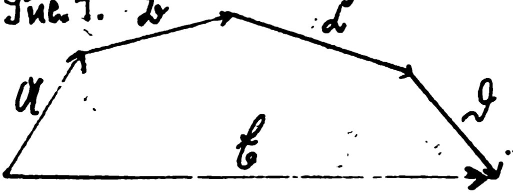
Рис. 3.



приложити вектор $\mathfrak{B}$ без зміни величини і напряму і получити початок $\mathfrak{A}$ з кінцем $\mathfrak{B}$ (рис. 3). В цей спосіб утворений вектор c є сумою a і b, що й пишемо: $c = a+b$.

З рис. 3 бачимо, що для векторової суми остає комутативний закон важним, зн.: $a+b = b+a$.

Дійсно коли до кінця вектора b приложимо вектор a без зміни напряму й величини і получимо початок b з кінцем a, дістанемо ту саму перекутню того самого рівнобічника. Коли при задаванню кількість векторів перевисшає число 2, то поступаємо в цей спосіб, що до суми перших двох додаємо знаним способом третій вектор, до нової суми перших двох додаємо знаним способом третій вектор, до нової суми четвертий і т.д. аж до послідного. Відтак лучимо початок першого вектора з кінцем послідного й дістаємо суму всіх попередніх векторів щодо величини й

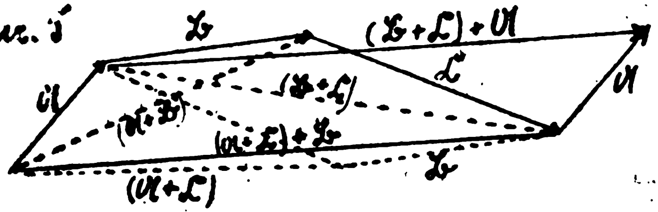
Рис.4.


напряму (рис 4) $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}$. Зі сказаного виходить ясно, що коли при додаванню більшої кількости векторів кінець послідного зійдеться з початком першого, то сума векторів виносить тоді зеро. (Колиб це сталося пр на рис 4, то вектор $\mathfrak{E}$ звився до точки).

Знаючи спосіб додавання більшої кількости векторів, легко ствердити правдивість закону асоціяції, а саме:

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})+\mathfrak{C} = \mathfrak{A}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}+\mathfrak{C})+\mathfrak{B} \quad (\text{рис.}5)$$

Рис. 5



Виведене правило додавання векторів остає важним і тоді, коли вони не лежать на одній площі (некомпланарні вектори). Про це переконує нас досвід знаний з фізики. В кождій точці простору, в котрім находиться наелектризоване тіло, ділає на одиницю наряду електрична сила F_1. Коли тепер, при існуючім уже електричнім наряді, впровадимо до заданого простору новий наряд, то в кождій точці зміниться електрична сила, а досвід учить, що $F = F_1 + F_2$, коли F_1 і F_2 представляють сили, котрі походять від окремих електричних нарядів. Треба додати, що складники векторової суми можуть бути довільно малими, а висказані закони даються представити при помочі інтеґрального рахунку.

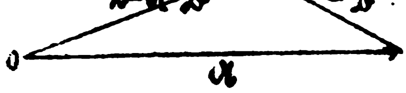
Віднимання векторів зводиться до додавання. Дійсно:

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + (-\mathfrak{B}),$$

а це значить: вектор $\mathfrak{B}$ віднимається від $\mathfrak{A}$ в той спосіб, що до вектора $\mathfrak{A}$ додається відємний вектор $\mathfrak{B}$.

Щоби найти отже різницю $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, треба до кінця вектора $\mathfrak{A}$ приложити вектор $\mathfrak{B}$ в противнім напрямі і получити початок $\mathfrak{A}$ з кінцем $\mathfrak{B}$ (рис. 6). $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$.

Рис. 6

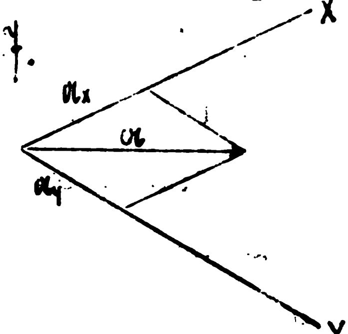


Розкладання векторів

Як із двох, або більше векторів

дістаємо через додавання один, так знов один даний вектор можна разложити на складові в певних напрямах. Коли (рис. 7.) маємо вектор $\mathfrak{A}$ і дві оси X, Y, то складові $\mathfrak{A}_x$ і $\mathfrak{A}_y$ вектора $\mathfrak{A}$ в напрямі заданих осій дістаємо через сконструювання рівнобіжника, якого перекутнею є $\mathfrak{A}$, а двома нерівнобіжними боками $\mathfrak{A}_x$ і $\mathfrak{A}_y$.

Рис. 7.



Якщо схочемо даний вектор разложити на два складові до себе нормальні вектори, то тоді даний вектор буде протипрямкою прямокутного трикутника, которого прямки творять складові вектори (рис. 8). Загально складова вектора в довільнім напрямі є його метом, котрий вкім напрямі прина-

Рис. 8.

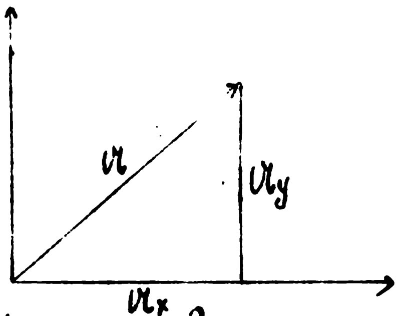
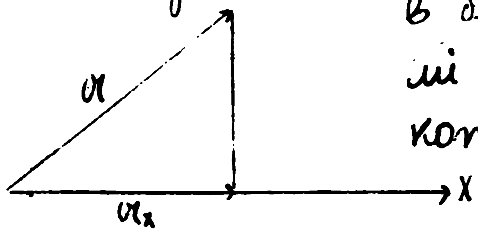


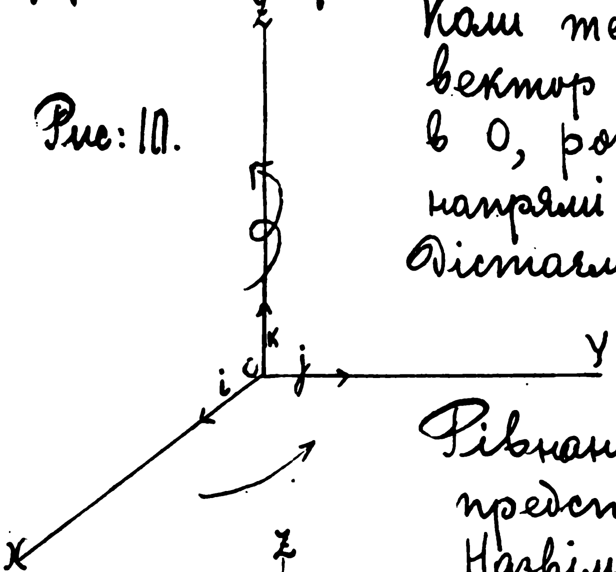
Рис. 9.



дає. $\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A} \cos(\mathfrak{A}X)$ (рис: 9). З послідного рівнання виходить, що не в кождім напрямі можна найти складовий даного вектора. $\mathfrak{A}_x$ буде іменно зером завсіди тоді, коли $\sphericalangle(\mathfrak{A}X) = 90°$, а це значить, що вектор не має складових в напрямі нормальнім до нього самого. Нормальний напрям до напряму вектора зветься поземним напрямом. Зі сказаного виходить, що всякий вектор перетинає нормально кожду поверхню, що є збором тих напрямів, для котрих він не має складового.
З рівнання для $\mathfrak{A}_x$ виходить, що для $\sphericalangle(\mathfrak{A}X) = 0$ маємо $\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}$. Тоді, як бачимо, складовий вектор є найбільший, рівний даному векторові так щодо абсолютної вартости, як і напряму.

Томущо при аналітичнім описі фізичних явищ уживаємо найчастійше триосеві прямокутної системи сорядних, треба зокрема розглянути розкладання вектора в напрямі згаданих осий. В тій цілі виберемо правозворотну систему сорядних, яку здефініюємо в цей спосіб, що за додатні напрями осій X, Y, Z приймемо такі, щоби рухови оси X в площі XY, в цілі доведення її по найкоротшій дорозі до положення оси Y, відповідав рух правозворотної труби в напрямі оси Z (рис 10)

Рис: 10.

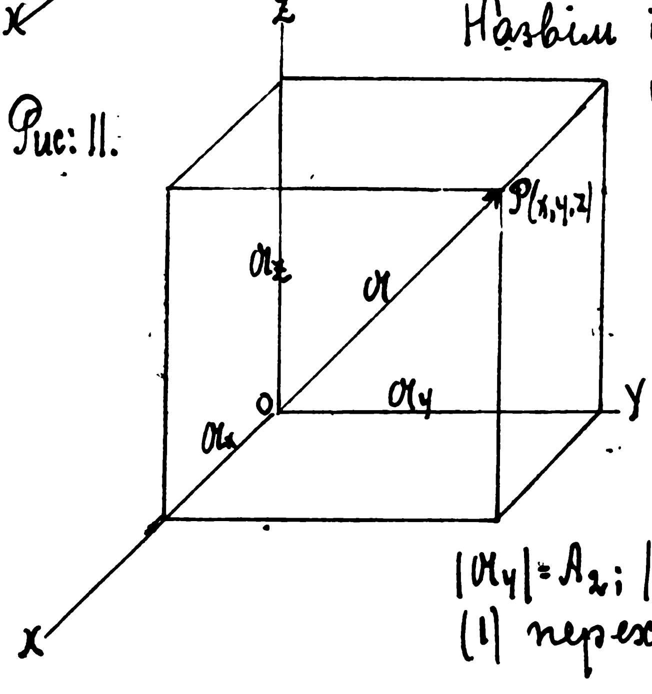


Коли тепер довільний вектор $\mathfrak{A}$, з початком в O, розложимо в напрямі X, Y, Z, то дістаємо:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{A}_y + \mathfrak{A}_z \quad \dots (1)$$

Рівнання (1) можемо представити інакше. Назвім іменно одиничні вектори в напрямах X, Y, Z (рис 10) через i, j, k, а абсолютні вартості складових відповідно через: $|\mathfrak{A}_x| = A_1$; $|\mathfrak{A}_y| = A_2$; $|\mathfrak{A}_z| = A_3$, то (1) переходить тоді

Рис: 11.



на: $\mathfrak{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ .... (2)

Але що $A_1\, A_2\, A_3$ відповідають вповні coрядним xyz кінцевої точки P вектора $\mathfrak{A}$, то (2) можна написати також у слідуючій формі:

$$\mathfrak{A} = xi + yj + zk \text{ .... } (3)$$

Коли ще означимо абсолютну вартість вектора $\mathfrak{A}$ через A, то на основі взору знаного з аналітичної геометрії дістаємо:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\,.$$

Для довільних двох векторів $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ дістаємо (2):

$$\mathfrak{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k \quad і \quad \mathfrak{B} = B_1 i + B_2 j + B_3 k.$$

Колиб $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, то це булоби можливе тоді й лише тоді, якщо рівними будуть відповідно всі три величини, що їх дані вектори визначують; а це значить, що лінійному рівнанню між векторами відповідають три рівнання між скалярними величинами.

<u>Вправи:</u> Які геометричні значіння мають рівнання:

1) $\mathfrak{A} = xi + yj$. 2) $\mathfrak{A}_1 = x\mathfrak{A}_2 + y\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4$. 3) $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 + x\mathfrak{A}_3$, при змінних x, y.

Скалярний добуток

Множення вектора через скалярне число дістаємо знов вектор, которого абсолютна вартість збільшиться тільки разів, кільки одиниць має скалярне число, а которого напрям є згідний з напрямом даного вектора.

Дійсно: $n\mathfrak{A} = \mathfrak{A}+\mathfrak{A}+\dots\dots+\mathfrak{A} = n\mathfrak{A}$.

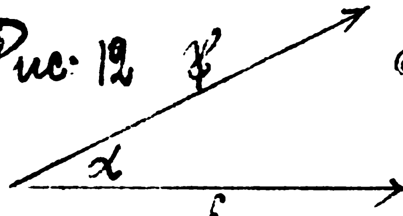
І: $|n\mathfrak{A}| = n|\mathfrak{A}|$. При множенню вектора через скалярне число остає важним закон дистрибутивний і асоціяційний:

$$m(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = m\mathfrak{A}+m\mathfrak{B} \quad і \quad n(m\mathfrak{A}) = m(n\mathfrak{A}) = mn\mathfrak{A}.$$

Дійсно: $m(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})+\dots\dots+$
$+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}+\mathfrak{A}+\dots\dots+\mathfrak{A})+(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}+\dots\mathfrak{B}) = m\mathfrak{A}+m\mathfrak{B}$

Без трудности можна провірити й другі дві рівности. Щоби здефініювати т. зв. скалярний добуток двох векторів, пригадаймо собі з механіки, в який спосіб з даної сили й дороги обчисляється праця? Знаємо, що сила й дорога є векторовими величинами, але праця виконана силою на певній дорозі є скаляром, которого вартість виносить (рис: 12):

Рис: 12



. $P s \cos\alpha$, коли P представляє абсолютну вартість сили $\mathfrak{P}$, а дороги $\mathfrak{s}$, а α є кутом, що його замикають $\mathfrak{P}$ і $\mathfrak{s}$. Опираючись на тім умовилися називати скалярним добутком двох векторів добуток їх абсолютних вартостей через cosinus замкненого ними кута. Означувати скалярний добуток 2-х векторів будемо в цей спосіб, що напишемо їх біля себе й замкнемо в скобку:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = AB\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \;\ldots\ldots\; (1)$$

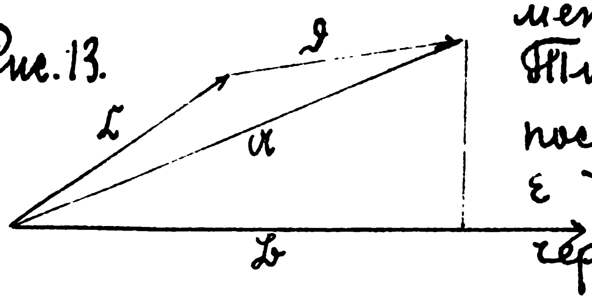
Тому що $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ є скалярною величиною, важним остається комутативний закон: $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{A})$. Коли вектор $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$, то $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = AB \cdot \cos 90^\circ = 0$. Зеровий отже вислід скалярного здобутку двох векторів вказує на те, що вони стоять до себе нормально – і відворотно – два нормальні зглядом себе вектори дають в скалярнім здобутку зеровий вислід. Праця сили нормальної до дороги є рівною зеру. Коли знов напрями векторів є згідні, то $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = AB\cos 0 = AB$. Виходить, що скалярний добуток двох векторів згідного напряму є рівний добуткові їх абсолютних вартостей. З того дістаємо: $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}^2) = AA = A^2$.

Опираючись на дефініції скалярного добутку, дістаємо для одиничних векторів i j k впроваджених передтим в прямокутній системі сорядних такі вислідки: $(ii)=1$, $(jj)=1$, $(kk)=1$, $(ij)=(ji)=0$, $(ik)=(ki)=0$, $(jk)=(kj)=0$. Щоби доказати важність дистрибутивного закону для скалярного добутку, вистарчить в рівнанню $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = AB\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ заступити $\mathfrak{A}$ сумою двох векторів: $\mathfrak{C}+\mathfrak{D}$ довести правдивість рівнання: $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{B}) + (\mathfrak{D}\mathfrak{B})$ або: $AB\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = CB\cos(\mathfrak{C}\mathfrak{B}) + DB\cos(\mathfrak{D}\mathfrak{B})$ або остаточно:

$$A\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = C\cos(\mathfrak{C}\mathfrak{B}) + D\cos(\mathfrak{D}\mathfrak{B}).$$

Коли нарисуємо вектори $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ і $\mathfrak{D}$ (рис. 13) то бачимо що дійсно мет $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ виносить $A\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ і є рівний сумі метів $\mathfrak{C}$ і $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{B}$.

Рис. 13.



Тим самим послідне рівнання є доказане, а через нього і дістрібутивний закон для скалярного добутку. Тоді найдем без найменших трудностів, що

$$(\bar{\mathfrak{A}}\bar{\mathfrak{B}}) = (iA_1 + jA_2 + kA_3)(iB_1 + jB_2 + kB_3) = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

Приймім, що нам даний одиничний вектор $\bar{\mathfrak{A}}$. Коли його розложити в напрямі трьох осий системи, то дістанемо: $\bar{\mathfrak{A}} = i\cos(\bar{\mathfrak{A}}X) + j\cos(\bar{\mathfrak{A}}Y) + k\cos(\bar{\mathfrak{A}}Z)$. Для другого одиничного вектора $\bar{\mathfrak{B}}$ дістаємо так само: $\bar{\mathfrak{B}} = i\cos(\bar{\mathfrak{B}}X) + j\cos(\bar{\mathfrak{B}}Y) + k\cos(\bar{\mathfrak{B}}Z)$. То утворенно з $\bar{\mathfrak{A}}$ і $\bar{\mathfrak{B}}$ скалярного добутку буде:

$$(\bar{\mathfrak{A}}\bar{\mathfrak{B}}) = \cos(\bar{\mathfrak{A}}X)\cos(\bar{\mathfrak{B}}X) + \cos(\bar{\mathfrak{A}}Y)\cos(\bar{\mathfrak{B}}Y) + \cos(\bar{\mathfrak{A}}Z)\cos(\bar{\mathfrak{B}}Z) = \cos\delta,$$

де δ представляє кут замкнений між напрямами векторів $\bar{\mathfrak{A}}$ і $\bar{\mathfrak{B}}$. Взір цей є знаний з аналітичної геометрії.

Обчисляючи з рівнання на $\bar{\mathfrak{A}}$ абсолютну вартість $\bar{\mathfrak{A}}$ найдемо:

$$1 = \sqrt{\cos^2(\bar{\mathfrak{A}}X) + \cos^2(\bar{\mathfrak{A}}Y) + \cos^2(\bar{\mathfrak{A}}Z)},$$

або: $1 = \cos^2(\bar{\mathfrak{A}}X) + \cos^2(\bar{\mathfrak{A}}Y) + \cos^2(\bar{\mathfrak{A}}Z)$ — звязок знаний також з аналітичної геометрії

Вправи:

1. Уважаючи боки трикутника векто-

рами, випровадити закон Carnot'a.
2. Найти реляцію: $a = b\cos(b\bar{a}) + c\cos(c\bar{a})$, коли a, b, c є боками трикутника, $\bar{a}$ одиничним вектором боку a.
3. Виказати, що сума квадратів перекутень рівнобічника є рівна подвійній сумі квадратів нерівнобічних боків.

Векторовий добуток.

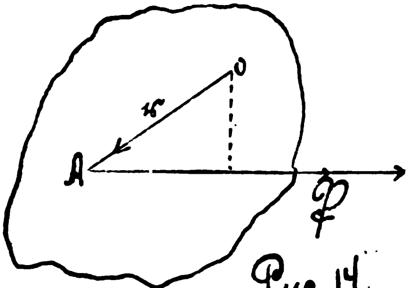


Рис 14.

Приймім, що на цінке тіло, зачіплене в точці O в цей спосіб, що може довкола неї виконувати оборот, ділає сила F. Статичним моментом, або моментом сили, називаємо тоді величину $Fr\sin(Fr)$.

Вона є вектором, котрого напрям визначуємо в цей спосіб, щоб обсерватор, який глядітиме в тім напрямі, бачив оборот тіла під впливом сили F в напрямі противнім рухови стрілки годинника. Бачимо отже, що з векторів F і r дістаємо новий вектор $\mathfrak{M}$, момент сили.

Опираючись на цьому примірі з механіки умовимося взагалі називати **векторовим добутком** — вектор утворений з даних векторів $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ в цей спосіб, що його абсолютна вартість є рівна добуткови абсолютних вартостий даних векторів через sinus кута замкненого ними, а напрям такий, що з векторами $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ дає правозворотний систем.[1]

Векторовий добуток з $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ означуємо через: $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$

Абсолютна вартість векторового добутку виносить, як знаємо $|[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]| = AB \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$, що представляє поверхню рівнобічника, збудованого на $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$.

1) Щоби вектори $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ творили правозворотний систем, мусить напрям $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ годитися з напрямом великого пальця правої руки, коли вказуючий палець іде в напрямі $\mathfrak{A}$ а середній у напрямі $\mathfrak{B}$.

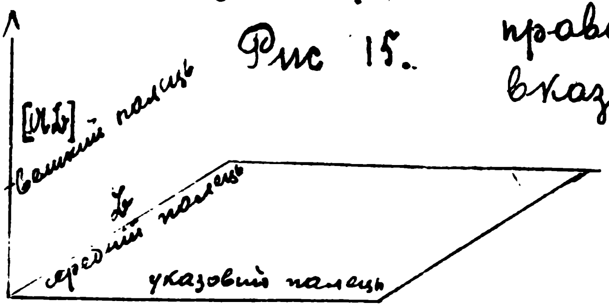


Рис 15.

По думці дефініції векторового добутку, не буде для нього важним комутативний закон.

Дійсно коли $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ творять правозворотну систему (рис.15), то $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ не дають такої самої системи (рис.16),

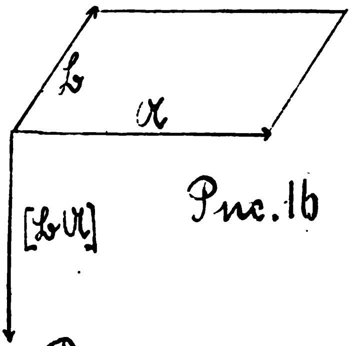


Рис. 16

але напрям $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]$ переходить на противний. Отже $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]$

Це виходить безпосередно із того, що

$$\sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = -\sin(\mathfrak{B}\mathfrak{A})$$

Для одиничних векторів i, j, k дістаємо такі висліди векторових добутків:

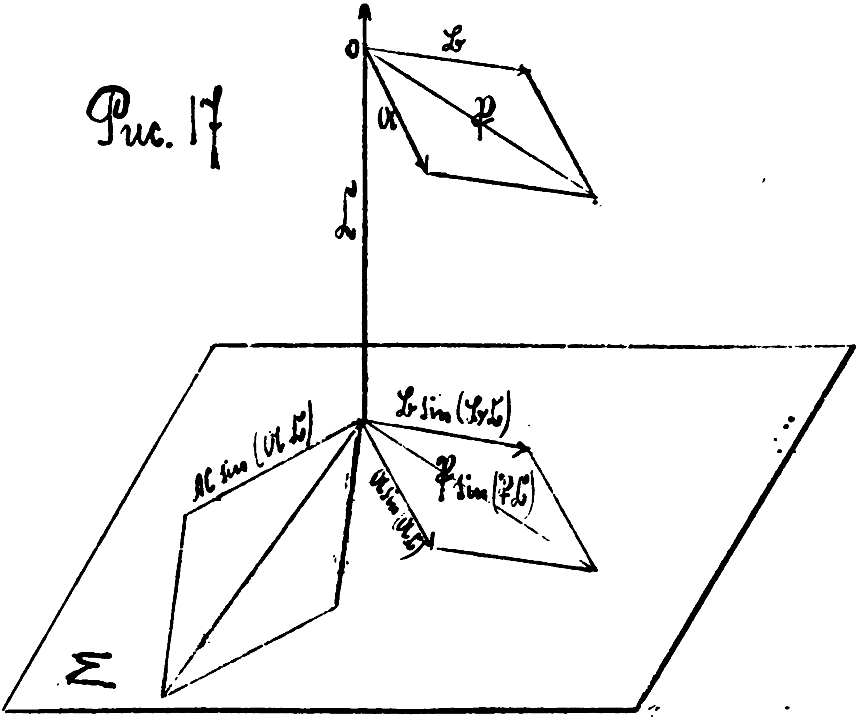
$$[ij]=k,\ [ji]=-k,\ [ik]=-j,\ [ki]=j,\ [jk]=i,\ [kj]=-i,$$
$$[ii]=[jj]=[kk]=0.$$

Взагалі: $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}] = A.A \sin 0 = 0$ або: зеровий вислід векторового добутку вказує на те, що дані вектори є до себе рівнобіжні.

Для векторового добутку є важний дістрибутивний закон.

Щоби це виказати, уявім собі, що вектори $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ виходять зі спільної точки O (рис.17). Заступім $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ їх сумою $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ і поведім площу Σ нормальную до $\mathfrak{C}$.

Рис. 17



Очивидна річ, що тоді мет вектора $\mathfrak{B}$ на площу Σ буде виносити: $\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{B}\mathfrak{L})$, мет вектора $\mathfrak{A}$ — $\mathfrak{A}\sin(\mathfrak{A}\mathfrak{L})$ і мет $\mathfrak{R}$ — $\mathfrak{R}\sin(\mathfrak{R}\mathfrak{L}) = (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\sin(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}, \mathfrak{L})$.

Коли тепер збільшимо елементи рівнобіжника на площі Σ у відношенню $C:1$, а цілий рівнобіжник обернемо в площі Σ о 90°, то абсолютна вартість першого боку буде виносити $AC\sin(\mathfrak{A}\mathfrak{L})$, а напрям буде нормальний до площі поведеної через $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{L}$. Цей перший бік буде отже представляти $[\mathfrak{A}\mathfrak{L}]$.

Повторяючи попередні розумовання слово за словом для другого боку, знайдемо, що він представляє $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$.

І так само для перекутні : $[\mathfrak{A}+\mathfrak{B},\mathfrak{C}]$

А що перекутня є векторовою сумою нерівнобіжних боків рівнобіжника, то $[\mathfrak{A}+\mathfrak{B},\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$, а тим самим дістрібутивний закон для векторового добутку доказаний.

Маючи доказану важність дістрібутивного закону, легко утворимо добуток із векторів $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$, коли вони дані своїми складовими в напрямі сорядних осий. Дійсно:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [(iA_1 + jA_2 + kA_3),(iB_1 + jB_2 + kB_3)] =$$
$$= i(A_2B_3 - A_3B_2) + j(A_3B_1 - A_1B_3) + k(A_1B_2 - A_2B_1)$$

або : $$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} .$$

Приміри з аналітичної геометрії.

Коли кінці векторів $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ мають сорядні $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, то:

$$\mathfrak{A} = ix_1 + jy_1 + kz_1 \quad , \quad \mathfrak{B} = ix_2 + jy_2 + kz_2 \quad \text{і}$$

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = i(y_1z_2 - z_1y_2) + j(z_1x_2 - x_1z_2) + k(x_1y_2 - y_1x_2) \;\ldots\ldots (1)$$

Взявши тепер під розвагу, що абсолютна вартість векторового добутку представляє поверхню рівнобіжника, або подвійну поверхню трикутника, збудованого на $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$, то, коли приймемо

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{L} = il_x + jl_y + kl_z \;,$$

дістанемо: $|L| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$.

По вставленню відповідних вартостей за $C_x\, C_y\, C_z$ з рівнання (1) маємо подвійну поверхню трикутника:

$$2F = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

Поверхня довільного трикутника в просторі.

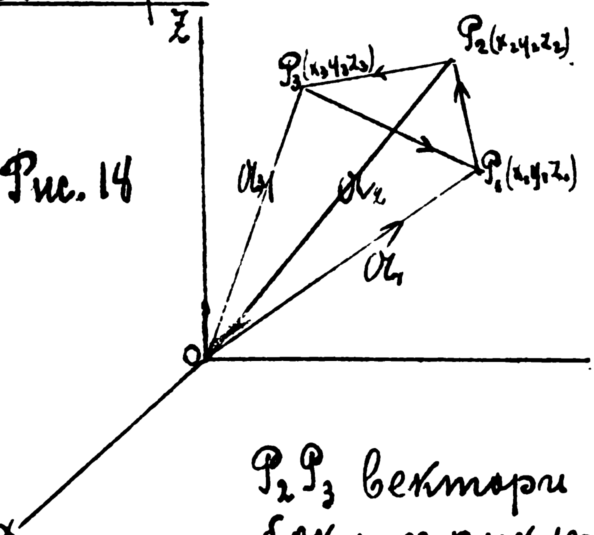


Рис. 14

Нехай точки $P_1 P_2 P_3$ представляють вершки трикутника. Коли з початку сорядних O поведемо до $P_1 P_2 P_3$ вектори $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$, то боки трикутника будуть:

$P_1P_2 = \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1$; $P_2P_3 = \mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2$; $P_3P_1 = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3$.

Подвійна поверхня трикутника є, як знаємо, рівною векторовому добуткові двох боків.

Отже: $2F = [(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1),(\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2)] = [\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3] - [\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2] - [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3] + [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]$, а що $[\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2] = 0$, то:

$2F = [\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3] - [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3] + [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]$.

Тому одначе, що:

$\mathfrak{A}_1 = ix_1 + jy_1 + kz_1$; $\mathfrak{A}_2 = ix_2 + jy_2 + kz_2$; $\mathfrak{A}_3 = ix_3 + jy_3 + kz_3$,

то:

$$2F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=$$

$$=i(y_2z_3-z_2y_3)-j(x_2z_3-z_2x_3)+k(x_2y_3-y_2x_3)+i(y_1z_2-z_1y_2)-$$

$$-j(x_1z_2-z_1x_2)+k(x_1y_2-y_1x_2)-i(y_1z_3-z_1y_3)+j(x_1z_3-z_1x_3)-$$

$$-k(x_1y_3-y_1x_3)=i(y_2z_3-z_2y_3-y_1z_3+y_1z_2+y_3z_1-z_1y_2)+$$

$$+j(x_1z_3-x_1z_2-x_2z_3+z_2x_3+z_1x_2-z_1x_3)+k(x_1y_2-x_1y_3-y_1x_2+y_1x_3+x_2y_3-y_2x_3)=$$

$$=i\{(y_2z_3-z_2y_3)-y_1(z_3-z_2)+z_1(y_3-y_2)\}+j\{x_1(z_3-z_2)-(x_2z_3-z_2x_3)+$$

$$+z_1(x_2-x_3)\}+k\{x_1(y_2-y_3)-y_1(x_2-x_3)+(x_2y_3-y_2x_3)\}=$$

$$i\left\{\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix} 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix}\right\}+$$

$$+j\left\{x_1\begin{vmatrix} 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix}\right\}+k\left\{x_1\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right\}=$$

$$=i\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}+j\begin{vmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

По означенню сочинників при i, j, k через $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, дістанемо:

$$2F=i\Delta_1+j\Delta_2+k\Delta_3,$$

а абсолютна вартість подвійної поверхні трикутника буде:

$$2F=\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2}.$$

Вектор $2F$ є очивидно нормальний до площі трикутника.

Cosin-уси кутів, які він замикає з осями системи найдемо з рівнань:

$$\cos\alpha=\frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2}};\quad \cos\beta=\frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2}}\quad і$$

$$\cos\gamma=\frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2}}.$$

Приймемо тепер два одиничні вектори $\bar{\mathfrak{A}}_1$ і $\bar{\mathfrak{A}}_2$ у формі:

$$\bar{\mathfrak{A}}_1 = i\alpha_1 + j\beta_1 + k\gamma_1 \quad ; \quad \bar{\mathfrak{A}}_2 = i\alpha_2 + j\beta_2 + k\gamma_2 .$$

Аналогічно до попереднього найдемо:

$$\left|\left[\bar{\mathfrak{A}}_1 \bar{\mathfrak{A}}_2\right]\right| = \sin\delta = \sqrt{\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}^2} \;,$$

причім δ означує кут замкнений між напрямами $\bar{\mathfrak{A}}_1$ і $\mathfrak{A}_2$.

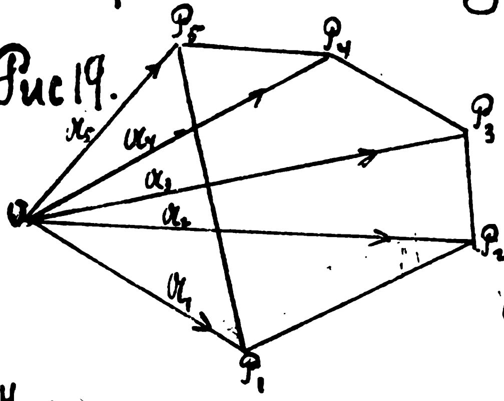
По вирахуванню визначників під корінем дістанемо:

$$\sin\delta = \sqrt{(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)^2 + (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2}.$$

Взір цей дає sinus кута, що його замикають прямі при помочі cosin-усів кутів, котрі ті прямі творять з осями системи. $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ і $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$, як складові одиничних векторів $\bar{\mathfrak{A}}_1$ і $\mathfrak{A}_2$ в напрямі осий системи є дійсно cosin-усами згаданих кутів.

Поверхня многокутника.

Рис 19.



Нехай (рис. 19) точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 представляють верхи пятикутника. З вибраного початку O ведемо до $P_1 \dots P_5$ вектори $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_5$.

Подвійна поверхня пятикутника:

$$2F = [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2] + [\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3] + [\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4] + [\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_5] - [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_5].$$

Але що $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_5] = -[\mathfrak{A}_5\mathfrak{A}_1]$ то:

$$2F = [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2] + [\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3] + [\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4] + [\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_5] + [\mathfrak{A}_5\mathfrak{A}_1].$$

Аналогічно подвійна поверхня n-кутника буде:

$$2F = [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2] + [\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3] + \dots\dots + [\mathfrak{A}_{n-1}\mathfrak{A}_n] + [\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_1].$$

Мет замкненого многокутника на даний напрям.

Коли боки пятикутника (рис. 19) представлені векторами додамо, то дістанемо:

$$(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1) + (\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2) + (\mathfrak{A}_4-\mathfrak{A}_3) + (\mathfrak{A}_5-\mathfrak{A}_4) + (\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_5) = 0,$$

а для кожного замкненого многокутника аналогічно:

$$(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1) + (\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2) + \dots\dots + (\mathfrak{A}_n-\mathfrak{A}_{n-1}) + (\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_n) = 0.$$

Помноживши це рівняння скалярно через одиничний вектор довільного напряму $\bar{N}$ одержуємо:

$$(\bar{N}, \mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1) + (\bar{N}, \mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_2) + \dots\dots + (\bar{N}, \mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_n) = 0$$

По означенню через $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n$ кутів, що їх замикають боки многокутника з напрямом $\bar{N}$, будемо мати:

$$P_1P_2\cos\delta_1 + P_2P_3\cos\delta_2 + \dots + P_nP_1\cos\delta_n = 0,$$

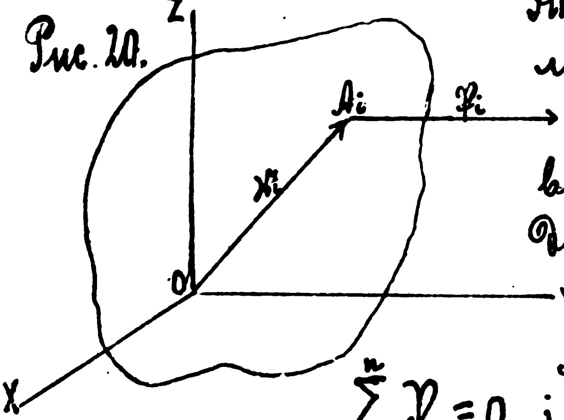
що представляє зміст знаного проекційного закона.

Приміри зі статики.

Свобідне цілке тіло, на котре ділає

систем сил $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots\ldots \mathfrak{P}_n$ в точках зачіпу $A_1, A_2, \ldots A_n$ є лише тоді в рівновазі, коли вислідна сила й вислідний момент сили є з огляду на принятку точку зером (рис. 20).

Рис. 20.



Томущо сила й момент сили є векторами, то висказані услівя дадуться написати в слідуючій формі:

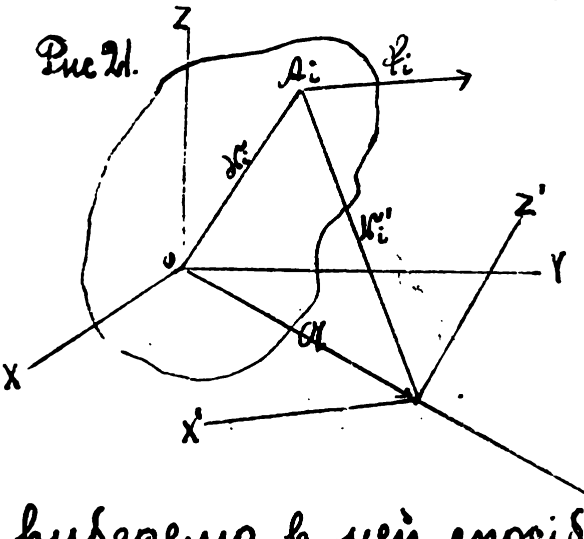
$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n} [\mathfrak{r}_i \mathfrak{P}_i] = 0$$

причім $\mathfrak{r}_i$ означує провідний луч точки A_i з початку системи сорядних 0.

Коли під впливом ділання заданої системи сил тіло не находиться в рівновазі, тоді $\sum \mathfrak{P}_i$ представляє вислідну силу, а $\sum_1^n [\mathfrak{r}_i \mathfrak{P}_i]$ вислідний момент з огляду на точку 0. Зі зміною положення початку сорядних 0 - зміниться загально й вартість вислідного моменту сили. Нехай отже положення нового початку сорядних $0'$ (рис 21) представляє вектор $\mathfrak{A}$, котрий іде з 0 до $0'$; з рис. 21. читаємо тоді:

$\mathfrak{r}_i = \mathfrak{A} + \mathfrak{r}_i'$, що вставлене в попередній взір на момент сили

Рис 21.



дає: $\sum_1^n[r_i\mathfrak{P}_i] = \sum_1^n[r_i'\mathfrak{P}_i] + \sum_1^n[\mathfrak{A}\mathfrak{P}_i]$, причім r_i' є провідний луч точки A_i з O'. Коли початок нового системи сорядних O' виберемо в цей спосіб, щоб

$$\sum_1^n[\mathfrak{A}\mathfrak{P}_i] = [\mathfrak{A}\sum_1^n\mathfrak{P}_i] = 0$$

що станеться завсігди тоді, коли напрям $\mathfrak{A}$ буде згідний із напрямом вислідної сили $\sum^n\mathfrak{P}_i$ — то:

$$\sum_1^n[r_i\mathfrak{P}_i] = \sum_1^n[r_i'\mathfrak{P}_i],$$

а це значить, що точку, до котрої відносимо момент сили, можна довільно пересунути в напрямі вислідної сили без зміни вартости вислідного моменту.

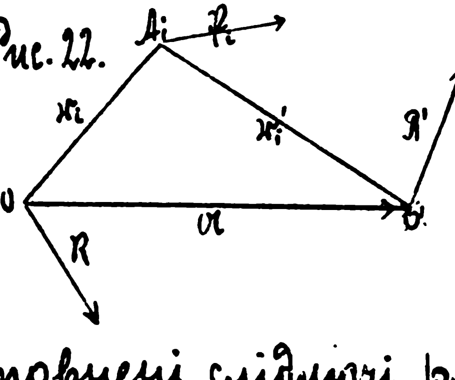
Приймім тепер, що цілке тіло не є свобідне, але зачіплене стало в точці O, довкола котрої може обертатись. Очевидна річ, що тоді рівновага системи не зміниться через додання до існуючих уже сил нової сили R довільної величини й напряму з точкою зачіпу в 0. Дійсно, коли точку 0 виберемо за початок сорядних, то услівя рівноваги представляться у формі:

$$\sum_1^n P_i + R = 0 \quad \text{і} \quad \sum_1^n [r_i P_i] + [0, R] = 0$$

З тих двох рівнань бачимо, що силу R можна завсігди так дібрати, щоби сповнене було перше услівє — значить —, що $\sum_1^n P_i$ може приймати кожду довільну вартість. Для існування рівноваги остає лише друге услівє, а саме $\sum_1^n [r_i P_i] = 0$, в котрім додана сила R не грає жадної ролі.

Коли вкінци прикріпимо цілке тіло в двох точках сталих 0 і 0' так, щоби могло обертатися довкола оси $00' = \mathfrak{A}$, то рівновага систему не зміниться, якщо в точках 0 і 0' зачіпимо довільні щодо величини і напряму сили R і R' (рис 22)

Рис. 22.



Для найдення услівя рівноваги, виберім точку 0' за початок сорядних. Щоби наступила рівновага, мусять бути сповнені слідуючі рівнання:

$$\sum_1^n P_i + R + R' = 0 \quad \text{і} \quad \sum_1^n [r_i - \mathfrak{A}, P_i] - [\mathfrak{A} R] = 0$$

Друге рівнання можемо написати у формі: $\sum_1^n [r_i P_i] - [a \sum P_i] - [a R] = 0$,
або по узглядненню першого рівнання:

$$\sum_1^n [r_i P_i] + [a R'] = 0$$

З послїдного рівнання читаємо слїдуюче: вектор $[a R']$ є безумовно нормальний до a; сповненнє рівнання, а тим самим і рівновага вимагає, щоби також вектор $\sum_1^n [r_i P_i]$ був нормальний до a.

Тїло отже, котре може обертатися довкола оси є тодї і лише тодї в рівновазі, коли вислїдний момент дїлаючих сил

$$\mathfrak{M} = \sum_1^n [r_i P_i]$$

сповняє услівє:

$$(\mathfrak{M} a) = 0.$$

Добуток з трьох векторових чинників.

Коли маємо множити через себе скалярний добуток векторів a і b через третїй вектор c, то означимо це: $(a b) c$.

Вираз цей є вектором, котрого абсолютна вартість виносить

очивидно $ABC\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$,
а котрого напрям є згідний з напрямом вектора $\mathfrak{C}$.

Можемо отже написати

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = ABC\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{C}}),$$

якщо $\bar{\mathfrak{C}}$ означає одиничний вектор в напрямі $\mathfrak{C}$.

Скалярно помножений векторовий добуток $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ через вектор $\mathfrak{C}$ представимо у формі:

$$([\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}), \text{ або прямо: } [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}.$$

Добуток цей є скалярною величиною і є, у випадку, коли маємо дані безпосередньо вектори $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, а не $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ і $\mathfrak{C}$, представляє обсяг призми, котрої грани творять вектори: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$.

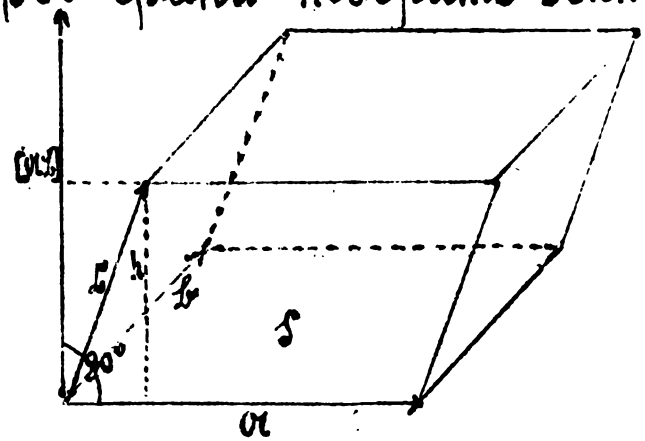


Рис. 23.

Дійсно $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ є чисельно рівний поверхні рівнобіжника збудованого на $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ і нормальний до цеї поверхні. Добуток

$\mathfrak{L}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ дає поверхню рівнобіжника множену через мет вектора $\mathfrak{L}$ в напрямі $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, отже через висоту призми. Тому об'єм призми

$$V=[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{L}=S.h.$$

Зокрема важним являється добуток $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{L}$, коли йому надамо слідуюче значіння.

З умови про векторовий добуток знаємо, що рівнобіжник збудований на $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ треба уважати векторовою величиною, якої напрям є прямовий до площі рівнобіжника.

А що довільну ограничену поверхню можна розділити на певне число рівнобіжників, то попередня увага відноситься до кождої ограниченої поверхні.

Коли ж тепер, по думці сказаного, вектор $\mathfrak{O}$ буде представляти поверхню, а вектор $\mathfrak{A}$ певний в просторі, через который переходить $\mathfrak{O}$, сталий вектор, то умовимося називати скалярний добуток $(\mathfrak{A}\mathfrak{O})$ **током вектора $\mathfrak{A}$ через поверхню $\mathfrak{O}$.**

Щоби звязати з цим терміном авний зміст, уявім собі, що вектор $\mathfrak{A}$ представляє силу. Її абсолютну вартість можна визначити при помочі т. зв. ліній сил. Вистарчить уявити собі, що через одиничну поверхню $\mathfrak{J}$ прямову до напряму ділання сили $\mathfrak{A}$ переходить $A = |\mathfrak{A}|$ ліній сил, а скалярний добуток $(\mathfrak{A}\mathfrak{J}) = A.1.\cos 0° = A$ дає ток вектора $\mathfrak{A}$ через одиничну поверхню $\mathfrak{J}$.

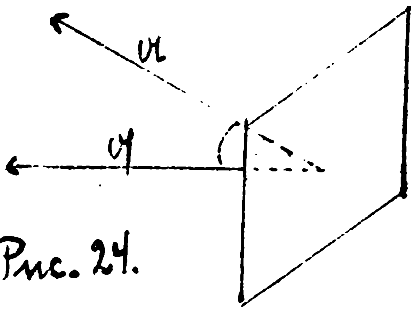


Рис. 24.

Коли напрям сили $\mathfrak{A}$ є різний від напряму поверхні $\mathfrak{J}$ (рис. 24), то кількість ліній сил, котрі переходять прямово через поверхню $\mathfrak{J}$, виносить: $(\mathfrak{A}\mathfrak{J})$.

Ясно отже, що вираз $\underline{\mathfrak{L}[\mathfrak{A}\mathfrak{L}]}$, як скалярний добуток двох векторів, можемо уважати загально током вектора $\mathfrak{L}$ через поверхню $[\mathfrak{A}\mathfrak{L}]$

Коли тепер ограничений простор, у якім вектор $\mathfrak{A}$ є суцільно розміщений, поділемо рядом трьох до себе нормальних площ на безконечну кількість просторних елементів (рис. 25), то ток вектора $\mathfrak{A}$ через поверхню, що ограничує цей простір, є рівний сумі векторових токів через поверхні простірних елементів.

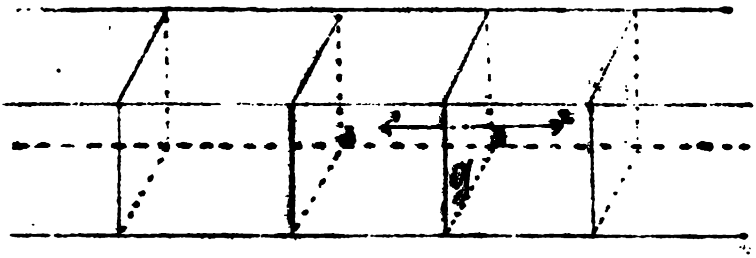


Рис. 25.

Дійсно кожда стіна простірного елементу ріжниться від прилягаючої стіни сусідного елементу знаком.

Стіна q елементу I представлена стрілкою 2, а прилягаюча до неї стіна сусідного елементу II, рівна що до абсолютної вартости попередній, представляється стрілкою 1. Їх знаки, як бачимо з рисунку дійсно ріжняться. При обчислюванню векторового току множимо згадані поверхні через той самий вектор. Ці добутки дадуть у сумі зеро, а лишаться лише векторові токи через елементи замикаючої поверхні.

По розложенню векторів $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ в напрямі трьох осей системи, обговорюваний добуток представиться:

$$\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = (iC_1+jC_2+kC_3)[i(A_2B_3-A_3B_2)+j(A_3B_1-A_1B_3)+k(A_1B_2-A_2B_1)] = C_1(A_2B_3-A_3B_2)+C_2(A_3B_1-A_1B_3)+C_3(A_1B_2-A_2B_1).$$

Або:

$$\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

а це значить, що:

$$\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}].$$

Елементи тричленого добутку $\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ можна отже циклічно перемінювати без зміни вартости самого добутка.

Що вартість тричленного добутка $\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ не залежить від циклічної зміни елементів, виходить безпосередно, коли пригадаємо, що вартість цього добутка визначує обсяг призми.

Дійсно обсяг цей не завнсить від вибору певної стіни за основу.

Коли в добутку: $\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ змінимо напрями всіх чинників на противні, то $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ не змінить знаку, але $\mathfrak{C}$ змінить, а тим самим $\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ змінить також знак. Виходить, що тричленний добуток, хотяй скалярний, залежить прецінь в певній мірі від напряму.

Такі скалярні величини, що міняють

знак при зміні напрямів назвемо величинами псевдоскалярними, або після Klein'а скалярами другого роду. Коли вектор $\mathfrak{C}$ лежить у тій самій площі, що вектори $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$, тоді обсяг призми збудованої на згаданих векторах є зером, або $\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]=0$. До того самого висновку можемо дійти безпосередно. Можна іменно, в випадку компляпарности векторів $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, представити вектор $\mathfrak{C}$ через $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$: $\mathfrak{C}=x\mathfrak{A}+y\mathfrak{B}$.

Тоді:

$$\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]=(x\mathfrak{A}+y\mathfrak{B})[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]=x\mathfrak{A}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]+y\mathfrak{B}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]=$$
$$=x\mathfrak{B}[\mathfrak{A}\mathfrak{A}]+y\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{B}]=0.$$

Тричленному добуткові: $\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ можна дати ще й таке значіння:

Кількість води, яка в одиниці часу перепливає через дану довільну — що до величини й положення поверхню — є рівна масі, котра міститься в циліндрі, що його основою є поверхня $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, а боком вектор скорости води $\mathfrak{C}$ на данім місці — отже: $\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$.

Векторовий добуток: $\boxed{[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}]}$

В цілі вираховування цього добутка, розложім вектори $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ в напрямі трьох осий системи. Тоді дістанемо:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = i(A_2B_3 - A_3B_2) + j(A_3B_1 - A_1B_3) + k(A_1B_2 - A_2B_1)$$
приймім:
$$\mathcal{E}_1 = A_2B_3 - A_3B_2\,;\quad \mathcal{E}_2 = A_3B_1 - A_1B_3\,;\quad \mathcal{E}_3 = A_1B_2 - A_2B_1\,,$$
або: $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{f} = i\mathcal{E}_1 + j\mathcal{E}_2 + k\mathcal{E}_3$, то
$$[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}] = [\mathfrak{f}\mathfrak{C}] = i(\mathcal{E}_2C_3 - \mathcal{E}_3C_2) + j(\mathcal{E}_3C_1 - \mathcal{E}_1C_3) + k(\mathcal{E}_1C_2 - \mathcal{E}_2C_1).$$
Коли в це послідне рівнання вставимо вартости за $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$, то
$$[\mathfrak{f}\mathfrak{C}] = i\{(A_3B_1 - A_1B_3)C_3 - C_2(A_1B_2 - A_2B_1)\} + j\{C_1(A_1B_2 - A_2B_1) -$$
$$-(A_2B_3 - A_3B_2)C_3\} + k\{C_2(A_2B_3 - A_3B_2) - C_1(A_3B_1 - A_1B_3)\}.$$
або по відповідним упорядкуванню:
$$[\mathfrak{f}\mathfrak{C}] = iB_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) + jB_2(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) +$$
$$+ kB_3(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - iA_1(B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3) -$$
$$- jA_2(B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3) - kA_3(B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3) =$$
$$= (A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3)(iB_1 + jB_2 + kB_3) - (B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3)\cdot$$
$$\cdot(iA_1 + jA_2 + kA_3) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})\mathfrak{B} - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})\mathfrak{A}.$$
Остаточно отже:
$$[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}] = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})\mathfrak{B} - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})\mathfrak{A}.$$
До послідного можна дійти на чисто векторовій дорозі не уживаючи пів-декартівської методи.

Векторовий добуток стоїть іменно прямово до площі, котру визначують векторові чинники. В нашім випадку отже $[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}]$ стоїть прямово до $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]:\mathfrak{C}$, а тимсамим мусить лежати на площі рівнобіжника визначеного через $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$. Тому можна його представити в формі: $[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}] = x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B}$.

До вичислення добутку треба отже найти x і y. В тій цілі приймім одиничний вектор „i" в напрямі $\mathfrak{B}$, а одиничний вектор „j" на площі, визначеній векторами $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$.

Тоді буде: $\mathfrak{B}=B_1 i$, $\mathfrak{A}=A_1 i+A_2 j$, $\mathfrak{C}=C_1 i+C_2 j+C_3 k$, а наш добуток

$$[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}] = [[(A_1 i+A_2 j), B_1 i]\mathfrak{C}] = [-A_2B_1 k\mathfrak{C}] = -A_2B_1[k\mathfrak{C}] =$$
$$= -A_2B_1[k(C_1 i+C_2 j+C_3 k)] = -A_2B_1(jC_1 - iC_2) = -A_2B_1C_1 j + A_2B_1C_2 i.$$

Цей вислід мусить бути рівний:
$x\mathfrak{A}+y\mathfrak{B}$, або $-A_2B_1C_1 j + A_2B_1C_2 i = x\mathfrak{A}+y\mathfrak{B} = x(A_1 i+A_2 j)+yB_1 i$
з чого: $i(xA_1+yB_1)+jxA_2 = -A_2B_1C_1 j + A_2B_1C_2 i$,
звідки: $xA_2 = -A_2B_1C_1$; і $xA_1+yB_1 = A_2B_1C_2$.

З послідних рівнань дістаємо прямо:
$x=-B_1C_1$; $y=A_1C_1+A_2C_2$.

Але зогляду на приняті одиничні вектори маємо: $x=-(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$; $y=(\mathfrak{A}\mathfrak{C})$.

Остаточно отже:

$$[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}] = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})\mathfrak{B} - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})\mathfrak{A}$$

згідно з попереднім вислідом.

Розглянемо ще такі рівнання:

$$[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}] = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})\mathfrak{B} - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})\mathfrak{A}; \qquad (1)$$
$$[[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]\mathfrak{A}] = (\mathfrak{B}\mathfrak{A})\mathfrak{C} - (\mathfrak{C}\mathfrak{A})\mathfrak{B}; \qquad (2)$$
$$[[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]\mathfrak{B}] = (\mathfrak{C}\mathfrak{B})\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}; \qquad (3)$$

По додаванню сторонами рівнань (1),(2),(3) дістанемо:

$$[[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\mathfrak{c}]+[[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\mathfrak{a}]+[[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]\mathfrak{b}]=(\mathfrak{a}\mathfrak{c})\mathfrak{b}-(\mathfrak{b}\mathfrak{c})\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}\mathfrak{a})\mathfrak{c}-(\mathfrak{c}\mathfrak{a})\mathfrak{b}+(\mathfrak{c}\mathfrak{b})\mathfrak{a}-(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}=0$$

<u>Скалярний добуток:</u> $([\mathfrak{a}\mathfrak{b}][\mathfrak{c}\mathfrak{d}])$.

Приймім: $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]=\mathfrak{f}$, то по вставленню дістанемо: $([\mathfrak{a}\mathfrak{b}][\mathfrak{c}\mathfrak{d}])=\mathfrak{f}[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]=\mathfrak{d}[\mathfrak{f}\mathfrak{c}]=\mathfrak{d}[[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\mathfrak{c}]=\mathfrak{d}\{(\mathfrak{a}\mathfrak{c})\mathfrak{b}-(\mathfrak{b}\mathfrak{c})\mathfrak{a}\}=(\mathfrak{a}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{d})-(\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\mathfrak{d})$ — отже вислід чисто скалярний

<u>Векторовий добуток:</u> $[[\mathfrak{a}\mathfrak{b}][\mathfrak{c}\mathfrak{d}]]$.

Коли й тут поставимо: $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]=\mathfrak{f}$, то: $[[\mathfrak{a}\mathfrak{b}][\mathfrak{c}\mathfrak{d}]]=[\mathfrak{f}[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]]=\mathfrak{c}(\mathfrak{f}\mathfrak{d})-\mathfrak{d}(\mathfrak{f}\mathfrak{c})=\mathfrak{c}\{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\mathfrak{d}\}-\mathfrak{d}\{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\mathfrak{c}\}$.

<u>Розкладання векторів</u> в трьох довільних напрямах, що не лежать на тій самій площі.

З послідніх відступі ми випровадили рівнання:

$$[[\mathfrak{a}\mathfrak{b}][\mathfrak{c}\mathfrak{d}]]=\mathfrak{c}\{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\mathfrak{d}\}-\mathfrak{d}\{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\mathfrak{c}\};$$

З другої сторони:

$$[[\mathfrak{a}\mathfrak{b}][\mathfrak{c}\mathfrak{d}]]=-[[\mathfrak{c}\mathfrak{d}][\mathfrak{a}\mathfrak{b}]]=-\mathfrak{a}\{[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]\mathfrak{b}\}+\mathfrak{b}\{[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]\mathfrak{a}\}.$$

З обох рівнань на $[[\mathfrak{a}\mathfrak{b}][\mathfrak{c}\mathfrak{d}]]$ — дістанемо:

$$\mathfrak{c}\{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\mathfrak{d}\}-\mathfrak{d}\{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\mathfrak{c}\}=-\mathfrak{a}\{[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]\mathfrak{b}\}+\mathfrak{b}\{[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]\mathfrak{a}\}\ -$$

звідки:

$$\mathfrak{D}\{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}\} = \mathfrak{A}\{[\mathfrak{D}\mathfrak{C}]\mathfrak{B}\} + \mathfrak{B}\{[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]\mathfrak{A}\} + \mathfrak{C}\{[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]\mathfrak{D}\};$$

тому що $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}$ є скалярною величиною можна через неї обі сторони поділити (треба ділити абсолютну величину вектора через скаляр!)

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\frac{\mathfrak{B}[\mathfrak{D}\mathfrak{C}]}{\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]} + \mathfrak{B}\frac{\mathfrak{A}[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]}{\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]} + \mathfrak{C}\frac{\mathfrak{D}[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]}{\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]}$$

або:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\frac{\mathfrak{D}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]}{\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]} + \mathfrak{B}\frac{\mathfrak{D}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]}{\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]} + \mathfrak{C}\frac{\mathfrak{D}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]}{\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]},$$

що дістаємо легко, коли переставимо циклічно елементи й узглядимо, що векторовий добуток міняє знак при зміні порядку чинників.

Це послідне рівняння позволяє нам якраз розложити вектор $\mathfrak{D}$ в напрямі трьох довільно вибраних і не лежачих в одній площі векторів $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$.

В дійсности щоб отримати ці складові, треба тільки найти:

$$\frac{[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]}{\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]} = \mathfrak{A}'; \quad \frac{[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]}{\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]} = \mathfrak{B}'; \quad \frac{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]}{\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]} = \mathfrak{C}' \ldots\ldots (\alpha)$$

і вимножати $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ скалярно через $\mathfrak{D}$.

Дістанемо тоді:

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}\mathfrak{A}')\mathfrak{A} + (\mathfrak{D}\mathfrak{B}')\mathfrak{B} + (\mathfrak{D}\mathfrak{C}')\mathfrak{C}.$$

Послідне рівняння можна написати в такій символічній формі:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{A}';\mathfrak{A} + \mathfrak{B}';\mathfrak{B} + \mathfrak{C}';\mathfrak{C})$$

Вираз замкнений в дужки зветься комплєтною дїлою.

З рівнань (a) бачимо, що вектор $\mathfrak{A}'$ є нормальний до площі, визначеної векторами $\mathfrak{B}$ і $\mathfrak{C}$; подібне дасться сказати про вектори $\mathfrak{B}'$ і $\mathfrak{C}'$ і площі $[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]$, $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$.

Вектори $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ і $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ зовемо зворотними трійками векторів.

Для них є важними такі реляції:

$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}')=0, (\mathfrak{A}\mathfrak{C}')=0$ і т. д. і $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')=(\mathfrak{B}\mathfrak{B}')=(\mathfrak{C}\mathfrak{C}')=1$.

Послідний звязок дістаємо з рівнань (2).

Ділення.

Ділення як зворотна операція до множення повинно датися перевести. Коли, одначе приглянемося цьому питанню ближче, то приходимо до слідуючого заключення. Векторовий добуток із двох даних векторів $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ дефініюється однозначним способом. Противно при даним $\mathfrak{A}$ і при даним векторовім добутку $\mathfrak{C}$, утвореним з $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ (причім $\mathfrak{B}$ не є дане) - не можна визначити $\mathfrak{B}$ одним способом. З дефініції векторового добутку виходить, що існує безконечна кількість чинників, котрі з $\mathfrak{A}$ дають векторовий добуток $\mathfrak{C}$. Цей неозначений вектор $\mathfrak{B}$, котрий із даним $\mathfrak{A}$ дає векторовий добуток $\mathfrak{C}$ означимо символічно через $\mathfrak{B}=\left[\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\right]$.

Коли хочемо найти чинник $\mathfrak{B}$, що через скалярне множення з $\mathfrak{A}$ дає добуток C, то означуємо це через $\mathfrak{B}=\left(\frac{C}{\mathfrak{A}}\right)$.

Це ділення є також неозначене з подібних причин, як попереднє.

З квотом векторів не вяжеться ніяке означене фізичне поняття.[1]

Відповісти треба ще на питання, чи можна поділити обі сторони рівнання через вектор, що фігурує explicite.

Візьмім скалярний добуток $(\mathfrak{D}\mathfrak{A})=(\mathfrak{D}\mathfrak{B})$. Після поділення через $\mathfrak{D}$ дістанемо: $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$. Вектор $\mathfrak{A}$ можна розложити на два складники $\mathfrak{M}$ і $\mathfrak{N}$ так, щоби $\mathfrak{M}$ був нормальний до $\mathfrak{D}$. Тоді:

$$\left(\mathfrak{D}(\mathfrak{M}+\mathfrak{N})\right)=(\mathfrak{D}\mathfrak{B}).$$

Але $(\mathfrak{D}\mathfrak{M})=0$ отже $(\mathfrak{D}\mathfrak{N})=(\mathfrak{D}\mathfrak{B})$, або $\mathfrak{N}=\mathfrak{B}$, що загально не є можливе.

Тому виходить: ділення всіх членів скалярного рівнання через той самий вектор є недопускальне.

---

[1]) Ріжничковий квот двох векторів набирає фізичного значіння через окрему умову.

Ріжничкування вектора згдядом скалярної величини.

Простір, в котрім до кождої точки належить певний вектор, назвемо векторовим полем.

Очевидна річ, що в векторовім полі може змінятися абсолютна вартість і напрям вектора в залежности від часу і місця.x)

Коли отже через безконечно малу зміну $d\mathfrak{A}$ вектор $\mathfrak{A}$ перейде на $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + d\mathfrak{A}$, то суму цю треба уважати геометричною, бо зміна $d\mathfrak{A}$ може відноситися до абсолютної вартости вектора і до його напряму (рис. 26).

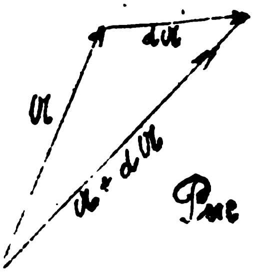


Рис. 26.

Послідне рівнання можемо написати також у формі: $\mathfrak{A}' - \mathfrak{A} = d\mathfrak{A}$, в котрій безконечно мала зміна або ріжничка вектора $\mathfrak{A}$ є подана explicite.

Користуючись висказаними увагами,

---

x) Не виключається залежність векторового поля і від инших параметрів.

можемо без труднощів найти різничку скалярного добутку векторів $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$.

Дійсно, коли через $\mathfrak{a}'$ і $\mathfrak{b}'$ означимо вектори, котрі повстають з $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$ через безконечно малі зміни, то:

$$d(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}'\mathfrak{b}') - (\mathfrak{a}\mathfrak{b}),$$

або:

$$d(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}+d\mathfrak{a})(\mathfrak{b}+d\mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + (\mathfrak{b}\,d\mathfrak{a}) + (\mathfrak{a}\,d\mathfrak{b}) + (d\mathfrak{a}\,d\mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\,d\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\,d\mathfrak{a},$$

бо безконечно малу величину другого ряду $(d\mathfrak{a}\,d\mathfrak{b})$ можна пропустити.

Аналогічним способом дістанемо також різничку векторового добутку:

$$d[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] - [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}+d\mathfrak{a}, \mathfrak{b}+d\mathfrak{b}] - [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] =$$
$$= [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}\,d\mathfrak{b}] + [d\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] - [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}\,d\mathfrak{b}] + [d\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] -$$

(знова по пропущенню величини $[d\mathfrak{a}, d\mathfrak{b}]$.

Треба зазначити, що в цьому випадку, з огляду на характер векторового добутку, належить уважати на порядок чинників.

Оба послідні приміри виказують недвозначно, що різничку добутків векторів находимо при помочі тих самих правил, котрі обовязують у звичайній аналізі.

З тої причини дістанемо також:

$$d(\mathfrak{A}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]) = d\mathfrak{A}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}] + \mathfrak{A}[d\mathfrak{b},\mathfrak{c}] + \mathfrak{A}[\mathfrak{b},d\mathfrak{c}].$$

Тому, що векторові добутки даються ділити через скалярні величини, можна творити похідні векторів згядом їх скалярних параметрів.

Приймаючи отже вектори $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{b}$ як функції часу, дістанемо похідну скалярного їх добутку у формі:

$$\frac{d(\mathfrak{A}\mathfrak{b})}{dt} = \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + \mathfrak{b}\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$$

і зовсім подібно:

$$\frac{d[\mathfrak{A}\mathfrak{b}]}{dt} = \left[\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{b}\right] + \left[\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{b}}{dt}\right].$$

Інакше представляється річ з похідною вектора згядом вектора. Коли певну точку простору виберемо за початок провідних лучів і поведених до довільних точок векторового поля, то безконечно малій зміні провідного луча відповідає загально безконечно мала зміна вектора $\mathfrak{A}$. Але похідна: $\frac{d\mathfrak{A}}{d\mathfrak{r}}$ є з огляду на векторовий характер $d\mathfrak{r}$ неозначеною.

Все ж таки питання, яка зміна відповідає векторови $\mathfrak{A}$, коли в певнім означенім напрямі $\mathfrak{r}$ пересунемось о $d\mathfrak{r}$, має зовсім означений зміст і вираз $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ грає важну ролю в теоретичній фізиці.

Нехай тепер вектор $\mathfrak{A}$ буде функцією x, y, z і часу t, причім x, y, z є сорядними векторового поля. В часі $t = t_0$ вектор $\mathfrak{A} = iA_1 + jA_2 + kA_3$, а його зміна в залежности від часу на тому самому місці xyz буде:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = i\frac{\partial A_1}{\partial t} + j\frac{\partial A_2}{\partial t} + k\frac{\partial A_3}{\partial t},$$

бо i, j, k від часу независлимі.

Сю частинну похідну вектора $\mathfrak{A}$ зглядом часу t можемо назвати локальною зміною вектора $\mathfrak{A}$.

При повторюванім упохіднюванню дістанемо відповідно:

$$\frac{\partial^n \mathfrak{A}}{\partial t^n} = \frac{\partial^n A_1}{\partial t^n} i + \frac{\partial^n A_2}{\partial t^n} j + \frac{\partial^n A_3}{\partial t^n} k.$$

Похідна одиничного вектора зглядом його скалярного арґументу є вектором прямовісним до одиничного.

Для доказу вистарчить упохіднити функцію $\bar{\mathfrak{A}}^2 - 1 = 0$ зглядом t, щоб дістати:

$$2\bar{\mathfrak{A}}\frac{d\bar{\mathfrak{A}}}{dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

що криє в собі зміст висказаного закона.

Взагалі для кожного вектора $\bar{L}$, котрого абсолютна вартість B незмінна, буде завсіди: $\bar{L}\frac{d\bar{L}}{dt}=0$.

Дійсно:

$$\left(\bar{L}\frac{d\bar{L}}{dt}\right)=\left(B\bar{\mathfrak{L}}\frac{d(B\bar{\mathfrak{L}})}{dt}\right)=B^2\left(\bar{\mathfrak{L}}\frac{d\bar{\mathfrak{L}}}{dt}\right)=0.$$

Від цього треба точно відрізнювати похідну вектора зглядом його скалярного аргументу:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt}=\frac{d(A\bar{\mathfrak{A}})}{dt}=\bar{\mathfrak{A}}\frac{dA}{dt}+A\frac{d\bar{\mathfrak{A}}}{dt}.$$

Тут також $\bar{\mathfrak{A}}$ і $\frac{d\bar{\mathfrak{A}}}{dt}$ стоять до себе нормально (прямово).

Коли вектор $\mathfrak{A}$ є провідним лучем плоскої кривої даної в біґунових сорядних r і φ, тожзо $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0+\sum d\mathfrak{A}$, то по скалярнім вимноженню рівнання $d\mathfrak{A}=\bar{\mathfrak{A}}da+ad\bar{\mathfrak{A}}$ через $d\mathfrak{A}$, дістанемо:

$$(d\mathfrak{A})^2=(da)^2+a^2(d\bar{\mathfrak{A}})^2.$$

Через порівнання аналогічного аналітичного рівнання:

$$(ds)^2=(dr)^2+r^2(d\varphi)^2$$

виходить значіннє різнички одиничного вектора, а саме:

$$|d\bar{\mathfrak{A}}|=d\varphi\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Абсолютна вартість різнички одиничного вектора представляє зміну кута, що замикає вектор $\bar{s}$ з даним напрямом.

Значіння різниці одиничного вектора зрозуміємо по обговоренню слідуючого приміру з механіки:

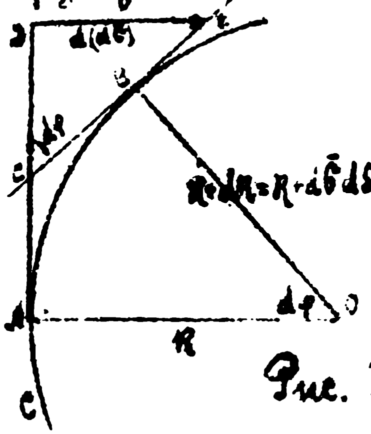


Рис. 21

Нехай матеріяльна точка відбуває рух по кривій $C = \sum d\bar{\sigma}$. Її положення визначує віддалення s від певної довільно вибраної точки кривої, а абсолютна вартість її скорости буде: $v = \frac{ds}{dt}$. Напрям скорости є в кожній моменті згідний з напрямом елементу $d\bar{\sigma}$ кривої, то значить, з напрямом стичної до неї. Через це вектор скорости

$$\mathfrak{v} = \frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{d\bar{\sigma}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{ds\,d\bar{\sigma}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\,d\bar{\sigma},$$

причім $d\bar{\sigma}$ є одиничним вектором в напрямі скорости.

Вектор прискорення

$$\mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,d\bar{\sigma}) = v\,\frac{d(d\bar{\sigma})}{dt} + \frac{dv}{dt}\,d\bar{\sigma} = v\,\frac{d(d\bar{\sigma})}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{dv}{dt}\cdot d\bar{\sigma} = v^2\,\frac{d(d\bar{\sigma})}{ds} + \frac{dv}{dt}\cdot d\bar{\sigma}.$$

Другий чинник першого складника останнього рівнання, а саме $\frac{d(d\bar{\sigma})}{ds}$ представляє похідну одиничного вектора $d\bar{\sigma}$ згляден його скалярного аргументу.

На основі рівнання (1) стор. 45 мусить отже $d(d\bar{s})$ стояти прямово до $d\bar{s}$ значить до напряму стичної в A, а тим самим бути рівнобіжним але противно спрямованим до луча кривини R. На основі знова (2) стор. 46 $|d(d\bar{s})|$ представляє зміну напряму стичної при її переході з точки A до B.

Зміна луча кривини при переході з A до B виносить $dR = d\bar{s} = ds.d\bar{s}$.

По означенню через $d\varphi$ кута між R і $R + dR$, $|d(d\bar{s})| = d\varphi$ і

$$ds = |R| d\varphi = |R| |d(d\bar{s})|$$

По узгляднено напрямів дістаємо з останнього рівнання:

$$\frac{d(d\bar{s})}{ds} = -\frac{1}{R} = -\frac{\bar{R}}{R^2}.$$

Вставляючи це в рівнанне на прискорення, дістанемо:

$$b = -\bar{R}\,\frac{v^2}{R} + \frac{dv}{dt}\,d\bar{s},$$

що дає знаний розклад прискорення в напрямі стичної $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ і в напрямі прямової $\left(\frac{v^2}{R}\right)$ до дороги.

З рівнання $\mathfrak{r} = ix + jy + kz$ дістаємо

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x} = i\,;\quad \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial y} = j\,,\quad \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial z} = k.$$

Послідні три рівнання представляють зміни вектора $\mathfrak{A}$ на одиницю довжини, коли з точки x, y, z переходимо до точки: $x+dx, y, z$; згдядно $x, y+dy, z$; $x, y, z+dz$. Бачимо, що зміни ці є рівні одиничним векторам тих напрямів, в котрих вони відбуваються.

Градієнт скалярноі функціі.

Нехай $V(xyz)$ представляє суцільну скалярну функцію, що в точці xyz не має maximum ані minimum. Ціякови та зміна функціі V залежить від напряму, в котрім поступаємо з точки xyz і виносить:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz.$$

Рівнання це можемо написати також у формі:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} i\, i dx + \frac{\partial V}{\partial y} j\, j dy + \frac{\partial V}{\partial z} k\, k dz,$$

або:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial z} k\right)\left(i dx + j dy + k dz\right).$$

Права сторона останнього рівнання представляє добуток двох векторів, з котрих перший залежить виключно від змін функціі V в напрямі осей системи, а другий визначає напрям в котрім слідимо за змінною функції V. Коли перший чинник означимо через grad V [1], а другий через: $\bar{n}\,dn$, то

$$dV = \mathrm{grad}\,V \cdot \bar{n}\,dn \quad \text{або:} \quad \frac{dV}{dn} = (\mathrm{grad}\,V \cdot \bar{n}) \quad .. (1).$$

З цього рівнання бачимо, що $\frac{dV}{dn}$ має найбільшу вартість тоді, коли напрям $\bar{n}$ є заразом напрямом grad V.

Ця найбільша вартість є рівна абсолютній вартости вектора: grad V.

На основі висказаних увак дефінюємо:

$$\mathrm{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial z} k$$

є вектором, котрого напрям є згідний з напрямом, в якому V улягає найбільшій зміні, а котрого абсолютна вартість є величиною тої найбільшої зміни.

Для точнійшого пояснення операції grad V уявім собі тіло, котрого густота A є суцільно змінна. Коли в цьому тілі виберемо певну точку за початок провідних лучів, то в кождій точці тіла буде густота функцією провідного луча, а grad A припаде в цей напрям, в котрім густота змінятиметься найбільше.

Рівнання (1) можна написати

[1] читай: градієнт.

також в такій формі:

$$\bar{n}\,\mathrm{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dn},$$

а звідси читаємо, що зміна функції V при переході з точки xyz о одиницю довжини в певному наперед даному напрямі є рівна скалярному добуткові з вектора $\mathrm{grad}\,V$ через одиничний вектор вибраного напряму.

З вказаного виходить сейчас, що зміни функції V на одиницю довжини в напрямі трох осей є рівні складовим вектора $\mathrm{grad}\,V$ в напрямі цих осей: $i\,\mathrm{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial x}$, $j\,\mathrm{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial y}$ і $k\,\mathrm{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial z}$.

Вартість $\bar{n}\,\mathrm{grad}\,V$ є зером, коли напрями $\bar{n}$ і $\mathrm{grad}\,V$ є до себе прямові, або коли найбільша зміна функції V припадає в площі прямовій до $\bar{n}$:

Коли тепер уявимо собі поверхню рівних вартостей V, або т. зв. еквіпотенціяльну поверхню, то тоді з рівнання: $\bar{n}\,\mathrm{grad}\,V = \frac{dV}{dn}$ дістанемо очевидно $\bar{n}\,\mathrm{grad}\,V = 0$, що в зв'язі з попереднього увагою значить: ґрадієнт стоїть прямово до еквіпотенціяльної поверхні функції V. —

Оператор Гамільтона.

Коли напишемо $\mathrm{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial x}i + \frac{\partial V}{\partial y}j + \frac{\partial V}{\partial z}k$ у форми: $\operatorname{grad} V = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)V$ і коли складникам: $i\frac{\partial}{\partial x} \cdots$ надамо значіння і чинників і ріжничкових операторів, то символ $i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ буде зрозумілий.

Означується його звичайно через

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

і називається оператором Hamilton'a або оператором набля[1]. Зрозуміла річ, що самий символ ∇ не має ніякого значіння так як його не має знак ріжничкування: d, або знак додавання $+$.

Розуміючи значіння оператора Hamiltona, найдемо без труду, що

$$\nabla(U+V) = \nabla U + \nabla V; \quad \nabla(U.V) = V\nabla U + U\nabla V$$

і $\nabla(cU) = c\nabla U$, причім $c = \text{const}$.

Дійсно: $\nabla(U+V) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)(U+V) =$

$$= i\frac{\partial(U+V)}{\partial x} + j\frac{\partial(U+V)}{\partial y} + k\frac{\partial(U+V)}{\partial z} = i\frac{\partial U}{\partial x} + j\frac{\partial U}{\partial y} + k\frac{\partial U}{\partial z} + i\frac{\partial V}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial y} + k\frac{\partial V}{\partial z} = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)U + \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)V = \nabla U + \nabla V.$$

$$\nabla(U.V) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)U.V = i\frac{\partial(UV)}{\partial x} + j\frac{\partial(UV)}{\partial y} + k\frac{\partial(UV)}{\partial z} = iU\frac{\partial V}{\partial x} + iV\frac{\partial U}{\partial x} + jU\frac{\partial V}{\partial y} + jV\frac{\partial U}{\partial y} + kU\frac{\partial V}{\partial z} + kV\frac{\partial U}{\partial z} = \left(i\frac{\partial V}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial y} + k\frac{\partial V}{\partial z}\right)U + \left(i\frac{\partial U}{\partial x} + j\frac{\partial U}{\partial y} + k\frac{\partial U}{\partial z}\right)V = U\nabla V + V\nabla U.$$

[1] набля - старожидівський музичний струмент подібної форми.

$$\nabla(cU) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)cU = i\frac{\partial(cU)}{\partial x} + j\frac{\partial(cU)}{\partial y} + k\frac{\partial(cU)}{\partial z} = ic\frac{\partial U}{\partial x} + jc\frac{\partial U}{\partial y} + kc\frac{\partial U}{\partial z} = c\nabla U.$$

З рівнання: ~~grad~~ $\nabla V = \frac{dV}{dn}$ дістаємо: $dV = \nabla V \cdot dn$, а звідси: $\int \nabla V \cdot dn = V_2 - V_1$, що знова представляє інтеграл градієнту здовж певної дороги. Цей інтеграл зветься лінійним інтегралом вектора ∇V. Як бачимо має він для двох різних доріг з тими самими кінцевими точками таку саму вартість; а з того виходить, що лінійний інтеграл градієнту здовж замкненої дороги є рівний зеру. І відворотно, коли лінійний інтеграл якогось вектора по замкненій дорозі є зером, то вектор цей дасться представити як градієнт скалярної величини. Факт, іменно, що лінійний інтеграл по замкненій дорозі є зером показує, що він мусить бути функцією кінців дороги, отже

$$\int_{r_0}^{r_1} X\,ds = V(x_1 y_1 z_1) - V(x_0 y_0 z_0).$$

Кінці векторів r_0 і r_1 можемо так до себе зблизити, що по лівій стороні лишиться лише один член, а по правій різничка: $X\,ds = dV$. $X\,ds$ є, Як бачимо, тотальною ріжничкою скалярної величини V, і, по думці рівнання (1) на стор. 50, рівною $\operatorname{grad} V . d\bar{s}$. так, що: $dV = \operatorname{grad} V . d\bar{s}$. —

Ріжничкування вектора зглядом скалярної величини в певнім наперед даним напрямі.

На зміну вектора W, що припадає на одиницю довжини в напрямі $\bar{\alpha}$, складаються зміни складових W в тім самім напрямі. Коли отже складові вектора W будуть $V_1 i$, $V_2 j$, і $V_3 k$, а одиничний вектор $\bar{\alpha}$ представимо як $\bar{\alpha} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, то зміни складових V_1, V_2, V_3 в напрямі $\bar{\alpha}$ будуть тотальними похідними $V_1 V_2 V_3$ в напрямі $\bar{\alpha}$. Вони виносять $(\bar{\alpha} \operatorname{grad} V_1)$; $(\bar{\alpha} \operatorname{grad} V_2)$ і $(\bar{\alpha} \operatorname{grad} V_3)$.

Тотальна похідна вектора W в напрямі $\bar{\alpha}$ буде ним самим:

$$(\bar{\alpha} \operatorname{grad} V_1) i + (\bar{\alpha} \operatorname{grad} V_2) j + (\bar{\alpha} \operatorname{grad} V_3) k.$$

По означенню цього вектора через W, дістанемо:

$$W = i W_1 + j W_2 + k W_3.$$

причім $W_1 = (\bar{\alpha} \operatorname{grad} V_1)$ і т. д. Вартости W_1, W_2, W_3 виписані explicite представляються так:

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= a_1\frac{\partial V_1}{\partial x} + a_2\frac{\partial V_1}{\partial y} + a_3\frac{\partial V_1}{\partial z} \\ W_2 &= a_1\frac{\partial V_2}{\partial x} + a_2\frac{\partial V_2}{\partial y} + a_3\frac{\partial V_3}{\partial z} \\ W_3 &= a_1\frac{\partial V_3}{\partial x} + a_2\frac{\partial V_3}{\partial y} + a_3\frac{\partial V_3}{\partial z} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\alpha)$$

З цего бачимо, що вектор W є лінійною векторовою функцією вектора V.

Оператор Гамільтона для векторового аргументу.

Применення оператора $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ до векторового аргументу W провадить до $\nabla W = i\frac{\partial W}{\partial x} + j\frac{\partial W}{\partial y} + k\frac{\partial W}{\partial z}$.

Значіння останнього рівнання є чисто символічне і вимагає окремого розглянення. По впровадженню складових вектора $W = iV_1 + jV_2 + kV_3$, дістанемо:

$$\nabla W = i\left\{i\frac{\partial V_1}{\partial x} + j\frac{\partial V_2}{\partial x} + k\frac{\partial V_3}{\partial x}\right\} + j\left\{i\frac{\partial V_1}{\partial y} + j\frac{\partial V_2}{\partial y} + k\frac{\partial V_3}{\partial y}\right\} + k\left\{i\frac{\partial V_1}{\partial z} + j\frac{\partial V_2}{\partial z} + k\frac{\partial V_3}{\partial z}\right\}.$$

А тепер бачимо, що треба окремої умови відносно добутків векторових чинників. Можна іменно срібуючі одиничні вектори множити скалярно, або векторово.

Розглянемо оба випадки і для оминення всякої двозначности назвемо скалярний добуток $\nabla\mathfrak{V}$, $(\nabla\mathfrak{V})$, $\nabla\cdot\mathfrak{V}$, $\operatorname{div}\mathfrak{V}$) дивергенцією вектора $\mathfrak{V}$, а векторовий добуток: $[\nabla\mathfrak{V}]$, $\nabla\times\mathfrak{V}$, $\operatorname{curl}\mathfrak{V}$ (чит.: кöрл), $\operatorname{rot}\mathfrak{V}$ — ротором, або ротацією вектора $\mathfrak{V}$. По цих увагах дістаємо легко:

$$\operatorname{div}\mathfrak{V} = \nabla\mathfrak{V} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\ . \ i$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{V} = [\nabla\mathfrak{V}] = k\frac{\partial v_2}{\partial x} - j\frac{\partial v_3}{\partial x} - k\frac{\partial v_1}{\partial y} + i\frac{\partial v_3}{\partial y} + j\frac{\partial v_1}{\partial z} - i\frac{\partial v_2}{\partial z},$$

або: $\operatorname{rot}\mathfrak{V} = i\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$

що можемо формально представити детермінантом:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

З цего бачимо, що $\operatorname{rot}\mathfrak{V}$ має таку саму форму, як векторовий добуток з двох векторів, в котрім оператор Гамільтона виступає як звичайний вектор.

Для вправи в рахуванню оператором ∇, обчислимо:

$\operatorname{rot}[\mathfrak{r}\mathfrak{u}] = [\nabla[\mathfrak{r}\mathfrak{u}]]$ причім $\mathfrak{u}$ і $\mathfrak{r}$ є функціями $x y z$, а $\mathfrak{r} = ix + jy + kz$ і $\mathfrak{u} = iu_1 + ju_2 + ku_3$.

Знаємо, що:

$$[\mathfrak{r}\mathfrak{u}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = i(yu_3 - zu_2) + j(zu_1 - xu_3) + k(xu_2 - yu_1);$$

отже:

$$\operatorname{rot}[ru] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yu_3 - zu_2, & zu_1 - xu_3, & xu_2 - yu_1 \end{vmatrix} = i\left\{\frac{\partial}{\partial y}(xu_2 - yu_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial z}(zu_1 - xu_3)\right\} + j\left\{\frac{\partial}{\partial z}(yu_3 - zu_2) - \frac{\partial}{\partial x}(xu_2 - yu_1)\right\} +$$

$$+ k\left\{\frac{\partial}{\partial x}(zu_1 - xu_3) - \frac{\partial}{\partial y}(yu_3 - zu_2)\right\} = i\left\{x\frac{\partial u_2}{\partial y} - u_1 - y\frac{\partial u_1}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - u_1 - z\frac{\partial u_1}{\partial z} + x\frac{\partial u_3}{\partial z}\right\} + j\left\{y\frac{\partial u_3}{\partial z} - u_2 - z\frac{\partial u_2}{\partial z} - u_2 - x\frac{\partial u_2}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + y\frac{\partial u_1}{\partial x}\right\} + k\left\{z\frac{\partial u_1}{\partial x} - u_3 - x\frac{\partial u_3}{\partial x} - u_3 - y\frac{\partial u_3}{\partial y} + z\frac{\partial u_2}{\partial y}\right\} =$$

$$= i\left\{x\frac{\partial u_2}{\partial y} + x\frac{\partial u_3}{\partial z} - y\frac{\partial u_1}{\partial y} - z\frac{\partial u_1}{\partial z} - 2u_1\right\} +$$

$$+ j\left\{y\frac{\partial u_1}{\partial x} + y\frac{\partial u_3}{\partial z} - x\frac{\partial u_2}{\partial x} - z\frac{\partial u_2}{\partial z} - 2u_2\right\} +$$

$$+ k\left\{z\frac{\partial u_1}{\partial x} + z\frac{\partial u_2}{\partial y} - x\frac{\partial u_3}{\partial x} - y\frac{\partial u_3}{\partial y} - 2u_3\right\} =$$

$$= -(iu_1 + ju_2 + ku_3)2 + \frac{\partial u_1}{\partial x}(ix + jy + kz) + \frac{\partial u_2}{\partial y}(ix + jy + kz) +$$

$$+ \frac{\partial u_3}{\partial z}(ix + jy + kz) - ix\frac{\partial u_1}{\partial x} - jy\frac{\partial u_2}{\partial y} - kz\frac{\partial u_3}{\partial z} - iy\frac{\partial u_1}{\partial y} -$$

$$- iz\frac{\partial u_1}{\partial z} - jx\frac{\partial u_2}{\partial x} - jz\frac{\partial u_2}{\partial z} - kx\frac{\partial u_3}{\partial x} - ky\frac{\partial u_3}{\partial y} = \underline{-2u +}$$

$\underline{r \operatorname{div} u - d_r u}$, причім:

$$d_r u = ix\frac{\partial u_1}{\partial x} + iy\frac{\partial u_1}{\partial y} + iz\frac{\partial u_1}{\partial z}$$
$$+ jx\frac{\partial u_2}{\partial x} + jy\frac{\partial u_2}{\partial y} + jz\frac{\partial u_2}{\partial z} \quad \ldots\ldots (\alpha)$$
$$+ kx\frac{\partial u_3}{\partial x} + ky\frac{\partial u_3}{\partial y} + kz\frac{\partial u_3}{\partial z}$$

З рівнання $\operatorname{rot}[ru] = -2u + r \operatorname{div} u - d_r u$ дістанемо, на випадок $u = const = \alpha$, звідси: $\operatorname{rot}[r\alpha] = -2\alpha$. Відомо з огляду на $u = const.$ буде $\operatorname{div} u = 0$ і $d_r u = 0$, як слідчать рівнання (α).

Ствердимо дальше, що $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} A) = \operatorname{rot}(\nabla A) = 0$ де A є скалярною функцією xyz. $\nabla A = i\frac{\partial A}{\partial x} + j\frac{\partial A}{\partial y} + k\frac{\partial A}{\partial z}$, а $\operatorname{rot}(\nabla A) =$

$$= \left[i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},\ i\frac{\partial A}{\partial x} + j\frac{\partial A}{\partial y} + k\frac{\partial A}{\partial z}\right] = \cancel{k\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}} -$$

$$- \cancel{j\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}} - \cancel{k\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial x}} + \cancel{i\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial z}} + \cancel{j\frac{\partial^2 A}{\partial z\partial x}} - \cancel{i\frac{\partial^2 A}{\partial z\partial y}} = 0$$

Таксамо, коли $r = ix + jy + kz$, буде $\operatorname{rot} r = 0$.

$$\operatorname{rot} r = [\nabla r] = \left[i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},\ ix + jy + kz\right] =$$

$$= k\frac{\partial y}{\partial x} - j\frac{\partial z}{\partial x} - k\frac{\partial x}{\partial y} + i\frac{\partial z}{\partial y} + j\frac{\partial x}{\partial z} - i\frac{\partial y}{\partial z} = 0.$$

Подібно: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \nabla[\nabla\mathfrak{A}] = \ldots\ldots =$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(i\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right) =$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y}} = 0.$$

В кінці розвинемо це: $(\nabla[\mathfrak{A}\mathfrak{B}])$, або $\nabla[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$.[x)]

$$\nabla[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \equiv \operatorname{div}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\Big\{i(A_2B_3 - A_3B_2) + j(B_1A_3 - A_1B_3) +$$

$$+ k(A_1B_2 - A_2B_1)\Big\} = \frac{\partial}{\partial x}(A_2B_3 - A_3B_2) + \frac{\partial}{\partial y}(B_1A_3 - A_1B_3) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(A_1B_2 - A_2B_1) = A_2\frac{\partial B_3}{\partial x} + B_3\frac{\partial A_2}{\partial x} - A_3\frac{\partial B_2}{\partial x} - B_2\frac{\partial A_3}{\partial x}$$

---

x) тому що ніяке непорозуміння не може зайти, можна скобки ( ) пропустити!

$$+B_1\frac{\partial A_3}{\partial y}+A_3\frac{\partial B_1}{\partial y}-A_1\frac{\partial B_3}{\partial y}-B_3\frac{\partial A_1}{\partial y}+A_1\frac{\partial B_2}{\partial z}+B_2\frac{\partial A_1}{\partial z}-$$
$$-A_2\frac{\partial B_1}{\partial z}-B_1\frac{\partial A_2}{\partial z}=B_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+B_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+$$
$$+B_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)+A_1\left(\frac{\partial B_2}{\partial z}-\frac{\partial B_3}{\partial y}\right)+A_2\left(\frac{\partial B_3}{\partial x}-\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)+$$
$$+A_3\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}-\frac{\partial B_2}{\partial x}\right)=\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}-\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}.$$

Оператор Laplace'a ∇^2.

Вираз ∇^2 назвемо оператором Laplace'a і здефініюємо його рівнаннями:

$$\nabla^2=\left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Буде отже $\nabla^2\mathfrak{A}=\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial z^2}$, або коли $\mathfrak{A}=iA_1+jA_2+kA_3$, то $\nabla^2\mathfrak{A}=i\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+j\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}+k\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}+j\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}+k\frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2}+i\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}+j\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}+k\frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right)i+\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right)j+\left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right)k=i\nabla^2A_1+j\nabla^2A_2+k\nabla^2A_3$.

Коли оператор ∇^2 має бути виконаний на скалярній функції, то можна також писати: $\nabla^2A=\nabla(\nabla A)$. Правдивість цего рівнання показується сейчас по розписанню символів: $\nabla(\nabla A)=\left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(i\frac{\partial A}{\partial x}+j\frac{\partial A}{\partial y}+k\frac{\partial A}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$.

Таке розкладання оператора ∇^2 є недопустиме, коли оператор ∇^2 має бути виконаний на векторі, значить рівність $\nabla^2\mathfrak{A}=\nabla(\nabla\mathfrak{A})$ не може бути правдивою. Про це дуже легко переконатися, якщо пригадаємо собі, що $\nabla^2\mathfrak{A} = i\nabla^2 A_1 + j\nabla^2 A_2 + k\nabla^2 A_3$, і розвинемо символ: $\nabla(\nabla\mathfrak{A}) = \nabla\frac{\partial A_1}{\partial x} + \nabla\frac{\partial A_2}{\partial y} + \nabla\frac{\partial A_3}{\partial z}$. Бачимо тут наглядно, що праві сторони обох останніх рівнань є різні, а тим самим $\nabla^2\mathfrak{A} \neq \nabla(\nabla\mathfrak{A})$.

Коли, зокрема, виконаємо оператор Laplace'a на скалярній функції $V = \frac{c}{r}$, причім $c = const$ $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то дістанемо:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\left(\frac{c}{r}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{c}{r}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{c}{r}\right)}{\partial z^2}$$

Але: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{r}\right) = \frac{-c\cdot\frac{x}{r}}{r^2} = -\frac{cx}{r^3}$, звідки:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{c}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{cx}{r^3}\right) = -c\,\frac{r^3 - x\,3r^2\frac{x}{r}}{r^6} =$$

$$= -\frac{c}{r^3} + \frac{3cx^2}{r^5}.$$ Зовсім подібно:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{c}{r^3} + \frac{3cy^2}{r^5} \quad і \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{c}{r^3} + \frac{3cz^2}{r^5}$$

По додаванню трьох останніх рівнань отримуємо:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{3c}{r^3} + \frac{3c}{r^5}\left(x^2+y^2+z^2\right) = 0.$$

Останнє різничкове рівнання носить назву рівнання Laplace'a.

У звязку з оператором ∇^2 найдемо легко значіння оператора rot^2. А саме $rot^2\mathfrak{A} \equiv [\nabla[\nabla\mathfrak{A}]]$. Праву сторону тотожности можемо уважати за тричленний векторовий добуток і на основі знаних правил представити так: $\mathrm{rot}^2 \mathfrak{A} = \nabla(\nabla \mathfrak{A}) - \nabla^2 \mathfrak{A}$, або: $\mathrm{rot}^2 \mathfrak{A} = \nabla \,\mathrm{div}\, \mathfrak{A} - \nabla^2 \mathfrak{A}$. До того самого висліду дійдемо очевидно й тоді, як розвинемо значіння символів.

Закон Gauss'а.

Значиме, що ток вектора через замкнену поверхню є рівний суми векторових токів через стіни простірних елементів, обмежених згаданою поверхнею. Ці простірні елементи творимо трьома системами площ рівнобіжних до площ системи сорядних: xy, xz, yz і віддалених від себе відповідно о dx, dy, dz. Кожда стіна простірного елементу є векторовою величиною, якої напрям згідний з прямою поведеним до цеї стіни. Умовимося уважати додатною цю стіну елементу, що й прям вказує на зовні, а відємною, якої прям входить в елемент. Наслід-

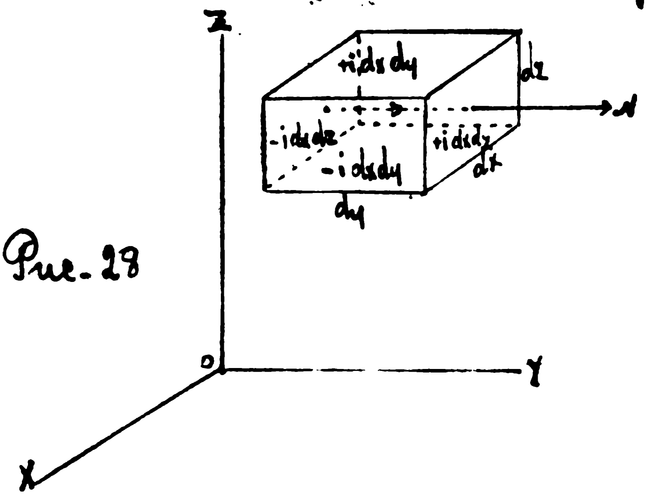


Рис. 28

ком цего із шістьох стін кожного просторного елементу три є додатні, а три відємні.

Нехай тепер на поверхні $-i\,dy\,dz$ має вектор вартість $\mathfrak{A}$; на протилежній поверхні: $+i\,dy\,dz$ його вартість буде: $\mathfrak{A}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x}dx$. Цілковитий векторовий тік через безконечно малі стіни: $-dy\,dz$ і $+i\,dy\,dz$ буде отже: $\left(\mathfrak{A}+\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x}dx\right)i\,dy\,dz-\mathfrak{A}\,i\,dy\,dz=i\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x}dx\,dy\,dz=i\left(i\frac{\partial A_1}{\partial x}+j\frac{\partial A_2}{\partial y}+k\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)\cdot dx\,dy\,dz=\frac{\partial A_1}{\partial x}dx\,dy\,dz$. Для двох пар інших стін дістанемо аналогічно: $\frac{\partial A_2}{\partial y}dx\,dy\,dz$ і $\frac{\partial A_3}{\partial z}dx\,dy\,dz$. Векторовий тік отже, що виходить з елементу обєму: $dx\,dy\,dz=d\tau$ буде:

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

а цілковитий векторовий тік замкненого простору:

$$\iiint\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\int\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)d\tau.$$

З огляду означення це, що сума векторових токів через стіни просторних елементів, обмежених замкненою поверхнею, є рівною векторовому токові через цю поверхню, дістанемо:

$$\int\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)d\tau=\int\mathfrak{A}\,d\sigma,\text{ або:}$$

$$\int\nabla\mathfrak{A}\,d\tau=\int\mathfrak{A}\,d\sigma.$$

Останнє рівнання зветься інтегральним законом Gauss'a.

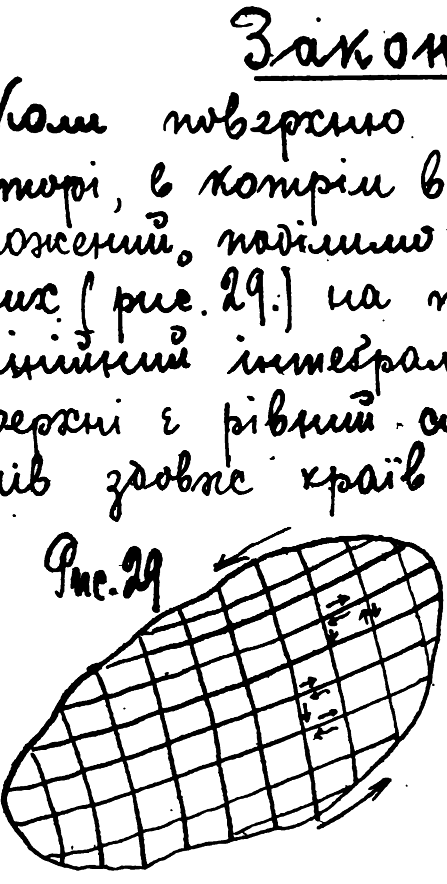
На основі цього закона можна поверхневий інтеграл: $\int \mathfrak{A} dq$ замінити на простірний $\int \nabla \mathfrak{A} d\tau$ і навідворот.

Коли поверхня замикає лише один простірний елемент, тоді: $\int \mathfrak{A} dq = \nabla \mathfrak{A} d\tau = \operatorname{div} \mathfrak{A} d\tau$ звідки: $\operatorname{div} \mathfrak{A} = \lim_{d\tau=0} \frac{\int \mathfrak{A} dq}{d\tau}$, це рівнання можна уважати дефініцією: $\operatorname{div} \mathfrak{A}$; є це тік вектора $\mathfrak{A}$ через поверхню безконечно малого простірного елементу, взятий на одиницю обєму.

Закон Stokes'a

Коли поверхню f, що находиться у просторі, в котрім вектор $\mathfrak{A}$ є суцільно розложений, поділимо двома системами кривих (рис. 29.) на поверхневі елементи, то лінійний інтеграл: $\int \mathfrak{A} ds$ здовж краю поверхні є рівний сумі лінійних інтегралів здовж країв поодиноких поверхневих елементів.

Рис. 29

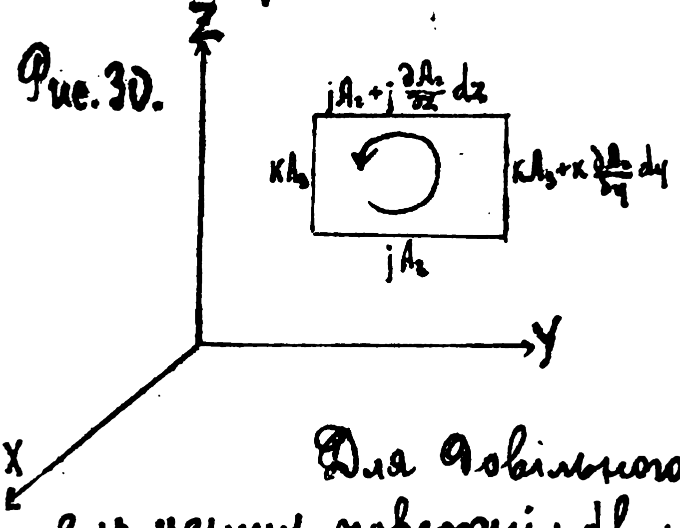


Це діється тому, що при інтегруванню здовж країв елементів переходимо кожду граничну лінію два рази в противних напрямах, а обмежуючу криву лише раз. Принимаємо, невидно, що напрям обігу довкола поверхні f є такий самий, як довкола поодиноких елементів.

Коли ж тепер відмемо безконечно малий елемент поверхні: $dydz$ на площі: yz прямокутного системи, а за заданий напрям обігу виберемо цей, в котрім лежить обертання правозворотна труба при рівночаснім поступі в напрямі оси: $+x$ (рис. 30.) то:

$$\sum \mathfrak{A} d\sigma = A_2 dy + \left(A_3 + \frac{\partial A_3}{\partial y} dy\right) dz - \left(A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial z} dz\right) dy - A_3 dz = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) dy\, dz.$$

Рис. 30.



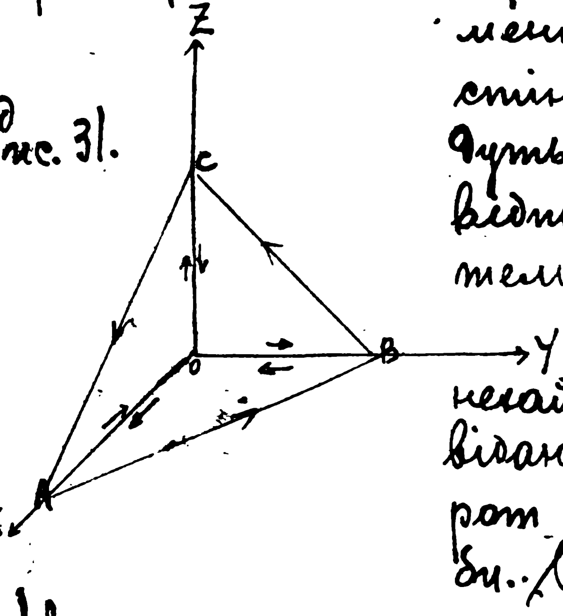
Для довільного, замкненого елементу поверхні: df_x на площі: yz дістанемо: $\sum_{(1)} \mathfrak{A} d\sigma = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) df_x$.

Аналогічно для поверхневих елементів: df_y і df_z на площі ZX і XY отримаємо:

$$\sum_{(2)} \mathfrak{A}\, d\sigma = \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) df_y\,; \quad \sum_{(3)} \mathfrak{A}\, d\sigma = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) df_z .$$

Нехай тепер стіна: ABC безконечно малого чотиростінника: OABC представляє елементарну поверхню df, положену в просторі довільно. Грані OA, OB, OC елементарного чотиростінника нехай будуть рівнобіжні до відповідних осей системи, а прямо до df і напрям обігу: ABCA нехай собі взаїмно відповідають, як поступ і оборот правозворотної шруби.

Рис. 31.



Складові поверхні: df на площах системи: YZ, XZ, XY означимо відповідно через: df_x, df_y, df_z. Лінійний інтеграл: $\int \mathfrak{A}\, d\sigma$ здовж країв елементів: df_x, df_y, df_z є рівний лінійному інтегралові по лінії ABCA, що ограничує df, бо при інтегруванню переходимо грані OA, OB, OC два рази в противних напрямах.

Буде отже: $\sum_{ABC} \mathfrak{A}\, d\sigma = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) df_x + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) df_y +$
$+ \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) df_z = \operatorname{rot} \mathfrak{A} \cdot df$, коли $df = i\, df_x + j\, df_y +$

$+k\,df_z$. Для скінченої поверхні буде очевидно:

$$\int_s \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = \int_f \operatorname{rot}\mathfrak{A}\,d\mathfrak{f}.$$

Останнє рівнання предоставляє закон Stokes'а, що ставить лінійний інтеграл вектора по замкненій кривій в залежність від поверхневого інтегралу ротації того самого вектора по замкненій згаданою кривою поверхні.

Закон Green'а

Коли в інтегральнім законі Gauss'а: $\int \nabla \mathfrak{A}\,d\tau = \int \mathfrak{A}\,dq$, або $\int \operatorname{div}\mathfrak{A}\,d\tau = \int \mathfrak{A}\,dq$ вставимо замість $\mathfrak{A}$ добуток з $\mathfrak{A}$ через скалярну величину V, застерігаючи скінченість і суцільність так вектора $\mathfrak{A}$ як скаляра V, то:

$$\int \operatorname{div}(\mathfrak{A}V)\,d\tau = \int (\mathfrak{A}V)\,dq.$$

По розписанню значіння:

$$\operatorname{div}(\mathfrak{A}V) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(iA_1V + jA_2V + kA_3V\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(A_1V) + \frac{\partial}{\partial y}(A_2V) + \frac{\partial}{\partial z}(A_3V) = V\frac{\partial A_1}{\partial x} + A_1\frac{\partial V}{\partial x} +$$

$$+ V\frac{\partial A_2}{\partial y} + A_2\frac{\partial V}{\partial y} + V\frac{\partial A_3}{\partial z} + A_3\frac{\partial V}{\partial z} = V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) +$$

$$+ A_1\frac{\partial V}{\partial x} + A_2\frac{\partial V}{\partial y} + A_3\frac{\partial V}{\partial z} = V\operatorname{div}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\operatorname{grad}V,$$

Дістанемо:

$$\int (v \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \operatorname{grad} v)\, d\tau = \int (\mathfrak{A} v)\, d\sigma$$

По вставленню в останнім рівнанню grad u замість $\mathfrak{A}$, буде:

$$\int [v \operatorname{div} \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v]\, d\tau = \int (v \operatorname{grad} u)\, d\sigma$$

або:

$$\int (v \nabla^2 u)\, d\tau + \int (\nabla u . \nabla v)\, d\tau = \int (v \nabla u)\, d\sigma \ldots \quad (1).$$

Коли в рівнанню (1) перемінимо u з v, то:

$$\int (u \nabla^2 v)\, d\tau + \int (\nabla u \nabla v)\, d\tau = \int (u \nabla v)\, d\sigma \ldots \quad (2).$$

Рівнання (2) віднімаємо від (1).:

$$\int (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v)\, d\tau = \int (v \nabla u - u \nabla v)\, d\sigma \ldots \quad (3).$$

Коли в рівнанню (1 приймемо $v = u$, то:

$$\int \{ v \nabla^2 v + (\nabla v)^2 \}\, d\tau = \int (v . \nabla v)\, d\sigma \ldots \quad (4).$$

Колиv сповняє рівнання Laplace'a $\nabla^2 v = 0$, то з (4) дістанемо:

$$\int (v \nabla v)\, d\sigma = \int (\nabla v)^2\, d\tau \ldots \quad (5)$$

Рівнання (3) до (5) випровадив перший Green.

Зміст.

стр.

Величини скалярні й векторові. 3

Додавання і віднимання. 4

Розкладання векторів. 8

Скалярний добуток. 13

Векторовий добуток. 17

Приміри з аналітичної геометрії. 21

Поверхня довільного трикутника в просторі. 22

Поверхня многокутника. 24

Мет замкненого многокутника на даний напрям. 25

Приміри зі статики. 25

Добуток з трьох векторових чинників. 29

Ділення. 40

Ріжничкування вектора зглядом скалярної величини. 42

Градієнт скалярної функції 49

Оператор Гамільтона 51

Ріжничкування вектора зглядом скалярної величини в певним наперед даним напрямі 54

Оператор Гамільтона для векторового аргументу 55

Оператор Laplace'а ∇^2 59

Закон Gauss'a 61
Закон Stokes'a 63
Закон Green'a 66