АЛГЕБРА

КНИГА ПЕРША

Микола Чайковський.

МИКОЛА ЧАЙКОВСЬКИЙ

АЛГЕБРА

ПОВНИЙ КУРС СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ ТА ДЛЯ САМООСВІТИ

З багатьома вправами її рисунками в тексті

Вінієтка проф. П. І. Холодного

КНИГА ПЕРША

ПРАГА
УКРАЇНСЬКИЙ ГРОМАДСЬКИЙ ВИДАВНИЧИЙ ФОНД
1925

Друкарня
«ЛЕГІОГРАФІЯ»
Praha-Vršovice, Sámova ul. 665

ПЕРЕДНЄ СЛОВО.

Сучасна математична дидактика яко мога найкраще надається до поширення математичного знання серед широких верств інтелігентного громадянства. Вона спричинюється до того, що дотепершня «суха» математика стає предметом живим і приносить безліч інтелєктуальних емоцій. Зручний учитель, що глибоко ввійде в істоту модерного математичного навчання, розкриватиме легко своїм учням нові горизонти й матиме дуже вдячне поле діяльности.

Метою цієї моєї праці, що саме виходить у світ першою книгою, є послужити таким двом великим завданням: поширенню математичної культури та пропаганді нових дидактичних ідей. Відмінність у розкладі матеріялу й методі викладу спонукують мене, сказати про це кілька слів на вступі.

Перш за все назва — «Алгебра» — може дати деякий привід до непорозумінь, бо ж у книжці подано багато такого, що властиво належить до аритметики та елементарного аналізу — тоб-то науки про функції. Та — беручи строго — повне розмежування тих трох ділянок математики можливе аж на багато вищому щаблі науки, якщо воно взагалі можливе; тому, йдучи за традицією, я з «трох великих А»*) вибрав середуще й лишився при назві «Алгебри».

Я намагався провести — неначе червону нитку — дві головні ідеї: ідею еволюції числа та ідею функційної залежности. Виходячи з природного ряду числа, як з одинокого твору, що його з дійсности втягаємо в математику, показую, що прямі дії (додавання, множення й степенювання) не виводять нас з того ж таки природнього ряду; зате дії обернені стають джерелом нових родів чисел: віднімання дає від'ємні числа, ділення — дроби (I. частина курсу); далі корінювання дає початок невимірним та уявним числам (II. частина). — Рівнобіжно з тим розвиваю ідею функції та функційної залежности; перша частина курсу займається докладним дослідом лінійної функції, а друга частина трактує так само основно функцію квадратову, беручи при цьому під увагу також функції з одним параметром. Ось таке поставлення справи веде за собою необхідність втягти в курс тригонометричні функції (тангенс при досліді простої, а синус та косинус при злучених числах) та сягнути доволі глибоко в аналітичну геометрію (дослід простої в I. частині)**).

Графичні методи використано всюди як найобширніше, а саме при досліді функцій та як ілюстрація чисел і дій ними, так що часами графичний момент мусів висунутися на перший план.

На цій теоретичній канві ткається практична частина курсу: техника рахункових дій (у I. ч. чотири основні дії, в II. — вищі дії до логаритмування вкл.) та розвязка рівнянь (лінійних у I. ч. та квадратових у II. ч.).

---

*) «Die drei grossen A» (тоб-то аритметика, алгебра й аналіз), як каже проф. Фелікс Кляйн у своїй «Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus», Autographierte Vorlesungshefte, Leipzig, Teubner, 2A., 1911., т. I. стр. 7.

**) Те саме буде зроблено з кривими другого порядку в третій частині курсу.

Історичний момент використано теж широко — це ж неоцінений засіб для оживлення науки, а крім того він кидає часами дуже інтересне світло на деякі питання загальної історії людської культури.

До кожного параграфу додано багато вправ, так що книжка заступатиме поки що теж і задачник.

Що до термінології, то я держався всюди мого «Систематичного Словника»*), відступаючи від нього тільки незначно в деяких місцях.

Друга книга, що появиться незабаром, обійматиме третю частину курсу, а саме: продовження теорії рівнянь (квадратові рівняння з двома й трома невідомими та кубичне й двоквадратове рівняння), теорію рядів (разом із суспільною аритметикою) і — в останньому розділі — початки вищого аналізу, наскільки його можна зробити предметом науки в середній школі. — Заповіджені в ріжних місцях першої книги числові таблиці та річевий покажчик усього курсу будуть додані до другої книги.

Накінець мило мені подякувати за поміч усім тим, що цікавились моєю працею в часі її писання, а головно: проф. П. І. Холодному за прочитання першої частини й заохоту до дальшої праці та за оригінальну віньєтку, далі д-рові Р. Цегельському за прочитання, а п. Надії Шульгинній-Іщук за дуже основну рецензію цілости.

Яворів (Галичина), 28 квітня 1925.

Микола Чайковський.

*) М. Чайковський, Систематичний словник української математичної термінології. Перша частина: Елементарна математика (перший випуск «Матеріялів до української наукової термінології»), Видавництво Української Молоді в Берліні, 1924, 116 стр. мал. 8.

ЗМІСТ

Увід

Стр.

§ 1. *Числа та рахункові дії* ..... 1—17

1. Числення. 2. Природній ряд чисел. 3. Числова лінія. 4. Рахункові дії. 5. Уваги про рахункові дії. 6. Математичні закони. 7. Числа названі й неназвані. 8. Числа однакові й неоднакові. 9. Числа постійні та змінні. Функції. 10. Рівняння й нерівности. 11. Предмет нашої книжки. 12. Історична увага про початки числення. — В п р а в и.

Перша частина

ЧОТИРИ ОСНОВНІ ДІЇ

Перший розділ: *Прямі дії двох перших ступінів.*

§ 2. *Додавання* ..... 18—22

13. Пояснення. 14. Закони додавання. 15. Сума як функція доданків. — В п р а в и.

§ 3. *Множення* ..... 23—38

16. Одночлени й многочлени. 17. Добутки. 18. Закони множення. 19. Геометричне з'ясовування добутків. 20. Множення сум. 21. Добуток як функція чинників. 22. Степені як добутки однакових чинників. 23. Підставлювання. 24. Дії на одночленах і многочленах. — В п р а в и.

Другий розділ: *Обернені дії двох перших ступінів.*

§ 4. *Віднімання* ..... 39—50

25. Пояснення. 26. Геометричне з'ясування віднімання. 27. Додавання й віднімання сум та ріжниць. 28. Правило дужок (скобок). 29. Прикмети ріжниці. 30. Множення ріжниць. Приклади. — В п р а в и.

§ 5. *Відносні числа* ..... 51—64

31. Від'ємні числа. 32 Відносні й без'оглядні числа. 33. Порівняння для відносних чисел. 34. Додавання й віднімання відносних чисел. 35. Множення відносних чисел. 36. Дії на многочленах. — В п р а в и.

§ 6. *Дослід найпростіших функцій* ..... 65—73

37. Поширення функціїних образів на від'ємні вартости. 38. Лінійні функції. 39. Образи инших функцій. — В п р а в и.

§ 7. *Ділення* ..... 74—89

40. Пояснення ділення. 41. Прикмети частки. 42. Ділення сум і ріжниць, добутків і часток. 43. Ділення відносних чисел. 44. Ділення многочлена многочленом. 45. Числові уклади. — В п р а в и.

§ 8. *Подільність чисел* ..... 90—105

46. Числа прості й зложені. 47. Правила подільности. 48. Прості числа. 49. Розклад чисел на прості чинники. 50. Спільні чинники кількох чисел. 51. Спільні многократі кількох чисел. — В п р а в и.

§ 9. *Дробові числа* ..... 106—130

52. Дробові одиниці. 53. Дробові числа. 54. Порівнювання величини дробів. 55. Додавання й віднімання дробів. 56. Множення й ділення дробів цілими числами. 57. Множення й ділення чисел дробами. 58. Роль нуля при множенні й діленні. 59. Числове тіло. — В п р а в и.

§ 10. *Десятинні дроби* ..... 131—140

60. Пояснення. 61. Заміна звичайних дробів на десятинні. 62. Заміна десятинних дробів на звичайні. 63. Приближні (неповні) числа. — В п р а в и.

§ 11. *Функції в обсягу дробових чисел* ..... 141—150

64. Лінійна функція з дробовими співчинниками. 65. Подрібний дослід рівняння простої лінії. 66. Квадратова функція для дробових вартостей аргументу. 67. Дробова функція та її образ. — В п р а в и.

Т р е т і й р о з д і л: *Л і н і й н і р і в н я н н я.*

§ 12. *Розвязування та поділ рівнянь* ..... 151—157

68. Рівняння і їхня розвязка. 69. Поділ рівнянь. — В п р а в и.

§ 13. *Лінійні рівняння з одною невідомою* ..... 158—180

70. Приклади. 71. Рисункове розвязування лінійних рівнянь із одною невідомою. 72. Дослід (розбір або дискусія) рівнянь. 73. Завдання про рух. 74. Розвязування нерівностей. — В п р а в и.

§ 14. *Відношення й пропорції* ..... 181—204

75. Відношення. 76. Пропорції. 77. Функція «тангенс». Продовження досліду простої лінії. 78. Переміни пропорції. 79. Ужиток пропорцій. 80. Рахунок простих відсотків. 81. Рахунок змішки. — В п р а в и.

§ 15. *Лінійні рівняння з двома й більше невідомими* 205—240

82. Неозначені рівняння з двома невідомими. 83. Означені уклади з двома невідомими: два рівняння. 84. Рахункова розвязка: методи порівнювання й підставлювання. 85. Метод рівних співчинників. 86. Метод неозначеного чинника. 87. Деякі завдання, що ведуть до укладів лінійних рівнянь із двома невідомими. 88. Виїмкові уклади рівнянь із двома невідомими. 89. Докінчення досліду рівняння простої лінії. 90. Дискусійні завдання першого ступіня з двома змінними та з одним параметром. 91. Три рівняння з двома невідомими. Переозначені уклади. 92. Одне та два лінійні рівняння з трома невідомими. 93. Три рівняння з трома невідомими. 94. Чотири рівняння з чотирма невідомими. 95. Історична увага. — В п р а в и.

Друга частина

ДІЇ ТРЕТЬОГО СТУПІНЯ

Четвертий розділ: *Степенювання й корінювання.*

§ 16. *Степенювання* ..... 241—261

96. Степенюваннння одночленів. 97. Викладнича функція та її образ. 98. Степенювання многочленів. А. Квадрати. 99. Продовження. Б. Вищі степені. 100. Степеневі криві.— В п р а в и.

§ 17. *Корінювання* ..... 262—277

101. Пояснення дії. Прикмети корінів. 102. Корінювання многочленів і подрібних чисел. 103. Степені з дробовими викладниками. 104. Корінювання відносних чисел. 105. Образ коріневої функції. 106. Корінювання названих чисел. — В п р а в и.

§ 18. *Невимірні числа* ..... 278—298

107. Обмеженість дії корінювання. 108. Невимірні числа. 109. Приближне корінювання. 110. Рисункове з'ясовування невимірних чисел. 111. Поповнення викладничої кривої. 112. Дії невимірними числами. 113. Невимірні рівняння. 114. Невимірні числові тіла. — В п р а в и.

П'ятий розділ: *Логаритми.*

§ 19. *Звичайні або десяткові логаритми* ..... 299—315

115. Пояснення й прикмети логаритмів. 116. Обчислювання логаритмів. 117. Логаритмова функція. 118. Інтерполяція. 119. Від'ємні й пів-від'ємні логаритми. 120. Ужиток логаритмів. Приклади. 121. Викладничі й логаритмові рівняння. — В п р а в и.

§ 20. *Логаритми инших укладів* ..... 316—322

122. Залежність росту логаритмової функції від величини основи. 123. Заміна логаритмів одного укладу на другий. 124. Природні логаритми. 125. Історична увага. — Вправи.

Шостий розділ: *Теорія рівнянь; перша частина.*

§ 21. *Квадратова функція* ..... 323—350

126. Міра росту квадратової функції. 127. Узагальнення квадратової функції. 128. Рівномірний та рівномірно-прискорений рух. 129. Дальше узагальнення квадратової функції. 130. Положення вершка параболи. Найбільші й найменші вартости квадратової функції. 131. Виріжник квадратової функції. 132. Приклади дискусії квадратової функції. — Вправи.

§ 22. *Квадратові рівняння з одною невідомою* ..... 351—369

133. Геометрична розвязка квадратового рівняння. 134. Чисте квадратове рівняння. 135. Повне квадратове рівняння; геометрична розвязка. 136. Повне квадратове рівняння; рахункова розвязка. 137. Приклади. — Вправи.

§ 23. *Розклад квадратового тричлена та дослід квадратового рівняння* ..... 370—388

138. Звязок між коріннями та співчинниками квадратового рівняння. 139. Розклад квадратового тричлена на лінійні чинники. 140. Квадратові нерівности. 141. Дискусія квадратового рівняння. 142. Дискусійні завдання другого ступіня. — Вправи.

§ 24. *Теорія злучених чисел* ..... 389—408

143. Пояснення злучених чисел і дії ними. 144. Рисункове з'ясовування злучених чисел. 145. З'ясовування злучених чисел гоніометричними функціями. 146. Доповнення дискусії квадратових рівнянь. 147. Огляд теорії злучених тіл. — Вправи.

§ 25. *Найпростіші уклади квадратових рівнянь із двома невідомими* ..... 409—432

148. Уклади параболичного типу. 149. Уклади гіперболичного типу. Дослід рівнобічної гіперболи. 150. Узагальнення рівнобічної гіперболи. 151. Параболично-гіперболичний уклад. Характеристика укладів квадратових рівнянь. — Вправи.

§ 26. *Продовження досліду квадратового рівняння* .. 433—451

152. Положення точок на площі відносно параболи та чисел відносно корінів рівняння. 153. Дослід жмутків простих ліній. 154. Дослід громад обводячих простих. — Вправи.

ВАЖНІШІ ДРУКАРСЬКІ ПОМИЛКИ.

Перед читанням книжки треба поправити такі друкарські помилки, які можуть викликати непорозуміння:

Стр.:	Рядок:	
5	4 згори:	після: «названими (іменованими)» — додати: «величинами».
5	16 згори:	зам.: «названі числа» — має бути: «названі величини».
12	2 згори:	зам.: «перемінности» — м. б.: «переміни».
47		рис. 35 має фальшиві написи: горішня верства — довга — замість bp має мати aq, а прямокутник зправа здолу замість aq має мати bp.
72		в колюмні під y останній рядок знизу: зам. «+1», м. б. «+4».
101	11 здолу:	в другому чинникові (в скобках) викреслити один із двох «плюсів».
106	2 згори:	зам. уст. «51», — м. б. «52».
137	9 згори:	в числі: 38,255.74 непотрібна крапка між 5 та 7.
153	11 здолу:	зам.: «трапитись потреба», — м. б. «трапитись, що треба».
195	3 здолу:	зам.: «складані відсотки» — м. б. «складні».
215	8 згори:	після 0 пропущено перетинку.
227	3 здолу:	зам.: «Q_1Q_1» — має бути: «Q_1Q_2».
228	10 згори:	зам.: «рис. 86» — має бути: «рис. 88».
230	2 здолу:	зам.: «$x-y+z-2u$» — має бути: «$x-y+z+2u$».
242	1 здолу:	зам. «$a^{-(m+n)} \cdot \frac{1}{a^{m+n}}$» – м. б.: «$a^{-(m+n)} = \frac{1}{a^{m+n}}$».
243	12 згори:	додати: „Від'ємні степені числа 10 особливо вигідні до означування дуже малих величин; ось так напр. пишемо: лінія H в спектрі має хвилі довжини $3968.10^{-10}m$, а поперечник молекули водяної пари має $4.10^{-8}cm$ і т. д. — Подібно пишуть при допомозі степенів числа 10 (але додатніх) дуже великі числа, напр. середня віддаль Землі від Сонця є $149{,}5.10^6\,km$, а маса Сонця 199.10^{25} тонн".
245	13 згори:	зам. «a^n,a» — має бути: «$a^n.a$».
246	5 знизу:	зам. «$a<1$» — має бути: «$a>1$».
247		рис. 93. треба обернути на 90° вліво, так щоби стрілки, що ведуть униз, ішли вправо.
252	4 згори:	зам.: «завважимо раз» — м. б.: «завважимо ще раз».
252		в самому низу додати: «Отсей метод, який лежить у тому, що з n робимо висновок на $n+1$, має назву *повної індукції*».

253	9 згори:	зам.: «$3x^3yz$», — м. б. «$3xy^3z$».
270	15 згори:	зам.: «здовж першої медіяни», — м. б. «на першій медіяні».
271	14 згори:	зам.: «PQ'» — м. б.: «$P_1'Q'$».
272	17 згори:	зам.: «поверхня» — м. б. «площина».
273	16 згори:	зам.: «*кулонем*» — м. б. «*кулоном*».
278	1 згори:	зам.: «§ 19» — м. б. «§ 18».
284	1 згори:	зам.: «останник», м. б.: «останок».
288	4 згори:	зам.: «$\sqrt{p<p}$», м. б.: «$\sqrt{p>p}$».
290	10 згори:	зам.: «висота рівнобічного трикутника **6** 2», «висота рівнобічного трикутника **6** 1».
291	3 згори:	зам.: «$\sqrt{25}$», м. б.: «$\sqrt[3]{25}$».
301	5 згори:	зам.: «наказують», м. б. «показують».
330	7 згори:	зам.: «$(x+x)(x-x)$», м. б.: «$(x_1+x)(x_1-x)$».
338	8 здолу:	зам: «(φx)», м. б.: «$\varphi(x)$».
370	4 здолу:	зам.: «$x=\frac{2}{5}\pm$», м. б.: «$x=\frac{5}{2}\pm$».
372	16 здолу:	зам.: «y», м. б.: «y'».
380	13 згори:	зам.: «же m», м. б.: «же ж».
385	12 згори:	зам.: «основи», м. б.: «підстави».
386	в табличці долішній рядок:	зам.: «$R<r$», м. б.: «$R>r$».
388	3 згори:	зам.: «$+\frac{b^2}{x-9}$», м. б.: «$\frac{b^2}{x-q}$».
396	2 згори:	непотрібні гранчасті дужки.
402	8 здолу:	зам.: «$\frac{\sqrt{\Delta'}^2}{2a}$», м. б.: «$\left(\frac{\sqrt{\Delta'}}{2a}\right)^2$».
420	5 згори:	між $\frac{1}{2}$ та 3 бракує дужки.
430	4 згорй	зам.: «пара розвязок», м. б.: «пара дійсних розвязок».
433	14 згори:	зам.: «$y<x^2$ м. б.: «$Y<X^2$».
436	8 згори:	після слова «рівняння» — непотрібне: «ах».

Инші, дрібні недогляди поправить читач сам.

УВІД

§ 1. Числа та рахункові дії.

1. **Числення.** Числення — це одна з найважніших чинностей людської думки. Воно основується на тому, що ми при перечислюванні предметів перестаємо вважати на їхні ріжниці й дивимося на них, як на річі зовсім однакові, нічим не відмінні одна від одної. Тоді кожну таку річ називаємо *одиницею*, а всяку збірку таких одиниць — *числом*.

2. **Природній ряд чисел.** а) Числення відбувається так, що ми до даної вже збірки одиниць дочислюємо завсіди по одній новій одиниці; так отримуємо за кожним разом нове число, яке *наступає* після давнього, *попереднього*. Коли напишемо числа одне побіч одного так, як вони наступають, отримаємо *природній ряд чисел:*

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ 10,\ \ldots\ 100,\ \ldots \qquad (1)$$

Він зачинається *нулем*. Кінця цей ряд не має, бо ми можемо завсіди до кожного його числа докинути нову одиницю й отримаємо наступне число. Кажемо це так:

Природній ряд чисел безконечний.

Кожне число природнього ряду має двох сусідів: число *попереднє* (з якого воно повстало через дочислення одиниці) й число *наступне* (яке отримуємо з нього, коли поступимо в нашому численні на один крок вперед); тільки перше число ряду, то-б то *нуль*, не має свого попередника. Число попереднє *менше* від наступного, наступне — *більше* від попереднього.

б) Всі числа, що ними займається математика, діляться на *подрібні* (спеціяльні) й *загальні*. *Подрібні* числа мають завсіди однакову вартість, а пишуться вони *цифрами*. Зате ж *загальні* числа не мають завсіди одної й тої самої вартости; вони можуть приймати всяку вартість. Їх значимо *буквами*, так що *під буквою будемо розуміти яке завгодно число*.

Коли довільне загальне число означимо буквою a, матимемо для означення наступного числа знак $a + 1$, для попереднього $a - 1$. Найменшим числом природнього ряду являється *нуль*, бо він не має перед собою попереднього числа.

3. **Числова лінія.** Дуже часто матимемо велику користь із *геометричного з'ясовування природнього ряду чисел.* Дієть ся це при допомозі т. зв. *числової лінії.* На простій лінії, необмеженої довжини, вибіраємо довільну точку за початкову й відзначуємо цілий ряд точок у довільних, але рівних відступах; над ними пишемо чергою числа природнього ряду, починаючи з нуля, якого ставимо над початковою точкою (рис. 1):

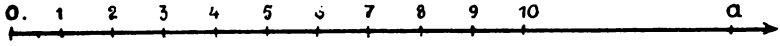


Рис. 1.

Стрілка на протилежному кінці має означувати, що цю лінію можна продовжувати в цьому напрямкові в безконечність. Таку просту, що в одному напрямкові простягається в безконечність, звемо *промінем.* Довжину відтинків $\overline{01}$, $\overline{02}$, $\overline{03}$, $\overline{04}$ і т. д., звемо *відрізними* точок 1, 2, 3, 4,...

Подібно, як якесь довільне число можна означувати буквою, нпр. *a*, й назвати його «загальним числом», можна й на числовій лінії кожну довільну довжину або точку поділу назначити також довільною буквою.

На числовій лінії переводимо числення так, що пересуваємось від одної точки до сусідньої направо. Число можна визначити на два способи; воно може бути дане: або

а) одною з точок поділу на лінії, або

б) довжиною відтинка числової лінії від нуля аж до відповідної точки, отже відрізною тої точки.

Цього другого способу вживають частіше всього в геометрії (додавання відтинків, тощо).

4. **Рахункові дії.** а) Всяку чинність, при допомозі якої з даних чисел отримуємо нові, звемо *рахунковою* або *аритметичною дією.* Найпростіша дія — сам процес числення; можемо її назвати *дією нулевого ступіня.* Дальші дії поділимо на три ступіні, а на кожному з них будемо мати дії *прямі* та *обернені.* Прямі дії ведуть до творення чисел із даних складників дії. Їх можна переводити без усяких обмежень, тоб-то в кожному випадкові без виїмку отримаємо якесь нове число з природнього ряду. При обернених діях питаємо завсіди про один із складників прямої дії, коли дані вислід і другий складник тої прямої дії. Вони *обмежені,* бо не завсіди можна їх виконувати в обсягу чисел природнього ряду.

Маємо такі дії:

Ступінь	Дії	
	прямі	обернені
0	числення	———*)
I	додавання	віднімання
II	множення	ділення
III	степенювання	{ корінювання { логаритмування

б) Складність і трудність дій зростає з ступіня на ступінь.

Числення дає числа, з яких кожне наступне більше від попереднього на одиницю. Коли зачнемо числити, починаючи з числа a, матимемо такий ряд наступних чисел:

$$a,\ a+1,\ (a+1)+1,\ [(a+1)+1]+1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots **)$$

При *додаванні* творимо числа через дочислювання більшої кількости одиниць нараз:

$$s = a + b; \tag{2}$$

множення — це додавання однакових чисел:

$$p = a \,.\, b = \underbrace{a}_{1} + \underbrace{a}_{2} + \underbrace{a}_{3} + \ldots + \underbrace{a}_{b}, \tag{3}$$

а *степенювання* — множення однакових чисел:

$$k = a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \ldots\ldots a}_{1\ 2\ 3\ \ldots\ldots\ n} \tag{4}$$

(малі числа під поодинокими числами означують їхні місця).

в) *Обернені дії* шукають одного з складників висліду, коли дано вислід та всі інші складники. При *відніманні* питаємо, яке число b треба додати до даного числа a, щоб отримати на вислід дане число s:

$$b = s - a; \tag{2a}$$

при *діленні* хочемо знати, яке число b треба помножити даним числом a, щоб отримати на вислід дане число p; воно буде:

$$b = \frac{p}{a}, \tag{3a}$$

а пряма дія третього ступіня дає почин двом оберненим: а) можемо питати,

---

*) Оберненою дією нулевого ступіня можна би вважати хіба *числення назад*, тоб-то числення від якогось числа не до наступного, а до попереднього, отже на числовій лінії хід від правої руки до лівої.

**) З'єднинення чисел a і 1 дужками (скобками) значить, що ці дві числі творять нерозривну цілість, отже $(a+1)$ — це властиво один знак; так само гранчасті скобки [ ] означують, що $(a+1)$ з'єднено з дальшою одиницею в нерозривну цілість, отже $[(a+1)+1]$ — це знову тільки один знак. — Крім тих двох родів скобок можемо в разі потреби вжити ще т. зв. «вигинаних скобок»: { }.

яке число (*a*) ми степенювали, і б) можемо шукати, *скільки разів* (*n*) треба його взяти за чинник. Перше питання — це зміст дії *корінювання:*

$$a = \sqrt[n]{k}, \tag{4а}$$

(чит.: a — це n-ий корінь із k), друге — це *логаритмування:*

$$n = {}^{a}log\ k, \tag{4б}$$

(чит.: n — це a-ий логаритм числа k або логаритм числа k при основі a).

5. **Уваги про рахункові дії.** а) *Прямі дії* двох перших ступінів дають тільки по одній оберненій, степенювання веде до двох обернених дій. Причина тому така, що в сумі $a + b$ та в добутку $a.b$ числа a і b грають однакову ролю, отже на одне виходить, котре з чисел: a чи b, треба нам обчисляти. Зате в степені a^n число a має зовсім инше значіння, як n, тому обчислювання одного й другого веде до цілком иншого висліду.

Можна це висловити ще й так, *що додавання та множення — дії переміннi, а степенювання — дія непереміннa.* Це значить, що:

$$a + b = b + a \quad \text{і} \quad a \,.\, b = b \,.\, a,$$

але a^n зовсім відмінне від n^a (напр. $5^2 = \underset{1}{5} \,.\, \underset{2}{5} = 25$, а $2^5 = \underset{1}{2} \,.\, \underset{2}{2} \,.\, \underset{3}{2} \,.\, \underset{4}{2} \,.\, \underset{5}{2} = 32$; виїмково тільки є $2^4 = 4^2$).

б) *Обернені дії*, як згадано, обмежені, бо не можна напр. віднімати більшого числа від меншого і т. д.; коли ж хочемо виконувати їх без застережень, мусимо вводити нові числа, яких немає в природньому ряді. Отже *обернені дії — це джерело для нових родів чисел. — Віднімання* веде до *від'ємних* чисел, які впроваджуємо тоді, коли нам приходиться від даного числа відкинути більше одиниць, як їх там є. *Ділення* дає *дробові* числа, які потрібні на те, щоби могти ділити кожне число кожним иншим, більшим або меншим від нього. Подібно *корінювання* дає числа *невимірні* й *уявні*, *а логаритмування* веде до *переступних* чисел.

6. **Математичні закони.** Приписи, що ними послугуємося при виконуванні математичних дій, звуться *математичними законами* (напр. «величина суми не залежить від порядку, в якому беремо доданки»). Ці закони висловлюємо або словами, як у нашому прикладі, або пишемо математичними знаками й тоді отримуємо математичний *взірець* (зразок, формулу), напр.:

$$a + b = b + a.$$

Математичний закон, написаний у загальних числах, можемо прикласти до ріжних подрібних чисел. Отже користь із загальних чисел така, що нам вистарчить вивести математичний закон для загального випадку, а цим заощаджуємо собі праці, бо не потрібуємо виводити його за кожним разом зокрема.

Математичні формули писані «міжнародньою», математичною мовою; вони зрозумілі для всіх, що знають математику, а математичні закони, подавані словами, зрозумілі тільки для тих, що розуміють дану мову. В цьому й лежить велике значіння мови цифр і взірців.

Одиницею часу являється *секунда* (1^s), тоб-то $^1/_{860400}$-а частина того часу, який минає від одного полудня до другого. Дальші міри часу є: минута ($1^m = 60^s$), година ($1^h = 60^m$), день або доба ($1^d = 24^h$) і рік (час обігу землі кругом сонця ($1^a = 365^d\ 5^h\ 48^m\ 45{,}5^s$).

8. **Числа однакові й неоднакові.** Коли дві числі назначимо двома ріжними символами, нпр. a і b, то є три такі можливости: або

1) число a більше від b; пишемо це так: $a > b$; або

2) число a менше від b; тоді пишемо: $a < b$; або врешті

3) число a рівне числу b; пишемо: $a = b$.

Коли $a = b$, то рівночасно $b = a$, а коли $a > b$, то $b > a$.

На числовій лінії число менше лежить ліворуч від більшого, отже тим самим *число більше — праворуч від меншого.*

Коли знаємо, що $a = c$ і $b = c$, то з того виходить: $a = b$.

Коли $a > b$ і $b = c$, то тим самим $a > c$, а коли $a > b$ і $b > c$, то «тим більше» $a > c$.

9. **Числа постійні та змінні. Функції.** а) Як з одного боку числа ділимо на подрібні й загальні, так із другого боку мусимо розріжнити числа *постійні* та *змінні*. — *Постійні числа* — це такі, що завсіди (а бодай серед одного рахунку) затримують однакову вартість; зате *змінні числа* змінюються навіть серед одного рахунку. Нпр. коли обчислюємо округ кола, то відношення між округом і поперечником завсіди постійне ($\pi = 3{,}14\ldots$), зате довжина проміня й поперечника та величина округу змінюються. — При відсотковому численні звичайно затримуємо постійною відсоткову стопу, а змінні бувають: початковий і кінцевий капитал та час опроцентування.

Подрібні числа по своїй суті постійні, зате загальні можуть бути в міру потреби постійні або змінні.

Коли між двома змінними величинами існує якась залежність, тоді кажемо, що *одна величина — функція другої;* нпр. округ кола — функція проміня або поперечника, а висота відсоткового прибутку — функція початкового капиталу, відсоткової стопи та часу. Функційну залежність зазначуємо *рівняннями*, нпр. для округу кола:

$$u = 2\pi r,$$

а для відсоткового прибутку:

$$D = \frac{KPT}{100}.$$

Тут одні величини змінюються довільно, т. зн. так, як ми хочемо або як їм приписуємо, а другі вже мусять слухатися відповідного припису; перші звемо *незалежними змінними* або *функційними аргументами*, другі — *залежними змінними* або *функціями*.

б) Функційна залежність стане наглядніщою, коли вживемо *геометричного з'ясування*. Покажемо це на прикладі:

«Одиниця товару (отже 1 m, 1 kg, 1 l або 1 штука) коштує a одиниць грошей; скільки заплатимо за x одиниць товару?»

Тут, очевидно, загальна ціна товару буде функцією його кількости. Означім загальну ціну буквою y, тоді «функційне рівняння» буде:

$$y = ax.$$

Його унаочнюємо так, що на числовій лінії відзначуємо кількість товару, а на лінії, яку поведемо сторчово до неї в початковій точці (або на лініях сторчових у точках поділу), відмірюємо відтинки, що мають відповідати цінам; тоді ріст загальної ціни буде даний простою лінією (рис. 2). Вона показує, що чим більше купимо товару, тим більше за нього заплатимо, або иншими словами: ріст загальної ціни «пропорційний» до кількости товару.

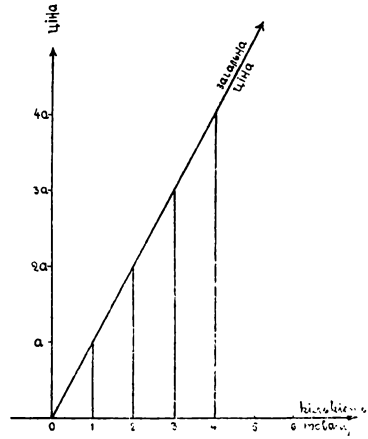


Рис. 2.

в) Такого способу з'ясовування вживаємо при змінности ріжних величин навіть тоді, коли не вміємо подати їхньої залежности математичним способом. Вони дають надзвичайну переглядність висліdів, а через те вони дуже розповсюджені. Такі рисунки звуться *діяграмами*.

Є два роди діяграм: лінійні та площинові. Лінійну діяграму робить лікар, коли записує собі зміни горячки при недузі, та часто по самому вигляді «лінії горячки» відгадує рід недуги (рис. 3). Метеорологи записують тим способом зміни стану барометру й термометру (барограми та термограми, рис. 4 і

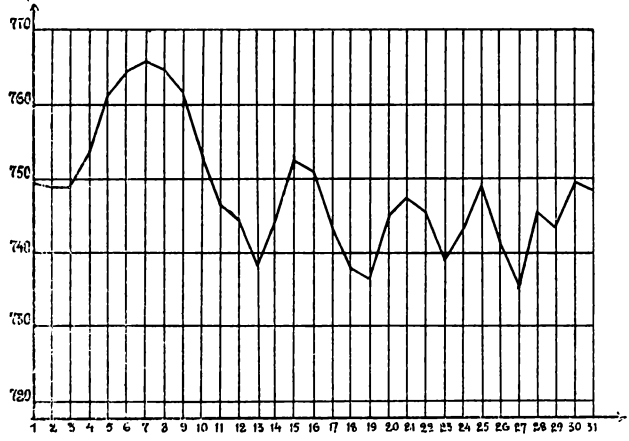


Рис. 4.

Зміни барометричного тиску в Київі на протязі січня 1911 р.

7. Числа названі й неназвані. а) Коли перечислюємо якісь предмети, які будемо вважати зовсім однаковими, тоді до їхньої кількости додаємо назву того предмету (нпр. п'ять людей, сто коней). Такі числа звуться *названими* (іменованими), бо подають назву перечислюваних предметів. Їх уживаємо в практичних завданнях, отже в проблемах щоденного життя, в геометрії, физиці і т. д.

Зате чиста аритметика послугується числами *неназваними* (неіменованими), тоб-то такими, при яких нам зовсім не йде про *якість* предметів, тільки про їхню *кількість*. *При рахункових діях уживаємо завсіди тільки неназваних чисел*, а лише при висліді додаємо назву числа. Та це треба робити дуже обережно й за кожним разом добре розбірати, якої назви маємо надати вислідові.

Нпр. а) Обчислити площину прямокутника, що має боки $5m$ і $4\ m$. Геометрія вчить, що треба «помножити один бік на другий»; добуток чисел 5 і 4 буде 20, але цьому числу треба вже надати назву квадратової міри, тоб-то m^2.

б) Названі числа складаються з *названих одиниць*, а ті можуть бути *основні* або *похідні*.

Основні одиниці подають: *довжину*, *тягар* (масу) і *час*.

Одиницею довжини є метер (m), тоб-то $^1/_{10\ 000\ 000}$-а частина четвертини полуденника землі. З метра творимо міри більші ($1km = 1\ 000m$) і менші ($1dm = 0{,}1m$; $1cm = 0{,}01m$; $1mm = 0{,}001m$). Фізики вживають іще менших мір: «мікрона» ($1\mu = 0{,}001mm$) і «мілімікрона» ($1m\mu = 0{,}000\ 001mm$).

Із тої основної одиниці випроваджуємо такі похідні одиниці:

1) Для міряння *площини* (поля) — *квадратові міри:* квадратовий метер ($1m^2$), тоб-то квадрат, бік якого має $1m$ довжини, а далі $1km^2$, $1dm^2$ і т. д. До міряння грунтів служать іще: *ар* ($1a = 100m^2$) та *гектар* ($1ha = 10\ 000m^2$).

2) Для міряння *змістів* тіл — *кубичні міри:* кубичний метер ($1m^3$), тоб-то куб із гранкою $1m$, і т. д. — Для міряння течей служать: *літер* ($1l = 1dm^3$) та *гектолітер* ($1hl = 100l$).

Одиницею тягару (маси) є *грам* ($1g$), т. зн. тягар (маса) $1cm^3$ води (дестильованої, при 4^0C), а від нього виводяться: кілограм ($1kg = 1\ 000g$), сотнар (т. зн. «метричний» або «великий», $1q = 100kg$) та тона ($1t = 10q$).

Ці всі міри звуться *метричними*, бо походять від метра. Вони введені в часі великої французької революції і від того часу поширилися по цілому світі. Сьогодня вживає їх уже цілий світ, за виїмком Англії.

Як останок давніх мір затрималися ще деякі краєві міри в поодиноких краях, нпр. у нас:

а) для *довжини:* 1 верста = 1500 аршинів = $1067m$ (отже $1km = 0{,}937$ версти = 1408 аршинів), а на землях давньої Австрії; 1 австр. сажень = $1{,}896m$;

б) для *площини:* 1 десятина = $109{,}25a$ (отже $1ha = 0{,}9153$ десятин), а на землях давньої Австрії: 1 морг = 1600 кв. саж. = $57{,}58a = 0{,}527$ десятин (так що $1ha = 1{,}707$ моргів, і 1 дес. = 1,898 моргів);

в) для *змісту:* 1 бочка = 40 відер = 492 l, (отже $1\ hl = 0{,}2032$ бочки);

г) для *тягару:* 1 пуд = 40 фунтів = $16{,}380kg$; 1 фунт = $0{,}4095kg$ ($1q = 6{,}097$ пудів, $1kg = 2{,}442$ фунтів).

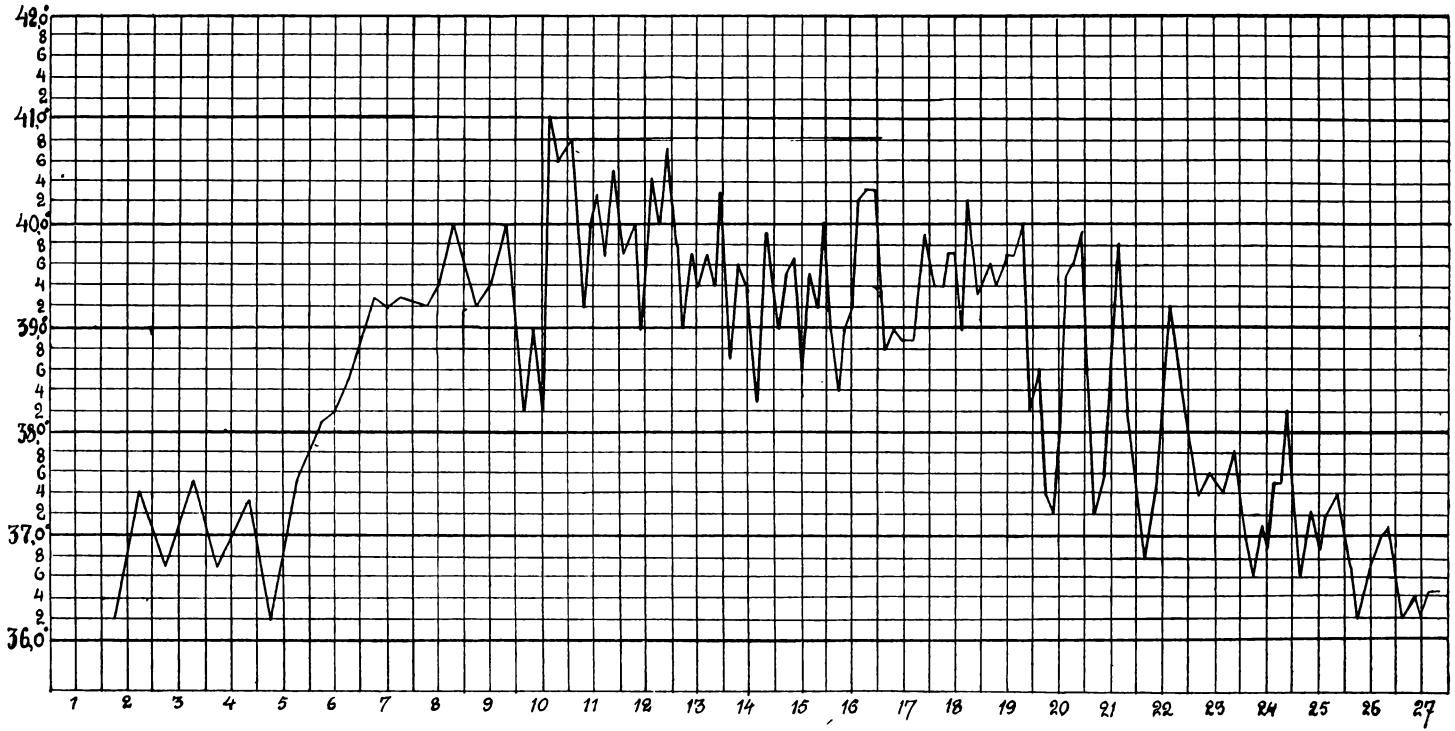


Рис. 3.

Лінія горячки при черевному тифі.

5), а роблять це або наглядачі, або самочинні (автоматичні) прилади. — У статистиці з'ясовують тим методом розвиток ріжних установ, зріст населення тощо (рис. 6), а залізничники найскоріше розбираються в розпису їзди, коли він складений рисунковим методом (рис. 7).

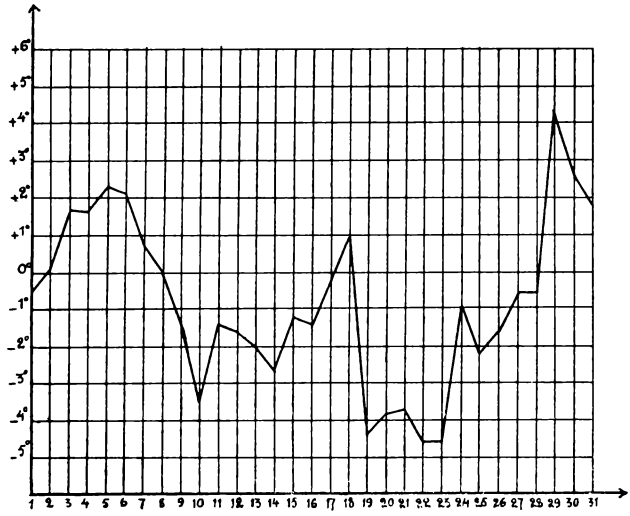


Рис. 5.

Зміни температури в Київі на протязі березня 1911 р.

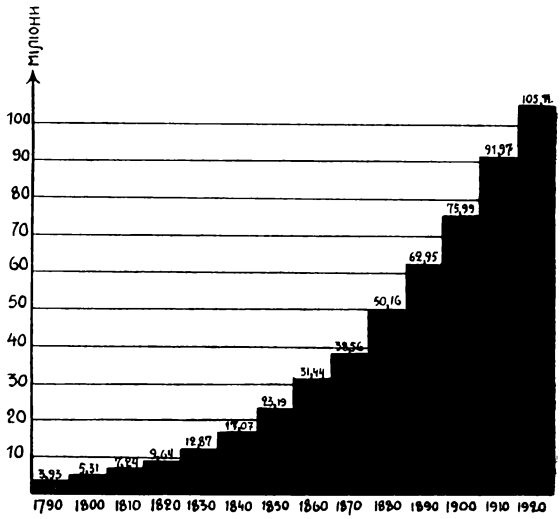


Рис. 6.

Зріст населення З'єдинених Держав Північної Америки за рр. 1790—1920.

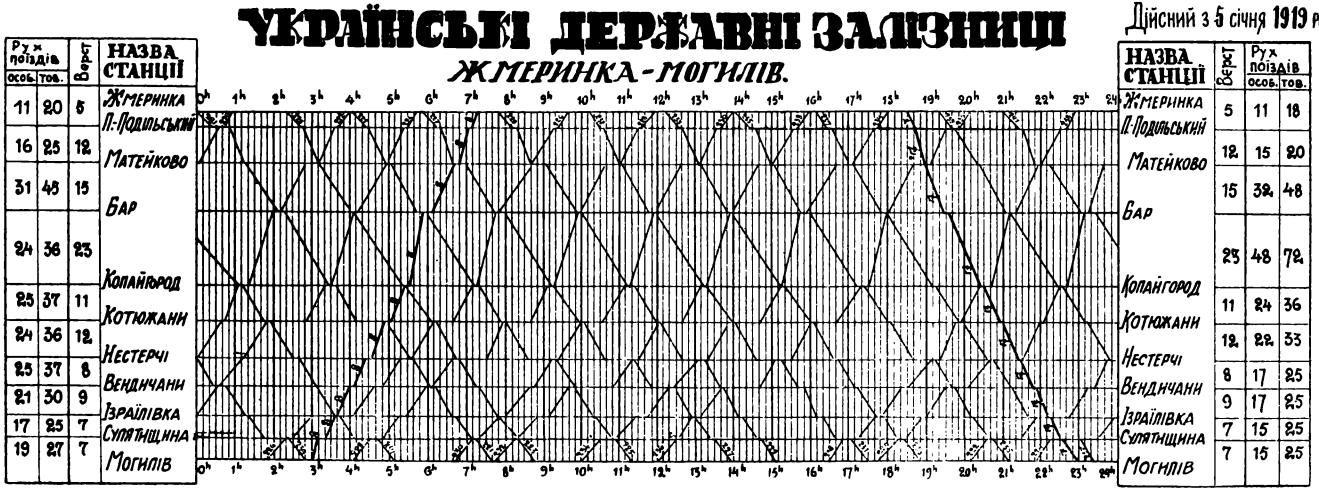

УКРАЇНСЬКІ ДЕРЖАВНІ ЗАЛІЗНИЦІ
Дійсний з 5 січня 1919 року.
ЖМЕРИНКА - МОГИЛІВ.
Рух поїздів
особ. тов.
Верст
НАЗВА СТАНЦІЙ
11 20 5 Жмеринка
16 25 12 П.-Подільський
31 45 15 Матейково
24 36 23 Бар
25 37 11 Копайгород
24 36 12 Котюжани
25 37 8 Нестерчі
21 30 9 Венднчани
17 25 7 Ізраїлівка
19 27 7 Супятщина
Могилів
0h 1h 2h 3h 4h 5h 6h 7h 8h 9h 10h 11h 12h 13h 14h 15h 16h 17h 18h 19h 20h 21h 22h 23h 24h
НАЗВА СТАНЦІЙ
Верст
Рух поїздів
особ. тов.
Жмеринка 5 11 18
П.-Подільський 12 15 20
Матейково 15 32 48
Бар 23 48 72
Копайгород 11 24 36
Котюжани 12 22 33
Нестерчі 8 17 25
Венднчани 9 17 25
Ізраїлівка 7 15 25
Супятщина 7 15 25
Могилів

Рис. 7.

Площинові діяграми — це фігури, які пропорційно до величини своєї площини уявляють собою ту або иншу величину в порівнянні до других.

Нпр. колова діяграма на рис. 8 уявляє етнографичний склад населення Катеринославської губернії, по перепису з 1910 р., а квадратова діяграма на рис. 9 — природні багацтва України в порівнянні до багацтв цілої бувшої Російської імперії.

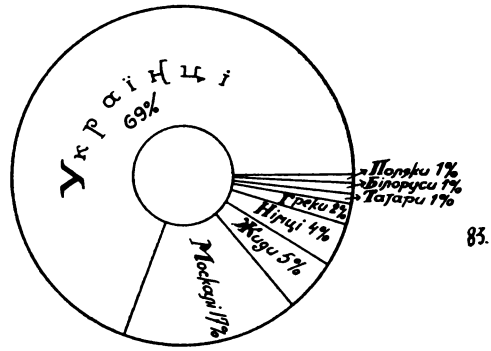


Рис. 8.

10. Рівняння й нерівности. а) Між двома однаковими величинами пишемо знак рівности, нпр.:

$$A = B,$$

й називаємо таку сполуку *рівністю*. Вона має два боки: лівий A і правий B.

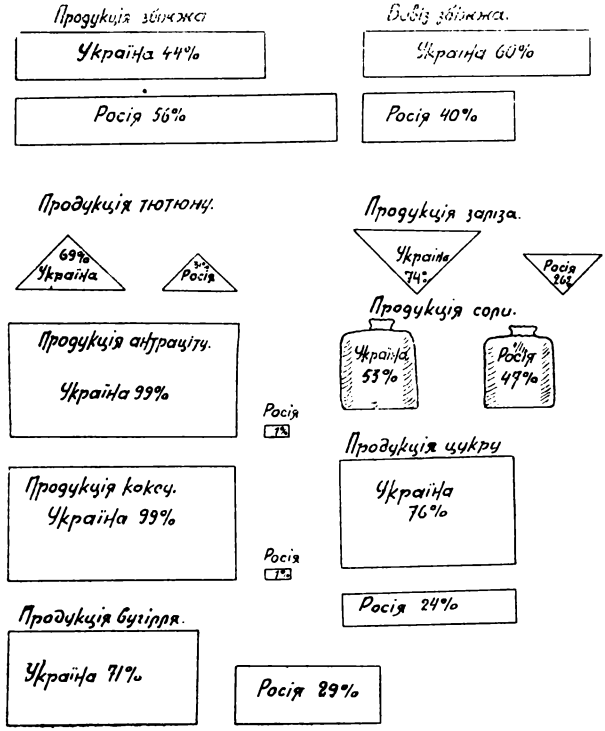


Рис. 9.

Кожний математичний закон — це рівність; нпр. т. зв. «закон переміннности» (уступ. 6):

$$a + b = b + a,$$

або припис для підношення двочлену в квадрат:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

або взірець на площину кола:

$$f = \pi r^2$$

(він показує залежність між площиною кола та його промінем) і т. д. Ці всі рівности остаються правдивими для всякої можливої вартости загальних чисел a, b, x, y; також за f і r можна підставляти кожну вартість*). Такі рівности звуться *тотожними рівняннями*. Зате інші рівности справджуються тільки тоді, коли в них підставити за загальні числа якісь особливі вартости. Нпр. рівність

$$3 + x = 5$$

правдива тільки тоді, коли за x покладемо 2, а неправдива для кожної иншої вартости величини x; нпр. для $x = 3$ отримали б ми недоречність $6 = 5$. Рівність

$$x^2 - 17x + 66 = 0$$

правдива тільки для $x = 6$ і для $x = 11$, а неправдива для всіх инших вартостей. Такі рівности мають назву *умовних рівнянь*. У них число x являється *невідомим* і його треба обчислити.

Знайти вартість невідомої (величини) — це головне завдання в науці про рівняння. Ця чинність зветься *розвязуванням рівнянь*. Величина x, що «сповнює» дане рівняння — це його *корінь*. Отже: *розвязати рівняння* — значить: *знайти його корінь*.

Рівняння мають у цілій математиці надзвичайно велике значіння; можна сказати, що вся алгебра — це висновки з перерібок основних рівнянь. І в практичному житті неможливо обходитися без рівнянь.

Основна прикмета рівнянь така:

Корінь рівняння не зміниться, коли на обох його боках виконаємо однакові зміни (отже додамо або віднімемо однакові числа, однаковими числами помножимо або поділимо і т. д.).

Нпр. коли до обох сторін рівняння $3 + x = 5$ додамо 5, отримаємо $8 + x = 10$, а його корінь буде, як і перед тим, $x = 2$.

Тільки на основі цієї прикмети, яку приймемо за *аксіому***), можливе роз-

---

*) Число π, хоч писане буквою, не є загальне, тільки подрібне, бо воно має завсіди одну й ту саму вартість 3, 1415926... Воно подає відношення округу *кожного* кола до поперечника того кола.

**) *Аксіомою* називаємо очевидну правду, для якої не треба доказу.

вязування рівнянь. Як це виглядає в практиці, будемо бачити в III розділі; тут для з'ясування нашої ідеї подамо тільки один приклад:

«Яке це число, що помножене на 5 і збільшене на 7, дасть той самий вислід, як число, менше від нього на 1, коли його помножимо на 10 і добуток збільшимо на 2 ?»

Цього числа ми не знаємо, зате знаємо одну його прикмету і з неї намагаємося «скласти рівняння». Отся прикмета говорить нам про рівність двох чисел, які можемо вивести з того невідомого. Назвім його x; тоді знаємо, що його пятикрать, збільшена на 7, тоб-то число $5x + 7$, — це те саме, що десятикрать числа на 1 меншого від x, збільшена на 2. Числа x поки що не знаємо, отже й не знаємо, яке число буде від нього на 1 менше. Тому пишемо замість нього загально x — 1, беремо його в скобки і множимо на 10, а потім до того додаємо 2. Це дасть число виду: $10(x + 1) + 2$. Порівняння тих двох величин, як цього вимагає наше завдання, веде до рівняння:

$$5x + 7 = 10(x - 1) + 2,$$

і ми маємо його розвязати.

Розвязка рівнянь буде предметом пізніших уступів. Тут пояснимо тільки на одному, навіть досить вільному порівнянні, що значить: розвязати рівняння.

Уявім собі, що маємо вагу і на обидві її терезки накладаємо однакові тягарці. Вага буде завсіди в рівновазі, коли на обох терезках будемо виконувати однакові зміни, отже докладати або знімати такі самі тягарці, подвоювати навантаження кожного з них і т. д. *Отсе відповідав основній прикметі рівнянь.*

В нашому випадкові можемо прийняти, що x — це предмет невідомої ваги; на лівій терезці лежить 5 таких предметів і ще 7 одиниць тягару (напр. *kg*). Зате на правій побіч двох одиниць тягару лежить також 10 предметів, одначе кожний із них важить на 1 одиницю менше від x (уявім собі, що на лівій терезці лежать повні коробки, а на правій із кожної надібрано по 1 *kg*).

Щоби дійти до обчислення тягару коробки, докиньмо до кожної коробки на правій терезці те, що в ній бракує; через те докладемо праворуч 10 одиниць тягару, а й ліворуч прийдеться докласти те саме;то ді рівнання прийме вигляд:

$$5x + 7 + 10 = 10x + 2.$$

Тепер уже на обох терезках повні коробки; ліворуч їх є 5, праворуч 10. Скиньмо тепер із лівої терезки 5 коробок, тоді і з правої треба зняти таку саму кількість, а то рівновага пропаде. Це дасть:

$$17 = 5x + 2.$$

Далі знімім із обох терезок по 2 *kg*, отже ліворуч зістанеться тільки 5 коробок, а праворуч лишиться тільки 15 *kg*, і ми матимемо остаточно:

$$15 = 5x.$$

Припускаємо, що всі коробки однаково важкі, отже кожна з них важитиме п'яту частину того, що всі разом, т. зн.:

$$x = \frac{15}{3} = 3 \text{ одиниці тягару.}$$

Вернімся тепер до нашого прикладу: маємо право сказати, що невідомим числом, якого шукали, буде 3. І справді: його п'ятикрать є 15, а збільшена на

7 дасть 22, отже те саме, що десятикрать числа 2 (бо воно на 1 менше), збільшена на 2.

б) Дві нерівні величині будемо злучувати знаком нерівности ($>$ або $<$) і отримаємо *нерівність*, нпр.:

$$(x + y)^2 > x^2 + y^2$$

(це правда, бо тут праворуч недостає члена $2xy$).

Коли на обох боках нерівности виконаємо однакові зміни, тоді знак нерівности або залишиться, або зміниться (т. зн. $>$ перейде в $<$ або навпаки); та про це довідаємося з розділу про рівняння.

11. **Предмет нашої книжки.** Наука про згадані сім рахункових дій і про все те, що з ними в'яжеться, творить зміст *аритметики й алгебри*. Строге розмежування тих двох віток математики дуже трудне; його дає аж вища математика. Тут схарактеризуємо його тільки так, що *аритметика займається числами подрібними, а алгебра — числами загальними й величинами;* найголовніший же ж предмет алгебри — *рівняння*.

12. **Історична увага про початки числення.** Математика — це дуже давня наука. Вона взяла свій початок із потреб практичного життя, яке вимагало перечислювання предметів із окруження людини.

Для чинности числення людина мусить стояти вже на досить високому ступні свого розумового розвитку. Тільки тоді вона могтиме не звертати уваги на дрібні, неістотні ріжниці між поодинокими предметами, а дивитиметься лише на їхню кількість (ця чинність думки зветься *абстракцією*).

У розвитку числення треба розріжнити такі три моменти: а) розуміння чисел, б) вимова чисел і в) писання чисел.

а) Розвиток *розуміння чисел* мусів іти дуже повільною ходою; немає сумніву в тому, що він тривав довгі віки. Ще сьогодня деякі народи, що стоять на низькому ступіні культури, не сягають своїм аритметичним знанням високо: є такі дикарі, що числять тільки до 10, інші вміють числити ледви до 4, а на означення чисел більших кажуть «багато» або показують на своє волосся чи на пісок у морі.

Із старинних народів великими числами займалися *греки* та *інди*, два висококультурні племена, які розвивалися одні незалежно від одних; на жаль, у нас поширені відомости тільки про грецьку культуру, а про індів знаємо відносно дуже мало. Годиться зазначити, що вони знаходили особливу приємність у вишукуванні дуже великих чисел. — Із поміж греків займався великими числами *Архимед**).

---

*) *Архимед* із Сиракуз на Сицилії (287—212 до Хр.), найвизначніший математик грецької класичної доби. По ньому залишилося багато писаних творів, із яких видко, що він займався аритметикою, геометрією, механикою й оптикою та був одним із предтеч творців *«вищого аналізу»* (обчислювання площин фигур та змістів тіл). У своїому творі *«Про числення піску»* займається він дуже великими числами, бажаючи доказати, що найбільшого числа немає. Свою думку проводить на такому наглядному прикладі: обчислити, скільки зернят піску

Та ніде правди діти, що ми й сьогодня не маємо справжнього *розуміння для великих чисел*, хоч — дякуючи нашому знаменитому способові писання — вміємо їх вигідно писати. Коли дивимося на більшу групу предметів, то без перечислення їх не потрапимо подати їхню кількість; вже при 4—5 предметах перша оцінка «на око» дуже часто нас помиляє. Це було й причиною, що через неї витворилися «числові уклади» (див. далі, уст. 45). Люде мусіли підчас перечислювання час до часу спинятися, щоби мати кращий перегляд, і тому складали перечислювані предмети в гуртки, ці гуртки в більші гурти і т. д. Кількість предметів у кожному гурткові була здебільша 10, а це стоїть у звязку з тим, що в людини на руках і ногах по 10 пальців. Порівнювання кількостей перечислюваних предметів із числом пальців на руці влекшувало всяке числення; ще й сьогодня кажемо, що можна що небудь «перечислити на пальцях». Таким способом у нас витворився й затримався «десятковий уклад».

б) У звязку з розвитком десяткового укладу розвивалася *вимова чисел*. Перші числівники повстали надзвичайно давно, бо у всіх індо-европейських мовах знаходимо спільні пні від 1 до 100 разом із стародавньою санскритською мовою.

Для вимовлення кожного, хочби й як великого числа, вистарчає нам дуже мала кількість слів; нам треба мати тільки назви на числа 1 до 10 і кілька нових слів та приставок, що означують одиниці вищих родів (— надцять, — десять —сот, тисяча, міліон і т. д.).

в) Врешті з розвитком письма виникла й потреба *писати числа*. Найпростіший був такий примитивний спосіб, щоби рисувати стільки образів перечислюваних річей, скільки було тих предметів; потім для скорочення писали самі тільки риски (палочки), і аж в останній стадії зачали вживати окремих знаків на означення чисел.

До цієї остаточної мети вели ріжні дороги, а вони основувалися на ріжних принципах. Можна було перш за все виписувати словами цілі числа, але цей спосіб показався непрактичним (бо занадто довгий), тому його закинуто. Далі пробували означувати цифри буквами з азбуки; так писали *жиди* (та другі семитські народи) й *греки*, а від цих останніх той спосіб прийшов і до нас, і ми бачимо сліди того ще в наших церковних книгах. Він полягає в тому, що одиниці, 1—9, означені першими девятьма буквами, десятки, 10—90, дальшими девятьма буквами, а сотні, 100—900, останніми девятьма. При тисячах по-

---

помістилось би в кулі, промінь якої сягає від сонця до одної з постійних зір. При цьому творить він числа 1 із 8 міліярдами нулів, зазначуючи, що це ще не найбільше число. — Згинув він підчас здобуття Сиракуз римлянами, обороняючи своє родинне місто всім своїм знанням; будував складні машини, якими кидав здоровенні камінюки на римські кораблі і т. д. Оповідають, що римський вояк, який вдерся до його дому, застав його, як він рисував на піску геометричні фигури. Архимед кликнув: «Не мішай мені моїх кол!». Вояк не знав, що це той славний математик, життя якого приказав берегти римський консул *Маркил*, і вбив Архимеда. — Маркил поставив Архимедові величавого пам'ятника, який одначе швидко попав у забуття, і аж через сто років *Цицерон* віднайшов його при нагоді урядового побуту на Сицилії (як квестор) і привів до кращого стану. — Див. також увагу до 5 вправи (III) в § 16.

вторюється цей самий спосіб, тільки що перед числом писано якийсь окремий значок.

Римляне, як відомо, писали числа инакше; вони ставили палочки групами по 2, 3 і 4, а для 5, 10, 50, 100, 500 і 1000 мали окремі знаки. Коли писали менший знак після більшого, то це значило, що ці дві числі треба додати; при відворотному положенню знаків треба було ці числа віднімати. Нпр.

$$XI = 10 + 1, \qquad IX = 10 - 1.$$

Одначе найдоскональнішу систему писання чисел винайшли *інди*, які сотворили т. зв. «позиційну аритметику». Вона полягає в тому, що кожна цифра, яку напишемо ліворуч від другої, отримує вартість у десятеро більшу (нпр. у 333 перша цифра з правого краю має вартість найменшу, середуща вдесятеро більшу, а остання ліворуч — найбільшу, бо в сто разів таку, як перша). Отже тут кожна цифра має подвійне значіння: значіння «власне» й значіння «місцеве». Коли в числі бракувало одиниць якогось роду, писали інди окремий знак — коліщатко — на означення «нічого». Ось так *винаходом нуля* вони довершили будову свого незрівняного укладу.

Та їхній геніяльний винахід був у Европі довго невідомий, аж поки *араби* в середніх віках занесли його до Еспанії. Звідсіля після упадку їхньої держави разом із иншими їхніми культурними здобутками ці відомости рознеслися по цілому світу; тим то й треба пояснити назву «арабські цифри» (0, 1, 2, ... ,9). Та по суті річі ці цифри не арабські, бо араби вживали знаків, які до них зовсім неподібні. Найсправедливіше було би, систему саму назвати «індійською», але не цифри. Такі цифри, яких ми сьогодня вживаємо, витворились аж на протязі довгого часу; їхня нинішня форма встановилася лише в XVI — XVII ст.

Починаючи з початку XIII ст., перший *Ліонардо* з *Пізи* (званий *Фібоначі*) запровадив уживання індійсько-арабських знаків (у творі:«Книжка про абак» — тоб-то про рахункову дошку, 1200 р.). З того часу пішла боротьба між двома напрямками: *абацистами*, що писали числа по давньому, й *алгоритмиками*, прихильниками нового способу писання. Боротьба велася аж до кінця XV ст.; тоді зачали вже загально вживати нової системи. До того спричинився у великій мірі винахід друкарської штуки.

ВПРАВИ.

1. Представити на числовій лінії віддалі між ріжними станціями якоїсь залізничої лінії.

2 Представити рівник землі (або один із полуденників чи рівнолежників) як числову лінію й позначити на ній усі важніші географичні з'явища.

3 Дати приклади кількох математичних законів (словами та формулами).

4. Дати приклади кількох родів функційної залежности й нарисувати їхні діяграми.

5. Нарисувати діяграму росту відсоткового доходу при постійному капиталі й постійній відсотковій стопі, коли росте час.

6. Ціни діямантів зростають так, що діямант удвоє тяжчий коштує вчетверо більше- втроє тяжчий має ціну вдевятеро більшу і т. д. Нарисувати діяграму росту цін діямантів.

7. Представити площиновою (прямокутною або коловою) діяграмою склад населення якогось краю і т. д.

8. Представити площиновою діяграмою відсотковий химичний склад ріжних страв і напитків.

9. Укласти й розвязати такі рівняння (пробувати розвязувати їх у пам'яті або рисунком):

а) Цеглина важить стільки, що пів цеглини та 2 *kg*; скільки вона важить?

б) Баба винесла яйця на базар і продала з них перше половину, потім четвертину, а врешті шосту частину й зісталось їй 3 яйці. Скільки яєць винесла вона?

в) Коли до половини якогось числа додати 2 одиниці, отримаємо такий сам вислід, як би ми від цілого числа відняли 6 одиниць. Що це за число?

г) За 15 *m* сукна заплачено стільки, що за 18 *m* того самого сукна тоді, коли його ціна була дешевша на 3 карбованці за 1 *m*. Яка була ціна перед тим, а яка тепер?

10. Дати приклади кількох нерівностей.

ПЕРША ЧАСТИНА

Чотири основні дії

ПЕРШИЙ РОЗДІЛ

Прямі дії двох перших ступнів

§ 2. Додавання.

13. **Пояснення додавання.** *Додати до числа a число b значить, до числа a дочислити b одиниць*, або: *в природньому ряді чисел від числа a поступити на b одиниць уперед*, або теж: *на числовій лінії від точки, що відповідає числу a, посунутись на b точок управо.*

Числа, що їх маємо додавати, звуться *доданками* (або *складниками додавання*), вислід додавання — *сумою*, отже в рівнянні:

$$a + b = s \qquad (1)$$

доданками є a і b, а сумою s.

У загальному випадкові ми не вміємо написати тієї суми простіше, хиба що це подрібні числа, напр. $3 + 5 = 8$.

Дочислювання відбувається так, що з числа a творимо наступне $a+1$, з того знову наступне $(a+1) + 1$ і т. д., аж поки утворимо b таких нових чисел; тоді це останнє число буде сумою двох даних.

На числовій лінії проводимо цю дію так: у кінцевій точці, що відповідає першому доданкові a, робимо початок другої числової лінії і йдемо по ній аж до точки b, що відповідає другому доданкові. Тоді те число, яке відчитаємо в цьому місці на першій, буде сумою двох даних, $a + b$. Напр. $5 + 3 = 8$ представимо так (рис. 10):

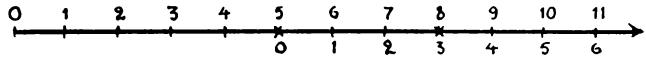


Рис. 10.

а загально $a + b$ (рис. 11):

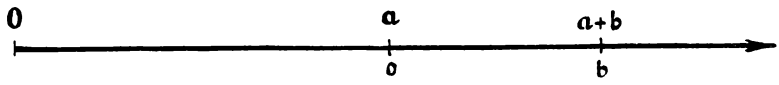


Рис. 11.

Беручи річ геометрично, можемо додавання проводити ще й так, що беремо два відтинки, із яких один має a, другий b одиниць довжини, і складаємо їх в одну цілість; тоді відтинок буде мати $a + b$ одиниць довжини (рис. 12).

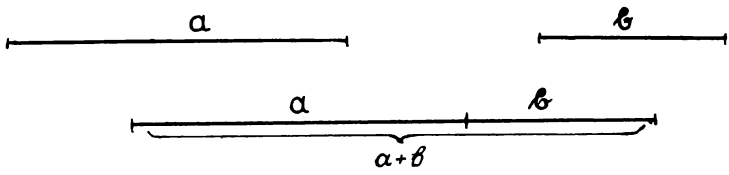


Рис. 12

14. **Закони додавання.** а) *Закон переміни* (доданків):

$$a + b = b + a;$$

величина суми не залежить від порядку, в якому беремо доданки. Нам усе одно, до котрогоз чисел будемо причислювати одиниці другого, бо коли обидві числі розіб'ємо на одиниці і зберемо всі в один гурт, то порядок, у якому будемо їх перечислювати, на вислід не може мати ніякого впливу.

Геометрично пояснюємо це так: Коли на числовій лінії, що уявляє собою суму $a + b$, змінимо напрямок ходу, отже кінцеву точку візьмемо за початкову, а початкову за кінцеву, то через це не зміниться віддаль кінцевої точки від початкової (рис. 13).

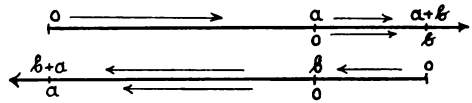


Рис. 13.

б) *Закон злуки* (доданків):

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c); \qquad (3)$$

суму трох чисел творимо так, що або до суми двох перших додаємо третє число, або до першого додаємо готову вже суму другого й третього (Тут скобки, які містять у собідві числі, означують, що ми ці числа перше з'єдинили в одну цілість, поки з ними що-небудь зробимо).

Нпр. $3 + 4 + 8$ можемо обчислити так:

$$(3 + 4) + 8 = 7 + 8 = 15, \text{ або } 3 + (4 + 8) = 3 + 12 = 15.$$

в) *Закон остайности:*

$$\text{Коли } a > b, \text{ то } a + c > b + c; \qquad (4)$$

коли до двох неоднакових чисел додати одне й те саме число, то більше число дасть більшу суму, як менше число.

Це ясне на числовій лінії (рис. 14):

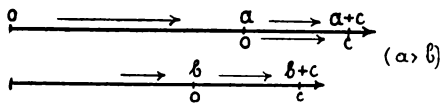


Рис. 14.

З того можемо ще висновувати, що

$$\text{коли } a > b \text{ і } c > d, \text{ то } a + c > b + d. \qquad (5)$$

Докажемо цю нерівність, опіраючись на нерівність (4), яку приймемо за правдиву:

Знаємо, що коли $a > b$, то $a + c > b + c$, а коли $c > d$, то $b + c > b + d$, і через те отримаємо т. зв. «біжучу нерівність»:

$$a + c > b + c > b + d,$$

з якої після пропущення середущого члена виходить нерівність (5).

Зате, коли дані такі дві нерівності: $a > b$ і $c < d$, то сум $a + c$ і $b + d$ не можемо порівнювати. Нпр. маємо: $5 > 3$ і $2 < 7$, отже $5 + 2 > 3 + 7$; одначе можливе й таке, що $5 > 1$ і $2 < 3$, але тоді буде $5 + 2 > 1 + 3$, або: $5 > 2$ і $3 < 6$, але $5 + 3 = 2 + 6$.

г) *Сума більша від кожного з її доданків.*

Отсю основну правду (аксіому) звичайно висловлюють так: «ціліть більша від кожної з своїх частин».

15. **Сума як функція своїх доданків.** Величина суми залежить від кількости доданків, бо коли будемо їх змінювати, то зміниться й величина суми, отже:

Сума — це функція доданків.

Нехай у сумі двох чисел одне число буде постійне, а друге змінюється; тоді матимемо таке «функційне рівняння»:

$$y = a + x;$$

тут a постійне, а x змінне, отже y змінне.

Щоби дослідити краще змінність тієї функції, зробимо дві річі: перше — складемо її «функційну табличку», а потім нарисуємо діяграму. — «Функційна табличка» міститиме в одному стовпці вартости аргументу x, які будемо приймати довільно, а в другому вартости функції y, що їх отримаємо, коли у функційне рівняння будемо підставляти ці вартости x. В кожному рядкові будуть стояти відповідні числа парами. — У діяграмі функції (рис. 15) на поземій осі (тоб-то на поземій числовій лінії) будемо відмірювати вартости аргументу x, а на лініях, сторчових до неї у точках поділу,

вартости функції y. Коли сполучимо їхні кінці простою лінією, отримаємо образ нашої функції y.

$y = 3 + x$

x	y
0	3
1	4
2	5
3	6
...	...
10	13
...	...

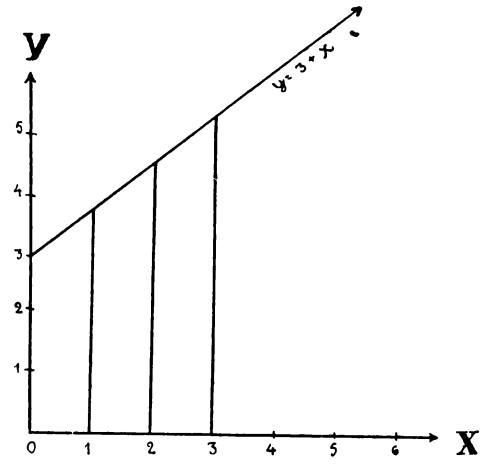


Рис. 15.

ВПРАВИ.

1. На скільки способів можна представити суму трох доданків, коли вживемо законів переміни й злуки?

(а) Числа a, b, c можна додавати в такому порядкові: $a + b + c$, $a + c + b$, $b + a + c$, $b + c + a$, $c + a + b$, $c + b + a$, отже на 6 способів.

(б) Коли суми $a + b$ і $b + a$ вважатимемо одним і тим самим числом, то легко переконаємося, що можливі такі три комбінації: $(a + b) + c$, $(a + c) + b$, $(b + c) + a$.

(в) Комбінувати всі можливости (а) і (б).

2. Виконати кожну з тих форм додавання на числовій лінії.

3. Пояснити це додавання на таких прикладах: $2 + 3 + 6$; $7 + 4 + 8$; $14 + 13 + 15$.

4. На скільки способів можна представити суму чотирох доданків? Див. пояснення до 1 вправи.

5. Пояснити це додавання на числовій лінії та на прикладах: $1 + 2 + 3 + 4$; $5 + 8 + 11 + 9$; $6 + 9 + 17 + 22$.

6. Обчислити в найпростіший спосіб такі суми: $75 + 7 + 15$; $64 + 25 + 36$; $18 + 15 + 22 + 45$; $9 + 4 + 21 + 5$; $159 + 81 + 137$; $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20$.

7. Обчислити в порядку, який подають скобки, такі суми: $(3 + 4) + (1 + 5)$; $(3 + 2) + [1 + (4 + 2)]$; $4 + [(2 + 3) + (3 + 2)] + 1$; $1 + \{3 + [(2 + 4) + (3 + 8)]\}$; $\{(2 + 3) + [(4 + 2) + (6 + 1)]\} + \{[(6 + 2) + (4 + 9)[+ (7 + 2)\} + 1$.

8. Представити як функцію число, що більше від даного числа на 3, 7, 9, 11, або загально на a одиниць. Пояснити це геометрично.

9. Прибутки більші від витрат на a карб.; скласти функційне рівняння, називаючи витрати x, а прибутки y, і нарисувати діяграму.

10. Урядовець отримав у першому місяці року 100 карб. на якусь ціль і мусів із них видати 50 карб. Кожного дальшого місяця його прибутки на ту ціль зростали на 20 карб., а витрати на 30 карб. — Представити як функцію часу прибутки та видатки на протязі цілого року та нарисувати діяграму функції. (а) Коли видатки зрівняються з прибутками? (б) Коли вичерпається ввесь фонд на ту ціль?

11*. Напишім природній ряд чисел 1, 2, 3, 4, 5,..... і творім із нього нові числа так, що до першого числа додамо друге, до тої суми третє, до нової суми четверте і т. д., отже: $1 + 2 = 3$, $(1 + 2) + 3 = 6$, $(1 + 2 + 3) + 4 = 10$, ... Це дасть такий ряд чисел:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots\ldots \qquad (*)$$

Коли будемо вважати одиниці тих чисел точками, то їх завсіди можна буде скласти в рівнобічний трикутник (рис. 16):

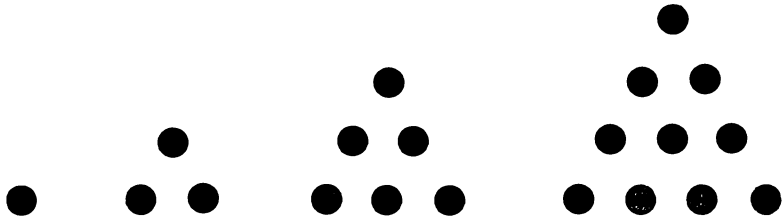


Рис. 16.

Це так зв. *трикутникові числа.*

Обчислити перших двадцять трикутникових чисел.

12*. Коли будемо додавати що два сусідні трикутникові числа, отже: $1+3 = 4$, $3 + 6 = 9$, $6 + 10 = 16$, $10 + 15 = 25$, ..., отримаємо ряд:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\ldots \qquad (**)$$

Його числа подають кількість точок, які можна укласти в квадрат (рис. 17) отже цей ряд — це ряд *квадратових чисел.*

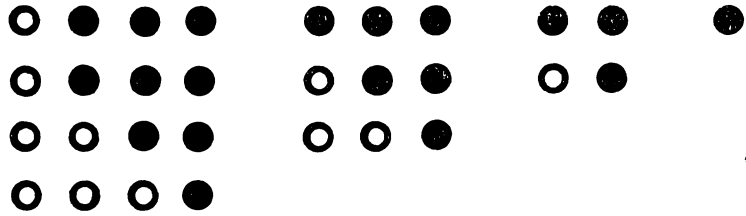


Рис. 17.

Обчислити перших двадцять квадратових чисел.

13*. Пояснити з'явище трикутникових та квадратових чисел і шукати звязку між тими двома родами чисел.

Вказівкою може послужити двояке означування точок на рис. 17.

§ 3. Множення.

16. **Одночлени й многочлени.** Коли доданки якоїсь суми однакові, тоді маємо *множення:* перед спільною назвою всіх доданків пишемо їхню кількість і звемо те число *одночленом.* Нпр.:

$$a + a = 2a;$$

тут число 2 звемо *співчинником*, *а число* a — *головним числом.* Коли до того одночлена додамо ще раз число a, матимемо:

$$a + a + a = 3a,$$

і т. д.; загально:

$$\underset{1}{a} + \underset{2}{a} + \underset{3}{a} + \ldots + \underset{n}{a} = na,$$

де n уявлює собою кількість однакових доданків.

Коли рисуватимемо на числовій лінії a, $2a$, $3a$,..., na, отримаємо на ній нову поділку, на якій точки поділу будуть в a разів дальше одна від одної (рис. 18):

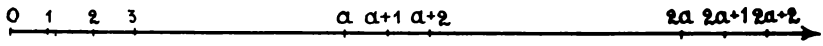


Рис. 18.

Робить це враження, неначе б ми на первісну числову лінію дивилися крізь шкло, що побільшує в a разів. Коли за одиницю довжини приймемо тут довільний відрізок, скажемо, що ми нашу числову лінію міряємо *загальною одиницею* (або що вона має загальну поділку).

Одночлени $2a$, $3a$,..., na і т. д. звемо також *многократтями числа* a; при одночлені a треба завсіди догадуватися співчинника 1, так що $a = 1\,a$.

Многократі одного й того самого числа a (або так зв. *подібні одночлени*) *додаємо так, що додаємо їхні співчинники, а головне число зістається без зміни.*

Нпр. $2a + 3a = 5a$, бо $2a + 3a = (a + a) + (a + a + a)$, а це на основі закону злуки дає $5a$.

Зате многократей ріжних головних чисел не можемо додавати, нпр. суми $2a + 3b$ не вміємо представити в простішій формі. Така

сума зветься *многочленом;* відповідно до кількости членів говоримо про двочлени, тричлени і т. д., загально: *n*-члени.

Многочлени додаємо так, що виписуємо їх один побіч одного з знаками +, а потім у сумі додаємо подібні одночлени (якщо вони є). Цю чинність звемо *редукцією многочлена.*

Нпр. $(2a+3b) + (5a+2b) = 2a + 3b + 5a + 2b = (2a+5a) + (3b+2b) = 7a + 5b$;
тут користувались ми законами переміни та злуки.

З того виходить, що можемо додавати числа *неназвані*, або величини *названі одноіменні*, нпр. $5m + 3m = 8m$, але таке додавання, як $3\,kg + 12m$, не має ніякого значіння.

В одночленах $2a$, $3a$, ..., na головні числа грають зовсім инакшу роль, як їхні співчинники. Число a може уявляти собою величину неназвану, або навіть названу (в геометричному розумінні це буде довжина або відтинок), а n буде подавати тільки кількість доданків; отже числа: a, $2a$, $3a$, ..., na загально треба зважати названими, а число n — неназваним.

17. **Добутки.** Нехай тепер дві числі, a і b, будуть збірками однакових, неназваних одиниць; тоді знак $b.a$ або $b \times a$ або просто ba, буде означувати суму однакових доданків a у кількости b:

$$ba = \underbrace{a}_{1} + \underbrace{a}_{2} + \underbrace{a}_{3} + \ldots + \underbrace{a}_{b}. \qquad (2)$$

Число ba звемо *добутком* чисел b і a, а ці дві числі — *чинниками добутку.*

18. **Закони множення.** а) *Закон переміни* (чиників):

$$ab = ba; \qquad (3)$$

величина добутку не залежить від порядку, в якому беремо його чинники.

Доказ. Розбиймо в сумі (2) кожний доданок на одиниці й пишім кожний із них в окремому рядкові:

$$\begin{aligned} p = ba = {} & \underbrace{1}_{1} + \underbrace{1}_{2} + \underbrace{1}_{3} + \ldots + \underbrace{1}_{a} && \text{(перший доданок)} \\ & + \underbrace{1}_{1} + \underbrace{1}_{2} + \underbrace{1}_{3} + \ldots + \underbrace{1}_{a} && \text{(другий доданок)} \\ & + \ldots\ldots && \ldots\ldots \\ & + \underbrace{1}_{1} + \underbrace{1}_{2} + \underbrace{1}_{3} + \ldots + \underbrace{1}_{a} && (b\text{-ий доданок}) \end{aligned} \qquad (4)$$

Одначе на основі закону злуки доданків можемо ці одиниці збірати в числа так, що будемо їх брати не поземими рядками, а стовпцями; це дасть нам a стовпців по b одиниць, отже:

$$p = b + b + \ldots + b = ab,$$

т. зн.:

$$ba = ab.$$

Коли часом треба зробити ріжницю між тим числом, *яке* множимо і тим, *на яке* множимо, називаємо перше *множимком*, друге — *множником*.

б) *Закон злуки* (чинників):

$$abc = (ab)c = a(bc); \tag{5}$$

три числі множимо так, що добуток двох перших множимо третім числом, або перше число множимо готовим уже добутком другого та третього числа.

Як при додаванні, так і при множенні може це правило придатись нам на те, щоби з більшої кількости чинників збірати в групи й вимножувати ці, які дають вигідні добутки (напр. закінчені нулями); напр.: $2 \cdot 5 = 10$; $5 \cdot 8 = 40$ і т. д.

Закон злуки дає нам змогу множити одночлени. Коли напр. дане $(3a) \cdot (5b)$, то множення піде таким шляхом: $(3a) \cdot (5b) = 3a \cdot 5b = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 15ab$, отже:

Одночлени множимо так, що множимо окремо співчинники, а окремо головні числа.

в) *Закон одностайности:*

$$\text{коли } a > b, \text{ то } ac > bc, \tag{6}$$

і далі:

$$\text{коли } a > b \text{ і } c > d, \text{ то } ac > bd. \tag{7}$$

Обидві ці формулі легко доказати.

г) В обсягу чисел природнього ряду можемо сказати, що *добуток більший від кожного з своїх чинників.*

19. **Геометричне з'ясовування добутків.** а) *Квадратові одиниці.* Доказ закону переміни дає нам добру вказівку, як можна з'ясовувати геометрично добутки двох чисел. Числова лінія не надається до того, бо на ній тільки один чинник може грати ролю довжини, а другий мусить зіставатися в ролі неназваного числа. Коли обидва чинники мають бути рівновартні, то на це маємо инший спосіб.

Беручи зразок із взірця (4), рисуємо прямокутник, боки якого мають a і b одиниць довжини (рис. 19). Його розрізуємо на малі квадратики, що мають боки рівні одиниці довжини: тому вони звуться *квадратовими одиницями.*

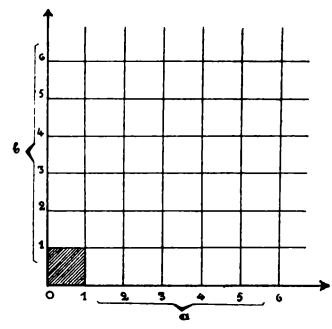


Рис. 20.

Цілий прямокутник ділимо на a стовпців ширини 1 і висоти b, або на b поземих шарів на 1 заввишки

й a завдовжки. За першим разом бачитимемо наглядно добуток ab, за другим — добуток ba, а що це завсіди той сам прямокутник, то це дає нам новий доказ закону переміни.

Множення на числовій лінії, т. зв. «геометричне множення» — пізнаємо при науці про пропорції (§ 14).

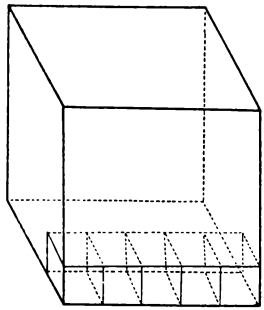


Рис. 19.

б) *Кубичні одиниці.* Добуток трох чинників з'ясовуємо стереометричним тілом, *гранчаком*, який має гранки на a, b і c одиниць довжини (рис. 20). Він розпадається на $a.b.c = abc$ малих кубів, званих *кубичними одиницями.*

Гранчак можемо розрізувати на ріжні способи, і з того виходять ріжні комбінації чинників, згідно з законами переміни та злуки: $(ab)c$, $(ac)b$, $(bc)a$ і т. д., так що це може служити наглядним доказом тих законів.

Для з'ясовування добутків більшої кількости чинників геометрія не має засобів.

в) *Увага про множення названих чисел.* Із пояснення множення виходить, що *множник*, отже число, на яке множимо, *мусить бути неназване*, зате *множник може бути названий або ні.*

Нпр. можемо сказати: 4 коні × 3 = 4 коні + 4 коні + 4 коні = 12 коней, зате 3 × 4 коні — не має значіння.

Коли обидва чинники неназвані, добуток буде теж неназваний; коли множимок названий, то й добуток матиме ту саму назву.

Та в практиці приходиться часто виконувати множення, в яких обидва чинники названі. Нпр. обчислити площину прямокутника, що має боки $5m$ і $3m$. Площина буде рівна 15 одиницям, які назвемо «квадратовими одиницями», отже зможемо написати: $5m \,.\, 3m = 15m^2$*).

Назви, що їх надаємо добуткам названих чисел, творять *похідні одиниці.*

Похідні одиниці для міряння площин і змістів знаємо вже з уступу 7; їх отримуємо через множення у звязку з геометричним пояснюванням добутків. Добуток двох довжин дає міру площини або квадратову (пояснення: $1m \,.\, 1m = 1m^2$); добуток трох довжин, або площини й довжини — міру змісту або кубичну (пояснення: $1m \,.\, 1m \,.\, 1m = 1m^2 \,.\, 1m = 1m^3$). Дальші похідні одиниці, які отримали б ми тим самим шляхом, не мали би вже ніякого значіння (нпр. $1m^2 \,.\, 1m^2 = 1m^4$).

Зате физика дає почин до введення инших похідних одиниць, які пояснюємо при допомозі дій: множення, ділення, степенювання й корінювання. Сюди належить у першу чергу одиниця для міряння *праці:*

---

*) Тільки ж не треба думати, що ми *множимо* метри метрами (як нпр. $a \,.\, a = a^2$); ми лише *умовлявмося*, що добуток двох чинників, які мають назву метра, *назвемо* квадратовим метром.

Праця — це добуток із сили та шляху, здовж якого діє ця сила, отже *одиниця праці* рівна одиниці тягару, помноженій одиницею шляху: $1kg \cdot 1m$. Її звемо *кілограмметром (kgm)*; це праця $1kg$ на дорозі $1m$:

$$1kg \cdot 1m = 1kgm.$$

Далі треба тут згадати про важну для практичного життя одиницю праці перевозу, тоб-то *кілометричну тону (tkm)*, т. зв. працю, потрібну для перевезення 1 тони на шляху $1km$, а що $1t = 1000\ kg$, а $1km = 1000\ m$, то $1tkm = 1\,000\,000\ kgm$. Ця одиниця важна при обчислюванні залізничих тарифів за перевіз грузів. Коли помножимо кількість tkm на ціну одної tkm, отримаємо кошт транспорту даного грузу на дану віддаль.

І в инших практичних ділянках уживаємо ріжних похідних одиниць: нпр. *робітний день або робітна година* служить для обчислення кількости роботи. Це добуток годин (або днів) роботи на кількість робочих сил; так нпр. 5 робітників, що працюють 4 дні, матимуть 20 робітних днів; коли ж робота триватиме денно 8 годин, отримаємо 160 робітних годин.

20. **Множення сум.** а) *Закон розділу* (сум):

$$(a + b)\,c = ac + bc; \qquad (6)$$

суму множимо якимось числом так, що множимо тим числом кожний доданок і додаємо поодинокі одночлени (добутки).

Коли обернемо рівняння (6) і напишемо:

$$ac + bc = (a + b)\,c,$$

матимемо:

б) *закон добування спільних чинників перед скобки*, або *закон додавання «подібних» одночленів* (див. уступ 16):

Коли в сумі одночленів є однаковий чинник, то його можемо виставити за (або *перед*) *скобки, а в скобках лишиться сума неоднакових чинників.*

Подібні одночлени додаємо так, що додаємо їхні співчинники, а головне число лишаємо без зміни.

Ми сказали: «виставити *за*» або «*перед скобки*», бо на основі закону переміни це все одне.

Закон розділу легко доказати. Суму $(a + b)c$ представимо так:

$$(a + b)\,c = \underbrace{(a + b)}_{1} + \underbrace{(a + b)}_{2} + \ldots + \underbrace{(a + b)}_{c}.$$

На основі законів переміни та злуки доданків можемо зібрати перше всі доданки a, а потім усі доданки b. Кількість одних і других буде c, отже:

$$(a + b)\,c = \underbrace{(a + a + a + \ldots + a)}_{1\ 2\ 3\ \ldots\ c} + \underbrace{(b + b + b + \ldots + b)}_{1\ 2\ 3\ \ldots\ c}$$

Перші скобки дають ac, другі bc, отже:

$$(a + b)\,c = ac + bc.$$

Навпаки, закон добування спільного чинника перед скобки докажемо так

$$ac + bc = \underbrace{(a + a + a + \ldots\ldots + a)}_{c} + \underbrace{(b + b + b + \ldots\ldots + b)}_{c}$$

$$= \underbrace{(a + b)}_{1} + \underbrace{(a + b)}_{2} + \underbrace{(a + b)}_{3} + \ldots\ldots + \underbrace{(a + b)}_{c} = (a + b)\,c.$$

Нпр.: $5c + 8c = 13c$; це нагадує нам додавання названих чисел.

в) Геометрично уявляємо собі множення суми так, що рисуємо прямокутник із основою $a + b$ та висотою c (рис. 21). Коли тоді розділимо його висотою в точці c, де сходяться доданки суми $a + b$, матимемо те, чого бажали. Навпаки, коли такі два прямокутники складемо в одну цілість, матимемо один прямокутник із основою $a + b$ та висотою c.

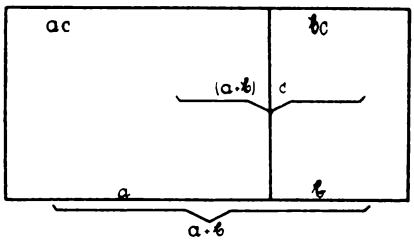


Рис. 21.

г) Нехай тепер обидва доданки будуть сумами, отже:

$$(a + b)\,(c + d).$$

Виконаймо це множення спершу геометрично (рис. 22): прямокутник, що має боки $a + b$ і $c + d$, розпадається на чотири менші;

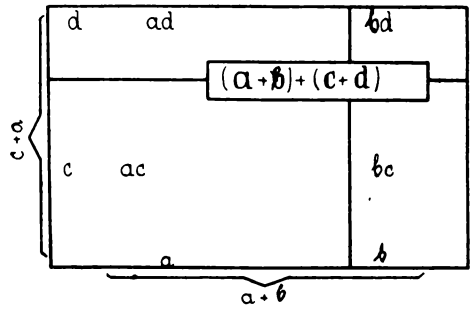


Рис. 22.

на них ми виписали величину їхніх площин. Сума тих чотирох прямокутників буде:

$$(a + b)\,(c + d) = ac + bc + ad + bd. \qquad (8)$$

До того самого висліду дійдемо теж рахунковим шляхом. Уважаймо одну з сум, нпр. першу, одною цілістю, отже покладім $a + b = s$; тоді буде:

$$(a + b)\,(c + d) = s(c + d) = sc + sd.$$

Коли ж тепер назад підставимо значіння числа s, отримаємо:

$$sc + sd = (a + b)c + (a + b)d,$$

отже справдиться взірець (8).

З того читаємо таке правило:

Суму множимо сумою так, що кожний складник одної суми множимо кожним складником другої суми й додаємо всі отримані одночлени.

21. **Добуток як функція чинників.** Подібно як сума, так і добуток змінюється, коли змінювати його чинники, отже *добуток — це функція його чинників.*

Легко з'ясувати рисунком зміну добутку, в якому один чинник змінюється, а другий залишається постійним; зробимо це так, як робили в уступі 9 (рис. 2). Коли за приклад візьмемо знову залежність між кількістю краму й загальною ціною, матимемо «функційне рівняння»:

$$y = ax. \tag{9}$$

Його «образом» буде проста лінія (рис. 23), яка уявляє собою

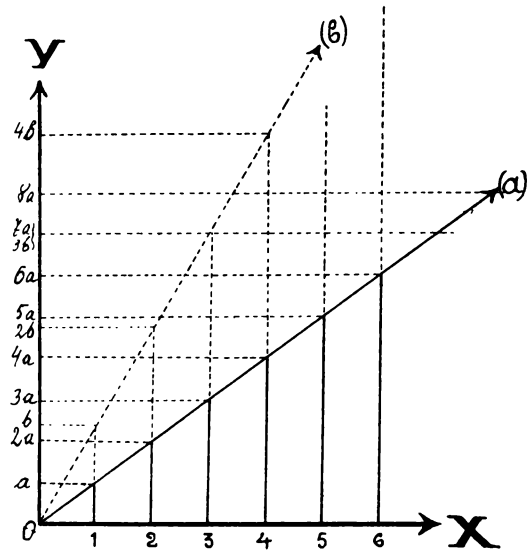


Рис. 23.

ріст загальної ціни; вона буде також образом добутку ax. Висловлюємо це так, що загальна ціна росте пропорційно до кількости краму, або загально: *добуток росте пропорційно до своїх чинників.*

Величину a звемо «чинником пропорційности» функції (9).

Коли за одиничну ціну приймемо иншу величину, нпр. b, отримаємо инше функційне рівняння, $y = bx$, а образом його буде инша проста лінія; вона буде більше або менше стрімка, відповідно до величини чисел a і b.

При рисуванні образів функцій будемо нашу позему числову лінію називати *віссю незалежних змінних* (аргументів) або *віссю відрізних* (абсцис) або теж *віссю* X, бо ці змінні, звані «відрізними» даної точки, звичайно значимо буквою x. Сторчова проста, що на ній відмірюємо вартости функції y, зветься *віссю функцій*, *віссю рядних* або *віссю* Y, бо сторчові відтинки, що ведуть від осі до даних точок, звуться її *рядними* (ординатами).

22. **Степені як добутки однакових чинників.** а) Добуток двох однакових чинників звемо *другим степенем* або *квадратом числа* і значимо так:

$$a \cdot a = a^2.$$

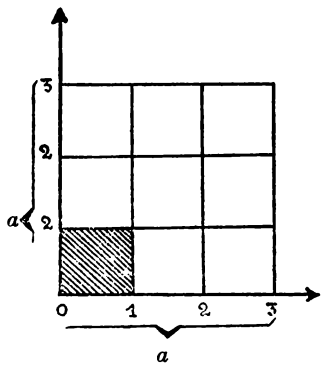


Рис. 24.

Назва пішла звідсіля, що образом того добутку є квадрат, бік якого має a одиниць довжини (рис. 24).

Добуток трох однакових чинників звемо *третім степенем* або *кубом числа*, бо його геометричний модель — куб із гранкою в a одиниць довжини:

$$a \cdot a \cdot a = a^3.$$

Квадрати й куби початкових членів природнього ряду чисел творять такі наступи:

число a:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
квадрат a^2:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
куб a^3:	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

(див. § 1., вправа 12: квадратові числа).

б) Коли кількість чинників a більша, пишемо a^4, a^5 і т. д. Загально пишемо a^n, коли кількість однакових чинників є n:

$$a^n = \underbrace{a}_{1} \cdot \underbrace{a}_{2} \cdot \underbrace{a}_{3} \ldots \underbrace{a}_{n}. \qquad (10)$$

Число a називається *основою степеня*, число n, тоб-то кількість чинників, *викладником степеня*, а величина a^n —*n*-ий *степень числа a*.

Замість: «обчислити n-ий степень якогось числа», кажемо часто також: «піднести це число до n-ого степеня».

Для степенів, вищих над куб, не маємо вже геометричної ілюстрації.

Кожне число a можемо вважати першим степенем тої ж основи, отже пишемо:

$$a^1 = a.$$

Із пояснення степенювання виходить:

$a \cdot a = a^2$, $a^2 \cdot a = a^3$, $a^3 \cdot a = a^4$ і т. д., отже взагалі:

$$a^m \cdot a = a^{m+1}. \tag{11}$$

У загальному випадкові матимемо:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \tag{12}$$

Докажемо цю останню формулу так, що напишемо:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \ldots a}_{1\ 2\ 3 \ldots m} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \ldots a)}_{1\ 2\ 3 \ldots n} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{1\ 2\ 3 \ldots m+n} = a^{m+n},$$

а це значить, що чинник a на загал повторюється $m + n$ разів Отже:

Степені однакових основ множимо так, що додаємо їхні викладники.

в) Коли обидва викладники однакові, маємо $a^m \cdot a^n = (a^m)^2$, а з другого боку, $a^m \cdot a^m = a^{m+m}$, отже

$$(a^m)^2 = a^{2m},$$

і взагалі:

$$(a^m)^n = a^{nm}, \tag{13}$$

т. зн.:

Степені степенюємо так, що множимо викладник степеня викладником степенювання.

З огляду на це, що $mn = nm$, можемо написати $a^{mn} = a^{nm} = (a^n)^m$, а тому

$$(a^m)^n = (a^n)^m, \tag{14}$$

отже :

Викладник степеня й викладник степенювання — перемінні.

Далі мусимо ще завважити, що $(ab)^2 = ab \cdot ab = a \cdot a \cdot b \cdot b$, отже:

$$(ab)^2 = a^2b^2,$$

і взагалі

$$(ab)^n = a^n b^n, \tag{15}$$

т. зн.:

Добуток степенюємо так, що степенюємо кожний чинник з'окрема.

Навпаки з (15) читаємо:

$$a^n b^n = (ab)^n,$$

а це значить, що *коли нам треба помножити однакові степені двох чисел, то перше можемо помножити їхні основи, а потім їх піднести до бажаного степеня.*

г) *Квадрат і куб суми двох чисел (двочлена).*

Обчислім по правилу для множення сум $(a + b)^2$ і $(a + b)^3$. Це дасть:

(1) $$(a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb,$$

а що $aa = a^2$, $ab = ba$, $bb = b^2$, то:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (16)$$

або словами:

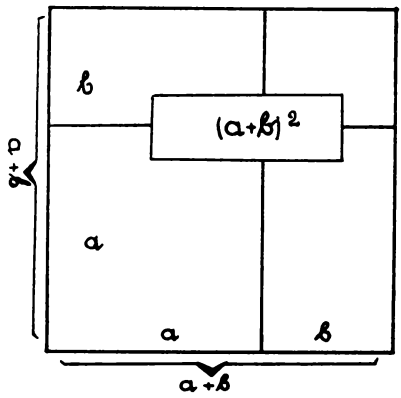


Рис. 25.

Квадрат двочлена рівний сумі квадратів обох складників, збільшеній на подвійний добуток тих обох складників.

Геометрично дасть це таку фігуру (рис. 25): цілий великий буток $(a + b)^2$, розпадається на квадрат, що у являє собою дова квадрати з боками a і b та два однакові прямокутники, ab і ab.

Коли сполучимо аритметичний вислід із геометричним, зможемо сказати так: «Квадрат двочлена рівний сумі квадратів обох складників, збільшеній на подвійний *прямокутник* тих обох складників».

(2). Для кубу буде:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) = (a^2 + 2\,ab + b^2)(a + b),$$

отже тут маємо тричлен $a^2 + 2\,ab + b^2$ помножити двочленом $a + b$. Коли на хвилинку підставимо: $a^2 + 2ab + b^2 = s$, матимемо: $s(a + b) = sa + sb$, отже наш тричлен треба буде помножити спершу на a, потім на b і обидва ці «частинні добутки» додати. Це буде:

$$(a^2 + 2\,ab + b^2)\,a = a^3 + 2\,a^2b + ab^2$$
$$(a^2 + 2\,ab + b^2)\,b = \qquad a^2b + 2\,ab^2 + b^3,$$

отже разом:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3.$$

Геометрично з'ясоване це правило на рис. 26; та воно стане ще яснішим, коли замість рисунку зробимо з дерева чи з картону модель.

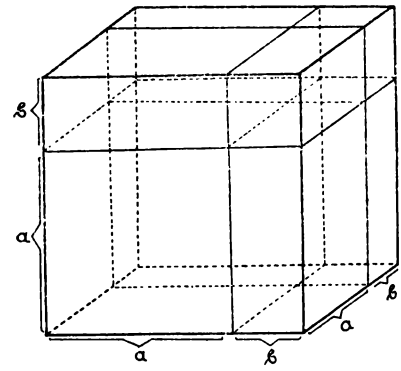


Рис. 26.

23. **Підставлювання.** Коли ми виконали якусь дію на загальних числах і хочемо провірити, чи її проведено добре, або коли нам треба з'ужиткувати її практично, мусимо замість загальних чисел «підставити» у вислід подрібні вартости. Тоді зможемо лівий і правий бік нашого рівняння звести до одного подрібного числа. Коли обидва боки покажуться однаковими, то це служить деякою запорукою, що дію проведено без помилки.

Отсю чинність називаємо *підставлюванням*.

Нпр. провірити взірець (16). У ньому можемо за a і b підставляти всякі можливі подрібні вартости, бо наше рівняння тотожне; нехай буде нпр. $a = 8$, $b = 3$, тоді є:

$$\text{ліворуч:} \quad (8 + 3)^2 = 11^2 = 121,$$

$$\text{праворуч:} \quad 8^2 + 2 \cdot 8 \cdot 3 + 3^2 = 64 + 48 + 9 = 121,$$

отже взірець вірний. — Щоби з'ужиткувати його практично і сквадрувати (= піднести до квадрату) якесь десяткове число, нпр. 47, розкладаємо його на суму $47 = 40 + 7$ і у взірець (16), правдивість якого вже стверджено, підставляємо: $a = 40$ і $b = 7$. Це дасть:

$$47^2 = (40 + 7)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 7 + 7^2 = 1600 + 560 + 49 = 2209.$$

24. **Дії на одночленах і многочленах.** а) *Одночленом* назвали ми многократ загального числа, а що це загальне число не мусить писатися одною буквою, лише може бути всяким можливим добутком инших загальних чисел, то одночлен може мати багато складнішу форму, нпр.:

$$A a^m b^n c^p d^q \ldots e^r;$$

тут A буде співчинником (буває ним часто подрібне число), числа a, b, c, d і т. д. — це поодинокі основи, m, n, p, q, ... — їхні викладники, а $a^m\ b^n\ c^p \ldots$ — загалом беручи — буде головним числом.

Суму викладників поодиноких степенів, отже $m+n+p+\ldots+r$, звемо *ступінем одночлена*.

Коли додамо *подібні* одночлени, отже такі, що мають однакові головні числа (і що до основ і що до викладників при поодиноких ос-

новах), тоді *співчинник суми буде сумою співчинників усіх доданків.* Отсю чинність звемо *редукцією* (тоб-то *злученням*) *подібних одночленів.*

Нпр.:

$$3a^2b^3c + 7a^2b^3c = 10a^2b^3c.$$

В кожному иншому випадкові пишемо поодинокі доданки один побіч одного, а поміж ними ставимо знаки додавання. Тоді отримуємо *алгебричну суму* або *многочлен.*

У многочлені, якого не можемо з'єдинити в один вираз, можемо часами що найбільше добути перед або за скобки спільний чинник усіх доданків.

Нпр. сума $3a^3bc^2 + 4a^2b^2c^4 + 7abc^2 + abc$ має спільний чинник abc; коли його виставити, зістанеться з першого доданка $3a^2c$ (бо $3a^3bc^2 = ab \,.\, 3a^2c$), з другого $4abc^3$, з третього $7c$, а з останнього 1 (бо $abc = 1abc$), так що буде: $3a^3bc^2 + 4a^2b^2c^4 + 7abc^2 + abc = abc\,(3a^2c + 4abc^3 + 7c + 1)$.

Одночлени множимо як звичайні загальні числа: на основі законів переміни та злуки збіраємо в одну цілість їхні співчинники та їхні головні числа.

Нпр.: $3a^2bc \,.\, 5ab^3 = (3 \,.\, 5).(a^2 \,.\, a).(b \,.\, b^3) \,.\, c = 15a^3b^4c$.

в) Коли даний який-небудь многочлен, то треба перш за все придивитися, чи не можна його *зредукувати*, а потім слід його *впорядкувати*, тоб-то укласти його члени в такому порядкові, щоб викладники його головних чисел зростали або опадали.

Нпр. многочлен $3\,x^2 + 5\,x^4 + 2 + 7\,x + x^3$, що містить у собі тільки один «аргумент» x, можна впорядкувати на два способи:

ростом: $2 + 7\,x + 3\,x^2 + x^3 + 5\,x^4$,
або *спадом*: $5\,x^4 + x^3 + 3\,x^2 + 7\,x + 2$.

Для многочленів із кількома «аргументами» можна підібрати ріжні принципи впорядкування, спадом або ростом.

Многочлен, у якому всі члени мають однаковий ступінь (тоб-то однакову суму викладників), зветься *рівнородним.* Отся сума й подає ступінь рівнородного многочлена.

Нпр. $a^4 + 3\,ab^3 + 4\,a^3b$ — рівнородний многочлен четвертого ступіня, бо його члени мають однакові суми викладників: 4, 1 + 3, 3 + 1. Його можна впорядкувати спадом по викладниках основи a, а ростом по викладниках основи b: $a^4 + 4\,a^3b + 3\,ab^3$, або навпаки.

Многочлен, що не має такої прикмети, зветься *нерівнородним.* Його ступінь — це буде ступінь того члена, що має найбільшу суму викладників.

Нпр. многочлен $a^3b + 4a^2b^4 + 7\,b^5$ є нерівнородний, бо ступіні його доданків є: 3 + 1 = 4, 2 + 4 = 6, 5. Його ступінь е 6.

Подамо тут один приклад, як виконується в практиці додавання многочленів:

Обчислити суму $A + B + C$, де:

$$A = 3a^2b + 4ab^2 + 2b^3,\quad B = a^3 + a^2b + 5b^3,\quad C = ab^2 + b^3.$$

Всі три доданки — це рівнородні кубичні многочлени (тоб-то третього ступіня). Між ними є подібні члени, отже їх зараз і редукуємо та впорядковуємо суму спадом по степенях основи a, а ростом по степенях основи b. Це дасть таку суму:

$$A + B + C = a^3 + 4a^2b + 5ab^2 + 8b^3.$$

Для провірки дії підставимо нпр. $a = 2$, $b = 1$ і виконаємо підставлення в доданках та в сумі. Це буде:

$$\begin{aligned} A &= 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3 = 12 + 8 + 2 = 22,\\ B &= 2^3 + 2^2 \cdot 1 + 5 \cdot 1^3 = 8 + 4 + 5 = 17,\\ C &= 2 \cdot 1^2 + 1^3 = 2 + 1 = 3, \end{aligned}$$

отже: $A + B + C = 42$. Праворуч буде:

$$2^3 + 4 \cdot 2^2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1^3 = 8 + 16 + 10 + 10 + 8 = 42.$$

г) *Як множити многочлени*, знаємо вже з множення сум і підношення двочленів до квадрату та кубу. Воно лежить у тому, що обчислюємо перше частинні добутки, а потім творимо їхню суму й редукуємо її (як-що це можливе).

Взагалі ж при виконуванні складніших дій придержуємося такого порядку, що *вищі дії йдуть перед нижчими*, отже наперед степенювання, потім множення, а накінець додавання, тоб-то *редукція*.

Нпр. (1) обчислити $A \cdot B$, коли:

$$A = 3x^2 + 5xy + y^2,\quad B = 7x + 2y.$$

Множення переводимо по такій схемі:

$$\begin{array}{l} (3x^2 + 5xy + y^2) \cdot (7x + 2y) \\ \hline 21x^3 + 35x^2y + 7xy^2 \\ \qquad + 6x^2y + 10xy^2 + 2y^3 \\ \hline 21x^3 + 41x^2y + 17xy^2 + 2y^3 \end{array}$$

Поодинокі частинні добутки підписуємо одні під одними так, як при множенні подрібних чисел, щоби вигідно було редукувати подібні одночлени, нпр. $35x^2y$ і $6x^2y$.

(2) Обчислити квадрат двочлена $A = 2ax^2 + 3b^2y$.

По зразкові (16) матимемо: квадрат першого члена $(2ax^2)^2 = 4a^2x^4$, квадрат другого члена $(3b^2y)^2 = 9b^4y^2$ і подвійний добуток обох членів $2 \cdot 2ax^2 \cdot 3b^2y = 12ab^2x^2y$, так що після впорядкування буде:

$$A^2 = 4a^2x^4 + 12ab^2x^2y + 9b^4y^2.$$

(3) Обчислити квадрат суми $1 + x + x^2 + x^3$.

Її розбиваємо на два доданки по два члени, отже матимемо:

$$\begin{aligned} [(1 + x) + (x^2 + x^3)]^2 &= (1 + x)^2 + 2(1 + x)(x^2 + x^3) + (x^2 + x^3)^2 = \\ &= (1 + 2x + x^2) + 2(1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + x \cdot x^2 + x \cdot x^3) + (x^2)^2 + 2x^2 \cdot x^3 + (x^3)^2 \\ &= 1 + 2x + x^2 \\ &\qquad + 2x^2 + 4x^3 + 2x^4 \\ &\qquad\qquad + x^4 + 2x^5 + x^6 \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6. \end{aligned}$$

Цю дію можна виконати також так:

$(1 + x) + (x^2 + x^3) = (1 + x) + x^2(1 + x) = (1 + x)(1 + x^2)$,

отже: $(1 + x + x^2 + x^3)^2 = (1 + x)^2 \cdot (1 + x^2)^2$, а що $(1 + x^2)^2 = 1 + 2x^2 + x^4$, то нам треба виконати множення:

$$\begin{array}{l} (1 + 2x + x^2)(1 + 2x^2 + x^4) \\ \hline 1 + 2x + x^2 \\ \quad + 2x^2 + 4x^3 + 2x^4 \\ \quad\quad + x^4 + 2x^5 + x^6 \\ \hline 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6. \end{array}$$

ВПРАВИ.

1. Представити на числовій лінії ряд многократей числа a, коли приймемо $a = 2, 3, 4$.

2. Представити в найпростішій формі такі суми:

$2a + 7a, 6x + 4x + 3x; (2a + 3b) + (3a + 4b); 5m + (4m + 2m) + m;$
$2x + [(3x + 2y) + 4y]$.

3. Многократ $5t$ представити як суму двох доданків. На скільки способів це можливе?

4. Одночлен $11z$ розкласти на суму трох доданків.

На скільки *ріжних* способів це можливе?

5. Додати такі суми:

а) $(5a + 3b + c) + (a + 3b + c) + (2a + 2b + 2c)$;
$(8x + 6y + 4z) + (2x + 4y + 6z) + (4x + 6y + 4z)$;

б)
$$\begin{array}{lll} a + 2b + 3c & x + y + z & a + 3b + 5c + 7d \\ 2a + 3b + 4c & 2x + 3y + 4z & 2a + 5b + 8c + 11d \\ 3a + 4b + 5c & 3x + 5y + 7z & 3a + 7b + 11c + 15d \\ \hline ? & ? & ? \end{array}$$

6. Обчислити такі суми:

$x + y; y + z; z + x; x + y + z; x + y + c; y + z + a; z + x +$

коли ми вжили таких скорочень:

$x = 2b + 5c, \ y = 3a + 4c, \ z = 2a + b$.

7. Провірити, чи однакові такі дві сумі:

$A = (2x + 3y + 4z) + (5x + 4y + 3z) + (6x + 7y + 8z)$;

$B = (8x + 6y + 4z) + (3x + 4y + 5z) + (2x + 3y + 6z)$.

8. Доказати закон переміни для добутку ab на прикладі $4 \cdot 7$ рахунком і рисунком.

---

9. Як найвигідніше буде обчислити такі добутки:

$(15 \cdot 9) \cdot 4$; $(25 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 8)$; $20 \cdot (5 \cdot 17)$; $15 \cdot (7 \cdot 60)$?

10. Обчислити вартість добутку $abcd$ для $a = 2$, $b = 4$, $c = 7$, $d = 10$ і представити його у всіх можливих видах.

11. Обчислити такі добутки: $2a \,.\, 3b$; $4x \,.\, 7y$; $8m \,.\, 5 \,.\, n$ і пояснити їх геометрично.

12. Пояснити геометрично (рисунком і моделем) ріжні способи представлення добутку abc при допомозі законів переміни та злуки.

13. Обчислити такі добутки: $2a \,.\, 3b \,.\, 4c$; $7x \,.\, 6y \,.\, 7z$; $3a \,.\, 5b \,.\, 5c \,.\, 2x \,.\, 3y \,.\, 4z$.

14. Яку працю виконає людина, що важить 75 kg, коли вийде на гору, яка піднімається 120 m над своєю стопою?

15. Яку працю виконає робітник, що винесе 10 разів по 12 цеглин на третій поверх, коли цеглина важить 1950 g, а висота одного поверху є пересічно 375 cm?

Вважати, що тут за одиницю праці треба буде брати не кілограмметер, а грамцентиметер.

16. За транспорт 1 tkm залізниця почислює a карб.; обчислити кошт транспорту b тон на віддаль c km.

17. Обчислити кількість робітних годин на протязі одного року, коли людина працює по 8 (9, 10, 12) годин денно, відчислюючи від того неділі, 15 святочних днів і 3 тижні спочинку.

18. Чи можна *доказати*, що нпр. $1m \times 1m = 1m^2$ або $1\ m \times 1\ m \times 1\ m = 1\ m^3$?

---

19. Пояснити геометрично такі множення:
$(a + b + c) \,.\, k$; $(a + b + c + d) \,.\, r$; $(2a + 3b) \,.\, 4c$; $(a + 2b + 3c) \,.\, 2x$.

20. Обчислити такі добутки:
$(m + n) \,.\, p$; $(x + 1)\, y$; $x \,.\, (1 + y)$; $(x + 2) \,.\, 7y$; $x \,.\, (2 + 7y)$; $u \,.\, (4x + 3y + 2z)$.

21. Виставити перед скобку спільний чинник у таких многочленах: $2\,a + 2b$; $ab + bp$; $4a + ab + ac$; $(m + 1)\, x + nx$.

---

22. Обчислити такі добутки:
$(a + b + c)\,(x + y)$; $(2a + 3b + 4c)\,(3m + 2n)$; $(4x + 3y)\,(5z + 4u + 3v)$
і пояснити їх геометрично. Провірювати правдивість кожного множення ріжними підставлюваннями.

23. Представити табличкою й рисунком такі функції:
$y = 2x$; $y = 3x$; $y = 3x + 1$, $y = 4x + 3$.

24. Обчислити: $a^4 \,.\, a^7$; $x^3 \,.\, x^5$; $p^5 \,.\, p^8$; $q \,.\, q^3 \,.\, q^5 \,.\, q^7$.

25. Обчислити: $(a^2)^3$; $(b^5)^4$; $(c^3)^6$; $[(x^3)^2]^5$; цей останній добуток представити в усіх можливих видах.

26. Обчислити: $(2x^2y^3)^2$; $(4a^2bz^4)^5$; $(3x^4u^5)^8$.

27. Чи однакові такі два добутки: $(xy^2r^3).(x^4y^5z^6).(x^7y^8z^9)$ і $(x^{10}y^{10}z^{10}).(x^4y^7z^{10}).(xyz)^2$?

28. Обчислити: $(1 + x^{10})^2$ і $(1 + 2z^5).^3$

29. Обчислити квадрати й куби таких двочленів:
$a + 2b$; $2a + 3b$; $3a + 2b$; $x + 1$; $x + 2$; $2x + 1$; $x^2 + 1$; x^2+2;
$x^3 + 1$; $2x^3 + 5$; $x^2 + y$; $x^2+ y^2$; $x^3 + y^2$; $x^2 + y^3$; $x^3 + y^3$;
$x^2 + y^2 + z^2$.

30. Обчислити: $A + B$, $A^2 + B^2$, $(A + B)^2$, $(A^2+ B^2)^2$; $A^3 + B^3$, $(A + B)^3$, коли:

$$A = 3x^2y + 2xy^2, \quad B = x^2y + 2y^3.$$

Провірити висліди підставленням: $x = 3$, $y = 2$.

31. Обчислити суму $A + B + C + D$, коли: $A = 3a^2x^2yz$, $B = 5a^2x^3z$, $C = 2a^3x^2z$, $D = 8a^3xy$ і виставити з суми спільний чинник перед або за скобки.

32. Обчислити такі добутки:
$(1 + 2x + 3x^2).(2 + 3x)$; $(3a + 2b + 3c) . (a + 2b + c)$;
$(x + 1)(x + 2)$; $(x + a)(x + b)$; $(1 + a^2)(1 + b^2)$;$(a^2 + b^2)(c^2 +d^2)$;
$(a + 2x)(2a + x)$; $(x + 1)(x^2 + 1)$; $(x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)(x^2 + 4)$.

33. Многочлени: $a^2 + ab + b^2$; $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$; $a^4 + a^3b +$
$+ a^2b^2 + ab^3 + b^4$ помножити (а) на $a + b$, (б) на $a^2 + ab + b^2$.

34. Обчислити такі добутки:
$(1 + a)(1 + b)(1 + 2a)(1 + 2b)$;
$[(1 + a)(1 + ab)(1 + ab^2)] + [(1 + b)(1 + ab)(1 + a^2b)]$;
$[(1 + a)(1 + b)](1 + a + b + ab)$;
$(x + 1)(x^2 + 2)(x^3 + 3)(x^4 + 4)$.

35. Коли дані многочлени: $A = 1 + x + x^2$, $B = 1 + 2x + x^2$, $C = 1 + 2x + 3x^2$, обчислити: $A + B + C$, $BC + A$, $CA + B$; $AB + BC + CA$; ABC; $A^2 + B^2 + C^2$; $(A + B + C)^2$.

36. Добуток $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ використати для множення чисел між 10 і 20.

Приймім $x = 10$; це дасть: $(10 + a)(10 + b) = 100 + 10(a + b) + ab$, отже напр. $18 . 14 = 100 + 10(8 + 4) + 8 . 4 = 100 + 120 + 32 = 252$.

ДРУГИЙ РОЗДІЛ

Обернені дії двох перших ступінів

§ 4. Віднімання.

25. **Пояснення.** *Від числа s відняти число a — значить, знайти таке число x, щоби воно, додане до a, дало суму s*, отже число x мусить сповнювати таке умовне рівняння:

$$a + x = s. \tag{1}$$

Цей взірець звемо *пояснюючим* (т. зн. дефініційним) *рівнянням віднімання;* його розвязку пишемо так:

$$x = s - - a. \tag{2}$$

Вона зветься:

(1) *ріжницею чисел s* і *a*, коли питаємо, на скільки одиниць одне число більше від другого, або

(2) *останком* (чи *рештою*), коли хочемо знати, що зістанеться, коли ми від числа *s* відкинемо *a* одиниць.

Число *s* називаємо *уменшимком* (бо ми його через віднімання уменшуємо), а число *a від'ємником*, отже рівняння (1) каже, що *уменшимок* — це *сума від'ємника й останка.*

Віднімання виконуємо відворотним шляхом, як додавання: від уменшимка відчислюємо стільки одиниць, скільки їх є у від'ємнику; робимо це або чергою, одну по одній, або відчислюємо всі нараз. Ясно, що *вменшимок мусить бути більший від від'ємника.*

Коли в рівнянні (1) вставимо x із рівняння (2), отримаємо:

$$a + (s - a) = s. \tag{3}$$

26. **Геометричне з'ясування віднімання.** а) Віднімання з'ясовуємо на числовій лінії так, що від точки, яка відповідає числу *s*, посуваємося на *a* одиниць у напрямкові, протилежному до попереднього ходу, тоб-то *вліво.*

Можемо собі це уявити так, що до нашої числової лінії прикла-

даємо другу числову лінію так, щоб її нулева точка впала на точку s, але зараз же обертаємо її в протилежному напрямкові (рис. 27):

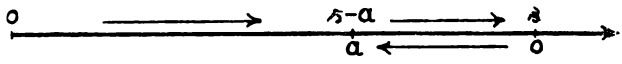
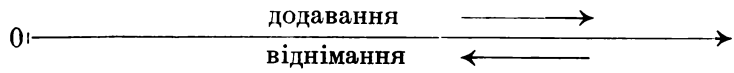


Рис. 27.

Де на другій числовій лінії є точка a, там на першій лінії буде точка $s - a$.

Коли ми тепер знов обернемо другу числову лінію між точками 0 і a, тоб-то хід $a \to 0$ перемінимо на $0 \to a$, отримаємо образ суми $(s - a) + a = s$, а це рівняння рівнозначне з рівнянням (3).

Отже в геометричному розумінні *віднімання відповідає зміні напрямку ходу на числовій лінії:*



б) Коли дані два відтинки, s і a, при чому $s > a$, і ми маємо знайти їхню ріжницю або від більшого відтинка відняти менший, то просто прикладаємо їх один до одного так, щоби вони покривались одним кінцем, і відрізуємо більший у тому місці, до якого сягає менший (рис. 28):

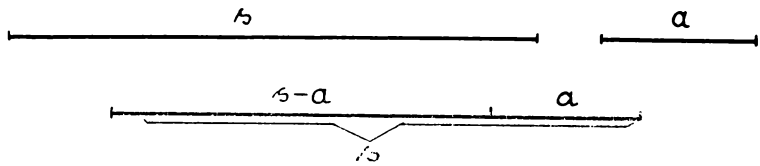


Рис. 28.

27. **Додавання й віднімання сум та ріжниць.** а) Тому, що додавання сум уже знаємо з § 2, переходимо відразу до додавання ріжниць.

а) Коли до числа a маємо додати ріжницю чисел b і c, т. зн. виконати дію $a + (b - c)$, то перш за все мусимо впевнитися, що $b > c$, бо инакше ріжниця $b - c$ була б без значіння. Виконаймо цю дію перше геометрично (рис. 29); це значить те саме, що числову

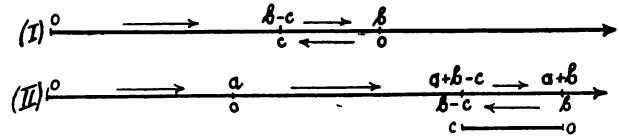


Рис. 29.

лінію (I) перенести на лінію (II) до точки a; таким чином дійдемо до точки $a+b—c$. Одначе до тої самої точки дійшли б ми також, як би від точки $a + b$ віддалилися на c одиниць уліво, бо ж це не було б ніщо инше, як тільки виконання дії віднімання на лінії (II) після пересунення її до точки a на лінії (I). Таким чином маємо:

$$a + (b — c) = a + b — c, \tag{4}$$

або також:

$$a + (b — c) = (a + b) — c. \tag{4a}$$

Це значить:

Ріжницю додаємо так, що додаємо вменшимок, а віднімаємо від'ємник.

б) Коли маємо виконати дію $a — (b + c)$, отже від числа a відняти суму двох других чисел, b і c, то перш за все мусимо впевнитися, що $a > b + c$, бо инакше віднімання було би неможливе.

Виконуючи його геометрично, маємо перше утворити суму $b + c$, а потім її відняти від a (рис. 30):

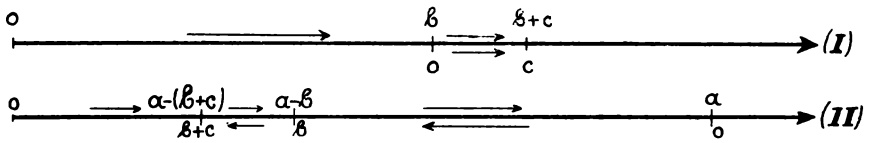


Рис. 30.

Та коли приглянемося до тієї дії, побачимо, що ми тут від числа a перше відняли b, а потім від цеї ріжниці ще далі відняли c, отже:

$$a — (b + c) = (a — b) — c, \tag{5}$$

або ж:

$$a — (b + c) = a — b — c. \tag{5a}$$

Суму віднімаємо так, що віднімаємо чергою по одному доданкові.

в) Подібно віднімаємо й ріжницю. Коли треба обчислити $a — (b — c)$, то перш за все мусить бути $a > b — c$, але в свою чергу мусимо теж мати $b > c$. Тут перше творимо ріжницю $b — c$, а потім віднімаємо її від a, т. зн. обертаємо напрямок тої числової лінії, на якій відзначили ріжницю $b — c$ (рис. 31).

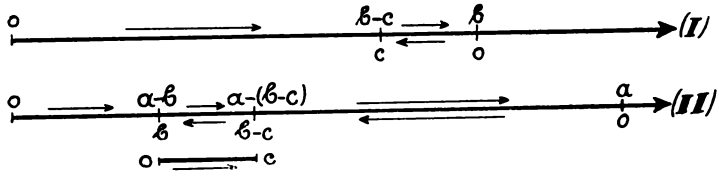


Рис. 31

На рисунку бачимо, що число $a - (b - c)$ більше від $a - b$ (відповідна точка лежить праворуч від точки a—b), бо ж ми відтинок $0 \to c$ двічі обертали: на (I) перекинули його вліво й так отримали $c \to 0$ а на (II) знову відвернули направо, $0 \to c$, отже:

$$a - (b - c) = a - b + c. \tag{6}$$

Це ясно: бо коли від a віднімемо число $b - c$, отже величину *меншу*, як b, то нам залишиться *більше*, ніж як би ми відняли повне b (рис. 32):

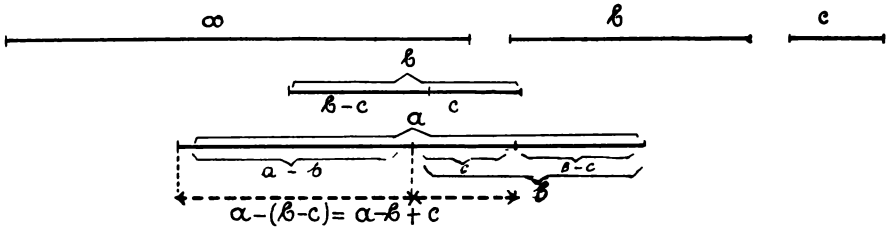


Рис. 32.

Нпр, $a = 18, b = 7, c = 3$; $a - (b - c) = 19 - (7 - 3) = 18 - 4 = 14$; $(a - b) + c = (18 - 7) + 3 = 11 + 3 = 14$; $a - (b - c) > a - b$, бо $14 > 11$.

Ріжницю віднімаємо так, що від даного числа віднімаємо вменшимок ріжниці, а додаємо від'ємник ріжниці.

Чинність, що міститься у взірцях (4а) і (5), зветься *розкриванням* або *розвязуванням скобок.*

г) Виконаймо геометрично дві дії: $(a - b) + c$ і $(a + c) - b$ (рис. 33):

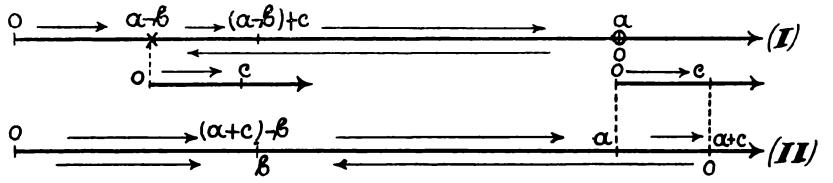


Рис. 33.

Перша вимагає, щоби до ріжниці $a - b$ додати число c, отже в кінцевій точці ріжниці, т. зн. в *, приставити числову лінію $0 \to c$ звернену вправо; за другим — перше творимо суму $a + c$, а потім від неї відкидаємо b. В обох разах приходимо до однакового висліду, бо в (II) отримуємо ту саму фигуру, що в (I), тільки що тут доданок $0 \to c$ пересунений із точки * в ①, отже:

$$(a - b) + c = (a + c) - b. \tag{7}$$

Це ясно; бо на одне вийде, чи ми від числа a перше віднімемо b одиниць, а потім додамо c одиниць, чи навпаки: перше додаємо c, а потім віднімемо b. Значить, *наступство додавання й віднімання перемінне.*

Нпр. $18 - 5 + 4 = (18-5) + 4 = 13 + 4 = 17$, але і $18 + 4 - 5 = (18+4) - 5 = 22 - 5 = 17$.

З того виходить, що рівняння (3) можемо написати також так:

$$(a + s) - a = s,$$

або:

$$s + (a - a) = s; \tag{3a}$$

тут бачимо, що ріжниця $a - a$ як доданок не впливає на суму. Її звемо *нулем:*

$$a - a = 0, \tag{8}$$

отже *нуль* — це *ріжниця двох однакових чисел.**)

Коли виконаємо це віднімання на числовій лінії, побачимо, що у висліді вернемося до початкової точки тої лінії. Через те ми вже відразу писали в цьому місці знака нуль. Це дає нам право називати нуль *найменшим числом природнього ряду.*

Рівняння (7) дає: $a = a + 0$, або коли в ньому переставити від'ємник із останком: $a - 0 = a$, а це значить, що *коли ми до якогось числа додамо нуль, або його від якогось числа віднімемо, то те число не зміниться.*

Нуль сповнює таке пояснююче рівняння:

$$s + x = s. \tag{8a}$$

28. **Правило дужок (скобок).** Із правил додавання та віднімання сум та ріжниць, тоб-то з рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} a + (b + c) &= a + b + c, \\ a + (b - c) &= a + b - c, \\ a - (b + c) &= a - b - c, \\ a - (b - c) &= a - b + c, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

читаємо такі правила розкривання або накладання дужок (скобок):

а) *Коли перед дужками стоїть знак «+», то дужки можна безслідно пропустити; коли ж перед ними знак «—», то, касуючи їх, мусимо при всіх числах у дужках поперемінювати знаки.*

---

*) *Нуль*, як відомо, ввели інди як цифру (знак для числа). Як величина для означення двох однакових чисел нуль виступає аж у XVII ст.

б) Навпаки, *коли накладаємо дужки й маємо перед ними знак «+», то знаки всіх чисел залишаємо без зміни; коли ж перед дужками матимемо знак «—», то в дужках мусимо змінити знаки всіх чисел.*

29. **Прикмети ріжниці.** а) З пояснюючого рівняння для віднімання:

$$a + x = s \tag{1}$$

можемо обчислити $x = s - a$ або $a = s - x$; у цьому другому випадкові буде x від'ємником, a — останком, отже *від'ємник і останок — це дві перемінні величині, бо ж це доданки одної й тої самої суми s.* Зате *з уменшинком вони неперемінні.*

б) До обох сторін рівняння (1) додаємо величину b; як знаємо (на основі уступу 10 а) це дозволене:

$$a + x + b = s + b.$$

Коли лівий бік рівняння впорядкуємо так: $(a + b) + x$, то з того вийде:

$$x = (s + b) - (a + b),$$

отже:

$$s - a = (s + b) - (a + b). \tag{10}$$

Розкриймо тут обидві дужки й переставлюймо відповідні члени, а потім знову накладім дві дужки:

$$s - a = s + b - a - b = s - b - a + b = (s - b) - (a - b);$$

це значить:

$$s - a = (s - b) - (a - b). \tag{11}$$

Ці два рівняння висловлюємо так:

Ріжниця (останок) не зміниться, коли до вменшимка та від'ємника одночасно додамо або від них віднімемо те саме число.

в) До обох боків рівняння (2) додаймо b:

$$x + b = s - a + b$$

і напишім правий бік у таких двох видах:

$$\begin{aligned} x + b &= (s + b) - a, \\ x + b &= s - (a + b); \end{aligned} \tag{12}$$

коли ж ми тут замість додавати b віднімемо те число, матимемо:

$$x - b = s - a - b = s - b - a,$$

отже:

$$\left.\begin{aligned} x - b + (s - b) - a, \\ x - b = s - (a + b). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ці чотири рівняння кажуть нам, що:

ріжниця	коли	
	уменшимок	від'ємник
збільшиться	збільшити	зменшити
зменшиться	зменшити	збільшити

З того виходить, що ріжниця — *функція уменшимка й від'ємника.*

Коли від обох боків нерівности

$$a > b$$

відняти одне й те саме число c, то знак нерівності не зміниться:

$$a - c > b - c.$$

Докажіть це геометрично, подібно, як на рис. 14.

д) На основі пояснення віднімання та прикмет ріжниці можемо розвязувати найпростіші рівняння, напр. таке:

$$x - 3a = 5a.$$

Тут невідомим числом є уменшимок, а ми знаємо, що вменшимок — це ума від'ємника й останка, тому матимемо:

$$x = 3a + 5a = 8a.$$

І справді: $8a - 3a = 5a$.

30. **Множення ріжниць. Приклади.** а) Помножити ріжницю $a - b$ одночленом k значить — у геометричному значінні — нарисувати прямокутник із основою $a - b$ та висотою k (рис. 34). Його отримаємо, коли від прямокутника з основою a та висотою k віднімемо менший, із основою b й тою самою висотою k, отже:

$$(a - b)k = ak - bk. \quad (14)$$

Ріжницю множимо одночленом так, що множимо ним уменшимок і від'ємник, а потім творимо ріжницю тих двох добутків.

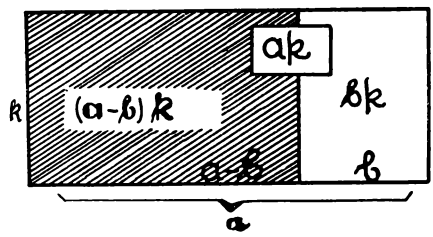


Рис. 34.

Обернення того рівняння дасть нам правило добування спільного чинника перед або за дужки:

$$ak - bk = (a - b)\,k, \quad (15)$$

отже закон розділу відноситься не тільки до сум, але й до ріжниць.

Аритметично докажемо взірець (14) так:
Назвім невідому вартість добутку x, отже:

$$x = (a - b)k,$$

і збільшім обидва боки того рівняння на bk:

$$x + bk = (a - b)k + bk.$$

Тут праворуч можемо виставити за дужку чинник k, бо там маємо суму двох подібних многочленів із головним числом k та співчинниками $a - b$ і b, отже:

$$x + bk = [(a - b) + b]k,$$

а що в гранчастій скобці є $(a - b) + b = a$, то матимемо:

$$x + bk = ak.$$

Звідсіля виходить бажаний взірець:

$$x = ak - bk.$$

Множення ріжниці якимось числом пояснене тільки тоді, коли в ріжниці від'ємник менший від уменшимка. Одначе, коли, приймаючи в (14) та (15) $b < a$, будемо постійно збільшувати від'ємник b, дійдемо остаточно до того, що в першому отримаємо ліворуч $0 \cdot k$, а праворуч $ak - ak = 0$, а в другому те саме навпаки, так що ці взірці можемо поширити й на $b = a$; тоді буде:

$$0 \cdot k = 0,$$

отже наше пояснення треба поширити й на той виїмковий випадок, коли ріжниця має вартість нуля. Значить: *нуль, множений якимось числом, дає на добуток нуль.* Навпаки, як би в тих узірцях ужити закону переміни, отримали б подібно:

$$k \cdot 0 = 0,$$

отже: *кожне число, множене нулем, дає на добуток нуль.*

З тих двох правил виходить, що *добуток двох або більшої кількости чисел може тоді й тільки тоді мати вартість нуля, коли бодай один із чинників є нулем.*

Отсе дуже важне твердження служить за основу для розвязки всіх рівнянь вищих ступнів, якими будемо займатися в II та III частині нашої книжки.

б) Помножім тепер ріжницю двох чисел сумою двох инших чисел: $(a - b) \cdot (p + q)$. Коли застосуємо двічі закон розділу, перше до суми $p + q$, кладучи $k = a - b$, а потім до тої ріжниці k, отримаємо:

$$(a - b) \cdot (p + q) = k \cdot (p + q) = kp + kq = (a - b)\,p + (a - b)q,$$

отже після вимноження буде:

$$(a - b) \cdot (p + q) = ap - bp + aq - bq. \qquad (16)$$

Тут бачимо, що множення ріжниці сумою виконуємо так, як це діялося при множенні двох сум, тільки що тут нам треба віднімати добутки, які містять у собі уменшимок b як чинник.

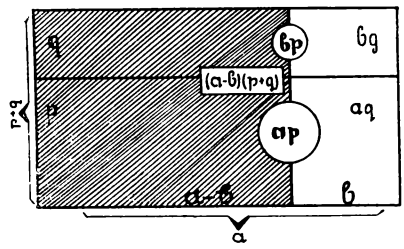


Рис. 35.

Геометрично пояснимо це так (рис. 35): прямокутник, що відповідає бажаному добуткові (він зарисований), отримаємо, коли складемо разом два повні, подовгасті прямокутники ap і aq, а від них віднімемо ті, які залишили чистими, т. зн. bp і bq. отже:

$$(a - b)\ (p + q) = ap + aq - bp - bq.$$

Подібно буде, коли за перший чинник візьмемо суму, а ріжницю за другий.

в) Врешті нехай обидва чинники будуть ріжницями:

$$(a - b)\,.\,(x - y);$$

тоді знову застосуємо двічі закон розділу й матимемо, кладучи $a - b = m$:

$$(a - b)\ (x - y) = m\,(x - y) = mx - my,$$

а коли вернемося назад до a і b:

$$mx - my = (a - b)\ x - (a - b)\ y.$$

Перший добуток буде $ax - bx$, другий $ay - by$, а що цей другий треба від першого відняти, то мусимо вважати на зміни в знаках і матимемо:

$$(a - b)\ (x - y) = ax - bx - ay + by. \qquad (17)$$

Отже й тут числимо так само, як у двох попередніх випадках: *кожний складник одного чинника множимо на кожний складник другого*. Що до знаків, які маємо надавати поодиноким доданкам, то мусимо вважати, що *віднімаємо ці добутки, які повстали з одного уменшимка й одного від'ємника, а добуток двох від'ємників треба вважати доданком.*

Нпр. 28 . 37 можна написати так: (30 — 2) . (40 — 3) = 30 . 40 — 30 . 3 — — 2 . 40 + 2 . 3 = 1036, отже вислід добрий.

Інтересне геометричне з'ясування того множення (рис. 36): прямокутник, що відповідає нашому добуткові, зарисований скісними лініями. Його отримаємо з ax, отже з повного прямокутника, коли від нього відріжемо перше сторчовий прямокутник bx, а потім горішній поземий ay; тільки ж цього останнього не можемо виконати без застережень, бо в ньому вже немає малого прямокутника в правому горішньому розі, тоб-то by; тому цей прямокутник треба перше додати, поки зможемо відняти горішню верству. Через те отримаємо наш взірець (17).

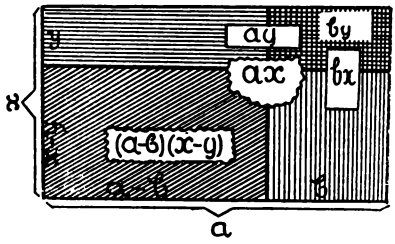


Рис. 36.

г) *Приклади.* Тепер будемо вже називати «многочленами» величини, що повстають через додавання, віднімання та множення одночленів, сум, ріжниць і комбінацій сум та ріжниць. Щоби показати, як у практиці виконувати дії на многочленах, перечислимо тут кілька прикладів, що матимуть основне *значіння для цілої алгебри.*

(а) До суми двох чисел додати їхню ріжницю; коли: $S = a + b$ і $D = a - b$, то:

$$S + D = (a + b) + (a - b) = 2a.$$

(б) Від суми двох чисел відняти їхню ріжницю:

$$S - D = (a + b) - (a - b) = 2b.$$

(в) Суму двох чисел помножити їхньою ріжницею:

$$S \,.\, D = (a + b) \,.\, (a - b) = a^2 + ab - ab + b^2,$$

а що тут маємо по середині ріжницю $ab - ab = 0$, то:

$$(a + b) \,.\, (a - b) = a^2 - b^2, \tag{18}$$

отже:

Сума двох чисел, помножена на їхню ріжницю, дає на добуток ріжницю їхніх квадратів.

Навпаки:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b); \tag{18a}$$

ріжницю квадратів двох чисел можна представити як добуток їхньої суми та їхньої ріжниці.

Це такий важний вислід, що слід його пояснити ще геометрично (рис. 37): щоби з повного квадрату a^2 отримати прямокутник

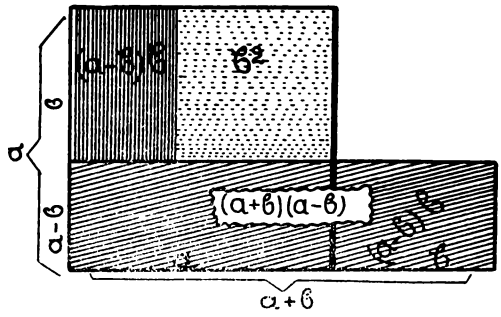


Рис. 37.

$(a + b)\ (a - b)$, зарисований скісними лінійками, перенесім прямокутник, що є праворуч поза грубою рисою, поверх бажаного, як горішню верству. Ці дві фигурі заповнять квадрат за виїмком правого верхнього ріжка; тут буде недоставати b^2, бо якраз стільки бракує перенесеному бічному прямокутникові до того, щоби він закрив горішню верству. Тому треба цей малий квадрат, який на рисунку закиданий цятками, відняти від великого.

Нпр. $a = 7$, $b = 5$; $a + b = 12$, $a - b = 2$, $(a + b)(a - b) = 24$; $a^2 = 49$, $b^2 = 25$, отже також $a^2 - b^2 = 24$.

(г) Обчислити квадрат ріжниці двох чисел, отже $(a - b)^2$. Це дасть:

$$(a - b)^2 = (a - b)\ (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2,$$

т. зн.:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \tag{19}$$

Квадрат ріжниці двох чисел рівний сумі квадратів тих двох чисел, зменшеній на подвійний добуток (або подвійний прямокутник) *тих двох чисел.*

Провірте це правило геометрично!

(д) Врешті ще кілька інших зразків великого значіння.

Обчислім добуток $(a^2 + ab + b^2)(a - b)$. Тут перший частинний добуток буде $a^3 + a^2b + ab^2$, а другий $a^2b + ab^2 + b^3$, і цей другий добуток треба відняти від першого. Через те відпадуть члени $a^2b - a^2b = 0$ і $ab^2 - ab^2 = 0$, отже залишиться $a^3 - b^3$, так що матимемо:

$$(a^2 + ab + b^2)\ (a - b) = a^3 - b^3. \tag{20}$$

Подібно буде:

$$(a^2 - ab + b^2)\ (a + b) = a^3 + b^3. \tag{21}$$

і далі:

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = a^4 - b^4, \tag{22}$$

$$(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4 \tag{23}$$

і т. д.

ВПРАВИ.

1. Обчислити такі ріжниці: $(a + b) - (c - d)$; $(a + b) - (c - d)$; $(a - b) - (c + d)$: $(a - b) - (c - d)$; пояснити їх геометрично й провірити на подрібних прикладах.

2. Звести до найпростішої форми такі многочлени:
$x - 3x - 7x + 9x$; $2x + 4x + 7x - 8x$; $x - 3y + 5x - 7y + 9y$;
$2x - 4y + 6x + 8y$; $x^2 - 2x + 3 - 4x^2 - 5x - 6 + 7x^2 + 8x + 9$.

3. Увільнити від скобок такі вираження:

$$a - \{a - [a - (a - b)]\}\ ;\ a - \{b - [c - (d - e)]\}\ ;$$
$$x - \{y - [x - (x - y)]\}\ ;\ x - \{[(x - y) - x] - y\}.$$

4. Ріжниці $2a - 3b$ і $3a - 4b$ перемінити на кілька ріжних способів.

5. Розвязати й провірити такі рівняння:
$x - 5 = 2$; $5 - x = 2$; $3 = x - 4$; $5 = 10 - x$;
$3a + x = 5a$; $10p = x + 2p$; $a + x = b$; $p - x = q$;
$(3a + 5b) - x = 2a + 3b$; $(4a + 5) + x = 7a + 8$;
$(4a + 5) + x = 7b + 8$; $(3a - x) - 2 = 2a - 4$.

---

6. Обчислити й пояснити геометрично такі множення:
$(3a - 2b) \cdot 5z$; $(8x - 2y + 3z) \cdot 4a$; $(5m - 3n) \cdot 6t$;
$(a + b - c) \cdot (m - n)$; $(a - b - c) \cdot (m + n)$;
$(a + b - c - d) \cdot (x - y + z)$;
$(2x + 3y + 4z) \cdot (3x - 2y)$; $(3a + 5b - 2c) \cdot (2a - 3b + c)$;
$(2a + 3b - 2c - d) \cdot (a - 2b + 2c + d)$.

7. Обчислити: $(a^2 - b^2)^2$; $(a^2 - 2b^2)^2$; $(4a^2bc - 7ab^2c^3)^2$;
$3x^3yz^2 - 4xyz^3)^2$.

8. Обчислити такі добутки: $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b)$;
$(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)(a + b)$; $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \cdot (a - b)$;
$(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b)$ і т. д.

9. Обчислити функційні таблички й нарисувати образи таких функцій:
$y = 5 - x$; $y = 10 - 2x$; $y = 9 - 3x$; $y + x - 2$; $y = 2x - 5$.

10. Слимак лізе по стовпі на $10m$ заввишки від землі вгору; кожного дня робить $5m$, одначе вночі зсувається на $2m$ вниз. Котрого дня долізе до самого верху? З'ясувати рисунком.

§ 5. Відносні числа.

31. **Від'ємні числа.** а) Пояснююче рівняння для віднімання було:

$$a + x = s, \tag{2}$$

а його розвязку писали ми так:

$$x = s - a. \tag{2}$$

Із самого пояснення, а так само з геометричного з'ясування дії виникало ясно, що *віднімати* одне число від одного *можна тільки тоді, коли від'ємник менший від уменшимка*, або иншими словами: *числа більшого від меншого відняти не можна.*

Отсе застереження обмежує нам дуже свободу рухів в аритметиці, тому то вже з давен-давна введено до математики новий рід чисел, який нам дозволяє увільнитись від того обмеження й переводити всі віднімання без огляду на те, котре число більше: від'ємник чи вменшимок. Цей новий рід чисел — це т. зв. *від'ємні числа.*

Що віднімання числа більшого від меншого можна часами перевести і в обсягу природнього ряду, побачимо на прикладі. Нехай буде дана дія $a—(b—c)$. Її можна виконати завсіди, коли тільки $a > b - c$ і $b > c$; при цьому не потрібуємо величину a порівнювати з обома другими зокрема. Ми казали, що тут треба перше обчислити ріжницю $b - c$ й відняти її від a, — або теж до ріжниці $a - b$ додати c (див. уст. 27 в). Нехай буде нпр. $a = 5$, $b = 15$, $c = 13$; тоді перший спосіб дасть: $b - c = 2$, отже $a - (b - c) = 5 - 2 = 3$. Зате при другому способі наткнемося на таке, що буде $(a - b) + c = (5 - 15) + 13$, отже в дужці стоятиме «неможливе віднімання». Та значіння дії повернеться, коли переставимо чергу дій і напишемо: $a - (b - c) = (a + c) - b = (5 + 13) - 15$.

б) *Від'ємні числа* найлекче вводити геометрично. Робимо це так:

Віднімання $a - b$ можливе до переведення на числовій лінії так довго, доки $a > b$; коли b стане рівне a, ми опинимось на нулеві. Коли ж би було $a > b$, тоді треба б нам *числову лінію продовжити поза нуль на ліво. Це продовження числової лінії в протилежному напрямкові має основне значіння в цілій математиці.*

Для зазначення, що це продовження спричинене потребами віднімання, будемо на точках ліворуч від нуля писати знак «+», а праворуч «—» (рис. 38):

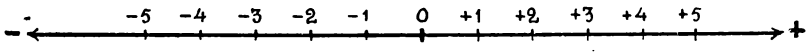


Рис. 38.

Тепер уже числова лінія простягається на обидва боки від нуля, тому на обох її кінцях пишемо стрілки.

Виконаймо на ній якесь віднімання, нпр. 5 — 7 (рис. 39):

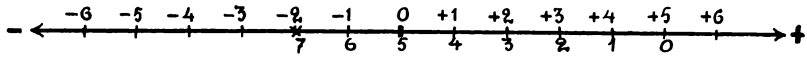


Рис. 39.

Виходимо від точки +5 і йдемо на 7 одиниць уліво, аж поки опинимося на другій точці поза нулем, отже вислід віднімання запишемо так:

$$5 - 7 = 2.$$

Значіння цього рівняння таке: як би ми до обох його боків додали 2, отримали би праворуч нуль, бо від — 2 треба йти на 2 одиниці вправо:

$$(5 - 7) + 2 = -2 + 2 = 0.$$

Це рівняння правдиве, бо його лівий бік можна написати так: $(5 + 2) - 7 = 0$.

Числа, що їх образи стоять праворуч від нуля, звуться *від'ємними числами*, у відріжненню від *чисел додатніх*, якими рахували досі.

в) Та для рахункових потреб треба нам ці числа ввести теж аритметично. Зробимо це так:

Коли $a < b$, тоді — правда — не можна виконати віднімання $a - b$, але можна обчислити $b - a$. Нехай буде:

$$b - a = c;$$

додаймо до обох боків цього рівняння таке тотожне рівняння: $a - b = a - b$:

$$(b - a) + (a - b) = c + (a - b). \qquad (*)$$

Із пояснення числа c виходить: $b = a + c = c + a$, отже: $c + (a - b) = (c + a) - b = b - b = 0$, тому в рівнянні (*) праворуч можемо написати нуль і матимемо:

$$(b - a) + (a - b) = 0. \tag{8}$$

Отже: *ріжниця $a - b$ — це таке число, що до нього треба додати ріжницю $b - a$, щоб отримати на суму нуль.*

Таких випадків, щоби сума двох чисел була нулем, ми досі не мали. Нуль був найменшим числом природнього ряду (уст. 2), а що сума двох чисел — на основі твердження 14 г — більша від кожного з своїх доданків, то вона не може бути сумою двох чисел природнього ряду. В цьому саме лежить поширення нашого числового матеріялу: добираємо до загалу наших чисел такі числа, до яких треба додавати відповідні числа природнього ряду, щоби на суму отримати нуль. Число $b - a$ належить до нашого давнішого обсягу; зате число $a - b$ — це новість, яку називаємо *від'ємним числом*. Коли вживемо означення: $b - a = c$, то для того нового числа матимемо знак:

$$a - b = -c,$$

бо справді:

$$(b - a) + (a - b) = c - c = 0.$$

Пояснююче рівняння для від'ємних чисел є:

$$x + c = 0, \tag{4}$$

а його розвязку пишемо так:

$$x = -c. \tag{5}$$

Отже: *від'ємне число — це таке число, що його треба додати до відповідного додатнього, щоб на суму отримати нуль.**)

---

*) Перші сліди від'ємних чисел подибуємо в індів, а саме в *Баскари* (ур. 1114 р. по Хр.); греки відкидали можливість їхнього існування. Перший числив ними німець Міхель *Штіфель* (1487—1567), одначе в такій формі, як ми їх сьогодня вживаємо, впровадив їх француз Рене *Декáрт* (*Descartes*) у своїй «Геометрії» 1637 р.

Декáрт, званий з-латинська *Картезієм* (*Cartesius*, 1596—1650), дав згаданим своїм твором початок *аналітичній геометрії*. — Він провів дуже бурхливе життя; їздив по ріжних краях, зустрічався з багатьома визначними людьми, а час до часу тікав на самоту, щоб віддаватися математичним і філософичним студіям. Із його математичних творів найважніша «Геометрія».—Його вважають найбистрішим французьким філософом; від нього рахується початок новочасної філософії. Його навчання основується на сумніві у вселюдське знання; певним уважається тільки наше власне існування: «*cogito, ergo sum*» («я думаю, отже я є»). Він приймає два принципи буття: думаючий дух і матерію, що займає місце.

32. **Відносні й без'оглядні числа.** а) Числа додатні і від'ємні, разом узяті, будемо називати *відносними числами*. Кожне з них матиме свій знак «+» або «—» для зазначення, з якого роду чисел воно взяте. Та ці два знаки не означують дій; це тільки символи для відріжнювання двох родів річей.

Коли ж нам прийдеться виконувати дії тими числами, то беремо кожне з них у дужки, щоб його з'єднити нерозривно з його знаком, а між дужками ставимо знак дії. Нпр. сума двох додатніх чисел $(+ a)$ і $(+ b)$ буде: $(+ a) + (+ b)$.

Відносні числа можемо розбивати на *відносні одиниці:* додатні $+ 1$ і від'ємні $- 1$, отже:

$$+ a = \underbrace{(+ 1)}_{1} + \underbrace{(+ 1)}_{2} + \underbrace{(+ 1)}_{3} + \ldots + \underbrace{(+ 1)}_{a} = a \,.\, (+ 1);$$

$$- a = \underbrace{(- 1)}_{1} + \underbrace{(- 1)}_{2} + \underbrace{(- 1)}_{3} + \ldots + \underbrace{(- 1)}_{a} = a \,.\, (- 1).$$

б) Коли нам іде про кількість одиниць, без огляду на їхню якість, тоді говоримо про *без'оглядне число*. Кількість одиниць у якомусь відносному числі зветься його *без'оглядною* або *числовою вартістю*. Її значимо так, що число беремо між дві сторчові риси: $|a|$ Числа $+ a$ і $- a$ мають однакову без'оглядну вартість:

$$|+ a| = |- a|.$$

Це правдиве, бо і $+ a$, і $- a$ мають однакову кількість одиниць; перше число додатніх, друге — від'ємних.

в) При порівнюванні величини відносних чисел будемо триматися такого правила, що *більше* буде те число, образ якого лежить на числовій лінії дальше *на право*. Отже:

(1) Кожне *додатне* число *більше* від кожного *від'ємного* числа.

(2) З двох *додатніх* чисел *більше те*, що має *більшу* без'оглядну вартість. (Нпр. $+ 5 > + 2$).

(3) З двох *від'ємних* чисел *більше те*, що має *меншу* без'оглядну вартість. (Нпр. $- 3 < - 5$).

Це видко на числовій лінії (рис. 40):

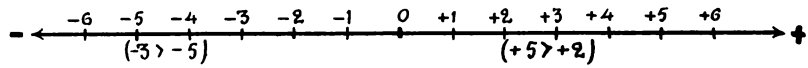


Рис. 40.

33. **Порівняння для відносних чисел.** Введення відносних чисел стане ясніщим, коли вживемо декількох порівнянь із обсягу науки та щоденного життя.

Бо хоч тільки додатні, тоб-то без'оглядні числа беруться з безпосереднього погляду на природу (перечислювання поодиноких предметів), то для відносних чисел можемо знайти в нашім окруженні неодну подібність.

а) *Температура.* Ступіні тепла зазначуємо числами додатніми, ступіні зимна — від'ємними. Нулева точка відповідає температурі таяння леду або замерзання води. Те, що на числовій лінії означується направо, тут будемо брати вгору, а що там значить лівий бік, те саме тут долішня частина термометру.

б) Географичне положення. Коли станемо на рівнику землі й виберемо якусь довільну початкову (нулеву) точку, зможемо віддаль кожної точки рівника від нас зазначити двома даними: подаючи без'оглядну віддаль та подаючи напрямок, куди до тої точка треба йти: на схід, чи на захід. Та ці дві дані можна заступити одною: відносним числом, коли умовимося, що нпр. віддалі на схід будемо значити додатніми, а на захід — від'ємними числами. Це — як відомо — означування *географичної довжини.*

Подібно зазначуємо й *географичну ширину*, тоб-то віддалі від рівника на північ — додатніми числами, й на південь — від'ємними числами.

в) Стан води в річці відчитуємо на стовпі, що вбитий у дно річки. На ньому зазначена нулева точка там, доки вода сягає в нормальному стані (т. зв. звичайно); коли вода прибуде (в часі дощів), буде стан додатній, а в часі посухи — стан води від'ємний.

г) Врешті і в *господарському житті* маємо нагоду вживати до порівнянь відносних чисел: додатніми числами значимо наші маєтки, від'ємними — наші довги.

34. **Додавання й віднімання відносних чисел.** а) На числовій лінії виконуємо *додавання* так, що від точки, яка відповідає першому доданкові, *посуваємося на стільки одиниць*, скільки їх є другому доданкові: отже вправо, коли це одиниці додатні, а вліво, коли вони від'ємні. Відповідає це поясненню додавання, яке каже, що «додавати» значить — «дочислювати одиниці».

Та тут можливі такі два випадки:

(1). *Обидва доданки мають однакові знаки; тоді їхні одиниці просто счислюємо* (рис. 41):

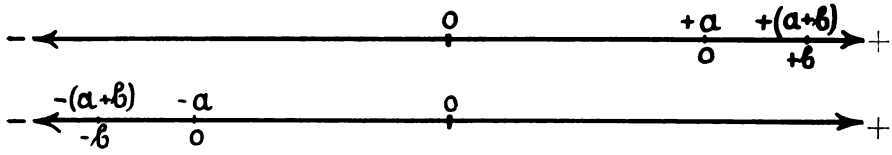


Рис. 41.

$$(+a) + (+b) = +(a+b),$$
$$(-a) + (-b) = -(a+b). \qquad (6)$$

Пояснимо це так:

$$(+a) + (+b) =$$

$$= [\underbrace{(+1)}_{1} + \underbrace{(+1)}_{2} + \ldots + \underbrace{(+1)}_{a}] + [\underbrace{(+1)}_{1} + \underbrace{(+1)}_{2} + \ldots + \underbrace{(+1)}_{b}] =$$

$$= [\underbrace{(+1)}_{1} + \underbrace{(+1)}_{2} + \ldots + \underbrace{(+1)}_{a+b}] = +(a+b);$$

$$(-a) + (-b) =$$

$$= [\underbrace{(-1)}_{1} + \underbrace{(-1)}_{2} + \ldots + \underbrace{(-1)}_{a}] + [\underbrace{(-1)}_{1} + \underbrace{(-1)}_{2} + \ldots + \underbrace{(-1)}_{b}] =$$

$$= [\underbrace{(-1)}_{1} + \underbrace{(-1)}_{2} + \ldots + \underbrace{(-1)}_{a+b}] = -(a+b).$$

З того бачимо, що це справді счислювання одиниць однакового роду.

(2). *Обидва доданки мають неоднакові знаки; тоді беремо їхню ріжницю з знаком числа більшого.*

Сума $(+a) + (-b)$ каже, що треба посунутися перше a одиниць направо, а потім b одиниць наліво, отже від a відчислити b одиниць. Та тут може зайти один із трох випадків:

(2*). $a = b$; тоді всі додатні одиниці скасуються з всіма від'ємними й лишиться нуль (рис. 42):

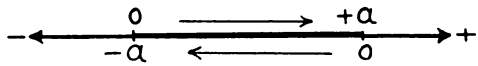


Рис. 42.

$$(+a) + (-a) = 0. \tag{7а}$$

Числа $+a$ і $-a$ звуться «протилежними» (або «симетричними»), отже *сума двох протилежних чисел — нуль;* це відповідає взірцеві (3).

(2**). $a > b$; тоді додатні одиниці переважуть, а їхня кількість буде $a - b$ (рис. 43):

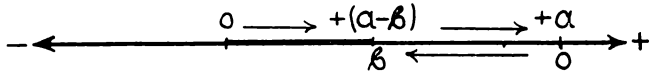


Рис. 43.

$$(+a) + (-b) = +(a-b). \tag{7б}$$

(2***). $a > b$; тоді залишиться $b - a$ від'ємних одиниць (рис. 44):

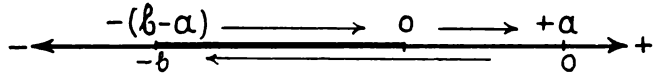


Рис. 44.

$$(+ a) + (- b) = - (b - a). \qquad (7в)$$

Цей вислід згоджується з одним із попередніх: коли назвемо $b - a = - c$ (при $b < a$), тоді напишемо: $a - b = c$, отже: $+ (a - b) = - (b - a)$.

З того виходить таке правило:

Відносні числа додаємо так, що їх переписуємо одне побіч одного з їхніми знаками, а потім редукуємо.

Нпр. (1). $(+ 5) + (+ 3) = + 8$; $(- 2) + (- 7) = - 9$;
(2). $(+ 4) + (- 4) = 0$; $(+ 8) + (- 5) = + 3$; $(+2) + (- 7) = - 5$.

б) *Віднімати число значить, на числовій лінії обернути напрямок його ходу, отже до кінцевої точки уменшимка прикласти другу числову лінію нулевою точкою, відзначити на ній від'ємник і обернути її* (довкруги нулевої точки на 180^0).

Тут маємо такі можливости:

(1). *Від'ємник додатній;* коли його обернути, то він стане від'ємним числом і ми матимемо попередній випадок (рис. 45):

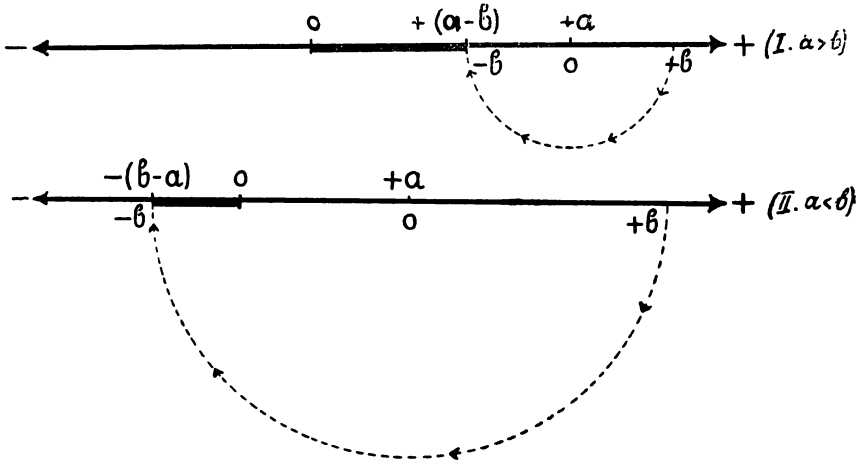


Рис. 45.

$$(+\,a) - (+\,b) = (+\,a) + (-\,b). \qquad (8а)$$

(2) *Від'ємник від'ємний*, отже рисуємо перше його як від'ємне число, а тоді цю числову лінію перекидаємо, т. зн. даємо числу додатній хід (рис. 46):

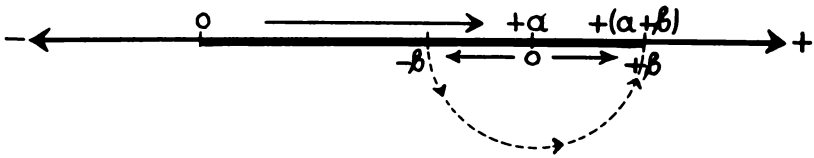


Рис. 46.

$$(+\,a) - (-\,b) = (+\,a) + (+\,b). \qquad (8б)$$

Ці правила пояснимо на такому простому прикладі з господарського життя:

Коли хто має майно $(+\,a)$ й ще якісь гроші $(+\,b)$, то його дістане майно зросте; воно буде сумою попереднього маєткового стану та нового прибутку: $(+\,a) + (+\,b) = +\,(a + b)$.

Коли він видає гроші $(+\,c)$, то його майно меншає; йому зістанеться ще якась готівка, коли майно більше від видатку: $(+\,a) - (+\,c) = +\,(a - c)$; а коли видасть більше, як мав, то це буде його довгом: $(+\,a) - (+\,c) = -\,(c - a)$.

Коли йому з якихось причин збільшиться довг $(-\,d)$, то майно поменшає так само, як би він видав готові гроші: $(+\,a) + (-d) = (+a) - (+d)$.

Врешті, коли його довг $(-e)$ зменшиться (напр. хтось другий заплатить за нього в банк), то його майно зросте так само, як би йому дати гроші на руки: $(+\,a) - (-\,e) = (+\,a) + (+\,e)$.

Із усіх тих правил виходить таке:

Відняти додатнє число значить те саме, що додати від'ємне число, а відняти від'ємне число буде те саме, що додати додатнє число. А що ми числа додаємо так, що їх переписуємо одне побіч одного без зміни знаків, то скажемо:

Відняти відносне число значить, переписати його побіч уменшимка з зміненим знаком і виконати редукцію.

На основі того можна сказати, що при вжитті відносних чисел *дія віднімання став властиво зайвою.*

Із наших взірців бачимо, що *при додаванні відносних чисел обов'язують закони переміни та злуки*, як і при додатніх числах.

Але й *закон одностайности* теж не тратить своєї сили в обсягу відносних чисел, як це легко провірити на числовій лінії.

Провірте ці закони для ріжних комбінацій знаків!

35. **Множення відносних чисел.** а) *Добуток двох додатніх чисел* буде очевидно теж додатній, бо обидва чинники — це числа в дотеперішньому значінні, отже:

$$(+\,a)\,.\,(+\,b) = +\,ab. \qquad (9а)$$

Через те можна додатній множник $+\,b$ вважати числом, яке подає кількість однакових доданків $+\,a$, отже буде:

$$(+\,a)\,.\,(+\,b) = (+\,a)\,.\,b = \underbrace{(+\,a)}_{1} + \underbrace{(+\,a)}_{2} + \ldots + \underbrace{(+\,a)}_{a} = +\,ab.$$

Тільки ж ми не повинні говорити, що доданок беремо «$+\,b$ разів», бо кількість доданків (напр. рівних відтинків числової лінії) по своїй суті без'оглядне (неназване) число. Тому кажемо: доданок узяти «b разів».

б) *Коли множимок від'ємний, а множник додатній*, маємо зовсім подібно:

$$(-\,a)\,.\,(+\,b) = (-\,a)\,.\,b = \underbrace{(-\,a)}_{1} + \underbrace{(-\,a)}_{2} + \ldots + \underbrace{(-\,a)}_{b} = -\,ab,$$

отже:

$$(-\,a)\,.\,(+\,b) = -ab, \qquad (9б)$$

бо й тут можемо собі подумати, що множення — це додавання однакових складників.

Образом такого множення, як (9б), можна вважати від'ємну половину числової лінії (рис. 47):

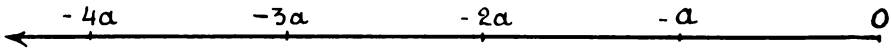


Рис. 47.

в) *Коли за множник прийняти число від'ємне*, то це вже виходить зовсім поза межі нашого дотеперішнього розуміння дії множення. Взяти якесь число за додатнок «$-\,b$ разів» — не говорить нам нічого. Тому ми мусимо *ввести* **нове пояснення**, а саме:

Відносне число, множене від'ємним числом, змінює свій знак, отже:

$$(+\,a)\,.\,(-\,b) = -\,ab, \qquad (9в)$$
$$(-\,a)\,.\,(-\,b) = +\,ab.$$

Для цих двох взірців не маємо ніякого доказу, тільки приймаємо їх *зовсім довільно*. Одначе таке пояснення являється цілком доцільним і пожиточним та не суперечить попереднім поясненням, як це бачимо з ось яких дослідів: .

(1) Воно дозволяє нам прикласти до відносних чисел закон переміни чинників, який мав вагу тільки в обсягу без'оглядних чисел; тоді з добутку

$(-a) \cdot (+b) = -ab$ отримаємо: $(+b) \cdot (-a) = -ab$, згідно з першим взірцем (9 в).

(2) Ми мали: $(-b) + (+b) = 0$; а що добутком множення кожного числа нулем є нуль (уст. 30 а), то:

$$(-a) \cdot [(-b) + (+b)] = 0.$$

Цей добуток буде:

$$(-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot (+b) = 0,$$

отже:

$$[(-a) \cdot (-b)] + [(-ab)] = 0;$$

а що сума цих двох доданків у гранчастих скобках є нулем, то вони творять пару протилежних чисел, т. зн.:

$$(-a) \cdot (-b) = -(-ab) = +ab.$$

(3) Ми мали взірець:

$$(a - x) \cdot (b - y) = ab - ay - bx + xy;$$

він був досі вірний тільки для додатніх чисел, отже для $a > x$, $b > y$. Коли ж ми тут, поширючи його важність, покладемо $a = 0$ і $b = 0$, матимемо: $(0 - x) \cdot (0 - y) = +xy$; а що ріжниці $0 - x$ та $0 - y$ можна заступити від'ємними числами $-x$ і $-y$, то це дасть, як перше:

$$(-x)(-y) = +xy.$$

(4) Врешті до того самого висліду дійдемо ще так: у якімось добутку зменшуємо множник чергою за кожний раз по одній одиниці. Це дасть нпр. такі ряди:

$$\begin{array}{ll} (+5) \cdot (+3) = +15, & (-5) \cdot (+3) = -15, \\ (+5) \cdot (+2) = +10, & (-5) \cdot (+2) = -10, \\ (+5) \cdot (+1) = +5, & (-5) \cdot (+1) = -5, \\ (+5) \cdot 0 = 0, & (-5) \cdot 0 = 0; \end{array}$$

тут бачимо, що зменшування множника на одну одиницю викликує зменшення добутку на стільки одиниць, скільки їх є у множнику, отже в лівому ряді на 5 додатніх, у правому — на 5 від'ємних: $(-15) - (-5) = -10$.

Продовжуймо це зменшування далі; тоді прийдеться нам віднімати знову по $+5$ і по -5 одиниць, отже буде:

$$\begin{array}{ll} (+5) \cdot (-1) = 0 - (+5) = -5, & (-5) \cdot (-1) = 0 - (-5) = +5, \\ (+5) \cdot (-2) = (-5) - (+5) = -10, & (-5) \cdot (-2) = +5 - (-5) = +10, \end{array}$$

і т. д., а що нам тут не так іде про величину добутків, як про правило знаків, то вже з того бачимо, що наше правило справджується.

Із (9 а, б, в) виходить таке правило:

Добуток двох відносних чисел із однаковими знаками — додатній, добуток двох відносних чисел із ріжними знаками — від'ємний.

г) Коли в добутку є більше чим два відносні чинники, то збіраємо їх по два від'ємні в пари, які дають додатні добутки, і маємо таке правило:

Добуток більшої кількости чинників додатній, коли кількість від'ємних чинників париста; він від'ємний, коли ця кількість непариста.

З'окрема ж маємо:

Квадрат від'ємного числа додатній, а куб — від'ємний:

$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = +a^2;$$
$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) = -a^3.$$

д) Знаючи те «правило знаків», можемо сказати, що *закони переміни та злуки чинників можна прикласти й до відносних чисел.*

Коротка застанова переконає нас, що й закон одностайности сюди теж підходить, а саме:

Коли обидва боки нерівности помножити додатнім числом, знак нерівности заховується, а через помноження їх від'ємним числом знак нерівности обертається.

Нпр. $5 > 2;$

$5 \cdot (+3) > 2 \cdot (+3)$, бо $+15 > +6;$

$5 \cdot (-4) < 2 \cdot (-4)$, бо $-20 < -8.$

Це легко показати на числовій лінії. Коли взяти за множник додатній відрізок, то точка, яка була дальше направо (отже відповідала числу більшому), опиниться ще дальше направо; а коли відтинок помножити від'ємним числом, то це значить, що ми образ множення додатнім числом перекидаємо на ліву половинку числової лінії, отже точка, що була дальше направо, тепер опиниться дальше ліворуч.

Так отже закони, що досі обов'язували тільки в обсягу природніх чисел, показуються вірними і в ширшому обсягові відносних чисел. Отсе з'явище називаємо *заховання формальних законів.*

36. **Дії на многочленах.** Коли вже знаємо правила додавання, віднімання та множення відносних чисел, а особливо «правило знаків», можемо виконувати всякі дії на многочленах.

Приклад складнішого множення подаємо ось тут:

Обчислити добуток $C = A \cdot B$, де:

$$A = 3x^3 - 2x^2y + 5y^3,$$
$$B = x^2 + xy - 2y^2.$$

Ці два многочлени виписуємо так, щоб у першому залишилося порожнє місце там, де мав би прийти недостаючий член із головним числом xy^2:

$$\begin{array}{l} (3x^3 - 2x^2y \quad * \quad + 5y^3) \cdot (x^2 + xy - 2y^2) \\ \hline 3x^5 - 2x^4y \quad + 5x^2y^3 \\ \quad + 3x^4y - 2x^3y^2 \quad + 5xy^4 \\ \quad - 6x^3y^2 + 4x^2y^3 \quad - 10y^5 \\ \hline 3x^5 + x^4y - 8x^3y^2 + 9x^2y^3 + 5xy^4 - 10y^5. \end{array}$$

ВПРАВИ.

1. Обчислити такі суми й ріжниці та пояснити їх геометрично:

а) $(+5)+(+3)$; $(+5)+(-3)$; $(-5)+(+3)$; $(-5)+(-3)$;
$(+5)-(+3)$; $(+5)-(-3)$; $(-5)-(+3)$; $(-5)-(-3)$;
$(+22)+(-9)+(+4)-(-3)-(+15)$;
$(+6a)-(-4b)+(-3a)-(+2b)$;

б) $(+7x)+(-17x)-(-3y)+(-9z)+(-4y)-(-5x)+(+12x)$.

2. Що більше: — 2 чи — 3? 0 чи — 3? $a-b$ чи $b-a$?

3. Подати хитання температури у хворого (ріст подавати числом додатнім, опадання — від'ємним) на рис. 3; те саме зробити з термограмою на рис. 5.

4. Коли годинник іде докладно, то ріжницю між справжнім часом і годиною, яку він показує, звемо його *відхилом*. Прискорювання ходу означуємо знаком «+», спізнювання знаком «—». Нпр. провірюючи хід мого годинника кожного полудня бачу, що на протязі п'ятьох днів підряд його відхили були: -1^m14^s, $+0^m24^s$, -0^m58^s $+1^m$, $+2^m7^s$. Яку годину показував той годинник тоді, коли було справжнє полудне, першого й останнього дня спроб? Представити рисунком хід годинника.

5. Годинник показував у 12^h полудня в 6 днях підряд таке: $12^h1^m3^s$, $12^h0^m13^s$, $11^h59^m5^s$, $11^h59^m52^s$, 12^h0^m 28^s 12^h1^m20. Скласти табличку його відхилів, зазначуючи їх відносними числами, та нарисувати лінію його ходу.

6. Ріжницю відхилів годинника в двох сусідніх днях звемо *ріжницею ходу*. — Годинник має одного дня відхил — 1^m13^s, а попереднього дня він був — 1^m28^s. Означити ріжницю ходу.

7. Подати ріжницю ходу у вправах 4 і 5; означувати прискорення ходу додатніми, опізнення — від'ємними числами. Нарисувати лінію ріжниць ходу.

8. Римський цісар Август уродився 63 р. до Хр., а помер 14 р. по Хр.; скільки років він прожив?

9. Римська держава заснована на 1741 років перед хрещенням Русі за Володимира Великого. Коли це сталося?

10. На простій лінії дані чотири точки: A, B, C і D, а між ними є такі віддалі: $\overline{AB}=3cm$, $\overline{BC}=4cm$, $\overline{CD}=-2cm$. Означити такі віддалі: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ і нарисувати ці чотири точки.

11. Стан води в збірникові опав першого дня на $50cm$, другого

ще на $30cm$, третього піднявся на $150cm$, а четвертого впав на $20cm$, Який був стан води четвертого дня, коли першого значилося $8m$?

12. Написати у формі ріжниць такі суми: $(+3)+(+5)$; $(-2a)+(+5a)$; $(-3xy)+(-2xy)$.

13. Виконати такі редукції:
$5x+[7y-(2x+5)-(-7+3y)]-[(-2x+3y)+8]$;
$(3a^2+4ab)-\{-[b^2-(-3a^2+2ab)+(4b^2-3ab)]+2ab-b^2\}$;
$[(6ab^2c-2a^2bc)-(-3abc^2+4a^2bc)+(ab^2c-7a^2bc)]-$
$-\{-[(2a^2bc-4ab^2c)+(7ab^2c-5a^2bc)]+(3ab^2c-4abc^2)\}$;
$-\{-[-(-2by+5ax)+(ax-by+cz)+3by]+[-(-4by+3ax)-$
$-(2cz-5ax)]+by-4cz\}-[-(ax-cz)+(by-cz)]$.

Після кожної редукції робити спроби через підставлювання.

14. Обчислити: $P+Q+R$, $P+Q-R$, $P-Q+R$, $-P+Q+R$, коли: $P=4x^2-3xy+(y^2-x^2)$; $Q=2x^2+[-(y^2-6xy)-x^2]$; $R=(y^2-x^2)-(5xy+x^2)$.

---

15. Помножити: $(+5).(+2)$; $(+5).(-2)$; $(-5).(+2)$; $(-5).(-2)$; $(+5).(+3).(+2)$; $(+5).(+3).(-2)$; $(+5).(-3).(+2)$; $(-5).(-3).(+2)$; $(-5).(+3).(-2)$; $(-5).(-3).(-2)$; $(+2a).(-3b).(+4a)(-5b)$; $(+x).(-2y).(-3z).(-4x).(+6z)$.

16. Пояснити геометрично множення відносних чисел і вивести з того правило знаків у геометричному виді.

17. Виконати такі множення: $(2x^2-3xy-y^2).(x^2-xy-y^2)$; $(2a^3-3a^2b+4ab^2-b^3).(3a^2-4ab-b^2)$; $[(-x)-(-y)]^2$; $[(-2x)-(-3y)+(-4z)]^2$.

18. Відхил годинника виносить на добу $+2^s$; сьогодня його стан згоджується з правдивим часом. Подати його відхил: (а) через 5 днів; (б) перед 5 днями. Подати відхил перед і після 5 днів, якщо він виносить -2^s в день.

19. Обчислити: $Px+Qy+R$; $P(-x)+Q(-y)-R$; $-Px-(Qy+R)$; $P(-x)+[Q(-y)+R]$; $(Px-R)-Qy$, коли: $P=3x^2-2xy-y^2$; $Q=-(3xy-y^2+2x^2)$; $R=(5x-2y).(-2x).(-3y)$.

20. Обчислити: $PQ+RS$ і $PQ-RS$; $PR+QS$ і $PR-QS$; $PS+QR$ і $PS-QR$, коли: $P=2x^2-3xy+y^2$, $Q=-x^2+xy+2y^2$, $R=3x^2+y^2$, $S=-4xy+3y^2$.

21. Помножити на $x - y$ такі многочлени:
$x^2 + xy + y^2$; $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$; $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$;
$x^2 + y^2$; $x^3 + y^3$; $x^4 + y^4$; $x^5 + y^5$.

22. Помножити на $x + y$ такі многочлени:
$x^2 - xy + y^2$; $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$; $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$;
$x^2 - y^2$; $x^3 - y^3$; $x^4 - y^4$; $x^5 - y^5$.

23. Виконати множення: $(x^3 - 7x^2 - 5x + 1) \cdot (2x^2 - 4x - 1)$;
$(3a + 5b) \cdot (3a - 5b)$; $(2x + 3y) \cdot (3x - 2y)$;
$(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \cdot (a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

24. Обчислити: $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$;
$(x + y + z)^2 + (x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 + (-x + y + z)^2$;
$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$; $(x + 2y + 3z)^2 + (3x - 2y - y)^2$.

25. Коли $A = 2x - 3y + z$, $B = 3x + y - 2z$, $C = x + 2y + 3z$, обчислити: ABC; $A^2 + B^2 + C^2$; $(A + B)^2 - C^2$; $(A - B)^2 + C^2$ і т. д.

26. Обчислити квадрати й куби таких ріжниць: $2x^2 - 3xy$, $x^2 - 3y^2$, $3xyz - 4abc$.

27. Доказати, що: а) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ab - bc)^2$;
б) $(ax + by + cz)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2 =$
$= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$;
в) $4[(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c)] = (2ac' + 2a'c - bb')^2 -$
$- (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c')$.

28. Коли $P = x - 2y$, $Q = 2x + y$, $R = 2x - y$, $S = x + 2y$, обчислити: $P^2 - S^2$; $Q^2 + R^2$; $PS - QR$; $P^2 - RS$; $S^2 - QR$; $(P + Q)(R - S)$ і т. д.

§ 6. Дослід найпростіших функцій.

37. **Поширення функційних образів на від'ємні вартости.** а) Образ якоїсь функції рисуємо так, що числову лінію беремо за вісь X і відмірюємо на ній вартости аргументу x, а на відрізках сторчових, рівнобіжних до осі Y, вартости функцій y. Досі мусіли ми обмежуватись до додатніх половин обох числових ліній, які брали за осі: тепер же ж маємо змогу поширити їх також на від'ємні вартості обох змінних.

Як наочний приклад послужить нам *дослід розширювання тіл під впливом змін температури*. Металевий прут, що при 0°C має одиницю довжини, буде з ростом температури видовжуватися так, що за кожним ступінем зросте на одну й таку саму довжину, або, як кажуть, його довжина буде *рости пропорційно* до росту температури. Цей приріст одиниці довжини на 1°C назвемо *співчинником розширности* тіла й назначимо буквою k.

Коли за функційний аргумент x візьмемо температуру, то довжина згаданого прута буде функцією тої змінної й виразиться функційним рівнянням:

$$y = 1 + kx. \tag{1}$$

Образом тієї функції буде проста, що постійно піднімається, коли посуваємося здовж осі X направо (рис. 48); на кожну оди-

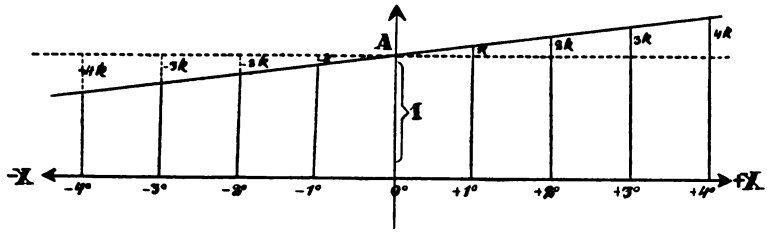


Рис. 48.

ницю росту аргументу x припаде ріст функції y на величину k, отже наша проста буде за кожним разом підніматися на відтинок k. Коли температура впаде нижче нуля, тоді прут стане коротший від

одиниці довжини, й ми отримаємо образ функції, коли просту продовжимо наліво поза точку A.

б) Та часто не тільки аргумент, але й функція може приймати від'ємні вартости; тоді проста, що уявляє собою цю функцію, перейде нижче осі X і ми мусітимемо вартости функцій відчитувати нижче тієї осі. До того продовжуємо також вісь Y униз і на долішній її половині будемо відзначувати від'ємні вартости функції.

Нпр. «Коли хто має 100 карб. майна і видає за кожним разом по 30 карб., то який буде стан його майна в ріжних часах?»

Очевидно, майно буде за кожним разом меншати на 30 карб., і ми матимемо функційне рівняння:

$$y = 100 - 30\,x. \tag{2}$$

Щоб нарисувати образ такої функції, обчислимо її «функційну табличку» (див. уст. 15), а на її основі отримаємо такий образ (рис. 49):

x	y
0	100
1	70
2	40
3	10
4	—20
5	— 50

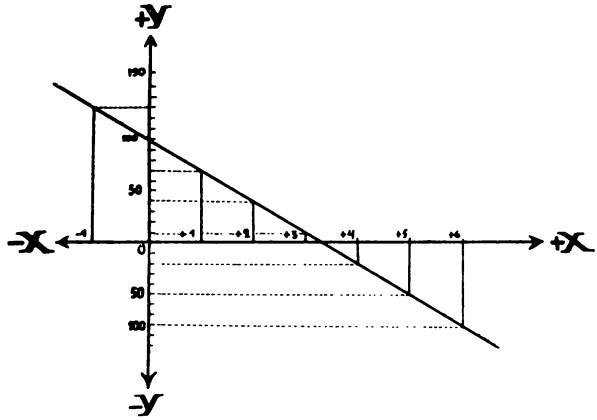


Рис. 49.

З таблички бачимо, що наша функція опадає правильно, а з того висновуємо, що образом функції мусить бути проста лінія, яка опадає на 30 одиниць по осі Y на кожну одиницю по осі X (мусимо звернути увагу, що на нашому рисункові на обох осях ми вибрали одиниці довжини ріжної величини).

Ця проста перетинає вісь X між точками $+3$ і $+4$, і від тої пори йде вже нижче осі; тоді всі вартости функції вже від'ємні. Пояснимо це так, що після третьої видачі нашому господареві залишилося всього 10 карб., і на четверту виплату він мусітиме вже зробити 20 карб. боргу; далі цей борг теж зростатиме постійно за кожним разом на ту саму суму 30 карб.

Накінець запитаймо ще, якими сумами мусів цей чоловік орудувати давніше, коли приймемо, що він завсіди робив такі самі витрати. Тоді треба нашу функційну табличку поширити теж на від'ємні вартості аргументу (т. зн. підставляти за x від'ємні числа), а просту, що уявляє собою функцію, продовжити поза вісь Y наліво.

x	y
—1	130
—2	160
...	...

в) Для вигоди вживаємо до рисування функційних образів т. зв. «кратчастого паперу», на якому рисуємо дві осі: позему й сторчову, й вибіраємо одиницю довжини (звичайно однакову на обох осях). Отся фигура зветься *перехрестям Декарта**). Вона ділить цілу площу на чотири чвертки, які зазначуємо римськими цифрами (рис. 50).

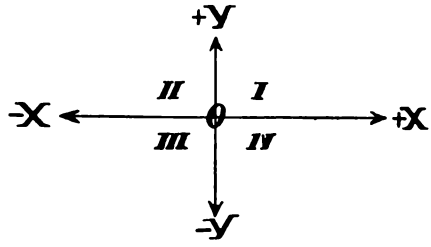


Рис. 59.

Положення кожної точки на площі можемо означити двома відтинками, які звемо її *співрядними;* це її віддалі від обох осей, а ці осі—це *осі співрядних*. Співрядну x звемо *відрізною* точки, а співрядну y — її *рядною*. Таким чином положення точки на площі буде завсіди дане двома величинами, а саме двома відносними числами, x і y (див. уст. 21 кінець).

Точку P, що має співрядні x та y, значимо так: $P(x, y)$.

Що до розділу площі на чотири чвертки, то маємо так:

у чвертці	відрізна x	рядна y
	має знак	
I	+	+
II	+	—
III	—	—
IV	—	+

Отже в першій і третій чвертці обидві співрядні мають однакові знаки, а в другій і четвертій — неоднакові.

*) Див. увагу до уст. 31.

Точку O називаємо *початковою точкою* або *осередком перехрестя*.

Отсей спосіб означування точок на площі нагадує нам означування географичного положення точок на землі при допомозі двох відносних величин: довжини й ширини. Ширину числимо завсіди від рівника, а при довжині мусить бути ще зазначено, який полуденник беремо за початковий (Грініч, Ферро, Париж).

Одиниці довжини на обох осях можуть бути однакові або й неоднакові; це на вислід алгебричного рахунку не має впливу, тільки може вплинути на вигляд відповідної геометричної фигури.

38. **Лінійні функції.** а) Є ріжні функційні рівняння, які ділимо відповідно до членів, що виступають на правому боці. Найпростіше рівняння таке, що в ньому аргумент виступає тільки в першому ступіні, отже тільки як одночлен ax, а не в квадраті, ані в кубі. Таким чином загальна форма *функційного рівняння першого ступіня* буде:

$$y = ax + b. \tag{3}$$

Коли ліворуч крім ax буде ще квадрат аргументу, отже матимемо: $y = ax^2 + bx + c$, матимемо *функцію другого ступіня* або *квадратову*. Подібно буде $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *функція третього ступіня* або *кубична* і т. д.

В цьому розділі займемося в першу чергу функційним рівнянням першого ступіня; а що — як ми вже досі бачили на кількох прикладах і ще далі побачимо — образом такої функції, як (3), є проста лінія, то такі функції будемо називати *лінійними*.

б) Нарисуймо образ функції:

$$y = 2x + 1.$$

До того перш за все мусимо скласти табличку вартостей x і y.

Визначім точки, що відповідають тром першим парам вартостей: $A\ (0, 1)$, $B\ (1, 3)$, $C\ (2, 5)$ (рис. 51); від кожної з них доходимо

x	y
0	1
1	3
2	5
3	7
...	...
—1	—1
—2	—3
—3	—5
...	...

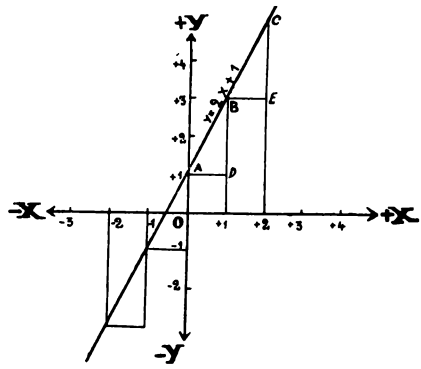


Рис. 51.

до сусідньої так, що посуваємося на 1 одиницю по осі X і на 2 одиниці по осі Y. Коли ж доберемо ще дві точки D і E, отримаємо два пристайні трикутники: $\Delta ABD \cong \Delta BCE$ (*БКБ*), а з цього виходить, що $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, отже протипрямки AB й BC припадають на одну просту. Те саме можна сказати про всяку иншу точку, співрядні якої візьмемо з таблички: вона лежатиме на цій самій простій, бо ж від кожної точки можемо дійти до сусідньої так, що збудуємо в ній новий прямокутний трикутник, пристайний до всіх попередніх.

З того бачимо, що образом даної функції є *проста лінія*. Під нею повстають східці, ширини 1 і висоти 2.

З огляду на те наша табличка навіть за обширна, бо для визначення простої вистарчать уже дві точки, отже табличку можна обмежити до двох пар вартостей змінних x і y.

Проста $y = 2x + 1$ відзначує на осі Y відтинок $+1$, як це бачимо з таблички (для $x = 0$).

в) Для дальшого досліду затримаймо співчинник 2 при x постійним, а змінюймо тільки другий доданок, тоб-то 1. Коли замість нього приймемо нпр. — 1, отримаємо (рис. 52):

$y = 2x - 1.$

x	y
0	—1
1	1
2	3
3	5
...	...
—1	—3
—2	—5
...	...

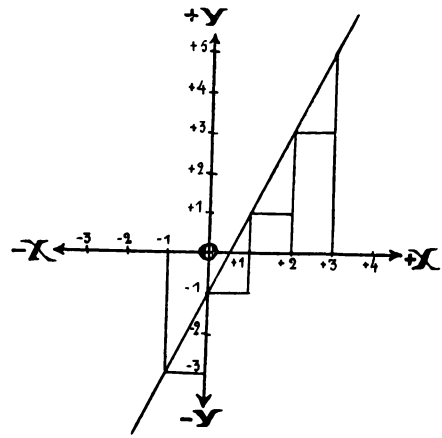


Рис. 52.

Буде це проста, рівнобіжна до попередньої (отже матиме той самий нахил), тільки пересунена вниз. Вона відзначить на осі Y відтинок — 1; з того бачимо, що другий співчинник рівняння простої означує відтинок на сторчовій осі.

Коли на одній фигурі врисуємо всі ці лінії, які випадуть через зміни другого доданка в правому боці рівняння, отримаємо *гро-*

маду рівнобіжних простих (рис. 53). Означім цей змінний доданок (він має назву «параметру рівняння») загальним числом b, тоді скажемо так:

Рівняння

$$y = 2x + b \qquad (4)$$

уявляє собою громаду рівнобіжних простих.

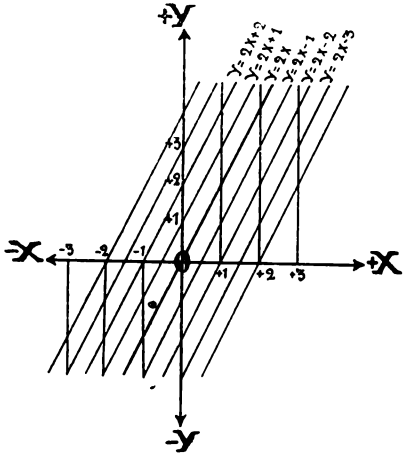


Рис. 53.

Коли тут приймемо $x = 0$, отримаємо $y = b$, отже кожна проста відзначує на осі Y відрізок b. Коли b додатнє, вона перетинає вісь Y горішній частині, а при від'ємному b — в долішній. Коли $b = 0$, відповідна проста переходить через осередок перехрестя; її рівняння є: $y = 2x$.

г) Тепер затримаймо цей другий доданок постійним, а змінюймо тільки співчинник при x. Складаймо таблички для поодиноких вартостей того співчинника й рисуймо відповідні прості; побачимо, що всі вони будуть перетинатися на осі Y у точці $+1$ (рис. 54).

Напрямок кожної простої буде залежати від співчинника при x; через те звемо його *співчинником нахилу* або *напрямку*.

Нпр. для $a = 1$ маємо просту, що на одиницю приросту x піднімається на 1 вгору, отже під нею повстануть східці ширини 1 і висоти 1; для $a = 2$ отримаємо висоту східця 2 при незмінній ширині 1. З того виходить, що *співчинник нахилу подає висоту східця*, який міститься під простою й має *незмінну ширину* 1.

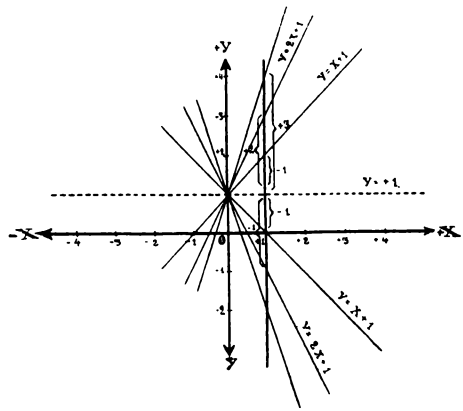


Рис. 54.

Як довго цей співчинник додатній, проста піднімається вгору; коли він буде від'ємний, проста спадатиме, отже східці йтимуть униз. Тому будемо тут говорити про *від'ємну висоту східців.*

Коли ж він остаточно матиме вартість 0, висота східця буде $= 0$, отже проста, рівняння якої є $y = 1$, буде йти рівнобіжно до осі X у віддалі $+ 1$.

Таким чином *рівняння*

$$y = ax + 1 \tag{5}$$

уявляє собою жмуток простих, які перетинаються в одній точці $+ 1$ *на осі* Y. Цю точку звемо «вершком жмутка».

З того, що досі сказано, виникає такий практичний припис рисування лінійних функцій: *на осі* Y *відмірюємо вартість другого співчинника рівняння, а перший співчинник* (тоб-то при x) *беремо за висоту східця при незмінній ширині* 1. Бажану просту отримаємо як протипрямку згаданого східця.

Тут слід іще завважати, що образом функції

$$x = m$$

є проста рівнобіжна до осі Y у віддалі m від неї, бо справді кожна точка тої простої однаково віддалена від осі.

д) Проста, що має рівняння:

$$y = x,$$

переходить через осередок перехрестя, а що в неї висота східця рівна його ширині, то вона нахилена до обох осей під однаковим кутом 45°. Вона зветься *першою* (або головною) *медіяною* й переходить через I та III чвертки, переполовинюючи їх (рис. 55).— Проста

$$y = -x$$

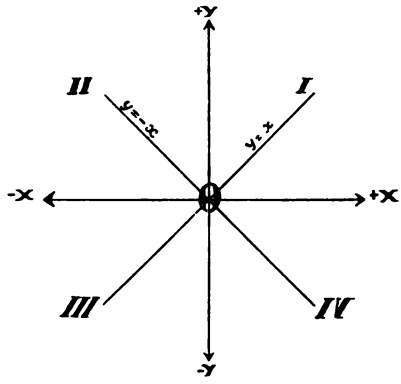


Рис. 55.

переходить також через 0 і творить рівнораменний східець, одначе від'ємний, т. зн., вона опадає під кутом 45°. Вона переходить через II

та IV чвертки, теж переполовинюючи їх. Її звуть *другою* (або побічною) *медіяною*.

39. **Образи инших функцій.** Нехай буде дана «квадратова функція»:

$$y = x^2; \tag{6}$$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
...	...
—1	+1
—2	+1
...	...

для її досліду обчислім знову «функційну табличку»:

З неї бачимо, що функція матиме для всіх вартостей аргументу вартости додатні, бо квадрат кожного від'ємного числа додатній. Двом протилежним вартостям аргументу будуть відповідати однакові вартости функції, бо $(+a)^2 = +a^2$ і $(-a)^2 = +a^2$. З ростом аргументу вартости функції ростуть, одначе не так правильно, як це було при лінійних функціях. Із цього виходить, що образом рівняння (6) не може бути проста лінія. Коли нарисуємо цей образ на основі нашої таблички, отримаємо поодинокі точки, які не лежатимуть на одній простій. Їх можна сполучити тільки ламаною лінією (рис. 56).

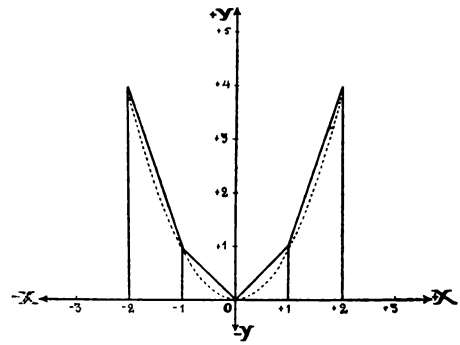


Рис. 56.

Пізніше (уст. 66) побачимо, як можна цю ламану лінію заступити одностайною кривою; вона на нашому рисункові зазначена проривчастою лінією. Ця крива зветься *параболою*; вона має в точці *0* свій *вершок*.

Парабола міститься вся в горішній половині площі, отже вище осі X; чверток III і IV вона не зачіпає. Вона складається з двох однакових рамен у I і II чвертках. Виглядає воно так, що як би здовж осі Y поставити дзеркало (насторч до паперу), то одна половинка відбилась би в ньому, як образ другої. Кажемо в цьому випадкові, що вісь Y — *це вісь симетрії параболи*.

Инші функції та їхні образи будемо розсліджувати в дальших розділах.

ВПРАВИ.

1. За верчення криниці платять тим більше, чим глибше поступає робота. Так нпр., коли перший метер коштуватиме 100 карб.,

то кожний дальший метер буде на 30 карб. дорожчий від попереднього. Звязати ціни з відповідними глибинами у функційне рівняння та представити цю функцію рисунком. Яка ціна кожного поодинокого метра? Яка ціна виверчення перших 10, 15, 20 метрів?

2. Уявім собі на хвилину, що наша земля плоска, та нарисуймо на ній перехрестя Декарта, осями якого будуть рівник і полуденник Грініч. Нарисувати на цій площі точки, що відповідають положенню ріжних місцевостей на землі, та повизначувати їхні співрядні, беручи за одиницю довжини 1^0 (на рівнику $= 111 km$).

При такім означенні співрядні будуть докладні тільки для точок в околицях осередка перехрестя, бо чим далі від рівника, тим менші ступні географичної ширини.

3. Визначити положення та співрядні важніших місцевостей на Україні у віднесенні до перехрестя Декарта, коли за вісь X приймемо рівнолежник через Одесу, а за вісь Y — полуденник Київа. Справжні віддалі міряти цирклем на карті.

Одиницею довжини для змінної y можна взяти полуденникові ступіні, рівні кругло 111 km, а за одиницю довжини здовж осі X— довжину 1^0 у ширині Одеси, т. зн. 76,5 km.

4. Нарисувати образи таких функцій:
$y = 3x - 4$; $y = -2x + 2$; $y = -3x + 1$; $y = 5x$; $y = 2$; $x = -3$.

5. Чим ріжняться громади простих: $y = 2x + b$ і $y = -2x + b$ та жмутки простих: $y = ax + 1$ і $y = ax - 1$?

6. Нарисувати в обсягу цілих чисел образи таких функцій:
$y = -x^2$; $y = -2x^2 + 1$; $y = x^3$; $y = -x^3$; $y = x^3 - 2$.

§ 7. Ділення.

40. **Пояснення ділення.** а) *Поділити число p числом a значить, знайти таке число x, яке, множене числом a, дало б на добуток p*, отже *пояснююче рівняння* для ділення є:

$$ax = p. \tag{1}$$

Його розвязку пишемо так:

$$x = p : a \text{ або } x = \frac{p}{a} \tag{2}$$

(чит. «*p* ділене на *a*» або «*p* ділене числом *a*»).

Число *p*, яке ділимо, зветься *ділимком*, число *a*, що ним ділимо, *дільником*, а вислід ділення *x* — *часткою*. Отже *ділити — значить, шукати одного невідомого чинника, коли дані добуток і другий чинник.*

З пояснення ділення виходить:

$$a \cdot \frac{p}{a} = p, \tag{3}$$

т. зн. *ділимок — це добуток частки й дільника.*

На цьому й полягає перевірка ділення: частку множимо дільником і на добуток маємо отримати ділимок, якщо ділення переведено правильно.

Коли в рівнянні (1) переставимо чинники, отримаємо $xa = p$, а звідсіля буде:

$$a = \frac{p}{x}, \tag{4}$$

отже:

Дільник рівний ділимкові, діленому часткою, або иншими словами:

Дільник і частка перемінні одне з одним.

б) Ділення дає нам змогу розвязувати одну дальшу класу простих рівнянь, нпр. таке:

$$7x = 35.$$

Тут невідомий один із чинників, отже він буде рівний частці правої сторони та другого чинника:

$$x = \frac{35}{7} = 5,$$

бо справді $7 \cdot 5 = 35$.

в) З огляду на те, що ділення — це обернення дії множення, маємо змогу виконувати цю дію тільки тоді, коли дільник справді повстав через множення дільника другим цілим числом, або иншими словами, *коли ділимок подільний дільником.* Инших випадків ми тут поки-що не будемо розбірати.

Коли ділимок неподільний дільником, отримуємо «неповну частку» й останок. Нпр. 828 : 15 дасть на частку 53 й на останок 3.

г) Коли обидва боки нерівности

$$a > b$$

поділити одним і тим самим числом c, то знак нерівности не зміниться:

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c};$$

зате, коли $a > b$ і $c > d$, то про відношення часток ab та cd не можна нічого сказати; особливо ж не можна висновувати, що $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Бо коли нпр. $8>5$ і $2>1$, то нерівність $\frac{8}{2} > \frac{5}{1}$ неправдива.

д) Дія ділення містить у собі два завдання. Коли уявимо собі, що p відзначене на числовій лінії, то a може означати або кількість складових відтинків на лінії, й ми питаємо про їхню величину x, — або це буде довжина відтинка, і ми хочемо знати кількість тих тинків.

У першому разі виконуємо *поділ (властиве ділення)*, бо ділимо число на рівні частини; тоді *дільник мусить бути неназваним числом*, а ділимок і частка будуть або неназвані числа, або названі одноіменно.

В другому випадкові наше ділення стає *мірянням;* ми порівнюємо одну величину з другою й кажемо: величина p більша в x разів від величини a. Тоді *частка x мусить бути неназваним числом*, а ділимок і дільник одночасно або неназвані, або названі одноіменно.

Врешті, коли p означує кількість похідних одиниць, нпр. m^2, m^3, kgm, тоді дільник, коли він число назване, може бути числом тої самої назви — і тоді маємо властиве міряння, — або числом із спорідненою назвою, і тоді мусимо спинитись над тим, яку назву треба надати частці.

Нпр., коли площина прямокутника є $15m$, а один бік має 5 m, тоді другий бік буде $\frac{15}{5} = 3$, а назва тої величини буде очевидно m, бо це мусить бути довжина. Так отже *умовляємося*, що має бути: $1m^2 : 1\ m = 1\ m$, подібно як ми вже приймали: $1\ m \cdot 1\ m = 1\ m^2$.

Таким чином ділення названих чисел веде до відомих нам уже основних чи похідних одиниць, або — подібно як множення — може стати джерелом *нових похідних одиниць*. Їх уживаємо переважно у физиці; вони є:

одиниця *густоти* — тоб-то маса, ділена на зміст — 1 g на 1 cm^3 (1 g/cm^3);

одиниця *швидкости* — 1 cm на 1 секунду (1 cm/sec), коли тіло перебігає «рівномірним рухом» дорогу $1m$ в 1^s.

одиниця *прискорення* — 1 cm/sec на 1^s або 1 m на «квадрат секунди» (1 cm/sec^2) *), коли швидкість якогось тіла на протязі кожної секунди зростає на 1 cm.

Для инших физикальних розумінь (сила, праця і т. д.) маємо два роди одиниць: одні, які ми вже пізнали в уст. 19 в (силу міряємо тиском, а працю опором, який треба поконувати здовж якогось шляху), — і другий рід одиниць, а саме:

Одиниця *сили*, т. є така сила, яка масі $1g$ надає одиницю прискорення; вона зветься *дина* (1 дина = 1 gcm/sec^2)**), а рівноважиться вона з тиском $^1/_{981}\ g = 1{,}02\ mg$.

Одиниця *праці* (енергії), т. зн. праця 1 дини на дорозі 1 cm; вона зветься *ерг* (1 ерг = $1gcm^2/sec^2$); а що це дуже мала величина, то звичайно вживають більшої одиниці, званої *джулем* (1 джуль = 10 000 000 ергів); 1 джуль рівновартний із 1,02 kgm.

Одиниця *справности* т. зн. праця 1 ерга на протязі 1 секунди ($1g\,cm^2/sec^3$) 1 джуль на секунду зветься *ватом*; він рівновартний із 1,02 kgm/sec.

У практиці вживають іще як одиницю справности *силу коня* (PS — із німецького: *Pferdestärke* або HP— по англійськи: *Horse-Power*), т. зн. $75kgm/sec$; отже: 1 ват = 0,00136 PS і навпаки 1: PS = 736 ватів.***)

Врешті електротехники мають іще таке означення: 1 гектоват-година = = 36000 джулів, тоб-то праця течії із справністю 100 ватів на протязі 1 години.

41. **Прикмети частки.** (1) Помножім обидва боки рівняння (1) довільним числом k; це дасть:

$$kax = (ka)x = kp.$$

Звідсіля отримаємо: $x = \frac{kp}{ka}$, або з огляду на те, що $x = \frac{p}{a}$:

$$\frac{p}{a} = \frac{kp}{ka}, \tag{6}$$

---

*) 1 cm/sec : 1 sec = 1 cm/sec^2, як це будемо бачити при правилах ділення частки в наступнім уступі.

**) 1 $(cm/sec^2)\ .\ g = 1\ gcm/sec^2$.

***) Англійці не вживають метричного укладу, тому в них одиницею праці є не кілограмметер, тільки фунто-фунт = 0,13835 kgm, а одиницею справности 1 HP = 550 фунто-футів на секунду = 76,04 kgm/sec, отже 1 HP не є зовсім докладно = $1PS$ ($1PS$ = 0,986HP, $1HP$ = 1,014PS).

т. зн. *частка не зміниться, коли ділимок і дільник помножимо одним і тим самим числом.*

(2) Коли в цьому рівнянні (5) підставимо: $kp = q$, $ka = b$, матимемо: $p = \frac{q}{k}$, $a = \frac{b}{k}$, отже це дасть:

$$\frac{p}{a} = \frac{\frac{q}{k}}{\frac{b}{k}},$$

а що на основі рівн. (5) є $\frac{p}{a} = \frac{q}{b}$, то матимемо:

$$\frac{q}{b} = \frac{\frac{q}{k}}{\frac{b}{k}}, \tag{6}$$

отже: *частка не зміниться, коли ділимок і дільник поділимо одним і тим самим числом.*

(3) Коли ж тепер напишемо: $kax = a.(kx) = kp$, матимемо: $kx = \frac{kp}{a}$, а в злуці з (2) отримаємо: $kx = k.\frac{p}{a} = \frac{kp}{a}$, отже:

$$k.\frac{p}{a} = \frac{kp}{a}, \tag{7}$$

т. зн. *частку множимо якимось числом так, що множимо тим числом ділимок.*

(4) Щоби поділити частку на c, поділім тим числом обидва боки рівняння (1):

$$\frac{ax}{c} = \frac{p}{c} = p : c,$$

а що на основі рівн. (7) лівий бік можна написати так: $\frac{ax}{c} = a.\frac{x}{c}$, то звідсіля виходить: $\frac{x}{c} = \frac{\frac{p}{c}}{a} = \frac{p:c}{a}$, отже:

$$\frac{p}{a} : c = \frac{p:c}{a}, \tag{8}$$

т. зн. *частку ділимо якимось числом так, що ділимо ним ділимок.*

Одначе тут може трапитися таке, що ділимок неподільний тим числом, яким хочемо ділити частку, і тоді взірець (8) не мав би значіння. Тоді поступаємо так, що з рівняння $acx = pc$ обчисляє-

мо: $x = \frac{pc}{ac}$, а що на основі (7) є: $\frac{pc}{ac} = \frac{p}{ac} \cdot c$, то матимемо:

$x = \frac{p}{ac} \cdot c.$

Звідсіля вийде: $\frac{x}{c} = \frac{pa}{c}$, отже:

$$\frac{p}{a} : c = \frac{p}{ac}. \tag{9}$$

Це значить, що в разі потреби *можемо ділити частку якимось числом так, що помножимо тим числом дільник, а ділимок залишимо без зміни.*

Три останні правила можна помістити в такому одному:

Частка — це функція ділимка й дільника. Вона змінюється **прямо пропорційно** *до ділимка* (т. зн. росте й меншає **одночасно** з ним), *а* **відворотно пропорційно** *до дільника* (отже росте, коли дільник меншає, і навпаки).

(5) Розвязка рівняння

$$ax = a$$

буде: $x = 1$, бо:

$$a \cdot 1 = a, \tag{10}$$

отже *одиниця — це таке число, яке не викликує ніякої зміни, коли ним помножити друге число.* З того рівняння виходить:

$$\frac{a}{a} = 1, \quad \frac{a}{1} = a, \tag{10a}$$

т. зн. *число, поділене самим собою, дає на частку одиницю*, і далі: *число, поділене одиницею, не змінюється.*

Звідсіля бачимо, що число 1 грає таку саму ролю при множенні й діленні, як 0 при додаванні й відніманні.

42. **Ділення сум і ріжниць, добутків і часток.** а) *Многочлен ділимо одночленом так, що ділимо ним кожний складник з'окрема:*

$$\frac{a + b + c - d - e}{r} = \frac{a}{r} + \frac{b}{r} + \frac{c}{r} - \frac{d}{r} - \frac{e}{r}. \tag{11}$$

Доказ. Виконаймо відповідне множення частки дільником; це дасть на добуток ділимок:

$$\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} + \frac{c}{r} - \frac{d}{r} - \frac{e}{r}\right) \cdot r = \frac{a}{r} \cdot r + \frac{b}{r} \cdot r + \frac{c}{r} \cdot r - \frac{d}{r} \cdot r - \frac{e}{r} \cdot r$$

$$= a + b + c - d - e.$$

б) *Добуток ділимо так, що даним дільником ділимо один із його чинників:*

$$\frac{ab}{r} = \frac{a}{r} \cdot b, \tag{12а}$$

або:

$$\frac{ab}{r} = a \cdot \frac{b}{r}. \tag{12б}$$

Ці рівняння покриваються з рівнянням (7). Подамо тут іще один доказ нашого твердження:

Назвім вартість нашої частки x; тоді буде:

$$r \cdot x = r \cdot \left(\frac{a}{r} \cdot b\right) = \left(r \cdot \frac{a}{r}\right) b = ab,$$

бо на основі рівняння (3) є: $r \cdot \frac{a}{r} = a$, — або:

$$r \cdot x = (r \cdot a) \cdot \frac{b}{r} = a \cdot \left(r \cdot \frac{b}{r}\right) = ab.$$

в) З цього виходить, що *коли ділимок і дільник мають деякі однакові чинники, то їх у частці можено пропустити.*

Нпр.

$$\frac{abcde}{aef} = \frac{bcd}{f}.$$

г) Коли ділимок і дільник—степені одної й теї самої основи, тоді з ділимка відпаде стільки чинників, скільки їх є у дільнику.

Нпр.

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2,$$

$$\frac{40x^2y^3z}{15xyu} = \frac{8 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z}{3 \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot u} = \frac{8xy^2z}{3u}.$$

Загально ж маємо:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \tag{13}$$

т. зн. *степені тої самої основи ділимо так, що віднімаємо їхні викладники.*

Доказ:

$$\frac{a^m}{a^n} \cdot a^n = a^{m-n} \cdot a^n.$$

$$a^m = a^{m-n+n} = a^m.$$

д) Остаточно знаємо вже, що *частку ділимо так, що дільником ділимо її ділимок, або множимо її дільник* (див. рівн. 8).

е) *Помножім число p якимось числом k, а потім поділім його иншим числом r; вислід буде такий самий, як би ми змінили чергу обох дій*, отже:

$$(p \cdot k) : r = (p : r) \cdot k. \qquad (14а)$$

Той самий вислід отримали б ми також, як би число p помножили часткою $\frac{k}{r}$ або поділили часткою $\frac{r}{k}$:

$$p \cdot \frac{k}{r} = p : \frac{r}{k}. \qquad (14б)$$

Доказ: (1). Підставмо: $x = (p \cdot k) : r$, тоді буде: $pk = rx$ і $p = \frac{rx}{k}$, або: $p = r \cdot \frac{x}{k}$. Звідсіля: $p : r = \frac{x}{k}$ і $(p : r) \cdot k = x$.

(2). Коли далі підставимо: $y = p \cdot \frac{k}{r}$, отримаємо: $pk = ry$, отже наше попереднє буде $x = y$; а врешті з $p = \frac{ry}{k} = \frac{r}{k} \cdot y$ вичитаємо: $y = p : \frac{r}{k}$.

Отже: *черга дій множення й ділення перемінна.*

Це нагадує нам перемінність дій додавання й віднімання (уст. 27.):

$$a - b + c = a + c - b.$$

є). Коли в (14а) підставимо $k = r$, матимемо:

$$(p \cdot k) : k = (p : k) \cdot k = p, \qquad (15)$$

бо $(p \cdot k) : k = p \cdot \frac{k}{k} = 1$ (на основі (8)) $= p \cdot 1$ [на основі (10)] $= p$. Отже:

Число, множене й ділене (або навпаки) *одним і тим самим числом, не змінюється.*

Порівняйте: $a + b - b = a - b + b = a$.

43. **Ділення відносних чисел.** а) З правил для множення відносних чисел виникають такі приписи для їхнього ділення:

Коли ділимок і дільник мають однакові знаки, то їхня частка буде додатня, коли ж вони неоднакових знаків, то частка буде від'ємна:

$$\left.\begin{aligned} \frac{+a}{+b} &= +\frac{a}{b}, \\ \frac{-a}{-b} &= +\frac{a}{b}, \\ \frac{+a}{-b} &= -\frac{a}{b}, \\ \frac{-a}{+b} &= -\frac{a}{b}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Доказ:

$$(+b)\,.\,(+\frac{a}{b}) = +a; \quad (-b)\,.\,(+\frac{a}{b}) = -a; \quad (-b)\,.\,(-\frac{a}{b}) = +a; \quad (+b)\,.\,(-\frac{a}{b}) = -a.$$

Отже: *множення й ділення відносних чисел мають однакове правило знаків.*

б) Коли маємо нерівність

$$a > b$$

і обидва її боки поділимо додатнім числом, то її знак не зміниться:

$$\frac{a}{+m} > \frac{b}{+m};$$

коли ж їх поділити від'ємним числом, то знак нерівности треба обернути:

$$\frac{a}{-n} < \frac{b}{-n}.$$

Це виходить із відповідних тверджень про множення нерівностей (див. уступ 35 д.).

44. **Ділення многочлена многочленом.** а) Многочлен можемо тільки тоді поділити другим многочленом, коли він повстав через справжнє помноження свого дільника якимось другим чинником; в иншому разі ділення не мало б значіння.

Ділення многочлена многочленом відбувається подібно, як ділення двох більшецифрових чисел: зачинаємо з ділення двох найвищих одночленів, кожною частинною часткою множимо дільник і віднімаємо від дільника, а потім останок уважаємо новим дільником.

Нпр. $(15a^3 - 26a^2b - 15ab^2 - 14b^3) : (3a - 7b) = 5a^2 + 3ab + 2b^2.$

$$\begin{array}{r} \mp 15a^3 \mp 35a^2b \\ \hline + 9a^2b - 15ab^2 \\ \pm 9a^2b \mp 21ab^2 \\ \hline + 6a^2b - 14b^3 \\ \pm 6a^2b \mp 14b^3 \\ \hline \end{array}$$

Тут завсіди списуємо по одному новому членові так, щоб останок мав завсіди стільки членів, кільки їх є в ділимку, а коли маємо віднімати частинний добуток, то змінюємо в ньому всі знаки.

Коли не лишиться ніякий останок, кажемо, що «ділення зійшло».

Коли часами трапиться таке, що в ділимку недостає якогось члена (отже в ряді спадаючих чи ростучих викладників його членів є перескік), тоді лишаємо у цьому місці відступ.

Нпр. ділення $(a^4 + a^2b^2 + b^4) : (a^2 + ab + b^2)$ напишемо так:

$$\begin{array}{l}(a^4 \quad * \quad + a^2b^2 \quad * \quad + b^4) : (a^2 + ab + b^2) = a^2 - ab + b^2. \\ \pm a^4 \pm a^3b \pm a^2b^2 \\ \hline \quad - a^3b \\ \quad \mp a^3b \mp a^2b^2 \mp ab^3 \\ \quad \hline \quad\quad + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\ \quad\quad \pm a^2b^2 \pm ab^3 \pm b^4 \\ \quad\quad \hline\end{array}$$

б) Та часто згори не знаємо, чи ділимок подільний дільником чи ні, — подібно як при звичайних числах. Тоді приступаємо до ділення так, що пробуємо подільність; коли покажеться, що ділимок неподільний, тоді лишиться якийсь останок і ми його напишемо як «дріб». Вислід ділення називаємо «неповною часткою».

Нпр. (1). $(x^4 - 3xy^3 + 2y^4) : (x^2 - xy - 2y^2)$.

Тут у дільнику нема членів, які мали би в головному числі x^3 і x^2, отже після x^4 лишаємо місце на 2 члени:

$$\begin{array}{l}(x^4 \quad * \quad * \quad - 3xy^3 + 2y^4) : (x^2 - xy - 2y^2) = x^2 + xy + 3y^2 + \dfrac{6xy^3 + 8y^4}{x^2 - xy - 2y^2}. \\ \pm x^4 \mp x^3y \mp 2x^2y^2 \\ \hline \quad + x^3y + 2x^2y^2 - 3xy^3 \\ \quad \pm x^3y \mp x^2y^2 \mp 3xy^3 \\ \quad \hline \quad\quad + 3x^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4 \\ \quad\quad \pm 3x^2y^2 \mp 3xy^3 \mp 6y^4 \\ \quad\quad \hline \quad\quad\quad + 6xy^3 + 8y^4\end{array}$$

Тут «неповною часткою» є $x^2 + xy + y^2$, а останком: $6xy^3 + 8y^4$.

(2). Ділення $(1 - x^4) : (1 - x)$ виконаємо так:

$$\begin{array}{l}(1 \quad * \quad * \quad * \quad - x^4) : (1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3. \\ \pm 1 \mp x \\ \hline \quad + x \\ \quad \pm x \mp x^2 \\ \quad \hline \quad\quad + x^2 \\ \quad\quad \pm x^2 \mp x^3 \\ \quad\quad \hline \quad\quad\quad + x^3 - x^4 \\ \quad\quad\quad \pm x^3 \mp x^4 \\ \quad\quad\quad \hline\end{array}$$

Ділення «зійшло».

(3). $(1 - 2x) : (1 + x - x^2) = 1 - 3x + 4x^2 - 7x^3 + \ldots$

$$\begin{array}{l} \pm 1 \pm x \mp x^2 \\ \hline -3x + x^2 \\ \mp 3x \mp 3x^2 \pm 3x^3 \\ \hline +4x^2 - 3x^3 \\ \pm 4x^2 \pm 4x^3 \pm 4x^4 \\ \hline -7x^3 + 4x^4 \\ \ldots\ldots \end{array}$$

Отсе ділення не зійде, як далеко ми його не продовжували б; тому то останок пишемо аж тоді як дріб, коли перестаємо ділити.

45. **Числові уклади.** а) *Десятковий уклад.* Наші «звичайні» (т. зн. подрібні) числа пишемо в *десятковому укладі*, т. зн. порядкуємо їх по степенях основи 10: збираємо всі одиниці в десятки, а те, що зістанеться поза десятками, пишемо по правому краю числа як одиниці; потім що 10 десятків з'єдинюємо в сотні й останок десятків пишемо перед одиницями; далі йдемо до тисячок і т. д. Таким чином поодинокі цифри являються тільки співчинниками степенів головного числа 10, так що ми кожне подрібне число пишемо у виді многочлена.

Нпр. 3784 значить те саме, що $3.10^3 + 7.10^2 + 8.10 + 4.1$.

Коли при збіранні в одиниці вищого порядку (отже по 10 одиниць чи сотень чи тисячок і т. д.) не залишиться ніякого останку, тоді на цьому місці пишемо *нуля*, щоб не стратити перегляду, на котрому місці має стояти яка цифра.

Так отже в загальному випадкові напишемо десяткове число так:

$a_k . 10^k + a_{k-1} . 10^{k-1} + a_{k-2} . 10^{k-2} \ldots + a_2 . 10^2 + a_1 . 10 + a_0$, де $a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ уявляють собою цифри, у кількості $k + 1$, які можуть іти від 0 до 9. Коли не боїмося непорозуміння, зможемо це число записати коротше так: $(a_k\, a_{k-1}\, a_{k-2} \ldots a_2\, a_1\, a_0)$.

б) *Инші числові уклади.* Вибір числа 10 за основу числового укладу — це річ зовсім довільна, бо ми могли б так само за основу взяти кожне инше число. Тільки ж числення в десятковому укладі найвигідніше зі всіх, бо ми до нього вже так дуже привикли, що перехід до всякого иншого укладу був би дуже трудний.

Уявім собі, як виглядало б число в якомусь иншому укладі, нпр. у *сімковому*. Тоді мусіли б ми збірати не по 10, а по 7 одиниць у одиницю «вищого порядку»; отже число 10 значило би 7, число 100 значило би $7^2 = 49$, число 1000 значило би $7^3 = 343$ і т. д.

Так нпр. сімкове число 5421 значило б: $5.7^3 + 4.7^2 + 2.7 + 1 = 1926$. Напишемо це так:

$$(5421)_7 = 1926.$$

До написання числа в десятковому укладі треба мати нуля й 9 цифр, бо десяте число складається вже з нуля і з першої цифри. Подібно для написання числа в сімковому укладі треба крім нуля 6 цифр, від 1 до 6, бо сьоме число — це вже одиниця вищого порядку, яку напишемо як 10. Взагалі, коли за основу числового укладу возьмемо g, то для написання числа треба нам буде нуля й g — 1 значків. Число в укладі g матиме форму:

$(a_k\ a_{k-1}\ a_{k-2} \dots a_2 a_1 a_0)_g = a_k \cdot g^k + a_{k-1} \cdot g^{k-1} + a_{k-2} \cdot g^{k-2} + \dots + a_2 g^2 + a_1 g + a_0$,

де $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots a_2, a_1, a_0 = 0, 1, 2, \dots, g-1$.

З того виходить, що коли основа більша над 10, тоді не вистарчить нам наших десяти «арабських» цифр; для писання таких чисел мусимо вводити нові знаки (нпр. «позичити» їх із якоїсь азбуки).

в) *Заміна числових укладів.* Нехай буде дане нпр. п'яткове число $(1340341)_5$ і нам треба його замінити на десяткове. До тої ціли пишемо:

$$(1340341)_5 = 1.5^6 + 3.5^5 + 4.5^4 + 0.5^3 + 3.5^2 + 4.5 + 1$$
$$= 1.15625 + 3.3125 + 4.625 + 3.25 + 2.5 + 1 = 27936,$$

отже з сьомицифрового п'яткового числа отримали п'ятицифрове десяткове. Зате для написання п'яткового числа треба нам тільки 4 значків, а для десяткового аж 9.

г) Навпаки, нехай нам буде треба дане десяткове число 100951 замінити на дванадцяткове. Щоби знайти його найвищу цифру, мусимо поділити його найвищим степенем основи 12, який тільки зможе в ньому поміститися. До того виписуємо ряд степенів числа 12:

$$12^1 = 12,\ 12^2 = 144,\ 12^3 = 1728,\ 12^4 = 20736;$$

дальших степенів уже не треба нам обчисляти, бо 12^5 більше від даного числа. Тепер ділимо дане число на 12^4, останок із ділення на 12^3, дальший останок на 12^2 і т. д., а всі частинні частки й останній останок по черзі беремо за цифри нашого числа:

```
      100951 : 20736 =  4
       82944          ==
      ------------------
ост.  18007 :  1728 = 10
       17280          ==
      ------------------
ост.    727 :   144 =  5
         720          ==
      ------------------
ост.      7 :    12 =  0
           0          ==
      ------------------
ост.      7
```

Так отже буде:

$$100951 = (4\alpha 507)_{12},$$

бо для 10 ми «позичили за цифру» грецьку букву α.

Коротший був би такий рахунок: дане число ділимо раз-у-раз на 12, а за цифри бажаного числа беремо *останки*, але у *протилежній черзі*, *і останню частку*:

```
100951 : 12 = 8412
     7      8412 : 12 = 701
    ==           0     701 : 12 = 58
                 ==         5     58 : 12 = 4
                            ==        10
                                      ==
```

отже бажане число буде знову $(4\alpha 507)_{12}$.

д) *Двійковий уклад.* Двійковий уклад інтересний тим, що в ньому всяке число пишеться тільки двома знаками: 0 і 1, бо тут 2 творить уже одиницю другого порядку. Так нпр. двійкове число $(1101001)_2$ значить:

$$1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.1 = 64 + 32 + 8 + 1 = 105.$$

Щоб замінити десяткове число на двійкове, будемо його ділити раз-у-раз на 2, а за цифри братимемо останки у відворотному порядкові й останню частук:

Нпр. $183 : 2 = 91$ (1)
$91 : 2 = 45$ (1)
$45 : 2 = 22$ (1)
$22 : 2 = 11$ (0)
$11 : 2 = 5$ (1)
$5 : 2 = 2$ (1)
$2 : 2 = 1$, (0)

отже $183 = (10110111)_2$.

Наше десяткове число трицифрове, а двійкове, що йому відповідає, аж осьмицифрове. З того бачимо, що вигода, яка лежить у меншій кількости цифрових знаків, затрачується через те, що чим менша основа укладу, тим більшу кількість місць матиме число.

е) *Історична увага.* Труднощі, що лежали в зрозумінні великих чисел, дали причину до витворення числових укладів: люде стали відчувати потребу збірати одиниці (або предмети) в більші або менші громадки, ці громадки в більші громади і т. д., і тим способом усяка кількість яких-небудь предметів ставала цілком переглядною.

При виборі основи числового укладу люде спинилися на десяткові, мабуть через те, що в кожної людини є на руках і на ногах по 10 пальців, які були дуже помічні при всякому перечислюванні. Це сталося мабуть дуже давно, бо числівники від 1 до 10 у всіх індоєвропейских мовах походять від спільних пнів (див. § 1, уст. 12).

Десятковий уклад поширився по всьому світу, навіть між народами, які жили далеко один від одного. З инших укладів затрималися тільки де-не-де якісь сліди. Нпр. давні вавилонці ввели шістьдесятковий уклад (та він виступає в них не чистим, як мішанина шісткового, дванадцяткового й шістьдесяткового). Привід до того дало оглядання рухів сонця по небесному зводі. Вавилонці, відомі астрономи, обчислили перші довжину року й подали її (недокладно) на 360 днів, а що сонце кожного дня пересувається між сузіррями так, що на протязі року вертається на те саме місце, то вони поділили цілий обвід кола на 360 частин, званих «ступінями» (*gradus*). Звідсіля й узявся поділ року на 12 місяців по 30 днів і т. д.

Отсей уклад дуже тісно звязаний з геометричними з'явищами (промінь кола можна відміряти 6 разів на обводі, а з того повстає правильний шостикутник, який розпадається на правильні трикутники з кутами по 60^0). Цей звязок такий тісний, що того укладу не зрушила навіть велика французька революція, яка завела у всіх обсягах міряння десятковий уклад. Тільки аж у найновіших часах, при астрономичних інструментах, введено десятинну поділку (прямий кут ділиться на 100, а не на 90 частин, а ці частини ще раз на 100 і ще раз на 100),

а вживають її тому, що тоді відпадають усякі невигідні переміни десятинних дробів на шістьдесяткові.

Сліди дванадцятково-шістьдесяткової системи тримаються ще в популярному перечислюванні предметів: 12 штук = 1 дюжина, 60 штук = 1 копа. Воно вигідне тим, що 12 подільне на 3, 4, 6 і 12, а 60 крім того ще на 5, 10, 15, 20 і 30, а числа 10 і 100 тої прикмети не мають.

Инших укладів цивілізовані народи мабуть ніколи не вживали, а радше не переводили їх систематично. Тепер тільки в деяких індоєвропейських мовах подибуємо сліди якогось неповного двадцяткового укладу (латинське 18 = *duodeviginti* = 20 — 2, 19 = *undeviginti* = 20 — 1; французьке 80 = *quatre-vingt* = 4.20, 90 = *quatre-vingt-dix* = 4.20 + 10 і т. д.)*).

ВПРАВИ.

1. Для яких чисел x буде: $x : a = 1$; $x : a = a$; $x : 1 = a$; $a : x = 1$; $a : x = a$; $1 : x = 1$?

2. Розвязати рівняння: $5x = 15$; $8x = 64$; $92x = 184$; $6(x + 2) = 2(2x - 1)$; $3x + 8 = -1$; $8(x - 3) + 5(2x - 5) = 4(3x + 7) - x$; $4 - 5x = 14$; $7 = 2x - 3$; $2 = -5 + 7x$; $367x + 148 = 1616$; $27x - 27653 = -126311$; $ax + 3a = 8a$; $(a + b)x = c(a + b)$; $9p = 14p - 5pk$; $3a^2 - x = 5a^2$; $13x - 20p^2 = 6p^2$; $12r^2s^2 - rsx = 47r^2s^2$.

3. Пояснити ріжницю між поділом і міряннем рахунково й на числовій лінії на такому прикладі: «за $5m$ матерії по 30 карб. заплачено 150 карб.»

4. На прикладі $72 : 8 = 9$ пояснити зміни частки при всіх можливих змінах дільника й ділимка.

5. Основна одиниця швидкости, *cm/sec*, відноситься до основних одиниць: довжини *cm* і часу *sec*; одначе так само можна вибрати инші основні одиниці швидкости, опіраючись на инші основні одиниці довжини й часу. Так у практиці дуже часто вживають таких одиниць, як: *km/sec*, *km/min*, *km/h* і т. д.

Виконати заміну одного роду одиниць на другі.

Числити так: $1\ km/h = \frac{1\ km}{1\ h} = \frac{1000\ m}{60\ min} = \frac{50}{3}\ m/min.$ і т. д.

---

*) Ніде правди діти, що було б надзвичайно корисно, як би зреформувати наш спосіб числення і замість десяткового укладу ввести *дванадцятковий;* тоді основа укладу була б подільна не двома, а чотирма чинниками: 2, 3, 4 і 6. В такому випадкові могли б ми не відрікатися шістьдесяткового укладу в кутових мірах, який треба вважати більше звязаним із природою річі (напр. кут правильного шостикутника = $^1/_6$ повного обороту), як десятковий уклад (бо на пальцях сьогодня можна вже й не числити).

6. Із Києва до Козятина (158 km) їде поїзд $2^h\ 48^m$; обчислити його швидкість (скільки переїде в 1^m)?

7. Дорога з Калє до Довру виносить 45 *km*, а корабель перебуває її на протязі $1^h\ 45^m$. Яка швидкість корабля?*)

8. На перегонах в Англії найскоріший мотоцикліст переїхав дорогу $11^1/_2$ *km* на протязі $4^m\ 45^s$, а перегоновий кінь перебув 3 *km* на протязі $3^m\ 2^s$. Скільки разів швидкість мотоциклю більша від скорости коня?

9. Французький летун Брендежок летів із Парижу до Варшави (1300 *km*) 14 годин, із двома перервами: $2h$ і $3^1/_2h$. Обчислити пересічну швидкість лету (т. зн. прийняти, що летів цілий час із однаковою швидкістю).

10. Найбільший особовий пароплав пливе з Гамбургу до Н'юйорку (3647 морських миль) $6^d\ 13^h\ 31^m$; обчислити його швидкість.

11. Обчислити такі частки: $(ax + bx - cx) : x$; $(2ax^2 - 3bx) : x$; $(14a^2bc + 7abc^2 - 21a^3b^2c^3) : 7abc$; $(a^7 + a^6b - 5a^4b^3) : a^3$.

12. Обчислити вартість таких часток:

$$\frac{45a^3b^2xy^2z^3}{5ab^2xyz};\quad \frac{a^{18}b^{15}c^{12}d^9}{a^5\,b^9\,c^{10}\,d^8};\quad \frac{26x^4y^3z^6u^9}{13x\,y^2z^4u^5}.$$

13. Обчислити:

$$\frac{8x^2y^3z}{4xy} : 2xy^2;\quad (36a^3b^2\,.\,5ab^3) : 15a^4b^4.$$

14. Виконати такі ділення: $(+ 32x^5yz^4) : (- 8x^3z^2)$;
$(- 75a^2b^3xy^4) : (- 25abxy)$; $[(+ 384\ m^2n^3pq^4) : (-6mn^2q)] : (- 16mnpq)$.

15. Виконати ділення таких многочленів:
а) $(2x^3 - x^2 + 3x - 9) : (2x - 3)$; б) $(9x^3 + 3x^2 + x - 1) : (3x - 1)$;
в) $(x^6 - 2x^2 + 1) : (x^2 - 2x + 1)$;
г) $(7x^3 - 24x^2 + 58x - 21) : (7x - 3)$;
д) $(x^5 + 2x^4y + 3x^3y^2 - x^2y^3 - 2xy^4 - 3y^5) : (x^3 - y^3)$.

16. Обчислити вартість таких часток:

а) $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$; б) $\dfrac{x^2 + x - 72}{x + 9}$;

*) Швидкість корабля подають у т. зв. «вузлах», які понанизувані на линві «льогу», тоб-то приладу для означування швидкости корабля, у відступах що $31m = {}^1/_{60}$ морської милі. Швидкість «1 узол» значить: 1 морська миля/h = 0,51 *m/sec*. — Обчислити звідсіля довжину морської милі.

в) $\dfrac{x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6}{x^2 - 3x + 3}$; г) $\dfrac{x^4 + x^3 - 9x^2 - 16x - 4}{x + 4x + 8;}$

д) $\dfrac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$.

17. Обчислити $A : B$, коли: $A = x^3 + 64$, $B = x^2 + 6x + 8$.

18. Обчислити такі частки:

а) $\dfrac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2\ (a^2 - b^2)}$; б) $\dfrac{(a + 2b)\,(2a + b) + (a - 2b)\,(2a - b)}{3\ (a - b)}$;

в) $\dfrac{[(a + 1)^2 - (a - 1)^2]\,(a + b)}{2a\ (a - b)}$;

г) $\dfrac{[(x + y)^2 + (x - y)^2]\,[(x + y)^2 - (x - y)^2]\,(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2}$.

19. Виконати такі ділення:

а) $(1 + x) : (1 - x)$; б) $(1 - x) : (1 + x)$; в) $(1 + x - x^2); (1 - x + x)$;
г) $(1 + x^2 + x^4 + x^6) : (1 - x + x^2 - x^3)$; д) $(1 - x^8)$: $(1 - x^4)$;
е) $(1 - x^{16}) : (1 + x^4)$; є) $(1 + x^{16}) : (1 + x^4)$; ж) $(1 + x^{16}) : (1 - x^4)$.

20. Знайти такий многочлен P, який сповнював би одне з рівнянь:

а) $(5x - 1) \cdot P = 10x^2 - 17x + 3$;
б) $P \cdot (3x + 1) + x - 4x^2 = 3x^4 + 4x^2 - x - 1$;
в) $(5y^2 - 8y + 3) - (2y - 3) \cdot P = 5y - 4y^4$;
г) $P \cdot (7x^2 + 2xy + y^2) = Q - 2\,(3x + 2y)\,(x + y) \cdot P$,
де: $Q = (26x - 15y)\,(x^2 - y^2)$.

21. Виконати таке ділення: $(1 + x) : (1 - x - x^2)$, продовжувати його аж до x^{16} й відшукати закон, по якому творяться поодинокі співчинники в частці.

Вислід (неповна частка) буде: $1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + \ldots$. отже співчинники, починаючи з третього, є: $3 = 2 + 1$, $5 = 3 + 2$, $8 = 5 + 3$ і т. д.

22. Зробити те саме з діленням: $1 : (1 - 2x - x^2)$.

---

23. Поділити на 3 і на 9 такі числа: 10, 100, 1000, 10000 і т. д. і обчислити за кожним разом останок. Який висновок?

24. Поділити число 47 852 на 3 і на 9.

Представити ділимок як суму $4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 1$ і ділити поодинокі доданки:

$$4 \cdot 10^4 : 3 = 4 \cdot (9999 + 1) : 3 = 4 \cdot (9999 : 3) + (4 \cdot 1) : 3 = 4 \cdot 3333 + 4 : 3;$$
$$7 \cdot 10^3 : 3 = 7 \cdot (999 + 1) : 3 = 7 \cdot (999 : 3) + (7 \cdot 1) : 3 = 7 \cdot 333 + 7 : 3;$$
$$8 \cdot 10^2 : 3 = 8 \cdot (99 + 1) : 3 = 8 \cdot (99 : 3) + (8 \cdot 1) : 3 = 8 \cdot 33 + 8 : 3;$$
$$5 \cdot 10 : 3 = 5 \cdot (9 + 1) : 3 = 5 \cdot (9 : 3) + (5 \cdot 1) : 3 = 5 \cdot 3 + 5 : 3;$$
$$2 \cdot 1 : 3 = = 2 : 3;$$

Тут сума останків буде $4 + 7 + 8 + 5 + 2 = 26$; коли її поділити на 3, отримаємо знов останок 2, отже даного числа не можна поділити на 3; воно лишить останок 2.

Переконайтеся таким самим способом, чи це число подільне на 9.

Який висновок із цього?

25. Поділити на 11 такі числа: 10, 100, 1000, 10000 і т. д. і подати останки; який висновок?

26. Поділити на 11 число 483 967.

Напишім число так: $4.10^5+8.10^4+3.10^3+9.10^2+6\cdot10+7.1$ і ділім доданок за доданком:

$$4 \cdot 10^5 : 11 = 4 \cdot (100001 - 1) : 11 = 4 \cdot (100001 : 11) - (4 \cdot 1) : 11 = 4 \cdot 9091 - 4 \cdot 11;$$
$$8 \cdot 10^4 : 11 = 8 \cdot (9999 + 1) : 11 = 8 \cdot (9999 : 11) + (8 \cdot 1) : 11 = 8 \cdot 1111 + 8 : 11;$$
$$3 \cdot 10^3 : 11 = 3 \cdot (1001 - 1) : 11 = 3 \cdot (1001 : 11) - (3 \cdot 1) : 11 = 3 \cdot 91 - 3 : 11;$$
$$9 \cdot 10^2 : 11 = 9 \cdot (99 + 1) : 11 = 9 \cdot (99 : 11) + (9 \cdot 1) : 11 = 9 \cdot 9 + 9 : 11;$$
$$6 \cdot 10 : 11 = 6 \cdot (11 - 1) : 11 = 6 \cdot (11 : 11) - (6 \cdot 1) : 11 = 6 \cdot 1 - 6 : 11;$$
$$7 \cdot 1 : 11 = = 7 : 11;$$

Тут сума останків є: $-4 + 8 - 3 + 9 - 6 + 7 = -(4 + 3 + 6) + (8 + 9 + 7) = -13 + 24 = 11$, а що цей останок ділиться на 11, то й ціле число подільне на 11.

Який висновок?

27. Представити як многочлени з основою 10 такі десяткові числа: 4832, 58711, 106327.

28. Замінити на десяткові ось такі числа: $(2354)_6$, $(114101)_5$, $(428503)_9$, (11011_2), $(1000)_3$; $(6\alpha494\beta3)_{12}$, $(58\alpha907)_{11}$, ($\alpha = 10$, $\beta = 11$); $(5'632)_{20}$, $(72'31)_{20}$, $(40'6'4)_{20}$, ($0' = 10$, $1' = 11$ і т. д.)

29. Замінити десяткові числа на:

сімкові: 67329, 5403, 10000;
трійкові: 5062, 8710, 3333;
п'яткові: 1234, 29071, 1321;
двійкові: 24, 73, 576, 2320;
двадцяткові: 7392, 46001, 235126.

30. Замінити число $(101101)_2$ на трійкове; $(8692\alpha5)_{11}$ на дванадцяткове, $(4042)_5$ на двадцяткове.

31. Скласти табличку множення для якогось недесяткового укладу; пробувати виконувати в ньому ріжні дії.

§ 8. Подільність чисел.

46. **Числа прості і зложені.** а) Нам треба часто вміти сказати згори, чи дане ділення можливе, чи ні, отже чи ділимок подільний дільником, чи ні.

Найпростіша дорога до того — шлях спроб: пробуємо, чи число a подільне даним дільником і чи взагалі воно подільне якимнебудь числом, меншим від нього. До тої цілі вистарчить перепробувати ділення числа a на всі ці числа.

Більше складне це завдання при многочленах, бо тут немає оцінки для вирішення, котрий із двох даних многочленів більший, отже й не можемо виписати всіх многочленів, менших від даного.

Одначе математика подає способи, якими можна оминути той неінтересний, часто непрохідний шлях, і в цьому лежить її вищість понад просту штуку числення (тоб-то рахунки).

б) Для вирішення питання про подільність чисел треба нам знати спосіб, як вишукувати числа, на які дане число подільне, або теж уміти *розкладати всякий добуток на чинники.* При цьому можуть зайти такі два випадки: або дане число чи знайдений уже чинник не мають инших чинників (нпр. 7, 13, $a + b$ і т. д.), або їх можна ще далі розкладати на чинники (нпр. $8 = 4 \cdot 2$; $15 = 3 \cdot 5$; $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ і т. д.). Коли якогось числа не можна далі розкладати на чинники, звемо його *простим* або *незложеним;* число, що є добутком инших чисел, називається *зложеним.*

Просте число — це таке число, яке крім 1 *і себе самого не має инших чинників.*

47. **Правила подільности.** а). *Коли два числа, a і b, подільні третім числом c, то й їхня сума та ріжниця теж подільні тим числом.*

Бо коли a і b подільні на c, то частка $\frac{a}{c} = p$ та $\frac{b}{c} = q$ мусять бути цілими числами. З того виходить, що $a = cp$ і $b = cq$, отже: $a + b = c(p + q)$ і $a - b = c(p - q)$, а це значить, що і $a + b$ і $a - b$ подільні на c.

Та звідсіля не виходить, що коли $a + b$ або $a - b$ подільні на c, то a і b мусять бути подільні на c, кожне з'окрема. Нпр. $21 + 4 = 25$ подільне на 5, хоч цеї прикмети не мають ні 21, ні 4.

б) *Коли в сумі* $a + b$, *якщо вона подільна на* c, *перший доданок подільний на* c, *то й другий доданок мусить бути подільний тим самим числом.*

Бо коли a подільне на c, то мусить знайтися таке число p, щоби було $a = cp$, а що і $a + b$ подільне на c, то мусить існувати друге таке число q, що буде $a + b = cq$. Звідсіля маємо: $b = cq - a = cq - cp = c(q - p)$, отже одним із чинників числа b є c.

в) *Коли число* a *подільне на* b, *то воно також подільне кожним із чинників числа* b.

Бо коли напишемо: $a = bm$, а з другого боку приймемо, що b подільне на n, отже: $b = cn$, то зможемо написати: $a = c(mn) = (cm)n$. Звідсіля бачимо, що a подільне не тільки на b, але й на c і на n.

г) *Число подільне на* 10, 100, 1000,... *тоді, коли воно кінчається найменше одним двома, трома, . . . нулями.*

д) *Число подільне на* 2 *або на* 5, *коли його остання цифра подільна на 2 або на 5.*

Знаємо, що $10 = 2 \cdot 5$, отже кожне число, зложене з самих десятків, подільне на 2 і на 5. Тому, коли маємо дане якесь число, то мусимо тільки ствердити, чи подільний на 2 або на 5 той останок, який залишиться після відкинення всіх десятків, — а цим останком є число, що пишеться останньою цифрою. — На 2 подільні такі одноцифрові числа: 2, 4, 6, 8, а на 5 — тільки 5. Значить, на 2 подільні числа, закінчені на 0, 2, 4, 6, 8, — це т. зв. *паристі числа*, — а неподільні ті, що закінчені на 1, 3, 5, 7, 9; це *непаристі числа*. — На 5 подільні тільки ті, що кінчаються цифрами 0 або 5.

е) *Число подільне на* 4 *або на* 25, *коли громада двох останніх цифр подільна тим числом.*

Кожна сотня подільна на 4 і на 25, отже коли відкинемо сотні, зістанеться нам громада двох останніх цифр, яка й рішає про подільність.

Всі паристі числа ділимо далі на *паристо-паристі*, тоб-то подільні на 4, і *паристо-непаристі*, отже подільні тільки на 2, а не на 4. Коли випишемо ряд паристих чисел, побачимо, що в ньому чергуються обидва ці роди:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...
пн. пп. пн. пп. пн. пп. пн. пп. пн. нп. . . . .

є) *Число подільне на* 8 *і на* 125, *коли громада трох останніх цифр подільна тим числом.*

І це правило доказуємо так само, як попередні: знаємо, що $1000 = 8 \cdot 125$, отже для досліду подільности треба залишити громаду трох останніх цифр, після відкинення тисячок.

ж) *Число подільне на* 3 *і на* 9, *коли сума його цифр подільна на* 3 *чи на* 9 (див. §.•7, впр. 23—24).

Доказ: Число n можна написати так:

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0;$$

тут a_k, a_{k-1} .., a_1, a_0 означують його цифри (в кількости $k + 1$), отже це одноцифрові числа, в межах 0 — 9. Будемо цей многочлен ділити на 3 або на 9 так, що поділимо тим числом кожний його доданок з'окрема. Та ми знаємо, що з поділу десятка, сотні, тисячі і т. д. на 3 або на 9 зістанеться завсіди 1, отже з кожного доданка зістанеться стільки одиниць, скільки показує його цифра. Це дасть такий «трійковий» або «девятковий» останок:

$$r(n) = a_k + a_{k-1} + a_{k-2} + \ldots + a_1 + a_0.$$

Коли ця сума, тоб-то сума всіх цифр даного числа, подільна на 3 чи на 9, то й саме число подільне тим числом. В противному випадкові воно неподільне.

Нпр. 39876 має суму цифр $3 + 9 + 8 + 7 + 6 = 33$, отже воно подільне на 3, а неподільне на 9. Число 86728 має суму цифр $8 + 6 + 7 + 2 + 8 = 31$, отже воно неподільне ні на 3, ні на 9.

з) Щоби рішити, чи дане число подільне на 11, творимо дві сумі цифр: суму цифр, що стоять на непаристих місцях (одиниці, сотні, десятки тисяч і т. д.) і суму тих цифр, що стоять на паристих місцях (десятки, тисячі, сотні тисяч і т. д.). Коли ріжниця тих двох сум подільна на 11 (отже коли вона є 0, 11, 22,...), тоді число подільне на 11.

Доказ того твердження ведемо подібно, як у попередньому випадкові (див. § 7, впр. 25—26).

Нпр. 586412; перша сума є $2 + 4 + 8 = 14$, друга $1 + 6 + 5 = 12$, а що $14 - 12 = 2$ неподільне на 11, то й дане число неподільне.

48. **Прості числа.** а) Для инших чисел не маємо таких простих і вигідних правил подільности, тому в кожному окремому випадкові треба пробувати цю подільність справжнім діленням. Тут треба би властиво пробувати всі числа, менші від даного. Одначе легко переконатися, що це зайва робота, бо існує межа, на якій ці спроби можна припинити.

Коли число p розкласти на два неоднакові чинники, a і b, і менший із них збільшувати, то рівночасно другий, більший, буде меншати, аж остаточно обидва зійшлись би на одному числі, нпр. c. Тоді мали б ми: $p = c^2$, а звідсіля отримали би: $c = \sqrt{p}$. Отже, коли

пробуємо подільність якогось числа p, то доходимо тільки до межі $\sqrt{p}$ (приблизно, бо чинники мусять бути цілими числами, а корінювання не завсіди можливе).

Щоб отримати повний ряд простих чисел, на це маємо спосіб, званий *ситом Ератостена**). Він полягає в тому, що з природнього ряду чисел викидаємо всі числа, подільні на 2 (отже кожне друге число), далі всі, подільні на 3 (кожне третє число), потім кожне п'яте (бо на 4 подільні тільки ті числа, які перше показалися подільними на 2), кожне сьоме і т. д. Числа, що залишаться після такого викидання, є вже прості. Отсей спосіб викидання чисел нагадував Ератостенові пересівання зерна ситом, і звідсіля пішла назва його методу.

Замість виписувати всі числа природнього ряду, а потім викидати парисні, ми виписуємо тільки непарисні числа. У нашій табличці зазначені товстішим друком числа прості; побіч зложених, що їх повикидали, у скобках є подані їхні прості чинники.

1	3	5	7	9
2	**3**	**5**	**7**	9 (3)
11	**13**	15 (3, 5)	**17**	**19**
21 (3, 7)	**23**	25 (5)	27 (3)	**29**
31	33 (3, 11)	35 (5, 7)	**37**	39 (3, 13)
41	**43**	45 (3, 5)	**47**	49 (7)
51 (3, 17)	**53**	55 (5, 11)	57 (3, 19)	**59**
61	63 (3, 7)	65 (5, 13)	**67**	69 (3, 23)
71	**73**	75 (3, 5)	77 (7, 11)	**79**
81 (3)	**83**	85 (5, 17)	87 (3, 29)	**89**
91 (7, 13)	93 (3, 31)	95 (5, 19)	**97**	99 (3, 11)
101	**103**	105 (3, 5, 7)	**107**	**109**
111 (3, 37)	**113**	115 (5, 23)	117 (3, 13)	119 (7, 11)
121 (11)	123 (3, 41)	125 (5)	127	129 (3, 43)
131	133 (7, 19)	135 (3, 5)	**137**	**139**

Таким робом у нашому ситі залишились ось які прості числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139 і т. д.

*) Грецький математик і філолог *Ератостен* із Кирини (276—194 до Хр.) був бібліотекарем Олександрійського музею. Він відомий своїми спробами мірянна землі та багатьома иншими цікавими проблемами. Його «сито» (*cribrum*) — це дуже примитивний метод, але до сьогодня ми не маємо иншого способу для винахождення всіх можливих простих чисел.

Прості числа розсіяні в природньому ряді дуже неправильно; це одне з найважніших завдань вищої математики, дошукуватись у цьому розміщенні правильностей, але воно ще далеко не рішене вповні. Прості числа чимраз рідші; найбільше їх у першій сотні, бо 25, у другій їх уже менше, бо тільки 17. У першій тисячі простих чисел є 168, у першому міліоні 78.498. Найбільше досі відоме число є 2 305 843 009 213 693 451.

Одначе немає сумніву, що колись знайдуться ще більші прості числа, бо взагалі *ряд простих чисел необмежений*. Отсю правду знав уже старинний математик *Євклід**). Її легко доказати.

Приймім на хвилину, що наше твердження неправдиве, та що на якомусь числі p кінчається ряд простих чисел, отже всі більші від нього числа мусять бути зложені. Утворім тепер таке число:

$$N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p) + 1,$$

т. зн., возьмім добуток усіх простих чисел, від 2 аж до p, і додаймо до нього 1. Це число буде або просте, бо коли його ділити на числа 2, 3,....., то завсіди лишиться остаток 1, — або подільне якимось простим числом, більшим від p. В обох випадках воно не буде найбільшим простим числом, а це суперечить нашому засновкові, що на числі p ряд простих чисел кінчається. Значить, Євклідове твердження правдиве.

Тут маємо приклад т. зв. «непрямого» або «посереднього» доказу. Він лежить у тому, що ми приймаємо правдивим твердження як раз протилежне до того, яке хочемо доказати, і переконуємося, що такий засновок недорічний. Тим самим доказуємо, що наше перше твердження правдиве.

49. **Розклад чисел і многочленів на прості чинники.** а) Дане число розкладаємо на чинники так, що пишемо його як добуток усіх його чинників. До того ділимо його на всі числа, менші від нього, на які воно подільне.

Практично переводимо це так, що ділимо дане число найменшим простим чинником, який воно має (отже на 2, 3, 5,...), так довго, як це можливе, а тоді підступаємо до наступного більшого простого числа, аж поки не дійдемо до повного розкладу.

Нпр. розкласти на чинники число 908 424.

---

*) *Євклід*, побіч Архимеда й Ератостена найзамітніший математик класичної доби, жив у III. ст. до Хр. і дав початок т. зв. «Олександрійській школі», яка перетрівала 9 століть і мала незвичайно велике значіння для науки тої доби. — Євклід був автором великого математичного твору, відомого під назвою «Основи» (по грецьки «*Στοιχεῖα*», в латинському перекладі «*Elementa*»). У них у 13 книгах зібране все, що до того часу люде знали з обсягу математики. Вартість його твору така велика, що на неї опірались математики до недавніх часів мов на євангеліе, особливо щодо основ геометрії. (В англійських школах іще досі вчать геометрії з перекладів Євкліда).

Воно паристе, отже ділимо його на 2:

908 424 : 2 = 454 212	ця частка париста, тому повторюємо ділення на 2;
454 212 : 2 = 227 106	ділимо на 2 втретє;
227 106 : 2 = 113 553	ця частка вже непариста, але подільна на 3, бо 1 + 1 + 3 + 5 + 5 + 3 = 18;
113 553 : 3 = 37 851	це число знову подільне на 3, бо 3 + 7 + 8 + 5 + 1 = = 24;
37 851 : 3 = 12 617	це число вже на 3 неподільне, бо 1 + 2 + 6 + 1 + 7 = = 17.

Число 12617 в обсягу малих чисел не має вже простих чинників; тому йдемо далі аж до межі $\sqrt{12\,617}$, отже недалеко числа 112. Значить, нам треба перепробувати всі числа прості від 5 до 109, аж поки не натрапимо на можливість розкладу.

Таку можливість знайдемо в числі 11, бо (7 + 6 + 1) — (1 + 2) = = 14 — 3 = 11, отже:

$$12617 : 11 = 1147.$$

Розкладаємо далі це число: межею спроб буде $\sqrt{1147}$, т. зн. 33.

Покажеться, що перед 31 ні одне число не є його чинником, але аж 1147 = = 31 . 37. З того виходить такий розклад:

$$908\,424 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37,$$

отже дане число має такі прості чинники: 2, 3, 11, 31, 37 і з них перший виступає в кубі, а другий у квадраті.

б) Та часами нам треба знати не тільки всі прості, але загалом *усі* чинники даного числа, отже всі можливі числа, на які воно подільне. Робимо це так, що в розкладі на прості чинники творимо всі можливі комбінації згаданих чинників.

Покажемо це на прикладі числа

$$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Це число подільне не тільки на 2, але й на 4 і на 8, а так само на 6 і на 14 і т. д. Щоби знайти *всі чинники* числа 504, виписуємо ряди тих степенів простих чисел, які приходять у розкладі, а кожний ряд зачинаємо одинкою:

1, 2, 4, 8;
1, 3, 9;
1, 7.

Тепер комбінуємо два перші ряди, т. зн. кожний член першого множимо кожним членом другого, отже:

на 1: 1, 2, 4, 8; на 3: 3, 6, 12, 24; на 9: 9, 18, 36, 72.

Коли тепер кожне з тих чисел помножимо числами третього ряду, отже 1 і 7, то крім виписаних тут чисел дістанемо ще:

7, 14, 28, 56; 21, 42, 84, 168; 63, 126, 252, 504.

Загалом маємо тут 4 . 3 . 2 = 24 чисел; инших чинників число 504 не має.

Коли маємо такий розклад:

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots,$$

то виписуємо ряди степенів кожного чинника:

$$1,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^\alpha,$$
$$1,\ b,\ b^2,\ \ldots,\ b^\beta,$$
$$1,\ c,\ c^2,\ \ldots,\ c^\gamma,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

і множимо кожне число одного ряду кожним числом кожного иншого ряду. Це дасть усі можливі чинники числа n. Їхня кількість буде:

$$(\alpha+1)\,.\,(\beta+1)\,.\,(\gamma+1)\ \ldots\ .$$

в) *Одночлени* розкладаємо на чинники так, що пишемо їх як добуток усіх чинників співчинника й головного числа, але ж кожне загальне число мусимо вже по суті річі вважати простим (хіба що за нього підставимо якесь зложене подрібне число).

Нпр. $56a^3bx^2yz = 2^3\,.\,7\,.\,a^3\,.\,b\,.\,x^2\,.\,y\,.\,z$, а з цього розкладу легко отримати ряд *усіх можливих чинників*.

г) Трудніша справа з *многочленами*. Тут перш за все дивимося, чи всі доданки не мають якогось спільного чинника, щоб його добути перед або за скобки.

Нпр.:

$$ax + bx - cx = (a + b - c)x;$$
$$3a^2bc - 6abc^2 + 12ab = 3ab(ac - 2c^2 + 4).$$

Одначе часто ще й той многочлен, що зістався у скобках, у свою чергу може бути зложений, якщо він повстав через помноження двох инших многочленів. У такому разі розклад на чинники часами буває дуже трудний.

Повним рішенням того питання займається теорія рівнянь вищих ступінів.

У простіших випадках можемо довершити цей розклад при допомозі взірців, які знаємо з множення.

Пригадаймо собі деякі такі взірці з уступу 30 і обернім їх. Це дасть такі розклади:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b);$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2;$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2);$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2);$$
$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)\,(a^2 + b^2) = (a - b)\,(a + b)\,(a^2 + b^2);$$
$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)\ (a^2 - ab + b^2);$$

тут $a^4 - b^4$ розкладено на два способи; третій розклад отримаємо, коли вимножимо два другі чинники другого розкладу:

$$a^4 - b^4 = (a - b)\ (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Далі легко переконатися через справжнє вимноження, що:

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$$
$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4),$$

зате ж многочлена $a^6 - b^6$ можна розкласти на два способи, а саме: коли a^6 і b^6 вважатимемо квадратами чисел a^3 та b^3, матимемо:

$$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3),$$

а що тут обидва чинники в свою чергу зложені, то:

$$a^6 - b^6 = [(a + b)(a^2 - ab + b^2)] \cdot [(a - b)(a^2 + ab + b^2)].$$

Коли ж напишемо: $a^6 = (a^2)^3$ і $b^6 = (b^2)^3$, то буде:

$$a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4),$$

а цей самий взірець отримаємо, коли вимножимо обидва перші й обидва другі чинники у гранчастих скобках попереднього взірця.

Остаточно матимемо ще й таке:

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5).$$

Зате ж розклад $a^6 + b^6$ можливий тільки так:

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2) \cdot (a^4 - a^2b^2 + b^4),$$

а обидва його чинники вже прості.

Взагалі ж мусимо завважити, що многочлени $a^2 + b^2$, $a^4 + b^4$, $a^8 + b^8$,... де викладниками є степені числа 2, — *прості*.

д) Часто треба до многочлена добре придивитися, щоб його можна розкласти.

Нпр. (1). $9x^4y^2 - 25x^2y^4$ можна написати так: $9x^4y^2 = (3x^2y)^2$, $25x^2y^4 = (5xy^2)^2$, отже $9x^4y^2 - 25x^2y^4 = (3x^2y - 5xy^2) \cdot (3x^2y + 5xy^2)$, або теж:
$9x^4y^2 - 25x^2y^4 = x^2y^2(9x^2 - 25y^2) = x^2y^2(3x - 5y)(3x + 5y)$.
(2). $4m^8 - 12m^4n^2 + 9n^4 = (2m^4)^2 - 2(2m^4) \cdot (3n^3) + (3n^2)^2 = (2m^4 - 3n^2)^2$.

е) Врешті можна такий розклад часами перевести після кількох спроб, а саме так, що до многочлена додамо й віднімемо від нього ту саму величину.

Нпр.: $A = 6x^2 - xy - 15y^2$.

Коли тут середущий член представимо так: $-xy = 9xy - 10xy$, отримаємо: $A = 6x^2 + 9xy - 10xy - 15y^2$. З двох перших і двох других доданків можемо добути перед дужки їхні спільні чинники:

$$A = 3x(2x + 3y) - 5y(2x + 3y),$$

а ці два члени мають знову за спільний чинник двочлен $2x + 3y$, так що буде:

$$A = 6x^2 - xy - 15y^2 = (3x - 5y)(2x + 3y).$$

Та часом усі спроби не помагають і показуються даремними, і многочлена неможна розкласти на чинники; тоді він зветься *простим*.

Нпр. простими є такі многочлени: $x^2 + 1$, $x^2 + 2$, $x^2 + x + 1$, $x^3 + x^2 + x + 1$, $x^2 + y^2 + z^2$ і т. д.

с) Для подільности многочленів важне таке *твердження:*

Коли в многочлені, який є функцією одної змінної x — назвім його $f(x)$ — підставимо за яку небудь вартість k, то ріжниця двох вартостей того многочлена, обчислених для вартостей аргументів x і k, буде подільна на $x - k$.

Доказ. Упорядкуймо многочлен $f(x)$ спадом:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0;$$

тоді буде для $x = k$:

$$f(k) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2}k^{n-2} + \ldots + a_3k^3 + a_2k^2 + a_1k + a_0,$$

а ріжниця тих двох вартостей буде:

$$f(x) - f(k) = a_n (x^n - k^n) + a_{n-1} (x^{n-1} - k^{n-1}) + a_{n-2} (x^{n-2} - k^{n-2}) + a_3 (x^3 - k^3) + a_2 (x^2 - k^2) + a_1 (x - k).$$

Кожна з ріжниць, що стоять у дужках, подільна на $x - k$, отже й ріжниця $f(x) - f(k)$, буде в свою чергу подільна тим числом, бо це сума величин, подільних на $x - k$.

50. **Спільні чинники кількох чисел.** а) Два або більше чисел можуть мати спільні чинники, як ми це вже бачили. Між тими спільними чинниками є завсіди один *найбільший; це добуток инших спільних чинників* і він грає в аритметиці дуже важну ролю.

Щоб його знайти, мусимо, очевидно, розкласти дані числа на прості чинники й шукати між ними спільних.

Нпр. дані числа 84, 96 і 126. Їхні розклади є:

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7,$$
$$96 = 2^5 \cdot 3,$$
$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7,$$

отже найбільший спільний чинник тих трох чисел буде $2 \cdot 3 = 6$. Пишемо це так:

$$\Delta\ (84,\ 96,\ 126) = 6.$$

(Δ —це грецьке велике «Д», на означення латинського слова «*divisor*» = дільник).

Найбільший спільний чинник одночленів $8x^2yz^3$, $12xyz^3$ та $26x^3y^4z^5$ буде:

$$\Delta\ (8x^2yz^3,\ 12xyz^3,\ 26x^3y^4z^5) = 2xyz^3.$$

Легко провірити, що:

$$\Delta\ (a^2 - b^2,\ a^2 + 2ab + b^2) = a + b.$$

Спільні чинники кількох чисел звуться також *їхньою спільною мірою*, бо коли уявимо собі, що всі ці числа представлені відтинками, то їх можна «зміряти» відтинком, який міститься у всіх тих даних відтинках.

Числа, що не мають крім 1 иншого спільного чинника, звуться *неспівмірними*.

Нпр. числа 24, 30 і 35 мають парами спільні чинники: $\Delta(24,\ 30) = 6$, $\Delta\ (30,\ 35) = 5$, але всі три разом вони неспівмірні: $\Delta\ (24,\ 30,\ 35) = 1$.

б) *НСМ* (т. зн. «найбільшу спільну міру») двох чисел або двох многочленів можна шукати теж способом, що зветься *ланцюговим діленням (діленням Евкліда)*.

Нехай будуть A і B дані числі, при чому $A>B$. Коли поділимо A на B, отримаємо частку Q й останок R_1, який мусить бути менший від B:

$$\frac{A}{B} = Q_1 + \frac{R_1}{B}, \text{ отже } A = BQ_1 + R_1 \qquad (R_1<B).$$

Коли тепер далі поділимо B на R_1, отримаємо знову частку Q, і останок R_2:

$$\frac{B}{R_1} = Q_2 + \frac{R_2}{R_1}, \text{ отже } B = R_1Q_2 + R_2 \qquad (R_2<R_1).$$

Повторюючи так ділення останків попереднього наступним, отримаємо ряд часток Q_1, Q_2, . . . і ряд останків R_1, R_2, . . ., при чому кожний дальший останок буде менший від попереднього. З того виходить, що ряд останків мусить колись дійти до 0, бо останки — це цілі, додатні числа, які завсіди меншають. Нехай $(n+1)$-ий останок буде нулем, тоді матимемо такий ряд рівнянь:

$$\begin{aligned}
\frac{A}{B} &= Q_1 + \frac{R_1}{B}, && \text{отже:} && A = BQ_1 + R_1,\\
\frac{B}{R_1} &= Q_2 + \frac{R_2}{R_1}, && \text{отже:} && B = R_1Q_2 + R_2,\\
\frac{R_1}{R_2} &= Q_3 + \frac{R_3}{R_2}, && \text{отже:} && R_1 = R_2Q_3 + R_3,\\
\frac{R_2}{R_3} &= Q_4 + \frac{R_4}{R_3}, && \text{отже:} && R_2 = R_3Q_4 + R_4,\\
&\cdots && && \\
\frac{R_{n-2}}{R_{n-1}} &= Q_n + \frac{R_n}{R_{n-1}}, && \text{отже:} && R_{n-2} = R_{n-1}Q_n + R_n,\\
\frac{R_{n-1}}{R_n} &= Q_{n+1}, && \text{отже:} && R_{n-1} = R_nQ_{n+1}, \text{ бо тут } R_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Звідсіля бачимо, що R_{n-1} подільне на R_n. Коли вартість за R_{n-1} із останнього рівняння вставимо в передостаннє, отримаємо:

$$R_{n-2} = R_nQ_{n+1}Q_n + R_n = R_n(Q_{n+1}Q_n + 1) = R_nT_n,$$

а що Q_{n+1} і Q_n — цілі числа, то й T_n мусить бути цілим числом. З того бачимо, що R_{n-2} також подільне на R_n. Далі так само покажеться, що кожний із попередніх останків подільний на R_n, отже також R_2 і R_1, а тим самим числа A і B подільні на R_n.

З того виходить, що *НСМ* чисел A і B — це останній дільник R_n. Коли дійдемо до $R_n = 1$, тоді кажемо, що ці два числа неспівмірні; спільну міру вони мають тільки тоді, коли останній останок $R_n > 1$.

Нпр. пара чисел $A = 4680$ і $B = 3585$ дасть такий ряд ділень і останків:

$$\begin{array}{rl}
A : B = 4680 : 3585 = 1 & \\
\underline{3585} & \\
R_1 = 1095 & \\
B : R_1 = 3585 : 1095 = 3 & \\
\underline{3285} & \\
R_2 = 300 & \\
R_1 : R_2 = 1095 : 300 = 3 & \\
\underline{900} & \\
R_3 = 195 & \\
R_2 : R_3 = 300 : 195 = 1 & \\
\underline{195} & \\
R_4 = 105 & \\
R_3 : R_4 = 195 : 105 = 1 & \\
\underline{195} & \\
R_5 = 90 & \\
R_4 : R_5 = 105 : 90 = 1 & \\
\underline{90} & \\
R_5 = 15 & \\
R_5 : R_6 = 90 : 15 = 6 & \\
\underline{90} & \\
0 & \\
= &
\end{array}$$

Останнім дільником є 15, і це справді *НСМ* чисел 4680 і 3585, бо:

$$4680 = 312 \cdot 15, \qquad 3585 = 239 \cdot 15,$$

а числа 312 і 239 неспівмірні ($312 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, а 239 — число просте). Більшої спільної міри ці числа не мають.

Коли A і B — многочлени, тоді неможливо говорити, що один із них більший, а другий менший; тоді можемо тільки завважити, що при черговому діленні останків їхні степені будуть меншати й остаточно зійдуть до нуля, тоб-то отримаємо постійне число. Останній дільник є *НСМ* даних многочленів. Коли він постійне число, тоді ці два многочлени неспівмірні (подібно як при числах, коли $R_n = 1$). Нпр. многочлени:

$$A = x^5 - 13x^3 + 2x^2 + 26x + 12, \quad B = x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 6x - 4$$

ведуть до такого ряду ділень:

$$\begin{array}{l}
A : B = (x^5 \ * \ - 13x^3 + 2x^2 + 26x + 12) : (x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 6x - 4) = x - 5 \\
\quad \pm x^5 \pm 5x^4 \pm 4x^3 \mp 6x^2 \mp 4x \\
\hline
\qquad - 5x^4 - 17x^3 + 8x^2 + 30x + 12 \\
\qquad \mp 5x^4 \mp 25x^3 \mp 20x^2 \pm 30x \mp 20 \\
\hline
R_1 = \qquad + 8x^3 + 28x^2 \qquad - 8 = 4(2x^3 + 7x^2 - 2).
\end{array}$$

Для дальшого ділення чинник 4 в R_1 пропускаємо, бо він не є дільником

многочлена B, отже нічого не змінює на річі. Зате B множимо на 2, щоб можна його найвищий член ділити найвищим членом із R_1, отже виконуємо ділення:

$$2B : \frac{R_1}{4} = (2x^4 + 10x^3 + 8x^2 - 12x - 8) : (2x^3 + 7x^2 - 2) = x + \frac{3}{2}$$

$$\pm 2x^4 \pm 7x^3 \qquad \mp 2x$$

$$+ 3x^3 + 8x^2 - 10x - 8$$

$$\pm 3x^3 \pm \frac{21}{2}x^2 \qquad \mp 3$$

$$R_2 = -\frac{5}{2}x^2 - 10x - 5 = -\frac{5}{2}(x^2 + 4x + 2),$$

одначе й тут дробові співчинники не повинні нас бентежити, бо їх можна добути перед дужки й ми за найближчий дільник беремо $x^2 + 4x + 2$:

$$\frac{R_1}{4} : \left(-\frac{R^2}{\frac{5}{2}}\right) = (2x^3 + 7x^2 \quad * - 2) : (x^2 + 4x + 2) = 2x - 1.$$

$$\pm 2x^3 \pm 8x^2 \pm 4x$$

$$- x^2 - 4x - 2$$

$$\mp x^2 \mp 4x \mp 2$$

Тут ділення сходить, отже останній дільник $x^2 + 4x + 2$ — це *НСМ* даних многочленів. Так отже маємо такий ряд рівнянь:

$$x^5 - 13x^4 + 2x^2 + 26x + 12 = (x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 6x - 4)(x - 5) + 4(2x^3 + 7x - 2);$$

$$2(x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 6x - 4) = (2x^3 + 7x^2 - 2)(x + \tfrac{3}{2}) - \tfrac{5}{2}(x^2 + 4x + 2);$$

$$2x^3 + 7x^2 - 2 = (x^2 + 4x + 2)(2x - 1).$$

Тепер виконуємо підставлення взад, т. є. останній розклад вставлюємо в середуще рівняння, а потім у перше:

$$2(x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 6x - 4) = (x^2 + 4x + 2)\left[(2x - 1)(x + \tfrac{5}{2}) - \tfrac{3}{2}\right] =$$

$$= (x^2 + 4x + 2) \cdot (2x^2 + 2x - 4),$$

отже:

$$B = x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 6x - 4 = (x^2 + 4x + 2)(x^2 + x - 2)$$

(тут бачимо, що дробові співчинники, а так само зайвий чинник 2, яким ми множили B, відпадають). Врешті буде:

$$A = x^5 - 13x^4 + 2x^2 + 26x + 12 = B(x - 5) + 4(2x^3 + 7x - 2) =$$

$$= (x^2 + 4x + 2)(x^3 - 4x^2 + + x - 6),$$

отже справді обидва наші многочлени мають спільний чинник $x^2 + 4x + 2$.

51. **Спільні многократі кількох чисел.** а) Побіч спільних чинників важні також *спільні многократі кількох чисел*, т. зн. такі числа, що їх можна поділити даними числами.

Нпр. числа 8 і 12 мають спільну многократь 48, бо це число подільне на 8 і на 12.

Добуток двох даних чисел a і b, т. зн. $p = ab$, буде, очевидно, спільною многократтю тих чисел. З неї можна отримати безліч инших, коли будемо множити всякими иншими числами; кожне число форми kab подільне і на a і на b.

Особливе значіння має *найменша спільна многократь двох або більшої кількости чисел* (*нсм* або *v*). Вона не мусить бути їхнім добутком, бо хоч нпр. 8 . 12 = 96 є спільною многократтю тих чисел, то проте вже половина того добутку є теж спільною многократтю. Що більше: навіть четвертина числа 96, тоб-то 24, — теж спільна многократь, тим разом уже найменша.

Щоб знайти *нсм* якихось чисел, розкладаємо їх усі на прості чинники й беремо всі їхні чинники, кожний із *найвищим викладником*, із яким він виступає в кожному з даних чисел, отже всі спільні й неспільні чинники тих чисел. А що їх беремо з усіх чисел тільки один раз, то через те позбуваємося в добутку зайвих спільних чинників.

У нашому прикладі, $8 = 2^3$ і $12 = 2^2.3$, мусимо число 2 взяти з викладником 3, а число 3 з викладником 1, отже:

$$v(8, 12) = 2^3.3 = 24.$$

Коли одне з даних чисел є многократтю котрогось другого, то те менше число скреслюємо, бо кожна многократь того більшого числа є також його многократтю.

Нпр. із поміж чисел 3, 4, 8 і 12 можна викинути числа 3 і 4, бо вони обидва містяться в 12, отже кожна многократь того числа є також многократтю чисел 3 і 4.

б) Коли дано два числа, то часами вигідно нам шукати їхньої *нсм* таким способом, що одне з тих чисел (звичайно менше) множимо по черзі на числа природнього ряду так довго, аж поки не натрапимо на таку многократь, яка є рівночасно многократтю другого числа.

Нпр., дано 16 і 20; ряд многократей першого числа є: 16, 32, 48, 64, 88; це останнє число є рівночасно многократтю числа 20, і це *нсм* тих двох чисел, бо ні одна з попередніх многократей не подільна на 20.

Із розкладу чисел 84, 96, 126, т. зн.:

$$84 = 2^2 . 3 . 7,$$
$$96 = 2^5 . 3,$$
$$126 = 2 . 3^2 . 7,$$

бачимо відразу, що

$$v\,(84, 96, 126) = 2^5.3^2.7 = 2016.$$

Врешті:

$$v(8x^2yz^2,\ 12xy^2z^3,\ 26x^3y^4z^5) = 312x^3y^4z^5,$$

бо *нсм* співчинників є $v(8, 12, 26) = 2^2.3.13 = 312$.

в) Відноситься те саме й до *многочленів*. Коли їх розкладаємо на прості чинники, то для *НСМ* беремо їхні *спільні* чинники з *найнижчими*, а для *нсм* — всі чинники з *найвищими* викладниками, з якими вони виступають у розкладі.

Нпр. дано:

$$1-x^2,\quad 1+x^3,\ 1-x^4.$$

Їх розкладаємо так:

$$1-x^2=(1+x)(1-x),$$
$$1+x^3=(1+x)(1-x+x^2),$$
$$1-x^4=(1+x)(1-x)(1+x^2),$$

отже:

$$\begin{aligned}\mathit{Д}(1-x^2,\quad 1+x^3,\quad 1-x^4) &= 1+x,\\ \nu\,(1-x^2,\quad 1+x^3,\quad 1-x^4) &= (1+x)(1-x)(1+x^2)(1-x+x^2)\\ &=(1-x^2)\ .\ (1+x^2)(1-x+x^2)\\ &=\quad (1-x^4)\ .\ (1-x+x^2)\\ &= 1-x+x^2-x^4+x^5-x^6.\end{aligned}$$

ВПРАВИ.

1. Котрі з даних чисел подільні на:
а) **2**, **4**, **8**, : 74, 78, 137, 512, 864, 1328, 2366, 6524, 7126, 5532;
б) **3**, **9** : 619, 832, 1276, 3222, 4031, 7297, 15678, 18439, 32521, 41000, 62001, 83659;
в) **11**: 618, 825, 964, 1034, 2792, 7658, 8692, 10411, 12890, 22667.

2. Рішити, котрі з даних чисел прості, а котрі зложені: 811, 1033, 2751, 3397, 4573, 6001, 7009, 10001, 28653, 46333.

3. Розкласти на прості чинники такі числа: 360, 420, 760, 810, 1000, 2058, 2524, 3296, 4096, 8192, 10308, 12594, 15875, 24325, 36000; знайти *всі можливі* чинники тих чисел та подати їхню кількість.

4. Розложити на прості чинники такі многочлени: $36a^4 - 49b^2$; $512x^3y^6 - 343x^6y^9$; $64m^4n^8 + 208m^3n^7 + 169m^2n^6$.

5. Виставити перед або за скобки спільні чинники таких многочленів: $5x^2 + 3xy$; $6x^4 + 15x^3y + 9x^2y^2$; $24a^4x^9 - 8a^6x^3$; $7x^8y^9z^{10} + 14x^9y^{10}z^{11} + 21x^{10}y^{11}z^{12}$.

6. Знайти *НСМ* і *нсм* таких чисел: 1938 і 4845; 385 і 126; 180 і 264; 224, 792 і 1400; 663 і 527; 1311 і 7429; 3144, 6217 і 8784; 10560, 17472 і 18304; 9, 99, 999 і 9999; 11, 111, 1111 і 11111; 11, 101, 1001 і 10001.

7. Знайти *НСМ* і *нсм* таких многочленів:
$x^3 + 4x^2 - 6x - 12$ і $x^2 + 3x - 10$; $x^3 + 6x^2 + 6x - 8$ і $x^2 + 3x - 4$;
$a^3 - 6a^2 + 7a + 4$ і $a^2 - 5a + 4$; $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ і $x^3 - x^2 - x - 2$;
$x^4 + x^3 + x^2 - x - 2$ і $2x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 3$;
$2a^3 - a^2b + 2ab^2 - b^3$ і $4a^3 - 2a^2b - 2ab^2 + b^3$;
$a^4 + 2a^3b + a^2b^2 - 3ab^3 - b^4$ і $a^3 - 2a^2b + 2ab^2 + b^3$.

8. Обчислити такі частки й поробити висновки що до подільности:

$$\frac{a^2-b^2}{a+b};\ \frac{a^2-b^2}{a-b};\ \frac{a^2+b^2}{a+b};\ \frac{a^2+b^2}{a-b};\ \frac{a^3-b^3}{a-b};\ \frac{a^3-b^3}{a+b};\ \frac{a^3+b^3}{a-b};\ \frac{a^3+b^3}{a+b};$$

$$\frac{a^4-b^4}{a-b};\ \frac{a^4-b^4}{a+b};\ \frac{a^4-b^4}{a^2-b^2};\ \frac{a^4-b^4}{a^2+b^2};\ \frac{a^4+b^4}{a+b};\ \frac{a^4+b^4}{a-b};\ \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2};\ \frac{a^4+b^4}{a^2-b^2}.$$

9. Доказати такі твердження:

а) Кожне паристе число можна написати у формі $2n$, кожне непаристе у формі $2n + 1$ або $2n - 1$.

б) У ряді паристих чисел стоять на переміну числа подільні й неподільні на 4.

в) Кожне число, подільне на 4, має форму $4n$; число, неподільне на 4, може мати одну з трох форм: $4n + 1$, $4n + 2$ і $4n + 3$ (або $4n - 1$, $4n - 2$, $4n - 3$); доказати, що одне й те саме число можна представити у формі $4n + 3$ або $4n - 1$; знайти інші форми, що відповідають одна одній.

г) Кожне просте число мусить мати форму $6n + 1$ або $6n - 1$; виїмок творять тільки числа 2 і 3.

д) Із трох сусідніх чисел природнього ряду одне мусить бути подільне на 3.

е) Добуток чотирох сусідніх чисел природнього ряду подільний на 2, 3, 4, 6.

10. Доказати, що кожне число форми $10^c - 1$ подільне на 9 завсіди, а на 11 тоді, коли в ньому кількість цифр (т. зн. c) парista.

11. У числах 367*, 26*73, 46*2, 56*, 15*64, 276*85 заповнити місця зірок цифрами так, щоби ці числа стали подільні на 2 або на 3, 4, 5, 6, 8, 9. Коли це взагалі неможливе?

12. Двоє людей одночасно зачинає переписувати нову сторінку; один потрібує на переписання сторінки 24^m, другий 30^m. Коли вони вдруге будуть рівночасно зачинати нову сторінку?

13. Із одеської пристані виїзджає що 12 днів почтовий пароплав, а що 28 днів поспішний пароплав. 1 січня виплили обидва пароплави одночасно; коли повториться вдруге їхній одночасний відплив? Скільки разів на рік таке повториться?

14 а) Число, в якому сума всіх подільників (включуючи сюди 1) рівна тому числу, зветься *досконалим*. Нпр. 6 є досконалим числом, бо воно має подільники 1, 2, 3, а їхня сума є $1 + 2 + 3 = 6$. Так само 28.

Доказати, що коли число форми $2^{n+1} - 1$ є просте, то число $2\,(2^{n+1} - 1)$ є досконале (правило Евкліда). Подати кілька перших досконалих чисел.

б) Два числа творять пару *дружніх чисел*, коли сума подільників одного з них рівна сумі подільників другого (до подільників включуємо 1). Нпр. 220 і 284 є парою дружніх чисел.

Доказати, що такі числа творять дружні пари: 18416 і 17296; 9437056 і 9363584; 10744 і 10856; 63020 і 76084.

15. Шукати правил подільности в ріжних недесяткових числових укладах.

§ 9. Дробові числа.

51. **Дробові одиниці.** а) Ми схарактеризували ділення як дію, обернену відносно множення; з того виходить, що його можемо виконувати тільки в тих випадках, які повстали справді з множення. В инших випадках ділення неможливе, отже при обернених діях не маємо такої свободи рухів, як при прямих; це вже другий такий випадок. Щоби здобути собі цю свободу, мусимо завсіди рішитися на сміливий крок: сотворити собі новий рід чисел, який дозволить нам переводити кожну дію без застережень.

Щоб могти поділити якесь число тоді, коли воно не повстало з множення, треба вміти перевести цей поділ на його складових частинах, тоб-то на одиницях. Звідсіля виходить, що ці нові числа треба вводити як вислід ділення одиниці.

Одиниці, як складник, із якого твориться число, самої по собі вже не можна далі ділити; одначе ми тут *поширюємо обсяг наших чисел тим, що ділимо одиницю на частини.* Частина одиниці буде тепер для нас грати **ролю нової одиниці** й буде зватися *дробовою одиницею.*

б) Це поширення найкраще порозуміємо на *числовій лінії* (рис. 57):

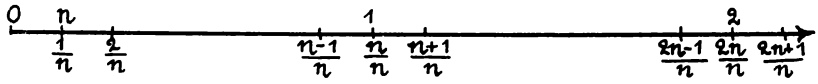


Рис. 57.

Поділім відступ (0,1) на n рівних частин і поназиваймо точки поділу так, щоб нам це нагадувало наше попереднє ділення:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}.$$

Числу 1 буде відповідати нове означення $\frac{n}{n}$, а воно згоджуєть-

ся з нашим попереднім поясненням ($\frac{n}{n} = 1$, формула (10а), уступ 41). Так само поділимо й другу одиницю й матимемо:

$$\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \frac{n+3}{n}, \ \dots \ , \frac{2n-1}{n}, \frac{2n}{n},$$

так, що знову буде $\frac{2n}{n} = 2$ і т. д.

Через те отримаємо нову числову лінію, подібну до нашої давньої; вона буде від неї ріжнитися тільки тим, що точки поділу засіяні на ній в n разів густіше. Пригадаймо собі, що ми вже раз узагальнювали таким способом числову лінію, а саме тоді, коли розсівали на ній точки a, $2a$, $3a$,... в a разів рідше. Отся подібність робить нам той спосіб впроваджування дробових одиниць більше природнім і звичайним.

в) Тепер нам треба ще ці одиниці ввести *аритметично*.

На числовій лінії перехід від одної точки до сусідньої відбувається через додання одиниці; так було при первісній лінії і на поширеній лінії з одиницями a, отже виведемо його і тут.

Щоб перейти від $\frac{1}{n}$ до $\frac{2}{n}$, треба до одиниці $\frac{1}{n}$ додати другу таку саму одиницю $\frac{1}{n}$, т. зн.

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n},$$

а щоб перейти з a-ої точки до $(a + 1)$-ої, треба знову додати одиницю:

$$\frac{a+1}{n} = \frac{a}{n} + \frac{1}{n}.$$

Таким способом дійдемо до висліду, що

$$\frac{n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{2} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n}}_{n} = n \cdot \frac{1}{n},$$

а що $\frac{n}{n} = 1$, то:

$$n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Рівняння (1) — це **пояснення дробової одиниці:**

Дробова одиниця $\frac{1}{n}$ *— це така величина, що її треба помножити числом* n*, щоб отримати на добуток звичайну одиницю.*

Пояснююче рівняння дробової одиниці буде:

$$nx = 1, \tag{2}$$

а його розвязку напишемо так:

$$x = \frac{1}{n}. \tag{2a}$$

«Звичайна» одиниця є тільки одна: дробових одиниць — безліч, бо ж ми одиницю можемо ділити кожним довільним природнім числом. І в цьому бачимо велику далекосяжність поширення нашого обсягу чисел: одним кроком вводимо відразу необмежену кількість нових родів чисел.

Число n звемо *знаменником дробової одиниці.*

г) Порівняймо дві числові лінії; на одній одиниця нехай буде поділена на a, на другій на b частин; коли $a > b$, тоді на першій лінії буде більше точок поділу, чим на другій, отже на ній вони будуть густіше (рис. 58):

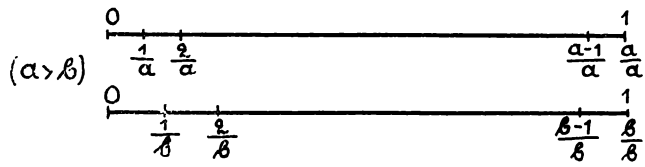


Рис. 58.

Перша точка поділу на першій лінії буде лежати ближче, чим на другій лінії, отже:

$$\text{коли } a > b, \text{ то } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}; \tag{3}$$

дробова одиниця має вартість тим меншу, чим більший її знаменик.

д) Це останнє правило стане ще яснішим, коли дробову одиницю $\frac{1}{n}$ поділимо ще далі на k частин; тоді ціла одиниця буде поділена на nk частин, і ми матимемо:

$$\frac{1}{n} : k = \frac{1}{nk}, \tag{4}$$

отже:

Поділити дробову одиницю — значить те саме, що помножити її знаменика тим дільником.

З того навпаки маємо:

$$k \cdot \frac{1}{nk} = \frac{1}{n}, \tag{5}$$

отже *k дробових одиниць із знаменником nk можна скласти водну, дробову одиницю з знаменником n.*

Коли дробову одиницю будемо ділити щораз то більшим числом її вартість буде меншати, а на числовій лінії відповідна точка буде наближатися до нуля. Висловлюємо це так:

З ростом знаменика вартість дробової одиниці став щораз менша, отже наближається (або *змагає*) *до «межі» нуль*, і пишемо:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{6}$$

lim — читається «limes»; це латинське слово, значить «межа»; отже «limes» числа $\frac{1}{n}$ при «безмежному рості» (знак ∞) числа n є нуль.

53. **Дробові числа.** *Всяку збірку* (суму) *дробових одиниць називаємо дробовим числом;* це так само, як збірку «звичайних» (цілих) одиниць звемо «звичайним», тоб-то цілим числом.

Тут будемо перше збірати дробові одиниці з однаковими знаменниками, а пізніше перейдемо до того випадку, де знаменики ріжні.

Коли додамо a однакових одиниць $\frac{1}{n}$, отримаємо *дріб* (дробове число) $\frac{a}{n}$:

$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{3} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n}}_{n} = \frac{a}{n}$$

або:

$$a \cdot \frac{1}{n} = \frac{a}{n}. \tag{7}$$

Число a звемо *чисельником*, n — *знаменником дробу.*

Коли вартість дробу міститься в обсягу першої одиниці, називаємо його *справжнім;* його чисельник менший від знаменика.

Дріб, що лежить на пограниччі першої одиниці або виходить поза неї, називаємо *несправжнім;* його чисельник рівний знаменикові або більший від нього. Несправжній дріб можна перемінити на *ціле число* так, що поділимо чисельник знаменником. Коли ділення не сходить, залишиться нам поза цілим числом іще якийсь справжній дріб, і таку злуку цілого числа й справжнього дробу називаємо *мішаним числом.*

Нпр. $\frac{38}{7} = \frac{35+3}{7} = \frac{35}{7} + \frac{3}{7} = 5 + \frac{3}{7}$; при подрібних числах можна пропустити знак додавання й написати $5\frac{3}{7}$. Зате при загальних числах так писати не можна, бо нпр. $a\frac{b}{c}$ значило би не $a + \frac{b}{c}$, тільки $a \cdot \frac{b}{c}$.

Несправжні дроби, в яких чисельник є многократтю знаменика, отже які зводяться до цілих чисел, звуться *несластивими;* всі ж инші дроби, які не даються звести до цілих чисел — це *властиві дроби.*

б) Напишім:

$$\frac{a}{n} = \underset{\smile}{\frac{1}{n}} + \underset{\smile}{\frac{1}{n}} + \underset{\smile}{\frac{1}{n}} + \ldots + \underset{\smile}{\frac{1}{n}}$$
$$\quad 1 \qquad\quad 2 \qquad\quad 3 \qquad\qquad\quad n$$

і помножім обидва боки того рівняння на n. Це дасть ліворуч: $n \cdot \frac{a}{n}$, а праворуч буде:

$$n \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \underset{\smile}{\frac{1}{n}} \quad 1$$

$$+ \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \underset{\smile}{\frac{1}{n}} \quad 2$$

$$+ \ldots .$$

$$+ \underset{\smile}{\frac{1}{n}} + \underset{\smile}{\frac{1}{n}} + \ldots + \underset{\smile}{\frac{1}{n}} \quad n$$
$$\quad 1 \qquad\quad 2 \qquad\qquad\quad a$$

а при додаванні стовпцями, а не рядками, отримаємо:

$$\underset{\smile}{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{(1)} + \underset{\smile}{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{(2)} + \ldots . +$$
$$\quad 1 \qquad\quad 2 \qquad\quad n \qquad\quad 1 \qquad\quad 2 \qquad\quad \ldots \qquad\quad n$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{(a)}=$$
$$\underbrace{1}\qquad\underbrace{2}\qquad\qquad\underbrace{n}$$

$$=\underbrace{n\cdot\frac{1}{n}}_{1}+\underbrace{n\cdot\frac{1}{n}}_{2}+\ldots+\underbrace{n\cdot\frac{1}{n}}_{a}$$

$$=\underbrace{1}_{1}+\underbrace{1}_{2}+\ldots+\underbrace{1}_{a}=a,$$

отже б:

$$n\cdot\frac{a}{n}=a. \tag{8}$$

Тут маємо **пояснення дробового числа:** *це таке число, яке, помножене своїм знаменником, дає на добуток чисельник.* З нього отримаємо таке *пояснююче рівняння* для дробу $\frac{a}{n}$:

$$nx=a \tag{9}$$

із розвязкою:

$$x=\frac{a}{n}. \tag{9a}$$

Отся розвязка може бути: (1) *цілим числом*, коли a подільне на n, і тоді ми маємо невластивий дріб, отже *ділення* в первісному значінню слова, — або (2) властивим *дробом*, коли a неподільне на n.

в) Кожному дробові можна надати безліч ріжних видів.

Возьмім пояснююче рівняння (9) для дробу $\frac{a}{n}$ і помножім обидва його боки на k:

$$knx=ka;$$

звідсіля вичитаємо знову, що $x=\frac{ka}{kn}$, отже,

$$\frac{a}{n}=\frac{ka}{kn}, \tag{10}$$

т. зн. *вартість дробу не зміниться, коли його чисельника і знаменика* помножимо одним і тим самим числом.

Ця дія зветься *поширюванням дробу;* ми будемо казати короко, що поширюємо дріб числом k. Її оберненням буде *скорочування дробу:*

$$\frac{a}{n} = \frac{\frac{a}{r}}{\frac{n}{r}}. \tag{11}$$

яке виникає з попереднього, коли дріб в (11) ліворуч поширимо на r, отже: *вартість дробу не зміниться, коли з його чисельника і знаменика викинемо якісь спільні чинники*, або просто: *коли чисельник і знаменик поділимо одним і тим самим числом.*

Коли числом, яким скорочуємо дріб, є *НСМ* чисельника й знаменика, тоді ці два числа стануть *неспівмірні*, і ми матимемо т. зн. *незводильний дріб*, якого вже далі скорочувати не можна. Дріб, що його можна скоротити, назвемо *зводильним.*

Нпр. дріб $\frac{15}{18}$ зводильний, бо його можна скоротити на 3, т. зн. $\frac{15}{18} = \frac{15:3}{18:3} = \frac{5}{6}$, але цей останній дріб уже незводильний.

54. **Порівнювання величини дробів.** а) *З двох дробів, що мають однакові знаменики, більший той, який має чисельник більший*:

$$\text{коли } a > b, \text{ то } \frac{a}{n} > \frac{b}{n}. \tag{13}$$

б) *З двох дробів, що мають однакові чисельники, більший той, який мав знаменик менший:*

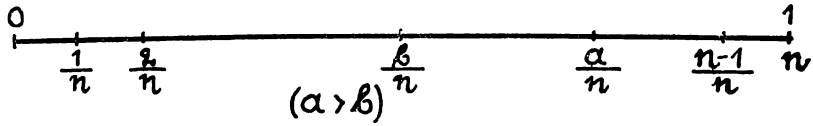


Рис. 59.

$$\text{коли } m > n, \text{ то } \frac{a}{m} < \frac{a}{n}, \tag{14}$$

бо в дробі $\frac{a}{m}$ ділимо число a на більшу кількість частин, чим в $\frac{a}{n}$, отже ці перші частини будуть більші (рис. 59).

в) Врешті, коли хочемо порівнювати дроби, що не мають ні однакових чисельників ні знаменників, мусимо їх «зводити до спільного знаменика», т. зн. поширювати так, щоб їхнім знаменником стала котрась із їхніх спільних многократей.

Нпр.: котрий із двох дробів: $\frac{13}{25}$ і $\frac{19}{35}$ більший?

Ми маємо: $\nu(25, 35) = 175$, отже перший дріб треба поширити на 7, другий на 5, щоби вони отримали однакові знаменики; тоді буде:

$$\frac{13}{25} = \frac{13 \cdot 7}{25 \cdot 7} = \frac{91}{175}; \quad \frac{19}{35} = \frac{19 \cdot 5}{35 \cdot 5} = \frac{95}{175},$$

значить, другий дріб більший.

Коли дані два дроби: $\frac{a}{m}$ і $\frac{b}{n}$, то ми поширюємо перший на n, другий на m і маємо дроби $\frac{an}{mn}$ і $\frac{bm}{mn}$, отже той випадок зводимо до а), в якому треба порівнювати чисельники.

Наше правило можна висловити так:

Із двох дробів є:

$$\frac{a}{m} \underset{<}{\overset{>}{=}} \frac{b}{n},$$

коли:

$$an \underset{<}{\overset{\geq}{=}} bm.^*)$$

55. **Додавання й віднімання дробів.** а) *Дроби з однаковими знаменниками додаємо або віднімаємо так, що додаємо або віднімаємо їхні чисельники, а знаменик зістається без зміни.*

Це виходить просто з пояснення дробів.

Бо нпр.: $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{a} +$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{b} - \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{c},$$

отже:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = \frac{a+b-c}{n}. \tag{15}$$

б) *Дроби з неоднаковими знаменниками мусимо перед додаванням або відніманням звести до спільного знаменика.* За спільний

---

*) Чит: $\frac{a}{m}$ більше від $\frac{b}{n}$, коли an більше від bm; $\frac{a}{m}$ рівне $\frac{b}{n}$, коли і т. д.

знаменик кількох дробів найвигідніше брати *нсм* їхніх знаменників. Коли її знайдемо, треба всі дроби поширити так, щоб вони отримали той спільний знаменик. Після цього виконуємо дію по правилу а).

Нпр.: $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=\frac{an}{mn}+\frac{bm}{mn}=\frac{an+bm}{mn}$.

Як би було дане нпр.

$$A=\frac{a}{3p^2q}+\frac{b}{5pqr}\,\frac{c}{15qr^3},$$

то ми мали би спільний знаменик $\varphi\,(3p^2q,\ 5pqr,\ 15qr^3)=15p^2qr^3$, отже було би:

$$A=\frac{a.5r^3}{\varphi}+\frac{b.3pr^2}{\varphi}-\frac{c.p^2}{\varphi}=\frac{5ar^3+3bpqr^2-cp^2}{15p^2qr^3}$$

Коли до цілого числа маємо додати дріб, перемінюємо перше ціле число на дріб із тим знаменником, що його має другий доданок, а потім обидва дроби додаємо.

Нпр.: $$x+\frac{m}{n}=\frac{nx}{n}+\frac{m}{n}=\frac{nx+m}{n}.$$

Ось тут перечислимо декілька складніших прикладів, у яких знаменниками є зложені многочлени.

(1) $$M=\frac{a}{a^2+2ab+b^2}+\frac{b}{a^2-b^2}.$$

Знаменики є: $n_1=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ і $n_2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, отже: $\varphi(n_1,\ n_2)=(a+b)^2(a-b)$, тому:

$$M=\frac{a\,(a-b)}{\varphi}+\frac{b\,(a+b)}{\varphi}=\frac{a^2-ab+ab+b^2}{\varphi}=\frac{a^2+b^2}{a^3+a^2b-ab^2-b^2}.$$

Отсей дріб незводильний бо його чисельника не можна розкласти на чинники, а знаменик не має чинника a^2+b^2.

(2) $$Q=\frac{1}{1+x}-\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1+x^3}-\frac{x^3}{1-x^3}.$$

Знаменики поодиноких доданків є:

$$\begin{aligned}n_1&=1+x,\\ n_2&=1-x^2=(1+x)(1-x),\\ n_3&=1+x^3=(1+x)(1-x+x^2),\\ n_4&=1-x^4=(1+x)(1-x)(1+x^2),\end{aligned}$$

отже:

$$\begin{aligned}\varphi\,(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)&=(1+x)(1-x)(1+x^2)\,.\,(1-x+x^2)=\\ &=(1-x^2)(1+x^2)\,.\,(1-x+x^2)\\ &=(1-x^4)\,.\,(1-x+x^2)\\ &=1-x+x^2-x^4+x^5-x^6.\end{aligned}$$

Коли введемо цей спільний знаменик, мусітимемо ці дроби поширювати:

перший на $\frac{\varphi}{1+x} = (1-x)\ (1+x^2)\ (1-x+x^2) = 1-2x+3x^2-3x^3+2x^4-x^5$,

другий на $\frac{\varphi}{1-x^2} = (1+x^2)(1-x+x^2) = 1-x+2x^2-x^3+x^4$,

третій на $\frac{\varphi}{1+x^3} = (1-x)\ (1-x+x^2) = 1-x+x^2-x^3$,

четвертий на $\frac{\varphi}{1-x^4} = 1-x+x^2$.

Це дасть таку суму:

$$Q = \frac{1-2x+3x^2-3x^3+2x^4-x^5}{\varphi} - \frac{x(1-x+2x^2-x^3+x^4)}{\varphi} +$$

$$+ \frac{x^2(1-x+x^2-x^3)}{\varphi} - \frac{x^3(1-x+x^2)}{\varphi} = \frac{1-3x+5x^2-7x^3+5x^4-4x^5}{1-x+x^2-x^4+x^5-x^6}$$

І цей дріб незводильний.

(3) $$S = \frac{2}{x^2-6x+8} - \frac{1}{x^2-5x+6}.$$

Щоби знайти *нсм* обох знаменників, треба їх розкласти на лінійні чинники. Ланцюгове ділення покаже, що вони мають спільний чинник $x-2$ і дадуться розкласти так: $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$; $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, отже: $\varphi(n_1, n_2) = (x-2)(x-3)(x-4)$; цього добутку нарочно не вимножуємо. Щоб обидва дроби звести до спільного знаменика, поширюємо перший на $x-3$, другий на $x-4$ і маємо:

$$S = \frac{2\,(x-3)}{\varphi} - \frac{1\,(x-4)}{\varphi} = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{1}{(x-3)(x-4)}.$$

Через те, що ми в знаменику не вимножували чинників, відразу бачимо, що можемо виконати скорочення у висліді.

56. **Множення й ділення дробів цілими числами.** Множення й ділення дробів *цілими числами* не уявляє собою ніяких труднощів, бо це все міститься в обсягу наших дотеперішніх пояснень.

а) Добуток дробової одиниці цілим числом дає дробове число:

$$k \cdot \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n}}_{k} = \frac{k}{n}.$$

б) Добуток дробового числа цілим числом буде:

$$a \cdot \frac{k}{n} = a \cdot k \cdot \frac{1}{n} = (ak) \cdot \frac{1}{n},$$

отже:

$$a \cdot \frac{k}{n} = \frac{ak}{n}. \tag{17}$$

Дріб множимо цілим числом так, що множимо тим числом його чисельник, а знаменик лишаємо без зміни.

Отсей дріб часом можна скоротити; бо навіть коли дріб $\frac{k}{n}$ незводильний, то може трапитись, що a скорочується з числом n. Одначе тоді можна скоротити ці два числа перед множенням, і це богато вигідніше, бо нам приходиться множити менші числа.

Нпр.: $$18 \cdot \frac{5}{24} = \frac{18 \cdot 5}{24} = \frac{90}{24} = \frac{15}{4},$$

або коротше: $$18 \cdot \frac{5}{24} = 3 \cdot 6 \cdot \frac{5}{4.6} = 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4}.$$

в) Дробову одиницю ділити цілим числом уже вміємо (взірець (4)), її знаменником буде добуток попереднього знаменика та дільника:

$$\frac{1}{m} : n = \frac{1}{mn}. \tag{4}$$

г) Подібно ділимо дріб цілим числом. Це значить, що нам треба його розділити на рівні частини, а що дріб — це збірка дробових одиниць, кількість яких подається чисельником, то тут нам треба чисельник поділити тим дільником:

$$\frac{a}{m} : n = \frac{a : n}{m}. \tag{18}$$

Це справді так, бо обернена дія, тоб-то множення, дасть:

$$\frac{a : n}{m} \cdot n = \frac{\frac{a}{n} \cdot n}{m} = \frac{a}{m}.$$

Та це можливе тільки тоді, коли чисельник подільний дільником; коли ж ні, то треба поступати инакше, а саме так: ми знаємо, що:

$$\frac{a}{m} : n = \underbrace{\left(\frac{1}{m}\right)}_{1} + \underbrace{\left(\frac{1}{m}\right)}_{2} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{m}\right)}_{a} : n =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{m} : n\right)}_{1} + \underbrace{\left(\frac{1}{m} : n\right)}_{2} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{m} : n\right)}_{a} = a \cdot \left(\frac{1}{m} : n\right),$$

отже на основі взірців (4) і (17) буде: $\frac{a}{m} : n = a \cdot \frac{1}{mn}$ т. зн.:

$$\frac{a}{m} : n = \frac{a}{mn} . \tag{19}$$

В такому разі чисельник зістається без зміни, а знаменик множимо дільником.

У посередньому випадкові, коли чисельник і дільник мають спільний чинник, цим чинником скорочуємо чисельник і дільник перед діленням.

Нпр.: $\frac{16}{27} : 24 = \frac{16}{27.24} = \frac{2.8}{27.3.8} = \frac{2}{27.3} = \frac{2}{81}$,

або коротше: $\frac{16}{27} : 24 = \frac{2.8}{27} : (3.8) = \frac{2}{27} : 3 = \frac{2}{81}$.

Загалом маємо таке правило:

Дріб ділимо цілим числом так, що ділимо тим числом чисельник, а знаменик лишаємо без зміни, або тим дільником множимо знаменик, а чисельник лишаємо без зміни. Перед множенням дивимося, чи дільник і чисельник дробу не мають спільного чинника; якщо його мають, то ним скорочуємо ці дві числі.

57. **Множення й ділення чисел дробами.** Помножити або поділити число на дріб — це виходить поза рямці наших дотеперішніх пояснень, бо ж згідно з ними множення являлося додаванням якоїсь кількости доданків, а «дробова кількість доданків» — це вислів без змісту. Тому нам треба *поширити пояснення множення на такі випадки*, де множником являється дріб.

а) Щоби знайти найдоцільніше пояснення, звернімся перше до геометричного з'ясування (рис. 60).

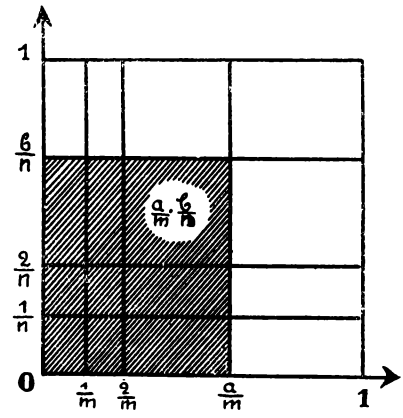


Рис. 60.

Для пояснення множення $\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n}$ відзначуємо на поземній числовій лінії поділку одиниці на m частин, а на сторчовій — поділку

на n частин; через те квадратова одиниця розпадається на mn малих прямокутників, отже величину кожного з них можна означити дробом $\frac{1}{mn}$.

Коли тепер на обох числових лініях відзначимо дроби $\frac{a}{m}$ і $\frac{b}{n}$ візьмемо їх за боки прямокутника, то він міститиме в собі ab таких менших прямокутників, і ми маємо наш добуток, даний дробом $\frac{ab}{mn}$:

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}. \tag{20}$$

б) **Нове пояснення**, що його тут мусимо ввести, буде таке:

Помножити якесь число дробом $\frac{b}{n}$ *значить, помножити його на* b *й поділити на* n, *отже*:

$$A \cdot \frac{b}{n} = (A \cdot b) : n \cdot \frac{Ab}{n}. \tag{21}$$

Иншими словами, помножити число дробом—значить: *знайти дріб того числа.*

Коли A — ціле число, тоді з того взірця бачимо, що $A \cdot \frac{b}{n} = \frac{b}{n} \cdot A$, отже чинники якогось добутку перемінні навіть тоді, коли один із них є не цілим числом, тільки дробом.

Досі закон переміни чинників обов'язував тільки в обсягу цілих чисел.

Коли A — дріб, нпр. $A = \frac{a}{m}$, тоді:

$$A \cdot \frac{b}{n} = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \left(\frac{a}{m} \cdot b\right) : n = \frac{ab}{m} : n,$$

а що на основі (19) є: $\frac{ab}{m} : n = \frac{ab}{mn}$, то взірець (20) справджується.

Значить, наше нове пояснення не йде в розріз із дотеперішніми поясненнями дробових чисел і множенням цілих чисел та геометричним з'ясовуванням множення.

Правило, подане в (20), висловлюємо так:

Дріб множимо дробом так, що чисельник множимо чисельником, а знаменик знаменником.

Скорочення можна переводити або аж у висліді, одначе краще

це робити перед множенням, і тоді *чисельник одного дробу скорочуємо із знаменником другого дробу* (називають те часто «скорочуванням навхрест»).

Нпр.: $\frac{8}{15}\cdot\frac{25}{32}=\frac{8\,.\,25}{15\,.\,32}=\frac{200}{480}=\frac{5}{12}$, або коротше:

$$\frac{8}{15}\cdot\frac{25}{32}=\frac{8}{3\,.\,5}\cdot\frac{5\,.\,5}{4\,.\,8}=\frac{5}{3\,.\,4}=\frac{5}{12}.$$

Коли замість $\frac{a.b}{m.n}$ напишемо $\frac{b.a}{n.m}$, побачимо, що *закон переміни чинників відноситься також до множення дробових чисел.* Так само всі інші закони, що обов'язують при цілих числах, мають значіння і в обсягу дробів, отже й тут бачимо *захованння формальних законів* (див. кінець уст. 35, стр. 61).

в) На основі цього можемо також підносити дроби до квадрату та до кожного иншого степеня. Бо $\left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}$, отже:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{x^2}{y^2}. \tag{22}$$

Дріб квадрувємо так, що квадрувємо з'окрема його чисельник і знаменик.

Подібно буде: $\left(\frac{x}{y}\right)^n=\underbrace{\frac{x}{y}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{x}{y}}_{2}\cdots\underbrace{\frac{x}{y}}_{n}$, отже:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n} \tag{23}$$

Дріб степенюємо так, що степенюємо чисельник і знаменик з'окрема.

г) Правило для *ділення чисел дробами* виведемо так:

Нехай A буде числом, що його маємо поділити дробом, тоді частка $x=A:\frac{b}{n}$ буде дана рівнянням:

$$A=x\cdot\frac{b}{n}=\frac{bx}{n}.$$

Поширім обидва його боки на n:

$$An=bx,$$

а звідсіль отримаємо:

$$x = \frac{An}{b} = A \cdot \frac{n}{b},$$

отже:

$$A : \frac{b}{n} = A \cdot \frac{n}{b}. \tag{24}$$

Звідсіля читаємо:

Поділити якесь число дробом $\frac{b}{n}$ *значить те саме, що помножити його дробом* $\frac{n}{b}$.

Такі дві числі, як $\frac{b}{n}$ і $\frac{n}{b}$, звуться *відворотними*, отже $\frac{n}{b}$ — це *відворотність дробу* $\frac{b}{n}$; їхній добуток є 1:

$$\frac{b}{n} \cdot \frac{n}{b} = \frac{bn}{bn} = 1,$$

отже:

Дві відворотні числі — це такі дві числі, що їхній добуток рівний одиниці.

Відворотність дробу — це теж дріб, в якому чисельник і знаменик переставлені; відворотністю цілого числа k буде дробова одиниця $\frac{1}{k}$, бо: $k \cdot \frac{1}{k} = 1$.

Маючи це пояснення, скажемо коротко:

Поділити якесь число дробом значить те саме, що помножити його відворотністю того дробу.

Тут перед множенням можна виконувати скорочення, а це має велике практичне значіння.

Нпр.: $\frac{6}{25} : \frac{18}{35} = \frac{6}{25} \cdot \frac{35}{18} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 7}{5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{7}{5 \cdot 3} = \frac{7}{15}$.

д) Часто подибуються т. зв. «подвійні дроби», в яких і в чисельнику, і в знаменику виступають у свою чергу дроби, нпр.:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},$$

отже в дробі ні чисельник ні знаменик не мусять бути цілими числами. (Їх звичайно розмежовуємо грубшою рисою). Такі дроби зводимо до простого виду, отже вважаємо, що виписаний подвійний дріб означує ділення:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Перечислимо тут один приклад складнішого ділення дробів:

Обчислити вартість дробу $\frac{A}{B}$, де:

$$A = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}, \quad B = \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^3}.$$

отже:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}}{\frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^3}}.$$

Найвигідніше буде нам виконати перше редукцію дробів A і B з'окрема:

$$A = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x}{1-x^2} - \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2},$$

$$B = \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^3} = \frac{x}{(1-x)(1+x)} - \frac{x^2}{(1-x)\ (1+x+x^2)} =$$

$$= \frac{x\ (1+x+x^2) - x^2\ (1+x)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{x}{(1-x)(1+x)\ (1+x+x^2)};$$

знаменика дробу B нарочно не вимножуємо. Далі:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{2x}{1-x^2}}{\frac{x}{(1-x^2)\ (1+x+x^2)}} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{(1-x^2)\ (1+x+x^2)}{x} = 2\ (1+x+x^2).$$

Проведемо цей приклад далі й провіримо його через підставлення якоїсь числової вартости, нпр. $x = -\frac{1}{2}$; це підставлення зробимо перше в A і B, а потім у $\frac{A}{B}$, і порівняємо обидва висліди:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

$$A = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3};$$

$$\frac{x}{1-x^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{3} = -\frac{2}{3};$$

$$\frac{x^2}{1-x^3} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{9};$$

$$B = \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^3} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{9} = -\frac{8}{9},$$

отже:

$$\frac{A}{B} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{8}{9}} = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{9}{8}\right) = +\frac{3}{2}.$$

З другого боку:

$$\frac{A}{B} = 2(1+x+x^2) = 2\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] = 2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \text{ *)}.$$

58. **Роль нуля при множенні й діленні.** а) Коли в рівнянні

$$(a - b) \cdot k = ak - bk$$

підставимо $b = a$, отже $a - b = 0$, матимемо ліворуч $0 \cdot k$, а праворуч: $ak - bk = ak - ak = 0$, отже:

$$0 \cdot k = 0. \qquad (25а)$$

Так само з $k \cdot (a - b) = ka - kb$ для $a = b$ вийде, що:

$$k \cdot 0 = 0. \qquad (25б)$$

Ці два рівняння говорять, *що добуток двох чисел, із яких нулем, мав вартість нуля.*

Навпаки:

$$0 \cdot k = k \cdot 0 = 0. \qquad (25в)$$

Добуток може стати тільки тоді нулем, коли один із його чинників є нулем.

---

*) *Дроби* належать до дуже давніх здобутків математичного знання. Вже в старогипетській рахунковій книжці *Амеса* (між 2000 і 1700 до Хр.) знаходимо зразки числення дробами та розклад дробів на т. зв. «основні дроби» тоб-то такі, що складаються з самих дробових одиниць), напр.: $^2/_5 = {}^1/_3 + {}^1/_{15} + {}^2/_{95} = {}^1/_{60} + {}^1/_{360} + {}^1/_{570}$. Також греки й інди займалися дробами. — У середніх віках дії дробами належали до найтрудніших аритметичних завдань так, що їм присвячували окремі курси в університетах. На склоні середньовіччя визначились у цьому ділі перш за все австрієць *Георг Пюербах* (*Peuerbach*, 1423—1461) і *Йоганнес Міллер* (1426—1476) із Кенігсбергу, званий тодішнім звичаєм від свого родинного міста «Регіомонтанусом» (*Regiomontanus*). — Дробову рису вів згаданий у § 1 (уст. 12) *Ліонардо Фібоначчі*.

б) Напишім:

$$\frac{a-b}{r} = \frac{a}{r} - \frac{b}{r}$$

і підставмо тут теж $b = a$; це дасть:

$$\frac{0}{r} = 0, \tag{26}$$

отже *нуль, ділений яким-небудь числом, дає на частку нуль.*

в) *Зате нуль не може бути дільником, ані знаменником дробу.* Бо як би частка

$$\frac{p}{0} = a$$

могла належати до знаних нам досі чисел, то ми мали бі $p = 0 \,.\, a = 0$, отже й p мусіло б бути нулем. Коли ж p не нуль, то це ділення не має значіння. Через те виключуємо раз на завсіди ділення нулем та дроби із знаменником нуль, *отже перед кожним діленням загальними числами мусимо провірювати, чи дільник не є нулем**).

Зрозуміємо це краще, коли з'ясуємо собі, як можна дійти до того, щоб дільник став нулем.

Уявім собі, що в діленні $\frac{p}{k}$ або $p : k$ дільник k перебігає ряд дробів: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{100}$.... загально $\frac{1}{n}$. Тоді буде $\frac{p}{k} = p : \frac{1}{n} = pn$, отже частка $p : k$ буде перебігати такий ряд чисел

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots\ 10p,\ \ldots,\ 100p,\ \ldots,\ np,\ \ldots.$$

Чим більше буде n, тим менший ставатиме дільник $\frac{1}{n}$; зате частка буде

---

*) Необережність у цьому відношенні може довести до недорічностей. Так нпр. можемо «доказати» що 30=1 ось яким шляхом:

Нехай буде $a=30$, $b=29$, $c=1$, тоді:

$$a-b=c.$$

Із цього рівняння отримаємо такий ряд перемін:

$$(a-b)\,(a-c) = c(a-c),$$
$$a^2-ab-ac+bc = ac-c^2,$$
$$a^2-ab-ac = ac-bc-c^2,$$
$$a\,(a-b-c) = c\,(a-b-c),$$

а коли ми тут обидва боки поділимо на $a-b-c$, отримаємо:

$$a=c, \text{ тоб-то } 30=1.$$

Недорічність повстає з того, що дільник $a-b-c$ має вартість нуля:

$$a-b-c=30-29-1=0.$$

безмежно зростати; на числовій лінії дроби $k = \frac{1}{n}$ будуть щораз більше наближатись до нуля, отже точки поділу будуть густішати, але зате образи частки $\frac{p}{k}$ будуть усе більше й більше віддалятися від нуля. Напишемо це так:

$$\lim_{k \to 0} \frac{p}{k} = \infty; \tag{27}$$

див. рівн. (6).

Символ «∞» не є знаком для якого небудь-означеного числа; він показує тільки, що лівий бік рівняння росте над усяку міру, отже згодом стане більший, як кожне инше число, яке б ми собі тільки могли подумати; рівночасно вартість дробу $\frac{p}{k}$ стане менша від кожного иншого малого числа, яке б ми тільки собі уявили.

г) Одначе часто трапляється, що і чисельник, і знаменик дробу отримують вартість нуля, тоб-то змагають до тієї межі (стають усе меншими й меншими); тоді дріб приймає т. зв. «неозначений вигляд»: $\frac{0}{0}$. Тоді ми не маємо права сказати, що це число рівне ∞ або рівне 1; коли чисельник і знаменик *одночасно змагають* до межі нуль, то вони остаються обидва *дуже малими числами*, і нам приходиться *порівнювати* їхню величину. Це завдання належить до вищої математики, хоч у деяких випадках можемо його розвязати шкільним способом.

Нпр. коли в дробі $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ змінна x змагає до межі a, тоді він приймає вигляд $\frac{0}{0}$. Одначе ми знаємо, що $x^3-a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$ і $x^2-a^2 = (a-x)(x+a)$, отже:

$$\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2} = \frac{x^2+ax+a^2}{x+a},$$

а цей дріб для $x=a$ приймає вартість $\frac{a^2+a^2+a^2}{a+a} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3}{2}a$,

отже:

$$\lim_{a \to x} \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2} = \frac{0}{0} = \frac{3}{2}a.$$

59. **Числове тіло.** Коли в обсягу цілих додатніх чисел будемо виконувати прямі дії, тоб-то додавання, множення й степенювання, будемо отримувати завсіди числа того самого роду, т. зн. цілі додатні числа.

Коли причислимо сюди якусь обернену дію, нпр. віднімання, то при виконуванні її натрапимо на неможливости. Їх можна буде позбутися так, що до цілих додатніх чисел доберемо ще *цілі від'ємні числа*. Другу обернену дію, ділення, зможемо без обмежень виконувати аж тоді, коли доберемо до цілих чисел іще *дробові числа*.

Загалом же ж, коли матимемо числа: цілі й дробові, додатні й від'ємні, зможемо без обмежень виконувати такі дії: додавання, відпімання, множення,

ділення (з виключенням ділення на нуль) і степенювання, і завсіди будемо отримувати на вислід тільки числа того самого роду.

Такий загал чисел, у якому можна переводити без застережень п'ять згаданих дій, а вислід буде міститися завсіди в обсягу чисел того самого роду, звемо **числовим тілом.**

Отже: *цілі числа й дроби, додатні та від'ємні, творять числове тіло;* його звемо *основним числовим тілом.*

Цілі числа самі про себе, або додатні числа самі про себе, не творять числового тіла; щоб повстало числове тіло, треба сполучити ці роди чисел разом із дробовими та від'ємними числами. З того бачимо, що основне числове тіло — найменше з усіх можливих числових тіл.

Образом основного числового тіла є *числова лінія*, яка простягається безмежно в обидва боки. На ній мають свої місця всі цілі числа і всі дроби. Вона має ту прикмету, що між двома її точками завсіди лежить безліч точок, які знову відповідають числам основного тіла. Висловлюємо це так, що *числова лінія засіяна точками щільно.*

Говорячи по аритметичному, пояснимо це так, що *між кожними двома числами того тіла лежить безліч инших чисел того самого тіла*, отже *основне числове тіло також* **щільне.**

Нпр. між дроби $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3}$ можна вставити безліч дробів ось яким способом: між ними двома лежить число посереднє $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{12}$; і справді: $\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$, $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$, отже $\frac{6}{12}<\frac{7}{12}<\frac{8}{12}$. Між $\frac{1}{2}$ і $\frac{7}{12}$ лежить м. и. число $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\right)=\frac{13}{24}$; між $\frac{1}{2}$ і $\frac{13}{24}$ число $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{13}{24}\right)=\frac{25}{48}$ і т. д., і таке вставлювання можна вести в безконечність.

ВПРАВИ.

1. Звести до найпростішого вигляду такі дроби:

а) $\frac{8}{10}, \frac{18}{24}, \frac{36}{72}, \frac{105}{120}, \frac{210}{280}, \frac{1000}{1200}, \frac{2680}{3680}, \frac{5145}{5835}$;

б) $\frac{427}{549}, \frac{468}{833}, \frac{2387}{4081}, \frac{4023}{6931}, \frac{4367}{9131}, \frac{22075}{31788}$;

в) $\frac{4a^2}{8a^2}, \frac{15a^2bc}{20ab^2c^3}, \frac{72a^4x^3y^2}{84a^2x^4yz}, \frac{32p^2qrs}{48p^3q^2r^3s^4}$;

г) $\frac{5a-5b}{6a-6b}, \frac{a+b}{a^2-b^2}, \frac{a-b}{a^2-b^2}, \frac{4a^2-9b^2}{4a^2+12ab+9b^2}, \frac{9x^2-64y^4}{27x^3-512y^6}$;

д) $\frac{1-a}{a-1}, \frac{3a^5-12a^3}{9a+5a^2+36a}, \frac{2x^3+3x^2+2x-2}{3x^4+6x^3+8x^2+4x+4}$;

е) $\frac{3x^2-2x+1}{3x^2+16x+5}, \frac{x^3-2x^2-2x-1}{2x^3-7x^2+5x-1}$.

2. Котрий дріб більший: $^3/_4$ чи $^{17}/_{19}$? $^8/_{11}$ чи $^{15}/_{23}$? $^{83}/_{96}$ чи $^{101}/_{120}$? $^{76}/_{111}$ чи $^{79}/_{125}$?

3. Впорядкувати по величині такі ряди дробів:

а) $^3/_4, ^5/_6, ^5/_8, ^7/_{12}$; б) $^1/_2, ^4/_9, ^5/_{12}, ^{13}/_{24}$; в) $^6/_{11}, ^8/_{13}, ^{12}/_{17}, ^{14}/_{19}$;
г) $-^1/_2, -^1/_3, +^4/_5, -^7/_{11}, +^5/_{13}, +^8/_{11}$.

---

4. Додати по віршах і стовпцях числа такої таблички:

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{7}{8}+\frac{8}{15}+\frac{11}{45}=?$$
$$\frac{5}{8}+\frac{5}{12}+\frac{31}{36}+\frac{41}{72}+\frac{1}{40}=?$$
$$\frac{8}{9}+\frac{7}{8}+\frac{1}{72}+\frac{8}{27}+\frac{17}{18}=?$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{4}{5}+\frac{1}{6}+\frac{8}{1}=?$$
$$\frac{11}{15}+\frac{7}{90}+\frac{37}{60}+\frac{1}{30}+\frac{7}{10}=?$$
$$?+\ ?+\ ?+\ ?+\ ?=?$$

Чи сума сум поодиноких віршів рівна сумі сум поодиноких стовпців?

5. Виконати такі додавання та віднімання:

а) $\frac{2a}{3}+\frac{5a}{7}-\frac{11a}{14}-\frac{7a}{6}$; б) $\frac{x^2+4x-3}{15}-\frac{x^2+3x-1}{20}$;

в) $\frac{x-1}{10}+\frac{x-5}{15}-x-\frac{x+3}{4}-\frac{x-2}{6}+1$; г) $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$;

д) $1+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{(a-b)^2}$; е) $\frac{(x-y)^2}{4xy}+1$;

є) $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}$; ж) $\frac{2x+4}{x-5}+\frac{x-3}{2x+1}$;

з) $\frac{x}{2x+1}+\frac{2x}{3x+1}+\frac{3x}{4x+1}$; и) $\frac{a}{x+y}+\frac{b}{x+y}-\frac{ax+by}{x^2+y^2}$;

і) $\dfrac{3x+1}{(x+1)(2x-1)} - \dfrac{1}{x+1}$;

к) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{2}{(x+2)(x+3)} + \dfrac{3}{(x+3)(x+1)}$;

л) $\dfrac{m+n}{(n-p)(p-m)} + \dfrac{n+p}{(p-m)(m-n)} + \dfrac{p+m}{(m-n)(n-p)}$;

м) $\dfrac{u^2}{u-v} + \dfrac{v^2}{v-u}$; н) $\dfrac{a}{2b} + \dfrac{b}{2a}$; о) $\dfrac{ma}{nb} + \dfrac{nb}{ma}$; п) $\dfrac{m^3-n^3}{2mn} + \dfrac{m^2+n^2}{m+n}$;

р) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x}{x^2-1}$; с) $\dfrac{x}{yz} + \dfrac{y}{zx} + \dfrac{z}{xy}$; т) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$;

у) $\dfrac{x+y}{z} + \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{z+x}{y}$; ф) $\dfrac{-x+y+z}{x} + \dfrac{x-y+z}{y} + \dfrac{x+y-z}{z}$;

х) $1 + \dfrac{1}{1+x}$; ц) $1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$;

ш) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$;

щ) $\dfrac{1}{3x+5} + \dfrac{2}{9x^2-25}$; ю) $\dfrac{x}{2x^2-x-1} + \dfrac{2x-1}{2x^2+3x+1}$;

я) $\dfrac{2}{4r^2+4r-3} + \dfrac{1}{2r^2-3r+1} - \dfrac{3}{2r^2+r-3}$.

6. Доказати, що: а) $\dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a(x-a)} - \dfrac{1}{2a(x+a)}$;

б) $\dfrac{b+c}{a(a+b+c)} = \dfrac{b}{a(a+b)} + \dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}$.

7. Доказати, що коли числа a і b неспівмірні, то дріб $\dfrac{a+b}{ab}$ незводильний.

8. Доказати, що сума двох незводильних дробів із ріжними знаменниками не може бути цілим числом.

9. Продано перше $7^1/_4 m$ матерії, потім $8^1/_2 m$, а врешті $9^5/_8 m$. Скільки її продано разом?

10. Один кут має $^3/_8$ прямого, другий $^3/_5$ прямого, третій $^7/_{10}$ прямого; яка їхня сума?

11. Збірник води наповнюється одною рурою в 12^h, другою в 8^h, третьою в 9^h. Яка частина збірника наповниться на протязі 1^h всіми трома рурами нараз?

12. Батько залишив спадщину a карб.; найстарший син отримав із того третину, середущий син і дочка по четвертині, а наймолодший син — решту. Скільки припало наймолодшому?

---

13. Виконати такі множення й ділення:

а) $\frac{3a}{4} \cdot 8$; $\frac{5x}{8} \cdot 6$; $\frac{8x^2}{9y^2} \cdot 3y$; $\frac{7a^2xy}{8bz} \cdot 12abxyz$;

б) $\frac{2(a-1)}{3(a+1)} \cdot 6(a^2-1)$; в) $\left(a+3-\frac{2}{a}\right) \cdot (a^2+a+1)$;

г) $\frac{3(x^2+y^2)}{x^2-y^2} \cdot 2(x+y)^2$; д) $\frac{3a}{4} : 6$; $\frac{5x}{6} : 8$; $\frac{4a^3b}{5c} : 2a^2b^2$;

е) $\frac{3(a+b)}{2(a-b)} : (a^2-b^2)$; є) $\frac{3a^3b^3c^4}{8x^2yz^5} : 6a^2x$; ж) $\left(\frac{2a^2}{3b^3}\right)^2$; з) $\left(-\frac{5x^4}{9y^3}\right)^3$;

и) $\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(a-\frac{2}{a}\right)$; і) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$;

к) $\left(\frac{x+2}{3}-\frac{x+3}{2}\right) \cdot \left(\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}\right)$; л) $1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a-b}{a+b}-1\right)$;

м) $\frac{mn}{m-n}\left(1-\frac{n}{m}\right)$; н) $\left(1-\frac{k}{k+1}\right) \cdot \left(2-\frac{1}{k+2}\right)$;

о) $\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1-a}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+a^2}-\frac{1}{1-a^2}\right)$; п) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1}$;

р) $\frac{x-1+\frac{6}{x-6}}{x-1+\frac{3}{x-6}}$; с $\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x-4}$; т) $\frac{x^2-y^2}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{x+y}$;

у) $\frac{x^3-1}{x^2+1} \cdot \frac{(x^2+1)^2}{x-1}$; ф) $\frac{ax^2-a}{b^2y-b} \cdot \frac{ay+y}{bx-x}$; х) $\frac{3a^2-2a-1}{3a^2+2a-1} \cdot \frac{3a^2+4a+1}{3a^2-4a+1}$;

ц) $\frac{6x^2+7x-1}{6x^2-13x+1} \cdot \frac{6x^2-7x+1}{6x^2-7x-1}$; ш) $\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x}{x^3+1}+\frac{x^2}{x+1} : \frac{x}{x+1}$;

щ) $\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{x^2}{y^2}-2\right)\left(\frac{x^3}{y^3}-3\right)$; ю) $\left(\frac{x}{y}-\frac{r}{s}\right) : \left[\left(\frac{x}{y}\right)^2-\left(\frac{r}{s}\right)^2\right]$;

я) $\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right) : \left(1-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}\right)$.

14. Мудрець ніс 1 *kg* золотого порошку. Першому прохожому, що його зустрів, два половину з того, що ніс, другому — половину з того, що зісталося, третьому—половину нової решти і т. д. Скільки дістав шостий? Скільки зісталося йому після того, як обділив 8 людей? Коли видасть усе, що має?

15. Літак перелетів у в 1^s шлях $15\frac{7}{8}m$; яку дорогу перелетить у $13^m\ 27^s$?

16. Якийсь обиватель прожив $^2/_3$ свого життя в Київі, $^1/_4$ в Одесі, а решту, т. зн. 6 років, за кордоном. Якого віку дожив і скільки років прожив в одному й другому місті?

Числити так: в Київі й Одесі прожив разом $^2/_3+{}^1/_4={}^{11}/_{12}$ життя; яку частину життя творило останніх 6 років?

17. Господар мав a карб. і видав перше четвертину, а потім $^1/_3$ того, що йому зісталося. Скільки лишилося йому накінець?

18. Із склянки чистого спірту відлито половину й долито туди води; потім знову половину тої мішанини заступлено водою і т. д. п'ять разів. Скільки чистого спірту зісталося за останнім разом?

19. Те саме питання, з тою ріжницею, що відливано не половину склянки, а третину.

20. Обчислити $\dfrac{x-1}{y+1}$ для: $x=\dfrac{3a^2}{b}$, $y=\dfrac{2b}{a^2}$.

21. Обчислити:

а) $\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{x}{x^2-1}}$; б) $\dfrac{\dfrac{2a+b}{a^2+ab}}{\dfrac{4a^2-b^4}{a^2}}$; в) $\dfrac{\dfrac{xy+y}{x}-\dfrac{xy+x}{y}}{\dfrac{x^3-y^3}{xy}}$;

г) $\dfrac{\dfrac{2bc}{b+c}-b}{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b-2c}}+\dfrac{\dfrac{2bc}{b+c}-c}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c-2b}}$; д) $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\cdot\left[1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]$.

22. Доказати, що коли $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$, то дріб $\dfrac{a+c}{b+d}$ лежить між $\dfrac{a}{b}$ і $\dfrac{c}{d}$, т. зн.: $\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+c}{b+d}>\dfrac{c}{d}$.

23. Між $^1/_2$ і $^2/_3$ вставити один дріб; між $^5/_8$ і $^3/_4$ вставити 4 дроби.

24. Розвязати такі рівняння:

$\dfrac{3}{4}-\dfrac{x}{2}=1$; $\dfrac{5x}{3}+\dfrac{5}{6}=-\dfrac{4}{3}$; $\dfrac{5}{2}=\dfrac{x}{5}-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{7}{4}=-\dfrac{x}{2}+1$;

$\dfrac{(a-b)\,x}{a}-\dfrac{b}{a}=1$; $\dfrac{ax}{a+b}+\dfrac{b^2}{a+b}=b$; $\dfrac{a-1}{b}\,x-\dfrac{a^2-1}{a}=-\dfrac{a-b}{a}$;

$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=10$; $\frac{5}{2}-\frac{2x}{3}+\frac{x+1}{2}=\frac{7}{4}$; $\left[\left(\frac{2x}{4}+3\right)\cdot\frac{1}{3}\right]-3=2$;

$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=13$; $(x+1).\ \frac{3}{2}=\frac{5}{2}$; $(ax+b)\ a-b)\ -\frac{b^2}{2}=\frac{ab}{2}$.

25. Урядовець видає п'яту частину своїх річних прибутків на хату, третину на їжу, десятину на одежу й зістається йому ще 13 200 карб. на всякі інші видатки. Які його річні прибутки?

Коли річний прибуток назвемо x, то видаток на хату буде $\frac{x}{5}$ на їжу $\frac{x}{3}$, на одежу $\frac{x}{18}$, разом $\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+\frac{x}{10}$; коли цю суму віднімемо від цілого прибутку, отримаємо частину, яка рівняється останкові 13 200, а звідсіля обчислимо річний прибуток.

26. Мій приятель пройшов раз $^2/_3$ дороги від A до B. По дорозі завважує, що щось згубив, отже вертається $1km$ назад і знаходить свою згубу. Рівночасно переконується, що там якраз половина дороги між A і B. Яка далека ця дорога AB?

27. Ось Діофантів*) гріб. Яке диво! ви тільки погляньте:
Аритметичним шляхом поданий тут його вік.
Хлопцем безжурним він шосту частину життя перебігав,
Потім дванадцяту часть парубком жвавим гуляв.
Далі ще сьома частина — і з любкою став він до шлюбу;
Років минуло ще пять: сина вродила жона.
Син половину літ батька досяг лиш, як смерть безпощадна
Знищила нитку життя, батькові сина взяла...
Років чотири тягнув ще життя він те важке беремя,
Зрештою всьому кінець: батько за сином пішов.

*) *Діофант* із Олександрії, визначний математик пізно-олександрійської доби, жив між 250 і 380 р. після Хр. — Він відомий особливо як аритметик, що займався розвязкою рівнянь, головно т. зв. «неозначених» (див. уст. 88 і 101).

§ 10. Десятинні дроби.

60. **Пояснення.** а) В практиці грають велику ролю *десятинні дроби*, т. є такі дроби, знаменниками яких є степені числа 10, отже 10, 100, 1000 і т. д. — У відріжненні від них усі дроби з иншими знаменниками звемо *звичайними*.

Для десятинних дробів виробився окремий спосіб писання, який нагадує нам десятковий уклад писання цілих чисел. У цілих числах, як відомо, кожна цифра має подвійне значіння: своє власне і місцеве, отже в залежности від місця, на якому її написано. Цифра на лівому краю числа має значіння найбільше, на правому — найменше, бо означує одиниці. Коли ж напишемо якусь цифру ще далі праворуч від цифри одиниць, то знову зменшимо її вартість удесятеро, а тим самим і досягнемо того, що хотіли цифра буде уявляти собою кількість дробових одиниць зі знаменником 10. Треба тепер тільки ще відзначити, де кінчаються цифри цілого числа, а зачинаються цифри десятинного дробу; до цього послужить нам перетинка, звана *десятинним значком* або *комою**).

Як ціле число в десятковому укладі, так і десятинний дріб можна представити многочленом, отже як суму поодиноких десятинних (одноцифрових) дробів.

Нпр. $0{,}32506 = \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1\,000} + \frac{6}{100\,000}$, або також:

$= \frac{3}{10^1} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{6}{10^5}$.

б) Дії на десятинних дробах виконуємо так, як на звичайних цілих числах, тільки завсіди звертаємо увагу на положення десятинного значка. Додаємо й віднімаємо їх, підписуючи одні під одними так, щоби десятинні значки стояли в одній прямовій лінії, а й множимо так само, як звичайні числа, тільки положення значка визначуємо на основі правила про множення дробів. А саме:

---

*) Де-не-де, головно в краях давньої Австрії, вживають десятинної *крапки* (·).

$$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{a \cdot b}{10^m 10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}},$$

отже *в добутку відрізуємо стільки цифр, скільки їх є в обох чинниках разом.*

При діленні маємо таке: перше поширюємо дільник і ділимок так, щоби дільник став цілим числом, а тоді ділимо десятинний дріб (або ціле число) тим цілим числом. Ось так буде:

$$\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^n} = \frac{a \cdot 10^n}{10^m} : \frac{b \cdot 10^n}{10^n} = \frac{a \cdot 10^n}{10^m} : b.$$

61. **Заміна звичайних дробів на десятинні.** а) Щоб із звичайного дробу отримати десятинний, мусимо поширити його так, щоби в знаменику знайшовся степень числа 10. Коли даний дріб $\frac{a}{b}$ незводильний, то число, яким його треба поширювати, матиме вигляд $\frac{10^k}{b}$, бо тоді отримаємо:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \frac{10^k}{b}}{b \cdot \frac{10^k}{b}} = \frac{a \cdot \frac{10^k}{b}}{10^k}.$$

Тепер тут треба викладник k дібрати так, щоби в чисельнику отримати ціле число; коли дріб $\frac{a}{b}$ незводильний, мусимо пошукати такого числа k, щоби b містилося в 10^k, отже щоби $\frac{10^k}{b}$ було цілим числом.

Це можливе тільки тоді, коли b матиме такі самі прості чинники, як і число 10, а що 10 зложене з чинників 2 і 5, то *звичайний дріб можна замінити на десятинний тільки тоді, коли його знаменик не має инших чинників крім* 2 *і* 5.

Коли таке трапиться, тоді мусимо викладник k добірати так, щоби до кожного чинника 2 та 5 у знаменику b знайшовся відповідний доповнюючий чинник 5 та 2 у десятках чисельника.

Нпр. $\frac{7}{8}$ має знаменик $8 = 2^3$, отже дріб треба поширити на $5^3 = 125$; це дасть:

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{875}{1000} = 0{,}875.$$

У практиці це робимо инакше, а саме дріб поширюємо чергою так:

$$\frac{7}{8} = \frac{70}{80} = \frac{\frac{70}{8}}{10} = \frac{8+\frac{6}{8}}{10} = \frac{8}{10} + \frac{6}{80};$$

$$\frac{6}{80} = \frac{60}{800} = \frac{\frac{60}{8}}{100} = \frac{7+\frac{4}{8}}{100} = \frac{7}{100} + \frac{4}{800};$$

$$\frac{4}{800} = \frac{40}{8000} = \frac{\frac{40}{8}}{1000} = \frac{5}{1000},$$

отже:

$$\frac{7}{8} = \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = 0{,}875.$$

Иншими словами, *чисельник ділимо знаменником як звичайно, десятинним способом:* коли зістанеться останок, менший від дільника, тоді переходимо до місця нижчого від попереднього: даємо десятинний знак, дописуємо нуля й ділимо далі і т. д.

У нашому прикладі буде:

$$\begin{array}{l} 7 : 8 = 0{,}875. \\ 70 \\ \quad 60 \\ \quad\quad 40 \end{array}$$

б) Коли в знаменику b крім чинників 2 і 5 є ще инші, тоді дробу $\frac{a}{b}$ не зможемо замінити на десятинний, бо немає такого викладника k, щоби $\frac{10^k}{b}$ могло стати цілим числом. У такому разі продовжування ділення $a : b$ десятинним способом ніколи не закінчиться; навпаки покажеться, що поодинокі цифри або громади цифр стануть повторятися в останку, отже і в частці. Тоді отримуємо т. зв. *періодові дроби*.

Нпр. $\frac{1}{3}$ не можна представити у формі $\frac{\frac{10^k}{3}}{10}$ так, щоби в чисельнику повстало ціле число, бо число 10 не має чинника 3. Тоді ділення буде виглядати так:

$$\begin{array}{l} 1 : 3 = 0{,}333\ldots. \\ 10 \\ \quad 10 \\ \quad\quad 10 \\ \quad\quad\ \ldots \end{array}$$

Подібно покажеться, що $\frac{7}{11} = 0{,}636363\ldots; \frac{5}{7} = 0{,}714285\ 714285\ 714285;$ громаду цифр, що повторюється завсіди в тому самому порядкові, називаємо *періодом*. Його значимо так, що над першою й над останньою його цифрою даємо крапки, отже: $\frac{1}{3} = 0{,}\dot{3}$; $\frac{7}{11} = 0{,}\dot{6}\dot{3}$; $\frac{5}{7} = 0{,}\dot{7}14285\dot{}$.

Дроби, в яких період зачинається зараз після десятинного значка, звуться *чисто-періодовими* (як у попередніх прикладах); одначе часто цифри перше йдуть без повторювання, а тільки потім приходить період. Це т. зв. *мішано-періодовий дріб*, а цифри, які не повторюються, творять його *передперіод*.

Нпр. $\frac{43}{52} = 0{,}82\,\dot{6}92\,30\dot{7}$; тут передперіод є 82.

в) *Коли знаменик дробу — число зложене, одначе не має чинників* 2 *і* 5, *тоді повстав чисто-періодовий дріб; коли ж у знаменику виступають поруч із иншими також чинники* 2 *і* 5, *тоді дріб буде мішано-періодовий.*

Нпр. знаменики 3, 7, 11, 13 дають чисто-періодові дроби, а знаменик $52 = 2^2.13$ — мішано-періодовий дріб.

Чисельник не грає тут ніякої ролі.

62. **Заміна десятинних дробів на звичайні.** а) Замінити десятинний дріб на звичайний — це те саме, що звести суму дробів із знаменниками 10, 100, 1000, ... , до спільного знаменика. Тим спільним знаменником буде знаменик останньої цифри десятинного дробу. Після того дріб скорочуємо.

Нпр. $0{,}256 = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} = \frac{256}{1000} = \frac{32}{125}$.

б) Нехай буде даний *чисто-періодовий дріб*, нпр.

$$x = 0{,}\dot{8}45\dot{1};$$

його множимо на 10^k, де k означує кількість цифр у періоді, отже в нас буде $k = 4$. Через те пересунемо всі цифри періоду перед десятинний значок, а після значка повториться цей самий період. Це дасть:

$$10^4x = 8451{,}\dot{8}45\dot{1}.$$

Тепер віднімаємо від обох боків того рівняння даний дріб, отже будемо мати:

$$10^4x - x = (10^4 - 1)x = 8451,\ \dot{8}45\dot{1} - 0{,}\dot{8}45\dot{1} = 8451;$$

тут відпадуть усі десятинні місця, а залишиться чисте ціле число. З того отримаємо:

$$x = \frac{8451}{10^4 - 1} = \frac{8451}{9999} = \frac{939}{1111}.$$

Звідсіля читаємо таке правило:

Чисто-періодовий дріб замінюємо на звичайний так, що пишемо в чисельнику цілий період, а в знаменику стільки дев'яток, скільки є цифр у періоді.

Завважимо тут, що $0,\dot{9}=\frac{9}{9}=1$. Це зрозуміле. Десятинний справжній дріб, зложений із самих дев'яток, ріжниться від цілої одиниці тільки на одну одиницю останньої цифри. Коли ж кількість дев'яток буде повторюватись без кінця, то й ця одиниця буде відсуватись усе далі й далі так, що і ріжниця між 1 і тим дробом стане «безконечно мала».

в) Коли даний *мішано-періодовий дріб*, який має перед періодом k цифр, а в періоді l місць, тоді множимо його перше на 10^k, щоби позбутися передперіоду; він перейде в цілі числа, а за десятинним значком зістанеться чисто-періодовий дріб.

Нпр. $x = 0,23\dot{2}5\dot{4}$; тут є $k = 2$, $l = 3$, отже перше зводимо дріб до $10^2x = 23,\dot{2}5\dot{4}$, а потім перемінюємо дріб $y = 0,\dot{2}5\dot{4}$. Це дасть:

$$10^2x = 23 + y = 23\frac{254}{999},$$

або далі:

$$10^2x = \frac{23\,.\,999+254}{999} = \frac{23\,.\,(10^3-1)+254}{999} = \frac{23254-23}{999} = \frac{23231}{999},$$

отже:

$$x = \frac{23231}{99900}.$$

Це значить: *мішано-періодовий дріб замінюємо на звичайний так, що в чисельнику пишемо цілу громаду його цифр і від неї віднімаємо передперіод, а в знаменику пишемо стільки дев'яток, скільки є цифр у періоді, і стільки нулів, скільки є цирф у передперіоді.**)

63. **Приближні (неповні) числа.** а) При всяких практичних обчисленнях вистарчають нам дроби з невеликою кількістю цифр. Завдання физики, хемії, астрономії, землемірства, техники і т. д. наводять нас на величини, яких не вміємо вимірювати докладно; найдокладніші міряння довжин не йдуть поза межу $0,001mm = 0,000\,001m$. Через те обчислювання всяких дальших цифр поза шосту-сьому — зайве, якщо маємо до діла з метрами; коли беремо

---

*) *Десятинні дроби* — це вигадка голяндця *Сімона Стевіна* (1578—1620). У своїому творі „*La Disme*" висловлює він думку, що дроби зовсім зайві, бо кожне обчислення можна переводити при допомозі цілих чисел. Таким чином — каже він — можна буде сотворити десятковий уклад мір, ваг і монет, який поширився би на всі культурні народи. — Десятинний значок увів щвайцарець *Йост Bürghi* (1552—1632). Він надав десятиним дробам їхній теперішній вигляд. — Періодовими десятинними дробами займався перший англієць *Джон Уолліс* (*Wallis*, 1616—1703) у свому „*Treatise of Algebra*" (1685).

ще докладніші обчислення, обманюємо самі себе, бо докладність ніколи не вийде поза згадану межу.

Через те в практиці треба нам знати способи, як числити приближними вартостями. Та при цьому мусимо завсіди пам'ятати, що ми рахуємо приближними числами, і здавати собі справу, до якого ступня докладности можемо дійти.

б) *За(о)кругли́ти число* — значить, із даного докладного числа зробити приближне, отже в приближному числі скреслити декілька кінцевих цифр. Нпр. $^1/_7\ cm = 0{,}14285614...cm \approx 1{,}428mm$ ($\approx$ чит.: «*приближно рівне*»). Недокладність, яку тут поповнюємо, є $0{,}0005614...mm$, отже вона більше від половини одиниці на третьому десятинному місці. Та як би ми тут написали: $^1/_7\ cm \approx 1{,}429mm$, отже підвищили на одиницю останню цифру, яку затримуємо, то недокладність була би тільки $0{,}0004385...mm$, т. зн. менша від половини згаданої одиниці. Тому при заокруглюванні числа вважаємо на найвищу цифру в громаді цифр, які відкидаємо. Коли ця найвища цифра менша від 5, тоді дальші цифри відкидаємо безслідно; коли ж вона 5 або більша від 5, тоді попередню цифру, тобто найнижчу затриману, підвищуємо на одиницю. Через те недокладність ніколи не буде більша від половини одиниці останнього затриманого місця.

Коли число заокруглюємо без підвищення останньої цифри, кажемо, що ми його приближили *з недостачею*; в противному разі маємо приближення *з лишкою*.

в) Дії приближними числами виконуємо так, що їх перед тим скорочуємо до бажаної міри докладности, а потім оцінюємо величину майбутньої недокладности й межу докладности. Покажемо це на прикладі.

Добуток 2,831... × 0,32... є 0,90592..., одначе це число не зовсім певне. Ми обірвали перше число на 3 місцях, отже зробили недокладність $\delta < 0{,}00005$, а в другому—недокладність $\delta' < 0{,}0005$. Напишім тепер таке множення: $(2{,}831 \pm \delta) \times (0{,}32 \pm \delta) = 0{,}90592 \pm 0{,}32\delta \pm 2{,}831\delta' \pm \delta\delta'$; тут можна пропустити $\delta\delta'$, бо це дуже мале число, отже на загал недокладність буде що найбільше $0{,}32\delta + 2{,}831\delta' < 0{,}32 \,.\, 0{,}000\,05 + 2{,}831 \,.\, 0{,}000\,5 = 0{,}000\,143\,2 < \frac{2}{10\,000}$ т. зн. вона заважила би вже на четвертому місці.

Значить, ми маємо право написати тільки таке скорочене число: 2,831.. × 0,32.. = 0,906, отже мусимо заокруглити його до трох місць, бо четверте вже непевне.

г) *Приближне множення* (його звемо теж *скороченим* або *неповним*) виконуємо так, що відкидаємо всі ті цифри, які переходять

ступінь бажаної докладности; з них беремо тільки «поправки», т. зн. причинок, який вони можуть дати до добутку.

Коли нпр. треба нам обчислити 38,25574 × 0,05648 із докладністю до 3 місць, то згори бачимо, що деякі цифри треба буде пропустити, отже не могтимемо застосувати звичайного правила для визначення десятинного значка; тому в першу чергу «оцінюємо» вартість висліду. Ясно, що бажаний добуток буде лежати між 38.0,05 = 1,90 і 39.0,06=2,84, т. зн. буде досить близько 2 цілих одиниць.

Перший частинний добуток буде: 38,255.74 . 0,05=1,912 787 0; коли нам бажається мати 3 десятинні місця, то для більшої докладности беремо ще одне дальше місце, а тоді три останні цифри добутку зайві, т. зн. залишимо 1,9128. Через те являються зайвими й три останні цифри множника; одначе як би ми їх відкинули чи то безслідно, чи з підвищенням на 1, отримали би вислід трохи недокладний: 38,25.0,05 = 1,9125 або 38,26 . 0,05 = 1,9130. Щоб отримати можливо найбільшу докладність, беремо два останні місяця «на поправку», отже множимо так: 5 . 7 = 35; коли пропустимо кінцеве 5, мусітимемо число десятків піднести до 4, отже говоримо: «поправка 4»; далі 5 . 5=25, додати 4, = 29, поправка 3; 5 . 5 = 25, додати поправку 3, = 28, пишемо **8**, 2 далі, і т. д. звичайним порядком. (На поправку не беремо ніколи більше як 2 місця, бо третє місце не має ніякого впливу; найвищий добуток, який тут міг би бути, є: 0,009 . 9=0,081, а він не дає ніколи навіть 1 на поправку, тому цифра 4 в множнику зовсім не входить у рахунок).

Дальший частинний добуток, 38,255 74 . 0,006 = 0,229 534 44, матиме 4 місця за багато, отже треба на поправку брати цифри 5 і 5; це дасть: 6 . 5 = 30, попр. 3; 6 . 5 = 30, + 3 = 33, попр. 3; 6 . 2 = 12, + 3 = 15, пишемо **5**, 1 далі і т. д.

Щоби було ясним, котрі цифри треба брати на поправку, а котрі приходять до властивого добутку, підписуємо кожну цифру множника під тою цифрою множимка, з якої беремо вже властивий добуток; а що кожна дальша цифра множника засягне поправкою на 1 місце дальше, то найвигідніше буде *ввесь множник переписати під множником у противному порядкові цифр*, і то так, щоб його найвища цифра стояла під останньою цифрою множимка, яку затримуємо.

Через те обидва множення — звичайне і скорочене — будуть виглядати так:

38,25	574 × 0,05648
19127	870
2295	3444
153	02296
30	604592
2,1606	841952

3825574
8465
19128
2295
153
31
21607

Отсей другий добуток являється поки-що без десятинного значка, якого безпосередньо не маємо змоги визначити; та ми оцінили величину добутку вже на вступі, отже на основі того пишемо 2,1607, а після скорочення до 3 місць матимемо:

$$38{,}25574 \cdot 0{,}05648 = 2{,}161.$$

Для перевірки переставмо чинники, отже обчислім добуток:

$$0{,}056\,48 \cdot 38{,}255\,74.$$

5648
65283
16944
4518
113
28
3
21606

Перший частинний добуток буде: 0,056 48 . 30 = 1,694 40; він має 5 десят. місць, отже останню цифру пропускаємо.

Множимо так: перший частинний добуток як звичайно; другий: 8 . 8 = 64, попр. 6; 8 . 4 = 32, + 6 = 38, пишемо 8, 3 далі і т. д.; третій: 2 . 8 = 16, попр. 2; 2 . 4 = 8, + 2 = 10, попр. 1; 2 . 6 = 12, + 1 = 13, пишемо 3, 1 далі і т. д.; четвертий: 5 . 4 = 20, попр. 2 (бо до третьої цифри взад уже не вертаємося); 5 . 6 = 30, + 2 = 32, попр. 3; 5 . 5 = 25, + 3 = 28, і це пишемо, бо далі вже нема нічого; останній: 6 . 6 = 36, попр. 4; 6 . 5 = 30, + 4 = 34, попр. 3, і її вписуємо.

д) Скорочене ділення лежить у тому, що в бажаному місці перериваємо звичайну дію й ділимо дільником, який по черзі скорочуємо, т. зн. відрізуємо за кожним разом одну цифру, а в частинному добуткові останню цифру беремо на поправку. Коли останній (одноцифровий) останок менший від половини останнього дільника, пропускаємо його безслідно; коли ж він рівний його половині або більший, тоді останню цифру частки підвищуємо на одиницю.

Нпр. обчислити частку 62,356 : 0,2917 на три десятинні місця. «Місцеву вартість» частки отримаємо, коли поділимо найвищі цифри, ділимка й дільника отже 62 : 0,2 = 620 : 2 = 310, т. зн. частка матиме 3 цілі місця. У дільнику після 2 є ще якраз 3 цифри, тому дільника не будемо скорочувати, тільки ділимкові допишемо ще одного нуля.

623560 : 2917 = 213,767

5834
4016
2917
10990
8751
2239
2042
197
175
22
20
2

Коли ділення дійде до того, що ми вичерпали вже всі цифри дільника, не будемо останкам приписувати нових нулів, тільки в дільнику відтинаємо останню цифру, т. зн. 7, і її при множенні беремо на поправку: 7 . 7 = 49, поправка 5, і її дочислюємо далі. Потім відтинаємо другу цифру, 1, і на поправку беремо причинок, який дають дві цифрі, 1 і 7, а саме: 6 . 7 = 42, попр. 4; 6 . 1 + 4 10, попр. 1, і її дочислюємо. Коли далі відітнемо 9, беремо на поправку тільки 9 і 1, бо 7 не матиме вже впливу, отже 7 . 1 = 7, попр. 1; 7 . 9 + 1 = 64, попр. 6, і дочислюємо її. Останній останок, 2, більший від половини останнього дільника 2, отже останню цифру частки підвищуємо з 7 на 8. Тому:

62,356 : 0,2917 = 213,768.

Спроба: помножити 213,768 . 0,2917 до 3 місць, значить, добуток має мати 4 місця. Місцева вартість добутку буде 213 . 0,2 = 42,6, отже треба після цифри 2 в множнику брати ще три дальші цифри, т. зн. цілий множник.

213768
7192
426536
192391
2138
1496

623561, а після відкинення останньої цифри:

213,768 . 0,2917 = 62,356.

ВПРАВИ.

1. Обчислити такі добутки й частки:

0,003087 . 0,0506;	0,003205 : 0,0008706;
3,0002 . 1,0003;	1 : 0,0002592;
6,9352 . 0,07011;	30895 : 0,006179.

2. Замінити такі десятинні дроби на звичайні:
0,8; 0,32; 0,525; 0,0679; 1,835; 0,6715.

3. Замінити такі звичайні дробі на десятинні:

а) $\frac{3}{8}, \frac{7}{16}, \frac{3}{25}, \frac{86}{125}, \frac{71}{250}$;

б) $\frac{2}{3}, \frac{6}{11}, \frac{9}{13}, \frac{15}{37}, \frac{11}{23}, \frac{62}{531}, \frac{2}{33}, \frac{4}{51}, \frac{560}{999}$;

в) $\frac{5}{6}, \frac{4}{15}, \frac{7}{12}, \frac{32}{45}, \frac{25}{66}, \frac{13}{22}, \frac{147}{750}, \frac{299}{480}$.

4. Замінити такі періодові дроби на звичайні:
а) $0,\dot{3}$; $0,\dot{5}$; $0,\dot{7}\dot{1}$; $0,\dot{9}\dot{5}$; $0,\dot{3}\dot{2}\dot{4}$; $0,\dot{8}\dot{1}\dot{9}$; $0,\dot{0}0\dot{1}$;
б) $0,0\dot{3}\dot{2}$; $0,28\dot{7}\dot{5}$; $0,323\dot{5}$; $0,671\dot{8}\dot{7}\dot{5}$.

5. Скоротити такі числа:
а) до 2 місць: 0,6735; 8,32943...; 11,11923...;
б) до 3 місць: 0,23812...; 5,764387...; 3,1415926...

6. Виконати додавання: а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$;

б) $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$.

Замінити поодинокі доданки на десятинні дроби до 6 місць і перевірити згідність із сумою звичайних дробів, яку замінимо теж на десятинний дріб.

7. Перевести такі множення й ділення неповними числами:

а) 6,2243... . 0,713... (2м);	б) 8,352... : 42,711... (2м);
82,0943... . 4,4143... (3м);	0,434328... : 0,00895... (3м);
4,4143... . 7,3107... (3м);	0,032576... : 39,850... (3м);
3,1415926... . 3,1415926... (4м);	0,0001... : 7,89526... (4м).

8. Обчислити при допомозі звичайних дробів:

$0,\dot{1} + 0,\dot{2} + 0,\dot{3}$; $3,\dot{8} \cdot 0,0\dot{6}$; $(0,1\dot{2} + 0,1\dot{3} - 0,1\dot{4}) \cdot 2,\dot{3}\dot{2}$.

9. Час одного оббігу землі кругом сонця є $365^d5^h48^m45,5^s$; замінити це на десятинний дріб.

10. Якою частиною року є 1^d? 1^h? Обчислити з докладністю до 3 значних місць.

11. Найбільша віддаль земли від сонця є 151,1 міліонів *km*, найменша — 149,5 міліонів *km*. Обчислити, між якими межами буде міститися обвід земної орбіти (= дороги кругом сонця); числити по взірцеві: $u = 2\pi r$, де $\pi = 3{,}1415926...$; докладність узяти до 100 000 *km*. Яка буде «середня довжина» орбіти (половина суми обох крайніх вартостей) і її поперечник?

12. Яка швидкість землі на її орбіті? (числити в *km/h*, *km/min* і *km/sec* з докладністю до 1 *km*).

§ 11. Функції в обсягу дробових чисел.

64. **Лінійна функція з дробовими співчинниками.** а) Дослід лінійної функції:

$$y = ax + b, \qquad (1)$$

який ми вели в § 5, треба ще поширити на той випадок, де обидва співчинники, a і b, а так само й обидві змінні, x і y, можуть приймати також дробові вартости.

На перехресті Декарта можемо відзначувати не тільки цілочислові співрядні, але й дробові, отже можемо відзначувати на площі також образи точок із дробовими співрядними. На гратчастому папері вони будуть припадати між приготовленими там лініями, отже між вузликами сітки.

б) Нехай буде дане рівняння:

$$y = 2x + b, \qquad (2)$$

яке, як знаємо, уявляє собою громаду рівнобіжних простих (рис. 61).

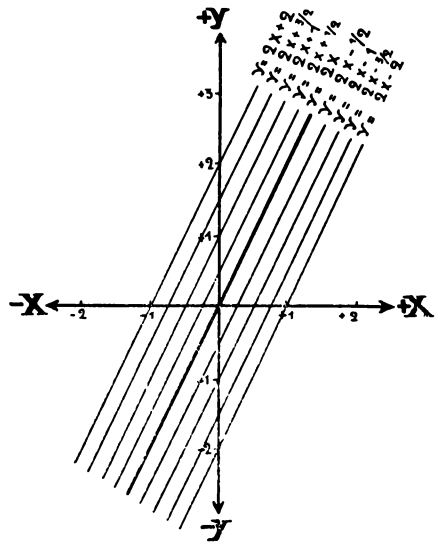


Рис. 61.

Досі всі ці прості перетинали вісь Y тільки в узлових точках сітки, бо b могло мати тільки цілочислову вартість. Та тепер уже можна поширити обсяг вартостей того співчинника також на дробові числа. Коли b буде перебігати ряд дробів у дуже малих відступах, то громада простих (2) покриє цілу площу щільно; тоді можемо собі уявити, що проста пересунеться по площі, завсіди рівнобіжно до свого первісного положення.

в) Коли тепер будемо змінювати співчинник нахилу a в рівнянні:

$$y = ax + 1 \qquad (3)$$

(отже тут співчинник b має подрібну вартість 1) і поширимо його обсяг також на дробові числа, отримаємо *жмуток простих* із вершком S на осі Y у точці $+1$. І він покриє теж щільно цілу площу (рис. 62).

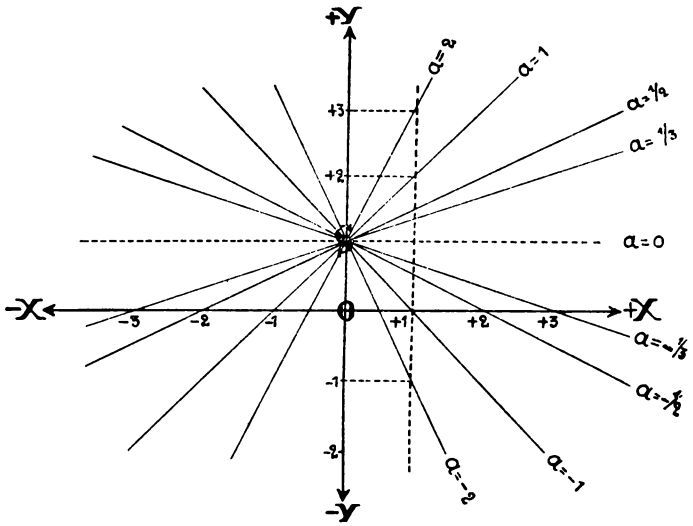


Рис. 62.

Для додатніх вартостей співчинника нахилу проста буде підніматися, як будемо йти від лівої руки до правої, а для від'ємних вона опадатиме, і то тим стрімкіше, чим більша без'оглядна вартість співчинника. Через те рівняння простої у виді (1) звемо *напрямковим*.

65. **Подрібний дослід рівняння простої лінії.** а) У звязку з цим поширенням значіння лінійної функції на дробові вартости співчинників і змінних можемо переводити подрібний дослід рівняння простої лінії.

Коли в напрямковому рівнянні (1) позбудемося знаменників (якщо його співчинники є дробами) і всі члени перекинемо на лівий бік, отримаємо т. зв. *загальне рівняння простої*, яке напишемо так:

$$Ax + By + C = 0; \qquad (4)$$

тут A, B, C — довільні, але постійні співчинники. Що воно уявляє собою просту лінію, побачимо зараз, коли його розвяжемо з огляду на невідому y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

отже тут буде її співчинник нахилу: $a = -\frac{A}{B}$, а відтинок на осі Y: $b = -\frac{C}{B}$.

Нпр. рівняння $5x - 3y - 1 = 0$ дає: $y = +\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$, отже відтинок на осі Y буде $b = -\frac{1}{3}$, а кут нахилу до осі X додатній.

б) Одначе проста не мусить бути визначена якраз співчинником нахилу a й відтинком b на осі Y; вона може бути дана нпр. відтинками на обох осях: m на осі X і n на осі Y. Шукаймо її рівняння.

Для точки, в якій проста перетинає вісь X, маємо $x = m$, $y = 0$; коли ці вартости підставимо в рівняння (4), отримаємо: $Am + C = 0$, отже:

$$m = -\frac{C}{A};$$

подібно для точки перетину простої з віссю Y матимемо: $x = 0$, $y = n$, отже буде: $Bn + C = 0$, т. зн.:

$$n = -\frac{C}{B}.$$

Щоби ці обидві величини виступили в рівнянні (4), обчислім із них A і B:

$$A = -\frac{C}{m},\ B = -\frac{C}{n}$$

і підставмо їх туди:

$$-\frac{C}{m}x - \frac{C}{n}y + C = 0,$$

або після скорочення на $-C$:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1. \tag{6}$$

Отсе т. зв. *відтинкове рівняння простої*; легко провірити, що тут величина n — та сама, яку ми перше значили буквою b. Треба ще тільки звернути увагу, що скорочування на C дозволене тільки тоді, коли цей співчинник не є нулем; та це в нашому випадкові не мало би значіння, бо як би було $C = 0$, то проста переходила би через осередок перехрестя (для $x = 0$ було би теж $y = 0$), отже не відзначила б на осях ніяких відтинків.

Нпр. проста, що на осях відтинає $m = 5$, $n = 3$, має рівняння:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1,$$

отже:

$$3x + 5y - 15 = 0.$$

Звідсіля:

$$y = -\frac{3}{5}x + 3,$$

т. зн.: $a = -\frac{3}{5}$. Вона має від'ємний нахил до осі X, як це легко перевірити рисунком.

в) Проста може бути дана ще инакше, нпр. так, що переходить через точку P з співрядними x_1 і y_1, а її нахил до осі X даний співчинником a.

Щоби знайти її рівняння, напишім його напрямковий вид:

$$y = ax + b; \tag{1}$$

тут даний співчинник a, а співчинник b поки що невідомий.

Коли хочемо виразити, що проста переходить через точку з співрядними x_1, y_1, мусимо ці вартости підставити в отсе рівняння:

$$y_1 = ax_1 + b. \tag{1a}$$

Віднімім обидва рівняння відповідними боками; з того отримаємо бажане рівняння:

$$y - y_1 = a(x - x_1). \tag{7}$$

До того самого висліду дійдемо, коли обчислимо b з рівняння (1а):

$$b = y_1 - ax_1$$

і вставимо це в (1):

$$y = ax + (y_1 - ax_1). \tag{7a}$$

Нпр. (1) Дані: $a=3, P(2, 3)$; це дасть: $b = y_1 - ax_1 = 3 - (3 \cdot 2) = -3$, а тому:

$$y = 3x - 3.$$

(2) Як би був даний — крім співрядних точки P — відтинок b на осі Y, $P(-1, -\frac{3}{2})$, $b = -1$, то невідоме було би a; через підставлення тих даних у рівняння (1а) отримали б ми:

$$\frac{3}{2} = a \cdot (-1) - 1, \text{ т. зн. } a = -\frac{5}{2},$$

отже це дало би бажане рівняння:

$$y = -\frac{5}{2}x - 1.$$

г) Ще инший спосіб визначування простої маємо, коли дані дві точці, P_1 і P_2, через які вона переходить; нехай їхні співрядні будуть: (x_1, y_1) і (x_2, y_2); тоді в рівнянні (1) невідомі обидва співчинники a і b. Щоб їх вишукати, утворім рівняння, подібне до (1а), при допомозі співрядних другої точки:

$$y_2 = ax_2 + b. \tag{1б}$$

Із (1b) і (1а) виходить:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1),$$

а коли поділимо відповідні боки рівняння (7) на це останнє, отримаємо:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

як рівняння простої, що переходить через дві даних точці.

В разі потреби можна це рівняння звести до всіх инших виглядів і питати про величини a, m і n.

Нпр. проста, що переходить через точки (2, —1) і (—2, —3), має рівняння:

$$\frac{y-(-1)}{(-3)-(-1)} = \frac{x-2}{(-2)-(+2)},$$

отже:

$$\frac{y+1}{-2} = \frac{x-2}{-4},$$

або:

$$y = \frac{1}{2}x - 2.$$

66. **Квадратова функція для дробових вартостей аргументу.** Коли у квадратовій функції

$$y = x^2$$

аргумент x буде перебігати також дробові вартости, отримаємо, як показує табличка, пари чисел, що дозволять нам позаповнювати прогалини між узловими точками, які відповідають цілим числам. Тоді зможемо ламану лінію, що її мали на рис. 56, заступити одностайною, про яку там згадували; вона на рисунку зазначена проривчастою лінією. Чим більше точок поділу возьмемо, тим докладніше вдасться нам нарисувати цю криву.

x	y
0	0
$^1/_4$	$^1/_{16}$
$^1/_2$	$^1/_4$
$^3/_4$	$^9/_{16}$
1	1
...	...

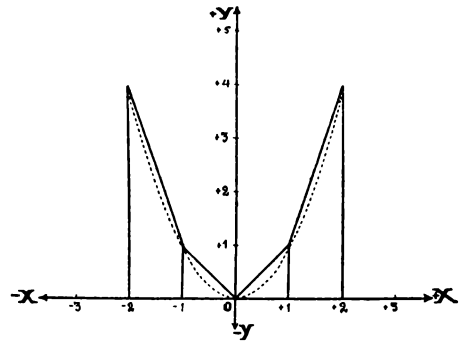


Рис. 56.

Пригадуємо, що функційну табличку вистарчить обчислити тільки для додатніх вартостей аргументу; для від'ємних вартостей аргументу x вартости функції y зістаються такі самі, як для відповідних додатніх (уст. 39).

67. **Дробова функція і її образ.** а) Дробова функція відзначається тим, що її аргумент x виступає в знаменику. Найпростіша її форма є:

$$y = \frac{1}{x}. \qquad (10)$$

Складім її табличку й нарисуймо образ (рис. 63):

x	y
1	1
2	$^1/_2$
3	$^1/_3$
...	...
10	0,1
...	...
100	0,01
...	...
1000	0,001
...	...
$^1/_2$	2
$^1/_3$	3
...	...

x	y
0,1	10
...	...
0,01	100
...	...
0,001	1000
...	...
—1	—1
—2	$-^1/_2$
—3	$-^1/_3$
...	...
—10	—0,1
...	...
$-^1/_2$	—2
$-^1/_3$	—3
...	...
—0,1	—10
...	...

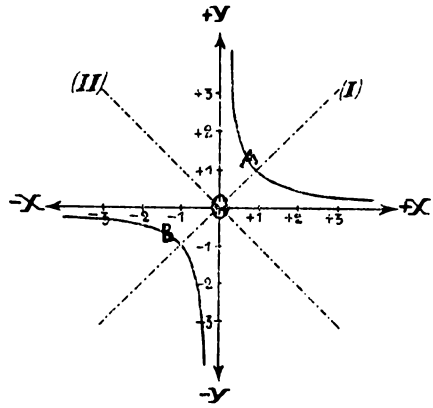


Рис. 63.

Чим більше точок визначимо при допомозі таблички, тим докладніше зможемо заступити одностайним кривим луком лінію, зразу ламану.

Образ функції (5) зветься *рівнобічною гіперболою*. Вона складається з двох однакових віток, непов'язаних одна з одною, які в один бік зростають, а в другий спадають безмежно.

Коли x зростає необмежено, вартість функції меншає теж необмежено. Тоді обидві вітки кривої наближаються все більше й більше до осі X, хоч її ніколи не доторкнуться, не говорячи вже про це, що її ніколи не перетнуть. — Навпаки, коли x буде меншати (отже ставатиме дробом із дуже великим знаменником), y більшатиме необмежено, і то в додатньому та у від'ємному напрямкові. Наслідком того обидві вітки гіперболи так само будуть наближатися до осі Y.

Висловлюємо це так: *гіпербола наближається асимптотично до обох осей.*

Отсей дослід дає наглядний доказ про межеву вартість дробів, коли їхні знаменики стають усе менші й менші (уст. 58 в).

Коли врисуємо в цю фигуру першу медіяну (I), то вона перетне обидві вітки гіперболи в двох точках A і B, званих її *вершками*. Ці дві точки лежать найближче від осередка перехрестя O і одна від

одної. Перша медіяна у віднесенні до гіперболи — це її *головна вісь;* друга медіяна (II) зветься її *побічною віссю.*

Довжина головної осі, тоб-то відтинок AB, дана приближним числом $2 \cdot 1{,}414\ldots = 2{,}828\ldots$ Виходить це з відомого «твердження Пітагора», яке застосовуємо до трикутника з вершками 0, $+1$ (на осі X) і A.

Обидві медіяни — це *осі симетрії гіперболи.* Коли уявимо собі, що на одній із них поставлене дзеркало насторч до паперу, то одна половина гіперболи відіб'ється в дзеркалі як друга.

Гіпербола подає образ «відворотної пропорційности»: коли одна величина росте, то друга меншає, і навпаки.

У физиці маємо приклад відворотної пропорційности у звязку між величиною тиску та змісту газу при постійній температурі: $p = \frac{1}{v}$. Коли зменшувати зміст газу, буде рости тиск, який він передає стінам своєї посудини; з ростом змісту тиск буде меншати.

б) Напишім трохи загальніше рівняння:

$$y = \frac{a}{x}, \tag{11}$$

де a може мати всяку вартість. Образи тих функцій будуть такими ж самими гіперболами, як перше, тільки ширшими або вужчими (рис. 64).

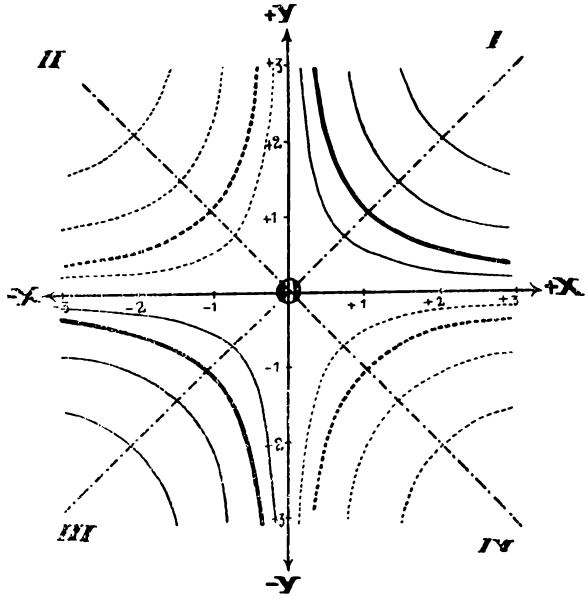


Рис. 64.

Коли $a > 1$, відповідні гіперболи лежатимуть поза «нормальною» $y = \frac{1}{x}$, а коли $a < 1$, вони будуть міститися між нормальною гіперболою й обома осями.

Довжина половини головної осі загальної гіперболи $y = \frac{a}{x}$ дана приближним числом 2,828... $.a$.

Функцію $y = \frac{1}{x}$ пишуть чисто в «нерозвиненому виді»: $xy = 1$, а функцію $y = \frac{a}{x}$ у виді: $xy = a$. Отся форма відзначається симетрією, бо в ній обидві змінні, y і x, грають рівнорядну ролю.

в) Пригляньмося далі до функції:

$$y = -\frac{1}{x}; \tag{10a}$$

покажеться, що це та сама гіпербола, тільки «відбита на осі Y», т. зн. кожне додатне y переходить у від'ємне $-y$. Головною віссю тієї гіперболи буде не перша, тільки друга медіяна.

Коли й цю функцію узагальнимо й візьмемо:

$$y = -\frac{a}{x}, \tag{11a}$$

отримаємо громаду гіпербол, для яких друга медіяна буде головною віссю; всі вони на рис. 64 зазначені проривчастими лініями.

Таким чином функція

$$xy = \pm a \tag{12}$$

уявляє собою громаду рівнобічних гіпербол, у якій завсіди по чотири однакові, по одній у кожній чвертці площі. Всі вони заповнюють цілу площу щільно.

г) Досліджуймо врешті функції того роду, як: $y = \frac{1}{x} + 1$, $y = \frac{1}{x-1}$ і т. д. Покажеться, що це ті ж самі гіперболи, тільки ріжно попересувані рівнобіжно до обох осей.

Нпр. нарисуймо образ функції:

$$y = \frac{1}{2x-1}.$$

Табличка й образ функції будуть такі (рис. 65):

x	y
0	—1
1	1
2	$1/3$
3	$1/5$
4	$1/7$
...	...
$1/2$	$1/0$(!)
$1/3$	—3
$1/4$	—2
...	...
—1	$-1/3$
—2	$-1/5$
...	...
$-1/2$	$-1/2$
...	...

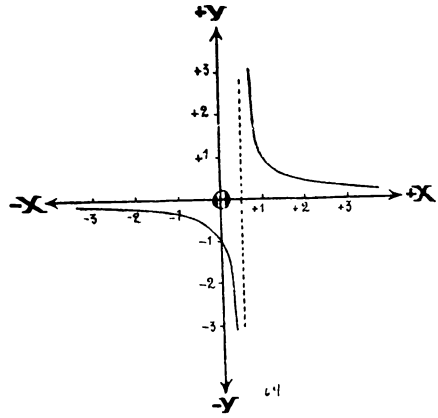


Рис. 65.

Для $x = \frac{1}{2}$ буде $y = \frac{1}{0}$, а це є, згідно з нашими поясненнями, символ дуже великого числа. У цій точці буде стояти сторчова асимптота кривої.

ВПРАВИ.

1. Яку громаду рівнобіжних простих уявляє собою рівняння $y = ax + b$ для ріжних дробових вартостей співчинника b? Дослідити подрібні форми: $y = x + b$; $y = \frac{1}{2}x + b$; $y = -\frac{3}{2}x + b$.

2. Які жмутки простих уявляють собою рівняння:

$y = ax$; $y = ax - 1$; $y = ax + 2$; $y = ax - \frac{3}{2}$?

3. Знайти рівняння громади простих, рівнобіжних до одної з осей співрядних або до одної з медіян.

4. Знайти кут нахилу до осі X таких простих:

а) $y = -2x + 1$; $y = -\frac{3}{7}x - 1$; $y = \frac{2}{5}x + 2$; $y = \frac{14}{9}x - 7$;

б) $2x - 3y - 1 = 0$; $3x + y - \frac{1}{7} = 0$; $x + 2y + 5 = 0$;

в) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 1 = 0$; $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{6} + 2 = 0$; $-\frac{2x}{5} + \frac{3y}{7} = 1$.

Знайти відтинки, які ці прості відзначують на обох осях.

5. Знайти рівняння простої, що а) переходить через точку $(-1, \frac{3}{5})$ і з віссю X творить кут 45°; б) переходить через точку (—2,

—1) і на осі Y відтинає — 3; в) переходить через точку (0, 2) й на осі X відзначує відтинок +5. Які кути творять дві останні прості з віссю X?

6. Знайти рівняння простої, що переходить через такі дві точки: а) (2, 1) і (1, 2); б) $(-3, \frac{3}{5})$ і (4, —1); в) $(\frac{7}{11}, \frac{5}{8})$ і (—4, 1).

7. Знайти рівняння простої, що на осі X відзначує відтинок $\frac{3}{2}$ і творить із нею кут 30^0.

8. Знайти функційні таблички та нарисувати образи таких функцій:

$y = x^2 + 1$; $y = -x^2 + 1$; $y = x^3 + 1$; $y = -x^3 + 1$;
$y = -x^4 + 2$.

9. Нарисувати на основі функційних табличок образи таких дробових функцій та повизначувати їхні осі симетрії й асимптоти:

$$y = \frac{1}{x-1}; \quad y = \frac{1}{x+1} - 1; \quad y = \frac{2}{x-3} + 1; \quad y = -\frac{3}{2x+1} + 2.$$

10. Дослідити такі функції:

$$y = \frac{x}{x^2+1}; \quad y = \frac{x^2}{x^2-2}; \quad y = \frac{1}{x} - x; \quad y = \frac{x-1}{x^2+1} + 1.$$

11. Нарисувати образи таких громад кривих:

а) $y = \frac{a}{x+1}$; б) $y = \frac{1}{ax+1}$; в) $y = \frac{1}{x+a}$.

12. Нарисувати на одній фигурі образи кривих $y = \frac{x^2}{2}$ та $y = \frac{1}{x-2}$ й шукати співрядних тих точок, у яких ці дві криві перетинаються.

ТРЕТІЙ РОЗДІЛ

Лінійні рівняння.

§ 12. Розвязування й поділ рівнянь.

68. **Рівняння і їхня розвязка.** а) Із оберненими діями (відніманням та діленням) вязалися нові роди чисел, а вводили ми їх при допомозі т. зв. «пояснюючих рівнянь». Вони були:

(1) для віднімання:

$$a + x = s$$

із розвязкою:

$$x = s - a,$$

а від'ємні числа були дані рівнянням:

$$c + x = 0,$$

яке мало розвязку:

$$x = -c;$$

(2) для ділення і для дробових чисел було:

$$ax = p$$

з розвязкою:

$$x = \frac{p}{a}.$$

Та такі питання, як: «яке це число, що . . . » і т. д. можуть бути багато складніші, і всі вони ведуть до більше загальних рівнянь. Знайти в кожному такому випадкові бажане число — це завдання зветься *розвязкою рівняння*.

б) Ми вже пояснили на вступі (§ 1), що значить «розвязувати рівняння» та як до того йдемо. Вживаючи порівняння з рівновагою ваги, ми пояснили основний принцип — аксіому, якою послугуємося при розвязці всіх рівнянь: *на обох боках рівняння вільно переводити однакові зміни.*

Покажемо це на одному трохи складнішому прикладі: розвязати рівняння:

$$\frac{1}{2}(2x - 3)(x + 2) = x^2 - (5x - 3).$$

Це рівняння перш за все висловлює два «побажання»: позбутись обіруч скобок, отже виконати одне множення й одне віднімання. Це дасть:

$$\frac{1}{2}(2x^2 + x - 6) = x^2 - 5x + 3.$$

Лівий бік рівняння має дробовий співчинник; щоб його позбутися, треба обидва боки помножити на відворотність дробу, отже на ціле число 2:

$$2x^2 + x - 6 = 2x^2 - 10x + 6.$$

Головне завдання, яке нас тепер чекає — зібрати по одному боці всі відомі величини, а по другому залишити всі члени невідомі, отже всі ці члени, в яких виступає x, треба перенести на один бік рівняння. Иншими словами: нам треба рівняння звести до *простого виду*:

$$ax = p. \tag{1}$$

«Перенесення членів» відбувається так: коли хочемо мати всі невідомі члени нпр. ліворуч, то мусимо від обох боків рівняння відняти ці невідомі члени, що стоять по правому боці. Це дасть нам:

$$(2x^2 + x) - (2x^2 - 10x) - 6 = (2x^2 - 10) - (2x^2 - 10) + 6,$$

або після редукції:

$$11x - 6 = 6.$$

Далі переносимо всі відомі члени праворуч; до того мусимо обіруч відняти -6 (або додати $+6$):

$$11x - 6 + 6 = 6 + 6,$$

отже:

$$11x = 12.$$

Це вже простий вид рівняння; його розвязуємо так, як «пояснююче рівняння» для ділення: коли обидва боки поділимо на 11 (або помножимо на $\frac{1}{11}$), матимемо:

$$x = \frac{12}{11}.$$

Отся вартість — *це розвязка або корінь нашого рівняння*. Це значить, що наше *умовне рівняння* справджується для цеї вартости невідомої.

І справді, коли підставимо цю вартість у дане рівняння, матимемо:

ліворуч: $\frac{1}{2}\left(\frac{24}{11}-3\right)\left(\frac{12}{11}+2\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{9}{11}\right)\frac{34}{11}=-\frac{153}{121}$;

праворуч: $\left(\frac{12}{11}\right)^2-\left(\frac{60}{11}-3\right)=\frac{144}{121}-\frac{27}{11}=\frac{144-27\cdot 11}{121}=-\frac{153}{121}$.

Так отже бачимо, що «переношення» бажаних членів на другий бік рівняння лежить у тому, що *кожний член переписуємо на другому боці з протилежним знаком*. Коли нпр. у рівнянні:

$$A+k=B+l \tag{2a}$$

хочемо член k мати праворуч, а l ліворуч, додаємо до обох боків рівняння $-k-l$, отже маємо:

$$A+k-k-l=B+l-k-l$$

або:

$$A-l=B-k; \tag{2б}$$

таким чином $+k$ з лівого боку опинилося як $-k$ ліворуч, а $+l$ із лівого боку як $-l$ праворуч.

Коли обидва боки мають однаковий доданок, то його пропускаємо зовсім; ось так у нашому прикладі зараз після вимноження можемо обіруч пропустити член x^2 (оправдуємо це тим, що обіруч додаємо $-x^2$). У загальному видпакові виглядає воно так: коли до обох боків рівняння:

$$A+p=B+p$$

додамо $-p$, отримаємо:

$$A=B.$$

Коли в рівнянні є дроби, позбуваємося їх так, що обидва боки множимо їхнім спільним знаменником; та частіше обмежуємося до звільнювання від дробів членів із невідомими.

Так само може трапитись потреба, змінити по обох боках рівняння знак; це діється нпр. тоді, коли при невідомій хочемо мати додатній співчинник. Тоді обидва боки рівняння множимо на -1, бо таке множення всюди змінює знаки.

Далі вільно ділити обидва боки рівняння їхніми спільними чинниками. *Та не вільно при цьому забувати, що чинником, який має вартість нуля, ділити не можна.*

Накінець, коли ми вже привели рівняння до простого виду: $ax=p$, ділимо обидва його боки співчинником невідомої a і отримуємо розвязку:

$$x=\frac{p}{a}. \tag{1a}$$

69. **Поділ рівнянь.** а) Та тими перемінами не дасться кожне рівняння звести до простого виду (1), як побачимо з такого прикладу:

«Даний квадрат; коли взяти прямокутник із одним боком у двоє довшим від боку квадрату, а другим на 5 одиниць довшим, то його площина буде на 24 одиниць (квадратових) більша від площини квадрату. Обчислити бік даного квадрату».

Назвім невідомий бік квадрату x (так завсіди робимо при укладанні рівнянь); тоді боки прямокутника будуть $2x$ і $x + 5$, а його площина буде $2x(x + 5)$. З другого ж боку знаємо, що ця площина буде на 24 одиниці більша від площини квадрату, отже вона буде $x^2 + 24$. Звідсіля виходить таке рівняння:

$$2x(x + 5) = x^2 + 24.$$

Коли позбудемося дужок ліворуч і перенесемо член x із правого на лівий бік (або обіруч відкинемо одне x^2), отримаємо:

$$x^2 + 10x = 24.$$

Це буде найпростіший вигляд рівняння, одначе до форми (1) ми його ніколи не зможемо звести тими способами, які досі пізнали. Причина цьому така, що рівняння містить у собі *квадрат* невідомого числа x; така рівняння звемо *квадратовим*. Його розвязка, якою займемося в другій частині книжки, багато складніша.

Рівняння, яке дасться звести до простого виду (1), містить у собі невідому тільки в першому степені, тому воно зветься *рівнянням першого ступіня*. Називають його також *лінійним*, у звязку з тим, що образом функції першого ступіня є проста лінія (див. § 6).

Квадратові рівняння мають назву *рівнянь другого ступіня;* рівняння, що в йому виступають теж невідомі в третьому степені (кубі), зветься *рівнянням третього ступіня* або *кубичним* і т. д.

Взагалі *рівняння n-ого ступіня* матиме такий вид:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Числа a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, . . . , a_2, a_1, a_0 звуться його «співчинниками»; це постійні, відомі числа, які тільки в деяких випадках можуть мати змінні вартости.

До кубичного рівняння веде нпр. таке завдання:

«Добуток трох сусідніх чисел природнього ряду є 210; що це за числа?»

Назвім середуще з них x; тоді два сусідні будуть $x + 1$ і $x - 1$, отже матимемо рівняння:

$$(x + 1)\, x\, (x - 1) = 210,$$

яке зводиться до такого простого виду:

$$x^3 - x - 210 = 0.$$

Отсе рівняння має корінь $x = 6$, бо справді два сусіди того числа є 5 і 7, отже $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$.

б) Всі наші дотеперішні рівняння містили в собі тільки одну невідому, x. Та багато завдань веде до рівнянь, що мають більше невідомих, нпр. таке:

«Куплено $5m$ одної матерії і $8m$ другої матерії й заплачено за все 200 карб.; яка була ціна $1m$ одної й другої матерії?»

Тут питаємо про дві невідомі річі: про ціни двох ріжних родів матерії, тому мусимо ввести дві невідомі. Ціну першої матерії назвемо нпр. x, ціну другої y, отже матимемо рівняння:

$$5x + 8y = 200.$$

Коли станемо його розвязувати, побачимо, що тут одну невідому треба виразити другою, нпр. невідому y невідомою x. Приймім на хвилину, що x відоме, і обчислім y. До того перенесемо $5x$ на правий бік і матимемо;

$$8y = -5x + 200,$$

$$y = -\frac{5}{8}x + 25.$$

Це рівняння нагадує нам функцію $y = ax + b$ (з дробовим співчинником a); її образом є проста лінія (рис. 66). Нарисуймо її образ; функційна табличка дасть нам безліч пар чисел, які будуть сповнювати дане рівняння.

У нашій табличці для вигоди рисунку взяли ми такі вартости x, щоби дріб $\frac{5}{8}x$ був цілим числом, отже вибрали всюди x подільне на 8:

x	y
0	25
8	20
16	15
24	20
32	5
40	0
...	...

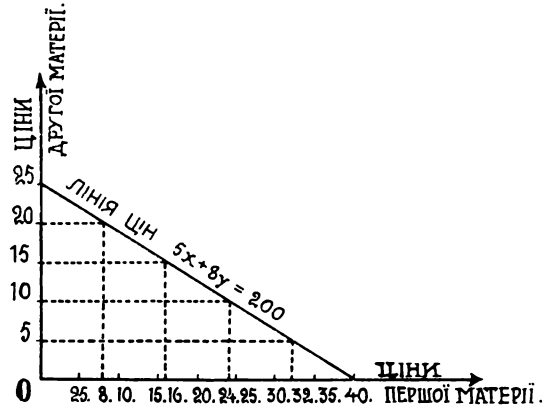


Рис. 66.

Звідсіля бачимо, що розвязка нашого рівняння не є «однозначна», бо маємо безліч пар розвязок, які дають відповідь на наше питання; напр. коли за 1 m першої матерії платимо по 8 карб., то за 1 m другої прийдеться платити по 20 (спроба: $5 \cdot 8 + 8 \cdot 20 = 200$) і т. д.

Проста лінія, що відповідає нашому рівнянню, це «лінія цін»; співрядні кожної її точки подають пару чисел, які можуть задовольнити наше рівняння. Та немає ніякого змислу продовжувати цю лінію поза одну з осей, а також вести табличку далі в сторону від'ємних вартостей одної із змінних, бо від'ємні ціни не мали б реального значіння.

З того одного прикладу бачимо, що *рівняння з двома невідомими* мають безліч пар розвязок (хоч не всі вони мусять бути придатні для нашого завдання); те саме відноситься до *рівнянь із трома, чотирма* і т. д. *невідомими*, розвязки яких укладаються в трійки, чвірки і т. д.

ВПРАВИ.

1. Впорядкувати такі рівняння:

а) $x(x+1)(x+2) = x(x-1)(x-2) + 1;$

б) $\dfrac{x+2}{x-3} + \dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{2x-1}{2x+5} - \dfrac{2x-5}{2x+1};$

в) $\dfrac{\frac{x+2}{2}+1}{\frac{x-1}{2}-1} + 1 \Big/ \dfrac{\frac{x+2}{3}-2}{\frac{x-1}{3}+2} - 1 = x + \dfrac{2x+3}{x-2} \Big/ x - \dfrac{2x-3}{x+2};$

г) $\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)-1\right]-1\right\}-1 = 0.$

Рішити, до якого роду кожне з них належить.

2. Впорядкувати такі рівняння:

а) $\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{2x-3}{2y-3} - \dfrac{3x-2}{3y+2};$

б) $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) = (x+y+z-1)^2;$

в) $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+u} + \dfrac{z}{u+x} + \dfrac{u}{x+y} = \dfrac{x-y}{z} + \dfrac{y-z}{u} + \dfrac{z-u}{x} + \dfrac{u-x}{y}.$

3. Куплено 5 овець, 6 кіз та 8 баранів і за все те заплачено 1000 карб.; по скільки плачено за вівцю, козу та барана?

4. Три хлопці поділилися грішми так, що один отримав третину, другий четвертину, а третій п'яту частину всіх грошей, а

після поділу зісталося їм іще 13 карб.; скільки вони мали грошей і як ними поділилися?

5. У русло ріки вбитий паль: $^1/_4$ його довжини є в землі, $^1/_3$ у воді, а $2^1/_2 m$ виставє понад воду. Яка його довжина?

6. «Славний *Пітагоре**), Муз Геліконських духовний ти сину,
Рад би я знати, яких то ти учнів у домі своїому
Вводиш в високу науку і в тайни, які лиш сам знаєш?
— «Скажу це радо тобі, о *Полікрате!* Глянь: половина
Гострить свій ум в математиці; далі йде знов четвертина:
Тайни природи збагнути змагається; сьома ж частина
Вчиться мовчати, ховаючи всю цю науку у серці.
Врешті жінок є ще три; серед них знаменита Теано.
Ось і вся школа моя; стільки учнів веду я до правди».

---

*) *Пітагор* із острова Самос, один із найстарших грецьких філософів і математиків, жив у VI. ст. до Хр. Багато років провів він на мандрівці, довгий час жив у Єгипті, навчаючись там усієї мудрости в жреців, а потім заснував у Кротоні (в південній Італії) школу, а радше рід релігійного брацтва. Члени того брацтва занімалися ріжними церемонійними обрядами та математичними й філософичними студіями. Основою філософії Пітагора та його школи була думка, що основою всього існування є число. Він винаходив між ріжними з'явищами в природі відношення, які можна було висловлювати розмірно малими числами, і взагалі шукав усюди числових відношень. — Опріч філософичних наук приписують Пітагорові багато цінних відкрить у математиці; як в алгебрі, так і в геометрії. — *Полікрат*, про якого тут мова, був приятелем Пітагора; це був тиран острову Самос.

§ 13. Лінійні рівняння з одною невідомою.

70. **Приклади.** В науці про рівняння маємо два такі головні завдання: а) розвязувати готові вже рівняння, б) укладати в рівняння задачі, дані у словах, і аж тоді їх розвязувати.

Перечислимо тут декілька прикладів на обидва ці завдання.

а) Розвязати готове рівняння:

$$\frac{5x}{12} + \frac{x^2-7}{x+3} = \frac{17(x-3)}{12}.$$

Щоби позбутися знаменників, множимо обидва його боки на спільний знаменник усіх його членів, т. є на $12(x+3)$:

$$\frac{5x \cdot 12(x+3)}{12} + \frac{(x^2-7) \cdot 12(x+3)}{x+3} = \frac{17(x-3) \cdot 12(x+3)}{12},$$

отже:

$$5x(x+3) + 12(x^2-7) = 17(x-3)(x+3),$$

а після вимноження:

$$5x^2 + 15x + 12x^2 - 84 = 17x^2 - 153.$$

Тут обіруч пропускаємо $17x^2$, а -84 переносимо на правий бік; це дасть:

$$15x = -153 + 84 = -69,$$

а звідсіля:

$$x = -\frac{69}{15} = -\frac{23}{5}.$$

Спроба:

$$Л^*) = \frac{5\left(-\frac{23}{5}\right)}{12} + \frac{\left(-\frac{23}{5}\right)^2 - 7}{\left(-\frac{23}{5}\right) + 3} = -\frac{23}{12} + \frac{\frac{529}{25} - 7}{-\frac{23}{5} + 3} =$$

$$-\frac{23}{12} + \frac{529-175}{5(-23+15)} = -\frac{23}{12} + \frac{354}{-40} = -\frac{646}{60} = -\frac{323}{30};$$

*) *Л* і *П* — читай: «Лівий бік» і «Правий бік».

$$П = \frac{17\left(-\frac{23}{5}-3\right)}{12} = -\frac{17(23+15)}{12\,.\,5} = -\frac{646}{60} = -\frac{323}{30};$$

отже:

$$Л = П.$$

б) Нехай між співчинниками рівняння будуть також загальні числа:

$$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-b}{x+b} = 2.$$

Помножім обидва боки на $(x - a)(x + b)$:

$$\frac{(x+a)(x-a)(x+b)}{x-a} + \frac{(x-b)(x-a)(x+b)}{x+b} = 2(x-a)(x+b),$$

а після скорочення дробів ліворуч — буде:

$$(x + a)(x + b) + (x - b)(x - a) = 2(x - a)(x + b),$$

т. зн.:

$$2x^2 + 2ab = 2x^2 - 2ax + 2bx - 2ab.$$

Редукція дасть:

$$ab = -ax + bx - ab;$$

тут ми обіруч відкидаємо $2x^2$ і ділимо на 2.

Перенесім невідомі члени на ліво, а відомі на право:

$$ax - bx = -2ab,$$

$$(a - b)x = -2ab,$$

отже остаточно:

$$x = -\frac{2ab}{a-b} = \frac{2ba}{b-a}.$$

Числячися з нашим застереженням, яке ми зробили в уст. 68 б, що не вільно ділити нулем, мусимо вважати, що знаменник $a - b$ не може мати вартости 0, отже не сміє бути $a = b$.

Переведіть спробу! Як виглядало б рівняння у випадкові $a = b$?

в) «Якесь число має ту прикмету, що сума його половини, третини, четвертини й шостої частини, збільшена на 5, є така сама, як збільшена на 10 сума з третини й п'ятої частини числа, що від двократі даного більше на 3. Яке це дане число?»

Назвім дане число, якого не знаємо, x; тоді наша задача домагається, щоби взяти суму його половини, його третини, його четвертини й його шостої частини та збільшити її на 5, отже утворити суму $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+5$, і ця сума буде стояти ліворуч. Пра-

воруч же ж прийде сума частин иншого числа, яке отримаємо, коли двократ даного збільшимо на 3. Цим числом буде $2x+3$, і ми з нього маємо взяти третину й п'яту частину і збільшити цю суму на 10, отже нам треба утворити суму $\frac{2x+3}{3}+\frac{2x+3}{5}+10$, і це буде правий бік рівняння. Таким чином наше рівняння буде:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+5=\frac{2x+3}{3}+\frac{2x+3}{5}+10.$$

Спільний знаменник обох боків є $v\ (2, 3, 4, 5, 6) = 60$, отже обидва боки рівняння множимо на 60:

$$30x + 20x + 15x + 10x + 300 = 20(2x + 3) + 12(2x + 3) + 600.$$

Через редукцію отримаємо такий простий вигляд:

$$11x = 396,$$

а звідсіля:

$$x = 36.$$

Так отже бачимо, що числом, якого шукаємо, є 36.

І справді:

$$Л = \frac{36}{2}+\frac{36}{3}+\frac{36}{4}+\frac{36}{6}+5 = 18 + 12 + 9 + 6 + 5 = 50,$$

а що числом, частини якого маємо брати праворуч, є $2x + 3 = 75$, то:

$$П = \frac{75}{3}+\frac{75}{5}+10 = 25 + 15 + 10 = 50.$$

г) «До великого збірника води вливається вода двома рурами; першою наповнився би збірник на протязі 10 годин другою, ширшою, на протязі 8 годин. Якого треба часу для наповнення збірника, коли відчинити обидві рури нараз?»

Назвім зміст збірника V і скажім, що він наповнюється в x годинах водою, яка буде текти обома рурами нараз.

Першою рурою, яка в 10 годинах пропускає V води, перетече в 1^h десята частина тої кількости, отже $\frac{V}{10}$, а в x^h — $\frac{Vx}{10}$; другою рурою в 1^h — $\frac{V}{8}$, а в x^h — $\frac{Vx}{8}$. Обидві разом дадуть $\frac{Vx}{10}+\frac{Vx}{8}=V\left(\frac{x}{10}+\frac{x}{8}\right)$, а що тоді має наповнитися цілий збірник, V, то маємо рівняння:

$$V\cdot\left(\frac{x}{10}+\frac{x}{8}\right)=V.$$

Після скорочення на V (це дозволено, бо зміст збірника не може бути нулем) отримаємо:

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{8} = 1$$

і тут немає вже величини V, т. зн., що вона в рівнянні не грає ролі:

$$9x = 40, \text{ отже } x = \frac{40}{9} = 6\frac{4}{9}.$$

І справді: в цьому часі наллється крізь вужчу руру: $\frac{V}{10} \cdot 6\frac{4}{9} = \frac{V}{10} \cdot \frac{40}{9} = \frac{4}{9}V$ а крізь ширшу: $\frac{V}{8} \cdot 6\frac{4}{9} = \frac{V}{8} \cdot \frac{40}{9} = \frac{5}{9}V$, отже разом: $\frac{4}{9}V + \frac{5}{9}V = V$, т. зн. повний збірник.

д) «Дане двоцифрове число; на місці одиниць стоїть 5. Коли його цифри переставити, отримаємо число, на дві одиниці більше від двократі даного. Що це за число?»

Нехай цифра десятків даного числа буде x, тоді число можемо написати так: $10x + 5$. Коли цифри переставити, то цифра 5 опиниться на місці десятків, отже буде 50, а на місце одиниць прийде цифра x, т. зн. матимемо нове число $50 + x$. Те друге число на дві одиниці більше від двократі даного, отже рівняння є:

$$50 + x = 2(10x + 5) + 2.$$

Корінь рівняння є $x = 2$, т. зн. дане число є 25.

е) Часто такі завдання бувають прибрані в гумористичну форму, нпр. таке: «До дармоїда, що ходив без роботи, приступив чорт і каже: «Скільки разів перейдеш через отсей міст, стільки разів сума, яку маєш у кишені, подвоїться, одначе за кожним ходом мусиш для мене кинути у воду 20 карб.» Дармоїд утішився й послухався чорта, але незабаром переконався, що чорт його обдурив, бо за четвертим разом він викинув у воду останніх 20 карбованців. Яку суму мав він на початку?»

Назвім початкове майно дармоїда x; тоді числимо так:

За першим разом його майно подвоїлося, а відійшло від нього 20 карб., отже зісталося $2x - 20$;

за другим разом його майно подвоїлося, але знову відпала від нього дачка 20 карб. для чорта, отже зісталося:

$$[(2x - 20) \cdot 2] - 20 = 4x - 60;$$

за третім разом те саме: $[(4x - 60) \cdot 2] - 20 = 8x - 140$;

за четвертим разом теж: $[(8x - 140) \cdot 2] - 20 = 16x - 300$, а що тоді все його майно вичерпалося, то матимемо:

$$16x - 300 = 0,$$

або $16x = 300$, а звідсіля:

$$x = \frac{300}{16} = 18\frac{3}{4} \text{ карб.}$$

Що розвязка вірна, легко переконатися так:

I.	майно:	$18\frac{3}{4}$;	подвоїлося:	$37\frac{1}{2}$;	зменшилося на	20 :	$17\frac{1}{2}$	карб;
II.	,,	$17\frac{1}{2}$;	,,	35;	,,	,, ,,	15	,,
III.	,,	15;	,,	30;	,,	,, ,,	10	,,
IV.	,,	10;	,,	20;	,,	,, ,,	0	,,

71. Рисункове розвязування лінійних рівнянь із одною невідомою. а) Нехай буде дане рівняння:

$$x + \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}x + 5. \qquad \text{(а)}$$

Обидва його боки уявляють собою дві ріжні функції величини x:

$$Л\colon\ y = x + \frac{5}{3}; \qquad П\colon\ y = -\frac{2}{3}x + 5. \qquad \text{(б)}$$

Нарисуймо на одній і тій самій фигурі їхні образи (рис. 67):

Л:

x	y
0	$^5/_3 = 1^2/_3$
1	$^8/_3 = 2^2/_3$

П:

x	y
0	5
3	3

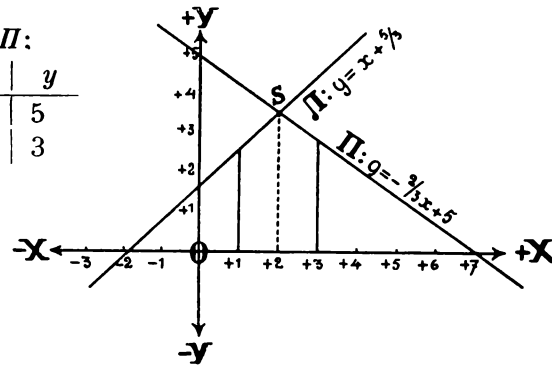


Рис. 67.

Як бачимо, ці дві прості перетинаються в точці S. Вона відповідає такій вартости аргументу x, для якої обидві функції, *Л*

і $П$, мають однакову вартість, а якраз про це нам і ходить, бо нам треба мати $Л = П$. Тою вартістю є $x = 2$, бо для неї отримаємо:

$$Л:\ y = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}; \qquad П:\ y = -\frac{2}{3} \cdot 2 + 5 = \frac{11}{3}.$$

Важне для нас тут те, що коли ми з даним рівнянням (а) зробимо якусь переміну, однакову на обох боках, і нарисуємо тоді лінії, які будуть відповідати обом бокам, то отримаємо *ту саму розвязку* x. Одначе в такому разі спільна вартість обох функцій, $Л$ і $П$, буде инша; та це ніякого впливу на вислід не має, бо нам іде *тільки* про вартість невідомої x.

Знесім у рівнянні (а) знаменики, отже помножім обидва боки на 3:

$$3x + 5 = -2x + 15; \qquad (а')$$

тоді ці дві функції будуть:

$$Л: y = 3x + 5; \quad П: y = -2x + 15.$$

Таблички й образи обох функцій будуть такі (рис. 68):

$Л$:	
x	y
0	5
3	14

$П$:	
x	y
0	15
5	5

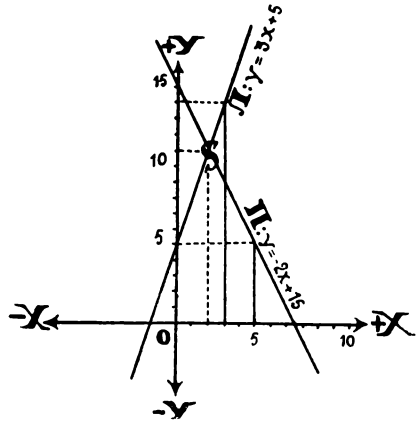


Рис. 68.

І справді, точка перетину S має співрядні $x = 2$, $y = 11$, отже рівняння (а') і (а) мають однакову розвязку. Тут вартість y є втроє більша, як у попередньому разі, бо ж ми ці обидві функції помножили на 3.

б) В рівнянні (а) перенесім усі члени на лівий бік; тоді праворуч зостанеться нуль:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} - 5 = 0,$$

або:

$$\frac{5}{3}x - \frac{10}{3} = 0.$$

В цьому разі матимемо такі дві функції:

$$Л;\ y = \frac{5}{3}x - \frac{10}{3};\ П: y = 0.$$

Тут функція $Л$ має таку табличку й образ (рис. 69):

x	y
3	$^5/_3 = 1^2/_3$
0	$-^{20}/_3 = -3^2/_3$

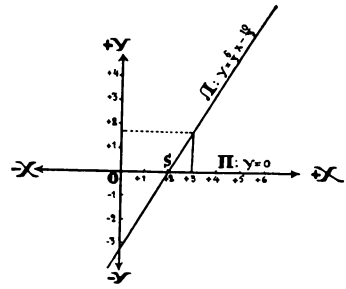


Рис. 69.

а образом фукції $П$ є позема вісь.

І тут розвязкою нашого рівняння буде $x = 2$, бо обидві прості (т. зн. $Л$ і позема вісь) перетинаються в $x = 2$.

У цьому випадкові функція y має вартість 0, одначе це теж зовсім байдужа річ, *бо ж нам іде тільки про цю вартість аргументу* x, *який відповідав рівність обох функцій.*

в) З того бачимо, що рисункову розвязку лінійного рівняння з одною невідомою можемо вести на такі два способи:

(1) або рисувати образи функцій, що відповідають обом бокам рівняння, вважаючи їх двома *ріжними* функціями аргументу x, і дивитися, в якій точці вони *перетнуться*, *а тоді відповідна вартість аргументу буде корінем рівняння;*

(2) або перенести всі члени рівняння *на один бік* (отже зробити другий бік нулем), нарисувати образ тієї ж функції й шукати тої вартости аргументу x, де *проста перетинав позему вісь.*

Обидва ці способи, придатні також для рівнянь вищих ступінів (див. II і III частина), бувають у практиці дуже пожиточні. Часто мусимо вдоволятися тільки приближним вислідом, коли рисунок скоріше доведе нас до бажаної цілі, як довге числення.

Для докладніших рисунків вживаємо звичайно т. зв. «мілімметрового паперу».

72. **Дослід (розбір або дискусія) рівнянь.** а) «Батькові 49 років, синові 15; коли батько буде вдвоє старший від сина?»

Відповідь така: це станеться через x років. Тоді батько матиме $49 + x$ років, а син $15 + x$; а що вік батька буде вдвоє такий, як вік сина, то мусимо подвоїти роки сина, щоб одержати вік батька. Це дасть таке рівняння:

$$49 + x = 2(15 + x),$$

а його корінь буде $x = 19$. І справді: через 19 років батькові буде 68, а синові 34 роки.

Розвяжім це саме завдання рисунком. Нарисуймо лінію, що відповідає вікові батька, отже $y = 49 + x$, і «лінію віку» сина, $y = 15 + x$ (рис. 70). Ці дві прості будуть рівнобіжні, бо мають однакові співчинники напрямку ($a = 1$); це й відповідає дійсності, бо роки батька й сина зростають завсіди на однакову кількість. Щоб відповісти вимогам завдання, мусимо вік сина подвоїти, отже подвоїти всі рядні (т. зн. всі сторчові) в лінії віку сина. Ці дві лінії перетнуться в точці $x = 19$, коли ми тільки рисунок зробили докладно.

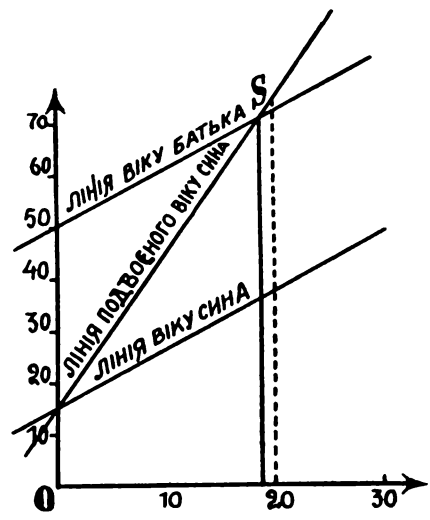


Рис. 70.

б) Уложім тепер подібне рівняння в загальних числах:

Батькові a років, синові b років; коли батько буде в m разів старший від сина?»

Тут вік батька даний функцією $y_1 = a + x$, вік сина $y_2 = b + x$, отже рівняння буде:

$$a + x = m(b + x) \qquad (*)$$

і матиме розвязку:

$$x = \frac{a - bm}{m - 1}. \qquad (**)$$

Якість розвязки рівняння буде залежати від того, як ми подобіраємо величини a, b, m. Розвязка може бути додатня, від'ємна, або нуль, — і нам інтересно розібрати всі ці можливости.

Перш за все легко зрозуміти, що число m мусить бути більше від 1 (бо батько завсіди старший від сина), отже знаменик буде завсіди додатній. Через це ми забезпечені від такої недогідности, щоби він став нулем.

В такому разі знак числа x буде такий самий, як знак чисельника дробу праворуч у (**), а саме:

коли $a - bm > 0$, буде $x > 0$;
коли $a - bm = 0$, буде $x = 0$;
коли $a - bm < 0$, буде $x < 0$;

Що значить такий випадок, що x від'ємне?

Коли до віку батька й сина додати від'ємне число, то ці величини зменшаться; значить, цей факт, про який питаємо, уже був колись, коли батько й син були молодші. Зате $x = 0$ значить, що бажана подія відбувається саме тепер, т. зн. батько якраз у m разів старший від сина.

Отже *в питаннях, де ходить про час,*

додатня *нулева* *від'ємна*	*розвязка означує*	*майбутнє*, *теперішність*, *минуле*.

Такий розбір висліду завдання, де ми добіраємо ріжні вартости для загальних чисел і питаємо, що значить кожна можливість, називається *дискусівю* (розбором або дослідом) *завдання*. Вона важна тим, що вводить нас глибоко в істоту загальних чисел і загальної аритметики.

Зберім іще раз вислід дискусії нашого завдання. Його можемо висловити так:

$$x \gtreqless 0, \text{ коли } a \gtreqless bm, \text{ або коли } \frac{a}{b} \gtreqless m^*).$$

*) Чит.: x додатнє, коли a більше від bm, рівне 0, коли $a = bm$, а від'ємне, коли a менше від bm (див. стр. 113).

Нпр. у нашому прикладі а) є: $\frac{a}{b} = \frac{49}{15}$, $m = 2$, отже $\frac{a}{b} > m$; значить, x додатнє. Як би ми питали, коли батько буде в *п'ятеро старший* від сина, отримали би $\frac{49}{15} < 5$, отже x від'ємне. Тоді з формули (**) мали би: $x = \frac{49 - 5.15}{5 - 1} = -\frac{13}{2}$, отже перед $6\frac{1}{2}$ роками син мав 8 років, а батько $42\frac{1}{2} = 5.8\frac{1}{2}$.

73. **Завдання про рух.** а) При кожному русі мусимо розріжнити: 1) шлях, по якому тіло порушається, отже його форму й довжину, і 2) час, якого потрібує тіло, щоб перенестися з одного місця в друге.

Уявім собі, що рух якогось тіла відбувається по шляхові, здовж якого порозставлювано значки; тоді по тих значках можемо завсіди відчитати довжину шляху, що його тіло перебігає, а рівночасно при допомозі годинника можемо значити час, який минає підчас руху тіла.

Нехай на початку шляху буде значок 0, а момент часу, в якому зачинається рух, зазначім теж нулем. Коли тіло перебігає поперед значок s, тоді нехай годинник показує час t. В такому разі кажемо, що в часі t тіло перебуло шлях s, а на одиницю часу, тоб-то на секунду, припадає шлях $\frac{s}{t}$.

Коли ця частка у всіх місцях шляху (т. є. для всіх можливих пар вартостей s і t) однакова, тоді такий рух звемо *рівномірним*. Иншими словами, *рух рівномірний є тоді, коли тіло в однакових відступах часу перебігає однакові шляхи.*

Частку

$$c = \frac{s}{t} \tag{1}$$

звемо *швидкістю* рівномірного руху (c — це перша буква латинського слова «celeritas» = швидкість). Вона має завсіди однакову вартість, незалежно від того, які будуть величини s і t. Із (1) виходить:

$$s = ct; \tag{2}$$

т. зн. *шлях при рівномірному рухові рівний добуткові з швидкости й часу.*

Врешті з того рівняння можна мати ще таке:

$$t = \frac{s}{c}. \tag{3}$$

Із уст. 40 д) знаємо, що одиницею швидкости є центиметер на секунду:

$$1c = 1\frac{cm}{sec} \text{ або } 1cm/sec. \tag{4}$$

У практиці вживають також инших одиниць швидкости, нпр. метри на мінуту (m/min) або кілометри на годину (km/h); $1h$ від лат. «*hora*» = година.

Заміна одних одиниць на другі відбувається по таких взірцях:

$$1\ km/h = \frac{1\ km}{1h} = \frac{1000m}{60\ min} = \frac{100000cm}{3600\ sec},$$

отже:

$$1\ km/h = 16\frac{2}{3}\ m/min = 27\frac{7}{9}\ cm/sec,$$

$$1\ m/min = 16\frac{2}{3}\ cm/sec. \tag{5а}$$

і навпаки:

$$1\ cm/sec = \frac{1cm}{1sec} = \frac{60cm}{60sec} = \frac{60cm}{1min} = \frac{3600cm}{60min} = \frac{36m}{1h},$$

$$1\ m/min = \frac{1m}{1min} = \frac{60m}{60\ min} = \frac{60m}{1h},$$

отже:

$$1cm/sec = 60cm/min = 36m/h,$$

$$1m/min = 60m/h \tag{5б}$$

і т. д.

Нпр. валка, що переїжджає $36km$ в $1h$, має швидкість $36\ km/h = \frac{36km}{1h} = \frac{36000km}{60min} = 600m/min = \frac{600000cm}{60sec} = 1000cm/sec = 10m/sec.$

Взірець (2), що праворуч звязує швидкість із часом у добуток, дає нам нагоду спинитися над назвами, які треба надавати добуткам похідних величин, що повстають через ділення.

Коли приймемо нпр. $c = 5cm/sec$, а $t = 8sec$, матимемо: $s = 5cm/sec \cdot 8\ sec = 40\frac{cm}{sec} \cdot sec$; а що шлях подаємо в cm, то буде: $\frac{cm}{sec} \cdot sec = cm$. Отсе наводить нас на думку, що в похідній одиниці $\frac{cm}{sec}$ можна вважати cm чисельником, а sec знаменником дробу $\frac{cm}{sec}$, а тоді по правилу для множення дробів буде $\frac{cm}{sec} \cdot sec = cm$, отже $s = 40cm$.

б) Рівняння (2) уявляє собою просту, що переходить через

осередок перехрестя та має співчинник нахилу c (рис. 23; тут замість c написано a). Позему вісь називаємо «віссю часу», а сторчову — «віссю шляху». Чим більша швидкість, тим стрімкіша лінія, що представляє даний рух.

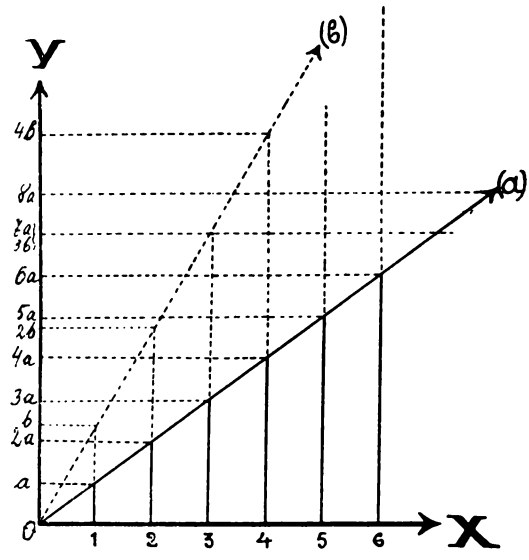


Рис. 23.

в) У звязку з рівняннями розвяжемо кілька инших завдань, що вяжуться з розумінням руху.

«Із двох місць, віддалених на $80\,km$, виходять одночасно два післанці, один на зустріч одному. Один іде в годину $6\,km$, другий $4\,km$; коли й де вони зустрінуться?»

Станеться це через x годин; у цьому часі перший післанець перебуде $6x$, другий $4x$, а що тоді вони *обидва разом* перебудуть цілий шлях, то матимемо рівняння:

$$6x + 4x = 80.$$

Звідсіля $x=8$, отже перший перейде $48\,km$, другий $32\,km$.

Але те саме завдання можна розвязати також рисунком (рис. 71).

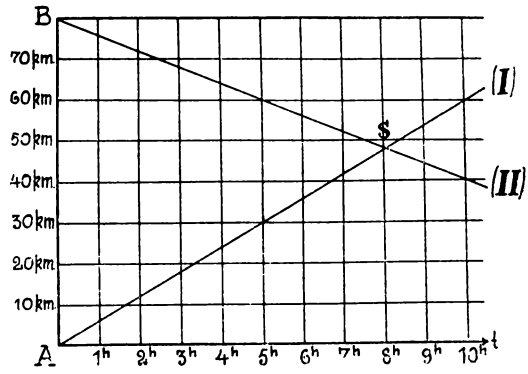


Рис. 71.

На поземій осі $A \rightarrow t$ відзначуємо часи, на сторчовій — шляхи, і то так, що точка B віддалена від A на відтинок, який відповідає довжині 80 km.

Проста (I) — це шлях дороги першого післанця, який виходить із A і в 1^h робить $6km$; і справді, в точці, що відповідає 5 годинам, маємо дорогу $30km$, і т. д. Проста (II), лінія шляху післанця з B, має такий нахил, що на протязі 5^h переходить до $5 \cdot 4\ km = 20km$. Де ці дві прості перетнуться, там маємо зустріч обох післанців. Із рисунку видно, що це станеться в 8^h після виходу, у віддалі $48km$ від A, отже $32km$ від B.

г). «Із місцевости A виїжджає віз у напрямку до B, віддаленної на $30km$ і їде з швидкістю $10km/h$; через $1\frac{1}{2}{}^h$ год. після того рушає з B пішоход у напрямку до A з швидкістю 5 km/h. Де й коли вони зустрінуться?»

Розвяжемо це завдання рисунково. На поземій осі (рис. 72) відзначуємо години, на сторчовій — віддалі; проста (I) — це лінія шляху возу, а проста (II) —

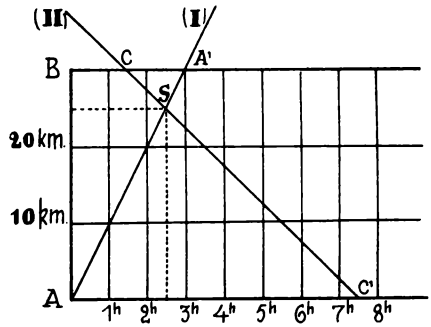


Рис. 72.

лінія дороги пішохода. Перша лінія виходить із A, отже з точки, яка відповідає часові 0^h; друга вийде не з точки B, тільки з точки C на $1\frac{1}{2}{}^h$ ліворуч від неї, а перетинаються вони в S, що відповідає часові $2\frac{1}{2}{}^h$ і шляхові $25km$.

Рахункова розвязка була би така:

Назвім час, у якому це станеться, x^h після вирушення пішохода; тоді віз перебуде шлях $(x + 1\frac{1}{2})$. $10km$, а пішоход $x \cdot 5km$. А що їхні шляхи складуться на 30 km, то матимемо:

$$(x+1\tfrac{1}{2}) \cdot 10 + x \cdot 5 = 30.$$

Звідсіля : $x = 1$, отже зустріч наступить в 1^h після виходу пішохода.

д). «В якій годині між 3^h і 4^h стрілки годинника накриваються?»

Станеться це в x^m після 3^h; коли цілу дорогу великої стрілки на протязі 1^h, тоб-то повний оборот, назначимо 1. то дорогу стрілки в 1^m назвемо $\frac{1}{60}$, а в часі x^m буде оборот $\frac{x}{60}$. У тому самому часі мала стрілка відбуде оборот у дванадцятеро менший, отже $\frac{x}{60.12}$; але що велика стрілка матиме ще перебігти $\frac{1}{4}$ обводу кола (від XII до III, щоби наздігнати малу, яка є вже поза III), то буде:

$$\frac{x}{60} = \frac{1}{4} + \frac{x}{60 \cdot 12},$$

отже $12x = 180 + x$, т. зн.:

$$x = \frac{180}{11} = 16\frac{4}{11}^{m}.$$

Провірмо цю розвязку. Велика стрілка відбуває в $1^h = 60^m$ оборот 360^0, отже в 1^m оборот 6^0; зате мала в 1^h — оборот 30^0 (від цифри до цифри є $\frac{1}{12}$ частина обводу кола), отже в 1^m — $0{,}5^0$. Рівно в 3^h велика стрілка стояла на XII, мала на III, отже творила з нею кут 90^0; по упливі $16\frac{4}{11}^m$ велика перебігла $16\frac{4}{11} \cdot 6^0 = 98\frac{2^0}{11}$, а мала $16\frac{4}{11} \cdot 0{,}5^0 = 8\frac{2^0}{11}$, отже справді велика наздожене малу.

е). «Обчислити час *синодичного* оббігу планети *Марса*».

«Синодичний оббіг» планети — це час, якого треба, щоби вона перейшла від одної «кон'юнкції» до другої. Кон'юнкцією планети (M) називаємо таке положення (рис. 73), коли вона разом із Сонцем (S) і Землею (T)*) лежить на одній простій лінії (ST_1M_1 або ST_2M_2); отже нам треба обчислити час, який минає між двома такими сусідніми положеннями.

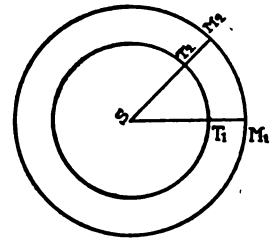


Рис. 73.

Час оббігу Землі кругом Сонця є (кругло) 365^d, а час оббігу планети Марса (кругло) $687m$, отже Земля в 1^d перебігає $\frac{1}{365}$-у частину свого шляху, а Марс $\frac{1}{687}$-у частину. Коли синодичний оббіг триває x^d, то Земля пробіжить у цьому часі шлях $\frac{x}{365}$, а Марс $\frac{x}{687}$. Одначе Марс буде завсіди зіставатися позаду, так, що в тому часі Земля відбуде цілий свій шлях, т. зн., що заки дійде до другої кон'юнкції, мусітиме перше ще раз перейти через точку T_1, а крім того перебіжить лук $T_1T_2 = \frac{x}{365}$. У тому самому часі шляхом Марса буде тільки лук $M_1M_2 = \frac{x}{687}$. Значить, рівняння буде:

$$\frac{x}{365} = 1 + \frac{x}{687},$$

а звідсіля:

$$x = \frac{687 \cdot 365}{687 - 365} = 779 \text{ днів};$$

ця вартість заокруглена, бо часи оббігу тих двох небесних тіл подані тільки приближно.

Тут x більше від двох оббігів Землі і від одного оббігу Марса; значить, Земля перебіжить за цей час цілий свій шлях двічі і ще лук T_1T_2, а Марс тільки один раз свій шлях, а крім того лук M_1M_2.

---

*) В астрономії назви всіх небесних тіл пишуться завсіди великими буквами, отже: Сонце, Земля, Місяць і т. д.

74. **Розвязування нерівностей.** а) Два алгебричні вираження, злучені знаком нерівности ($>$ або $<$), дають т. зв. *просту нерівність*. У ній можуть виступати також функції одної або кількох змінних, і ми тоді питаємо, які вартости можна надавати тим змінним, щоби нерівність справджувалася. Отся чинність зветься *розвязуванням нерівностей*.

Коли маємо розвязати нпр. таку нерівність першого ступіня (лінійну) з однією невідомою:

$$ax + b > 0,$$

то це значить те саме, що з'ясувати, які точки простої

$$y = ax + b$$

мають додатні рядні (рис. 74). Отся проста перетинає вісь X у точці P з відрізною $x_0 = -\frac{b}{a}$; на право від P всі її точки мають додатні рядні, на ліво — від'ємні.

На рис. 74. бачимо просту $y=2x+3$; для точки P є $x_0=-\frac{3}{2}$, отже для кожного $x > x_0$ є справді $2x+3>0$.

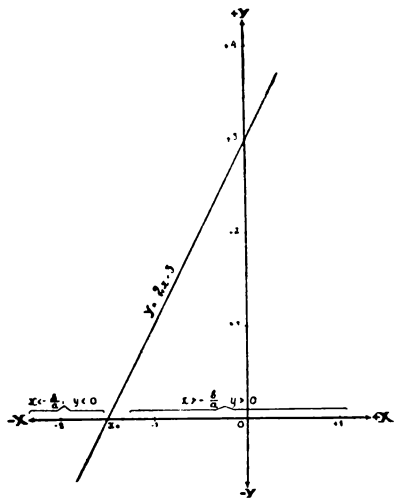


Рис. 74.

б) Нерівність може бути також зложена з трох частин, а тоді можемо знайти для невідомої дві межі, серед яких вона мусить лежати, щоб нерівність сповнювалася.

Нпр.
$$\frac{2x+5}{4} > x-2 > \frac{x-1}{3}.$$

Отсю зложену нерівність розбиваємо на дві прості нерівности, т. зн. беремо під увагу перше лівий і середущий член, а потім середущий і правий:

$$\frac{2x+5}{4} > x-2 \quad \text{і} \quad x-2 > \frac{x-1}{3}.$$

Перша нерівність, розвязана звичайним шляхом, дає $x < \frac{13}{2}$, друга $x > \frac{5}{3}$.

Коли їх зведемо разом, отримаємо межі, серед яких може порушатися невідома x, щоби нерівність була сповнена:

$$\frac{5}{3} < x < \frac{13}{2}.$$

Нпр. для $x = 4$ буде ліворуч $\frac{2 \cdot 4 + 5}{4} = 3\frac{1}{4}$, по середині $4-2 = 2$, а праворуч $\frac{4-1}{3} = 1$, отже справді: $3\frac{1}{4} < 2 < 1$.

Розвяжіть ту саму нерівність геометрично!

в) «Яку вартість треба надати параметрові m, щоби нерівність

$$mx + 2 > 0$$

сповнювалася для всякої (додатньої чи від'ємної) вартости змінної x?»

Коли напишемо:

$$y = mx + 2,$$

то це уявлятиме собою жмуток простих, вершок якого лежить у віддалі $+2$ на осі Y. Кожна з тих простих мусить перетинати вісь X ліворуч або праворуч нулевої точки, отже кожна з них матиме і додатні і від'ємні рядні, за виїмком простої, рівнобіжної до осі X, яка має всі рядні додатні. Отже розвязкою нашого завдання є $m=0$, бо проста $y = 2$ є рівнобіжна до осі X.

ВПРАВИ.

I.

Розвязати такі рівняння:

1. $32(5x - 1) = 63(2x + 3) + 17;$
2. $x(x - 2) - (3 - x)^2 = 23;$
3. $4(x - 3) - 5(2x - 3) = 12 - (6x + 9) + (x - 1);$
4. $(2x + 2)^2 - (2x - 3)^2 = 1 - 6(2 - 3x);$
5. $(3x - 4)^2 - (x + 7)(3x - 5) = 6x(x - 1);$
6. $5x+3\,(7x-4) - 2\,(3x-7) = 4;$
7. $\frac{8x-9}{14} - \frac{3x-5}{21} + \frac{2x-7}{3} = 0;$
8. $2(x-1) + \frac{3x-5}{4} - \frac{4x-3}{9} + \frac{x-11}{2} = 0;$
9. $\frac{x+4}{12} - \frac{x-2}{9} = 3 + \frac{x}{3};$

10. $\frac{3}{2x-1}=\frac{2}{x-1}$; 11. $\frac{5}{6x-12}-\frac{1}{4x-8}=\frac{5}{4}-\frac{2}{3x-6}$;

12. $\frac{4}{6x-1}-\frac{3}{6x+1}=\frac{11}{36x^2-1}$; 13. $\frac{x+4}{x-2}=\frac{x-16}{x+2}$;

14. $\frac{1}{x+3}+\frac{3}{10x}+\frac{1}{x}=0$; 15. $\frac{1}{3x}+\frac{3}{3x-4}=\frac{17}{6x}$;

16. $\frac{3x^2+3}{x^2+x}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}=3$; 17. $\frac{4}{x^2-1}+\frac{3}{x}=\frac{3}{x-1}$;

18. $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-1}$; 19. $\frac{x}{x^2-4x+4}-\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x}$;

20. $\frac{5}{x+1}-\frac{1}{2x+1}=\frac{12}{3x+1}$; 21. $\frac{2}{3x+4}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{2(3x+4)}$;

22. $\frac{x+4}{x+3}-\frac{x+3}{x+2}=\frac{x+6}{x+5}-\frac{x+5}{x+4}$; 23. $\frac{3x}{4x+1}+\frac{x}{4x-2}=1$;

24. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-4}{x-5}$; 25. $\frac{x^2-4x+5}{x^2-6x+10}=\frac{(x-2)^2}{(x+3)^2}$;

26. $5+\frac{2}{3-\frac{1}{4-x}}=\frac{29}{5}$; 27. $1-\frac{1+\frac{1-x}{2}}{3}=4$;

28. $3(x+3)(x-2)=3(x-4)-(2x-1)^2+(7x^2-9)$;

29. $\frac{1}{x^2-6x-7}+\frac{5}{x^2-5x-6}=\frac{1}{x^2-13x+42}$;

30. $\frac{10}{x^2-2x-15}-\frac{2}{x^2-10x+21}=\frac{15}{x^2+2x-35}$.

31. $(a+b)\,x+(a-b)\,x=a^2$; 32. $a(x-a)=b\,(x-b)$;

33. $(a+b)\,x-(a-b)\,x=b^2$; 34. $(a-x)\,(a+b)-(b-x)\,(a-b)=0$;

35. $(x-a+c)\,(a+b)+(x-b+c)\,(a-b)=a^2+b^2$;

36. $a\,(ax+b)-b\,(bx+a)=a^2-b^2$; 37. $2\,(x-a)+3\,(x-2a)=2a$;

38. $\frac{x-a}{b-a}+\frac{x-c}{b-c}=2$; 39. $\frac{x}{m}-\frac{a}{n}=\frac{b}{m}-\frac{x}{n}$;

40. $\frac{x}{a+\frac{a^2+ab}{a-b}}=\frac{x}{a+1}+\frac{1}{a}-1$;

41. $5\left[3\left(\frac{ax+b}{c}+1\right)-5\right]=4\left(2-\frac{ax+b}{c}\right)+1$;

42. $\frac{x+a-3b}{x-a}=\frac{x-2b}{x}$; 43. $\frac{a+b}{x-a}+\frac{a-b}{x-b}=\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}$;

44. $\frac{ab}{cx}+\frac{ac}{bx}+\frac{bc}{ax}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$; 45. $\frac{a^2}{x+b}-\frac{b^2}{x-b}=\frac{b^2(a-b)}{x^2-b^2}$;

46. $\frac{a^2}{x+1}-\frac{ab}{x-1}=\frac{b(b-3a)}{x^2-1}$; 47. $\frac{x+2a}{2-bx}+\frac{x-2a}{2b+x}=\frac{4ab}{4b^2-x^2}$;

48. $\frac{x+2a}{x+2b}=\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2$; 49. $\frac{ax-b}{cx-d}=\frac{ax+b}{cx+d}$;

50. $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

II.

Укласти й розвязати таки рівняння:

1. Що це за число, що його пятикрать, поменшена на 15, рівна його трикраті, побільшеній на 41?

2. Що це за число, яке, побільшене на 25, стає рівне своїм двом третинам, побільшеним на 57?

3. Перша цифра по лівому краю двоцифрового числа є 1. Коли цифри переставити, отримаємо число на 9 більше від даного. Що це за число?

4. Що це за число, що його третина більша на 36 від його четвертини?

5. Коли в даному дробі, що має знаменик на 4 більший від чисельника, до знаменика й чисельника додати 3, то його вартість стане рівна $\frac{1}{2}$. Що це за дріб?

6. Я задумав собі якесь число. Коли його подвоїти, вислід зменшити на 8, а ріжницю поділити на 3, отримаємо число, на 3 більше від половини задуманого. Яке число я задумав?

7. Летіло стадо диких гусей. Один хлопчина каже до другого: «Дивися, летить сто гусей». На це другий, що встиг їх перечислити, відповідає: «Як би тих гусей було ще раз стільки, як їх є, а крім того ще половина й четвертина їхньої кількости та ще одна гуска, то аж тоді було б їх сто». Скільки гусей летіло?

8. Грач програв спершу шіснадцяту частину своїх грошей, а потім 371 карб., і мав стільки карбованців, скільки спочатку мав сотень. Скільки грошей мав він, сідаючи до гри?

9. Господар згодив наймита на 300 карб. у рік і вбрання в натурі. Через три місяці наймит відійшов, а по розрахунку прийшлось йому якраз убрання. Яка була вартість того вбрання?

10. Старшому братові вдвоє стільки років, як перед 10 роками було його братові, на 3 роки молодшому. Скільки років кожному з них?

11. Батько старший від сина на 30 років. Як би до років батька додати половину його віку й четвертину віку сина, отримали б на суму вік батька й сина разом. Скільки років батькові, а скільки синові?

12. Царі одної династії мали 9 імен. Перше ім'я носила третина всіх царів, друге — четвертина, третє — осьма частина, четверте — дванадцята частина. Останніх 5 імен подибувалося тільки по разові. Скільки царів було в тій династії?

13. Баба винесла яйця на базар і продала з них перше половину й пів яйця понад те, потім знову половину решти й пів яйця і т. д. Після п'ятої продажі зістало їй одне яйце. Скільки яєць мала вона зпочатку?*)

14. У кріпости є залога в 3520 чоловік; між ними є втроє стільки гарматчиків, як кінноточиків, а піхотинців учетверо стільки як гарматчиків. Скільки вояків є з кождого роду збруї?

15. Земля ділиться на 5 полос: одну гарячу й по дві поміркувані та холодні. Одна поміркована має площину рівну $\frac{15}{23}$ частинам гарячої, а холодна $\frac{7}{44}$ поміркованої. Обчислити величину кожної полоси, коли вся площина землі є 9 261 238 кв. миль.

16. Маю три бочки: дві менші й одну велику. Одна з тих менших має $\frac{3}{16}$, друга $\frac{5}{24}$ змісту великої. Коли переллю всю воду з другої меншої до першої, то зістанеться в ній іще 10 літрів. Подати зміст кожної бочки.

17. Господар має гуси й вівці, разом 432 штуки. Коли виміняє усі гуси на вівці так, що за 32 гуски дістане 3 вівці, то його отара овець числитиме 200 штук. Скільки має гусей?

18. Погорілець приходить ув одне товариство й просить жертви на відбудову своєї хати. Кожний із присутніх дає йому по 100

*) Треба вважати, що баба не могла розбивати яєць, щоби продавати по $\frac{1}{2}$ яйця. - Переконатися, що розвязкою рівняння буде непаристе число, отже половина того числа й пів яйця дасть якраз ціле число.

карбованців, а на це каже врадуваний погорілець: «Як би в цьому місті було стільки таких товариств, як тут є осіб, і кожна особа мені дала стільки, як тут мені дала, то я міг би відбудувати мою хату, що коштувала стільки тисяч, як тут є осіб!» Скільки кошт увала хата?

19. Один дармоїд проспав, числячи від скінченого 18-го року життя, $\frac{3}{8}$ свого життя, $\frac{1}{16}$ часу стратив на їжу й пиття, $\frac{1}{4}$ проходив, $\frac{3}{16}$ прогуляв, $\frac{1}{16}$ просидів у фотелі, а тільки два роки присвятив праці. Скільки років він жив?

20. У старій єгипетській рахунковій книжці Амеса (1700 року до Хр.) є така задача: «Ось жене пастух табун, зложений із 70 волів. Рахівник питає його: «Яка це частина всього твого майна?» Пастух відповідає: «Жену дві третини з третини всього мого стада. Обчисли мені, скільки в мене всіх волів».

21. Хлопчина перечислив всі свої горіхи та склав їх у коробку. Його товариш закрався туди й забрав половину горіхів, потім 10 горіхів, далі половину того, що зісталося, і ще 4 горіхи. — По якомусь часі почув докори сумління й забажав направити свій гріх: знову потайки став класти в коробку горіхи, у відворотному порядкові, як їх забірав, а саме: перше 10 горіхів, потім стільки, скільки їх там тоді було, далі 4 горіхи і ще раз подвоїв їхню кількість. — Коли властитель через якийсь час перечислив свої горіхи, знайшов там 108 горіхів і здивувався дуже, бо було їх більше, ніж він туди поклав. Скільки горіхів він мав на початку?

22. Єсть одне таке шостицифрове число, що кінчається цифрами 57 і має ту прикмету, що коли ці дві останні цифрі поставити на початку числа, то його вартість стане вчетверо більша. Що це за число?

23. Одна жінка принесла до ткача нитки, щоби він зробив із них полотно. Ткач сказав: «Коли хочете мати 10 метрів понад 1000, то принесіть мені ще 9 пасем ниток, але коли хочете мати на 10 метрів менше, то я вам зараз віддам 9 пасем ниток». Скільки пасем вона принесла?

24. Муляр міг би при денній 10-годинній праці збудувати на стільки муру більше понад 37 m^3 як він тепер, при $8\frac{1}{2}$ - годинній праці, будує менше від 37 m^3. Яка справність його праці?

II.

Укласти, розвязати й дослідити такі рівняння:

1. Що це за число, що поділене на a або зменшене на a, дає однаковий вислід?

2. Що це за число, що поділене на a, потім зменшене на a, дає на вислід якраз половину своєї вартости?

3. Що це за число, що помножене на p, потім збільшене на q, а нарешті поділене на r, дає на вислід q?

4. Яке число треба додати до чисельника і знаменика дробу $\frac{a}{b}$, щоб його вартість подвоїлася? щоб вона стала в k разів більша?

5. Яке мусить бути число x, щоби тричлен $6a^2 - a + x$ був подільний на $3a - 2$?

6. a-та й b-та частина якогось числа дають на суму те саме, що сума обох тих знаменників. Що це за число?

7. Мені є a років, мому молодшому приятелеві b років. Перед скільки роками мені було стільки років, на скільки мій приятель тепер молодший від мене?

8. Один бік прямокутника довший від другого на a. Коли обидва боки скоротити на a, то ріжницею попереднього й теперішнього прямокутника буде квадрат, боком якого є подвійний відтинок a. Обчислити боки прямокутника.

9. На дні ріки росте дерево, з якого вистає понад воду кусень довжини a. Коли це дерево пригнути так, щоби його вершок сховався під воду, але дерево не зігнулося, то віддаль від того місця, де дерево перше виставало з води, аж до місця погруження вершка, буде b. Обчислити висоту дерева*).

IV.

1. У якій порі між 4^h і 5^h обидві стрілки годинника творять просту лінію?

2. У якій порі між 7^h і 8^h стрілки творять прямий кут?

3. По обводі кола, що має 200 *cm* довжини, порушаються два тіла в тому самому напрямкові, рівномірним рухом, одне зі швидки-

*) Отсе завдання знаходиться в індійського математика Баскари (ур. 1114 по Хр.).

стю 10 *cm/sec*, друге 15 *cm/sec*. Коли вони зустрінуться вперше? коли вдруге? скільки разів на протязі 20 мінут?

Представити шлях кождого тіла як функцію часу. Вони зустрінуться тоді, коли ріжниця їхніх шляхів буде многократтю обводу кола.

4. Піхотинець, що на протязі 7^h відбуває дорогу 28 *km*, виходить із міста A. Рівночасно виїжджає за ним їздець із міста B, положеного на 54 *km* позаду A, і відбуває 28 *km* у 3^h. Коли їздець дожене пішохода?

5. Із одної місцевости виїхав експресний поїзд у 5^h ранку з швидкістю 75 *km/h*. В годину після виїзду поліція довідується, що тим поїздом тікає небезпечний шпіон, і висилає за ним у 6^h 30^m літаком своїх агентів, які мають затримати його на останній станції перед кордоном, віддаленій на 390 *km* від місця виїзду. З якою швидкістю мусить летіти літак, щоб агенти встигли виконати своє доручення?

6. Із одної місцевости виходять два посланці в цьому самому напрямкові; перший із швидкістю c_1 *km/h*, другий із швидкістю c_2 *km/h*, але цей другий вибірається в a^h після першого. Коли він дожене його?

7. По обводі кола з промінем r порушаються два тіла в протилежних напрямках, одне з швидкістю c_1, друге c_2. Як часто вони будуть зустрічатися?

8. Виходжу з хати й бачу, що дорогою, якою я маю йти, недавно перейшли повз мою хату два мої приятелі; попереду A, а трохи за ним B. Перший іде із швидкістю c_1, другий c_2, а віддаль між ними оцінюю на a кроків. Бачу, що B догоняє свого товариша, й задумую їх обох наздігнати якраз у той мент, коли вони обидва зустрінуться. Де й коли це станеться, коли в хвилині мого виходу з хати B був віддалений від неї на b кроків?

11. Обчислити часи синодичного оббігу т. зв. «великих планет» коли подані часи їхнього оббігу кругом Сонця (т. зв. «сидеричного оббігу»):

Меркур 88^d, Венера $224\frac{3}{4}^d$, Земля $365\frac{1}{4}^d$, Марс 1^a 322^d, Юпітер 11^a $314{,}8^d$, Сатурн 29^a 167^d, Уран 84^a $18{,}6^d$, Нептун 164^a 280^d.

V.

Розвязати й дослідити геометрично такі нерівности:

1. $3x+7>0$; 2. $6x-3>9x-5$; 3. $\frac{3}{4}x-\frac{2}{7}<0$;

4. $\frac{12x+7}{3} < \frac{x-5}{-2}$; 5. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 1$;

6. $\frac{3x+5}{8} - \frac{21+x}{2} > 5x-15$; 7. $\frac{2x-5}{3} < x < \frac{3x+1}{4}$;

8. $2x - \frac{1}{2} < 3x+1 < 4x + \frac{3}{2}$;

9. $ax + b < \frac{a+b}{2} x + a < (a-b)x + 2a$;

10. $\frac{a-b}{bx+c} > \frac{a+b}{bx-c}$.

11. Яку вартість мусить мати параметер m, щоби нерівність $mx + 3 < 0$ сповнювалася для всякої (додатньої та від'ємної) вартости x?

12. Те саме для нерівностей $mx + 6 < 0$ і $mx - 9 > 0$.

13. Котрі з простих, що належать до жмутка $y = ax + \frac{3}{2}$, перетинають вісь X між точками з рядними $x_0' = 2$ і $x_0'' = 3$?

14. Котрі з простих, що належать до громади $y + \frac{1}{2} x = b$, мають для $x < 2$ від'ємні рядні?

§ 14. Відношення й пропорції.

75. Відношення. а) Дві величині можна порівнювати на два способи:

1) питати, *на скільки**) одна більша від одної,

2) питати, *скільки разів* одна більша від одної.

Перше питання знаходить свою відповідь *у відніманні*, друге — *в діленні*.

Нпр. 20 від 4 більше *на* 16, але більше 5 *разів*.

Перший спосіб порівнювання дає *ріжницю двох чисел*, другий — *їхнє відношення***).

З цього пояснення видко зараз, що порівнювати можна тільки *неназвані числа*, а коли вони названі, то мусять бути *одноіменні*. Ріжниця двох названих чисел є названим числом тої самої назви, але *відношення з природи річі завсіди мусить бути неназваним числом*.

б) Числову вартість частки $\frac{a}{b}$ звемо *вартістю відношення* чисел a і b (чит.: a відноситься до b або коротше: a до b):

$$\frac{a}{b} = q. \tag{1}$$

a звемо *попередником*, b — *наступником* відношення. Число q має також назву *викладника* відношення.

До викладника відношення можна прикласти ті самі правила, що й до вартости частки та до вартости дробу, а саме:

$$a = bq;\quad \frac{a}{q} = b;\quad \frac{ka}{kb} = q;\quad \frac{a/r}{b/r} = q;\quad \frac{ka}{b} = kq;\quad \frac{a}{rb} = \frac{q}{r}$$

і т. д.

---

*) Або, як часами (неправильно) кажуть: «о скільки».

**) Ріжницю двох чисел називали давніше *аритметичним* відношенням, а частку — *геометричним* відношенням.

Коли $a > b$, отже $q > 1$, відношення звемо *ростучим;* коли $a < b$, отже $q < 1$ (т. зн. справжній дріб), відношення буде *спадаюче.*

в) Геометричним образом відношення $\frac{a}{b}$ можна вважати подекуди прямокутний трикутник із прямками a і b (рис. 75); тоді нахил протипрямки буде мірилом вартости відношення. З рисунку ясно, що вартість відношення (тоб-то нахил лінії) зросте, коли збільшити попередник або зменшити наступник.

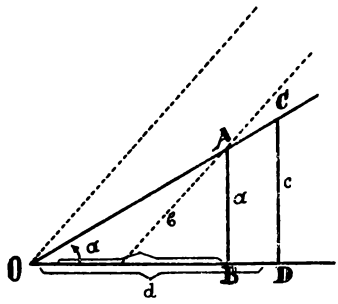


Рис. 75.

Коли $a > b$, отже відношення ростуче, тоді кут α при O більший від 45^0; коли $a < b$, отже відношення спадаюче, буде кут α менший від 45^0.

76. **Пропорції.** а) Порівняння двох однакових відношень звемо *пропорцією.* Коли:

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{і} \quad \frac{c}{d} = q, \tag{2}$$

то:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \tag{3}$$

(чит.: a [відноситься] до b, як c до d). Пропорцію пишуть теж часто в такій формі:

$$a : b = c : d, \tag{3'}$$

через те числа a і d звуться *крайніми*, b і c — *середущими* членами пропорції.

Спільну вартість (викладник) обох відношень звемо *чинником пропорційности.* З рівняння (2) виходить:

$$a = bq \quad \text{і} \quad c = dq, \tag{2a}$$

отже попередники обох відношень рівні відповідним наступникам, коли їх помножити на той самий чинник пропорційности.

Навпаки, коли два добутки мають спільний чинник, як у (2a), то з них можна скласти пропорцію (3).

З попереднього уступу виходить, що *чинник пропорційности мусить бути неназваним числом*, отже кожна пара чисел, a і b та c і d, мусить складатися з одноіменних чисел.

Нпр. ціни двох ріжних кількостей того самого товару пропорційні до відповідних кількостей товару: $\frac{15m}{10m} = \frac{450 \text{ карб}}{300 \text{ карб}}$; тут вартість відношення є обіруч $q = \frac{3}{2}$.

б) Коли обидва боки рівняння (3) поширити на bd, отримаємо:

$$ad = bc, \tag{4}$$

отже *в пропорції добуток крайніх членів рівний добуткові середущих членів.*

Отсе *основна прикмета пропорцій.* Пропорція, що сповнює це рівняння, зветься *вірною*; отсе рівняння служить до перевірки правдивости або неправдивости пропорції.

в) Пропорція звязує в рівняння чотири величині; з них три можуть бути довільно дані, а тоді вже четверта матиме приписану вартість. Обчислювання тої «четвертої пропорційної (величини)» зветься *розвязуванням пропорції.*

Нпр. із пропорції (3), де дані a, b, c, а треба обчислити d, матимемо на основі рівняння (4):

$$d = \frac{bc}{a}, \tag{4а}$$

отже: *крайній член пропорції рівний добуткові двох середущих, діленому на другий крайній.*

Подібно буде: *середущий член пропорції рівний добуткові двох крайніх, діленому на другий середущий*, нпр.:

$$c = \frac{ad}{b}. \tag{4б}$$

Нарисуймо на рис. 75 ще другий прямокутний трикутник OCD з прямками c і d; він буде собою уявляти те саме відношення, бо нахил протипрямки незмінений, отже:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Такі два трикутникі, як OAB і OCD, в геометрії звуться «подібними»: $\Delta OAB \sim \Delta OCD$.

Розвязати пропорцію можна теж геометрично; це значить, що коли дані три з поміж чотирох точок: A, B, C, D, — знайти четверту, рисуючи одну з рівнобіжних ліній AB або CD.

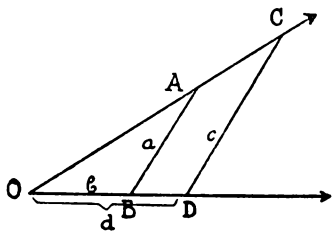


Рис. 76.

Трикутники, про які тут мова, не мусять бути прямокутні; геометрія вчить, що взагалі в двох подібних трикутниках (рис. 76) відповідні боки парами пропорційні. Задача: «шукати четвертої пропорційної до трох даних» і в цьому випадкові буде розвязуватися рисуванням рівнобіжних ліній.

З $\Delta OAB \sim \Delta OCD$ в рис. 75 і 76 виходять також такі пропорції: $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$ і т. д.

г) Рисування «четвертої пропорційної (довжини)» дає нам змогу *виконувати геометричні множення*, які позволяють нам з'ясовувати добуток двох відтинків не як площину (як було пояснено в уст. 19), а просто як довжину.

Добуток

$$p = ab \tag{5а}$$

можна представити в такій формі:

$$p.1 = a.b,$$

а з тих двох однакових добутків можна скласти таку пропорцію:

$$\frac{p}{b} = \frac{a}{1}. \tag{5б}$$

Щоби нарисувати відтинок бажаної довжини p, мусимо також знати одиницю довжини.

Це потрібне ось із яких причин: правий бік рівняння (5а) — це добуток двох довжин, отже величина, яка уявляє собою площину (її треба міряти квадратовими одиницями), а тому й лівий бік мусить бути квадратовою мірою. Коли ж хочемо, щоби величини p виступала як довжина, мусимо лівий бік представити як добуток числа p і такої величини, яка його вартости не змінить. Цею величиною є 1, і ця одиниця мусить теж уявляти собою довжину. Тоді в пропорції (5б)вартости обох відношень, $\frac{p}{a}$ і $\frac{a}{1}$, будуть неназваними числами (бо всі чотири числа уявляють собою довжини).

Отже, коли приймемо довільно якусь одиницю довжини, зможемо до трох величин: $a, b, 1$, нарисувати четверту пропорційну p (рис. 77, I і II).

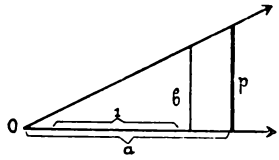


Рис. 77 (I).

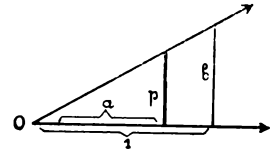


Рис. 77 (II).

Із них бачимо, що коли $a > 1$, то $p > b$, а коли $a < 1$, тоді $p < b$, як це й виходить із (5б).

77. **Функція „тангенс". Продовження досліду простої лінії.** а) Нарисуймо довільний кут α (рис. 78) і з довільної точки одного ра-

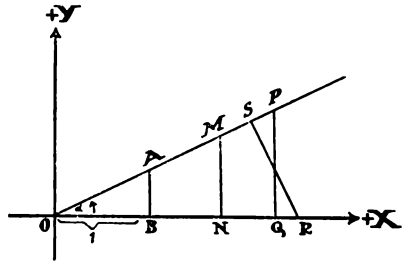


Рис. 78.

мена M поведім прямову MN до другого рамена; повстане прямокутний трикутник OMN, що має прямки MN та ON. Коли те саме зробимо з точки P, отримаємо другий прямокутний трикутник OPQ, подібний до першого. З того виходить, що їхні прямки творять пропорцію:

$$\frac{MN}{ON} = \frac{PQ}{OQ}.$$

Вартість того відношення не зміниться, скільки трикутників ми не нарисували б, нпр. ORS (точка S лежить на другому рамени), воно залежить тільки від кута α, отже є його *функцією*; вона отримала назву *тангенс* і знак *tg:*

$$\frac{MN}{ON} = tg\alpha,$$

отже: *тангенс кута — це відношення прямок трикутника: протилежної тому кутові до прилежної йому.*

Коли поведемо необмежену просту з точки O під кутом α і вона матиме рівняння:

$$y = ax,$$

то її співчинник нахилу a буде висотою східця при постійній ширині 1. Відміряймо на поземій прямці одиницю довжини OB; тоді з $\triangle OAB$ й якого-небудь другого, йому подібного, виходить:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{MN}{ON} = tg\alpha,$$

а що $AB = a$, $OB = 1$, то:

$$a = tg\alpha. \tag{6}$$

Так отже *співчинник нахилу простої — це тангенс кута нахилу тої простої до осі X.*

б) Маючи це нове поняття, зможемо з рівняння простої відчитувати теж кут її нахилу до осі X; до того одначе треба дослідити зміни функції *тангенс* при зміні кута.

Нарисуймо півколо промінем $OB = 1$ (рис. 79); поведім у ньому довільний промінь OP під кутом α і продовжім його аж до перетину з доторкальною, що поведена в точці B, т. зн. до точки A; тоді буде: $tg\alpha = \frac{AB}{BO} = AB$, отже тангенсом кута α буде відтинок AB, якщо його міряти-мемо одиницею OB. Уважаймо промінь OP рухомим, тоді з ростом кута α ростиме відтинок AB, отже: *тангенс кута росте разом із кутом.*

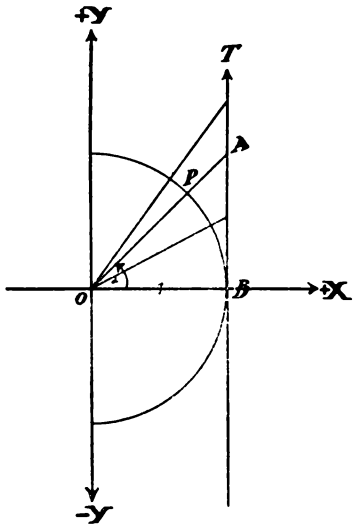


Рис. 79.

Коли промінь OP впаде на OB, кут α зменшиться до 0^0, а одночасно й його тангенс дійде до нуля (бо A впаде на B), отже:

$$tg\ 0^0 = 0. \tag{7}$$

Навпаки, коли кут α наближатиметься до прямого, точка A

буде відбігати дуже високо вгору так, що рухомий промінь буде змагати до осі Y, отже до того, щоби стати рівнобіжним до доторкальної AB; тоді маємо право написати, що:

$$\lim_{\alpha \to 90^0} tg \ = \infty;$$

замість того пишуть також коротше:

$$tg\ 90^0 = \infty. \tag{8a}$$

Для $\alpha = 45^0$ трикутник стане рівнораменний, отже обидві прямки будуть однакові, т. зн.:

$$tg\ 45^0 = 1. \tag{9}$$

Коли рисуватимемо всі кути між 0^0 і 90^0 і відмірюватимемо за кожним разом відтинок AB, отримаємо бажані вартости функції тангенс; вони зібрані в табл. III на кінці книжки. З неї навпаки можна відчитати кут, коли даний його тангенс, тоб-то співчинник нахилу простої.

Ось так проста

$$y = \frac{3}{4} x + 1$$

відзначує на осі Y відтинок $+ 1$, а її співчинник нахилу є $a = \frac{3}{4}$; з таблички відчитаємо, що кут α, тангенс якого є $\frac{3}{4} = 0{,}75$, лежить між $36{,}5^0$ і 37^0; можемо приймити в приближенні, що $\alpha = 36^0 45'$.

Коли проста опадає, треба, як згадано, висоту східця вважати від'ємною; згідно з тим приймемо, що кут α теж від'ємний.

Нпр. проста

$$y = -2x$$

творить із віссю X від'ємний кут, тангенс якого має без'оглядну вартість 2. Він лежить між 63^0 і $63{,}5^0$, отже приймемо його по середині: $63^0 15'$, так що $\alpha = -63^0 15'$.

в) Напишім рівняння простої в напрямковому вигляді:

$$y = ax + b \tag{10}$$

й дослідім ріжні можливости що-до даних.

(1) Нехай будуть дані: кут нахилу α і відтинок b; тоді маємо $a = tg\alpha$, отже рівняння простої буде:

$$y = tg\ \alpha \,.\, x + b.$$

(2) Нехай будуть дані: кут нахилу α й точка $P\,(x_1,\ y_1)$, через яку переходить проста; коли в це рівняння підставимо:

$$x=x_1,\ y=y_1,$$

матимемо:

$$y_1 = tg\alpha\ .\ x_1 + b,$$

а коли те все віднімемо від даного рівняння, матимемо:

$$y - y_1 = tg\ \alpha\ .\ (x - x_1),$$

або:

$$y = tg\alpha\ .\ x + (y_1 - tg\alpha\ .\ x_1).$$

(3) Врешті можемо обчислити кут нахилу простої, що переходить через дві точці: $P_1\,(x_1,\ y_1)$, та $P_2\,(x_2,\ y_2)$ (рис. 80); тоді з $\measuredangle P_1RP_2$ читаємо:

$$a = tg\alpha = \frac{P_2R}{P_1R} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (11)$$

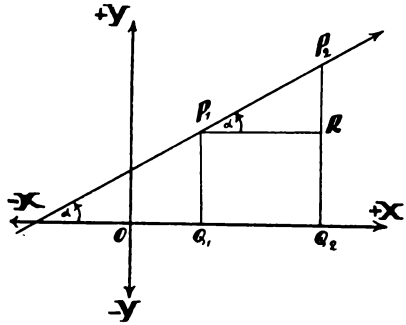


Рис. 80.

Нпр. проста, що переходить через точки $P_1(2,\ -1)$, $P_2(-2,\ -3)$, творить кут α, для якого є:

$$tg\alpha = \frac{(-3)-(-1)}{(-2)-(+2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5;$$

з табл. III читаємо: $\alpha = 26^0 45'$.

78. **Переміни пропорції.** а) Одну й ту саму пропорцію можна представляти на безліч ріжних способів, і завсіди вона зістанеться вірною. Виходить це з того, що основне рівняння пропорції, (3), можна перемінювати на ріжні способи. З окрема ж можна:

1) обидва члена кожного відношення скоротити або поширити (як дроби):

$$\frac{ka}{kb} = \frac{c}{d} \quad \text{або} \quad \frac{\frac{a}{r}}{\frac{b}{r}} = \frac{c}{d};$$

2) поширити або скоротити обидва попередники або обидва наступники:

$$\frac{ka}{b} = \frac{kc}{d} \quad \text{або} \quad \frac{\frac{a}{r}}{b} = \frac{\frac{c}{r}}{d}; \quad \text{або} \quad \frac{a}{lb} = \frac{c}{ld} \quad \text{або} \quad \frac{a}{\frac{b}{m}} = \frac{c}{\frac{d}{m}};$$

3) переставити крайні члени між собою або середущі між собою або одні й другі (не мішаючи одначе ніколи одних із другими):

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad \text{або} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{або} \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a};$$

4) переставити попередники з попередниками, а наступники з наступниками, — або в обох відношеннях попередники з наступниками:

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \text{ або } \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ і т. д.}$$

Ці всі переміни виходять із перетворень добутку $ad = bc$; зате з аритметичного боку важний іще один, складніший ряд перемін:

5) Додаймо до обох боків рівняння (1) одиницю:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1,$$

а це, зведене до спільних знаменників b і d, дасть:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \qquad (*)$$

отже: *до обох попередників можна додати їхні наступники.*

Через переставлення середущих членів отримаємо:

$$\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}, \qquad (*')$$

а подібно можемо теж знайти, що:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}. \qquad (*'')$$

6) Так само можемо одиницю від обох боків рівняння відняти, а це після редукції дасть:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}, \qquad (**)$$

отже: *наступники можна також віднімати від попередників*, — і два рівняння, подібні до (*') і (*'').

7) Врешті поділім відповідними боками рівняння (*) і (**):

$$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{\frac{c+d}{d}}{\frac{c-d}{d}},$$

а коли тут обидва дроби ліворуч розширимо на b, а праворуч на d, то другорядні знаменики відпадуть і зістанеться:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}. \qquad (12)$$

Цей останній взірець пояснимо геометрично так (рис. 81):

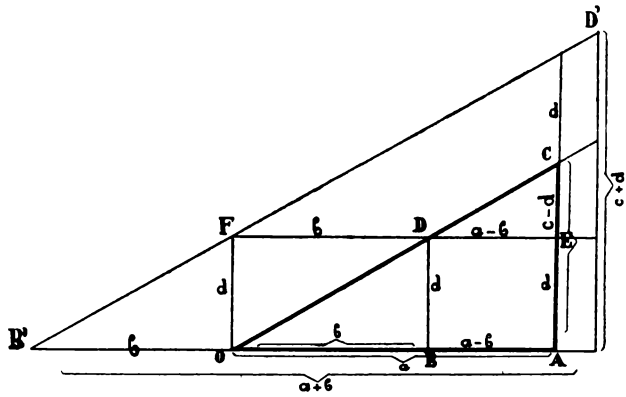


Рис. 81.

З $\Delta B'AD' \sim \Delta B'OF$ читаємо: $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, а з $\Delta DEC \sim \Delta DOB$: $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$; врешті з $\Delta B'AD' \sim \Delta DEC$ матимемо: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

Що всі ці трикутники подібні між собою, бачимо з їхньої конструкції.

б) Провіримо геометрично основне рівняння пропорцій (рис. 82). На перекутні прямокутника вибіраємо довільну точку й ведемо через неї прості, рівнобіжні до обох боків. Таким способом отримаємо чотири прямокутні, парами

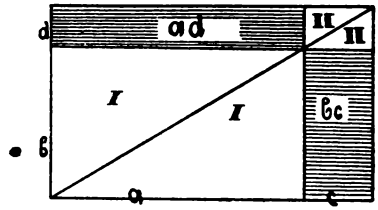


Рис. 82.

подібні й парами пристайні трикутники та два прямокутники; ізза подібности тих прямокутників мусить між їхніми прямками: a, b, c, d, заходити звязок: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Перекутня ділить цілий прямокутник на два однакові прямокутні трикутники; коли з них повідрізувати однакової величини трикутники I і II зістануться однакові решти, т. зн. *обидва зарисовані прямокутники є однакової величини:* $ad = bc$.

в) Коли в пропорції $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ переставимо середущі члени, отримаємо:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d};$$

тут обіруч є теж однакові вартости відношення (чинники пропорційности), тільки що тепер вони не мусять бути неназваними числами. Бо коли a і b та c і d мають однакові назви, то назви часток $\frac{a}{c}$ та $\frac{b}{d}$ будуть похідними одиницями, але однакового роду.

Нпр. із $\frac{15m}{10m} = \frac{450 \text{ карб}}{300 \text{ карб}}$ виходить пропорція: $\frac{15m}{450 \text{ карб}} = \frac{10m}{300 \text{ карб}}$, а її чинник пропорційности буде $q = \frac{1}{30}\, m/\text{карб}$; тут отримуємо нову похідну одиницю m/карб, придатну тільки для тої одної чи инших подібних задач.

Звідсіля бачимо, що значіння чинника пропорційности треба поширити на такі випадки, де він буде названою величиною, часами навіть доволі дивної будови.

г) Нехай буде дана більша кількість однакових відношень, нпр.:

$$\frac{a}{b} = q,\ \frac{c}{d} = q,\ \frac{e}{f} = q, \ldots, \frac{m}{n} = q, \ldots, \frac{x}{y} = q, \qquad (13)$$

тоді можемо їх написати так:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ... = \frac{m}{n} = ... = \frac{x}{y} \qquad (13a)$$

і матимемо *зложену пропорцію;* спільна вартість усіх тих відношень, тоб-то відповідний чинник пропорційности q, може бути неназваною або названою величиною. З рівняння (13) виходить:

$$a = bq,\ c = dq,\ c = fg, \ldots,\ m = nq, \ldots,\ x = yq.$$

Про числа:

$$a,\ c,\ e,\ \ldots\ ,\ m,\ \ldots\ ,\ x;$$
$$b,\ d,\ f,\ \ldots\ ,\ n,\ \ldots\ ,\ y;$$

кажемо, що вони творять *два ряди пропорційних величин.* Із одного такого ряду можна отримати другий, коли всі його члени помножимо одним і тим самим числом (тоб-то чинником пропорційности q чи його відворотністю $\frac{1}{q}$).

Зложеній пропорції можемо надати ще инший вид. Переставмо в двох перших відношеннях із ряду (13а) середущі члени й напишім:

$$a : c = b : d;$$

тоді побіч них можемо написати ще більше попередників і ще більше наступників:

$$a : c : e : \ldots : m : \ldots : x = b : d : f : \ldots : n : \ldots : y. \qquad (14)$$

Це буде *біжуча пропорція.* З неї можна творити прості пропорції так, що з кожного боку візьмемо по два члени, які стоять на однакових місцях, нпр.:

$$e : m = f : n.$$

г) «Кути пятикутника стоять у відношенні 4 : 5 : 6 : 7 : 8; обчислити їхню величину».

Нехай вони звуться α, β, γ, δ, ε; тоді матимемо:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon = 4 : 5 : 6 : 7 : 8,$$

а їхня сума буде, як відомо:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = 540^0.$$

Назвім чинник пропорційности x, тоді матимемо:

$$\alpha=4x,\ \beta=5x,\ \gamma=6x,\ \delta=7x,\ \varepsilon=8x,$$

отже далі буде:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = 30x = 540^0,$$

а звідсіля:

$$x = 18^0,$$

т. зн.:

$$\alpha=72^0,\ \beta=90^0,\ \gamma=108^0,\ \delta=126^0,\ \varepsilon=144^0.$$

Із (13) на основі рівняння (*) (стр. 189) виходить:

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\dots,$$

отже далі:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{e}{f}=\dots,$$

і загалом:

$$\frac{a+c+e+\dots+x}{b+d+f+\dots+y}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\dots=\frac{x}{y}. \tag{15}$$

79. **Ужиток пропорцій.** а) У практичних обчисленнях доволі часто приходиться нам шукати четвертої пропорційної, а що в такому разі мусять бути дані три величині, то такі завдання мають назву «троїстого правила». Його застосовуємо тоді, коли дані величини, які є пропорційні до невідомої.

Нпр. ціни пропорційні до кількости товару, довжина шляху пропорційна до часу, в якому тіло відбуває рух і т. д.

Є два роди пропорційности: *пропорційність пряма*, коли величини обох родів одночасно ростуть або одночасно меншають (нпр. кількість краму й загальна ціна, або час і довжина шляху), та *пропорційність відворотна*, коли величини одного роду ростуть при рівночасному меншанні величин другого роду (нпр. більше число робітників зробить ту саму роботу в коротшому часі і т. д.).

б) Коли за m одиниць (міри, ваги, змісту) якого-небудь краму платимо n одиниць ціни, а за x одиниць того самого краму маємо заплатити y, тоді обидві кількости: краму m, x, і ціни за нього n, y, є пропорційні, отже маємо таку пропорцію:

$$y : n = x : m.$$

Тут змінна x незалежна, а змінна y залежна, бо ж ми добровільно беремо кількість краму і аж тоді встановлюється ціна, отже ця пропорційність веде до такого функційного рівняння:

$$y=\frac{n}{m}x. \tag{16}$$

тут співчинник $\frac{m}{n}$ уявляє собою «одиничну ціну»; її отримаємо, коли приймемо $x = 1$. Отсей чинник пропорційности є названою величиною з назвою: $\frac{\text{ц і н а}}{\text{кількість краму}}$. Рівняння

$$y = ax$$

має за свій образ просту лінію, і звідсіля пішла назва «прямої пропорційности».

Чотири дані величини: x, y, m, n, що стоять у *простій* пропорційности, можна написати по такій схемі:

$$\begin{array}{|ccc|} \downarrow x & \text{——} & y \downarrow \\ m & \text{——} & n \end{array}$$

Тут стрілками назначений порядок, у якому треба складати ці величини в пропорцію, отже при прямій пропорційности ці дві стрілці мають однаковий хід.

в) Коли ж нпр. m робітників виконує якусь працю в n днях, а x робітників має її скінчити в y днях, то ми тут маємо дві однакові кількости робітних днів:

$$xy = mn. \tag{17}$$

Кількість робітних днів є тут відома, а саме: $mn = a$, отже:

$$xy = a.$$

Звідсіля:

$$y = \frac{a}{x} \tag{18}$$

(тут чинник пропорційности має назву: «робочі дні»).

Образом відворотної пропорційности є рівнобічна гіпербола.

З рівняння (17) виходить така пропорція:

$$y : n = m : x.$$

отже коли напишемо схему *відворотної* пропорційности:

$$\begin{array}{|ccc|} \downarrow x & \text{——} & y \uparrow \\ m & \text{——} & n \end{array}$$

то обидві стрілці будуть мати протилежні ходи.

80. **Рахунок простих відсотків.** а) Завдання рахунку простих відсотків можна висловити так: «пайок, що припадає від 100

одиниць, є p; знайти пайок d, що припадає від k одиниць, як четверту пропорційну». Розвязкою того завдання є пропорція:

$$p : 100 = d : k, \tag{19}$$

або основне рівняння:

$$kp = 100d. \tag{20}$$

З нього обчислюємо k, p або d, коли дві другі величині дані, а саме:

$$d = \frac{kp}{100}, \quad k = \frac{100\,d}{p}, \quad p = \frac{100\,d}{k}. \tag{21}$$

У грошевій (банковій) практиці величина d — це прибуток від капіталу k, складеного до каси при «відсотковій стопі» $p^0/_0$. Цей прибуток розуміється завсіди на протязі одиниці часу, якою тут являється один рік.

На протязі t років прибуток зросте пропорційно й буде:

$$d = \frac{kpt}{100} \text{ *)}. \tag{22}$$

б) У купецьких та банкових рахунках уживають взірців (21) та (22) дуже часто, і то в ріжних видах. Величина d (відсотковий прибуток) означує часто *опуст* (скидку) при купівлі більшої кількости краму (або т. зв. рабат), *есконт* (опуст, який отримуємо, коли за куплений крам платимо готівкою, а не беремо його в борг), *дисконт* (опуст із заплачених відсотків, коли повертаємо борг перед умовленим часом) і т. д.

Нпр. «Борг K треба повернути через рік; скільки заплатили б ми сьогодня, як би банк признав нам $p^0/_0$ дисконту?»

Нехай сума, яку треба заплатити сьогодня, буде x; тоді через рік отримали б ми за неї $\frac{xp}{100}$ з відсоткового прибутку, отже мусить бути:

$$x + \frac{xp}{100} = K.$$

Звідсіль обчислимо:

$$x = \frac{K}{1+\frac{p}{100}} = \frac{100\,K}{100+p},$$

А сам опуст (дисконт) буде: $\frac{xp}{100} = \frac{Kp}{100\,(1+\frac{p}{100})}$,

*) При більшій кількости років числять звичайно т. зв. «складані відсотки» (див. § 34) — через те тут в буде означувати переважно час, менший від одного року, отже місяці або дні.

т. зн.:

$$\frac{xp}{100} = \frac{Kp}{100+p}.$$

У практиці дуже часто приходиться числити дисконт за инший протяг часу, як повний рік.

Нпр. «Віддано суму K як борг, позичений на $p^0/_0$ на t днів; скільки з того припало на сплату боргу, а скільки на відсотки?»

Коли висоту позиченої суми назвемо x, то $p^0/_0$ відсотки на t днів дадуть $\frac{xpt}{36000}$, отже буде:

$$x + \frac{xpt}{36000} = K, \quad x = \frac{36000K}{36000+pt},$$

а відповідно до того матимемо дисконт:

$$\frac{xpt}{36000} = \frac{Kpt}{36000+pt}.$$

Споріднені з тим такі завдання, як нпр.:

(а) «Спроваджений крам важив *брутто* Qkg; *тара* почислено $p^0/_0$ від *нетто*. Скільки раховано *нетто*?»

Назвім вагу *нетто* x, тоді є тара $=\frac{xp}{100}$, а *брутто*:

$$Q = x + \frac{xp}{100},$$

отже:

$$x = \frac{100\,Q}{100+p}.$$

(б) «Після потручення $p^0/_0$ відсотків виплачено суму Q; скільки належалося без потручення?»

Коли належалася сума x, то потручено з неї $\frac{xp}{100}$, отже виплачено:

$$Q = x - \frac{xp}{100}.$$

Таким чином належна сума була:

$$x = \frac{100\,Q}{100-p}.$$

в) *Заміна відсотків на кутові ступіні. Колові діяграми.* Відсотковий рахунок грає часто роль при складанні колових діяграм (див. уст. 9, рис. 8), у яких дані величини пропорційні до площин відповідних колових вирізків. Для рисування таких діяграм треба нам уміти замінювати відсотки на кутові ступіні. Це веде до такої пропорції:

$$p : g = 100 : 360, \qquad (23)$$

де p означує відсотки, а g — ступіні, — бо нам треба зрівняти 100 відсотків із 360 ступінями повного кута. Звідсіля:

$$g = \frac{360p}{100} = 3{,}6p. \tag{24}$$

Нпр. «Катеринославська губернія по перепису з 1910 р. начислювала 2110000 душ; у тому числі 69% Українців, 17% Москалів, 5% Жидів, 4% Німців, 2%Греків та по 1%: Татар, Білорусів і Поляків. Подати кількість мешканців кожної національности й представити наглядно те відсоткове відношення».

По взірцеві (24) та на основі правил про обчислювання відсотків матимемо:

Українців е	69%	=	1 455 900	душ,	а це відповідає	кутові	248,4°;
Москалів	17%	=	358 700	»	» »	»	» 61,2°;
Жидів	5%	=	105 500	»	» »	»	» 18,0°;
Німців	4%	=	84 400	»	» »	»	» 14,4°;
Греків	2%	=	42 200	»	» »	»	» 7,2°;
Татар	1%	=	21 100	»	» »	»	» 3,6°;
Білорусів	1%	=	21 100	»	» »	»	» 3,6°;
Поляків	1%	=	21 100	»	» »	»	» 3,6°;
Разом	100%	=	2 110 000				360,0°.

Тут, очевидно, можуть бути недокладности навіть у десятках тисяч, бо склад населення подано тільки в цілих відсотках.

81. **Рахунок змішки.** а) «Змішано два роди краму: a одиниць (тягару або змісту) одного в ціні m за одиницю і b одиниць другого по n; яка буде вартість одиниці змішки?»

Увесь крам, змішаний, буде собою уявляти вартість $am + bn$, а його кількість буде $m + n$ одиниць тягару чи змісту. Коли одиничну ціну змішки назвемо x, матимемо рівняння:

$$(m + n)x = am + bn,$$

а звідсіля:

$$x = \frac{am + bn}{m + n}. \tag{25}$$

Це завдання творить зміст *рахунку змішки;* його можемо змінювати на ріжні способи так, що часами вартість одиниці змішки буде дана, а невідома буде одна з цін або одна з складових кількостей і т. д.

Нпр. «скільки *kg* гіршої кави, по 140 карб. за 1 *kg*, треба додати до 15 *kg* ліпшої по 200 карб. за 1 *kg*, щоби мішанка коштувала по 180 карб?»

Назвім невідому кількість гіршого роду кави x; тоді матимемо вартість

поодиноких складників: ліпшого 200 . 15 і гіршого 140 . x, а вартість мішанки буде 180 . (15+x), отже з того вийде рівняння:

$$180 \cdot (15+x) = 200 \cdot 15+140 \cdot x$$

із розвязкою $x = 7\frac{1}{2}\ kg$.

Як окремий рід рахунку змішки треба згадати *пересічний рахунок*. «Пересічна вартість» n ріжних величин: a_1, a_2, ..., a_n буде n-ою частиною їхньої суми:

$$\bar{a} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}. \tag{26}$$

б) *Змішування дорогоцінних металів*. Золота й срібла ніколи не вживають у чистому стані, бо вони занадто мягкі; тому домішують до них якогось твердшого металу, звичайно міді. У такій змішці розріжнюємо:

повний тягар, тоб-то тягар цілого кусня змішки, і

чистий тягар, тоб-то тягар щирого золота або срібла в даному кусні змішки.

Ступінь змішки подають у тисячних частинах («проміль» — promille — знак $^0/_{00}$) щирого металу; цю кількість звуть також «спробою змішки».

Коли нпр. на 1000 g змішки є 900 g чистого металу, кажемо, що це метал $900^0/_{00}$-ий або «спроби 900».

Ось так нпр. «Скільки щирого срібла є в тарілці, що важить 2250g, коли спроба металу є 825?»

Це завдання розвяжемо при допомозі троїстого правила:

у 1000g змішки є 825g щирого срібла;
у 2250g ,, x ,, ,,

а що тут, очевидно, пропорційність пряма, то буде:

$$1000 : 2250 = 823 : x,$$

отже:

$$x = \frac{2250 \cdot 823}{1000} = 1856{,}25g \text{ щирого срібла.}$$

Отсю спробу звуть також *французькою*. Спробу часто подають теж у *каратах*; тоді її відносять до основного числа 24 (так само, як відсотки до основного числа 100). Так нпр. 16-каратове золото має на 24 g змішки 16 g щирого металу.

Нпр. «перстень із 14-каратового золота важить 35 *g*; скільки там щирого металу?»

Пропорцію отримаємо таким способом:

на 24 *g* змішки маємо 14 *g* щирого металу,
» 35 » » » »

$$x : 14 = 35 : 24,$$

$$x = \frac{14 \cdot 35}{24} = 20{,}4\ g.$$

На землях давньої Росії спробу золота відносять до основного числа 96 (таке відношення золотника до долі), отже *російську* спробу отримаємо з каратової, коли її помножимо на 4.

Нпр. 14-каратове золото є 56-ої спроби; золото спроби 84 є $\frac{84}{4} = 21$-каратове, Щоб обчислити французьку спробу, треба дріб $\frac{84}{96}$ або $\frac{7}{8}$ перемінити так, щоби дістав знаменик 1000; це дасть таке рівняння:

$$\frac{x}{1000} = \frac{84}{96} = \frac{7}{8},\ \text{т. зн.:}\quad x = 875.$$

Навпаки з французької спроби дістанемо каратову, шукаючи чисельника до дробу зі знаменником 24; отже щоби знайти. скільки каратів має золото нпр. 750-ої спроби, творимо рівняння:

$$\frac{x}{24} = \frac{750}{1000} = \frac{3}{4},\ \text{т. зн. } x = 18.$$

в) «До 5*l* води в температурі 11°C вкинено залізну кулю, ваги 10*kg*, яка передтим була в кипятку. До якої температути нагріється вода, коли питоме тепло заліза є 0,11?»

Скажім, що вода нагріється до x^0C; на те треба $5 \cdot (x - 11)$ калорій, бо питоме тепло води = 1. Одночасно залізо остигне з 100^0 до x^0, т. зн. на $(100-x)^0$C; воно віддасть при цьому $10 \cdot 0{,}11 \cdot (100-x)$ калорій, які підуть на підгріття води. З того виходить таке рівняння:

$$5 \cdot (x-11) = 10 \cdot 0{,}11 \cdot (100-x),$$

а його корінь є: $x = 27^0$.

ВПРАВИ.

1. Подати в цілих числах такі відношення:

$$3\frac{1}{3} : 4\frac{1}{4};\quad \frac{12}{11} : \frac{15}{22};\quad \frac{6}{7} : \frac{5}{12};\quad 2\frac{3}{8} : 1\frac{25}{32}.$$

2. Представити найменшими числами такі відношення:

1000 : 960; 840 : 720; 1280 : 1440; 5600 : 6720; 3,14159... : 6,28318...; 2,71828... : 8,15484...

3. Обчислити вартість таких відношень:

а) 24 грив. : 28 грив.; $14m : 12m$; $4\frac{3}{4}m^2 : 5\frac{4}{5}m^2$; $4\frac{1}{3}kg : 13kg$; $8{,}5l : 17l$;

б) $(m^2+2mn+n^2) : (m^2-n^2)$; $(m^3-n^3) : (m^2-n^2)$;

$$\left[a+b-\frac{ab}{a+b}\right]:\left[a-b+\frac{ab}{a-b}\right];\quad \frac{1}{a}:\frac{1}{b};\quad \frac{a}{b}:\frac{b}{a};\quad \left(1+\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{a}{b}\right).$$

4. У 1886 р. Еспанія мала 9309 *km* залізничої лінії і 17 мілiонів населення, а Італія 11388 *km* залізниць і 27 мілiонів населення. Котра держава мала густішу залізничу сітку в порівнянні до числа населення?

5. Утворити пропорції з таких рівних добутків: $axy = bzu$; $4a = 3b$; $5a^2x = 4b^2y$; $xy = x'y'$; $xx' = yy'$.

6. Чи вірні такі пропорції:

$$1\frac{3}{4} : 7 = 3 : 12;\quad \frac{6}{9} : 8 = \frac{1}{2} : 6;\quad \frac{12}{13} : \frac{5}{8} = \frac{4}{9} : \frac{8}{27};$$

8378 : 5866 = 5073 : 3547?

7. Розвязати рахунком і рисунком такі пропорції:

$$5\frac{1}{8} : x = 7 : 3;\quad \frac{1}{5} : \frac{2}{15} = x : \frac{2}{3};\quad 2m : 3n = 5m : x;$$

$$x : \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a-b)^2}{a+b} : \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2};\quad (a^3-1) : x = (a-1) : a;\quad (3+x) : 3 = 5 : 7;$$

$$\frac{x-m}{x+m} = \frac{2}{3};\quad \frac{3+x}{3} = \frac{1}{4};\quad 4 : (3-x) = 1 : x.$$

8. З пропорції $a : b = c : d$ вивести такі:

$$\frac{ma+nb}{pa+qb} = \frac{mc+nd}{pc+qd};\quad \frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{pa+qc}{pb+qd}.$$

9. Коли $a : b = b : c$, то $(a^2+ab+b^2) : (b^2+bc+c^2) = a : c$. Докажіть це!

10. Сума двох чисел, що стоять у відношенні $3 : 2$, є 30. Що це за числа?

Назвім ці числа x і y, тоді є $x : y = 3 : 2$. Вводячи чинник пропорційности k, матимемо: $x = 3k$, $y = 2k$; а що умова задачі вимагає $x+y=30$, то буде $3k + 2k = 30$. Звідсіля знайдемо k.

11. Ріжниця двох чисел 40, а їх відношення $3 : 4$. Що це за числа?

12. Стовп на 2 m заввижки кидає тінь на 2,5 m завдовжки; яка висота вежі, що її тінь у ту саму пору має 57,4 m довжини?

13. Писар переписав 2 сторінок рукопису в $5^h\ 10^m$; скільки часу треба йому на переписку 45 сторінок?

14. До копання шанців, які мали бути готові на протязі 2 тижнів, треба було 48 робітників; скільки робітників треба приставити, щоби праця була готова на 2 дні скоріше?

15. Будівельний підприємець піднімається виконати працю в 30 днях, маючи 24 робітників. Як довго триватиме робота, коли йому вдалося дістати тільки 20 робітників?

16. Машина працює добре тоді, коли йде не довше над $2\frac{1}{2}$-місяця (по 30 днів) по 4 години денно. Як довго може вона бути в руху, коли мусить іти по $7\frac{1}{2}h$ денно?

17. Половину замовленої праці виконало 8 робітників у 12 днях; як довго буде тривати друга половина праці, коли 2 робітники відійшли?

18. Скільки то є: 2%, $3\frac{1}{2}\%$, 5%, $7\frac{1}{2}\%$, 10%, 15%, 20%, 25%, $33\frac{1}{3}\%$, 40%,... від: 4000 kg, 487 l, 75000 карб, 811 m, 73290 m^2?

19. Скільки у $\%$ є: половина, третина, четвертина, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{20}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{50}$ частина цілости?

20. Підприємець заробив 282 398 карб; скільки вклав він у те підприємство, коли зиск приніс 11% від вкладового капіталу?

21. Продано якусь річ за 2700 карб. разом із 14%-им зиском. Який був цей зиск?

22. Скільки важило тара, коли брутто (чи нетто) було 748 kg а тара — це 14% ваги брутто?

23. Прикащик у крамниці отримував 24 000 карб. річно і $1\frac{1}{4}$ % від чистого зиску з продажі. Скільки він заробив разом, коли крамниця мала 9 600 000 карб. валового прибутку, а в цьому було 15% чистого?

24. На протязі 15 місяців капитал зріс на $\frac{1}{16}$ своєї вартости; на який процент він був складений?

Відсотковий прибуток від K за 15 міс. є $\frac{Kp}{100} \cdot \frac{15}{12} = \frac{K}{16}$; обчислити звідсіля p. Звернути увагу на те, що величина капиталу тут не грає ніякої ролі; чому?

25. Купець купив 15 лютого крам і мав за нього заплатити по 180 днях 84 750 карб.; скільки заплатить він на 1 квітня, коли числити 2% дисконту?

26. Купець мав заплатити за крам аж по 4 місяцях, але він платить сьогодня й отримує 485 карб. скидки. Яка ціна краму, коли числити есконт $2\frac{1}{2}$%?

27. На скільки % почислено есконт, коли замість 78 300 карб., платних через 90 днів, заплачено сьогодня 77 712,75 карб.?

28. До розбивання камінів у копальнях уживають пороху, в якому відношення кількости салітри до вугля є 16 : 5, а салітри до сірки 10 : 3. Скільки є кожного з тих трох складників у 5934 *kg* пороху?

29. 1 *l* 75%-го алькоголю важить 900 *g*. Скільки важить 1 *l* 48%-го алькоголю, коли приймемо, що 1 *l* води важить 1 *kg*?

30. Яку спробу (французьку) має 6-, 8-, 12-, 14, і 18- каратове золото?

31. Австрійська золота 20-коронівка, спроби 900, важить 6,775 *g*; скільки в ній щирого золота? Чи вона мала повну свою вартість, коли передвоєнна ціна золота було 3280 корон за *kg*?

32. Золота 20-франківка, тої самої спроби, важить $6\frac{14}{31}$ *g*; скільки в ній золота і яку вона має вартість?

33. Яка вартість 1 гривні в золоті та в коронах, коли вона містить у собі 8,712 долі щирого золота, а на 1 *g* іде $22\frac{1}{2}$ долі?

34. Срібний ліхтар, спроби 625, важить 5 *kg*; скільки в ньому щирого срібла?

35. Кріпость має поживу для 15 000 жовнірів на 1 місяць. Комендант отримує наказ, зменшити пайки на $\frac{1}{4}$ і відіслати частину війська з фортеці, щоби протриматися 4 місяці. Скільки людей мусить відправити?

36. Книжку, що в першому виданні мала 212 сторінок друку, по 33 рядки на кожну, з 60 буквами у рядку, передруковано у форматі, який містить 41 рядків по 65 букв на сторінку. Скільки сторінок матиме книжка тепер?

Вислід буде тільки приблизний; пояснити причину.

37. Обчислити відсотковий етнографичний склад населення поодиноких земель України й складати колові діяграми по таких даних*):

	Край	Простір km^2	Населення в тисячах	Українців	Москалів	Поляків	Жидів	Німців	Румунів	Инших
	Сх. Галичина[1])	55000	5380	4002	—	651	662	65	—	
	Буковина[2])	5300	456	304	—	27	73	21	31	
	Закарпаття	14700	568	441	—	—	69	6	1	Мадярів 33, Словаків 13
	Холмщина	10500	842	448	31	201	129	33	—	
	Підляшша й Полісся	34000	1170	856	58	37	202	—	—	Білорус. 15
	Бесарабія	17000	1020	427	112	—	94	—	193	Болг. 102, Турко-тат. 27, ин. 3
	Слобідщина[3])	67000	4000	2040	1940	—	—	—	—	ин. 20
	Донщина	46000	1700	974	612	—	22	37	—	Вірм. 36, ин. 19
	Кавкащина й Каспійщина	240600	5073	3326	1229	—	—	54	—	Тур.-тат. 162, ка вк. 107, Грекія 41, ин. 154
Черен України	Волинь	71000	4190	2936	147	260	553	239	—	
	Поділля	42000	4057	3254	134	93	495	—	37	
	Київщина	51000	4793	3896	283	91	580	19	—	
	Чернигівщина	52400	3132	2681	282	3	153	13	—	
	Полтавщина	50000	3792	3527	99	—	152	8	—	
	Харківщина	54500	3417	2754	604	7	17	14	—	
	Катеринославщина	63400	3456	2381	594	21	162	131	14	Грек. 72, Тур.-тат. 41
	Херсонщина	70800	3745	2003	790	41	442	169	202	Болг. 34
	Таврія	60400	2059	869	574	14	78	111	—	Грек. 27, Болг. 60, Турко-тат. 284

*) *Ст. Рудницький*, Огляд національної території України, Берлін 1923, вид. «Укр. Слова».

[1]) Разом із укр. частинами Зах. Галичини.

[2]) Українська частина.

[3]) Українські частини Курщини, Орлівщини й Вороніжчини.

38. Скласти колову діяграму відсоткового розділу населення України по професіях: селянський стан 74,2%, гірнича й оброблююча промисловість 9,1%, торговля 5,2%, инші професії 11,5%.

39. Скласти колову діяграму міського населення України по розговірній мові: українська 30,5%, московська 34,0%, жидівська 27,0%, польська 3,0%, німецька 1,0%, инші 4,5%.

40. Складати колові діяграми по даних із географії: а) для величини ріжних континентів і океанів — із окрема й разом (суходіл і море); б) для населення Європи й ріжних європейських країн; в) для розділу населення всього світу по расах, націях і вірах.

41. Проста дана рівнянням: а) $3x-2y+1=0$, б) $y-4x-2=0$, в) $\frac{x}{3}+2y=2$, г) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{xy}=0$, д) $\frac{x-2}{y-3}+\frac{1}{4}=0$.

Знайти: відтинки, які вона відзначує на осях, і кут, який творить із віссю X.

42. Знайти рівняння простої, що переходить через дану точку P і з віссю X творить даний кут α: а) P (2,—3), $\alpha=54^0$; б) P (—3, —1), $\alpha=-25^0$; в) P (—4, 2), $\alpha=0^0$; г) P (5, 3), $\alpha=-60^0$.

43. Знайти рівняння простої, що переходить через дві дані точці: P_1 і P_2; подати відтинки на обох осях і кут α: а) (3, 2) і (2,—3); б) (—4, —1) і (1, 0); в) $(1\frac{1}{2}, 2)$ і $(-2, -1\frac{1}{2})$.

§ 15. Лінійні рівняння з двома й більше невідомими.

82. Неозначені рівняння з двома невідомими. а) З уст. 69 б) знаємо, що коли маємо одне лінійне рівняння з двома невідомими, то воно має не одну, а безліч пар розвязок. Образом того рівняння є проста лінія, бо співрядні кожної її точки дають одну пару розвязок.

Через те, що одне лінійне рівняння з двома невідомими має більше чим одну розвязку, названо його *неозначеним**).

При розвязці неозначених рівнянь найважнішу ролю грають *розвязки в цілих числах* і на них звернемо головну увагу.

б) Із одної пари цілочислових розвязок рівняння

$$ax+by=c \tag{1}$$

можна отримати *всі инші* цілочислові. Нехай ця пара зветься x_0, y_0; тоді всі инші пари матимуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + bk,\\ y &= y_0 - ak,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

де k може бути всяким цілим числом, додатнім або від'ємним. Бо коли ці вартости підставимо в рівняння (1), отримаємо:

$$\begin{aligned} a(x_0 + bk) + b(y_0 - ak) &= c,\\ (ax_0 + by_0) + (abk - abk) &= c;\end{aligned}$$

а що на основі значіння чисел x_0 і y_0 є $ax_0 + by_0 = c$, то наше підставлення справджується.

Через те нам вистарчить знати тільки *одну розвязку* рівняння (1), коли хочемо знайти *всі розвязки;* тому черговим питанням буде: вияснити, в яких випадках воно може мати цілочислову розвязку, а в яких ні.

в) *Коли в лінійному неозначеному рівнянні з двома невідомими*:

$$ax + by = c \tag{1}$$

співчинники a і b мають спільний чинник, який не є чинником числа c, тоді рівняння не має цілочислових розвязок.

---

*) Неозначені рівняння звуться теж *діофантівськими* від грецького математика *Діофанта*, що ними займався (див. впр. 27 до § 9).

Доказ. Нехай d буде тим спільним чинником, отже покладім: $a = a'd$ і $b = b'd$, де a' і b' вже не мають спільного чинника. Поділім обидва боки рівняння (1) на d, тоді буде:

$$a'x + b'y = \frac{c}{d}. \qquad (1a)$$

Коли число c неподільне на d, тоді праворуч маємо дріб. В такому випадкові неможливе, щоб x та y були цілими числами, бо це вело би до недорічности: ціле число (ліворуч) рівне дробові (праворуч).

г) *Коли a і b без спільних чинників, тоді рівняння* (1) *має безліч пар цілочислових розвязок.*

Замість подавати доказ у загальних числах, переведемо його на спеціяльному прикладі, який будемо розвязувати *методом Ойлєра**):

$$117x - 152y = 168.$$

Обчислім із того рівняння одну з невідомих, а саме цю, що має менший співчинник, вважаючи другу відомою. Ось так буде:

$$x = \frac{168+152y}{117} = 1 + y + \frac{51+35y}{117}.$$

Істота методу Ойлєра лежить у тому, що справжній дріб, який залишається тут після відділення цілостей, будемо вважати новою невідомою:

$$z = \frac{51+35y}{117},$$

отже:

$$x = 1+y+z.$$

Із пояснення тої нової невідомої z творимо нове неозначене рівняння:

$$117z - 35y = 51,$$

---

*) Леонард *Ойлєр* (*Euler*, 1707—1783), один із найвизначніших математиків усіх часів і країв. Родом із Базелю (в Швайцарії), студіював математику й богослов'я на тамошнім університеті, а 1730 року покликала його цариця Катерина I. до новозаснованої Академії Наук у Петербурзі. Там перебув він важку недугу, наслідком якої втратив одне око, одначе не закинув наукової роботи. 1741 переселився на запрошення пруського короля Фридриха Великого до Берліну, де працював теж як член тамошньої академії Наук. Одначе через 25 років вернувся назад до Петербургу, бо в Берліні не знайшов відповідної для себе атмосфери для плекання математичних наук, а крім того Фридрих відомий був із свого скупарства. — Після повороту знову занедужав і втратив друге око; але й те не відтягло його від наукової праці. Маючи надзвичайну пам'ять та знаменито розвинену фантазію, диктував свої твори; в цьому часі повстало їх стільки, що Академія мала ще на 20 років після його смерти що друкувати. Помер у Петербурзі. — Своїми геніяльними працями обняв цілу тодішню математику й математичну физику і на кожній галузі цих наук витиснув печать свого духа.

в якому співчинник при давній невідомій y менший від співчинника нової невідомої z, бо він був чисельником справжнього дробу. Звідсіля обчисляємо далі y:

$$y = \frac{117z-51}{35} = 3z - 1 + \frac{12z-16}{35} = 3z-1+u;$$

тут ввели ми знову нову невідому рівнянням:

$$u = \frac{12z-16}{35}$$

або:

$$12z - 35u = 16.$$

Це дасть далі:

$$z = \frac{16+35u}{12} = 3u + 1 + \frac{4-u}{12} = 3u + 1 + v,$$

бо тут вигідніше взяти з $\frac{35u}{12}$ не $2u$, тільки $3u$, а на справжній дріб лишиться від'ємне число $-\frac{u}{12}$. (Так робимо для скорочення роботи завсіди, коли додатній останок мав би бути більший від половини знаменика). Отся нова невідома буде тут:

$$v = \frac{4-u}{12},$$

а вона сповнює рівняння:

$$12v + u = 4.$$

Звідсіля маємо остаточно:

$$u = 4 - 12v,$$

і тут дальше ділення непотрібне, бо співчинник при u вже $= 1$. Тут невідома u дана при допомозі нової невідомої v, яка може приймати всяку вартість, бо їй не накладаємо ніяких обмежень. Приймім для простоти $v=0$; тоді буде $u=4$. Коли цю вартість підставимо в рівняння для z, отримаємо:

$$z = 3 \cdot 4 + 1 + 0 = 13,$$

і далі для y:

$$y = 3 \cdot 13 - 1 + 4 = 42,$$

а остаточно для x:

$$x = 1 + 42 + 13 = 56.$$

Таким робом ми знайшли вже одну пару розвязок:

$$x_0 = 56, \qquad y_0 = 42,$$

бо справді: $117 \cdot 56 - 152 \cdot 42 = 6552 - 6384 = 168$.

З тої одної пари отримаємо всі инші — на основі рівняння (2):

$$x = 56 - 152k,$$
$$y = 42 - 117k,$$

(бо тут є $a = 117$, $b = -152$, отже обидва співчинники при k матимуть знак

«минус»), де k, як відомо, може приймати всяку можливу цілочислову вартість. Усі розвязки помістимо в такій табличці:

k	x	y
0	56	12
1	— 96	— 75
2	—248	—192
. . .	. . . .	. . .
—1	208	159
—2	360	276
. . .	. . . .	. . .

Тут, як бачимо, завсіди обидва числа одної пари мають однакові знаки, отже рівняння (1) має безліч додатніх і безліч від'ємних розвязок.

Ділення Ойлєра нагадує подекуди ланцюгове ділення Євкліда (уст. 50 б) при шуканні *НСМ* двох чисел.

д) Останнє питання, яке тут розберемо, буде таке: коли і скільки може бути додатніх пар розвязок в цілих числах.

Покажемо це на прикладі:

$$32x+47y = 4541.$$

Розвязка піде таким шляхом:

$$x = \frac{4541 - 47y}{32} = 142 - 2y - \frac{3-17y}{32} = \underline{\underline{142 - 2y - z;}}$$

$$z = \frac{3-17y}{32}; \quad 32z + 17y = 3;$$

$$y = \frac{3-32z}{17} = -2z + \frac{3+2z}{17} = \underline{\underline{-2z + u;}}$$

$$u = \frac{3+2z}{17}; \quad 17u - 2z = 3;$$

$$z = \frac{17u-3}{2} = 8u - 2 + \frac{u+1}{2} = \underline{\underline{8u - 2 + v;}}$$

$$v = \frac{u+1}{2}; \quad 2v = u + 1.$$

Звідсіля остаточно маємо:

$$u = 2v - 1,$$

а що v довільне, то приймім його нпр. $= 0$, отже:

$$u = -1.$$

Цю вартість підставляємо у вираження двічі підкреслені, починаючи з останнього, отже обчисляємо по черзі:

$$z = 8u - 2 + v = 8 \cdot (-1) - 2 + 0 = -10;$$
$$y = -2z + u = (-2) \cdot (-10)(-1) = +19;$$
$$x = 142 - 2y - z = 142 - 2 \cdot 19 - (-10) = +114.$$

Таким чином одна пара розвязок буде:

$$x_0 = 114, \quad y_0 = 19.$$

(*Спроба*: $114 \cdot 32 + 19 \cdot 47 = 3648 + 893 = 4547$).

Загальна розвязка виглядатиме так:

$$x = 114 - 47k,$$
$$y = 19 + 32k,$$

бо тут ми нарочно замість k впроваджуємо $-k$.

Щоби знайти всі розвязки в цілих додатніх числах, мусимо добірати k так, щоби було:

$$114 - 47k > 0 \quad \text{і} \quad 19 + 32k > 0.$$

Друга нерівність показує, що $32k > -19$, отже $k > -\frac{19}{32}$, а це значить, що k мусить бути нулем або додатнім числом; з першої читаємо:

$$114 > 47k, \text{ отже } k < \frac{114}{47} = 2\frac{20}{47} < 3.$$

Коли погодимо ці дві нерівности одну з одною, побачимо, що k може мати тільки одну з таких трох вартостей: 0, 1, 2.

Для них є:

k	x	y
0	114	19
1	87	51
2	40	73

Всі інші розвязки мають по одному від'ємному числу.

Взагалі для вирішення нашого питання можуть послужити такі вказівки:

(1) Коли співчинники обох невідомих мають неоднакові знаки, отже рівняння має форму:

$$ax - by = \pm c,$$

то кількість додатніх пар розвязок безмежна. Бо яку б ми не знайшли пару вартостей для x_0 і y_0, то розвязка в формі:

$$x = x_0 + bk, \qquad y = y_0 + ak$$

показує, що завсіди k можна добрати так, щоби x і y стали додатні, а для кожного k, більшого від тої вартости, вони будуть іще більшими додатніми числами.

(2) Коли співчинники при обох невідомих однакових знаків, а праворуч стоїть число протилежного знаку, отже:

$$ax + by = -c,$$

тоді додатніх пар розвязок немає. Бо при додатніх a і b та x і y лівий бік був би додатній, а праворуч завсіди стоятиме від'ємне число.

(3) Коли ж остаточно всі три співчинники однакових знаків, тоді рівняння може мати додатні пари розвязок, як бачимо з нашого прикладу, або може їх не мати. Досліду цього останнього випадку не будемо тут вести.

е) До неозначеного рівняння веде завдання, яке ми розвязували вже в уст. 69 б (рис. 66, стр. 155):

«За 310 карб. куплено $8m$ одної матерії і $5m$ другої матерії. Скільки заплачено за $1m$ одної і другої матерії?»

Коли за $1m$ одної матерії платили ми x, а за $1m$ другої y, то рівняння буде:

$$8x + 5y = 3100;$$

тут, розуміється, мусимо обмежитись тільки до додатніх пар розвязок, бо від'ємні ціни не мали би значіння. Розвязка буде:

$$y = \frac{3100 - 8x}{5};$$

одну пару розвязок отримаємо зараз, без Ойлєрівського ділення, коли покладемо $x_0 = 0$, бо тоді буде $y_0 = 620$ (це можна зробити тому, що правий бік рівняння подільний на співчинник при y), отже загальна розвязка буде:

$$x = 0 + 5k,$$
$$y = 620 - 8k.$$

Щоби мати тільки додатні розвязки, мусимо брати таке k, щоби було $5k > 0$ і $620 - 8k > 0$, отже $k > 0$ і $k < \frac{620}{8} = 77\frac{1}{2} < 78$, т. зн.:

$$k = 1, 2, 3, \ldots\ldots, 77.$$

Звідсіля складемо таку табличку:

k	x	y	k	x	y
1	5	612	...	....	...
2	10	604	70	350	60
3	15	594	71	355	52
4	20	588	...	....	...
...	...	....	77	385	4

отже:

Коли за $1m$ першої матерії платимо 5 карб., 10 карб., . . . , 350 карб.
то за $1m$ другої „ 612 „ 604 „ . . . , 60 „

83. **Означені уклади рівнянь з двома невідомими: два рівняння.** Щоби визначити якусь одну пару розвязок, мусимо мати дане ще друге рівняння, отже *уклад двох рівнянь із двома невідомими є означений*. Його розвязкою є одна-одинока пара чисел x і y.

Розвязати той уклад — значить, знайти такі два числа, які сповнюватимуть обидва рівняння нараз. Геометрично значить це, знайти спільну точку образів обох рівнянь, отже *точку перетину* двох простих, що дані цими рівняннями.

Нехай буде нпр. даний такий уклад:

$$3x + 4y = 18,$$
$$8x - 5y = 1;$$

тоді рисуємо (рис. 83) образи таких двох функцій:

(I) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$,

(II) $y = \frac{8}{5}x - \frac{1}{5}$.

(I)		(II)	
x	y	x	y
-2	6	-3	-5
6	0	7	11

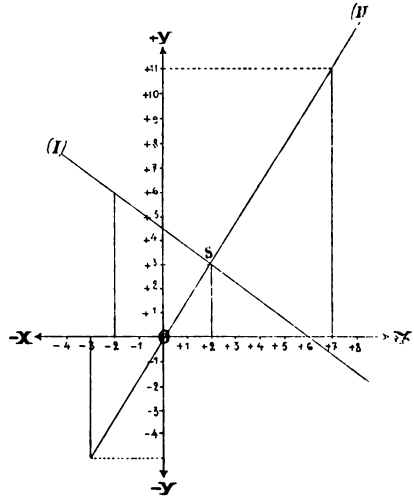


Рис. 83.

Прості (I) і (II) перетинаються в точці S, що має співрядні $x = 2$, $y = 3$, і це є пара розвязок нашого укладу рівнянь, бо:

$$3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 18, \qquad 8 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 1.$$

Розуміється, що в цьому випадкові йде нам про вартість *обох* невідомих а не, як в уст. 71, тільки про одне x.

84. **Рахункова розвязка: методи порівнювання й підставлювання.** Рахункова розвязка укладу двох лінійних рівнянь із двома невідомими може відбуватися ріжними методами. Найпростіший із них *метод порівнювання*, а з ним близько споріднений *метод підставлювання*.

Нпр. даний уклад:

$$8x - 9y = 5,$$
$$2x + 3y = 17.$$

а) Приладьмо обидва рівняння так, як робили до геометричної розвязки, отже обчислім із обох рівнянь ту саму невідому, нпр. y:

$$y = \frac{8x-5}{9},$$

$$y = \frac{17-2x}{3}.$$

Обидва ці рівняння мусять існувати *одночасно*, т. зн. y мусить мати в обох тих вираженнях однакову вартість. Цього досягнемо, коли ці два вираження *порівняємо:*

$$\frac{8x-5}{9} = \frac{17-2x}{3}.$$

Отсе буде рівняння з одною невідомою, а його розвязкою є: $x = 4$. Ця вартість, вставлена в одне з виражень, які маємо для y, дасть: $y = 3$.

б) Той самий вислід отримаємо, коли обчислимо одну невідому, нпр. із одного рівняння й *підставимо* його в друге, нпр.:

$$y = \frac{8x-5}{9},$$

$$2x+3 \,.\, \frac{8x-5}{9} = 17.$$

Отсе *вислідне рівняння* після впорядкування має таку саму розвязку, як ми вже отримали раніше.

Чинність, якою усуваємо одну невідому з укладу рівнянь, зветься *елімінацією* («виставлюванням поза поріг»).

В обох цих методах ми елімінували y й отримували вислідне рівняння з невідомою x, одначе так само можна викидати другу невідому. Котру з невідомих треба викидати — це залежить від самих рівнянь; звичайно викидаємо цю, яка має менший співчинник. Після деякої практики вже один погляд покаже нам найдоцільнішу дорогу.

85. **Метод рівних співчинників.** У дотеперішніх двох методах ми давали першенство одній із невідомих; у нашому прикладі елімінували ми y і мали вислідне рівняння в x. Два другі методи, що їх тут подаємо, трактують обидві невідомі однаково.

«Метод рівних співчинників» лежить у тому, щоби через відповідні множення отримати однакові співчинники в обох рівняннях

при цій невідомій, яку хочемо елімінувати. Потім ці два рівняння додаємо або віднімаємо відповідними боками, а через те відпадає ця невідома, при якій ми вирівняли співчинники.

Коли в цьому укладі, який розвязували передше, хочемо усунути з початку y, а потім x, множимо за першим разом друге рівняння на 3, а потім на — 4, лишаючи перше рівняння в обох разах без зміни. Це дасть:

$$\begin{array}{l|l} 8x - 9y = 5, & 8x - 9y = 5, \\ 6x + 9y = 51; & -8x - 12y = -68. \end{array}$$

Через додання обох тих рівнянь отримаємо:

$$14x = 56, \quad | \quad -21y = -63,$$

отже:

$$x = 4; \quad | \quad y = 3.$$

У загальному випадкові тим числом, до якого зводимо обидва співчинники, буде найменша спільна многократь обох даних співчинників.

Коли даний такий найпростіший уклад:

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ x - y &= b, \end{aligned}$$

то додаючи й віднімаючи обидва рівняння відповідними боками, отримаємо:

$$2x = a + b, \quad | \quad 2y = a - b,$$

отже:

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{a-b}{2}.$$

Словами: *коли дані сума й ріжниця двох чисел, то ці числа рівні: одне половині суми, друге — половині ріжниці правих боків рівнянь.*

86. **Метод неозначеного чинника.** а) У попередньому методі мусіли ми для елімінації одної невідомої виконувати два множення; новий метод, що його тут хочемо подати, буде обходитись одним множенням. Робимо це так: друге рівняння множимо чинником m; він покищо неозначений, але ми будемо добірати його вартість так, як це нам буде потрібно.

У тому самому прикладі, що ми його рішали попередніми методами, друге рівняння буде таке:

$$2mx + 3my = 17m,$$

а сума відповідних боків обох рівнянь, зредукована як слід, буде:

$$(8 + 2m)x + (-9 + 3m)y = 5 + 17m. \qquad (*)$$

Чинником m будемо розпоряджуватися так, щоби в цьому рівнянні відпадав співчинник раз при одній, то знову при другій невідомій. Це зробимо в ось який спосіб:

для обчислення x:

$-9 + 3m = 0$, т. зн. $m = 3$.

Тоді зістанеться:

$(8 + 2m)x = 5 + 17m$,

т. зн.:

$(8 + 2 \cdot 3)x = 5 + 17 \cdot 3$,

$14x = 56$,

$x = 4$;

для обчислення y:

$8 + 2m = 0$, т. зн. $m = -4$.

Тоді зістанеться:

$(-9 + 3m)y = 5 + 17m$,

т. зн.:

$[-9 + 3 \cdot (-4)]y = 5 + 17 \cdot (-4)$,

$-21y = -63$,

$y = 3$.

б) Пояснимо ще цей метод геометрично.

Коли даний уклад:

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

то рівняння:

$$(a + a'm)x + (b + bm)y = c + c'm \qquad (**)$$

може уявляти собою кожну просту, що переходять через точку перетину двох простих, які дані цим укладом; иншими словами, *це рівняння жмутка простих;* «вершком жмутка» є точка перетину тих двох «основних простих». Неозначений чинник m зветься *параметром жмутка;* кожна його вартість характеризує одну лінію жмутка.

У кожному жмуткові визначаються дві прості, рівнобіжні до одної з осей; їхні рівняння є:

$y = n$ (проста рівнобіжна до осі X),

$x = m$ (проста рівнобіжна до осі Y).

Щоби з рівняння (**) отримати котрийсь із цих виглядів, мусимо дібрати чинник m так, щоби співчинник при другій невідомій став нулем, як це робили при подрібній розвязці.

Можемо це провірити на нашому попередньому прикладі (рис. 84).

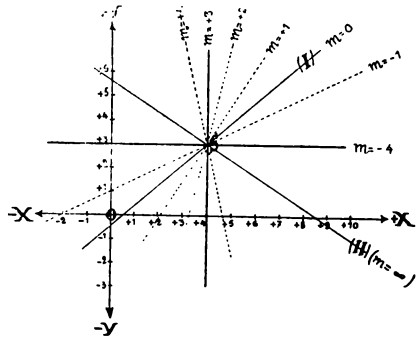


Рис. 84.

Кожна з простих, що дані рівнянням (*) для ріжних вартостей параметру, буде переходити через вершок жмутка S. Просту (I), що дана першим рівнянням нашого укладу, отримаємо, коли напишемо $m = \infty$*), просту (II), приймаючи $m = 0$.

Обидві визначні прості, позема й прямова, відповідають вартостям $m = -4$ і $m = -3$; з цими вартостями ми зустрічалися вже при розвязці рівняння. На нашому рисункові бачимо ще прості, що відповідають параметрам $m = 0 + 1, +2, \ldots, -1, -2$; їх легко знайти й нарисувати.

87. Деякі завдання, що ведуть до укладів лінійних рівнянь із двома невідомими. Кожне складніше завдання, що ми його розвязували як рівняння з однією невідомою, можна теж розвязувати, вводячи дві невідомі. Показується, що тоді лекше укласти рівняння, а що розвязка укладу з двома невідомими не багато трудніша, то таке влекшення звичайно дуже корисне.

Покажемо це на простому прикладі: «В парку є крілики й фазани, разом 36 голів і 100 ніг; скільки там кріликів, а скільки фазанів?»

Коли число кріликів назвемо x, тоді на фазанів припаде $36 - x$, а бажане рівняння буде:

$$4x + 2(36 - x) = 100.$$

Введім тепер як другу невідому y число фазанів; тоді матимемо уклад:

$$\begin{aligned} x + y &= 36, \\ 4x + 2y &= 100; \end{aligned}$$

як бачимо, його лекше укласти, ніж поодиноке рівняння. Обчислім із першого y і вставмо в друге; дістанемо попереднє рівняння.

Перечислимо ще кілька прикладів.

Пробуйте розвязувати їх на ріжні способи!

а) «В товаристві було 12 осіб, чоловіків і жінок. При збірці на якусь ціль чоловіки дали по 30, жінки по 20 карб., і так зібрано 210 карб. Скільки там було чоловіків а скільки жінок?»

Чоловіків було x, жінок y, отже:

$$x + y = 12,$$

а що чоловіки давали по 30, а жінки по 20 карб., то збірка принесла:

$$30x + 20y = 210.$$

Розвязка укладу буде: $x = 7$, $y = 5$.

б) «Незводильна вартість якогось дробу є $\frac{5}{6}$. Коли його чисельник і зна-

*) До цього доходимо так: рівняння (*) ділимо обіруч на m:

$$\left(\frac{8}{m} + 2\right)x - \left(\frac{9}{m} - 3\right)y = \frac{5}{m} + 17.$$

Коли тут m буде безконечно рости, тоді дроби, що мають m у знаменику, меншатимуть необмежено й остаточно повідпадають, так що лишиться друге рівняння даного укладу.

меник *збільшити на* 9 (отже додати до обох по 9), отримаємо новий дріб, який буде рівнятися незводильному дробові $\frac{8}{9}$. Який був даний дріб?»

Ясно, що даний дріб не буде незводильний, тільки його буде можна скоротити. Коли його вартість є $\frac{5}{6}$, то покладім:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{6},$$

отже тут невідомим чисельником буде x, а невідомим знаменником y. Вимога нашого завдання міститься в такому другому рівнянні:

$$\frac{x+9}{y+9} = \frac{8}{9},$$

а ці два рівняння після того, як знесемо знаменики, будуть:

$$\begin{aligned} 6x - 5y &= 0, \\ 9x - 8y &= -9. \end{aligned}$$

Розвязка укладу є: $x=15$, $y=18$, отже даний дріб буде: $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$. Після збільшення чисельника й знаменика на 9 буде: $\frac{15+9}{18+9} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$.

в) «Дане двоцифрове число; коли в ньому переставимо цифри й віднімемо це нове число від даного, отримаємо 45; коли ж другу цифру подвоїмо й утворимо таку саму ріжницю, отримаємо 18. Що це за число?»

Назвім першу цифру x, другу y, тоді дане число буде $10x + y$, бо цифра x стоїть на місці десятків, а y на місці одиниць; число з оберненим порядком цифер буде $10y + x$, отже:

$$(10x + y) - (10y + x) = 45.$$

Відповідні числа при подвосній другій цифрі будуть $10x + 2y$ і $20y + x$, отже матимемо:

$$(10x + 2y) - (20y + x) = 18.$$

Це веде до такого укладу:

$$\begin{aligned} 9x - 9y &= 45, \\ 9x - 18y &= 18; \end{aligned}$$

його розвязкою є пара чисел $x = 8$, $y = 3$, отже дане число є 83.

88. **Виїмкові уклади рівнянь із двома невідомими.** Нехай буде такий уклад:

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 1,$$

$$\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 7,$$

отже тут виступають невідомі *тільки в своїх відворотностях*. Тоді вводимо дві нові невідомі:

$$\frac{1}{x} = u, \quad \frac{1}{y} = v,$$

і матимемо:

$$2u - 3v = 1,$$
$$5u + 4v = 7.$$

Звідсіля: $u = \frac{25}{23}$, $v = \frac{9}{23}$ отже:

$$x = \frac{23}{25}, \; y = \frac{23}{9}.$$

б) Пробуймо розвязати такий уклад:

$$2x + 3y = 12,$$
$$4x + 6y = 24.$$

Обчислім із першого рівняння y і вставимо його в друге:

$$y = \frac{12-2x}{3} = 4 - \frac{2}{3}x,$$

$$4x + 6\left(4 - \frac{2}{3}x\right) = 24.$$

Це дасть після редукції:

$$24 = 24,$$

отже тут відпала друга невідома зовсім і ми, замість мати розвязку рівняння, отримали тотожність, зрозумілу саму по собі.

Це не дивниця; бо коли придивимося до другого рівняння, побачимо, що обидва його боки мають спільний чинник 2, отже після скорочення на 2 отримаємо: $2x + 3y = 12$, т. зн. перше рівняння нашого укладу.

Отже такий уклад, де одне рівняння отримуємо з другого через помноження обох його боків якимось числом, — це властиво тільки одне-одніське рівняння і ми мусимо дивитися на такий уклад, як на одне *неозначене рівняння*. Його образом буде одна-одинока проста, отже й геометричним шляхом не дійдемо до розвязки.

в) Так само не розвяжемо й такого укладу:

$$2x + 3y = 12,$$
$$4x + 6y = 0,$$

бо y з першого рівняння, підставлене в друге, дасть:

$$4x + 6\left(4 - \frac{2}{3}x\right) = 0,$$

а з нього не тільки що випаде x, але ще й вийде недорічність:

$$24 = 0.$$

Щоби відкрити її джерело, нарисуймо образи відповідних простих (рис. 85), а саме:

(I) $y = -\frac{2}{3}x + 4,$

(II) $y = -\frac{2}{3}x.$

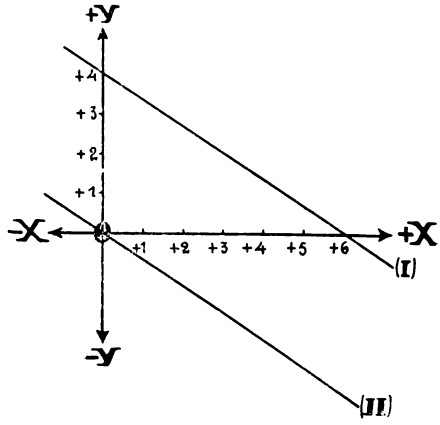


Рис. 85.

Ці дві лінійні функції мають однакові співчинники при x, отже відповідні прості мають однакові співчинники нахилу, $a = -\frac{2}{3}$, а ріжняться тільки другим членом b.

Такі дві функції уявляють собою дві рівнобіжні прості, тільки в ріжному положенні відносно осередка перехрестя. Вони не перетинаються, а тим і пояснюємо, що такі два рівняння не мають спільної розвязки.

Друге рівняння даного укладу можна написати так:

$$2x + 3y = 0,$$

отже воно ріжниться від першого тільки правим боком.

Уклад

$$ax + by = c,$$
$$ax + by = c',$$

де c' відмінне від c, називають *укладом суперечних рівнянь. Він не має спільної пари розвязок.*

г) Розберім загальний випадок, коли даний уклад двох лінійних рівнянь із двома невідомими:

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

і питаймо, коли він має розвязку, а коли ні.

Якого б ми не вживали способу, завсіди отримаємо таку розвязку:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}. \tag{4}$$

Щоби вона була можлива, її знаменник — він при обох невідомих однаковий — не може бути нулем, бо таке ділення не мало би значіння. Величину

$$D = ab' - a'b \tag{5}$$

звуть *означником* укладу (3), отже:

Уклад двох лінійних рівнянь із двома невідомими має тільки тоді розвязку, коли його означник не є нулем.

Коли $D = 0$, маємо: $ab' = a'b$, отже:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}. \tag{6}$$

Введім тут чинник пропорційности k; тоді буде:

$$a' = ka, \quad b' = kb,$$

отже друге рівняння матиме вигляд:

$$kax + kby = c',$$

а після скорочення на k:

$$ax + by = \frac{c'}{k}, \tag{7}$$

Тут є такі дві можливости:

(1) $\frac{c'}{k} = c$, і тоді друге рівняння тотожне з першим, отже ми замість двох рівнянь маємо одне неозначене, яке уявляє собою одну-одиноку просту;

(2) $\frac{c'}{k} < c$*), і ми маємо уклад суперечних рівнянь, який уявляє собою пару рівнобіжних простих.

У випадку (1) маємо теж $c' = kc$, отже звичайну пропорцію (6) можна розширити в таку біжучу:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}. \tag{6a}$$

---

*) Чит. $\frac{c'}{k}$ нерівне c (т. зн. більше або менше від c).

В такому разі й обидва чисельники в (4) будуть нулями, отже x і y уявляються в неозначеному виді $\frac{0}{0}$ (див. уст. 58 г).

89. **Докінчення досліду рівняння простої лінії.** У звязку з питаннями, що ми їх порушили в останніх уступах, піднімемо ще одне: який кут замикають дві дані прості?

Коли дані прості мають рівняння в напрямковому виді:

$$y = a_1x + b_1, \qquad y = a_2x + b_2, \tag{8}$$

то їхні співчинники напрямку є: $a_1 = tg\alpha_1$, $a_2 = tg\alpha_2$ (α_1 і α_2 — це кути їхніх нахилів до осі X), отже нам треба визначити тангенс кута між ними, т. зн. $\vartheta = \alpha_1 - \alpha_2$.

Гоніометрія вчить, що $tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$ *), отже напишемо:

$$tg\vartheta = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2}. \tag{9}$$

Нпр. для простих $3x + 4y = 18$, $8x - 5y = 1$ (уст. 83, рис. 83) маємо: $a_1 = -\frac{3}{4}$, $a_2 = \frac{8}{5}$, отже $tg\vartheta = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{8}{5}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5}} = \frac{47}{4}$, т. зн. $\vartheta = 85^0 8'$, як це можна перевірити на рисунку.

Із рівняння (9) виходить негайно вислід, який ми отримали на кінці попереднього уступу — а саме умова, щоби дві прості були рівнобіжні. В такому разі вони замикають кут $\vartheta = 0$; тангенс такого кута є 0, отже дріб (9) мусить бути нулем. Це можливе тоді, коли його чисельник є нулем, отже коли матимемо $a_1 = a_2$, а це значить, що тоді співчинники нахилу обох простих однакові.

Так само легко знайти умову, щоби дві прості творили прямий кут. Тангенс прямого кута є надзвичайно великим числом; цього досягнемо, коли в дробі (9) знаменик зрівняємо з нулем:

$$1 + a_1a_2 = 0.$$

Звідсіля, коли дане a_1, знайдемо a_2:

$$a_2 = -\frac{1}{a_1}, \tag{10}$$

і це умова, щоби дві прості, що дані рівняннями (7), були нормальні.

Нпр. (1) Знайти рівняння простої, що рівнобіжна до простої $2x + 3y - 1 = 0$ і переходить через точку $(-1, -1)$.

---

*) Заки учні приступлять до науки гоніометрії, можуть провірити цей вивід на подрібних прикладах, нпр. $\alpha_1 = 68^0$, $\alpha_2 = 23^0$; $\alpha_1 - \alpha_2 = 45^0$; $tg\alpha_1 = 2{,}4751$, $tg\alpha_2 = 0{,}4348$:

$$tg\ 45^0 = \frac{2{,}4751 - 0{,}4245}{1 + 2.4751 \cdot 0{,}4246} = \frac{1{,}0506}{1{,}0506} = 1.$$

Рівняння простої, що переходить через точку $(-1,-1)$ є (див. 65 в, рівн. (7)):

$$y + 1 = a(x + 1);$$

а коли вона рівнобіжна до другої, даної простої, то вони обидві мусять мати однакові співчинники нахилу, отже мусить бути $a = -\frac{2}{3}$. Це дасть таке рівняння:

$$y + 1 = -\frac{2}{3}(x + 1) \qquad \text{або:} \qquad 2x + 3y + 1 = 0.$$

(2) Знайти рівняння простої, що є нормальна до простої $3x + 4y + 2 = 0$ і переходить через точку $(2, -5)$.

Дана проста має співчинник нахилу $a_1 = -\frac{3}{4}$, отже на основі рівн. (10) мусить бути $a_2 = -\frac{1}{a_1} = \frac{4}{3}$, тому бажана проста матиме рівняння:

$$y + 5 = \frac{4}{3}(x - 2).$$

(3) Знайти рівняння простої, що переходить через точку $(1, 3)$ і з простою $2x - y = 1$ творить кут 45^0.

Рівняння простої, що переходить через точку $(1, 3)$, є:

$$y - 3 = a_2 (x - 1);$$

співчинник нахилу даної простої є $a_1 = 2$, а що кут між ними має бути $\vartheta = 45^0$, отже $tg\vartheta = 1$, то з рівняння (9) знайдемо:

$$1 = \frac{2 - a_2}{1 + 2a_2}, \quad a_2 = \frac{1}{3}.$$

Таким чином бажана проста буде:

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 1), \text{ т. зн.: } y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}.$$

90. **Дискусійні завдання першого ступіня з двома змінними та з одним параметром.** Часто уклад рівнянь містить у собі — крім відомих та невідомих величин — іще окремо *змінні* величини, звані *параметрами*. Від їхнього добору залежить не тільки величина розвязок, але в деяких випадках і розвязальність укладу взагалі.

Нпр. (1) розвязати уклад:

$$2x + 5y = 12,$$
$$y = 3x + m.$$

(а) Коли зачнемо розвязку з геометричного боку, то перше рівняння буде уявляти собою просту, яка на осях співрядних відзначує відтинки 6 і $-\frac{12}{5}$, а друге — громаду рівнобіжних простих; кожна проста тої громади відзначує на осі Y відтинок m.

Відповідно до вартости параметру буде змінюватися й розвязка рівняння, бо мінятиметься точка перетину постійної простої з відповідною простою громади; вартости x та y можемо відчитувати з рисунку, якщо він зроблений докладно (рис. 86).

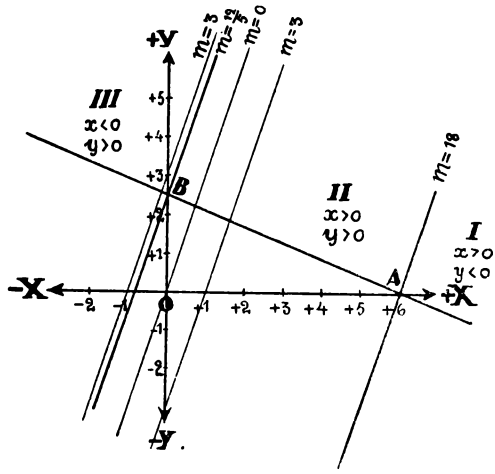


Рис. 86.

Із рисунку бачимо, що даний уклад *завсіди* розвязальний, для всякої вартости параметру; тепер іще тільки питаємо, які *знаки* матимуть його коріні x і y.

Як довго точка перетину обох простих припадає на відтинок AB, доти обидві її співрядні не є від'ємні; коли точка пересунеться направо вниз поза A, матимемо $x>0$, $y<0$, а коли вона підніметься поза A наліво, буде $x<0$, $y<0$. Можливість обох від'ємних співрядних одночасно — виключена, бо перша, постійна проста не переходить через третю чвертку площі.

Які вартости параметру відповідають точкам A і B? Це ті точки, де перша проста перетинає вісь X та Y. Перша точка має співрядні (6,0) друга $(0, \frac{12}{15})$. А що через ці дві точці переходять також якісь дві прості з громади, то треба тільки ці вартости підставити в друге рівняння й обчислити з них вартість параметру. Таким чином отримаємо для точки A $(x = 6,\ y = 0)$: $0 = 3.6 + m$, $m = -18$, а для точки B $(x=0,\ y = \frac{12}{5}) : \frac{12}{5} = 0 + m$, $m = -\frac{12}{5}$. Коли m росте, проста з громади рівнобіжних підсувається вгору; коли m іде в напрямку ростучих від'ємних чисел, проста зсовується вниз. Через те обидві рівнобіжні прості: $m = -18$ $(y = 3x - 18)$ і $m = \frac{12}{5}$ $(y = 3x + \frac{12}{5})$ ділять площу на три частині: у першій, найдальше направо, є $x>0$, $y<0$; у середущій обидві вартости додатні; у третій є $x<0$, $y>0$; на межевих простих одна з змінних має вартість нуля.

Так отже бачимо, що з ростом параметру m від дуже великих від'ємних

через нуль до дуже великих додатніх вартостей, x із дуже великого додатнього числа меншає до нуля ($m=\frac{12}{5}$) і стає згодом дуже великим від'ємним числом. Зате y змінюється тим самим ходом, що й параметер m: із дуже великого від'ємного числа стає нулем для $m=18$, а потім дуже великим додатнім числом.

Вислід нашої дискусії зберемо в таку табличку:

m	*від'ємне* | *додатне*	*росте*
	$-\infty \to -18 \to 0 \to \frac{12}{5} \to +\infty$	
x	*додатне* | *від'ємне*	*меншає*
	$+\infty \to 6 \to \frac{12}{17} \to 0 \to -\infty$	
y	*від'ємне* | *додатне*	*росте*
	$-\infty \to 0 \to \frac{36}{17} \to \frac{12}{5} \to +\infty$	

(б) Ті самі обставини підтвердимо теж рахунком. Коли в перше рівняння вставимо y із другого, матимемо: $2x + 5(3x + m) = 12$, отже: $17x = 12 - 5m$, т. зн.:

$$x = \frac{12 - 5m}{17}, \quad y = \frac{36 + 2m}{17}.$$

Щоб обидві ці величини були додатні, мусить бути одночасно $12 - 5m > 0$ і $36 + 2m > 0$, отже $m < \frac{12}{5}$ і $m > -18$. Щоби було $x < 0$, $y > 0$, маємо $12 - 5m < 0$ і $36 + 2m > 0$, т. зн. $m > \frac{12}{5}$ і $m > -18$, отже $m > \frac{12}{5}$; а щоби було $x > 0$, $y < 0$, матимемо $12m - 5m > 0$ і $36 + 2m < 0$, т. зн. $m < \frac{12}{5}$ і $m < -18$, отже на загал $m < -18$. Врешті показується, що неможливе, щоб було одночасно $x < 0$, $y < 0$, бо це довело би до недорічности: $m > \frac{12}{5}$ і $m < -18$.

Тепер остаточно складаємо табличку для ріжних вартостей x і y у залежности від вартости параметру m:

m	$-\infty$	-20	-18	...	-10	...	-2	-1	0	1	2	$\frac{12}{5}$	3	...	$+\infty$
x	$+\infty$	$6\frac{10}{17}$	6	...	$4\frac{14}{17}$	...	$\frac{14}{17}$	1	$\frac{12}{17}$	$\frac{7}{17}$	$\frac{2}{17}$	0	$-\frac{2}{17}$	...	$-\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{4}{17}$	0	...	$\frac{16}{17}$	...	$1\frac{15}{17}$	2	$2\frac{2}{17}$	$2\frac{4}{17}$	$2\frac{6}{17}$	$\frac{12}{5}$	$2\frac{8}{17}$		$+\infty$

(2) $$3x + y + 2 = 0,$$
$$y = mx + 1;$$

тут перше рівняння дає просту $y = -3x - 2$, яка має співчинник нахилу -3 і на осі Y відзначує -2, а друге — жмуток простих із вершком на осі Y у віддалі

$+1$. Ясно, що тут в одному положенні обидві прості не перетнуться, тільки стануть рівнобіжними, а позатим завсіди будуть перетинатися (рис. 87).

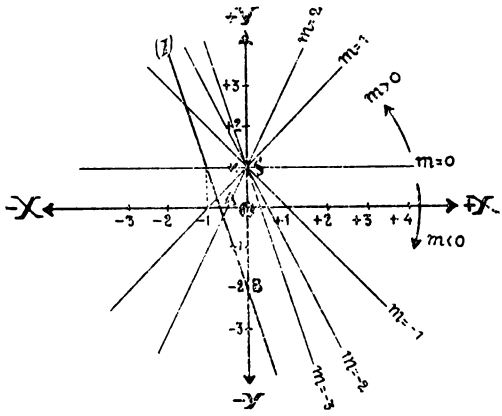


Рис. 87.

Коли $m=0$, проста жмутка є позема; коли m росте в додатній бік, проста буде обертатися кругом вершка жмутка, т. є кругом точки S, в напрямкові протилежному до ходу годинникової стрілки; коли ж m росте у від'ємний бік, проста буде обертатися протилежним ходом. Придивімся, які знаки матимуть обидві невідомі при ріжних положеннях простої. Коли точка перетину є на відтинку AB, є $x<0$, $y<0$; коли точка нижче B, маємо $x>0$, $y<0$; коли ж вона вище A, матимемо $x<0$, $y>0$.

Визначім перше вартости параметру, які відповідають точкам A і B. Для точки A є $y=0$; це вставлене в перше рівняння дасть $x=-\frac{2}{3}$, отже ці дві вартости в другому рівнянні дадуть: $0=-\frac{2}{3}m+1$ або: $m=\frac{3}{2}$. Для точки B буде, як легко побачити з рисунку, $m=+\infty$, бо тоді «висота східця» при ширині 1 стає над усяку міру велика. Таким чином маємо: для m від $\frac{3}{2}$ угору є $x<0$, $y<0$; коли m буде обнижуватися, починаючи з $\frac{3}{2}$, точка перетину буде посуватися по простій від A вгору й ми матимемо $x<0$, $y<0$, — аж до якогось положення, коли обидві прості стануть рівнобіжними. Станеться воно тоді, коли обидві прості матимуть однаковий співчинник нахилу, т. зн. $m=-3$; у цьому моменті уклад стане суперечним, а саме буде: $y=-3x-2$ і $y=-3x+1$.

Коли m піде ще далі у від'ємний бік, точка перетину перейде на долішню частину простої, отже нижче B, і буде підсуватися вгору; аж коли m стане безконечно великим від'ємним числом, рухома проста впаде на вісь Y і ми матимемо точку B. Як бачимо, вартість $m=3$ викликує переміну знаків обох змінних.

Вислід дискусії зберемо в таку табличку:

m	*від'ємне* | *додатнє*	*росте*
	$-\infty \to -3 \to 0 \to \frac{3}{2} \to +\infty$	
x	*додатнє* | *від'ємне*	*росте*
	$0 \to \pm\infty \to -1 \to \frac{2}{3} \to 0$	
y	*від'ємне* | *додатнє*	*опада*
	$-2 \to \mp\infty \to +1 \to 0 \to -2$	

Той самий вислід дасть рахункова розвязка:

$$x = \frac{-3}{m+3}, \quad y = \frac{-2m+3}{m+3}.$$

Вартість невідомої x залежить тут виключно від знаменника. Коли $m+3>0$, отже $m>-3$, с $x<0$; коли ж $m+3<0$, отже $m<-3$, матимемо $x>0$. Для $m=-3$, x тратить своє значіння. — Так само й y при $m=-3$ стратить значіння. Отся друга змінна буде додатня тоді, коли чисельник і знаменик будуть одного знаку, отже коли $-2m+3>0$ і $m+3>0$, або $-2m+3<0$ і $m+3<0$. Перша можливість дає $-3<m<\frac{3}{2}$, друга веде до суперечности $m>\frac{3}{2}$ і $m<-3$, так що для додатнього y існує тільки один обсяг параметру m: $(-3, +\frac{3}{2})$. Невідома y від'ємна, коли $-2m+3>0$ і $m+3>0$, або навпаки, т. зн.: $m>\frac{3}{2}$, а також $m<-3$.

Із отсих даних легко скласти табличку для розвязок x, y при даному m.

91. **Три рівняння з двома невідомими. Переозначені уклади** а) Нехай буде даний уклад трох лінійних рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{aligned} &(\text{I}). \quad 3x - 5y = -15, \\ &(\text{II}). \quad 7x - 3y = 43, \\ &(\text{III}). \quad 2x + y = 29. \end{aligned}$$

Коли розвяжемо два перші рівняння укладу, отримаємо: $x=10$, $y=9$, і побачимо, що ці дві вартости, вставлені в третє рівняння, сповнять його також:

$$2 \cdot 10 + 9 = 29.$$

На рисунку, що міститиме образи всіх трох рівнянь нашого укладу, покажеться, що ці всі три прості перетинаються в одній точці P (рис. 88) із співрядними (10, 9). Отсе третє рівняння в нашому укладі зайве, але воно *згідне* з попередніми.

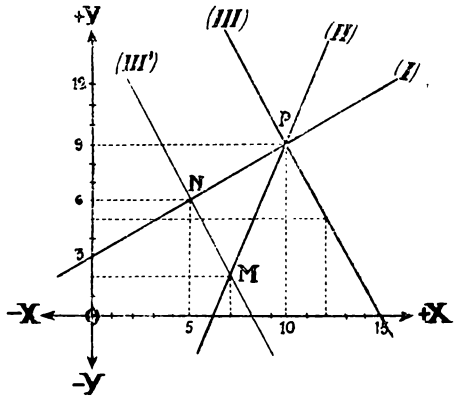


Рис. 88.

Його можна завсіди вивести з двох других так, що одне з них помножимо обома боками відповідним чинником і додамо відповідними боками до другого рівняння. У нашому прикладі тим чинником буде — 1, бо:

$$\begin{aligned}(3x—5y) — (7x—3y) &= — 15—43,\\ — 4x — 2y &= — 58,\end{aligned}$$

а звідсіля після скорочення на —2 виходить третє рівняння.

Нагадує це рівняння жмутка простих (уст. 86 б), що даний двома простими, які за точку перетину мають вершок жмутка. Тут «неозначений чинник» m, який характеризує ріжні прості того жмутка, має вартість — 1.

Як би третє рівняння мало ліворуч иншу вартість, нпр. як би було:

$$2x + y = 16,$$

то це рівняння не згодилось би з двома першими. Проста (III'), що його уявляє, не належить до нашого жмутка, бо не перетинає простих (I) і (II) в P, тільки в двох инших точках, N і M. Такий уклад трох рівнянь із двома невідомими звемо *переозначеним*, бо він подає більше, чим треба до визначення двох невідомих, і через те ці визначення стають *суперечними*.

б) В загальному випадкові нехай буде даний уклад:

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1 &= 0,\\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0,\\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Розвяжім два перші рівняння:

$$x = — \frac{c_1b_2—c_2b_1}{a_1b_2—a_2b_1}, \quad y = — \frac{a_1c_2—a_2c_1}{a_1b_2—a_2b_1}, \tag{9}$$

і ці вартости вставимо в третє:

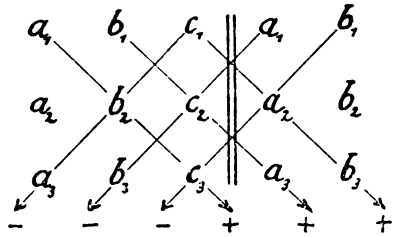
$$—a_3 \cdot \frac{c_1b_2—c_2b_1}{a_1b_2—a_2b_1} —b_3 \cdot \frac{a_1c_2—a_2c_1}{a_1b_2—a_2b_1} + c_3 = 0.$$

Це після впорядкування дасть таке вираження, яке на перший погляд виглядає дуже складним і непереглядним:

$$a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1 + a_2b_3c_1 — a_3b_2c_1 — a_1b_3c_2 — a_2b_1c_3 = 0, \tag{10}$$

одначе його легко представити у зовсім зручній формі.

Напишім таку табличку:



отже перепишім всі співчинники даного укладу, а поза рисою ще раз напишім у двох стовпцях співчинники обох невідомих. Потім берім добутки чисел, що стоять на скісних лініях, — три перші додаймо, а три другі віднімім, як це назначено на нашій табличці. У кожному з тих шости добутків, які через те отримуємо, повторяються всі три букви: a, b, c, і всі три покажчики: 1, 2, 3, але тільки по одному разові (немає в жадному двічі тої самої букви, ані двічі того самого покажчика).

Отся сума зветься *означником* даного укладу (8) і ми можемо сказати:

Уклад трох рівнянь із двома невідомими в з г і д н и й, *коли його означник* є н у л е м, *і тоді одне з трох рівнянь зайве. Він* н е з г і д н и й, *коли той означник* н е є н у л е м; *тоді він зветься теж* п е р е о з н а ч е н и м, *і з нього не можна обчислити обох невідомих.*

Легко переконатися, що в разі згідности укладу можна завсіди через комбінацію двох рівнянь отримати третє.

в) Три прості, що не переходять через одну точку, визначують трикутник. Коли точки їх перетину: P_1, P_2, P_3, мають співрядні: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) (рис. 89), тоді можна $\Delta P_1P_2P_3$ представити як суму трапезів $P_1P_2Q_2Q_1$ і $P_2P_3Q_3Q_2$, від якої віднято трапез $P_1P_3Q_3Q_1$.

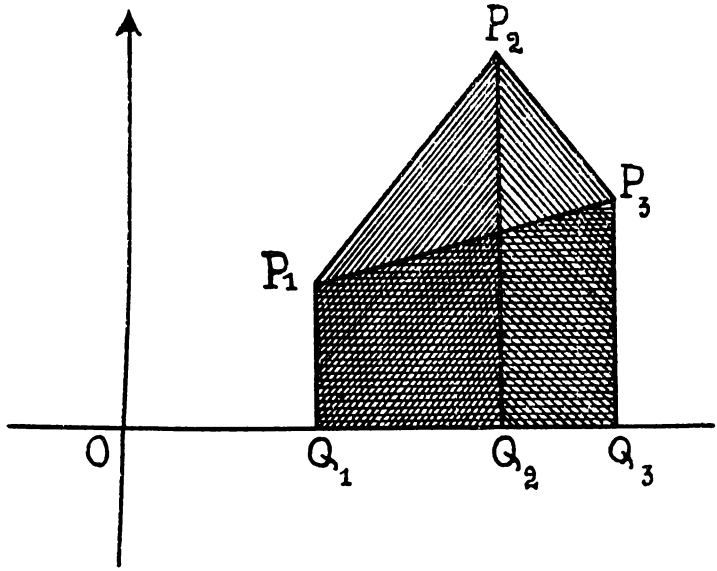


Рис. 89.

Для тих трапезів маємо такі взірці:

$$P_1P_2Q_2Q_1 = \frac{1}{2}(P_1Q_1 + P_2Q_2) \cdot Q_1Q_1 = \frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1),$$

$$P_2P_3Q_3Q_2 = \frac{1}{2}(P_2Q_2 + P_3Q_3) \cdot Q_2Q_3 = \frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2),$$

$$P_1P_3Q_3Q_1 = \frac{1}{2}(P_1Q_1 + P_3Q_3) \cdot Q_1Q_3 = \frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1),$$

отже буде:

$$\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1) + (y_2+y_3)(x_3-x_2) - (y_3+y_1)(x_3-x_1)].$$

Після редукції отримаємо для поля $\Delta P_1P_2P_3$:

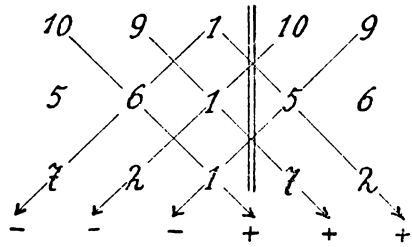
$$\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3-x_1y_2-x_2y_3-x_3y_1). \qquad (11)$$

Величину, що в скобках, можемо на основі рівняння (10) написати як означник:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix};$$

його два перші стовпці містять співрядні трох даних точок, а третій — самі одинки.

Нпр. на рис. 86 прості (I), (II) і (III') дають трикутник із вершками $P(10, 9)$, $N(5, 6)$, $M(7, 2)$; його поле обчислимо як означник:



Тут додатні добутки є:

$$10 \cdot 6 \cdot 1 = 60; \quad 9 \cdot 1 \cdot 7 = 63, \quad 1 \cdot 5 \cdot 2 = 10,$$

а від'ємні:

$$7 \cdot 6 \cdot 1 = 42, \quad 2 \cdot 1 \cdot 10 = 20, \quad 1 \cdot 5 \cdot 9 = 45,$$

отже:

$$\Delta MNP = \frac{1}{2}(60+63+10-42-20-45) = \frac{1}{2} \cdot 26 = 13.$$

Нехай дві точки, P_1 і P_2, будуть постійні, а третя рухома; її означимо P, а її співрядні x, y (замість x_3, y_3); тоді матимемо з рівняння (11) таке:

$$\Delta = \frac{1}{2}[(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2y_1-x_1y_2)].$$

Коли точка P впаде на просту P_1P_2, тоді поле трикутника зійде до 0, й ми матимемо умову, щоби *довільна точка P лежала на простій, яка сполучує дві даних точці P_1 і P_2:*

$$(y_2-y_1)\,x - (x_2-x_1)y + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0. \qquad (12)$$

Отсе рівняння можна звести до вигляду, який ми мали в уст. 65, г, рівн. (8), коли шукали рівняння простої, яка переходить через дві даних точці P_1 і P_2.

92. **Одне та два лінійні рівняння з трома невідомими.** Розвязки *одного* рівняння з трома невідомими:

$$ax + by + cz = d \qquad (9)$$

подаватимемо не парами, а трійками; їхня кількість буде безконечна.

Нпр. рівняння

$$2x + 3y + 4z = 12$$

матиме такі пари трійок у цілих числах:

x	y	z
0	0	3
0	4	0
6	0	0
1	2	1
2	0	2
...	..	...

Тут можна брати довільно по дві невідомі, а вже третю мусітимемо обчислити з рівняння, нпр.:

$$z = \frac{12 - 2x - 3y}{4} = 3 - \frac{2x + 3y}{4},$$

тому можна сказати, що таке рівняння «ще більше неозначене», як рівняння з двома невідомими.

Рисунком розвязувати його дуже трудно: до того радше надавався б *модель*.

Коли до нашого попереднього рівняння доберемо ще друге, нпр.:

$$6x - 5y - 4z = 0,$$

зможемо викинути z і отримаємо:

$$8x - 2y = 12 \quad \text{або} \quad 4x - y = 6,$$

отже теж іще неозначене рівняння.

Це значить, що уклад *двох лінійних рівнянь із трома невідомими неозначений*.

При допомозі одної невідомої, нпр. z, можна виразити обидві другі; тоді це z будемо добірати довільно так, як робили при неозначених рівняннях із двома невідомими з «параметром» k.

93. **Три рівняння з трома невідомими.** а) Для означености розвязки треба нам аж *трох рівнянь із трома невідомими*.

Такий уклад розвязуємо так, що викидаємо по черзі перше одну невідому, а потім другу, і тоді лишається тільки третя невідома. Одноцільного методу тут звичайно не вживаємо, тільки комбінуємо як найдоцільніше методи, які знаємо з попередньої науки про рівняння з двома невідомими.

Нпр.

$$\begin{aligned} &(\text{I}) && 5x + 4y - 3z = 24,\\ &(\text{II}) && 2x - 2y + 5z = -11,\\ &(\text{III}) && -x + 3y - 4z = 15. \end{aligned}$$

План нашої розвязки буде такий: (1) викинути z із (I) і (II) та з (II) і (III) (або з (I) і (III)); через це отримаємо два рівняння з невідомими x і y; (2) вставити ці вартости в одне з трох даних, щоб отримати z.

(1) $\quad$ (I). 5 + (II).3 $\quad\|\quad 31x + 14y = 87,$
(I). 4 — (III).3 $\quad\|\quad 23x + 7y = 51,$

а звідсіля:

$$x = 1,\ y = 4.$$

(2) Ці вартости вставимо в те рівняння, де співчинник при z найменший, отже в (I):

$$5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 3z = 24,$$

а звідсіля:

$$z = 1.$$

б) Розвяжім тепер одне завдання, що веде до укладу трох рівнянь із трома невідомими:

«Купець купив три роди матерії, разом k метрів; за першу платив a, за другу b, за третю c карб. за 1 метер і видав на все разом l карб. Коли продавав потім крам із деяким зиском, отримав із продажі разом m карб.; при цьому добавляв до 1 метра одної матерії p карб. при другій q карб., при третій r карб. Скільки було метрів кожної матерії?».

Першої матерії було x, другої y, третьої z метрів, отже:

$$x + y + z = k.$$

Ціни трох родів із окрема були ax, by, cz, отже загалом заплачено за неї:

$$ax + by + cz = l.$$

Коли ж до поодиноких цін докинемо зиски, отримаємо третє рівняння:

$$(a + p)x + (b + q)y + (c + r)z = m.$$

Отсі три рівняння творять бажаний уклад. Його можна зараз упростити так що від обох боків третього рівняння віднімемо відповідні боки другого:

$$px + qy + rz = m - l.$$

Розвязка в загальному випадкові не виявляє з себе нічого особливого.

94. Чотири рівняння з чотирма невідомими. а) Уклад рівнянь із чотирма невідомими буде аж тоді означений, коли кількість рівнянь буде рівна 4; коли їх менше, уклад неозначений.

Розвязуємо їх подібно, як було при трох невідомих.

Нпр.

$$\begin{aligned} &(\text{I}). && 2x - 3y - 2z + 4u = 3,\\ &(\text{II}). && 3x + y + 4z - 5u = -4,\\ &(\text{III}). && x - y + z - 2u = -1,\\ &(\text{IV}). && 5x + 2y - 3z - u = 21. \end{aligned}$$

Метою нашої роботи буде, позбутися перше невідомої u (через те кількість рівнянь зменшиться до трох), потім із трох рівнянь викинути z, далі з двох y і обчислити x. Тоді з другого рівняння останнього укладу взяти y і вставити його в одне з рівнянь, що містить у собі z, а коли знатимемо й цю третю невідому, тоді четверту u обчислимо з котрого-небудь рівняння даного укладу.

(1)	(I) + (II) + (III) + (IV)	(*A*) $11x-y=19$,
	(I) —2.(III)	(*B*) $-y-4z=5$,
	(III) + 2 . (IV)	(*C*) $11x+3y-5z=41$.
(2)		(*A*) $11x-y=19$,
	4 . (*C*) — 5 . (*B*)	(*D*) $44x+17y=139$.
(3)	17 . (*A*) + (*D*)	$231x=462$; $x=2$.

(4) x вставити в (*A*): $22-y=19$; $y=3$;
y вставити в (*B*): $-3-4z=5$; $z=2$;
x, y, z вставити в (IV): $5\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 2-u=21$; $u=1$.

б) Уклад рівнянь з іще більшою кількістю невідомих у практиці подибується доволі рідко; їх розвязуємо таким або подібними методами. Звичайно тільки вища алгебра й аритметика займаються укладами n рівнянь із n невідомими, а їхніми співчинниками бувають загальні числа.

Уклад лінійних рівнянь із більшою кількістю невідомих стає аж тоді означеним, коли кількість невідомих буде рівна кількости рівнянь в укладі. Коли рівнянь є менше, як невідомих, уклад є неозначений і має безліч укладів (пар, трійок, чвірок і т. д.) розвязок; коли ж рівнянь більше, як невідомих, уклад може бути або *згідний* і тоді будуть деякі рівняння зайві, — або він *переозначений* і тоді його не можна розвязати.

95. **Історична увага.** Лінійними рівняннями займалися вже *єгиптяне*; вони розвязували перш за все рівняння у формі поетичних афоризмів (рахункова книжка *Амеса)*. У *грецьких* творах знаходимо теж багато поетичних завдань на розвязку рівнянь, одначе методів розвязки в них не можна ще дошукатися. Перший *Діофант* (див. вправа 27, § 9) подає метод розвязування рівнянь із одною невідомою.

Більше щастя до рівнянь мали *інди*, дякуючи своєму геніяльному способові писання чисел; вони, як знаємо (уст. 31, увага), вводили також від'ємні числа, і через те їхня розвязка являється далеко ширшою й повнішою. Знали вони також рівняння з кількома невідомими; ріжні невідомі відріжнювали при допомозі кількох красок.

Богато займались лінійними рівняннями *араби*, яким ми завдячуємо навіть назву «алгебри» на означення науки про рівняння.*)

В Европі займались рівняннями перші *італійці*. У творі *Ліонарда Фібоначі* «Про абак» (див. уст. 12) маємо першу доволі повну теорію рівнянь. Уліпшення методів розвязки, які до того часу були дуже трудні й невигідні, завдячуємо німцеві *Міхелеві Штіфелеві* (*«Arithmetica integra»*, 1544, див. увагу до уст. 31).

*) Визначний арабський математик *Магомет ібн Муза*, званий *Алхварізмі* (коло 820 по Хр.), написав книжку т. зв. «Алджебр Валмукабала», а від неї й пішла назва алгебри.

Рисункова розвязка рівнянь уперше подибується в творі *д'Орема**), але систематичну форму приймає вона аж після того, як стала відомою епохова «Геометрія» *Декарта* (див. увага до уст. 31).

Розвязування лінійних рівнянь із кількома невідомими — це заслуга *Ісаака Н'ютона***), який придума в методи порівнювання й підставлювання, а далі *Ойлєр* (див. увага до уст. 82), подав свій метод розвязки неозначених рівнянь.

Врешті найповніший спосіб розвязування укладів лінійних рівнянь — *метод означників* — появився аж у XVIII ст. Це видумка двох людей: великого німецького філософа й математика *Ляйбніца****) та француза *Крамера*†); придумали вони його незалежно один від одного.

ВПРАВИ.

I.

Розвязати такі неозначені рівняння:

1. $5x + 4y = 31$;
2. $17x - 32y = 1$;
3. $29x + 57y = 411$;
4. $667x - 332y = 995$;
5. $12x + 15y = 1000$;
6. $109x - 200y = 539$.

Шукати розвязок у цілих, додатніх числах.

7. Число 100 розкласти на суму двох доданків, із яких перший подільний на 11, другий на 7.

Перший матиме форму $11x$, другий $7y$.

---

*) Норманський монах *Ніколя д'Орем* (*Nicola d'Oresme*, 1323) у творі «*Latitudines formarum*» («Ширини форм») займається графичним з'ясовуванням вмінних з'явищ природи, одначе тут немає ще звязку між геометричним твором і рівнянням.

**) *Ісаак Н'ютон* (*Newton*, 1643—1727) мабуть найбільший математичний геній усіх часів, англієць, учився в Кембриджі в професора Барова, що мав великий вплив на його всю пізнішу діяльність. Потім став його наступником у кембриджському університеті, а крім того брав визначну участь у політичному житті. Від 1703 р. був головою королівського Наукового Товариства (тоб-то Академії Наук). Його найбільшою заслугою в математиці є винахід т. зв. «вищих рахунків» (диференціяльного й інтегрального). Для физики прислужився тим, що відкрив звязок між притяганням тіл на землі та серед небесних тіл, а крім того показав, що біле світло складається з багатьох простіших красок. — Похований у Вестминстерському Абатстві, між найвизначнішими людьми Англії.

***) *Готфрид Вільгельм Ляйбніц* (*Leibnitz*, 1646—1716) походив із славянського роду. Уродився в Ганновері, вчився в Ляйпцигу. Займався політикою і в характері дипломатичного посла багато їздив по світі. З доручення прусського короля з'організував 1711 р. Академію Наук у Берліні. — Незалежно від Н'ютона прийшов на винахід вищих рахунків, одначе із зовсім иншої точки погляду. Між ними обома вийшов доволі немилий спір про першенство винаходу, який закінчився аж після їхної смерти ствердженням, що їм обом належиться ця безсмертна заслуга.

†) *Габріель Крамер* (*Cramer*, 1704—1752).

8. Що це за число, що поділене на 7, лишає останок 5, а поділене на 15, — останок 2?

Нехай це число буде N; його можна представити на два способи: $7x + 5$ і $15y + 2$.

9. Якесь число, подільне на 8, лишає останок 1, коли його поділити на 9. Що це за число?

10. Двома мірками, 7-літровою і 8-літровою, треба переміряти 113 літрів. Як це зробити?

11. Дріб $\frac{83}{55}$ розкласти на суму двох дробів із знаменниками 5 та 11.

II.

Розв'язати такі уклади рівнянь:

1. $3x+4y=7$,
   $4x+5y=9$;

2. $11x+5y=17$,
   $2x+4y=0$;

3. $2x+7y=1$,
   $7x+2y=71$;

4. $7y=8x-5=10x-1$;

5. $2x-7y=2$,
   $3y-x=5$;

6. $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=7$,
   $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=0$;

7. $\frac{x+1}{y+1}=\frac{3}{2}$, $\frac{5-y}{x-1}=\frac{1}{2}$;

8. $\frac{2x-y}{3}+\frac{3y-5x}{4}=0$,
   $3-[2(3x-1)-4(3-2y)]=$
   $=\frac{5x-4y}{2}+(6y-3)$;

9. $\frac{x+3y-1}{4x-y-2}=-1$,
   $\frac{2x-x-3}{3x+3y-2}=3$;

10. $\frac{5y-x+3}{3x-2y+1}=\frac{13y-13x-1}{3x-2y+1}+3$,
    $\frac{5x+2y+1}{4x+y-1}=2$;

11. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=\frac{1}{4}$,
    $\frac{4x}{3}-\frac{2y}{5}=\frac{3x}{4}+\frac{19y}{40}$;

12. $\frac{5x-6}{6}+\frac{4x-5x}{10}=\frac{3y+8x}{4}-\frac{29}{300}$,
    $\frac{y-1}{2}+\frac{3-2y}{5}=\frac{x-8}{11}+\frac{138}{100}$;

13. $(\frac{7x}{2} - y) + (3 - \frac{y}{2}) = (-\frac{1}{2} + 15x) + 2y,$

$\frac{x-2}{2} + \frac{3y}{2} - 6x = 7y - \frac{x}{3} + 7;$

14. $\frac{12}{2x-y+6} = \frac{10}{3x+2y-2},$

$\frac{4x-y}{2} = \frac{5y-x}{3} - 2;$

15. $\frac{3}{\frac{x}{4} - \frac{y}{6} + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{x - \frac{5y}{6}},$

$3(\frac{y}{5} - x) = x + [-2(y-1) - (x-1)];$

16. $x - \frac{2xy}{2y+5} = \frac{15x+4y}{6y-2x} + \frac{5x^2+4y^2+105}{(x-3y)(2y+5)},$

$3 - \frac{7x+2y}{5x} = 5 - \frac{5y+9}{3x}.$

---

17. $ax+by=c,$
$(a+b)x + (a-b)y = 2c;$

18. $x+y = a+b,$
$\frac{x+a}{y+b} = \frac{a}{b};$

19. $(a+b)x - (a-b)y = a,$
$(a-b)x + (a+b)y = b;$

20. $bx+ay = 2ab,$
$ax+by = a^2+b^2;$

21. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$
$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1;$

22. $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b},$
$\frac{x}{a-b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b};$

23. $\frac{ax}{b} + \frac{by}{a} = a+b,$
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2};$

24. $\frac{x}{n^2-1} - \frac{y}{a^2-1} = a^2 = n^2,$
$\frac{x}{a^2+1} + \frac{y}{n^2+1} = a^2+n^2;$

25. $\frac{p}{p+x} = \frac{q}{q-y},$
$\frac{q}{q-x} + \frac{p}{p+y};$

26. $\frac{x}{a+1} + \frac{y}{(a+1)^2} = 1,$
$x+y = 2a;$

27. $\dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{a+b}=\dfrac{b}{a+b}$,
$y=x+b$;

28. $\dfrac{2x+y}{x-2y}=\dfrac{3a+b}{a-3b}$,
$\dfrac{x-b}{y+a}=\dfrac{b}{a}$;

29. $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{a}{b}$,
$\dfrac{x+y}{a}+\dfrac{x-y}{b}=2(a+b)$*);

30. $\dfrac{2x+y-8}{5}=\dfrac{3x-5y+1}{4}+1$,
$\dfrac{3x-5y+1}{2}=\dfrac{2(2x+y-8}{5}-2$ **).

III.

1. Число 60 розкласти на такі два доданки, щоб один із них, поділений другим, дав на частку 2 і останок 3.

2. Що це за дріб, що має вартість $\frac{2}{3}$, а стає рівний дробові $\frac{5}{8}$, коли чисельник побільшити на 5, а знаменик на 9?

3. Який дріб стає рівний дробові $\frac{9}{4}$, коли чисельник і знаменик побільшити на 5, а рівний дробові $\frac{7}{3}$, коли їх зменшити на 1?

4. У якомусь товаристві є вдвоє стільки чоловіків, як жінок. Коли відійшло 8 чоловіків із своїми жінками, зістало вчетверо стільки чоловіків, як жінок. Скільки було чоловіків і скільки жінок?

5. Вінок, що його жертвував Зевесові сиракузький тиран Гієрон, важив 10 фунтів, а погружений у воду, тратив $\frac{1}{2}$ фунта на вазі. Обчислити, скільки в ньому було щирого золота, а скільки срібла, коли знаємо, що золото тратить у воді 0,052 свого тягару, а срібло 0,099 тягару?***)

6. У трикутнику продовжено основу на 7 m, а висоту на 2 m і через те збільшилася його площина на 117 m^2. Коли ж основу продовжено тільки на 1 m, але зате висоту на 4 m, то площина зросла на 53 m^2. Яка основа й висота цього трикутника?

---

*) Ввести дві нові невідомі: $x+y=u$, $x-y=v$.

**) Ввести: $2x+y-8=u$, $3x-5y+1=v$.

***) Це та славна задача, що її поставив Гієрон Архимедові, щоби цей провірив, чи золотник не обманув його й не вкрав золота, заступаючи його дешевшим сріблом. Роздумуючи над її розвязкою, Архимед купався в морі і при цій нагоді відкрив з'явище, відоме під назвою «закону Архимеда»: кожне тіло, погружене у воду, тратить із свого тягару стільки, скільки важить вода, яку воно собою витискає. — Оповідають, що Архимед утішився своїм відкриттям так дуже, що вискочив із води й побіг голий до дому, кличучи: «Геврека!» (по грецьки: «я знайшов»).

7. Когось судило 30 суддів і засудило його 6 голосами більшости. Скільки їх було за засудженням, а скільки за увільненням?

8. Скільки срібла спроби 750 і спроби 900 треба взяти разом, щоб отримати 1 *kg* срібла спроби 850?

9. Скільки треба змішати $20^0/_0$-го і $12^0/_0$-го розчину соли, щоб отримати 400 *g* розчину $15^0/_0$-го?

10. Мішанина міді й цинку важить 1000 *g* і має питомий тягар 7, 43. Скільки в ній є міді, а скільки цинку, коли питомий тягар міді є 8,49, а питомий тягар цинку 0,86?

11. *A* каже до *Б*: «Ми маємо разом 63 роки. Я маю стільки років, скільки ти мав тоді, як я мав стільки, скільки ти маєш тепер». Обчислити вік одного й другого.

12. Станції *A* і *B* віддалені на 40 *km*. З обох виїздять одночасно поїзди, один із швидкістю c_1, другий c_2, обидва в тому самому напрямкові. Коли й де один із них дожене другий?

13. Гарматний гук іде разом із вітром із швидкістю 344,42*m/sec*, а проти вітру із швидкістю 335,94 *m/sec*. Обчислити швидкість голосу і швидкість вітру.

14. В одній родині були хлопці та дівчата. На питання, кілько їх усіх є, відповіла найстарша дівчинка: «В мене стільки братів, що й сестер», а найстарший хлопчина сказав: «А в мене вдвоє стільки сестер, що братів». Скільки там було хлопців, а скільки дівчат?

15. Сума двох трицифрових чисел, збільшена на 1, дає 1000. Коли їх написати одне побіч одного, а між ними поставити десятинну перетинку, отримаємо число в 6 разів більше, ніж як би ми ці числа написали навпаки. Що це за числа?

IV.

А) Розвязати такі укладні рівнянь:

1. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{8}{15}$, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{15}$ *);

2. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{b}$;

*) Ввести нові невідомі: $\dfrac{1}{x}=u$, $\dfrac{1}{y}=v$.

3. $\dfrac{3}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=\dfrac{5}{6}$,
$\dfrac{7}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{11}{12}$ *);

4. $\dfrac{A}{ax+by}+\dfrac{B}{bx-ay}=A+B$,
$\dfrac{B}{ax+by}-\dfrac{A}{bx-ay}=A-B$**).

Б) Чи мають розвязки ось такі уклади:

1. $3x+5y=1$,
$x+\dfrac{5}{3}y=2$;

2. $\dfrac{x}{y}=\dfrac{7}{8}$,
$\dfrac{x+y}{15}=y-x$;

3. $3x+5y=1$,
$\dfrac{3}{5}x+y=\dfrac{1}{5}$;

4. $(a+b)\,x-(a-b)\,y=0$,
$(x-y)\,a+(x+y)\,b=1$.

В) Дібрати число m так, щоби зробити неможливими (суперечними або неозначеними) ось такі уклади:

1. $(1-m)\,x+3y=2$,
$x+3y=5$;

2. $2x+(1-\dfrac{1}{m})\,y=3$,
$4x-2y=1$.

Г) Дослідити ось такі уклади:

1. $3x+2y=5$,
$5x-3y=2$,
$4x+7y=11$;

2. $5x-6y-1=0$,
$3x+5y+4=0$,
$y=x+2$.

Чи вони згідні чи переозначені?

Д) У таких укладах:

1. $2x-3y+2=0$,
$x-4y-7=0$,
$ax+\beta y+9=0$;

2. $x=3y-2$,
$y=2x-3$,
$2x+3y+\gamma=0$;

співчинники α, β, γ визначити так, щоби рівняння не були переозначені.

V.

Розвязати такі уклади:

1. $2x+7y-2z=4$,
$3x+7y+2z=35$,
$2x+2y+5z=40$;

2. $5x-3y+z=5$,
$2x+y+3z=17$,
$x+2y-z=4$;

*) Ввести: $x+y=u$, $x-y=v$.

**) Див. попередню увагу.

3. $x+ay+bz+c=0,$
$ax+by+cz+1=0,$
$bx+cy+z+a=0;$

4. $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2c,$
$\frac{y}{b+c}+\frac{z}{b-c}=2a,$
$\frac{z}{c+a}+\frac{x}{c-a}=2b.$

5. $ay-bx=A,$
$bz-cy=B,$
$cx-az=C;$

6. $\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}-\frac{z}{4}=10,$
$\frac{x}{6}-\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=0,$
$\frac{2x}{5}-\frac{3y}{2}+\frac{2z}{3}=\frac{101}{30};$

7. $x:y:z=6:9:10,$
$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+2z=2;$

8. $\frac{x+2}{y+1}=3,$
$\frac{y-1}{z-2}=1,$
$\frac{z+11}{x}=2;$

9. $-x+y+z=a,$
$x-y+z=b,$
$x+y-z=c;$

10. $(c+a)\,x-(c+b)\,y=2ab,$
$(a+b)\,y-(a+c)\,z=2bc,$
$(b+c)\,z-(b+a)\,x=2ca;$

11. $-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a},$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b},$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{c};$

12. $a^3+a^2x+ay+z=0,$
$b^3+b^2x+by+z=0,$
$c^3+c^2x+cy+z=0;$

13. $x+y+z=0,$
$(b+c)\,x+(c+a)\,y+(a+b)\,z=0,$
$bcx+cay+abz=1;$

14. $ax+by+cz=a,$
$(b+c)\,x+(c+a)\,y+(a+b)\,z=b,$
$(-a+b+c)\,x+(a-b+c)\,y+(a+b-c)\,z=c;$

15. $\dfrac{bx+ay}{c}=\dfrac{a-b}{(b-c)(c-a)}$,

$\dfrac{cy+bz}{a}=\dfrac{b-c}{(c-a)(b-a)}$,

$\dfrac{az+cz}{b}=\dfrac{c-a}{(a-b)(c-b)}$;

16. $m=\dfrac{xy}{ay+bx}$,

$n=\dfrac{yz}{cz+dy}$,

$p=\dfrac{zx}{ex+fz}$.

---

17. $x+y+z=20$,
$y+z+u=30$,
$z+u+x=40$,
$u+x+y=50$;

18. $x+y+2z-u=1$,
$2x-y-2z-4u=4$,
$-x+2y+6z+3u=-2$,
$3x-3y-8z-5u=10$;

19. $x:y:z:u=2:3:1:6$,
$x+y+z+u=6$;

20. $x:y:z:u=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}:\dfrac{2}{3}:\dfrac{5}{4}$,
$x+y+z+u=114$;

21. $x+y+2z-2u=1$,
$4x-y+z-3u=0$,
$-3y+4z-3u=2$,
$5y-4z+5u=2$;

22. $2x-3y+4u=4$,
$5y-2z=4$,
$5x+3z=14$,
$x-4y+3u=5$;

23. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{7}+\dfrac{u}{9}=2800$,

$\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{7}+\dfrac{z}{9}+\dfrac{u}{11}=2144$,

$\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{11}+\dfrac{u}{13}=1744$,

$\dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{11}+\dfrac{z}{13}+\dfrac{u}{15}=1472$;

24. $x+y+z=3a+b+c$,
$x+y+u=a+3b+c$,
$x-z-u=a+b-c$,
$y+z-u=3a-b-c$.

VI.

1. Сума двох чисел рівна трикраті третього, а їхня ріжниця на 6 менша від того третього; врешті сума подвійного третього й другого на 4 більша від подвійного першого. Що це за числа?

2. Дане трицифрове число; сума цифр є 19. Коли переставити цифру соток на кінець числа, отримаємо число, на 225 більше від

даного, а коли переставити цифру одиниць на лівий край числа, отримаємо число на 8 більше від двократі даного. Що це за числа?

3. Три бочці мають разом 1800 літрів змісту; дві перші повні, третя — порожня. Щоб її наповнити, треба туди влити або всю воду з першої й половину води з другої, або всю воду з другої й третину води з першої. Обчислити зміст кожної з трох бочок.

4. Робітники A і $Б$ беруться виконати якусь працю разом у 20 днях, $Б$ і B разом у 25 днях, а B і A разом у 30 днях. Якого часу потребували б вони всі три разом на цю роботу, а якого кожен із окрема?

5. Вельосипедист їде по рівному шляхові з швидкістю 25 km/h, під гору 15 km/h а з гори 30 km/h. Скільки рівної дороги, скільки під гору і скільки вниз є на 100 km-ому шляхові, коли його їзда в одному напрямкові триває $4^h\ 24^m$, а в противному $4^h\ 36^m$?

6. Три грачі умовляються, що хто з них програє, той дасть двом другим товаришам по стільки, як кожний із них має. Грають три партії і програють по черзі кожний одну; тоді показується, що всім тром зісталася однакова сума в кишені. Скільки мав кожен із них, сідаючи грати?

7. Основи двох трикутників, b і b', висоти яких є h і h', лежать на одній простій g. У якій віддалі c від g треба провести просту g', рівнобіжну до g, щоби між g і g' залишалися два трапези з однаковою площиною?

8. Чотири числа мають ту прикмету, що кожне з них на a більше від попереднього, а на суму дають вони b. Що це за числа?

Друга частина

Дії третього ступня

ЧЕТВЕРТИЙ РОЗДІЛ

Степенювання й корінювання.

§ 16. Степенювання.

96. **Степенювання одночленів.** а) Степенювання пояснювали ми таким рівнянням (див. уст. 4, рівн. (4)):

$$a^n = \underbrace{a}_{1}\,\underbrace{a}_{2}\dots\underbrace{a}_{n}. \tag{1}$$

Отсе пояснення вимагало, щоби викладник n був цілим, додатнім числом, бо тільки тоді можна говорити про якусь кількість однакових чинників у добутку. Одначе як при инших діях, так і тут будемо переводити поширення нашого пояснення на від'ємні й дробові вартости числа n. Та перш за все треба нам спинитися на цьому первісному поясненні й витягти з нього всі висновки.

Ми вже знаємо ось такі правила степенювання (уст. 22, 42 і 57):

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(а)} && a^m \cdot a = a^{m+n};\\
&\text{(б)} && a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};\\
&\text{(в)} && (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn};\\
&\text{(г)} && (ab)^k = a^k b^k;\\
&\text{(д)} && \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k},
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

а далі правило степенювання відносних чисел (уст. 35):

$$(-a)^{2n} = +a^{2n},\quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, \tag{3}$$

отже *паристий степень від'ємного числа має додатню, непаристий — від'ємну вартість.*

б) *Взірець* (б) *дав привід до поширення нашого пояснення дії степенювання.* Там у викладнику маємо віднімання; як довго $m > n$, ріжниця $m—n$ є додатнім числом; коли ж одначе буде $m=n$, або $m<n$, тоді треба окремо пояснити, що має значити степень, викладником якого являється нуль або від'ємне число.

Коли $m=n$, маємо: $a^m : a^m = a^{m—m} = a^0$, а що з другого боку $\frac{a^m}{a^m}$ — це дріб із однаковим чисельником і знаменником, який має вартість одиниці, тому маємо право ввести таке **нове пояснення:**

$$a^0 = 1; \tag{4}$$

нулевий степень кожного числа рівний одиниці.

Коли ж буде $m < n$, тоді $a^{m—n}$ іще не має ніякого значіння. Можемо одначе цьому символові надати змісту, коли дріб $\frac{a^m}{a^n}$ скоротимо на m чинників a; тоді в знаменику зістанеться $n—m$ таких чинників і ми матимемо:

$$a^{m—n} = \frac{1}{a^{n—m}}. \tag{5}$$

Покладім $n—m=k$; це число буде додатнє, а ріжниця $m-n=-k$ матиме від'ємну вартість. Це дасть:

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}. \tag{5a}$$

Це дальше **нове пояснення:** *степень із від'ємним викладником рівний відворотности того самого степеня з додатнім викладником.*

Оправдання того маємо у факті, що $a^{-k} \cdot a^{+k} = a^{-k+k} = a^0 = 1$, а з другого боку: $a^{-k} \cdot a^k = \frac{1}{a^k} \cdot a^k = 1$.

На основі цього правила є:

$$\left(\frac{1}{p}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{p}\right)^n} = 1 : \frac{1}{p^n} = p^n,$$

а так само:

$$\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-(m+n)} \cdot \frac{1}{a^{m+n}}.$$

Таким чином ряд степенів якогось числа можна продовжувати в два боки: на викладники додатні та викладники від'ємні:

$$\ldots, a^{-n}, \ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2 \ldots, a^n, \ldots$$

або:

$$\ldots, \frac{1}{a^n}, \ldots, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots \qquad (6)$$

і так отримуємо «повний степеневий ряд» числа a.

Знаючи від'ємні степені, можемо кожне десяткове число представити як многочлен, що має за основу степені числа 10, а за співчинники — цифри від 0 до 9; степеневі викладники будуть розтягатися від додатніх до від'ємних вартостей (отже многочлен буде впорядкований спадом), нпр.:

$$362{,}895 = 3.10^2 + 6.10^1 + 2.10^0 + 8.10^{-1} + 9.10^{-2} + 5.10^{-3}.$$

в) Степеневий ряд числа a, викладники якого впорядковані ростом, може бути спадаючий або ростучий, а саме:

Коли $a > 1$, ряд буде ростучий, бо обидва боки нерівности

$$a > 1,$$

множені на a, дадуть:

$$a^2 > a;$$

це, множиме ще раз на a, дасть:

$$a^2 > a^3,$$

і т. д., взагалі:

$$a^{m+1} > a^n.$$

Коли ж би було $a < 1$, і ми цю нерівність множили раз-у-раз на a, отримали би:

$$a^3 < a,$$
$$a^3 < a^2,$$
$$\ldots\ldots$$
$$a^{n+1} < a^n,$$

отже той ряд буде спадаючий.

Повний степеневий ряд чисел а росте, коли його основа несправжній дріб; ряд опадає, коли основа — справжній дріб.

Коли $a = 1$, ряд степенів складається з самих одиниць.

Нехай тепер a буде додатнім числом (отже справжнім або несправжнім додатнім дробом); тоді дроби (6) можна представити на додатній половині числової лінії. Тут відповідні точки не йтимуть у рівних відступах, тільки будуть щораз більше віддалюватись одна від одної, коли $a>1$ (а з ходом у напрямку до нуля будуть наближатись), а при $a<1$ буде відворотний порядок.

Нпр. для $a=2$ і $a=1/2$ маємо (рис. 90):

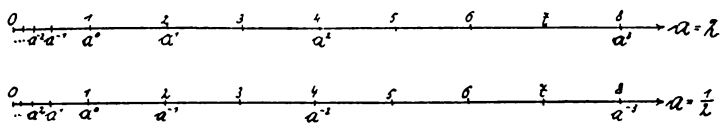


Рис. 90.

(а)....., 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ...,

або ж:

....., $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, ...,

і:

(б) ....., $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$, ...,

т. зн.:

....., 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ .....,

Як би основа була від'ємна, ряд (6) складався би з чисел додатніх і від'ємних на переміну:

$$...., +\frac{1}{a^4}, -\frac{1}{a^3}, +\frac{1}{a^2}, -\frac{1}{a}, +1, -a, +a^2, -a^3, +a^4, ...$$

97. **Викладнича функція та її образ.** а) Функція

$$y=a^x, \tag{7}$$

де основа a постійна, а змінюється тільки викладник, зветься *викладничою функцією*, а її образ — *викладничою кривою*. І викладничу функцію, і її образ можна вважати поясненими поки-що тільки для цілих вартостей аргументу x; одначе ми рисуємо не ламану лінію, тільки одноцільну криву, як це робили з функцією $y=x^2$ в уст. 66. В уст. 111 покажемо, що образ функції (7) дасть тільки тоді суцільну криву, коли *основа a буде додатня*, тому відразу приймаємо $a>0$.

Нарисуймо образ функції (7) для вартости напр. $a=2$ і $a=\frac{3}{2}$ (рис. 91). Бачимо тут відразу, що крива постійно є над віссю x, бо ж

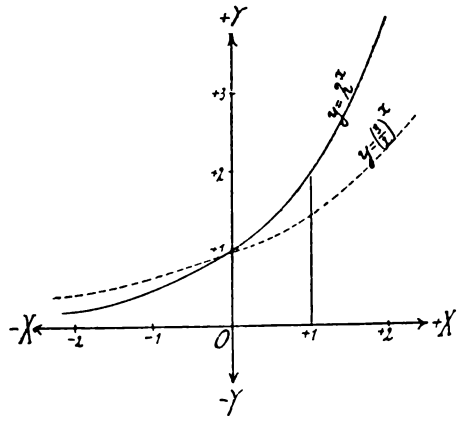


Рис. 91.

у ряді (6) при додатньому a немає від'ємних вартостей. Вона стає чим раз стрімкішою, як це бачимо з того, що чим більша вартість аргументу, тим більша ріжниця двох сусідніх вартостей функції. І справді: при $a>1$ ріжниця

$$a^{n+1}-a^n=a^n,\ a-a^n=a^n\,(a-1)$$

тим більша, чим більше n.

За те ж у лівий бік (отже з ростом викладників у від'ємному напрямкові) крива спадає щораз лагідніше; вона наближується «асимптотично» (див. уст. 67а) до від'ємної половини осі X. Для дуже великого n величина $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ матиме дуже малу вартість, отже:

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0. \tag{8}$$

б) Стрімкість росту й опадання кривої як цілість залежить від вартости основи a. Коли $a<b$, то завсіди:

$$a^n<b^n,$$

і навпаки:

$$\frac{1}{a^n}>\frac{1}{b^n},$$

отже чим більша основа, тим стрімкіше росте крива в додатньому

напрямкові і тим лагідніше вона спадає в сторону від'ємних вартостей аргументу.

На рис. 91 крива $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ зазначена проривчастою лінією; вона в додатній частині йде вище кривої $y=2^x$, у від'ємній — нижче неї.

в) Дві криві:

$$y=\left(\frac{p}{q}\right)^x \qquad \text{і} \qquad y=\left(\frac{q}{p}\right)^x$$

заховуються симетрично відносно осі Y; бо коли в першому рівнянні викладник x заступимо відповідним від'ємним: $-x$, то отримаємо рівняння другої кривої: $\left(\frac{p}{q}\right)^{-x}=\left(\frac{q}{p}\right)^x$

Для $a=1$ отримаємо: $y=1^x=1$, а тоді образом функції буде позема лінія, у віддалі 1 від осі X.

Звідсіля бачимо, щовсі криві, які подає рівняння (7) для додатніх вартостей основи a, творять *громаду* у кривих зі спільним вершком на осі Y у висоті 1. Віссю симетрії є вісь Y.

На рис. 92 бачимо кілька кривих із тої громади; криві, що відповідають одна одній, позазначувані однаковими римськими цифрами. Криві, що відповідають основам $a<1$, рисовані повними лініями; криві, для яких $a<1$, проривчасті.

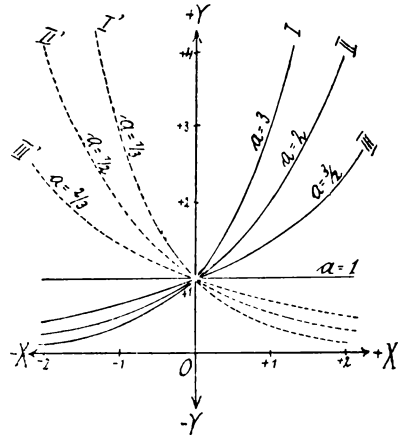


Рис. 92.

98. **Степенювання многочленів. А. Квадрати.** а) Для квадрату двочлена мали ми вже взірець:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \qquad (9)$$

Його легко поширити на многочлени з більшою кількістю доданків. Коли маємо обчислити $(a+b+c)^2$, тоді можемо суму $a+b$ вважати на хвилину одним числом, і тоді буде на основі (9):

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2,$$

або після вимноження:

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2.$$

Так само отримаємо далі:

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2,$$

отже тут до квадрату тричлена $a+b+c$ прибувають іще: подвійний добуток того тричлена та нового члена d, а крім цього — квадрат того нового члена.

Загалом бачимо, що в квадраті многочлена є два роди доданків: квадрати поодиноких членів і подвійні добутки всіх можливих комбінацій по два члени. Для скорочення пишемо це так:

$$(a+b+c+d+\ldots)^2=\Sigma a^2+2\,\Sigma ab; \qquad (10)$$

знак Σ (велике грецьке «С», чит. «сігма») означує суму; Σa^2 означує суму всіх чисел «таких, як a^2» (отже суму квадратів усіх членів), а Σab суму всіх чисел «таких, як ab», (отже суму всіх можливих добутків по два ріжні члени даної суми).

Геометрично з'ясуємо це незачиненим квадратом (рис. 93).

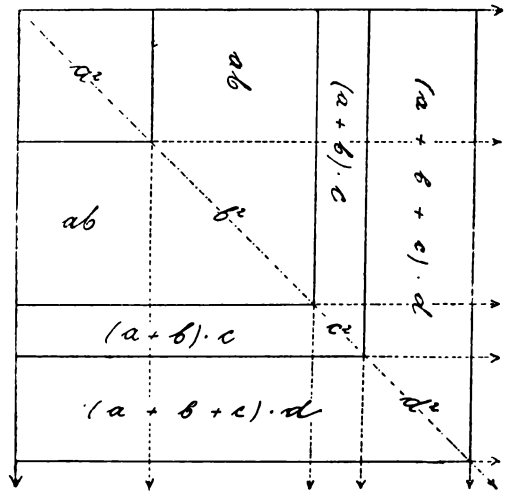


Рис. 93.

У ньому бачимо два роди піль: (1) квадрати, що йдуть здовж пере-

кутні від лівого рога внизу до правого вверх, і (2) прямокутники, парами однакові, розложені симетрично до тої перекутні. — Коли до якогось многочлена додамо новий складовий член, то на наш квадрат треба буде накласти згори і зправа нову верству, зложену з одного квадрату і стільки пар прямокутників, скільки доданків було в попередній сумі. Усі вони (і прямокутники і квадрати одної верстви) матимуть один бік однакової величини. Їх можна буде з'ясувати як одноцільний прямокутник із такими боками: один бік — повійна сума всіх попередніх доданків, збільшена тим новим членом, а другий бік — цей новий доданок.

Напишемо це так:

$$[(a+b+c+\ldots+m)+n]^2=(a+b+c+\ \ldots\ +m)^2+2(a+b+c+\ldots+m)n+$$
$$+n^2=(a+b+c+\ \ldots\ +m)^2+[2(a+b+c+\ \ldots\ +m)+n]n \qquad (11)$$

б) Із останнього взірця читаємо правило *підношення подрібних чисел до квадрату.*

Кожне ціле десяткове число можна представити як многочлен із основою 10:

$$a^n\ .\ 10^n\ +b\ .\ 10^{n-1}+c\ .\ 10^{n-2}+\ \ldots\ +k\ .\ 10+l.$$

Коли це число двоцифрове, отже $10a+b$, то його квадрат буде:

$$(10a+b)^2=(10a)^2+2\ .\ 10a\ .\ b+b^2=100a^2+20ab+b^2=$$
$$=100a^2+10\ .\ 2ab+b^2. \qquad (*)$$

Тут маємо: квадрат першої цифри на місці сотень, подвійний добуток обох цифр на місці десятків, і квадрат другої цифри на місці одиниць. Коли при підписуванні частинних добутків пропустимо нулі, матимемо звичайний спосіб обчислювання квадрату двоцифрового числа. Нпр.:

$57^2=(50+7)^2=50^2+2\ .\ 50\ .\ 7+49=$
$=2500+700+49=$
$=3249$

або:
$5^2=25.$
$2\ .\ 5\ .\ 7=\ 70.$
$7^2=\ 49$
3249

Одначе взірець (*) можемо упростити так, що напишемо:

$$(10a+b)^2=100a^2+(2\ .\ 10a+b)b,$$

і тоді він складається з двох доданків: (1) з квадрату першої цифри (на місці сотень) та (2) з добутку з суми подвійної першої цифри (на місці десятків) й другої цифри (на місці одиниць), множеної на цю

другу цифру. Иншими словами, ми в цьому другому доданкові подвоюємо першу цифру й дописуємо до неї другу, а це число множимо на ту цифру, яку тільки що дописали.

Таким робом буде:

$57^2 = 50^2 + (2 \cdot 50 + 7) \cdot 7^2 =$
$= 2500 + 107 \cdot 49 =$
$= 3249$

або: $5^2 = 25..$
$107 \cdot 7 = 749$
$3249.$

Через те, що перший доданок стоїть на місці сотень, а другий на місці одиниць, перший буде пересунений на два місця вліво; щоби при писанні не помилитися, даємо після квадрату першої цифри дві крапці.

Коли число має більше цифр, будемо його підносити до квадрату так само, тільки що в нашому взірці число *a* матиме значіння не одної цифри, а цілої групи цифр; тоді спершу обчислимо квадрат числа, зложеного з усіх попередніх цифр, і він буде відносно дальшого доданку пересунений на дві цифрі вліво — а другий доданок знайдемо, коли до подвоєного числа допишемо останню цифру й помножимо це число на ту останню цифру.

Нпр.

86425^2

$8^2 = 64..$
$166 \cdot 6 = 996..$
$1724 \cdot 4 = 6896..$
$17282 \cdot 2 = 34564..$
$172845 \cdot 5 = 864225$
7469280625

Подвоювання останнього числа можемо влекшити собі так: коли ми мали перше суму $2(a+b)+c$, а тепер маємо утворити суму $2(a+b+c)+d$, то це значить те саме, що $[2(a+b+c)]+c+d$, отже ми до попередньої суми тільки мусимо *додати* цю останню цифру, яку в минулому добуткові *дописували*. В нашому прикладі мали ми перше доданок $166 \cdot 6$, а до наступного доданка дійдемо так, що до множника додамо 6, $166+6=172$, і до того числа допишемо дальшу цифру, яка в даному числі піде після 6, тоб-то 4; таким робом отримаємо: 1724.

в) Рішім іще питання про кількість цифр квадрату даного числа. *n*-цифрове число в десятковім укладі починається з $a \cdot 10^{n-1}$ (нпр. *три*цифрове число з сотень, т. зн. із *квадрату* основи 10), отже його квадрат буде зачинатися з $a^2 \cdot 10^{2n-2}$; це значить, що його найвища цифра буде стояла на $(2n-1)$-ому місці, а коли її квадрат двоцифровий, то на $2n$-ому місці. Значить, *квадрат числа має вдвоє стільки цифр, як є в даному числі, або на одну цифру менше.* Коли число зачинається групою цифр 317 або більшою, маємо перший випадок; коли ж початкова група цифр є 316 або число менше, буде друга можливість.

Це тому, що $316^2 = 99856 < 100\,000$, але вже $317^2 = 100\,789 < 100\,000$.

Квадрат десятинного дробу має вдвоє стільки десятинних місць, як у ньому є цифр, бо ж:

$$\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 = \frac{a^2}{10^{2n}}.$$

99. **Продовження. Б. Вищі степені.** а) Побіч квадрату двочлена ми вже знаємо і його куб:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \tag{12}$$

а тепер займемося ще вищими степенями двочлена. Четвертий степень обчислимо так, що $(a+b)^3$ помножимо на $(a+b)$:

$$\begin{array}{l} (a+b)^3 \cdot (a+b) = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) \\ \hline a^4+3a^3b+3a^2b^2+\ ab^3 \\ \quad +\ a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline \end{array}$$

отже:

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4. \tag{13}$$

На цьому взірці легко дослідити будову такого многочлена.

Перш за все пригляньмося до вигляду його головних чисел. За перший його член можемо приймити a^2, який отримаємо із вимноження всіх перших частин добутку $(a+b) \cdot (a+b) \ldots (a+b)$; так само на кінці суми напишемо b^n. Посередні члени будемо отримувати так, що будемо брати по n чинників із поміж чисел a і b, отже сума їхніх викладників мусить бути n. Значить, многочлен буде *рівнородний*. Його можна впорядкувати спадом по степенях числа a і ростом по степенях числа b.

Що до співчинників, то члени a^n і b^n повторюються тільки один раз, бо другий раз такої комбинації однакових чинників не матимемо; зате инші комбинації степенів повторяться більше разів. Обчислення їхньої кількости облегчимо собі, коли перейдемо від квадрату до кубу, від кубу до четвертого степеня і т. д.

У квадраті середущий член ab повторюється двічі: як ab і як ba.

Коли $a^2+2ab+b^2$ помножимо на $a+b$, то викладник при a всюди зросте на 1, отже $2ab$ перемінится в $2a^2b$; одначе такий самий одночлен отримаємо, коли a^2 помножимо на b. Таким чином у «розвиненні» кубу член a^2b матиме співчинник $3=2+1$, отже цей співчинник буде сумою співчинників при ab і a^2 у квадратовому розвиненні. Те саме буде з співчинником числа ab^2, бо це число отримаємо з a^2b в найпростіший спосіб так, що переставимо чинники a і b (отже замість $a+b$ будемо брати $b+a$). — Так само побачимо, коли викона-

ємо множення $(a+b)^3$. $(a+b)$, що співчинники при кожному новому степені двочлена повстануть через додання що двох сусідніх співчинників попереднього степеня.

Подібно отримаємо для п'ятого степеня такі співчинники:

$$1,\ 4+1,\ 6+4\ \ 4+6,\ 1+4,\ 1,$$

або:

$$1,\ 5,\ 10,\ 5,\ 1,$$

т. зн.:

$$(a+b)^4=a^4+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^4.$$

З огляду на те, що будова головних чисел цілком ясна, нас тут будуть обходити тільки співчинники, і коли ми напишемо нпр.:

$$(a+b)^3=(1,\ 3,\ 3,\ 1),$$

то це повинно бути для нас уповні зрозуміле.

Будову співчинників подає т. зв. *трикутник Паскáла**); його кожний дальший рядок отримуємо так, що на обох краях пишемо 1, а потім додаємо що два сусідні члени:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & | & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & | & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & | & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
\multicolumn{15}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

Він складається з двох симетричних половин, так що вистарчить завсіди обчислити кожний рядок тільки до середини, а всі дальші співчинники будуть повторюватися вже симетрично.

Кожний рядок має на один член більше, як кількість одиниць степеневого викладника, бо в n-ому степені двочлена містяться всі члени ряду a^n, a^{n-1}, ..., a^1, $a^0=1$ отже їх є $n+1$.

Таким чином розвинення непаристого степеня двочлена має паристу кількість членів, отже відповідний рядок трикутника Паскала розпадається на дві однакових половині, а середущий (найбільший) співчинник повторюється. Зате в розвиненні паристого

---

*) *Блєзе́ Паска́ль* (Blaise Pascal, 1623—1662), французький письменник, богослов, філософ і математик. У своїому головному творі «Pensées sur la religion» («Думки про релігію», 1670), подає спробу філософії християнства на основі наукового скептицизму.

степеня буде непаристе число доданків, тому в ньому є тільки один «осередній член» без повторення. Лінія, проведена через ці осередні члени, буде «віссю симетрії» трикутника.

Тут завважимо раз, що кожне двочленне розвинення $(a+b)^n$ зачинається від $a^n+na^{n-1}\,b$, отже два перші співчинники є: 1 і n, як це зараз і видко з трикутника Паскала.

в) Співчинники розвинення двочлена $(a+b)^n$ можна обчислювати теж безпосередньо, не звертаючися завсіди до початкових рядків трикутника Паскала.

Коли це розвинення для якогось n має таку будову:

$$(a+b)^n = a^n + xa^{n-1}b + ya^{n-2}b^2 + za^{n-3}b^3 + \ldots + b^n\,,$$

то для наступного викладника воно матиме *таку саму будову*:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \,.\, (a+b) = \\ &= a^{n+1} + xa^n\,b \quad + \quad ya^{n-1}b^2 + \quad za^{n-2}b^3 + \ldots \quad + ab^n \\ &\quad + a^n\,b \quad + \quad xa^{n-1}b^2 + \quad ya^{n-2}b^3 + \ldots \quad\quad + b^{n+1} \\ \hline &= a^{n+1} + (x+1)a^n\,b + (y+x)a^{n-1}b^2 + (z+y)a^{n-2}b^3 + \ldots \quad + b^{n+1};\end{aligned}$$

а що такою є будова розвинення для $n=2$, $[(a+b)^2=a^2+2ab+b^2]$, то вона буде такою для наступного викладника $n=3$, і ще для наступного, і т. д., словом — для *всякого цілого додатнього викладника.*

Одночасно бачимо, що співчинники розвинення $(a+b)^{n+1}$ *є сумами що двох сусідніх співчинників попереднього розвинення* $(a+b)^n$.

Твердимо, що співчинник члена $a^{n+r}b^r$ у розвиненні $(a+b)^n$ має таку будову:

$$\binom{n}{r} = \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\quad r}$$

(чиг. n понад r; тут у чисельнику є r чинників, від n униз, а в знаменику теж r чинників, від 1 угору).

Припустім, що наш здогад правдивий для якогось n; тоді для наступного викладника, $n+1$, — на основі попереднього твердження — буде цей співчинник сумою двох сусідніх для нижчого викладника:

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}.$$

Так воно є й справді, бо можна написати:

$$\binom{n+1}{r+1} = \frac{(n+1).n.(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\quad (r+1)} = \frac{n+1}{r+1}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots\quad r} = \frac{n+1}{r+1}\cdot\binom{n}{r}$$

і:

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1} = \binom{n}{r} + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1).(n-r)}{1.\ 2.\ldots\quad r.(r+1)} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r}\frac{n-r}{r+1} =$$

$$= \binom{n}{r}\left(1+\frac{n-r}{r+1}\right) = \binom{n}{r}\cdot\frac{r+1+n-r}{r+1} = \binom{n}{r}\cdot\frac{n+1}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

г) Коли даним двочленом є не сума, тільки різниця, тоді в розвиненні будуть іти на переміну додатні та від'ємні доданки. Останній член буде додатній, коли викладник паристий, а від'ємний, коли викладник непаристий. Ось так буде:

$$(a-b)^{2n}=a^{2n}-2n\,.\,a^{2n-1}b+\ \ldots\ -2n\,.\,ab^{2n-1}+b^2,$$

$$(a-b)^{2n+1}=a^{2n+1}-(2n+1)\,.\,a^{2n}b+\ \ldots\ +(2n+1)ab^{2n}-b^{2n+1}$$

Для прикладу обчислім розвинення степеня двочлена в такому випадкові, коли обидва складники двочлена мають складнішу будову. Нехай буде:

$$(2x^2y-3x^3yz)^7.$$

Співчинники сьомого степеня двочлена будуть:

$$1,\ 7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 21,\ 7,\ 1,$$

а матимуть вони знаки на переміну додатні й від'ємні. Головні числа будуть творити два: ряди спадаючий ряд степенів першого числа $a=2x^2y$, починаючи з a^7 й кінчаючи $a^0=1$, і ростучий ряд степенів другого, від $b^0=1$ аж до b^7, де $b=3xy^3z$, отже :

$$128x^{14}y^7,\ 64x^{12}y^6,\ 32x^{10}y^5,\ 16x^8y^4,\ 8x^6y^3,\ 4x^4y^2,\ 2x^2y,\ 1,$$
$$1,\ 3xy^3z,\ 9x^2y^6z^2,\ 27x^3y^9z^3,\ 81x^4y^{12}z^4,\ 243x^5y^{15}z^5,\ 729x^6y^{18}z^6,\ 2187x^7y^{21}z^7,$$

а відповідні члени розвинення отримаємо, коли будемо множити числа так, як вони стоять одне під одним, отже:

$$128x^{14}y^7,\ 192x^{13}y^9z,\ 288x^{12}y^{11}z^2,\ 432x^{11}y^{13}z^3,\ 648x^{10}y^{15}z^4,\ 972x^9y^{17}z^5,\ 1458x^8y^{19}z^6,$$
$$2187x^7y^{21}z^7,$$

так, що загалом буде:

$$(2x^2y-3xy^3z)^7=128x^{14}y^7-7.192x^{13}y^9z+21.288x^{12}y^{11}z^2-35.432x^{11}y^{13}z^3+$$
$$+35.648x^{10}y^{15}z^4-21.972x^9y^{17}z^5+7.1458x^8y^{19}z^6-2187x^7y^{21}z^7=$$
$$=128x^{14}y^7-1344x^{13}y^9x+6848x^{12}y^{11}z^2-15120x^{11}y^{13}z^3+22680x^{10}y^{15}z^4-$$
$$-20412x^9y^{17}z^5+10206x^8y^{19}z^6-2187x^7y^{21}z^7.$$

д) *Підношення подрібних чисел і многочленів до кубу.* Правила для підношення подрібних чисел до кубу такі складні й вимагають таких великих побічних обчислень, що багато вигідніше буде, перше піднести кожне число до квадрату, а потім той квадрат множити ще раз на те число.

Лише для двоцифрових чисел оплатиться застосувати взірець (12) у такому виді:

$$(10a+b)^3=1000a^3+300a^2b+30ab^2+b^3. \qquad (12a)$$

У практиці це дасть нпр.:

$$79^3=1000\,.\,7+300\,.\,7^2\,.\,9+30\,.\,7\,.\,9^2+9^3,$$

т. зн. кожний дальший складник буде висунений на одне місце вправо:

$$\begin{array}{r} 79^3 \\ \hline 7^3=343. \\ 3\,.\,7^2\,.\,9=1323. \\ 3\,.\,7\,.\,9^2=\ 1701. \\ 9^3=\ \ 729 \\ \hline 493039 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 49.27 \\ \hline 98 \\ 343 \\ \hline 1323 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81.21 \\ \hline 162 \\ \hline 1701 \end{array}$$

Малою полекшою буде з'єднинення двох середущих членів розвинення (12a):

$$(10a+b)^3=1000a^3+30ab(10a+b)+b^3,$$

отже тут маємо: куб першої цифри на місці тисячок, далі потрійний добуток із обох цифр даного числа на місці десятків (він супроти першого доданка пересунений на два місця вправо) і врешті куб другої цифри на місці одиниць (отже відносно другого доданка пересунений на одне місце вправо). Це дало би:

$$\begin{array}{r} 79^3 \\ \hline 7^3=343.\,. \\ 3\,.\,7\,.\,9\,.\,79=14931. \\ 9^3=\ \ 729 \\ \hline 493039 \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{(дві крапці)} \\ \text{(одна крапка)} \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 79.63 \\ \hline 237 \\ 474 \\ \hline 4977.3 \\ \hline 14931 \end{array}$$

Куб тричлена $a+b+c$ буде виглядати так:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &=(a+b)^3+3(a+b)^2.\,c+3(a+b).c^2+b^3 \\ &=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+b^3,\end{aligned}$$

або символично:

$$(a+b+c)^3=\Sigma a^3+3\,\Sigma a^2b+6abc. \tag{13}$$

Тут виступають дві сумі: сума членів «таких, як a^3», отже сума кубів усіх чисел, і сума членів «таких, як a^2b», тоб-то квадратів одного числа, множених на друге (бо справді у взірці (13) виступають усі можливі комбинації того роду), а врешті шостикрать добутку всіх трох чисел.

100. **Степеневі криві.** а) Коли в степені a^n затримаємо постійний викладник, а змінюватимемо тільки основу, отримаємо *степеневу функцію*:

$$y=x^n, \tag{14}$$

яка подає ріст степенів одного й того самого викладника. Дослід того роду функцій і їхніх образів, т. зв. *степеневих кривих*, дуже важний для цілої математики, тому займемося ними трохи докладніше.

Зачнемо з квадратової функції

$$y=x^2, \tag{15}$$

якою вже займалися в уст. 39 і 66; її образом є, як відомо, *парабола* (рис. 56). Знаємо вже, що парабола міститься вся в горішній половині площі, отже над віссю X, а доторкається її тільки в осередку перехрестя; цю точку звемо *вершком параболи*. Вісь Y *є віссю симетрії параболи*.

Того роду симетрію звемо *двобічною*.

На рисунку бачимо, що парабола росте чим раз стрімкіше; коли посуватися здовж осі X від довільної точки a до сусідньої $a+1$, то на цьому відступі парабола підніметься на $(a+1)^2-a^2=2a+1$, отже цей ріст буде тим більший, чим більша вартість аргументу a.

Парабола має широке застосування у физиці; вона показує шлях тіла, киненого свобідно в поземному напрямкові, отже рівнобіжно до поверхні землі*), або також шлях, який перебігає вистрілена гарматня куля**) (див. § 21).

б) Зовсім инакше виглядає образ кубичної функції (рис. 94):

$$y=x^3. \tag{16}$$

Від'ємним вартостям аргументу X будуть відповідати від'ємні вартости функції y, бо $(-a)^3=-a^3$. Все ж таки вистарчить нам нарисувати тільки половину кривої для додатніх вартостей аргументу, а другу отримаємо через перерисування першої у відповідному положенні.

x	y
0	0
1	1
2	8
3	27
...	...
-1	-1
-2	-8
...	...
$1/2$	$1/8$
$1/3$	$1/27$
...	...

Як бачимо, крива міститься в першій і третій чвертці площі. Щоби з додатньої її частини отримати від'ємну, можемо уявити собі, що її обертаємо довкруги точки O на 180^0 вправо або вліво так, щоби I чвертка

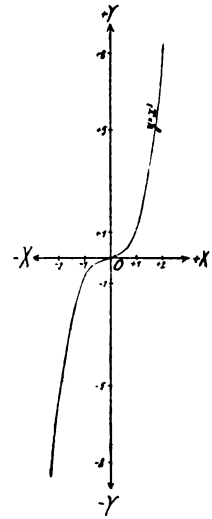


Рис. 94.

*) Треба тільки вважати її оберненою раменами вниз, тоб-то прийняти, що додатній напрямок осі Y веде згори вниз.

**) Тоді ми поверхню землі будемо вважати одною з її січних, рівнобіжних до осі X, при параболі, оберненій раменами вниз).

впала на III. Через те кажемо, що крива має *осередкову* (або центральну) *симетрію*, а її осередком є O.

Инакше було з двобічною симетрією параболи $y=x^2$. Там доходили ми до її від'ємної половини так, що перекидали додатню половину через вісь Y з правого на лівий бік (отже немов перекидаємо листок книжки).

Криву $y=x^3$ звуть *кубичною параболою* або *параболою третього ступіня*. Вона росте стрімкіше від «квадратової параболи», бо завсіди є $x^3 > x^2$ для кожного x більшого від 1, а ріжниця x^3-x^2 тим більша, чим більша вартість x (уст. 96).

в) Образом функції четвертого степеня є *парабола четвертого ступіня*, звана теж «двоквадратовою» (рис. 95):

$$y=x^4. \tag{17}$$

Вона двобічно-симетрична, бо для кожного x буде y додатнє, отже коли вартість $x=+a$ заступимо від'ємною $-a$, то вартість функції y не зміниться ні що до числової вартости, ні що до знаку.

x	y
0	0
1	1
2	16
...	...
-1	1
-2	16
...	...
$1/2$	$1/16$
$1/3$	$1/81$

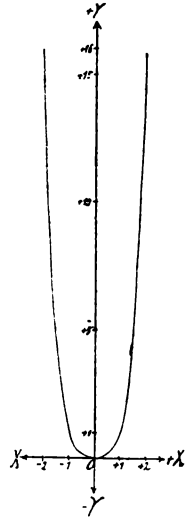


Рис. 95.

Дальша з черги, парабола пятого ступіня, $y=x^4$, буде знов осередково-симетрична і т. д. загалом:

Парабола паристого ступіня є двобічно-симетрична, отже міститься в горішній половині площі (*в I і II чвертці*), *парабола непаристого ступіня — осередково-симетрична й міститься в I і III чвертці*.

На загал беручи, всі образи кривих $y=x^n$ творять громаду «степеневих парабол». Всі вони мають дві «основні точки»: вершок O і точку з співрядними $x=1$, $y=1$, у яких вони перетинаються. Крім того параболи паристого ступіня мають іще одну основну точку з співрядними $x=-1$, $y=+1$, а непаристого ступня — точку $x=-1$, $y=-1$.

«Параболою першого ступіня» (або лінійною) можемо вважати просту лінію $y=x$; це перша медіяна.

Чим більше n, тим стрімкіше росте парабола, бо для $x<1$ буде, як знаємо, $x^{n+1}<x^n$. Зате для $x<1$ є $x^{n+1}<x^n$, отже в обсягу між обома основними точками кожна дальша парабола із зменшуванням аргументу все більше й більше наближається до осі X.

г) Продовжуймо у функції (14) ряд викладників n також на від'ємні вартости: $n=-1,\ -2,\ -3,\ \ldots$, тоді матимемо функції:

$$y=\frac{1}{x},\ y=\frac{1}{x^2},\ y=\frac{1}{x^3},\ldots$$

загально:

$$y=\frac{1}{x^m}. \qquad (18)$$

Першу з тих кривих знаємо: *це рівнобічна гіпербола* (рис. 63), образ «відворотної пропорційности». Вона складається з двох незвязаних віток, у I і III чвертці.

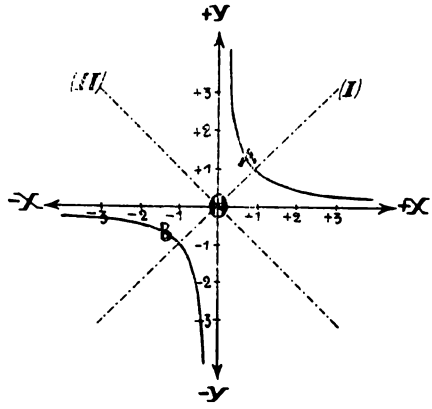


Рис. 63.

Крива:

$$y=\frac{1}{x^2} \qquad (19)$$

(рис. 96) має теж дві вітці, але вони містяться в I і II чвертці, як це бачимо з такої таблички:

x	y
1	1
2	$^1/_4$
3	$^1/_9$
...	...
-1	1
-2	$^1/_4$
...	...
$^1/_2$	4
$^1/_3$	9
...	...

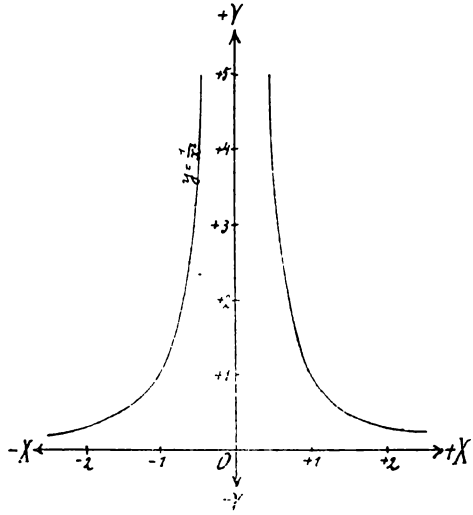


Рис. 96.

Ося крива на вигляд подібна теж до попередньої, має з нею спільну точку $x=1, y=1$ і наближається асимптотично до обох осей. Її опадання тим сильніше, чим більше x, отже поза $x<1$ вона йде попід попередню криву, але між $x=0$ і $x=1$ вона стрімкіша від неї, отже йде далі від осі Y.

Дальша гіпербола, $y=\frac{1}{x^3}$, знову подібна і виглядом і розложенням віток до рівнобічної гіперболи $y=\frac{1}{x}$, отже йде нижче від неї, а для малих x вона більше відбігає від осі Y.

Загалом, криві, що дані спільним рівнянням (18) — вони мають спільну назву «гіпербол m-ого степеня» — для $m=1, 2, 3, \ldots$, творять громаду кривих, які переходять на переміну через I—III та I—II чвертку. Всі вони мають основну точку $(+1, +1)$, а крім того одні з них, а саме: паристого ступіня точку $(-1, +1)$, а другі, непаристого ступіня, точку $(-1, -1)$, і всі наближаються асимптотично до обох осей. Кожна дальша гіпербола щораз більше віддалюється від осі Y перед основною точкою, а поза нею щораз більше опадає до осі X. До точки O вони не наближаються.

Всі ці криві, (14) і (18), звуться разом *степеневими кривими*; вони дають наглядний образ росту степеневої функції для ріжних вартостей викладника.

ВПРАВИ.

1. Представити рахунком і рисунком степеневі ряди таких основ: $a=1^1/_2$; $1^1/_4$; $1^1/_5$; 1,01; 1,001.

2. Обчислити: $2^4 \cdot 2^5$; $a^5 \cdot a^7 \cdot a^{11}$; $m^x \cdot m^{2x} \cdot m^{3x}$; $a^{2x-1} \cdot a^{x-3} \cdot a^{3x+2}$; $p^{2x-3y+1} \cdot p^{3x+2y-1} \cdot p^{-x+y+1}$; $720x^2y^3 \cdot 8x^4z^7 \cdot 15x^{n-5}y^{n-5}z^{n-5}$;

$ax^2y^3 \cdot bx^3y^4 \cdot cx^4y$; $\frac{x^2y^3}{10} \cdot \frac{x^3y^2}{10^2}$; $\frac{a^3b^4}{c} \cdot \frac{a^4b^5}{c^3}$; $\frac{a^{n-1}}{b^{n+1}} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{n-1}} \cdot \frac{a^{m-n}}{b^{n-m}}$.

3. Знаючи, що $3^{18}=387\,420\,489$, обчислити 3^{22}.

4. Знаючи, що $13^5=371\,293$ і $13^4=28\,561$, обчислити 13^9.

5. Обчислити: $(a^2)^3$; $(x^2y^3)^4$; $(x^{n+1})^{n-1}$; $\frac{(a^4)^2(b^2)^3}{(a^2)^4(b^3)^2}$;

$\left[\left(\frac{2^3}{4^5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3^2}{5^3}\right)^2\right] \cdot \left[\frac{1}{60} \cdot \left(\frac{2}{4^3.5}\right)^3\right]$; $\left(\frac{30a^2b^2}{7xy}\right)^4 \cdot \frac{(14xy)^2}{(6ab)^4} \cdot \frac{(7xy)^2}{(5ab)^4}$;

$\left(\frac{(10a^8b^7}{21x^7y^8}\right)^2 \cdot \left(\frac{15x^3y^2}{14a^2b^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{7xy^2}{5a^2b}\right)^5$.

6. Чи $(x^a)^p$ значить те саме, що $x^{(a^p)}$? Провірити на кількох числових прикладах.

7. На кількох числових прикладах доказати, що основа й викладник степення не є перемінні, отже a^b не значить те саме, що b^a (див. уст. 5а).

8. Знаючи, що $17^5=1\,419\,857$, обчислити 34^5.

9. Знаючи, що $38^7=114\,415\,582\,592$, обчислити 19^7.

10. Обчислити: $x^n:x$; $x^{n+1}:x^{n-1}$; $x^n:x^{n-m}$; $a^n b:ab^m$;

$a^m b^{n-1}:a^n b^{m-1}$; $a^{x+y}:a^{x+y}$; $\dfrac{a^{2x-3y}\cdot a^{3y-5}}{a^{5-3x}:a^{7-2x}}:\dfrac{a^{5x+3y-10}}{a^{x+y+10}}$;

$$\left[\frac{a^{m-n}b^{n-p}c^{p-m}}{x^{n-p}y^{p-m}z^{m-n}}\cdot\frac{a^{n-p}b^{p-m}c^{m-n}}{x^{p-1}y^{m-2}z^{n-3}}\cdot\frac{x^n y^p z^m}{a^m b^n c^p}\right]:\frac{xy^2z^3}{a^p b^m c^n}.$$

11. Обчислити: $x^{n+2}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^{n+2}$; $\left(-\dfrac{m}{n}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{n}{m}\right)^3$;

$\left(\dfrac{a^2-b^2}{x+y}\right)^m\cdot\left(\dfrac{x^2-y^2}{a-b}\right)^m$; $\left(\dfrac{x^3+1}{a^2+a+1}\right)^4\cdot\left(\dfrac{a^3-1}{x+1}\right)^4$;

$\left(\dfrac{x^2-3x-10}{x-2}\right)^n\cdot\left(\dfrac{x^2-4}{x-5}\right)^n$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\dfrac{b}{c}\right)^n\cdot\left(\dfrac{c}{d}\right)^n\cdot\left(\dfrac{d}{a}\right)^n$.

12. Обчислити: $(-2)^6$; $(-3)^5$; $(-4)^{11}$; $(-a)^4$; $(-m)^7$; $[(-a)^2]^3$; $[(-a)^3]^2$; $[(-a)^{2n+1}]^{2n-1}$; $[(-a)^{2n-1}]^{2n+1}$; $[(-x^2)^3]^4$; $-[-(-x^3)^4]^2$; $[(-x^4)^2]^3$.

13. Порівняти: а) $+(+2)^3$, $-(+2)^3$, $+(-2)^3$, $-(-2)^3$, -2^3; б) $+(+2)^4$, $-(+2)^4$, $+(-2)^4$, $-(-2)^4$, -2^4.

14. Обчислити: $(-a)^n\pm(-a)^n$. Які випадки треба тут розріжнити, відносно викладника n?

15. Подати числову вартість таких степенів: 2^3; 3^4; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$;

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$; $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$; $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-2}$; $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3}$;

$\dfrac{a^5}{a^{-3}}$; $\dfrac{b^4}{b^{-5}}$; $\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^{-2}$; $\left(-\dfrac{b}{a^2}\right)^{-1}$; $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{a-b}{c+d}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{a+b}{c+d}\right)^2$.

---

16. Дослідити ріст і нарисувати образи таких функцій: $y=1{,}1^x$; $y=1{,}2^x$; $y=2^{x+11}$; $y=2^{-x}$.

17. Чим ріжниться функція $y=ka^x$ від простої викладничої функції $y=a^x$ (спеціяльно: $a={}^3/_2$, $k=2$)?

18. Дослідити функцію $y=a^{nx}$, порівнюючи її з функцією $y=a^x$ (подрібно: $a={}^4/_3$, $n=3$).

---

19. Обчислити квадрати таких многочленів: $3a^2-3a+1$; $1+a+a^2+a^3$; $1-a+a^2-a^3$; $\frac{x+2}{x-3}-\frac{x+3}{x-2}+1$; $1-x^2+x^3-x^5$; $2x^4-3x^3y+6x^2y^2-3xy^3+2y^4$; $ax^2-bxy+cy^2$.

20. Піднести до квадрату такі числа: а) докладно: 62, 98, 989; 3,85; 6,41; 1,001; 28,359;
б) приближно: 0,437...; 2,8052...; 6,331...; 82,985...; 46,032...; 5,0505...

21. Оцінити вартість таких квадратів: $38\,576\,211^2$; $450\,979\,408^2$; $0{,}0000003257^2$.

22. Доказати, що:

$$(1^2+2^2+3^2)(2^2+3^2+4^2)(3^2+4^2+5^2)(4^2+5^2+6^2)=$$
$$=82^2+82^2+164^2+1234^2.$$

23. Доказати, що: $(x^2+y^2)(u^2+v^2)=(xu+yv)^2+(xv-yu)^2$.

24. Обчислити куби таких чисел: 32, 47, 52, 64, 81, 96, 275, 312,5, 0,495, 0,0087.

25. Обчислити куби таких многочленів: $1-x^2$, $2-3x^2$; $5x+3y$; $7x^2-2$; $1+x+x^2$; $1-x+x^2$; $1+x-x^2$; $2+3x-4x^2$.

26. Оцінити вартість таких кубів: $28\,975^3$, $69\,576\,432^2$, $0{,}000000087395^3$.

27. Обчислити десятий рядок трикутника Паскала.

28. Обчислити вищі степені таких двочленів: $(x^6+y^6)^8$; $(3m^2-4n^3)^5$; $(29x^3y^2z-4xy^2z^3)^4$; $(4p^2q-3r^2s)^{10}$.

29. Обчислити: $\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^4-\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^4\right]:\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^3\right]$;

$$\frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)^{-2}+\left(a+\frac{1}{a}\right)^{-2}}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^{-2}-\left(a+\frac{1}{a}\right)^{-2}};\qquad \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-3}+\left(x-\frac{1}{x}\right)^{3}}{\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^{-3}}$$

30. Знаючи, що $x+y=a$, $xy=b$, обчислити: x^2+y^2; x^4+y^4; x^6+y^6; x^8+y^8. Нпр. $a=25$, $b=35$.

31. Обчислити суму: $(a+b+c-abc)^2+(ab+bc+ca-1)^2$ і розкласти її на чинники.

32. Доказати, що п'ятий степень десяткового числа кінчається тою самою цифрою, що й дане число.

33. Знайти кінцеві цифри степенів: 3^{100}, 7^{256}, 12^{312}.

34. Дослідити степеневі криві $y=x$ для $n=2, 3, 4, 5$ і $n=-2, -3, -4, -5$ в обсягу між $x=-1$ і $x=+1$ та нарисувати їх, беручи за одиницю довжини 5 *см*.

35. Нарисувати образ громади кривих $y=x^n$ і визначити основні точки тої громади.

36. Дослідити хід і образи таких функцій: $y=\frac{1}{x^2-x}$, $y=\frac{1}{x-x^2}$, $y=\frac{1}{x^2-2x+2}$.

§ 17. Корінювання.

101. Пояснення дії. Прикмети корінів. а) Обернення дії степенювання зветься *корінюванням*. У ньому ми питаємо, яке число x треба піднести до n-ого степеня, щоб отримати дане число k. Таким чином пояснюючe рівняння для корінювання буде:

$$x^n = k, \tag{1}$$

а його розвязку напишемо так:

$$x = \sqrt[n]{k} \tag{2}$$

(чит. x є n-ий корінь із числа k).

Обчислювання коріня зветься теж «добуванням коріня». Для другого коріня пишемо $\sqrt{k}$, без зазначення викладника; перший корінь якогось числа рівний тому ж числу: $\sqrt[1]{k} = k$, бо $k^1 = k$.

Коли обидва боки рівняння (2) піднесемо до степеня n, матимемо:

$$x^n = \left(\sqrt[n]{k}\right)^n,$$

отже на основі рівнання (1) буде:

$$\left(\sqrt[n]{k}\right)^n = k; \tag{3}$$

це значить: *n-ий степень n-ого коріня якогось числа дає те ж саме число.*

З другого боку, коли добуватимемо n-ий корінь із n-ого степеня, отримаємо ту ж саму основу, бо це виходить уже з нашого пояснення, отже:

$$\sqrt[n]{k^n} = k; \tag{4}$$

n-ий корінь із n-ого степеня якогось числа дає те ж саме число.

Звідсіля бачимо, що *степенювання й корінювання якогось числа одним і тим самим викладником не викликує ніякої зміни*, подібно як

множення й ділення одним і тим самим числом. До того ж черга тих двох дій *перемінна*:

$$\left(\sqrt[n]{k}\right)^n = \sqrt[n]{k^n}.$$

б) Перемінність черги, в якій виконуємо дії степенювання й корінювання, відноситься також до двох неоднакових викладників.

Піднесім обидва боки рівняння (2) до степеня m:

$$x^m = \left(\sqrt[n]{k}\right)^m;$$

коли ж це саме зробимо з рівнянням (1), отримаємо:

$$(x^n)^m = k^m.$$

На основі закону про переміну викладників m і n матимемо: $(x^n)^m = (x^m)^n$; підставмо тут $y = x^m$, то це дасть :

$$y^n = k^m,$$

або на основі пояснення корінювання:

$$y = \sqrt[n]{k^m},$$

отже:

$$\left(\sqrt[n]{k}\right)^m = \sqrt[n]{k^m}. \qquad (6$$

Корінь степенюємо так, що степенюємо його основу, або:

Степень корінюємо так, що корінюємо основу й підносимо її потім до того самого степеня.

З того виходить теж, що черга *дій степенювання й корінювання перемінна* навіть тоді, коли обидва викладники ріжні.

в) Обчислім тепер вираження того роду, як $\sqrt[m]{\sqrt[n]{k}}$, отже корінь із коріня. Підставмо:

$$x = \sqrt[n]{k},$$

т. зн.:

$$x^n = k \quad \text{і} \quad y = \sqrt[m]{x},$$

отже $y^m = x$; це останнє рівняння, піднесене обома боками до степеня n, дасть:

$$(y^m)^n = x^n = k,$$

або:

$$y^{mn} = k.$$

Звідсіля:

$$y=\sqrt[mn]{k},$$

а що:

$$y=\sqrt[m]{x}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{k}},$$

то:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{k}}=\sqrt[mn]{k}. \tag{7}$$

Корінь корінюємо так, що основу корінюємо, а за викладник беремо добуток обох даних коріневих викладників.

Коли ж би брати подвійне корінювання у відворотній черзі, отже $\sqrt[n]{\sqrt[m]{k}}$, отримали б ми на основі того самого правила: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{k}}$, отже:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{k}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{k}}, \tag{8}$$

т. зн. *при подвійному корінюванні можна викладники брати в довільному порядкові*, або: *черга двох корінювань переміння.*

З цього виходить, що *коли викладник корінювання — число зложене, то цю дію можна переводити по черзі, беручи за викладники поодинокі чинники даного викладника.*

Нпр.: $$\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}\,;\ \sqrt[12]{p}=\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{p}}}.$$

г) Нехай викладник степеня й викладник коріня мають спільний чинник, нпр.:

$$x=\sqrt[ns]{k^{ms}};$$

тоді ns-ий степень тої величини буде:

$$A=x^{ns}=k^{ms},$$

або ж:

$$A=(x^n)^s=(k^m)^s.$$

Звідсіля обчислимо s-ий корінь величини A:

$$\sqrt[s]{A}=x^n=k^m,$$

отже:

$$x=\sqrt[n]{k^m}.$$

Це значить, що:

$$\sqrt[ns]{k^{ms}}=\sqrt[n]{k^{m}}. \tag{9}$$

Коли викладники степеня й коріня мають спільний чинник, то тим чинником можна обидва викладники скоротити.

Із обернення взірця (9) читаємо, що *обидва ті викладники можна довільним числом помножити.*

Взірці:

$(a^m)^n=(a^n)^m$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$; $\sqrt[m]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^n=a$; $\sqrt[ms]{k^{ns}}$. $\sqrt[m]{k^n}$

нагадують нам ось такі взірці з обсягу множення й ділення:

$mn=nm$; $\frac{1}{n}:m=\frac{1}{m}:n$; $m:m=1$, $\frac{ms}{ns}=\frac{m}{n}$.

д) Обчислім добуток і частку двох однакових корінів ріжних основ, отже:

$$x=\sqrt[n]{p}\,.\sqrt[n]{q}.$$

Піднесім обидва боки того рівняння до степеня n:

$$x=\left(\sqrt[n]{p}\,.\sqrt[n]{q}\right)^n=\left(\sqrt[n]{p}\right)^n.\left(\sqrt[n]{q}\right)^n=p.q,$$

отже: $x=\sqrt[n]{pq}$, так що:

$$\sqrt[n]{p}\,.\sqrt[n]{q}=\sqrt[n]{pq}. \tag{10}$$

Одноіменні коріні) двох ріжних чисел множимо так, що добуваємо корінь із добутку основ.*

Через обернення того взірця отримаємо:

Добуток корінюємо так, що корінюємо кожний чинник із окрема.

Те саме відноситься й до частки двох чисел:

$$\frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}};$$

n-ий степень тої величини буде:

$$x^n=\left(\frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{p}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{q}\right)^n}=\frac{p}{q},$$

*) Т. зн. із однаковими викладниками.

отже:

$$\frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}=\sqrt[n]{\frac{p}{q}}, \tag{11}$$

т. зн.:

Частка двох одноіменних корінів рівна тому ж самому коріневі з частки основ, або обернення того правила:

Частку (дріб) *корінюємо так, що корінюємо ділимок і дільник* (чисельник і знаменик) *із окрема.*

102. **Корінювання многочленів і подрібних чисел.** Найважніше в практиці є добування квадратового коріня, тому тут займемося тим одним подрібним випадком.

а) Добувати квадратовий корінь можемо тільки з того многочлена, який повстав через справжнє піднесення якогось числа в квадрат.

Нпр. ми мали:

$$(x^2-2x+3)^2=x^4-4x^3+10x^2-12x+9,$$

а тепер попробуймо обчислити другий корінь із тієї величини.

Знаємо, що найвищий (перший) член многочлена праворуч повстав через сквадрування найвищого члена основи, отже мусимо взяти за перший складник основи: $\sqrt{x^4}=x^2$. Дальший складник праворуч отримали ми як подвійний добуток першого й другого члена невідомої основи; нехай цей невідомий другий член основи буде y, тоді є: $-4x^3=2x^2\,.\,y$, отже $y=\frac{-4x^3}{2x^2}=-2x$, а таким способом два перші члени коріня будуть: x^2-2x.

Їхній квадрат буде: $(x^2-2x)^2=x^4-4x^3+4x^2$; коли його відняти від даного многочлена, отримаємо решту: $6x^2-12x+9$. Цей останок має бути знову подвійним добутком обчисленої вже частини коріня дальшого, невідомого же члена, збільшений на квадрат того числа. Поділім найвищий член того останка подвоєним найвищим членом коріня, який досі отримали: $\frac{6x^2}{2x^2}=3$; це буде справді третій член, бо $6x^2-12x+9=2(x^2-2x)\,.\,3+3^2$.

Таким чином бажаний корінь є: x^2-2x+3.

Коротко кажучи, при корінюванні йдемо зовсім протилежним шляхом, як при квадруванні.

Схема нашої дії буде така:

$\sqrt{x^4-4x^3+10x^2-12x+9}=x^2-2x+3$

$\pm x^4$

$-4x^3+10x^2 : (2x^2-2x) \,.\, (-2x)$

$\pm 4x^3 \pm 4x^2$

$+6x^2-12x+9 : (2x^2-4x+3) \,.\, (+3)$

$+6x^2 \pm 12x+9$

Перший член корінюємо й до останка $x^4-x^4=0$ дописуємо два дальші члени, тоб-то $-4x^3+10x^2$, і цю суму ділимо на подвійне отримане число. Часткою буде тут $-2x$, і її дописуємо до дільника та множимо його нею. До нового останка дописуємо дальший член і ділимо все на подвоєний цілий дотеперішній корінь; частку, яку отримаємо, дописуємо до дільника й множимо нею і т. д., аж поки вичерпається цілий многочлен під корінем.

б) Так само корінювання подрібних чисел мусить опертися на підношенні в квадрат.

Коли ми нпр. мали $5297^2=28058209$ і хочемо обчислити $\sqrt{28058209}$, то перш за все дивимося, з якої найвищої групи цифр треба зачинати корінювати: з 2 чи з 28. До тої цілі розбиваємо ціле дане число на кляси по дві цифрі, починаючи з одиниць (бо кількість цифр у квадраті якогось числа є вдвоє така, як у даному числі, або на 1 менша), і зачинаємо корінювати цю найвищу клясу. Це дасть:

$\sqrt{28|05|82|89}=5297$

$3\,05 : 102 \,.\, 2$

$2\,04$

$1\,01\,82 : 1049 \,.\, 9$

$94\,41$

$7\,41\,09 : 10587 \,.\, 7$

$7\,41\,09$

Корінь із найвищої групи 28 найбільше підходить до числа 5, бо залишає останок 3. До цього останку дописуємо дальшу клясу, т. зн. 05, і число ділимо 305 на подвійну отриману цифру, отже на 10; та не забудьмо, що наступна цифра коріня тут прийде ще не на місце одиниць, отже ділимо не на 10, тільки на «сто кілька», або ділимо на 10 не число 305, тільки 30 (до тої цілі останню цифру відзначуємо гачком). Це дало би частку 3, одначе коли її допишемо до 10 і помножимо нею 103, отримаємо 309, отже більше, як маємо в останку; тому беремо на частку 2. Останок від $102 \,.\, 2$ буде 101, і він після дописання дальшої двоцифрової кляси буде 10182. Його ділимо подвійним отриманим числом 104 (або попереднім дільником+остання цифра: 102+2); це дає нову цифру 9. Добуток $1049 \,.\, 9$ лишить нам останок 741, який через дописання дальшої кляси переміниться в 74109. Тут ми далі ділимо на 1049+9=1058 і отримуємо на останню цифру коріня 7. Це буде справді остання цифра, бо добутком $10587 \,.\, 7$ вичерпується ввесь останок.

103. Степені з дробовими викладниками. а) Степенювання пояснювали ми зразу тільки для цілих, додатніх викладників, та зараз же поширили його на викладник =0 і викладники від'ємні, і це дало нам змогу одноцільно трактувати степені та їхні відворотности. При допомозі дії корінювання вдасться нам легко перевести тут друге поширення, а саме на випадок, де викладниками являються дроби.

Нехай будуть дані вираження:

$$x=a^{\frac{1}{n}} \qquad \text{і} \quad x=a^{\frac{m}{n}};$$

щоби могти ввести їх у рахунок, умовляємося надати їм такі **пояснення:**

1) *Степень, викладником якого є дробова одиниця, — це корінь, що за викладник має знаменик того дробу:*

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}. \tag{12}$$

2) *Степень, викладник якого — дріб, в комбинацію степеня й коріня; степень матиме за викладник чисельник, корінь — знаменик дробу:*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{13}$$

Отсі пояснення не суперечать у нічому нашим попереднім поясненням, як це бачимо з таких виводів:

1) Щоби степеневі:

$$x = a^{\frac{1}{n}}$$

надати якесь значіння, мусить його викладник бути цілим числом; із $\frac{1}{n}$ отримаємо цілість, коли цей дріб помножимо на n. Коли ж ми викладник множимо, то це значить, що степенюємо степень, отже нам треба обидва боки того рівняння піднести до степеня n:

$$x^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1,$$

а звідсіля: $x = \sqrt[n]{a^1}$, отже рівняння (12) несуперечне.

2) Коли дане:

$$x = a^{\frac{m}{n}},$$

то числимо так:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m,$$

або також:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

отже:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Навпаки, *коли хочемо корінь замінити на степень, мусимо замість* коріневого викладника взяти його відворотність як викладник степеня.

Нехай буде:

$$x = \sqrt[\frac{p}{q}]{a};$$

це піднесене до степеня $\frac{p}{q}$ дасть:

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[\frac{p}{q}]{a}\right)^{\frac{p}{q}} = a,$$

а коли обидви боки того останнього рівняння піднесемо до степеня $\frac{q}{p}$, матимемо:

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{pq}{qp}} = x = a^{\frac{q}{p}}.$$

Таким чином *наше пояснення степенювання можна поширити й на дробові викладники.*

104. **Корінювання відносних чисел.** а) Ми вже бачили, що квадрат кожного числа — додатнього й від'ємного — є додатній; через те й корінь із додатнього числа може мати так добре додатню, як і від'ємну вартість. Це висловлюємо так:

Квадратовий корінь додатнього числа має дві вартости, або: *він двовартісний.*

Це значить, що $\sqrt{+a^2} = +a$, але так само можливе і друге рівняння: $\sqrt{+a^2} = -a$. Значимо це разом так:

$$\sqrt{+a^2} = \pm a$$

і читаємо: «плюс або мінус а» (коротше: «плюс-мінус *а*»).

Ось тут бачимо нове інтересне з'явище: обернена дія веде не до одного, а до двох рівновартних вислідів.

Зате немає такого числа, яке, піднесене до квадрату, дало би від'ємний вислід, через те й говоримо, що від'ємного числа *корінювати не можна.* Символ $\sqrt{-a^2}$ не має (поки що) ніякого значіння.

Отся неможливість виконання дії дасть нам привід до одного з наступних поширень нашого обсягу чисел (див. далі, § 26).

б) Пригадаймо собі правила степенювання відносних чисел:

Паристий степень степень кожного відносного числа є *додатній*;

Непаристий степень відносного числа *зберігає* знак того ж числа.

Їх можемо обернути так:

1) *Коріні з паристим викладником можна добувати тільки тоді, коли основа — додатнє число; коли основа від'ємна, то це символи без значіння.*

2) *Коріні з непаристим викладником можна добувати із усякого відносного числа; вони зберігають знак числа під корінем.*

Додамо, що подібно, як при квадратових коріннях, так і при инших коріннях із паристим викладником, де під корінем стоїть додатне число, отримуємо дві вартости: додатню й від'ємну.

105. **Образ коріневої функції.** а) Образ коріневої функції найлекше отримаємо так, що «обернемо» образ степеневої функції, т. зн. у рівнянні:

$$y=x^n,$$

перемінимо ролі обох змінних, отже напишемо:

$$x=y^n,$$

а звідсіля матимемо:

$$y=\sqrt[n]{x}.$$

Геометрично робимо це так, що дану криву «відбиваємо» здовж першої медіяни (рис. 97)*).

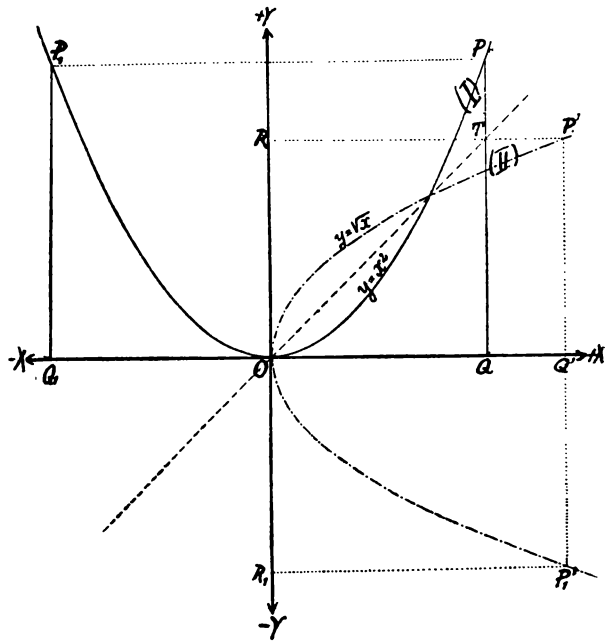


Рис. 97.

*) Отже уявляємо собі, що здовж лінії, нахиленої до осей під кутом 45°, поставлено насторч до паперу дзеркало.

Тоді те все, що відноситься до кривої $y=x^2$, буде відноситися теж до кривої $x=y^2$ або $y=\sqrt{x}$. Нехай на параболі (I) буде дана довільна точка P; її співрядні, $\overline{OQ}$ і $\overline{PQ}$, звязані рівнянням $\overline{PQ}=\overline{OQ}^2$.

Відповідну точку на кривій (II) отримаємо, коли поведемо позему просту $P'R$ через точку T на медіяні; вона матиме співрядні $\overline{OQ}$ і $\overline{PQ}$, і нам легко знайти, що й тут буде :

$$\overline{OQ}=\overline{P'Q'}^2,$$

а це, перенесене на співрядні x і y, дасть наше рівняння тої другої кривої.

Як перша парабола, так і друга має дві половині, симетричні, звязані у вершку 0. На кривій $y=\sqrt{x}$ бачимо, що кожній вартости аргументу x відповідають дві вартости змінної y — однакової величини, але протилежних знаків, нпр. до $x=\overline{OQ'}$ належать два y: додатнє $+y=\overline{P'Q'}$ і від'ємне $-y=\overline{P'Q'}$. У цьому маємо геометричне пояснення, чому квадратовий корінь двовартісний.

Для від'ємних вартостей аргументу x не маємо відповідних вартостей функції y; це значить, що квадратовий корінь із від'ємної величини непояснений. Крива $y=\sqrt{x}$ ціла міститься в I і IV чвертці площі, отже там, де співрядна x має додатні вартости.

б) Із степеневих парабол вищих ступінів отримаємо коріневі параболи таких самих ступінів дорогою такого ж самого відбиття здовж першої медіяни. Через те все те, що діється в I і III чвертці, залишиться в тій самій чвертці, тільки перейде симетрично на другий бік медіяни, а чвертки II і IV поміняють свої ролі. Звідсіля бачимо, що коріневі параболи паристих ступінів є двобічносиметричні й містяться завсіди праворуч осі Y; значить, вони не пояснені для від'ємних вартостей аргументу, отже й відповідні коріні не мають значіння. Зате параболи непаристих ступінів осередково-симетричні, завсіди зістаються у I і III чвертці, отже там, де знаки обох співрядних однакові, і ми бачимо, що корінь непаристого викладника можна добувати з усякого числа: додатнього або від'ємного, а при тому знак числа заберігається.

106. Корінювання названих чисел. При корінюванні названих чисел отримуємо названі числа відомих нам уже назв, або цілком нові похідні величини.

а) До перших завдань належать питання з геометрії того роду, як вишукування довжини, кола дана площина фигури або зміст тіла.

Коли нпр. зміст кулі є V — він даний у кубичних одиницях, — то для проміня r маємо:

$$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\cdot\sqrt[3]{V};$$

тут $\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ є неназваним числом, а назва другого чинника буде довжиною, отже

коли V дане в cm^3, то $\sqrt[3]{V}$ буде дане в $\sqrt[3]{cm^3}=cm$. Це виглядає так, неначе б ми добували третій корінь із названої, кубичної одиниці.

б) При розгляді дальших похідних одиниць введемо нові означення, які вживаються звичайно у физиці. Щоби бути незалежним від *вибору* укладу основних одиниць, *cm*, *g* і *sec*. (це т. зв. «*уклад c. g. s*»), а тільки мати завсіди перегляд над будовою похідних одиниць, впроваджуємо означення:

для довжини — L — (від лат. «*longitudo*»);
для маси — M — (,, ,, «*massa*»);
для часу — T — (,, ,, «*tempus*»),

а вигляд похідної одиниці, тоб-то добуток чи частку степенів величин L, M, T, звемо *розміром* тої одиниці.

Для означення розміру якоїсь величини беремо її в гранчасту скобку: [ ]; напр. розмір праці буде $[\mathfrak{A}]$.

Таким чином маємо для відомих нам уже похідних одиниць:

величина	знак розмір	назва одиниці в укладі «*c.g.s*».
довжина	$[l] = L$	1 *cm*
поверхня	$[f] = L^2$	1 cm^2
зміст	$[V] = L^3$	1 cm^3
маса	$[m] = M$	1 *g*
густота	$[d] = \frac{m}{V} = ML^{-1}$	1 g/cm^3
час	$[t] = T$	1 *sec*
швидкість.....	$[c] = LT^{-1}$	1 cm/sec
прискорення ..	$[a] = LT^{-2}$	1 cm/sec^2
сила	$[P]$*) $= LMT^{-2}$	1 $cmg/sec^2 = 1$ *дина*
праця (енергія)	$[\mathfrak{A}]$**) $= L^2TM^{-2}$	$1\ cm^2g/sec^2 = 1$ *ерг* $10^7 cm^2g/sec^2 = 1$ *джуль*
справність	$[\mathfrak{E}]$***) $= L^2MT^{-2}$	$1 cm^2g/sec^3 = 1$ *ерг/sec* $10^7 cm^2g/sec^3 = 1$ *джуль/sec* $= 1$ *ват*. 736 *ватів* $= 1PS$†) = сила коня.

в) Нагоду до введення нових похідних одиниць дає нам знову *физика*, а саме наука про *електричність*. Виходимо із засновку, що кожний физикальний взірець — тотожність, у якій назви обох боків мусять бути однакові. Через формальне переведення дій множення, ділення й корінювання наназваних чисел доходимо до похідних одиниць із коріневими величинами, або — як звичайно пишуть — із дробовими викладниками. Одиницю всякого нового роду отримуємо, коли у відповідному рівнянні за відомі вже величини підставимо одиниці.

---

*) Від англ. «power». **) Від нім. «Arbeit». ***) Від «Effekt». †) Pferdestärke.

Ось так: для сили електричного (магнетного) притягання або відпихання маємо:

$$P=\pm k\,.\,\frac{e_1\cdot e_2}{r^2}\ \text{(закон } \textit{Кулона}\text{)};$$

тут k означує чинник пропорційности (це неназване число) e_1 і e_2 — дві кількости електричности (або магнетизму, т. зв. «електричні» або «магнетні маси»), r — їхню віддаль.

Тут розміри одиниць по обох боках рівняння мусять бути однакові, отже:

$$[P]=\frac{[e]^2}{[r^2]}=\frac{[e]^2}{L^2}\,.$$

Звідсіля обчислимо невідомий розмір *електричної* маси:

$$[e]^2=[P]\,.\,L^2=LMT^{-2}\,.\,L^2=L^3MT^{-2},$$

а другий корінь із обох боків дасть:

$$[e]=L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}.$$

В укладі «*c.g.s*» будемо мати:

$$1e=1\ cm^{3/2}g^{1/2}sec^{-1}.$$

Отсе й нова похідна одиниця, яка подає розмір *кількости електричного наряду*.

В практиці вживають одиниці в $3\,.\,10^4$ разів більшої; її звуть «*кулонем*» (*Coulomb*, знак *Cb*):

$$1Cb=3.10^4\,e=3.10^4 cm^{3/2}g^{1/2}sec^{-1}.$$

Дальшою електричною величиною є *потенціял*; це праця, яку виконуємо, коли додатню одиницю електричного наряду відсуваємо з того місця, де вона є, на безконечно далеку віддаль. Коли ця праця буде $\mathfrak{A}$, а наряд e, то матимемо:

$$V=\frac{\mathfrak{A}}{e}\,.$$

Розмір потенціялу буде.

$$[V]=\frac{[\mathfrak{A}]}{[e]}=\frac{L^2MT^{-2}}{L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}}=L^{1/2}M^{1/2}T^{-1},$$

отже одиниця потенціялу в укладі «*c.g.s*» буде мати назву: $cm^{3/2}g^{1/2}sec^{-1}$.

Коли за одиницю праці приймемо *джуль*, за одиницю наряду *кулон*, матимемо для одиниці потенціялу, яку назвемо «*вольтом*»:

$$1V=\frac{10^7 cm^2g/sec^2}{3.10^9 cm^{3/2}g^{1/2}sec}=\frac{1}{300}\,cm^{1/2}g^{1/2}sec^{-1}.$$

Далі для *напруги електричної течії* маємо:

$$J=\frac{e}{t}\,;$$

це та кількість електричного наряду, що перетече якимось провідником на протязі одиниці часу. Про течію кажемо, що має напругу 1 «*ампера*», коли на протязі 1^s в перерізі провідника перетікає 1 кулон.

Розмір тої одиниці є:

$$[J]=\frac{[e]}{[t]}=\frac{L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}}{T}=L^{3/2}M^{1/2}T^{-2},$$

а її величина:

$$1A=\frac{1Cb}{1sec}=1\frac{Cb}{sec}=3.10^{9}cm^{3/2}g^{1/2}sec^{-2}.$$

Для *опору*, з яким зустрічається електрична течія в провіднику, маємо взірець:

$$R=\frac{V}{J},$$

отже:

$$[R]=\frac{[V]}{[J]}=\frac{L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}}{L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}}=L^{-1}T,$$

а одиниця зветься «*омом*»:

$$1\,O \text{ або } 1\,\Omega=\frac{1\,V}{1\,A}=\frac{{}^{1}/_{300}\,cm^{1/2}g^{1/2}sec^{-1}}{3.10^{9}\,cm^{3/2}g^{1/2}sec^{-1}}=\frac{1}{9}.10^{-11}cm^{-1}sec.$$

Врешті для електричної *місткости* буде:

$$C=\frac{e}{V},$$

отже:

$$[C]=\frac{[e]}{[V]}=\frac{L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}}{L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}}=L,$$

а для одиниці, «*фарада*»:

$$1\,\Phi=\frac{1Cb}{1V}=\frac{3.10^{9}cm^{3/2}g^{1/2}sec^{-1}}{{}^{1}/_{300}\,cm^{1/2}g^{1/2}sec^{-1}}=9.10^{11}\ cm.$$

Отже розміром місткости є довжина. Одиницю місткости має куля, що її промінь має $9.10\,km$, а що ця одиниця, за велика, тому в практиці беруть одиницю меншу, а саме 1 *мікрофарад* $=\frac{1}{10}$ фарада, т. зн.: 1 мікрофарад $=9$ *km*.

ВПРАВИ.

1. Через розклад на чинники обчислити, або коли це неможливе, то представити в простішому виді такі корені:

а) $\sqrt{144}$, $\sqrt{576}$; $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[6]{3^4}$, $\sqrt[3]{2^6}$, $\sqrt[4]{2^6}$, $\sqrt[6]{5^8}$;

б) $\sqrt[6]{2^3.3^4}$, $\sqrt[3]{512}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt{a^4}$, $\sqrt{a^5}$, $\sqrt[5]{a^{10}}$, $\sqrt[5]{a^{11}}$, $\sqrt[8]{x^6}$;

в) $\sqrt[3]{72}$, $\sqrt[18]{x^{54}}$, $\sqrt[15]{x^{25}y^{10}}$;

г) $\sqrt[m]{a^{m+1}b^{2m}}$, $\sqrt[10]{a^{25}b^{12}c^{10}}$, $\sqrt[9]{(x+2y)^6(2x-y)^{12}}$, $\sqrt{(x-y)^6z^3}$.

2. Обчислити: а) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$, $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{8x^3}$, $\left(a\sqrt{a}\right)^2$, $\left(a\sqrt[3]{a}\right)^3$, $\left(a\sqrt[5]{a}\right)^5$.

б) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[4]{a}$, $a\sqrt{a}\sqrt[3]{a}$;

в) $\sqrt{30}\cdot\sqrt{120}$, $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{108}$, $3\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{3a^3}\cdot\sqrt[3]{2a^2}$;

г) $\sqrt{3x^{-1}}\sqrt[4]{2x}$, $\sqrt[5]{3^{-1}x^{-2}}\cdot\sqrt[3]{3x}$;

д) $\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, $\sqrt{a^3-b^3}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{(a-b)^4}}$.

3. Звести до простішого вигляду: 20. $\sqrt{4\dfrac{21}{25}}$, $\dfrac{7}{12}\cdot\sqrt[3]{5\dfrac{13}{343}}$,

$\sqrt[3]{\dfrac{2}{27}}$, $\sqrt[5]{\dfrac{a^6}{b^7}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{a^7b^8}{3^9c^{10}}}$, $\dfrac{\sqrt[3]{ab^5}}{\sqrt{ab^7}}$, $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a^3}}$.

4. Обчислити:

а) $\sqrt{\dfrac{2a^2}{3b^2}}$, $\sqrt{\dfrac{3a^2}{5x^3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3a^3}{8b^4}}$, $\sqrt{\dfrac{5a^2}{6x^4}}$, $\sqrt{\dfrac{7a^5}{8x^6}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{8a^7}{276^{10}}}$;

б) $\sqrt[3]{\dfrac{2x}{y}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{y}{3x}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4x^2}{y}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{9x}}$, $\dfrac{5}{3}\sqrt{3ab}\cdot 6\sqrt{\dfrac{ac}{b}}\cdot 2b\sqrt{2c}$,

$\sqrt[3]{ab^2}\cdot\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{a^1b}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2}}$;

в) $\sqrt{2a}:\sqrt[3]{3a^2}$, $\sqrt[6]{a^9x^5}:\sqrt[4]{a^2x^3}$, $\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{b}\right):\left(\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[12]{b}\right)$,

$\left(\sqrt[8]{a^5}\cdot\sqrt[3]{a^7}\cdot\sqrt[18]{a^{15}}\right):\left(\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[24]{a}\right)$.

5. Звести до простішого вигляду: $\sqrt[12]{a}$, $\sqrt[15]{p^{12}q^9}$, $\sqrt[24]{r^{20}}$, $\sqrt{2\sqrt{7}}$,

$\sqrt[3]{5\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{16}}$, $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{18}}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}$,

$\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{a^2\sqrt[3]{a^3\sqrt[3]{a}}}}$, $\left(\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}}\right)^2\cdot\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}\sqrt[3]{\dfrac{a-x}{a+x}}}$.

6. Замінити коріневі викладники на дробові степеневі в таких даних: а) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[5]{a^2bc}$, $\sqrt[12]{\frac{a^4b^3}{8c^2}}$; б) $\sqrt[1/2]{3}$, $\sqrt[1/4]{2}$, $\sqrt[2/3]{4}$, $\sqrt[2/3]{x^{3/4}}$: в) $\sqrt[3/2]{2\frac{1}{4}}$, $\sqrt[-3/2]{2\frac{7}{9}}$.

7. Представити у вигляді корінів і обчислити: $49^{1/2}$, $8^{1/3}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2}$, $\left(\frac{8}{27}\right)^{1/3}$, $0{,}16^{1/2}$, $0{,}25^{0{,}5}$, $2{,}56^{1{,}5}$, $5{,}0625^{0{,}75}$, $36^{-1/2}$, $27^{-2/3}$, $\frac{a^{1/6}.b^{1/3}}{x^{2/3}.y^{2/6}}$, $\frac{a^{1/6}.x^{-2/3}}{b^{-2/3}.y^{2/3}}$.

8. Обчислити квадратові коріні таких многочленів:

$x^4+6x^3y+7x^2y^2-6xy^3+y^4$; $\frac{4a^4}{9y^4}-2\frac{a^3}{b^3}+\frac{31a^2}{12b^2}-\frac{3a}{4b}+\frac{1}{16}$;

$x^6-2x^5+5x^4-2x^3+2x^2+4x+1$;

$\frac{16r^6}{25s^5}-\frac{16r^5}{15s^5}+\frac{28r^4}{225s^4}+\frac{4r^3}{5s^3}-\frac{91r^2}{225s^2}-\frac{2r}{15s}+\frac{1}{9}$;

$a^{-10}-10a^{-8}+31a^{-6}-32a^{-4}+19^{-2}-6+a^2$.

9. Обчислити квадратові коріні таких чисел:

323761, 471969, 597529, 113379904, 594823321.

10. Обчислити: $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt[5]{-3200000}$, $\sqrt[3]{216.125}$, $\sqrt[3]{(-27).729}$.

11. Нарисувати образи таких функцій: $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y=x^{1/4}$, $y=x^{1/2}$.

12. Провірити правдивість таких виражень: $\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$, $\sqrt[5]{8\frac{8}{32767}}=8\sqrt[5]{\frac{8}{32767}}$ і т. д.

Чи завсіди можливе таке упрощення?

Упрощення містить у собі таку вимогу: $\sqrt[k]{a+\frac{m}{n}} = a\sqrt[k]{\frac{m}{n}}$; обидва боки рівняння, піднесені до k-ого степеня, дадуть:

$$a + \frac{m}{n} = a^k \cdot \frac{m}{n},$$

а звідсіля:

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{a^k - 1}.$$

Тут можемо приймати m і n цілими числами, а $\frac{m}{n}$ незводильним дробом, отже треба покласти: $m = a$, $n = a^k - 1$. Коли за a і за k будемо добірати всякі можливі вартости, отримаємо випадки, про які тут мова.

§ 19. Невимірні числа.

107. Обмеженість дії корінювання. а) Дія корінювання, як і всі інші обернені дії, обмежена в своїй викональности. Ми знаємо, що корінь можна добувати тільки в цих виїмкових випадках, які повстали через справжнє піднесення якогось числа до степеня.

Всі інші коріневі символи не мають для нас поки-що ніякого значіння. Нпр. символ $\sqrt{2}$ не каже нам нічого, якщо будемо обертатися в обсягу тих чисел, які досі пізнали. Бо перш за все ми не знаємо такого цілого числа x, яке, піднесене в квадрат, дало би 2:

$$x^2=2,$$

а далі нема й дробу такого, що його квадрат був би $=2$.

Доказ: Що x не може бути цілим числом — це ясне. Бо $1^2=1$, отже $x=1$ дало би вартість за малу, а $x=2$ дало би $2^2=4$, отже вартість за велику, — а між 1 і 2 немає посереднього цілого числа.

Так само x не може бути дробом, який мав би цілочисловий знаменик та чисельник. Нехай би було:

$$x=\frac{p}{q},$$

де p і q — цілі неспівмірні числа, отже $\frac{p}{q}$ — незводильний дріб. В такому разі мусіло би бути: $x^2=\frac{p^2}{q^2}$, отже ми мали би рівняння: $\frac{p^2}{q^2}=2$ або:

$$p^2=2q^2.$$

Одначе таких двох цілих чисел, p і q, які сповняли би це рівняння, нема. Бо як би p було паристе, тоді q мусіло б бути непаристе (дріб $\frac{p}{q}$ незводильний, отже p і q не можуть мати спільного чинника 2). В такому разі p^2 було би подільне на 4, а q^2 непаристе, отже $2q^2$ подільне тільки на 2, а не на 4, і ми мали би таку суперечність, що ліворуч стоїть число подільне на 2, а праворуч число, подільне на 4. Як же ж би p було непаристе, то ліворуч мали б ми непаристе p^2, а праворуч паристе $2q^2$. Значить, $\sqrt{2}$ не може бути числом форми $\frac{p}{q}$, отже взагалі між відомими нам числами: цілими й дробовими (включаючи періодові дроби) немає такого, яке піднесене в квадрат дало би 2. Тому ми маємо право сказати, що *символ* $\sqrt{2}$ *не має значіння*.

б) Все ж таки потреби практичного життя ставлять нас перед необхідність уживати таких чисел. Ось так теорема Пітагора вчить нас, що квадрат, вибудуваний на перекутні даного квадрату, має вдвоє таку площину, як даний квадрат (рис. 98). Коли бік даного квадрату має одиницю довжини, то площина квадрату на перекутні буде рівна двом квадратовим одиницям, отже коли бік цього більшого квадрату назвемо x, матимемо:

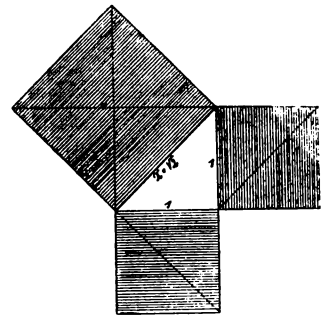


Рис. 98.

$$x^2=2,$$

отже: $x=\sqrt{2}$. Із аритметичної точки погляду—це символ без значіння, але в геометричному розумінні — це довжина, яку можна зміряти, отже яку й треба подати у відомих нам числах.

Отсей приклад показує нам потребу *нового поширення обсягу нашого числового матеріялу*, а саме на ці випадки, які ведуть до добування корінів із чисел, що не повстали через просте підношення до степенів. Цей новий рід чисел, який ми тут введемо, носить назву *невимірних чисел.*

108. **Невимірні числа.** а) Невимірні числа найкраще пояснимо так, будемо між нашими дотеперішніми числами шукати таких, які найближче підходять до бажаного невимірного.

Для пояснення візьмемо приклад $x=\sqrt{2}$. Ми вже знаємо, що вартість символу 2 мусить лежать між 1 і 2, т. зн.:

$$1<x<2.$$

На числовій лінії значить це, що x мусить упасти на якусь із точок між 1 і 2 (рис. 99):

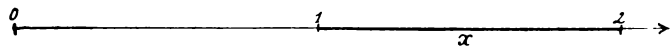


Рис. 99.

Поділім відступ (1, 2) на 10 рівних частин, т. зн. на числовій лінії визначім 9 нових точок: 1,1; 1,2;...; 1,9 і шукаймо, між якими

точками буде лежати вартість x. До тої цілі творимо квадрати тих чисел:

$1{,}1^2=1{,}21,$	$1{,}4^2=1{,}96,$	$1{,}7^2=2{,}89,$
$1{,}2^2=1{,}44,$	$1{,}5^2=2{,}25,$	$1{,}8^2=3{,}24,$
$1{,}3^2=1{,}69,$	$1{,}6^2=2{,}56,$	$1{,}9^2=3{,}61.$

Звідсіля бачимо, що вартість 2 лежить між 1,96 і 2,25, отже x буде лежати між 1,4 і 1,5. Це дасть такий образ (рис. 100):

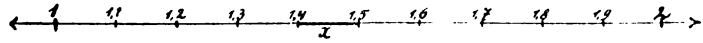


Рис. 100.

отже на x припадає тепер відступ удесятеро менший:

$$1{,}4 < x < 1{,}5.$$

Повторім отсей процес. Відступ (1,4; 1,5) поділимо знову на 10 частин і повизначуємо точки: 1,41; 1,42; ... ; 1,49; квадрати тих чисел будуть: $1{,}41^2=1{,}9881$; $1{,}42^2=2{,}0164$ і на цьому квадрування перериваємо, бо вже перейшли межу 2; з того бачимо, що $\sqrt{2}$ мусить лежати між 1,41 і 1,42 (рис. 101):

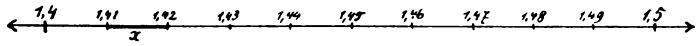


Рис. 101.

Тут числова лінія за кожним разом рисована в иншому, більшому розмірі, щоби можна було докладніше бачити те, що на ній діється.

Дальша спроба дасть на третє десятинне місце цифру 4:

$$1{,}414 < x < 1{,}415$$

і т. д., і ми доходимо до висновку, що $\sqrt{2}$ лежить у межах 1,4142 і 1,4143 і т. д. Таким чином можемо довільно затіснити ці межі, між якими мусить лежати отся вартість, одначе докладної вартости того числа ми ніколи не з'уміємо написати у формі закінченого або періодового десятинного дробу. Через це кажемо:

Вартість невимірного числа, яке повстає через корінювання, можемо замкнути між дві межі. Ці межі можна все більше й більше затісняти, так що ріжниця між ними буде ставати щораз менша.

Таким чином отримаємо такі два «основні ряди» чисел:

$$\begin{cases} 1;\ 1{,}4;\ 1.41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots\ldots; \\ 2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ \ldots\ldots; \end{cases}$$

вартість невимірного числа $\sqrt{2}$ є завсіди більша від кожного числа першого ряду, а менша від кожного числа другого ряду. Перший основний ряд є ростучий, другий — спадаючий; *кожне* число першого ряду менше від *кожного* числа другого ряду; ріжниця відповідних чисел обох рядів (т. є. таких чисел, що стоять одне під одим) постійно меншає. Таким чином, поступаючи в обох рядах, усе більше й більше наближаємо з двох боків до одної й тої самої вартости, яку й звемо *невимірним числом*; це спільна межева вартість двох основних рядів.

Для практичних цілей завсіди вистарчає взяти кілька перших цифр того «розвинення»; так нпр. ми можемо написати:

$$\sqrt{2}=1{,}4142\ldots;$$

тут крапки після останньої цифри означують, що ця вартість тільки наближена.

У цьому то й бачимо ріжницю між теоретичною та практичною математикою. Практик, який міряє і важить, мусить задовольнятися вислідом приближним, бо знає, що повної докладности в своїх міряннях він не досягне; тільки ж не вільно йому забувати, що це висліди приближні. Зате теоретик мусить завсіди мати перед очима, в яких випадках можна отримати вислід цілком докладний, а коли тільки приближний.

Цілі й дробові числа, додатні та від'ємні, будемо називати *вимірними*, у протиставленні до невимірних чисел.

Ці дві назви: «вимірні числа» й «невимірні числа» пояснюються тим, що вимірне число, яке дається завсіди представити звичайним дробом (коли воно ціле, даємо дробові знаменик 1), можна «виміряти», тоб-то знайти спільну міру відрізків відновідної довжини. Зате невимірне число немає спільної міри з одиницею довжини, нпр. перекутня квадрату з боком квадрату, так що неможливо перекутню «виміряти» боком квадрату.

Нарисуймо одиничний квадрат (рис. 102); його перекутня AC довша від

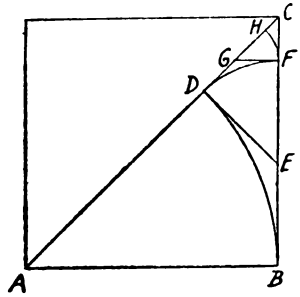


Рис. 102.

боку AB, отже коли довжину $AD=AB=1$ відміряємо на AC, то зістанеться ще відтинок $CD=DE=EB$. Перенесім цей відтинок знову на бік BC: $DE=EF$; тут

мусить зістатися ще якась решта CF, бо ж ΔCDE є знову половиною квадрату (меншого від попереднього), отже тут повторюється той самий процес, що з першим міряннням. Ця решта є $CF=FG=GH=DG$ і вона знову менша від відрізка GC, який залишився був перше на перекутні і т. д. Таким чином, як бачимо, наше міряння ніколи не матиме кінця.

б) Так отже ми пояснили невимірне число як межеву (посередню) вартість двох рахункових процесів, які повторюємо по певному приписові необмежену кількість разів. Вони змагають до того, щоб як найбільше затіснити межі двох чисел; через те ріжниця тих меж стає все менша й менша.

Маючи це пояснення, ми можемо далі встановляти, що в нас мають значити дії невимірними числами. Так нпр. суму двох невимірних чисел пояснимо як нове невимірне число, до якого наближимося сумами приближних вартостей доданків, отже сумами відповідних чисел двох пар основних рядів. Многократь невимірного числа отримаємо так, що відповідним чинником помножимо всі числа обох основних рядів і т. д. На цій основі сюди можна прикласти правило про додавання (редукцію) многократей того самого невимірного числа:

$$a\sqrt{r}+b\sqrt{r}=(a+b)\sqrt{r}.$$

До множення двох ріжних невимірних чисел можемо прикласти те саме правило, що й до множення корінів (отже нпр. $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ і т. д.).

Нпр. $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}=\sqrt{6}$. Бо коли напишемо $\sqrt{2}=x$. $\sqrt{3}=y$, то матимемо: $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}=xy$, а що $2=x^2$, $3=y^2$, отже $6=x^2y^2=(xy)^2$, то справді: $xy=\sqrt{6}$.

Це можна теж провірити звичайними рахунком на приближних вартостях.

Ось так для $\sqrt{2}$ маємо такі два основні ряди:

$$\sqrt{2}=\begin{cases}1; & 1{,}4; & 1{,}41; & 1{,}414; & 1{,}4142; & \ldots;\\ 2; & 1{,}5; & 1{,}42; & 1{,}415; & 1{,}4143; & \ldots;\end{cases}$$

а для $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3}=\begin{cases}1, & 1{,}7; & 1{,}73; & 1{,}732; & 1{,}7320; \ldots;\\ 2; & 1{,}8; & 1{,}74; & 1{,}733; & 1{,}7321; \ldots;\end{cases}$$

отже обидва основні ряди величини $\sqrt{b}$ отримаємо так, що вимножимо відповідні числа перших і других рядів обох чинників:

$$\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}=\begin{cases}1; & 1{,}4\,.\,1{,}7; & 1{,}41\,.\,1{,}73; & 1{,}414\,.\,1{,}732; & 1{,}4142\,.\,1{,}7320; \ldots;\\ 4; & 1{,}5\,.\,1{,}8; & 1{,}42\,.\,1{,}74; & 1{,}415\,.\,1{,}733; & 1{,}4143\,.\,1{,}7321; \ldots;\end{cases}$$

Вони будуть:

$$\begin{cases} 1; & 2{,}38; & 2{,}4393; & 2{,}449048; & 2{,}44939440; \ldots \\ 4; & 2{,}70; & 2{,}4708; & 2{,}452195; & 2{,}44970803; \ldots \end{cases}$$

І справді: перші цифри числа $\sqrt{6}$ є: 2, 4494...

Навпаки під знаком корінювання можна виконувати також розклад числа на чинники й корінювати кожний чинник із окрема; деякі з них можуть дати вимірний вислід, і через те корінювання стане простішим (див. уст. 101д).

Нпр.: $\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$; $\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot 3}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{3}$;
$\sqrt[3]{56}=\sqrt[3]{8\cdot 7}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{7}=2\sqrt[3]{7}$ і т. д.

109. **Приближне корінювання.** а) Метод затіснювання меж, поданий у попередньому уступі, для практичного обчислювання приближних вартостей невимірних чисел доволі невигідний. До тої цілі йдемо тим самим шляхом, як при звичайному корінюванні (уст. 103), з тою тільки ріжницею, що коли вичерпаємо всі дані цифри й матимемо останок, то продовжуємо дріб далі, дописуючи до нього необмежену кількість нулів. Ці нулі ділимо на кляси по два й дописуємо їх так довго, як нам подобається, а потім перериваємо дію та заокруглюємо вислід.

Нпр.:

$\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$
$100 : 24 \cdot 4$
96
$400 : 281 \cdot 1$
281
$11900 : 2824 \cdot 4$
11296
$60400 : 28242 \cdot 2$
56564
3836 і т. д.

б) Одначе це числення можемо закінчити приближним способом так, що від якогось місця перестаємо дописувати нулі, а зачинаємо числити поправки.

Нпр. у нашому прикладі з цього місця, де ми перервали дію, будемо далі числити так:

Нова кляса двох нулів відповідатиме новій цифрі дільника (отже й новій цифрі коріня); коли відкинемо ці два нулі, то й у дільнику мусітимемо відкинути не тільки цю цифру, що мала би прийти нова, але й попередню, отже тут буде:

3836 : 2828 4 . 1
2828
1008
849
159
141
18

Перша частка є 1, а останник 1008.

Далі ділимо числом, яке отримаємо, коли з дільника відкинемо ще одну цифру, отже числом 282, а дві відкинені цифрі, 84, беремо на поправку. Частка буде 3; 3 . 84 = 252, поправка 3, добуток 3 . 282 = 846, а з поправкою = 849. Дальший останок 159 ділимо на 28, а на поправку беремо дві найвищі відкинені цифри, тоб-то 28. Частка 5; 5 . 28 = 140, поправка 1; добуток 5 . 28 = 140, а з поправкою = 141, Останок 18 ділимо на 2, беручи на поправку знову дві найвищі відкинені цифрі. т. зн. 82. Дальша частка 6; на поправку 82; 6 . 82 = 486; поправка 5. Добуток 6 . 2 = 12, з поправкою = 17. Остається 1; цей останок менший від половини останнього дільника ($\frac{2,8}{2} = 1,4$), тому його пропускаємо. Таким чином знайшли ми, що

$$\sqrt{2} = 1,41421356.$$

Спроба приближного квадрування*) дасть нам:

$$1,414221356 = 1,999999998,$$

отже недокладність $= 2 \cdot \frac{1}{10^8}$.

в) До невимірних чисел ведуть не тільки квадратові коріні; всяке число, яке не повстало через просте степенювання, при корінюванні стає джерелом нового невимірного числа. Відповідно до викладника коріня розріжнюємо невимірности: квадратові, кубичні, двоквадратові (т. зн. четвертого ступня) і т. д.

Кубичною невимірністю є нпр. число 2. Воно було відоме вже старинним грекам; т. зв. «делійська проблема» вимагала подвоєння кубу, т. зн. треба було збудувати куб із змістом удвоє таким, як зміст даного кубу. Нехай гранкою даного кубу буде одиниця довжини; тоді його зміст матиме кубичну одиницю, отже змість нового кубу буде = 2 кубичним одиницям. Назвім гранку нового кубу x, тоді матимемо рівняння:

$$x^3 = 2,$$

отже:

$$\sqrt[3]{x} = 2^{**}).$$

г) І в обсягу загальних чисел (многочленів) можна вводити приближне корінювання.

---

*) Приближним множенням двох однакових чисел.

**) З повстанням отсеї проблеми в'яжеться така легенда: На острові Делос лютувала пошесть. Мешканці острову звернулися до дельфійської вирочні з проханням, дати їм пораду, й отримали відповідь, щоби вони подвоїли кубичний вівтар у святині бога Аполлона. Розвязкою цього завдання займалися математики вже з V ст. до Хр.; у новіших часах показалося, що її можна розвязати тільки приближно, а докладна розвязка неможлива. (Див. теж. уст. 181).

Нпр. $\sqrt{a^2+b}$ виконуємо, як на подрібних числах, отже:

$$\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{8a^3}+\frac{b^3}{16a^4}-\ldots$$

$$\begin{array}{l}
\pm a^2 \\
\hline
+b:\left(2a+\frac{b}{2a}\right)\cdot\left(+\frac{b}{2a}\right) \\
\pm b\pm\frac{b^2}{4a^2} \\
\hline
-\frac{b^2}{4a^2}:\left(2a+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{8a^3}\right)\cdot\left(-\frac{b^2}{8a^3}\right) \\
\pm\frac{b^2}{4a^2}\mp\frac{b^3}{8a^3}\pm\frac{b^4}{64a^6} \\
\hline
+\frac{b^3}{8a^3}-\frac{b^4}{64a}:\left(2a+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{4a^3}+\frac{b^3}{16a^5}\right)\cdot\left(+\frac{b^3}{16a^5}\right)\text{ і т. д.}
\end{array}$$

Перервати дію можемо де завгідно, одначе щоби вислід був приблизний, отже не дуже багато ріжнився від докладного, мусять відкинені члени ставати все менші й менші так, як щораз дальші місця десятинного дробу. До того потрібно, щоби b було мале в порівнянні до a; тоді всі дальші дроби, які мають форму: $\frac{b^n}{2^k a^{n+m}}$, будуть тим менші, чим більший викладник n, і їх можна буде без шкоди відкинути.

Коли b в порівнянні до a дуже мале (нпр. $b=\frac{a}{10^6}$), тоді можна корінювання перервати вже після другого члена, бо дріб $\frac{b^2}{8a^2}$, буде ще міліон разів менший. Отже для *дуже малого* b маємо такий *приблизний* взірець:

$$\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}.$$

Спроба: $a^2+b\approx(a+\frac{b}{2a^2})^2=a^2+b+\frac{b^2}{4a^2}$; ріжниця обох боків, $\frac{b^2}{4a^2}$, дуже незначна.

Нпр. $a=1$, $b=0{,}000002$; тоді $\sqrt{1{,}000002}\approx 1+\frac{0{,}000002}{2}=1{,}000001$.

110. **Рисункове з'ясовування невимірних чисел:** а) Правило Пітагора про прямокутні трикутники дає нам змогу рисувати відтинки, що відповідають невимірним числам, а саме квадратовим коріням із неквадратових чисел.

Коли дані дві числі, a і b, і їх возьмемо за прямки прямокутного трикутника (або за боки прямокутника), то протипрямка (або теж перекутня прямокутника) c, матиме довжину:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Отже коли маємо з'ясувати рисунково якусь квадратово-невимірну величину, нпр. $\sqrt{p}$, то стараємося число p розкласти на суму двох квадратів і застосовуємо правило Пітагора.

Нпр. (1). Нарисувати $\sqrt{2}$; $2=1^2+1^2$, як ми це вже бачили (рис. 98).

(2). Нарисувати $\sqrt{5}$; $5=1^2+2^2$, отже рисуємо трикутник з прямками 1 і 2 (рис. 103).

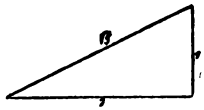


Рис. 103.

Коли число не дасться представити як *сума* двох квадратів, пробуємо розкласти його на *ріжницю* двох квадратів; тоді беремо більше число за протипрямку, менше — за одну з прямок, а друга прямка буде бажаною невимірною довжиною:

$$x=\sqrt{r^2-s^2}.$$

Рисуємо відтинок s (рис. 104) і на одному його кінці сторчову лінію, а потім на його продовженні відтинок r. Де лук r із O перетнеться із згаданою сторчовою, там буде вершок бажаного прямокутного трикутника.

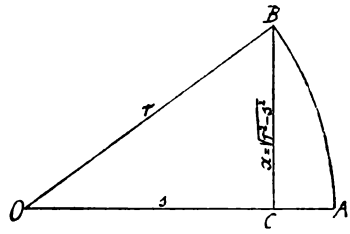


Рис. 104.

Нпр. $\sqrt{3}=\sqrt{4-1}=\sqrt{2^2-1^2}$; це висота рівнобічного трикутника, бік якого має 2 одиниці довжини.

Це дає нам також спосіб рисування других корінів із таких величин, як: a^2+b^2, a^2-b^2, де a і b дані не числами, а просто відтинками.

Але часами й таке з'ясування неможливе; коли p — число паристо-непаристе (отже таке паристе, яке подільне тільки на 2, а не на 4), тоді не можливо його розбити ні на суму, ні на ріжницю двох квадратів, нпр. 6, 14, 18. У такому разі помагає нам подвійна конструкція.

Нпр. для нарисування $\sqrt{6}$ рисуємо перше $\sqrt{2}$, а потім $\sqrt{6}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}$ (рис. 105).

б) Другий спосіб рисування квадратових невимірностей, основується на т. зв. «безперервних пропорціях» та рисуванні «середніх пропорційних».

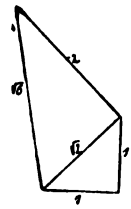


Рис. 105.

Пропорція, що має однакові середущі члени:

$$a : b = b : c, \qquad (2)$$

зветься *безперервною*. З неї виходить: $ac=b^2$, отже:

$$b=\sqrt{ac}; \qquad (3)$$

ця величина зветься *середущою пропорційною між a* і *c* або *геометричною серединою* тих чисел.

Нарисуймо півколо поперечником $a+c$ (рис. 106), а в точці, де

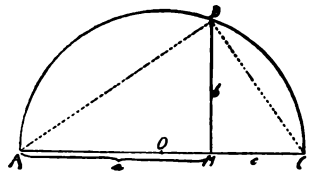


Рис. 106.

сходяться відтинки a і c, виставимо сторчову. Трикутники ABM і BCM будуть подібні, а з них вичитаємо:

$$\frac{AM}{BM}=\frac{BM}{CM},$$

або:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c},$$

отже $BM=b$ буде бажаним відтинком.

Так нпр. буде $\sqrt{6}=\sqrt{2.3}$ довжиною сторчової лінії в півколі з поперечником $2+3=5$.

Коли дана одиниця довжини й відтинок p, можемо нарисувати $\sqrt{p}$; тоді пишемо $\sqrt{p}=\sqrt{p}\,.\,1$ і рисуємо середущу пропорційну між p та 1, отже сторчову в півколі з поперечником $p+1$.

Нехай у рис. 106 один із відрізків AM і CM має довжину p, другий довжину 1; тоді в обох випадках є: $\sqrt{p}=BM$.

З рисунку бачимо, що $AM>BM>CM$, отже коли приймемо $p>1$ (т. зн. $a=p, c=1$), матимемо $\sqrt{p}<p$; *коли ж* $p<1$ (т. зн. $a=1$, $c=p$), тоді буде $\sqrt{p}>p$.

Це згоджується з нашою аритметичною теорією, що квадратовий корінь справжнього дробу більший від того дробу, а квадратовий корінь несправжнього дробу менший від числа, яке корінюємо.

Для збудування відтинка $\sqrt{p}$ нам необхідно знати — крім відтинка p — також одиницю довжини. Це пояснимо тим, що $\sqrt{p}$ має бути довжиною, отже мусить мати розмір L (див. уст. 106), а тим самим мусить бути $[p]=L^2$. Тимчасом p—це поодинока довжина, отже мусимо помножити її ще даною довжиною, щоб отримати квадратову міру (див. теж про геометричне множення, уст. 76).

111. Поповнення викладничої кривої. Рисуючи викладничу криву:

$$y=a^x \tag{4}$$

(уст. 97), ми обмежилися тільки тими точками, яким відповідають цілочислові вартости співрядних. Тепер, коли ми вже пояснення степенів поширили й на дробові викладники й познайомилися з приближним корінюванням, можемо повиповнювати ці прогалини між її точками.

Так нпр. для $a=2$, отже для кривої:

$$y=2^x,$$

матимемо таку табличку:

x	y
0	1
$^1/_4$	$2^{1/4}=\sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}}=1{,}19$
$^1/_2$	$2^{1/2}=\sqrt{2}=1{,}41$
$^3/_4$	$2^{3/4}=(\sqrt[4]{2})^3=1{,}68$
...	...

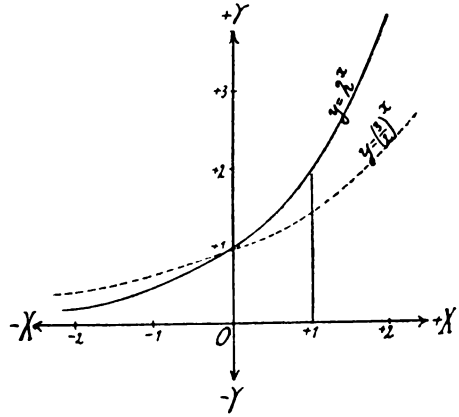


Рис. 91.

і ці дві перші десятинні цифрі вистарчать нам для нарисування повної кривої.

112. **Дії невимірними числами.** а). Для з'ясовування квадратових невимірностей маємо такі два способи:

приблизжний, через обчислювання якоїсь кількости перших цифр безконечного десятинного дробу, і

зовсім докладний, через геометричну конструкцію.

Це дає нам змогу виконувати на тих величинах такі самі дії, як на вимірних числах.

Одноіменні невимірности додаємо й віднімаємо так, як подібні одночлени, ріжноіменні вважаємо альгебричними сумами. Коли нам треба знайти їхню приближну вартість, обчислюємо кожний корінь із окрема приближним способом і додаємо або віднімаємо ці числа.

Нпр. $2\sqrt{5}+6\sqrt{5}-3\sqrt{5}=5\sqrt{5}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}=1{,}4142\ldots+1{,}7320\ldots=3{,}1462\ldots$

Добуток двох одноіменних квадратових невимірностей буде вимірним числом: $a\sqrt{r}\,.\,b\sqrt{r}=(ab\sqrt{r})^2=abr$, добуток двох ріжноіменних невимірностей дає звичайно нове невимірне число:

$$\sqrt{p}.\sqrt{q}=\sqrt{pq}.$$

Суми вимірних і невимірних чисел уважатимемо теж альгебричними сумами, отже будемо їх редукувати як одно- та многочлени.

Нпр. $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(2-\sqrt{2}+\sqrt{3})=2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{2}-2-\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+3=$
$=(2-2+3)+(2-1)\sqrt{2}+(2+1)\sqrt{3}+(1-1)\sqrt{6}=3+\sqrt{2}+3\sqrt{3}.$

Серед усяких можливостей дій на таких сумах найінтересніша та, де суму вимірного й невимірного числа маємо множити на ріжницю тих же чисел, отже $a+b\sqrt{r}$ помножити на $a-b\sqrt{r}$. Це дасть:

$$(a+b\sqrt{r})(a-b\sqrt{r})=a^2+ab\sqrt{r}-ab\sqrt{r}-(b\sqrt{r})^2=a^2-b^2r, \qquad (5)$$

отже цей добуток буде вимірним числом.

Нпр. $(12+5\sqrt{7})(12-5\sqrt{7})=12^2-5^2\,.\,7=144-25\,.\,7=-31;$
$(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3^2})=5-3=2.$

Звідсіля виходить можливість розкладу на чинники чисел, які ми досі мусіли вважати простими; тільки ж чинниками в цьому разі будуть не числа вимірні, лиш алгебричні суми вимірних і невимірних чисел, нпр.: $7=9-2=$
$=(\sqrt{9})^2-(\sqrt{2})=(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$.

б) Ділення сум, що зложені з вимірних і невимірних чисел, веде до найріжноманітніших перемін невимірностей. Коли у знаменику якогось дробу маємо невимірність, то це річ дуже невигідна і ми стараємося позбутися її. Важне це головно для практики, бо як би

нам треба було справді обчислити приближну вартість такої величини, як нпр. $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, то це вимагало би великої роботи і потягло би за собою можливість досить значних недокладностей. Через те завсіди в дробах, де в знаменику є невимірности, цей знаменик робимо вимірним, отже його *увимірнюємо*. Це діється так, що дріб поширюємо на відповідне число.

Коли в знаменику є «чиста невимірність», нпр. $\frac{a}{\sqrt{r}}$, тоді поширюємо дріб тим знаменником і маємо: $\frac{a}{\sqrt{r}}=\frac{a\sqrt{r}}{(\sqrt{r})^2}=\frac{a}{r}\sqrt{r}$; тут знаменик уже вимірний, а невимірність має за співчинник вимірний дріб.

Нпр.: $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$; коли висота рівнобічного трикутника є 2, то бік матиме довжину $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Так само поступаємо, коли в знаменику є чиста невимірність вищого ступіня: поширюємо дріб таким чинником, який потрібний, щоби під корінем опинилося число з тим самим степеневим викладником, як його має корінь:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}.\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{a}{b}\sqrt[n]{b^{n-m}}.$$

Нпр.: $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}=\frac{1}{\sqrt[5]{2^2}}=\frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{\sqrt[5]{2^3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt[5]{8}$.

в) Коли ж у знаменику є «мішана квадратова невимірність», поширюємо її так, щоби там на основі взірця (5) повстало вимірне число — отже суму двох чисел множимо їхньою ріжницею й навпаки:

$$\frac{a}{m+n\sqrt{r}}=\frac{a(m-n\sqrt{r})}{(m+n\sqrt{r})(m-n\sqrt{r})}=\frac{a(m-n\sqrt{r})}{m^2-n^2r}=\frac{am}{m^2-n^2r}-\frac{an}{m^2-n^2r}\sqrt{r}.$$

Нпр.: $\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$.

Звідсіля бачимо, що відворотністю числа $2+\sqrt{3}$ є $2-\sqrt{3}$; як це легко провірити на приближних вартостях тих чисел:

$2+\sqrt{3}=3{,}73205\ldots$, $2-\sqrt{3}=0{,}26794\ldots$; $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=3{,}73205\ldots\ .\ 0{,}26794\ldots=0{,}9998\ldots$

Подібно: $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}+\sqrt{3}.$

Обчислім іще таке вираження:

$$x = \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Щоби привести його до вимірного вигляду, треба буде двічі його поширювати. Напишім знаменик так: $(2+\sqrt{2})+\sqrt{3}$, отже можемо вважати його сумою двох невимірностей: $2+\sqrt{2}$ і $\sqrt{3}$, а тому треба дріб поширити ріжницею тих чисел, т. є. числом $(2+\sqrt{2})-\sqrt{3}$. Це дасть:

$$x = \frac{(2-\sqrt{2}-\sqrt{3})(2+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{2}+\sqrt{3})(2+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

Тут знаменик буде: $[(2+\sqrt{2})+\sqrt{3}][(2+\sqrt{2})-\sqrt{3}] = (2+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2 = 4+4\sqrt{2}+2-3 = 3+4\sqrt{2}$, а й чисельник обчислимо теж найлегше як такий самий добуток:

$(2-\sqrt{2}-\sqrt{3})(2+\sqrt{2}-\sqrt{3}) = [(2-\sqrt{3})-\sqrt{2}][(2-\sqrt{3})+\sqrt{2}] = (2-\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$
$= 4-4\sqrt{3}+3-2 = 5-4\sqrt{3},$

отже:

$$x = \frac{5-4\sqrt{3}}{3+4\sqrt{2}}.$$

Друге поширення на $3-4\sqrt{2}$ дасть:

$$x = \frac{(5-4\sqrt{3})(3-4\sqrt{2})}{(3+4\sqrt{2})(3-4\sqrt{2})} = \frac{15-20\sqrt{2}-12\sqrt{3}+16\sqrt{6}}{3^2-4^2.2}$$

$$= -\frac{15}{23}+\frac{20}{23}\sqrt{2}+\frac{12}{23}\sqrt{3}-\frac{16}{23}\sqrt{6}.$$

г) На цій самій основі полягає увільнювання знаменників від инших невимірностей, нпр. кубичних; тоді треба дріб поширити так, щоби в знаменику отримати куби невимірностей, а це стає можливим на основі взірців: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ або: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$; подібно поступаємо при вищих ступінях.

Нпр. $x = \frac{3-2\sqrt[3]{5}}{2-\sqrt[3]{5}}$; коли приймемо тут $a=2$, $b=\sqrt[3]{5}$, то треба буде дріб поширити на $4+2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25} = a^2+ab+b^2$, щоби в знаменику отримати

$a^3-b^3=8-5=3$. В такому разі чисельник буде: $(3-2\sqrt[3]{5})(4+2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})=$ $=2-2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25}$, отже:

$$x=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{5}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{25}.$$

д) Часто приходиться нам зводити кілька невимірних величин під спільний коріневий знак, нпр. таке: «суму $x=\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$ звести під знак одного коріня». Це робимо так: обчислюємо квадрат тої величини:

$$x^2=(\sqrt{a+\sqrt{b}})^2+2\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}+(\sqrt{a-\sqrt{b}})^2=$$
$$=(a+\sqrt{b})+2\sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}+(a-\sqrt{b})$$
$$=2a+2\sqrt{a^2-b}=2(a+\sqrt{a^2-b}),$$

а ввідсіля через корінювання:

$$x=\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b})}.$$

Отся переміна вигідна особливо тоді, коли величина $\sqrt{a^2-b}$ вимірна.

Нпр. (1) $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

$$x^2=2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}=4+2=6,$$
$$x=\sqrt{6}.$$

(2) Навпаки вираження $x=\sqrt{m+\sqrt{n}}$ можна розвести на суму двох поодиноких корінів таким шляхом:

Напишім:

$$\sqrt{m+\sqrt{n}}=\sqrt{p}+\sqrt{q};$$

як би під корінем ліворуч написати ріжницю, то й праворуч муcіла б бути ріжниця:

$$\sqrt{m-\sqrt{n}}=\sqrt{p}-\sqrt{q}.$$

Додаймо й віднімім ці два рівняння:

$$2\sqrt{p}=\sqrt{m+\sqrt{n}}+\sqrt{m-\sqrt{n}},$$
$$2\sqrt{q}=\sqrt{m+\sqrt{n}}-\sqrt{m-\sqrt{n}}$$

коли тут обіруч піднесемо до квадрату, отримаємо (подібно як передше):

$$4p=m+\sqrt{n}+2\sqrt{m^2-n}+m-\sqrt{n}=2(m+\sqrt{m^2-n}),$$
$$4q=m+\sqrt{n}-2\sqrt{m^2-n}+m-\sqrt{n}=2(m-\sqrt{m^2-n^2})$$

отже для бажаного вираження, в якому є сума корінів, буде:

$$\sqrt{m+\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-n}}{2}}+\sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-n}}{2}}.$$

Нпр. $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ дасть: $m=2$, $n=3$, отже: $m^2-n=4-3=1$, $\sqrt{m^2-n}=1$, а тому:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

(3). **У деяких тригонометричних обчисленнях, а також при розвязці деяких рівнянь, подибуємо вираження:**

$$x=(-1+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

і нам хочеться представити його в простішому виді, тоб-то підвести чинник у скобках під знак коріня. Це робимо теж через квадрування:

$x^2=(-1+\sqrt{5})^2(10+2\sqrt{5})=(1-2\sqrt{5}+5)(10+2\sqrt{5})=(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})=40-8\sqrt{5}=$
$=4(10-2\sqrt{5})$,

отже звідсіля:

$$x=2\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

113. **Невимірні рівняння.** а) Рівняння звемо *невимірним*, коли в ньому невідома міститься під коріневим знаком. Його розвязуємо так, що «увільняємо» його від корінів, отже степенюємо так довго, аж поки всі коріневі знаки повідпадають.

Нпр. $2+\sqrt{x}=3-2\sqrt{x}$; це зредуковане дасть: $\sqrt{x}=\frac{1}{3}$, отже $x=\frac{1}{9}$.

Спроба: $Л=2+\sqrt{\frac{1}{9}}=2\frac{1}{3}$; $П=3-2\sqrt{\frac{1}{9}}=3-\frac{2}{3}=2\frac{1}{3}$.

б) Коли в рівнянні виступають по одному боці коріні з ріжних величин, то недоцільне було би степенювати його обіруч, бо тим ми не позбулись би всіх корінів. Тоді треба одному з невимірностей *від'окремити*, т. зн. залишити її одинцем на одному боці, а все инше перенести на другий бік. Через степенювання відпаде ця від'окремлена невимірність.

Коли після того залишилася ще якась невимірність, то від'окремлюємо її знову й степенюємо друге, і т. д., аж поки відпадуть усі коріні, під яким є невідомі.

Нпр.: $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-3}=6$.

Як би ми тут обіруч піднесли до квадрату, отримали б ліворуч під корінем квадратовий тричлен: $x+9+2\sqrt{(x+9)(x-3)}+x-3=36$, або:

$$2x+6+2\sqrt{x^2+6x-27}=36,$$

Зате, коли від'окремимо одну з невимірностей, нпр. першу, отримаємо по черзі такі переміни:

$$\sqrt{x+9}=6-\sqrt{x-3}$$
$$x+9=36-12\sqrt{x-3}+x-3.$$

Тепер від'окремлюємо другу невимірність, переносячи її ліворуч:

$$12\sqrt{x-3}=24,$$

отже:

$$\sqrt{x-3}=2,$$
$$x-3=4,$$
$$x=7.$$

Спроба: $\sqrt{x+9}=\sqrt{7+9}=4$; $\sqrt{x-3}=\sqrt{7-3}=2$; $4+2=6$.

в) Часами такий шлях не доведе до розвязки рівняння; ми отримуємо для коріня вартість, яка при спробі дає суперечність. Через те після розвязки невимірного рівняння мусимо завсіди робити спробу.

Нпр.:

$$4+\sqrt{x^2-2x-2}=x,$$
$$\sqrt{x^2-2x-2}=x-4,$$
$$x^2-2x-2=x^2-8x+16.$$
$$6x=18,$$
$$x=3.$$

Спроба: $Л=4+\sqrt{9-2\,.\,3-2}=4+\sqrt{1}=5$; $П=3$, отже справді маємо суперечність.

Щоби розкрити її джерело, пригадаймо собі, що кожний квадратовий корінь є двовартісний: додатній або від'ємний. Коли ж ми яке коріневе вираження піднесемо до квадрату, отримаємо додатню величину, отже згадана двовартісність губиться; тому, коли в рівнянні треба було вжити від'ємної вартости, а ми взяли додатню, то, очевидно, вийде недорічність.

Таке діється і в нашому прикладі; корінь ліворуч треба взяти від'ємно, а тоді матимемо при спробі: $Л=4-\sqrt{1}=3$, отже $Л=П$.

Це значить, що ми розвязали не дане рівняння, тільки зовсім инше, а саме: $4-\sqrt{x^2-2x-2}=x$.

114. Невимівні числові тіла. а) Таке пояснення невимірних чисел, яке знаємо з попередніх уступів, подав сучасний німецький математик *Георг Кантор*; та є ще друге пояснення, автором якого являється теж сучасний нам німець *Дедекінд*. Вона основується на таких поглядах:

Проста лінія є *суцільна*; це значить, що на всякій частині простої лінії, яка б вона мала не була, завсіди можемо знайти бодай одну точку — нпр. осередок того малого відтинка. Так само на кожній із половинок того відтинка можемо знайти бодай по одній точці і т. д.; як далеко ми не посувались би в нашому діленні, завсіди зможемо знайти якісь точки. Не значить, що на кожному відтинкові простої лінії міститься безліч точок — і в цьому лежить її суцільність.

Кожна точка на простій ділить усі її точки на дві кляси: $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ так, що кожна точка кляси $\mathfrak{A}$ лежить праворуч від кожної точки кляси $\mathfrak{B}$; саму ж ту точку, що викликує такий поділ, можна причислити до першої або до другої кляси. Отсю дію звемо «*розрізом*» загалу точок простої лінії.

Возьмім тепер під увагу загал усіх вимірних чисел, отже всі цілі й усі дробові числа, додатні та від'ємні, тоб-то «основне числове тіло» (уст. 59). Кожне число того загалу викликує в ньому подібний *розріз*, як точка в загалі точок; тут до одної кляси, $\mathfrak{A}$, зачислимо кожне число, менше від кожного числа другої кляси, $\mathfrak{B}$; саме ж число, що викликує розріз, зможемо причислити до кляси $\mathfrak{A}$ або $\mathfrak{B}$.

На цьому й основується можливість порівнювання загалу точок простої лінії із загалом вимірних чисел, або иншими словами: змога з'ясовувати вимірні числа на числовій лінії так, щоби кожному вимірному числу відповідала одна й тільки одна точка на числовій лінії.

Спитаймо тепер, чи, навпаки, кожній точці числової лінії відповідає число з обсягу основного тіла. Легко переконатися, що ні; бо коли нарисуємо одиничний квадрат (рис. 107), а потім його перекутню перенесемо цирклем на числову

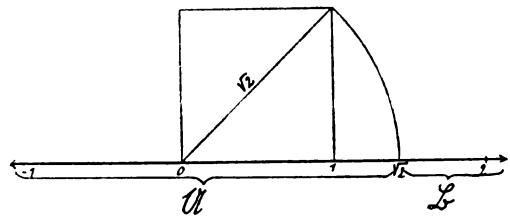


Рис. 107.

лінію, то точка, яка буде відповідати числу $\sqrt{2}$, в обсягу вимірних чисел не знайде свого представника. Звідсіля виходить, що загал вимірних чисел не є суцільний, бо суцільна числова лінія містить у собі багато більше точок, ніж є чисел в основному тілі.

б) На цьому й основується *Дедекіндівське пояснення невимірних чисел*:

Невимірне число викликує в обсягу вимірних чисел розріз, т. зн. ділить його на такі дві кляси, що кожне число одної кляси більше від кожного числа другої кляси; зате того числа, яке викликує цей розріз, не можна зарахувати ні до одної, ні до другої кляси.

Так нпр. невимірне число $\sqrt{2}$ викликує такий розріз, що до кляси $\mathfrak{B}$ будуть належати всі вимірні числа від 1,5 вгору, до кляси $\mathfrak{A}$ всі вимірні числа від 1,4 вниз; далі до кляси $\mathfrak{A}$ належить кожне число, яке отримаємо, коли перервемо обчислювання $\sqrt{2}$, отже 1,4; 1,41; 1,4142; 1,41421 і т. д. а до кляси $\mathfrak{B}$ кожне число,

яке отримаємо, коли в числах попереднього ряду підвищимо останню цифру на 1, отже: 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; і т. д.

В суті річі виходить тут на те саме, що й при Канторівському поясненні: маємо два ряди чисел, ріжниця яких стає щораз менша, отже їхні межі все більше й більше затіснюються.

в) *Числовим тілом* назвали ми в уст. 59 такий загал чисел, у якому можна було виконувати всі прямі дії, а з обернених віднімання й ділення (за виїмком ділення нулем) і отримували завсіди тільки числа того загалу. Таким числовим тілом являється загал усіх вимірних чисел; це т. зв. «основне числове тіло».

Та воно не обіймає ще всіх можливих чисел, отже таких чисел, які відповідали б усім точкам числової лінії; і хоч воно *щільне*, то таки не суцільне. Зате, коли ми до вимірного тіла чисел доберемо всі *можливі* невимірні числа, то отримаємо *суцільне* числове тіло. Його будемо звати *тілом дійсних чисел* або *дійсним числовим* тілом; назва буде пояснена в § 24.

У вимірному числовому тілі не могли ми виконувати дії корінювання без застережень; кожне корінювання, яке дає якусь невимірність, напр. $\sqrt{2}$, дає привід до сотворення нового числового тіла. Це буде т. зв. *невимірне* (числове) *тіло*, а означимо його $k(\sqrt{2})$.

Членами того тіла є всі числа форми $a+b\sqrt{2}$, де співчинники a і b — вимірні числа. Легко переконатися, що тут можна переводити всі пять дій (за виїмком ділення нулем) і завсіди будемо отримувати тільки числа того тіла; бо не тільки сума й ріжниця двох чисел тіла:

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2},$$

будуть належати до того ж тіла, але й добуток:

$$(a+b\sqrt{2})\,(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2},$$

і частка:

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})\,(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})\,(c-d\sqrt{2})}=\frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2}=$$

$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.$$

ВПРАВИ.

1. Доказати, що немає такого цілого числа ані дробу, що мало б куб рівний 7, 11, 13.

2. Подати числа, які наближуються з доволі великою докладністю до вартостей: $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{10}; \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{11}; \sqrt[4]{6}; \sqrt[4]{4}$.

3. Доказати з докладністю на третьому місці, що: $\sqrt{3}\,.\sqrt{5}=\sqrt{15}$; $\sqrt{2}\,.\sqrt{7}=\sqrt{14}$; $\sqrt[3]{79}\,.\sqrt[3]{97}=\sqrt[3]{7663}$.

4. Обчислити перекутню прямокутника, що має боки: a=8,643..., b=5,471...

5. Обчислити з докладністю на третьому місці промінь кола, що має площину $16{,}342 см^2$.

6. Обчислити $\sqrt{x^2-3xy+y^2}$, коли $y<\frac{x}{10^2}$; $\sqrt{16a^3+25b^3}$, коли $b<\frac{a}{10^3}$.

7. Яке мусить бути відношення $\frac{b}{a}$, щоби взірець $\sqrt[3]{a^3+b} \approx a+\frac{b}{3a^2}$ мав недокладність меншу від $\frac{1}{1000}$?

8. Представити рисунково такі невимірности: $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{22}$; $\sqrt{65}$; $\sqrt{101}$.

9. Знайти геометричний осередок величин: $\frac{3}{2}$ і $\frac{2}{3}$; $a+b$ і $a-b$; $2a+b$ і $2b-a$.

10. Нарисувати образ кривої $y=2^x$ в обсягу між $x=-1$, $x=+1$, із можливо найбільшою докладністю на міліметровому папері, приймаючи за одиницю довжини 5 *см*.

11. Обчислити такі добутки: $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$;
$(1-\sqrt[4]{2})(1+\sqrt[4]{2})$; $(1+\sqrt[3]{2})(1-\sqrt[3]{2})$; $(\sqrt{5}-\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}+\sqrt{2}+1)$;
$[\sqrt{\sqrt{5+1}-\sqrt{\sqrt{5-1}}}]^2$; $(\sqrt{10}-3\sqrt{15})^2$; $(6\sqrt{3}-2\sqrt{5})(3\sqrt{12}+2\sqrt{20})$;
$(\sqrt{10}-2\sqrt{15}+4\sqrt{20})(\sqrt{5}-1)$; $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})^3$; $(\sqrt{3}+2\sqrt[3]{3})^3$.

12. По припису польського єзуїта *Коханського* (1685 р.) можна нарисувати відтинок, рівний обводові кола, так (рис. 108):

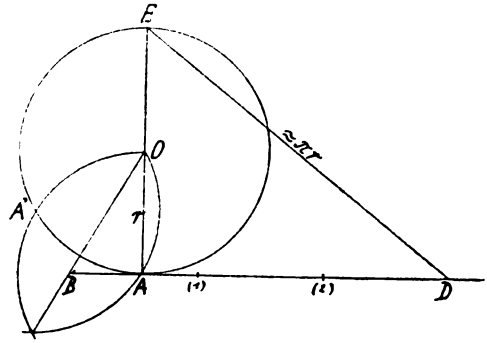


Рис. 108.

Із точки A ведемо лук тим самим промінем, який має коло, а з A такий самий лук, і сполучуємо точку їхнього перетину C з O; потім на доторкальній кола в точці A, починаючи з B, відмірюємо $BD=3r$; тоді відтинок DE буде приближно рівний половині обводу кола, т. зн. $DE=r$. Знайти міру докладности тої конструкції.

Подвійне прикладення правила Пітагора дає для DE вираз: $\sqrt{\frac{40}{3}-2\sqrt{3}}$; обчислити, на скільки ця невимірність ріжниться від π?

13. Обчислити такі частки: $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$; $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{14}}$.

14. Позбутися невимірностей у знаменниках таких величин:

а) $\frac{7}{\sqrt{2}}$, $\frac{5}{\sqrt{10}}$, $\frac{7}{\sqrt{14}}$, $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{8}{\sqrt[7]{3^3}}$, $\frac{3}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$, $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $\frac{x}{x-\sqrt{x}}$, $\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$, $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$, $\frac{5}{\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{5}}}$, $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

15. Звести до найпростішого вигляду такі невимірности:

а) $\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}$; $\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$; $\sqrt{8+\sqrt{15}}-\sqrt{8-\sqrt{15}}$; $\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$; $\sqrt{9+2\sqrt{8}}-\sqrt{9-2\sqrt{8}}$;

б) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$; $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$, $\sqrt{7-\sqrt{13}}$, $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

16. Розвязати такі невимірні рівняння:

а) $\sqrt{2x-5}=1$, $\sqrt{2x-5}=-1$, $\sqrt[3]{2x-5}=1$, $\sqrt[3]{2x-5}=-1$;

б) $\sqrt{3x+7}+\sqrt{3x-5}=2$; $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=\sqrt{x+31}-\sqrt{x-1}$;

$\sqrt{x^2-2+2}=2-x$; $\frac{2x+3}{1+\sqrt{2x}}=\sqrt{2x}+\frac{1}{3}$; $\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}-\frac{x-3}{\sqrt{x-1}}=-2$;

в) $\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y}=3$, $3\sqrt{x+y}-2\sqrt{2x+y}=-1$;

$\frac{2}{\sqrt{x-1}}+\frac{6}{\sqrt{x+2y+2}}=3$, $\frac{4}{\sqrt{x-y}}-\frac{3}{\sqrt{x+2y+2}}=1$.

П'ЯТИЙ РОЗДІЛ

Логаритми.

§ 19. Звичайні або десяткові логаритми.

115. **Пояснення й прикмети логаритмів.** а) Побіч корінювання знаємо ще друге обернення дії степенювання. Ми мали:

$$p=a^n \tag{1}$$

і питали про число, яке треба степенювати, тоб-то брати за чинник n разів, щоб отримати p; таким числом було a, яке ми назвали n-им корінем числа p. Тепер ми з черги будемо питати про викладник n, отже скільки разів треба брати основу a за чинник, щоб отримати p. Отсе друге обернення дії степенювання називаємо *логаритмуванням*; його *пояснююче рівняння* буде:

$$p=a^x \tag{1a}$$

з розвязкою:

$$x={}^a\log p \tag{2}$$

(чит. «логаритм числа p при основі a» або «a-ий логаритм числа p»).

Отже логаритм — це невідомий викладник при даному степені й даній основі. Число p, логаритм якого беремо, будемо звати *числом логаритму* (*numerus logarithmi*) або коротше «числом».

Логаритми грають у цілій математиці надзвичайно важну ролю, як у теорії, так і в практиці. При цьому ж у практиці найбільше значіння матимуть логаритми з основою 10; це т. зв. *десяткові* або *звичайні логаритми.*

б) *Пояснююче рівняння* звичайних логаритмів є:

$$10^x=a, \tag{3}$$

а його розвязку пишемо коротко:

$$x=\log a \tag{4}$$

замість ${}^{10}\log a$ (основу 10 пропускаємо).

Всі прикмети логаритмів та правила логаритмування виходять із основного рівняння про множення степенів:

$$b^m . b^n = b^{m+n}, \tag{5}$$

яке у відношенні до десяткової системи буде:

$$10^m . 10^n = 10^{m+n}, \tag{5а}$$

отже добуток двох чисел, із яких перше має m, друге n нулів, матиме $m+n$ нулів. Покладім:

$$a = 10^m, \quad b = 10^n, \quad c = 10^{m+n},$$

отже:

$$ab = c,$$

тоді буде: $m = \log a$, $n = \log b$, $m+n = \log c = \log(ab)$, отже:

$$\log(ab) = \log a + \log b; \tag{6}$$

логаритм добутку рівний сумі логаритмів його чинників. Отсе *основне рівняння теорії логаритмів.*

Коли $c = ab$, то $b = \frac{c}{a}$, отже:

$$\log a + \log\left(\frac{c}{a}\right) = \log c,$$

або:

$$\log\left(\frac{c}{a}\right) = \log c - \log a; \tag{7}$$

логаритм частки рівний ріжниці логаритмів уменшимка й від'ємника, або теж: *логаритм дробу рівний ріжниці логаритмів чисельника і знаменика.*

Далі:

$$(10^m)^n = 10^{mn};$$

отже коли знову покладемо: $a = 10^m$, т. зн. $m = \log a$, то з $a^n = 10^{mn}$ відчитаємо:

$$\log(a^n) = mn,$$

або ж:

$$\log(a^n) = n \log a; \tag{8}$$

логаритм степеня рівний добуткові степеневого викладника й логарифму степеневої основи.

Врешті, коли тут напишемо $a^n = k$, отже $a = \sqrt[n]{k}$, матимемо:

$$\log k = n \log(\sqrt[n]{k}),$$

т. зн.:

$$\log(\sqrt[n]{k})=\frac{1}{n}\log k; \tag{9}$$

логаритм коріня рівний логаритмові коріневої основи, діленому на викладник коріня.

Ці чотири правила наказують, що *логаритми обнижують ступінь дії*, яку маємо виконувати на числах: замість числа множити чи ділити, додаємо або віднімаємо їхні логаритми, а замість степенювати або корінювати числа, множимо або ділимо їхні логаритми викладником. Звідсіля бачимо, що вжиття логаритмів улекшує нам у великій мірі виконування всяких обчислень.

116. **Обчислювання логаритмів.** а) Творім один за одним степені числа 10 і вписуймо побіч того їхні логаритми:

$$\begin{aligned}
&10^0=1; && \log 1 = 0,\\
&10^1=10; && \log 10 = 1,\\
&10^2=100; && \log 100 = 2,\\
&10^3=1000; && \log 1000 = 3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots && \\
&10^n=100\underbrace{\dots}_{1\,2\,\dots\,n}0; && \log 100\underbrace{\dots}_{1\,2\,\dots\,n}0=n.
\end{aligned}$$

Це значить, що логаритм n-ого степеня числа 10 (тоб-то 1 і n нулів є n, а з окрема: *логаритм числа* 1 є 0, *а логаритм числа* 10, *тоб-то основи нашого укладу*, є 1.

Продовжуймо цей степеневий ряд числа 10 у напрямку від'ємних викладників:

$$\begin{aligned}
&10^{-1}=0{,}1; && \log 0{,}1 = -1,\\
&10^{-2}=0{,}01; && \log 0{,}01 = -2,\\
&10^{-3}=0{,}001; && \log 0{,}001 = -3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots && \\
&10^{-m}=0{,}00\underbrace{\dots}_{1\,2\,\dots\,m}01; && \log 0{,}00\underbrace{\dots}_{1\,2\,\dots\,m}01=-m,
\end{aligned}$$

т. зн. *логаритми десятинного дробу з $m-1$ нулями й одинкою на кінці рівний m від'ємним одиницям.*

Звідсіля бачимо, що з ростом числа росте також його логаритм; справжні дроби мають від'ємні логаритми, і їхня числова вартість росте враз із ростом знаменика. Одначе *тільки логаритми степенів основи* 10 *в цілими числами*; логаритми инших чисел можуть бути, очевидно, тільки дробами.

Логаритми чисел инших, як степені числа 10, не можуть одначе бути звичайними дробами; їх треба причислити до того самого роду чисел, що й невимірні числа. Бо як би логаритм числа a мав бути незводильним десятинним дробом, отже нпр.:

$$\log a = \frac{p}{q}, \qquad (*)$$

де p і q — цілі числа без спільної міри, то це було би рівнозначне з рівнянням:

$$10^{\frac{p}{q}} = a,$$

або:

$$10^p = a^q,$$

Тут ліворуч мали б ми 1 із самими нулями, а праворуч — число, закінчене одною з цифр 1—9. Така рівність неможлива, отже неможливе й рівняння (*). Звідсіля виходить, що *логаритми всіх чисел за виїмком степенів числа* 10 — *незакінчені десятинні* (неперіодові) *дроби.*

б) Одноцифрове число міститься між 1 і 10, отже його логаритм буде лежати між log 1 і log10 т. зн. між 0 і 1; він матиме форму 0,..... Двоцифрове число, отже число між 10 і 100, матиме логаритм між 1 і 2 т. зн. 1,... і т. д., а n-цифрове число, положене між 10^{n-1} і 10^n, буде мати логаритм між $n-1$ і n, т. зн. його ціла частина буде $n-1$. Цілу частину логаритму звемо його *характеристикою* (познакою); дробову частину — *мантисою**). Таким чином характеристика означує положення десятинного значка в логаритмі; *вона на* 1 *одиницю менша від кількости цифр у числі. При справжньому десятинному дробі характеристика від'ємна, вона має стільки одиниць, скільки є нулів перед першою «значною» цифрою.*

в) Нехай будуть дані дві числі, що мають однакові значні цифри, а ріжняться тільки положенням десятинного значка; тоді одне з них можемо отримати, коли друге помножимо відповідним степенем числа 10. Ясне, що їхні логаритми будуть ріжнитися тільки характеристиками, а мантиси матимуть однакові.

Нпр. $a=865$, $b=865000$, $c=0{,}0865$; тут можна написати так: $b=a \cdot 10^3$, $c=a \cdot 10^{-4}$, отже: $\log b = \log a + \log(10^3) = \log a + 3$, $\log c = \log a + \log(10^{-4}) = \log a - 4$.

Тим то й пояснюємо, що логаритмові таблиці подають тільки мантиси, які належать до певних числових груп, а не до чисел із означеною позиційною вартістю. При цьому треба ще раз підкреслити, що тут n-цифровим зветься число, що має n значних цифр (отже починаючи з першої значної цифри після початкових нулів).

Нпр. числа 865000 і 0,0865 будемо вважати трицифровими, так само як і 865.

---

*) *Мантиса* — слово старо-етруського походження. Значить воно: (непотрібний) додаток.

г) Для обчислення логаритму довільного числа можемо вжити такого способу: Перш за все підготовляємо табличку корінів числа 10, а саме: другого, четвертого, осьмого і т. д., а знаходимо їх чергою так: $\sqrt{10}$, $\sqrt{\sqrt{10}}=\sqrt[4]{10}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}=\sqrt[8]{10}$ і. т. д. Коли маємо нпр. $\sqrt{10}=10^{1/2}=3{,}16298\ldots$, то з того виходить: log 3,16228...$=1/2=0{,}5$. Це дасть таку табличку (вартости заокруглені до перших 4 цифр):

n	$\sqrt[n]{10}$	$\log\sqrt[n]{10}$
1	10,0000	$1=1{,}0000$
2	3,1623	$1/2=0{,}5000$
4	1,7783	$1/4=0{,}2500$
8	1,3335	$1/8=0{,}1250$
16	1,1548	$1/16=0{,}0625$
32	1,0746	$1/32=0{,}0313$
64	1,0366	$1/64=0{,}0156$
128	1,0182	$1/128=0{,}0078$
256	1,0090	$1/256=0{,}0039$
512	1,0045	$1/512=0{,}0020$
1024	1,0022	$1/1024=0{,}0010$
2048	1,0011	$1/2048=0{,}0005$
4096	1,0006	$1/4096=0{,}0002$
8192	1,0003	$1/8192=0{,}0001$
16384	1,0001	$1/16384=0{,}0000$

На її основі обчислім нпр. log375. До того ділимо дане число на найвищий степень числа 10, що в ньому міститься, а частку ділимо далі на той корінь тої самої основи 10, який безпосередньо менший від нього. Цю другу частку ділимо далі на відповідний корінь числа 10, аж поки отримаємо частку, яка буде дуже мало ріжнитися від 1 (отже принаймні на 5-му десятинному місці). Ось так число 375 дасть такий ряд ділень:

$\frac{375}{10^{1/2}}=3{,}75;$

$\frac{3{,}75}{10^{2}}=3{,}75:3{,}1623=1{,}1859;$

$\frac{1{,}1859}{10^{1/16}}=1{,}1859:1{,}1548=1{,}0269;$

$\frac{1{,}0269}{10^{1/128}}=1{,}0269:1{,}0182=1{,}0086;$

$\frac{1{,}0086}{10^{1/512}}=1{,}0086:1{,}0045=1{,}0041;$

$\frac{1{,}0041}{10^{1/1024}}=1{,}0041:1{,}0023=1{,}0018.$

$\frac{1{,}0018}{10^{1/2048}}=1{,}0018:1{,}0011=1{,}0007,$

$\frac{1{,}0007}{10^{1/4096}}=1{,}0007:1{,}0006=1{,}0001,$

$\frac{1{,}0001}{10^{1/8192}}=1{,}0001:1{,}0001=1.$

Таким чином переконуємося, що:

$375=100\ .\ 3{,}1623\ .\ 1{,}1859\ .\ 1{,}0269\ .\ 1{,}0086\ .\ 1{,}0041\ .\ 1{,}0018\ .\ 1{,}0007\ .\ 1{,}0001,$

отже:

$$375 = 10^2 \cdot 10^{1/2} \cdot 10^{1/16} \cdot 10^{1/128} \cdot 10^{1/512} \cdot 10^{1/1024} \cdot 10^{1/2048} \cdot 10^{1/4096} \cdot 10^{1/8192};$$

коли ж додамо всі викладники праворуч, отримаємо суму 2,5741, так що:

$$375 = 10^{2,5741}.$$

Звідсіля виходить:

$$\log 375 = 2,5741,$$

згідно з иншими обчисленнями.

Одначе такий спосіб обчислювання логаритмів невигідний і непрактичний; логаритми обчислено иншими шляхами й зібрано їх у книжичках, що звуться *логаритмовими таблицями*. Вони містять у собі тільки мантиси логаритмів, скорочені до кількох перших цифр; отже до 7, 5 або й 4 цифр. У дальшому будемо послугуватися виключно 4-цифровими таблицями (Див. табл. I на кінці книжки).

117. Логаритмова функція. а) Коли розвяжемо пояснююче рівняння викладничої функції (для основи 10):

$$y = 10^x, \tag{10}$$

вважаючи y відомим, а x — невідомим, отримаємо:

$$x = \log y. \tag{11}$$

Така дія зветься *оберненням функції*, отже: *логаритмова функція являється оберненням викладничої функції.*

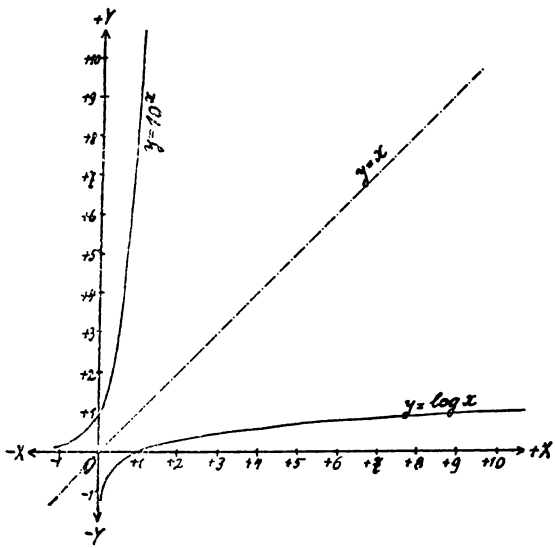


Рис. 109.

На основі уст. 105 а і рис. 91 уміємо відразу нарисувати образ функції:

$$y = \log x, \tag{22}$$

як тільки знаємо образ функції (10); робимо це так, що викладничу криву «відбиваємо» на першій медіяні (рис. 109).

Крива, що уявляє собою ріст логаритмової функції, зветься *логаритмовою лінією* або *логаритмикою*.

«Звичайна *логаритмика*» (т. зн. логаритмова лінія для основи 10, рис. 109) росте, як бачимо, дуже повільно; її рядна для $x=1$ є $y=0$; при $x=10$ має вона вартість $y=1$, а при $x=100$ доходить ледви до $y=2$ і т. д. Між $x=0$ і 1 y має від'ємну вартість; крива спадає стрімко вниз. Це має своє оправдання в тому, що логаритм справжнього дробу від'ємний і має тим більшу числову вартість, чим більший його знаменик. Логаритмика наближується асимптотично до від'ємної половини осі Y; на ліву півплощу вона не переходить, а це значить, що *логаритмів від'ємних чисел ми не знаємо.*

Логаритм дуже малого додатнього числа, отже дробу з дуже великим знаменником, має дуже велику від'ємну вартість; кажемо, що із зменшуванням числа із збільшуванням знаменика дробу логаритм стає «від'ємно-безконечно великий»; а що такий дріб можна написати у виді $\frac{a}{10^n}$, то буде:

$$\log\left(\frac{a}{10^n}\right)=\log a-\log(10^n)=\log a-n.$$

При переході до межевих вартостей напишемо:

$$\lim_{a\to 0}\log(a)=-\infty, \tag{13}$$

або просто:

$$\log 0=-\infty, \tag{13а}$$

а це вповні згоджується з рисунком 109.

б) Коли дане число x і доволі близьке до нього друге число $x+h$, то й їхні логаритми будуть мало ріжнитися один від одного; назвім ріжницю логаритмів k, отже:

$$k=\log(x+h)-\log x,$$

то на основі правил логаритмування напишемо:

$$k=\log\frac{x+h}{x}=\log\left(1+\frac{h}{x}\right). \tag{14}$$

З цього взірця читаємо:

(1) Коли приріст числа, тоб-то h, візьмемо постійним, то вартість дробу буде тим менша, чим більше буде x; отже чим далі в природньому ряді чисел (або чим далі вправо на числовій лінії), тим менший буде приріст логаритмів, тоб-то величин k. Це значить, що при однакових відступах здовж осі X логаритмика буде рости тим слабше, чим далі посунемо в природньому ряді.

(2) При постійному x вартість дробу $\frac{h}{x}$ меншатиме разом із приростом h; отже при дуже незначному прирості здовж осі X логаритмика буде рости теж тільки дуже незначно, т. зн. що між двома дуже близькими точками крива буде дуже мало ріжнитися від своєї тетиви.

118. Інтерполяція. На основі тої останньої уваги можемо логаритмові таблиці обмежити до кількох перших цифр мантиси, бо при великій кількости цифр ріжниця мантис сусідніх чисел стає дуже незначна. Логаритмову криву, як ми бачили, можна в дуже малих частинах дуги заступати її тетивою, отже можемо прийняти, що в дуже малих відступах чисел їхні *логаритми ростуть пропорційно до росту чисел*. Таке приближне обчислювання величин, коли їм приписуємо пропорційний ріст, зветься *інтерполяцією*. Вона дуже важна, тому пояснимо її перше ще иншому прикладі.

Возьмім функцію $y=\frac{1}{x}$ і її образ, рівнобічну гіперболу; для $x=3$ і $y=4$ маємо: $y=\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$ і $y=\frac{1}{4}=0{,}25$. Шукаймо вартости y для якоїсь посередньої точки, нпр. $x=3{,}4$, приймаючи, що функція росте — а в нашому прикладі опадає — рівномірно, тоб-то пропорційно до росту аргументу; тоді гіперболу треба буде заступити її тетивою (рис. 110). Вартости $x=3{,}4$ буде відповідати

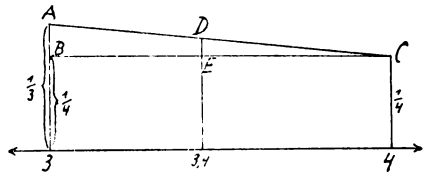


Рис. 110.

рядна $y=\overline{D;3{,}4}$ в цій точці. Із подібности трикутників ABC і DEC читаємо:

$$\frac{DE}{AB}=\frac{EC}{BC},$$

отже:

$$DE=\frac{AB\,.\,EC}{BC}=\frac{(1/3-1/4)\,.\,(4-3{,}4)}{1}=0{,}05;$$

таким чином бажана рядна буде на 0,05 більша від рядної для $x=4$, т. зн. буде: $x=\frac{1}{4}+0{,}05=0{,}30$, а справжня рядна гіперболи була би $\frac{1}{3{,}4}=0{,}2941\ldots$ Тут ріжниця справді дуже незначна: 0,006 (т. зн. при одиниці $1m$ була би вона всього 6 mm).

Подібно буде при інтерполяції логаритмів. Із таблиці при кінці книжки читаємо, що $\log 69=1{,}8388$ і $\log 70=1{,}8451$ (характеристик у таблиці немає.

тільки мусимо їх добірати самі) і нехай нам буде треба обчислити log69,7. Приймаючи пропорційність росту логаритмів при дуже малих приростах чисел, кажемо так:

При зрості числа на 1, логаритм зросте на 63 одиниць останньої цифри мантис;

„ „ „ „ 0,1, „ „ 6,3 „ „ „

„ „ „ „ 0,7, „ „ 6,3 . 7 = 44,1 „ „

отже до останньої цифри мантиси меншого числа треба додати $\delta = 44{,}1$ (або кругло 44) одиниць; тому матимемо: $x = \log 69 + \delta = 1{,}8388 + 0{,}0044 = 1{,}8432$. Порівнюючи цю вартість із таблицею, побачимо, що тут недокладність можлива аж на пятому місці.

119. **Від'ємні й пів-від'ємні логаритми.** а) Логаритми справжніх дробів від'ємні, а що таблиці подаються тільки додатні мантиси, то від'ємні логаритми треба ще зводити до відповідного вигляду. Робимо це так, що надаємо їм додатню мантису з від'ємною характеристикою.

Нпр. обчислити $x = \log\frac{3}{7}$. Це дає: $x = \log 3 - \log 7 = 0{,}4771 - 0{,}8451 = -0{,}3687$; згадана переміна відбувається тут так, що додаємо й віднімаємо одиницю:

$$x = (1 - 0{,}3680) - 1 = 0{,}6320 - 1.$$

До мантиси 6320 знайдемо в таблиці число 4285, отже як би на було від'ємної характеристики, то за число взяли ми 4,285; тимчасом є: $-1 = -\log 10$, отже $x = \log 4{,}285 - \log 10 = \log\frac{4{,}285}{10} = \log 0{,}4285 - 1$, а це число дуже мало ріжниться від дробу $\frac{3}{7}$.

Такий логаритм звемо *пів-від'ємним*; і до нього вже можемо знайти число в таблиці, а йде тільки про визначення місця для десятинного значка.

Показується, що *число, яке має піввід'ємний логаритм із характеристикою — a, має a нулів перед першою значною цифрою* (вчисляючи сюди й нуль перед значком).

Це тому, що число $x = \frac{k}{10^a} = \underbrace{0{,}00\ldots0}_{1\,2\,3\ldots a}\,k$ має логаритм $\log x = \log k - \log(10^a) = \log k - a$. Коли ж k буде < 10 отже $\log k$ матиме характеристику 0, то характеристика $\log x$ буде від'ємна: $= -a$.

Нпр. (1) $x = \log 0{,}00832 = \frac{\log 832}{1000} = \log 8{,}32 - \log 1000 = 0{,}9201 - 3$;

(2) $\log x = 0{,}6893 - 5 = \log 4{,}89 - \log(10^5) = \log\frac{4{,}89}{100000}$, отже $x = 0{,}0000489$.

б) Піввід'ємні логаритми додаємо, віднімаємо й множимо звичайним способом, отже так, як многочлени, а після виконання дії редукуємо мантиси й додатні та від'ємні характеристики. Зате при

діленні мусимо вважати, що часами від'ємна характеристика може бути неподільна дільником; тоді доповнюємо її до найближчої більшої многократі дільника, отже додаємо й віднімаємо якесь додатнє число.

Нпр. (1) $(0{,}8351-2)+(0{,}5675-1)=1{,}4026-3=0{,}4026-2$;

(2) $5\,.\,(0{,}5470-3)=2{,}7350-15=0{,}7350-13$;

(3) $(0{,}6867-2)\,:\,7=(5{,}6867-7)\,:\,7=0{,}8124-1$.

При діленні пів-від'ємних логаритмів треба звертати увагу на такий випадок, який виступає при вживанні тригонометричних функцій, де звичайно дописують від'ємну характеристику -10, отже завсіди її доповнюємо до найближчої більшої многократі числа 10.

Нпр. обчислити кут α із взірця:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

де $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, коли приймемо: $a=18$, $b=19$, $c=20$. Тоді буде: $s=\dfrac{57}{2}$ і далі:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{{}^{57}/_{2}\,.\,{}^{21}/_{2}}{19\,.\,20}}=\sqrt{\frac{63}{80}}.$$

Логаритмовий рахунок дасть:

$$\log\cos\frac{\alpha}{2}=(\log 63-\log 80)\,:\,2=(0{,}7993-0{,}9031)\,:\,2=(0{,}8962-1):2,$$

та нам треба, щоби після поділення була характристика -10, отже мусимо логаритм доповнити числом $19-10=9$, т. зн.:

$$(19{,}8962-20)\,:\,2=9{,}9481-10,$$

а звідсіля:

$$\frac{\alpha}{2}=27^{0}27'.$$

120. **Ужиток логаритмів. Приклади.** Пожиточність логаритмів основується на тому, що вони обнижують ступінь дії (див. уст. 115 кінець), отже з множення чисел роблять додавання логаритмів і т. д. Тими улекшеннями користуємось на основі такої аксіоми:

Коли два числа рівні, то рівні й їхні логаритми — віднесені, розуміється, *до одної й тої самої основи.* —

Із рівности:

$$A=B \tag{15}$$

виходить:

$$\log A=\log B, \tag{16}$$

бо в цьому випадкові є також:

$$10^{A}=10^{B}.$$

Отже, коли дане якесь рівняння, то можемо порівняти логаритми обох його боків; перехід від рівняння (15) до (16() зветься *логаритмуванням рівняння*, а оборотний хід, від (16) до (15) — *делогаритмуванням.*

Нпр. злогаритмувати рівняння:

$$x = a^2 b.$$

Це дасть:

$$\log x = \log(a^2 b) = \log(a^2) + \log b = 2\log a + \log b.$$

Таким чином ми кожну труднішу дію перемінемо на лекшу так, що відповідне рівняння злогаритмуємо.

Треба ще тільки завважити, що додавання й віднімання при допомозі логаритмів не можна вже ніяк улекшити.

Покажемо на кількох прикладах, яку користь приносить логаритмове числення:

(1) Обчислити добуток:

$$x = 86{,}52 \,.\, 0{,}3187.$$

Злогаритмуймо це рівняння:

$$\log x = \log 86{,}52 + \log 0{,}3187,$$

отже:

$$\begin{aligned} \log\ 86{,}52 &= 1{,}9371 \\ (+)\log 0{,}3187 &= 0{,}5034 - 1 \\ \log x &= 2{,}4405 - 1 \cdot \quad 1{,}4405. \end{aligned}$$

У таблиці є мантиса 4393, до якої належить число 275, а обидві ріжниці є: $t = 16$, $\delta = 12$, отже: $d = \frac{\delta}{t} = 0{,}75$, т. зн.: $x = 27{,}575$.

(2) *Обчислити відворотність числа* π: $x = \frac{1}{\pi}$. Це дасть:

$$\log x = \log 1 - \log \pi = 0 - \log \pi = -0{,}4971,$$

або після доповнення:

$$\log x = (1 - 0{,}4971) - 1 = 0{,}5029 - 1,$$

отже:

$$x = 0{,}3184.$$

(3) *Обчислити інтервалъ «темперованої» музичної скалі.* Музична акустика вчить, що відступи («інтервалі») між півтонами «природньої» хроматичної скалі не є рівні. Для музичної практики (строєння таких струментів, як п'яніно і т. д.), це невигідно, тому то природню скалю заступлено т. зв. «темперованою» (вирівняною), в якій ці інтервалі всі однакові. — Коли на 1 дрогання основного тону (тоніки) припадає x дрогань сусіднього півтону, то на 1 дрогання того півтону припаде знов x дрогань наступного півтону і т. д., а що в октаві є 12 півтонів, то на дванадцятий півтон припадуть 2 дрогання тоніки, отже x буде дане рівнянням:

$$x^{12} = 2.$$

Звідсіля: $x=\sqrt[12]{2,}$ отже: $\log x=\frac{1}{12}\log 2=0{,}3010:12=0{,}0251$; з кінцевої частини таблиці виходить:

$$x=1{,}0595.$$

(4) *Із прямого колового стіжка дані: промінь основи й висота:* $\varrho=13{,}28$, $h=17{,}36$. *Обчислити його зміст.*

Для змісту стіжка матимемо:

$$V=\frac{1}{3}\pi\varrho^2 h,$$

а це рівняння, злогаритмоване, дасть:

$$\log V=\log\left(\frac{1}{3}\right)+\log\pi+\log(\varrho^2)+\log h=$$

$$=2\log\varrho+\log\pi+\log h-\log 3.$$

Обчислім це:

$$\begin{aligned}\log\varrho &= \log 13{,}28=1{,}1232\\ \log\varrho^2 &= 2\log 13{,}28=2{,}2464\\ (+)\log h &= \log 17{,}36=1{,}2395\\ (+)\log\pi &= \log 3{,}1459=0{,}4971\\ &\qquad\qquad 3{,}9830\\ (-)\log 3 &= 0{,}4771\\ \log V &= 3{,}5059,\end{aligned}$$

отже:

$$V=3257;$$

тут четверта цифра повстала через інтерполяцію, отже вона непевна.

5) *Даний зміст кулі:* $V=62{,}73$; *знайти її промінь.*

Із взірця на зміст:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

виходить:

$$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

отже:

$$\log r=\frac{1}{3}[(\log 3+\log V)-(\log 4+\log\pi)],$$

т. зн.:

$$\left\{\begin{array}{rr} & \log 3=0{,}4771\\ (+) & \log V=1{,}7975\\ & 2{,}2746\\ (-) & 1{,}0992\end{array}\right.\qquad (-)\left\{\begin{array}{rr} & \log 4=0{,}6021\\ (+) & \log\pi=0{,}4971\\ & 1{,}0992\end{array}\right.$$

$$1{,}1754\ :\ 3=0{,}3918,$$

отже:

$$\log r=0{,}3918,\ \text{а тому:}\quad r=2{,}465.$$

121. **Викладничі й логаритмові рівняння.** а) *Викладничим* зветься рівняння тоді, коли невідома виступає як степеневий або коріневий викладник. Такі рівняння можна розвязувати без логаритмових таблиць, або аж за допомогою логаритмів, як це побачимо на прикладах.

Нпр. 1) $a^x = b$. Отсе найпростіше викладниче рівняння розвязуємо так, що його логаритмуємо:

$$x\log a = \log b,$$

отже:

$$x = \frac{\log b}{\log a};$$

тут, очевидно, мусять бути бути обидва числа, a і b, додатні; крім того приймаємо, що $a \gtrless 1$.

Ось так рівняння :

$$2^x = 5$$

матиме корінь:

$$x = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0{,}6990}{0{,}3010} = 2{,}32.$$

(2) Часто вдається розвязка такого рівняння через розклад чисел, які в ньому виступають, на прості чинники; нпр.:

$$3^x = 729.$$

Коли знайдемо, що $729 = 27^2 = (3^3)^2 = 3^6$, матимемо: $3^x = 3^6$, отже $x = 6$.

(3) $$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2};$$

тут можемо написати так: ліворуч $3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 = 3^x (1 + 3 + 9) = 3^x \cdot 13$,

а праворуч: $5^x + 5^x \cdot 5^{-1} + 5^x \cdot 5^{-2} = 5^x \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right) = 5^x \cdot \frac{31}{25}$, отже:

$$3 \cdot 13 = 5^x \cdot \frac{31}{25}.$$

Звідсіля:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{13 \cdot 25}{31},$$

а коли злогаритмуємо:

$$x(\log 5 - \log 3) = \log 13 + \log 25 - \log 31,$$

$$x = \frac{\log 13 + \log 25 - \log 31}{\log 5 - \log 3} = 46{,}59.$$

(4) $$3^{x+7} = 7^{x+3};$$

це можна написати так:

$$3^x \cdot 3^7 = 7^x \cdot 7,$$

або:

$$\left(\frac{7}{3}\right)^x = \frac{3^7}{7^3},$$

$$x(\log 7 - \log 3) = 7\log 3 - 3\log 7,$$

$$x = \frac{7\log 3 - 3\log 7}{\log 7 - 3\log} = 2{,}158\ldots$$

(5) $$3^x \cdot 4^y = 3981312,$$

$$5x - 3y = 4.$$

Rozkładim prawy bik pershoho rivnyannia na chynnyky:

$$3981312 = 3^5 \cdot 2^{14},$$

otzhe bude:

$$3^x \cdot 4^y = 3^5 \cdot 2^{14},$$

a tse zlohaarytmovane dast':

$$x\log 3 + y\log 4 = 5\log 3 + 14\log 2.$$

Koly syudy vstavymo y iz druhoho, t. zn. $y = \frac{5x-4}{3}$, otrymaiemo:

$$x\log 3 + \frac{5x-4}{3}\log 4 = 5\log 3 + 14\log 2,$$

otzhe:

$$3x\log 3 + 5x\log 4 - 4\log 4 = 15\log 3 + 42\log 2,$$

$$x(3\log 3 + 5\log 4) = 15\log 3 + 42\log 2 + 4\log 4,$$

a shcho $\log 4 = 2\log 2$, to:

$$x(3\log 3 + 10\log 2) = 15\log 3 + 50\log 2 = 5(3\log 3 + 10\log 2),$$

t. zn.:

$$x = 5,\ y = 7.$$

b) *Lohaarytmovi rivnyannia* mistiat' lohaarytmy nevidomykh; ikh u pershu cherhu zvodymo do naipростishoho vyhliadu, a potim delohaarytmuiemo.

Npr. (1) $\log(x+2) - \log(x-1) = 2 - \log 4.$

Tut livoruch maiemo lohaarytm chastky $\frac{x+2}{x-1}$, a praworuch mozhna napysaty tak: $2 - \log 4 = \log 100 - \log 4 = \log\frac{100}{4}$, otzhe:

$$\log\frac{x+2}{x-1} = \log 25,$$

a zvidsilia:

$$\frac{x+2}{x-1} = 25,\ \text{t. zn. } x = \frac{9}{8}.$$

(2) $$\log x - \log y = 1,$$

$$\log x + \log y = 3 - 2\log 5.$$

Otsi rivnyannia mozhna napysaty tak:

$$\log\frac{x}{y} = \log 10,\ \log(xy) = \log 1000 - \log 25 = \log\frac{1000}{25} = \log 40.$$

т. зн.:

$$\frac{x}{y}=100,\quad xy=40.$$

а звідсіля:

$$x=20,\quad y=2.$$

Інші викладничі й логаритмові рівняння можна розвязувати аж методами вищої математики.

ВПРАВИ.

1. На основі таблички в уст. 116 г обчислити логаритми таких чисел: 2, 3, 5, 7, 53, 67, 197, 899, 1693, 2003, 5711.

2. На основі тої самої таблички обчислити логаритми таких чисел, послугуючися при цьому також розкладом зложених чисел на прості чинники: 18, 36, 39, 85, 111, 168, 248, 343, 792, 1008, 2165, 4320, 5040.

3. Обчислити числа, що мають такі звичайні логаритми: 0,3892; 2,5746; 0,7911—2; 0,3649—1; 1,8992; 2,3540; 3,2211; 0,2655—3: 1,0441; 2,9765; 0,4350—1, 0,0026.

4. При допомозі логаритмів обчислити такі величини:

а) $3{,}762\,.\,2{,}675;\ 4{,}399\,.\,0{,}7711;\ 89{,}25\,.\,46{,}33;\ 581\,.\,98{,}72;$

б) $\frac{66{,}39}{25.17};\ \frac{4963}{0{,}0089};\ \frac{26{,}55}{4{,}678};\ \frac{5{,}679\,.\,8{,}322}{4{,}519\,.\,7{,}319};\ \frac{1}{19{,}92\,.\,5{,}97};$

в) $5{,}373^{4};\ 0{,}0896^{5};\ 6{,}732^{-8};\ 99{,}61^{-4};\ 0{,}006971^{-3};$

г) $\sqrt{6{,}933};\ \sqrt[3]{5{,}632};\ \sqrt[4]{611};\ \sqrt[11]{2{,}97};\ 5{,}538^{5/6};\ 0{,}4477^{4/5};$

д) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}};\ \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}};\ \sqrt{5\sqrt[3]{4\sqrt[4]{2}}};\ 5\sqrt[3]{\log 731};\ \sqrt{1+2\sqrt{5}}.$

5. Коли дані: $a=39{,}87$, $b=41{,}52$, $c=5{,}924$, обчислити:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c};\ \sqrt{a^2+b^2+c^2};\ \sqrt[3]{abc};$$

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}};\ \frac{\sqrt{1+a}\,.\,\sqrt{1+b}}{\sqrt{1+c}}.$$

6. Українські землі займають простір 905000 km^2; який промінь мусіла б мати куля, яка помістила б їх на собі?

7. Обчислити поверхню та зміст землі, коли знаємо, що її рівник має 40075,4km і приймемо, що вона має докладно форму кулі.

8. Зміст сонця в 1 310 160 разів більший від змісту землі, знайти його промінь, приймаючи, що воно — докладна куля.

9. Третій закон Кеплєра*), що відноситься до рухів планет, говорить, що куби середніх віддалей від сонця двох планет стоять до себе в такому відношенні, як квадрати їхніх часів оббігу кругом сонця:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3}=\frac{T_1^2}{T_2^2}.$$

Коли знаємо часи оббігу Землі й Марса кругом Сонця ($365^1/_4{}^d$ і 687^d) та середню віддаль Землі від Сонця (149,5 міліонів km) обчислити середню віддаль Марса від Сонця.

10. Висоту гори в метрах подає в приближенні такий узірець Ляпляса**):

$$h=18336\left(1+\frac{t_1+t_2}{500}\right)\log\frac{b_2}{b_1},$$

де t_1 і t_2 та b_1 і b_2 означують температуру й барометричний стан унизу та на вершку гори. Обчислити висоту гори, коли зміряно: $t_1=17{,}5^0$, $t_2=14{,}7^0$; $b_1=739mm$, $b_2=701mm$.

11. Скільки цифр має число 777^{777}? яка його перша й остання цифра?

12. Найбільше число, що його можемо написати при допомозі трох цифр є:

$$9^{9^9}$$

Подати кількість цифр у цьому та першу й останню цифру.

13. Розвязати такі викладничі рівняння:

а) $5^{2x+3}=55$; б) $3^x=177147$; в) $343^{5x-1}=2{,}0408$;

г) $2^x\,.\,3^{3x}=4^{x-1}$; д) $3^{2x}\,.\,5^{6x-7}=9^{x-2}\,.\,7^{1-x}$; е) $11^{\frac{x+2}{x+3}}=7$;

є) $\sqrt[x]{100}=3{,}5973$; ж) $\sqrt[2x+1]{7}=\sqrt[3x-1]{4}$; з) $7^x+7^{x+1}+7^{x+2}=5^x+5^{x+2}+5^{x+4}$;

и) $\sqrt[x]{64}\,.\,3^y=36$, $\sqrt[x]{1728}\,.\,5^y=300$; і) $x^y=243$, $\sqrt[y]{1024}=\left(\frac{2}{3}x\right)^2$.

к) $2^x\,.\,3^y=18$, $4^x\,.5^z=500$, $6^y\,.\,7^z=12348$.

*) Йоган *Кеплєр* (1571—1630), один із найвизначніших новочасних астрономів, який розвинув і поглибив теорію Коперника про рухи небесних тіл. Жив і працював у Грацу, Лінцу й Празі, де був деякий час надворним астрономом цісаря Рудольфа II.

**) П'єр Сімон *Ляпляс* (*Laplace*, 1749—1827), визначний французький математик і астроном, який сформулував математично теорію Канта про повстання сонішнього укладу. Учителював у військових школах, належав потім до «Бюро Довжин», а врешті став членом Сенату за Наполєона.

14. Розвязати такі логаритмові рівняння:

а) $\log(x+5)-\log(x-5)=0{,}7782$; б) $\dfrac{3+\log x}{2-\log x}=4$;

в) $\dfrac{\log(x^2-9)}{\log[5(x-3)]}=2$; г) $\log(5x-1)=\log 2+\log(2x+1)$;

д) $56^{\log x}=3136$; е) $25^{1+\log x}=0{,}0016$;

є) $\log(x+y+2)=1{,}1461$, $\log(x^2y^3)-\log\left(\dfrac{x}{y^3}\right)=\log(13xy)-0{,}3652$.

§ 20. Логаритми ниших укладів.

122. Залежність росту логаритмової функції від величини основи. а) Розвязку рівняння:

$$a^x = k \tag{1}$$

назвали ми a-им логаритмом числа k:

$$x = {}^a\log k; \tag{2}$$

відповідно до вибору основи a змінюється ріст логаритмової функції. Нехай буде $a < b$; тоді є $a^x < b^x$, отже коли хочемо дібрати викладник y так, щоби було:

$$a^x = b^y = k$$

мусітимемо взяти $y > x$. Таким чином, коли $y = {}^b\log k$, маємо:

$${}^b\log k < {}^a\log k \qquad (b < a). \tag{3}$$

Чим менша основа логаритмового укладу, тим швидше росте логаритмова функція.

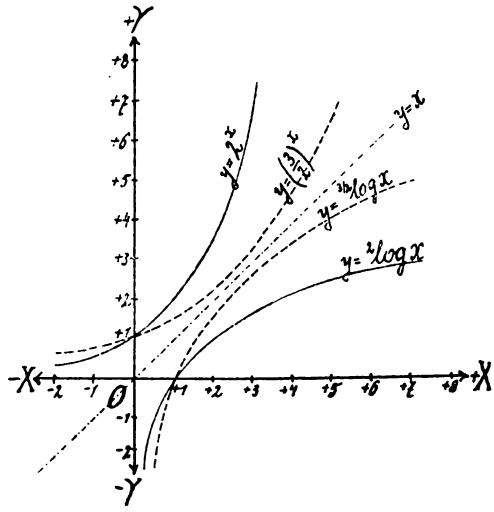


Рис. 111.

Цей вислід можемо підтвердити рисунком, на якому будемо обертати образи викладничих кривих ріжних основ, відбиваючи їх на першій медіяні (рис. 111; див. теж рис. 91). Знаємо з уст. 97, що викладнича функція росте тим сильніше (отже викладнича крива наближується до осі Y тим швидше), чим більша основа. При обернені буде навпаки: чим більша основа, тим швидше логаритм наближується до осі x, отже тим повільніше росте логаритмова функція.

Логаритмики ріжних основ творять громаду кривих, яка має вершок на осі X у точці 1, бо там вони всі перетинаються. Вище осі X усі

логаритмики зростають безконечно, але піднімаються розмірно дуже слабо; нижче осі X наближуються асимптотично до осі Y і то тим сильніше, чим більша основа.

Залежність росту логаритмової функції від величини основи зможемо оцінити з такої таблички:

x	$y={}^{a}\log x$					
	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=10$	$a=20$	$a=100$
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0,63	0,45	0,30	0,23	0,15
3	1,58	1	0,68	0,47	0,36	0,23
5	2,32	1,46	1	0,70	0,53	0,34
10	3,32	2,09	1,44	1	0,71	0,50
20	4,32	2,72	1,86	1,30	1	0,65
100	6,64	4,18	2,88	2,00	1,42	1

б) Для дій логаритмами довільного укладу необхідно знати, що до них відносяться ці самі правила, які ми пізнали при десяткових логаритмах, бо ж усі вони випливають із рівняння:

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}; \tag{а}$$

воно правдиве не тільки для $b=10$, але для всякого b. Тому то й є:

$${}^{k}\log(ab) = {}^{k}\log a + {}^{k}\log b, \tag{б}$$

$${}^{k}\log\left(\frac{c}{a}\right) = \log c - \log a, \tag{в}$$

$${}^{k}\log(a^n) = n \cdot {}^{k}\log a, \tag{г}$$

$${}^{k}\log\left(\sqrt[n]{p}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log p. \tag{д}$$

Далі необхідно памятати, що в кожному укладі є:

(а) логаритм одиниці рівний нулеві:

$${}^{k}\log 1 = 0,$$

(бо завсіди $k^0=1$);

(б) логаритм основи рівний 1:

$${}^{k}\log k = 1,$$

(бо завсіди $k^1=k$).

(в) логаритм нуля рівний «від'ємно-безконечному» числу:

$${}^{k}\log 0 = -\infty \tag{е}$$

(бо його можемо вважати переходом до межевих вартостей у взірці:

$$^k\log\left(\frac{1}{k^n}\right) = {}^k\log 1 - n\,.\,{}^k\log k = 0 - n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left({}^k\log\frac{1}{k^n}\right) = -\lim_{n\to\infty} n = -\infty),$$

та що:

г) логаритм при всякій основі є тільки тоді цілим числом, коли логаритмоване число є степенем основи:

$$^k\log(k^p) = p\,.\,{}^k\log k = p.$$

а позатим завсіди безконечним неперіодовим десятинним дробом.

123. **Заміна логаритмів одного укладу на другий.** Часто приходиться переводити логаритми з одного укладу в другий, отже нпр. із укладу з основою a в уклад із основою b.

Нехай буде:

$$a^x = b,\quad b^y = a; \tag{4}$$

тоді маємо:

$$x = {}^a\log b,\quad y = {}^b\log a. \tag{5}$$

Піднесім обидва боки першого рівняння (4) до степеня y:

$$(a^x)^y = b^y = a,$$

отже:

$$a^{xy} = a^1,$$

а звідсіля:

$$xy = 1,$$

т. зн.:

$$^a\log b\,.\,{}^b\log a = 1, \tag{6}$$

або:

$$^b\log a = \frac{1}{{}^a\log b}\,.$$

Коли переставимо логаритмове число з основою укладу, отримаємо відворотність того нового логаритму.

На основі цих взірців легко довершувати бажані заміни, нпр. із даного $u = {}^a\log k$ обчислити $v = {}^b\log k$. Напишім рівняння:

$$k = a^u$$

й логаритмуймо його відносно основи b, т. зн. возьмім b-і логаритми обох боків. Це дасть:

$$^b\log k = u\,.\,{}^b\log a,$$

отже:

$$^{b}\log k = {}^{a}\log k \,.\, {}^{b}\log a,$$

а коли напишемо другий чинник праворуч на основі (7) в іншому вигляді, матимемо:

$$^{b}\log k = \frac{^{a}\log k}{^{a}\log b}\,. \tag{8}$$

124. **Природні логаритми.** а) Останній взірець важний тому, що побіч укладу звичайних (десяткових) логаритмів у математиці (і то виключно в теорії) уживають і ще другого укладу, *природніх логаритмів*. Це такі логаритми, що мають основу дану безконечним рядом:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots; \tag{9}$$

суму того ряду означуємо буквою e, а її перші цифри є:

$$e=2{,}71828182845\ldots \tag{10}$$

Природні логаритми будемо значити ln (від *logarithmus naturalis*). Коли $e^x=a$, то:

$$x=\ln a.$$

Степені числа e є:

$$e^1=\ 2{,}718\ldots,$$
$$e^2=\ 7{,}489\ldots,$$
$$e^3=20{,}357\ldots,$$
$$e^3=56{,}085\ldots,$$

отже тут трудно добачитися такої переглядности, як при звичайних логаритмах. Бачимо тільки, що:

$\ln 2<\ln 2{,}718\ldots=1$, отже $\ln 2<1$;
$\ln 7<\ln 7{,}489\ldots=2$, отже $\ln a<2$ для $a=3,\ 4,\ldots 7$;
$\ln 20<\ln 20{,}357\ldots=3$, отже $\ln a<3$ для $a=8, 9\ldots, 20$ і т. д.

Подаємо табличку природніх логаритмів простих чисел першої сотні:

p	$\ln p$	p	$\ln p$	p	$\ln p$	p	$\ln p$	p	$\ln p$
2	0,6931	13	2,5649	31	3,4340	53	3,9703	73	4,2905
3	1,0986	17	2,8332	37	3,6109	59	4,0775	59	4,3694
5	1,6094	19	2,9444	41	3,7136	61	4,1109	83	4,4188
7	1,9459	23	3,1355	43	3,7612	67	4,2047	89	4,4886
11	2,3979	29	3,3673	47	3,8286	71	4,2627	97	4,5747

Переміна звичайних логаритмів на природні й навпаки відбувається на основі взірців:

$$\ln k = \frac{\log k}{\log e},$$

та:

$$\log k = \frac{\ln k}{\ln 10},$$

а що з огляду на рівняння (7) маємо:

$$\ln 10 . \log e = 1, \tag{7a}$$

то нам вистарчить знати тільки одну з тих двох величин: ln10 або log*e*. Звичайно кладуть:

$$M = \log e = 0{,}4342\ldots$$

і звуть те число *модулем переміни логаритмів*, отже є:

$$\log k = M \ln k. \tag{11}$$

Відворотність модулю M значимо M'; вона є:

$$M' = \frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}3025\ldots,$$

і тому:

$$\ln k = M' \log k = 2{,}3025\ldots \log k. \tag{11*}$$

125. **Історична увага.** Логаритми завдячують свій початок потребам практичного рахунку, головно для цілей астрономії. Їх винайшли майже одночасно, хоч незалежно один від одного, шкот Джон *Непер* (1550—1617) і швайцарець Йост *Бірґі* (1552—1632); від першого з них походить і назва логартимів. Вони обидва складають таблиці розвязок рівняння $x = b^y$ для цілих y і хочуть їх знайти так, щоби числа x творили дуже густий наступ, отже щоби кожне число могло мати свій логаритм. Відкидаючи дробові викладники, вони обидва впадають на таку ідею, щоб основу b взяти доволі близько одиниці, бо степені того числа з цілими викладниками творять дуже густий наступ. І так Бірґі бере за основу $1{,}0001 = 1 + \frac{1}{10^4}$, а Непер число дещо менше від 1, а саме $0{,}9999999 = 1 - \frac{1}{10^4}$.

Основою логаритмів *Бірґі* можна вважати число e, бо $\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{1000} = 2{,}718146\ldots$ згоджується з e в трох перших цифрах; у *Непера* виступає як основа число, близьке до $\frac{1}{e}$.

Приятель Непера, Генрі *Бріґс* (1556—1630) обчислив і видав перші таблиці логаритмів чисел 1—20000 і 90000—100000 на 14 місць для основи 10, а також логаритми гоніометричних функцій на 10 місць. Прогалину в Брігсових таблицях виповнив голяндець Адріян *Вляк* (*Vlaacq*, 1628), подаючи 10-цифрові логаритми чисел до 100000; його таблиці стали зразком для всіх пізніших видань.

Обчислення тих перших таблиць відбувалося на ріжні способи. *Непер* робить це так, що з логаритму числа y доходить до логаритму $y+1$ через дочислення відповідного приросту. Нехай двом сусіднім викладникам y і $y+k$ відповідають числа x і $x+h$, отже:

$$x=b^y\ ,\ x+h=b^{y+k};$$

тоді є:

$$h=b^{y+k}-b^y=b^y(b^k-1)=x(b^k-1),$$

а звідсіля:

$$\frac{k}{h}=\frac{k}{x(b^k-1)}.$$

Непер приймає тут $k=1$, отже: $b^k-1=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^1-1=\frac{1}{10^4}$, тому в нього є:

$$\frac{k}{h}=\frac{10^4}{x},$$

і цей приріст додає до логаритму попереднього числа.

У *Бірґі* виглядало би відповідне рівняння так: $\frac{k}{h}=\frac{10^7}{x}$.

Брігс і *Вляк* часто вживають взірця: $\log\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$. Що природній логаритм може бути даний площиною рівнобічної гіперболи, до цього доходить перший Микола *Кавфман* (1620—1687), що з латинська писався *Меркатором*; він знаходить безконечний ряд:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

У нього подибується теж назва природнього логаритму.

Великий математик *Ойлєр**) 1748 пояснив логаритмування як друге обернення дії степенювання і ввів означення для основи природніх логаритмів.

Перші повні таблиці логаритмів видав 1794 австрійський старшина артилєрії, словінець *Вега*, т. з. «*Thesaurus logarihtmorum completus*»; вони містять логаритми всіх природніх чисел і гоніометричних функцій на 10 місць. У пізніших роках виявляється змагання до зменшення кількости цифр мантиси; ось так довгий час тримаються в школі 7-цифрові логаритми, які уступають місця 5-цифровим, а сьогодня здобувають собі право горожанства 4-цифрові.

На українській мові є такі два видання логаритмів: 5-цифрові *Кранца* (переклад із польського, для вжитку галицьких шкіл), і 4-цифрові *Чайковського* й *Кучера***).

ВПРАВИ.

1. Нарисувати логаритмику для таких основ: 3, 5, 7.

2. Обчислити: $^5\log 15625$, $^{25}\log 15625$, $^{125}\log 15625$; $^2\log 64$, $^{11}\log 1234321$, $^3\log 729$, $^{16}\log 4096$.

---

*) Див. увагу до уст. 82, стр. 206.

**) *Чайковський-Кучер*, Чотироцифрові таблиці логаритмів і гоніометричних функцій. Вид. «Дніпросоюзу», Відень—Київ, 1919.

3. Провірити основні рівняння логаритмування на логаритмах чисел: $7^2=49$, $5=\sqrt[3]{125}$, $18=2.3^2$ і т. д. при основах: 2, 3, 5.

4. Знаючи звичайні логаритми чисел 8, 17, 63, 129, обчислити логаритми тих чисел в укладах при основах 5, 8, -2.

5. Обчислити через інтерполяцію природні логаритми чисел 80, 81, 82, маючи дані в табличці $\ln 79$ і $\ln 83$. Провірити, що $\ln 81 = 4\ln 3$. Яка недокладність у порівнянні з табличкою?

ШОСТИЙ РОЗДІЛ

Теорія рівнянь; перша частина.

§ 21. Квадратова функція.

126. **Міра росту квадратової функції.** а) Найпростіша квадратова функція має такий вигляд:

$$y=x^2; \tag{1}$$

її образом є відома нам уже квадратова парабола (див. рис. 56). Нашим найближчим завданням буде, *шукати міри росту* тої функції, отже й міри росту параболи.

Нарисуймо частину луку параболи (рис. 112) і виберім на ній

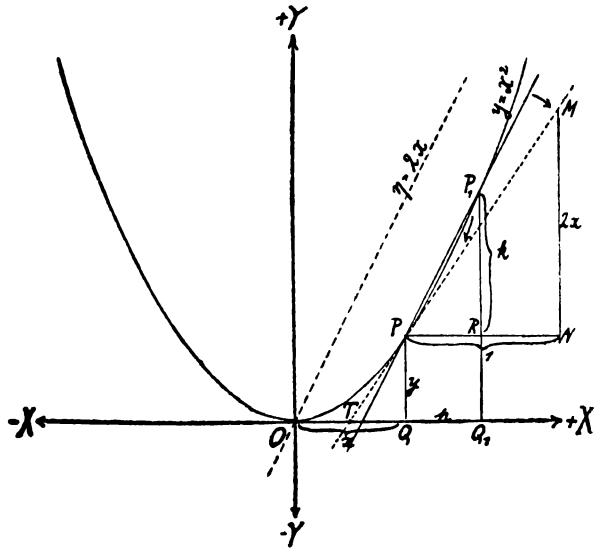


Рис. 112.

довільну, постійну точку $P(x, y)$, а в її сусідстві другу точку, $P_1(x_1, y_1)$. Співрядні першої точки сповнюють рівняння (1), співрядні другої — таке саме рівняння:

$$y_1=x_1^2; \tag{1a}$$

воно не значить ніщо инше, як тільки те, що точка P_1 лежить також на параболі.

Віднімім обидва ці рівняння відповідними боками:

$$y_1 - y = x_1^2 - x^2;$$

це значить, що ріст квадратової функції рівний ріжниці квадратів відповідних вартостей аргументу. Ясно, що чим більший відступ між точками Q і Q_1 на осі X, тим більша буде й ріжниця $y_1 - y_1$.

Бо коли ріжницю вартостей аргументу назвемо h, т. зн. $x_1 - x = h$, а ріжницю вартостей функції k, тоб-то $y_1 - y = k$, матимемо:

$$k = (x+h)^2 - x^2 = 2hx + h^2;$$

як би ж ми відступ на осі X збільшили вдвоє, отже взяли $x_1 - x = 2h$, т. зн. $x_1 = x + 2h$, мали би новий приріст функції:

$$k_1 = (x+2h)^2 - x^2 = 4hx + 4h^2 = 2(2hx + h^2) + 2h^2 = 2k + 2h^2,$$

а ця ріжниця більша від попередньої більше ніж удвоє.

Обчислюймо тепер *пропорційний ріст функції*, т. з. дивімся, у якій мірі вартости функції зростуть у порівнянні росту аргументу:

$$\frac{k}{h} = \frac{y_1 - y}{x_2 - x};$$

а що: $y_1 - y = x_1^2 - x^2 = (x_1 + x)(x_1 - x)$, то:

$$\frac{k}{h} = x_1 + x, \tag{2}$$

отже:

$$\frac{k}{h} = 2x + h. \tag{2a}$$

Це значить, що *пропорційний приріст функції рівний сумі обох вартостей аргументу: початкової й кінцевої*, або теж: *сумі подвійної початкової вартости аргументу та приросту аргументу.*

Лівий бік рівнянь (2) і (2a) звемо *часткою* (або *відношенням*) *ріжниць* (*приростів*); праві боки кажуть, що вона залежна не тільки від початкової вартости аргументу, але й від його приросту, тоб-то не тільки від положення першої точки, але й від того, як далеко від неї друга точка.

Нехай буде нпр. $x = 1$; коли приростові h надаватимемо по черезі вартости:

$$h = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4} \ldots\ldots,\ 0{,}1,\ \ldots\ldots 0{,}01, \ldots$$

отримаємо такі частки ріжниць:

$$\frac{k}{h} = 3,\ 2^1/_2,\ 2^1/_2, \ldots\ldots\ 2{,}1 \ldots\ldots,\ 2{,}01,\ \ldots;$$

тут бачимо, що чим менший приріст аргументу, тим менший буде й приріст функції.

Для $x=2$ матимемо серед тих самих умов:

$$\frac{k}{h}=5,\ 4^1/_2,\ 4^1/_4,\ldots\ldots,\ 4{,}1\ldots\ldots,\ 4{,}01\ldots\ldots,$$

отже коли за початкову вартість аргументу візьмемо число більше, то — при тих самих приростах — і частки ріжниць будуть більші.

б) Розберім ці самі обставини геометрично. Частка ріжниць $\frac{k}{h}$ — це співчинник напрямку простої PP_1 (рис. 112), а ця проста — це *січна* параболи, яка її перетинає в точках P_1 і P. Чим ближче ці точки одна від одної, тим більше січна наближається до положення *доторкальної*. Коли точка P постійна, а P_1 сунеться по параболі до P, січна PP_1 буде обертатися кругом точки P в напрямку стрілки, аж поки накінець упаде на доторкальну PM. Таким робом у межевому положенні маємо: $\lim x_1 \to x$, $\lim h \to 0$, а вартість співчинника напрямку доторкальної буде $2x$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h);$$

тут доданок h випаде, отже залишиться:

$$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=2x. \tag{3}$$

Це можна буде краще порозуміти на рис. 113. Виберім на довільній кривій постійну точки P і по обох її боках дві рухомі P_1 і P_2; їм відповідатимуть січні

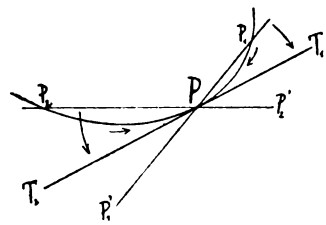


Рис. 113.

P_1P_2 і P_1P_2. Коли P_1 і P_2 будуть посуватися по кривій до постійної точки P, отже в напрямках стрілок, то й обидві січні обертатимуться кругом P так, що кут між ними буде меншати. Остаточно вони впадуть одна на одну. Тим спільним межевим положенням обох січних буде *доторкальна* T_1T_2. Як би точки P_1 і P_2 посувалися ще далі й перейшли поза P на протилежні частини кривої, то й обидві січні заміняли би свої ролі й оберталися би кругом P так, що кут між ними більшав би.

Конструкцію доторкальної параболи в точці $P(x, y)$ можна виконати так: її співчинник нахилу, $2x$, напишемо у формі $\frac{2x}{1}$ і ця частка

уявляє собою співчинник нахилу протипрямки такого трикутника, в якому сторчова прямка є $2x$, а позема — рівна одиниці довжини. Значить, бажана доторкальна буде протипрямкою «напрямкового трикутника» $\triangle MNP$ (рис. 112), який побудуємо в точці P.

Багато вигідніше рисувати доторкальну так, що визначимо точку, в якій вона перетинає вісь X. Із $\triangle PQT \sim \triangle MNP$ читаємо: $\frac{TQ}{PQ} = \frac{PN}{MN}$ або: $\frac{TQ}{y} = \frac{1}{2x}$, т. зн. $TQ = \frac{y}{2x}$, а що $y = x^2$, то: $TQ = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} = \frac{OQ}{2}$, отже *точка перетину доторкальної з віссю X половинить відрізну точки дотику.*

Доторкальні мають особливе значіння при рисуванні кривих. Доторкальна в якійсь точці кривої характеризує її вигляд у найближчому сусідстві тої точки; отже коли визначимо тільки невелику кількість точок кривої, а потім нарисуємо в кожній із них доторкальну, то це дасть нам змогу виповнити прогалини далеко вигідніше й певніше, ніж як би ми мали дані одні точки. — На основі цього параболу рисуємо так: визначуємо рахунком лише невелику кількість точок параболи, а потім половинимо відрізні тих точок і ведемо відповідні доторкальні; отсей спосіб багато придатніший, як вишукування багатьох точок рахунком на основі функційної таблички.

З огляду на це, що з ростом аргументу росте нахил доторкальної параболи супроти осі X, а його можемо вважати мірою стрімкости параболи, маємо право сказати так:

З ростом аргументу росте стрімкість параболи.

в) Вернімся тепер до аритметичного досліду функції (1). Коли в рівнянні (2) переходимо до межевих вартостей $\lim h \to 0$, т. зн. $\lim x \to x$, отримуємо рівняння (3):

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = 2x. \tag{3}$$

Тут ліворуч маємо відношення двох величин, із яких кожна меншає безконечно, але не в однаковій мірі; відношення цих двох величин є $2x$. Таким чином ми з функції (1) отримуємо нову функцію, яку назвемо *похідною* даної функції*), а значимо її так:

$$y' = 2x \tag{4}$$

(чит. y перше або y прім).

Звязуючи це аритметичне пояснення з попереднім геометричним, скажемо, що:

(1) *похідна функції подає міру росту даної функції*, і

*) Треба догадатися: «похідною *функцією* даної функції», бо вона неначе «походить» від неї.

(2) *похідна функції подає співчинник нахилу доторкальної тої кривої, яку уявляє собою дане рівняння.*

Нарисуймо образ похідної (4); буде це проста, що переходить через осередок перехрестя O і до осі X нахилена так, що на кожну одиницю здовж осі X піднімається на 2 одиниці вгору. Образ похідної будемо називати *лінією росту даної кривої*; вона на рис. 112 зазначена проривчасто. Відрізні точок тієї простої значимо, як і при даній кривій, буквою x; для рядних уживатимемо замість y грецької букви η*), отже рівняння лінії росту буде в нашому випадкові:

$$\eta = 2x. \tag{4a}$$

Вона перетинає вісь X у точці O; праворуч від неї вона йде над віссю (має рядні додатні), ліворуч — під віссю (її рядні від'ємні). Це стоїть у згоді з тим, що парабола в правій половині піднімається, а в лівій опадає (розуміється, коли здовж осі X ідемо від лівої до правої руки). Точка O — це *вершок параболи*; у ній крива переходить від опадання до росту; це її *найнижча точка*.

г) У звязку з тим дослідимо ще міру росту лінійної функції:

$$y = ax + b, \tag{5}$$

отже міру підношення простої. Виберім на простій дві точці: $P(x, y)$ і $P_1(x_1, y_1)$; для цеї другої точки буде також $y_1 = ax_1 + b$, отже:

$$k = y_1 - y = a(x_1 - x),$$

т. зн.:

$$\frac{k}{h} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a.$$

Ріст отсеї функції незалежний ні від початкової вартости аргументу, ні від його приросту, отже при переході до межевих вартостей ця частка не зміниться і ми маємо для похідної:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = a. \tag{6}$$

Отже *похідна лінійної функції — постійна*, а це значить, що *лінійна функція росте рівномірно*, або що *проста піднімається рівномірно*.

Лінією росту простої буде теж проста, рівнобіжна до осі X, у віддалі a:

$$\eta = a. \tag{6a}$$

Коли a — додатне, вона вся над віссю X, отже тоді проста піднімається, а коли a від'ємне, вона вся нижче тої осі, а тоді проста опадає.

*) Ета — довге «е».

Для $a=0$ рівняння простої є $y=b$, отже вона рівнобіжна до осі X, а її лінія росту буде $y=0$, тоб-то сама ж таки вісь X:

$$\eta=0.$$

Проста $y=b$ ані не росте, ані не опадає.

Представте ці відносити рисунком!

127. **Узагальнення квадратової функції.** а) Возьмім замість простої функції (1) трохи складнішу:

$$y=2x^2; \tag{7}$$

її табличка й образ (рис. 114) будуть:

x	y
0	0
1	2
2	8
3	18
..	..
—1	2
—2	8
—3	18
..	..

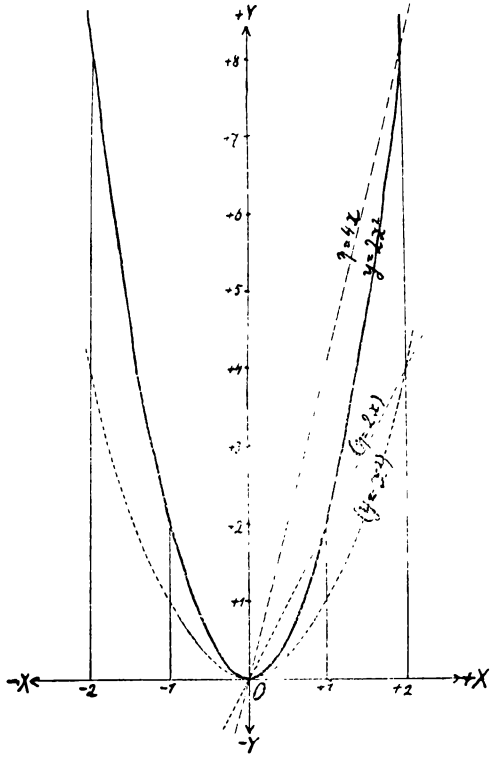


Рис. 114.

З таблички бачимо, що рядні точок кривої (7) удвоє більші, як рядні точок параболи (1), і це облегчує її конструкцію; нова парабола буде вдвоє стрімкіша від *нормальної параболи* $y=x^2$.

Для наших аритметичних дослідів важна не так форма кривої сама по собі, як її положення відносно осей та точок на площі, а також відношення ріжних довжин; через те замість подвоювати рядні нормальної параболи, можемо змінити поділку на осі Y і приймати там одиниці на половину менші, а параболу залишити без зміни. Тоді на осі Y замість a читатимемо $2a$.

Похідна тої нової функції дасть нам погляд на стрімкість росту кривої. Її обчислимо зовсім так, як попереду: на кривій вибираємо дві точці $P(x, y)$ і $P_1(x_1, y_,)$ і творимо два рівняння:

$$y=2x^2, \qquad y_1=2x_1^2.$$

Із них отримуємо приріст функції, що відповідає ростові аргументу з x до x_1:

$$k=y_1-y=2(x_1^2-x^2)=2(x_1-x)(x_1+x).$$

а звідсіля пропорційний ріст функції:

$$\frac{k}{h}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=2(x+x).$$

При переході до межевих вартостей $\lim x_1 \to x$ матимемо похідну:

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=2\,.\,2x=4x.$$

Це значить, що *похідна функції* $y=2x^2$ — *це двократь похідної функції* $y=x^2$, або говорячи геометрично: *лінія росту цієї нової параболи вдвоє стрімкіша, як при нормальній параболі.* Її рівняння є:

$$\eta=4x.$$

б) Коли далі заміст функції (7) возьмемо таку:

$$y=\frac{1}{2}x^2, \tag{9}$$

отримаємо табличку й образ (рис. 115). Буде це парабола більше

x	y
0	0
1	$^1/_2$
2	2
3	$^9/_2$
...	...
-1	$^1/_2$
—2	2
—3	$^9/_2$
...	...

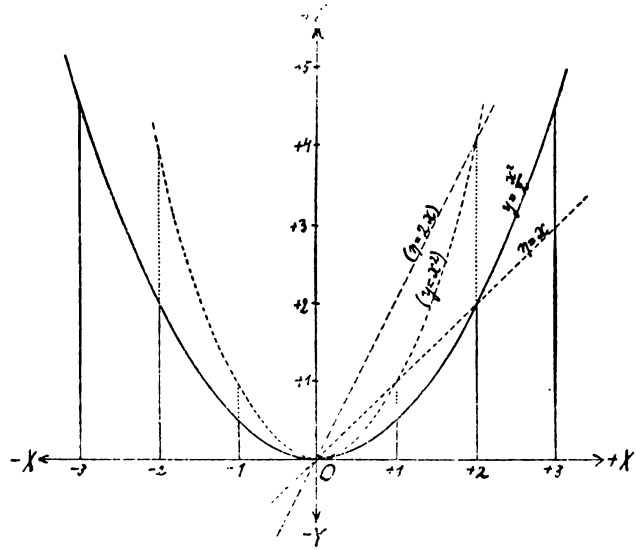


Рис. 115.

розлога від нормальної; її отримаємо, коли кожну рядну нормальної параболи переполовинимо, або — обмежуючись тільки до артиметичних потреб — поділку на осі поширимо вдвоє.

Похідну тої функції обчислимо тим самим шляхом: із

$$y=\frac{1}{2}x^2 \quad \text{і} \quad y_1=\frac{1}{2}x_1^2$$

отримаємо:

$$k=y_1-y=\frac{1}{2}(x_1^2-x^2)=\frac{1}{2}(x+x)(x-x),$$

$$\frac{k}{h}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{x_1+x}{2},$$

отже:

$$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=\lim_{x_1\to x}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\lim_{x_1\to x}\frac{x+x_1}{2}=x.$$

т. зн.:

$$y'=x, \tag{10}$$

отже похідна тої функції — це половина похідної функції (1), а тому й доторкальна тої параболи є вдвоє менше стрімка, як при нормальній параболі. Лінія росту матиме рівняння:

$$\eta=x. \tag{10a}$$

в) Взагалі, коли правий бік рівняння матиме співчинник a:

$$y=ax^2, \tag{11}$$

то відповідна парабола буде більше або менше стрімка від нормальної, а саме: коли $a>1$, вона стрімкіша, а при $a<1$ — більше розлога. Її рисуємо так, що рядні нормальної параболи змінюємо у відношенні $a:1$, або поділку на осі Y змінюємо у відворотному відношенні.

Похідна загальної функції (11) буде, як легко знайти:

$$y'=2ax, \tag{12}$$

отже це a-крать похідної функції (1). Напишемо це так:

$$(ax^2)'=a\,.\,(x^2)'; \tag{13}$$

акцент над скобками значить, що нам треба брати похідну із змісту скобок.

Лінія росту кривої (11) матиме рівняння:

$$\eta=2ax; \tag{12a}$$

вона теж a разів стрімкіша (а коли $a<1$, то вона менше стрімка), як лінія росту нормальної параболи.

г) Коли ж остаточно співчинник при x^2 буде від'ємний, напр.:

$$y=-x^2, \tag{14}$$

тоді всі вартости функції будуть ріжнитися тільки знаком від відповідних вартостей функції (1); всі вони будуть від'ємні. У геометричному розумінні буде це та сама нормальна парабола, тільки перекинена через вісь X униз, або — як кажуть, — «відбита на осі X» (рис. 116).

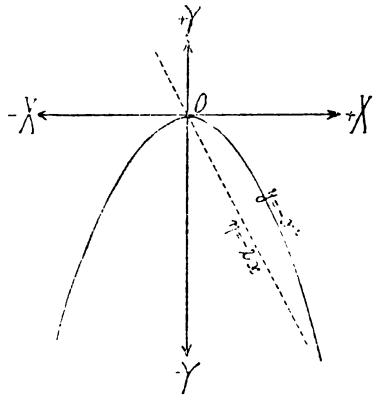


Рис. 116.

Похідна тої функції буде:

$$y'=-2x, \tag{15}$$

отже до функції (14) можна застосувати правило (13), вважаючи, що її співчинник є $a=-1$. Лінія росту параболи, відбитої на осі X, матиме рівняння:

$$\eta=-2x;$$

це проста, що переходить через осередок перехрестя й до осі X нахилена під таким самим кутом, як і проста $\eta=+2x$, тільки з протилежного боку. Вона для від'ємних x є над віссю X, отже парабола в правій частині опадає. Врешті для $x=0$ вона переходить через вісь X, отже тут парабола міняє ріст на опадання.

Так отже наші дотеперішні висліди можна висловити ось як:

Знак похідної якоїсь функції показує нам, коли ця функція росте, а коли опадає, а саме:

$$\text{похідна}\begin{cases}\text{додатня}\\ \text{нуль}\\ \text{від'ємна}\end{cases}\Big\}\text{— функція}\begin{cases}\text{росте}\\ \text{переходить із росту в опадання або навпаки,}\\ \text{меншає.}\end{cases}$$

127. **Рівномірний та рівномірно-прискорений рух.** а) В уст. 73. ми займалися рівномірним рухом. Його ми пояснили так, що тіло в рівних часах перебігає рівні шляхи — отже дорога росте пропорційно до часу .

Нехай у двох ріжних моментах часу, які зазначимо t_1 і t_2, тіло перебігає поперед значки, на яких написано s_1 і s_2; коли дорога росте пропорційно до часу, матимемо такі рівняння:

$$s_1=ct_1 \quad \text{і} \quad s_2=ct_2, \tag{16}$$

де c — чинник пропорційности. Звідсіля виходить:

$$s_2-s_1=c(t_2-t_1)$$

(приймаємо, що час t_2 пізніший від t_1, отже значок s_2 лежить дальше як s_1, тому обидві ці ріжниці додатні), і далі:

$$\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=c.$$

Тут частка приростів (шляху й часу) незалежна ні від початкового, ні від кінцевого часу, тому й її межева вартість незмінна:

$$\lim_{t_2\to t_1}\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=c. \tag{17}$$

Постійна вартість тої частки зветься *швидкістю рівномірного руху*. Вона однакова в кожному моменті часу.

б) Досліджуймо тепер такий рух, у якому дорога *росте пропорційно до квадратів часу*:

$$s=kt^2; \tag{18}$$

тут k — знову чинник пропорційности. Складім табличку для тої функції (але тільки для додатніх t, бо ж ця змінна — це час):

t	s
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
...	...

Із неї бачимо, що k — це шлях, який тіло перебігає *в першій* секунді; шлях *у другій* секунді буде вже не k, тільки $4k-k=3k$, бо на протязі довх секунд тіло перебіжить $4k$. Подібно шлях *у третій* секунді буде $9k-4k=5k$ *у четвертій* $16k-9k=7k$ і т. д. Одним словом, шляхи *в поодиноких секундах* будуть стояти в такому відношенні, як ряд непаристих чисел:

$$1:3:5:7:9....$$

Звідсіля виходить, що рух, який ми тут досліджуємо, не є рівномірний, бо тіло в однакових відступах часу не перебігає однакових шляхів. Зате ж ці шляхи ростуть рівномірно, тому маємо право цей рух назвати *рівномірно-прискореним*.

Рівномірність у рості швидкости порозуміємо краще на менших відступах часу. Напр. для $t=\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, буде: $s=\frac{k}{4}, 4\cdot\frac{k}{4}, 9\cdot\frac{k}{4}, 16\cdot\frac{k}{4}, 25\cdot\frac{k}{4}, \ldots$ отже шляхи *в поодиноких півсекундах* будуть: $1\cdot\frac{k}{4}, 3\cdot\frac{k}{4}, 5\cdot\frac{k}{4}, 7\cdot\frac{k}{4}, \ldots$ Звідсіля бачимо, що шлях першої секунди розкладається на обидві півсекунди так, що на першу припадає тільки $\frac{k}{4}$, а на другу аж $3\cdot\frac{k}{4}$; поділ на чвертьсекунди показав би, що найменший шлях буде в першій, найбільший — в останній четвертині секунди. Так отже при рівномірно-прискореному рухові не можемо говорити про швидкість як про частку шляху й часу, як це було у випадку рівномірного руху, бо тут на протязі кожного, хочби й найменшого відступу часу, швидкість змінюється безнастанно.

Щоби дійти до розуміння швидкости, поступимо так:

Назвім два моменти часу t_1 і t_2, а відповідні шляхи s_1 і s_2; тоді матимемо:

$$s_1=kt_1^2 \text{ і } s_2=kt_2^2,$$

отже:

$$s_2-s_1=k(t_2^2-t_1^2)=k(t_2+t_1)(t_2-t_1),$$

і далі:

$$\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=k(t_2+t_1).$$

Коли тут перейдемо до межевих вартостей, отже момент t_1 наближимо до t_2, отримаємо:

$$\lim_{t_2\to t_1}\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=2kt_1.$$

Межеву вартість тієї частки ріжниць звемо *швидкістю рівномірно-прискореного руху*; її значимо буквою v (від латин. *velocitas* = швидкість):

$$v=2kt, \tag{19}$$

отже:

Скорість — це похідна тої функції, що характеризує рух:

$$v=s'.$$

129. Дальше узагальнення квадратової функції. Основи рахунку похідних. а) Нехай тепер буде дана функція:

$$y=x^2-1; \tag{21}$$

її табличка покаже нам, що рядні відповідної кривої будуть усі на 1 коротші від рядних нормальної параболи, отже це буде нормальна

парабола, пересунена на одиницю вниз рівнобіжно до осі Y (рис. 117). Замість одначе пересувати цілу параболу вниз, можемо вісь X пересунути вгору на таку саму віддаль. Як би було дане рівняння

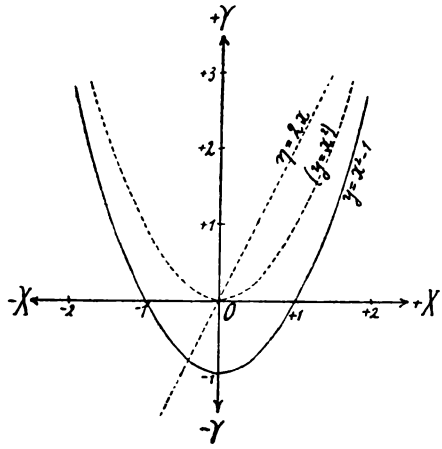


Рис. 117.

$y=x^2+1$, рядні тої кривої були би на 1 довші, отже ми мусіли би або криву підсувати вгору, або вісь X зсунути вниз. Взагалі параболу, що дана рівнянням:

$$y=x^2+c, \tag{22}$$

отримаємо, коли нормальну параболу пересунемо вздовж її осі на c одиниць, а саме: вгору, коли $c>0$, і вниз, коли $c<0$.

Таке положення, де вершок параболи *припадає на осередок* перехрестя O, отже де $c=0$, будемо називати *нормальним положенням*.

Возьмім іще загальнішу функцію:

$$y=ax^2+c; \tag{22a}$$

вона приймає вартости, на c більші від відповідних вартостей функції $y=ax^2$; говорячи геометрично, матимемо тут до діла з параболою $y=ax^2$ (отже ширшою або вужчою від нормальної), яка крім того ще пересунена здовж осі Y.

Треба завважити, що як би ми не хотіли змінювати форму параболи, тільки змінили поділку на осі Y у відворотному відношенні, то при пересуванні мусіли би послугуватися вже тою новою поділкою.

б) Коли параболу пересуваємо здовж осі Y, то через це не змі ниться її форма, отже і її стрімкість; а в такому разі похідна функції теж не може змінитися.

Докажемо загально, що *коли до функції додати якусь постійну величину, то через те її похідна не зміниться.* Нехай буде дана функція:

$$y=f(x);$$

її похідну творимо так, що беремо дві пари вартостей обох змінних і обчислюємо перше ріжницю вартостей функції, а потім частку ріжниць:

$$y_1-y=f(x_1)-f(x),$$

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}.$$

Похідна буде межевою вартістю тої частки, коли пару вартостей (x_1, y_1) дуже наблизимо до (x, y), т. зн. безконечно зменшимо прирости x_1-x і y_1-y:

$$y'=\lim_{x_1\to x}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}.$$

Коли ж змість тої функції возьмемо иншу:

$$Y=f(x)+c,$$

яка від попередньої більша на c, матимемо для сусідної пари вартостей: $Y_1=f(x_1)+c$ і далі:

$$Y_1-Y=[f(x_1)+c)]-[f(x)+c]=f(x_1)-f(x),$$

отже:

$$\frac{Y_1-Y}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}.$$

т. зн. тут частка ріжниць така сама, як була при попередній функції, отже ті обидві похідні функції однакові:

$$Y'=y'.$$

В нашому прикладі,

$$y=ax^2 \quad \text{і} \quad Y=ax^2+c,$$

буде:

$$y_1-y=a(x_1^2-x^2) \quad \text{і} \quad Y_1-Y=(ax_1^2+c)-(ax^2+c)=a(x_1^2-x^2),$$

отже:

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{Y_1-Y}{x_1-x}=a(x_1+x),$$

а тому й похідні функцій будуть однакові:

$$y'=Y'=2ax.$$

Це значить, що *парабола через рівнобіжне пересунення здовж своєї осі не змінить своєї форми.* Лінія росту буде спільна для двох парабол і матиме рівняння:

$$\eta=2ax.$$

в) Рівняння:

$$y=ax^2+c. \tag{22a}$$

має два *параметри*: a і c; воно уявляє собою *громаду парабол*, яку отримаємо, коли будемо змінювати один або другий параметр, або й обидва нараз (подібно, як громада простих повстала через зміну параметрів у рівнянні $y=ax+b$; див. уст. 64). Всі ці параболи мають спільну вісь (це їхня вісь симетрії, а нею є вісь Y, бо коли в рівнянню (22а) x замінимо на $-x$, то лівий бік не зміниться).

Залишім перше параметер c постійним, а змінюймо тільки a; це дасть громаду парабол із спільним вершком на осі Y у віддалі c від 0 (рис. 118). Параболи будуть розширюватись угору для додатніх a, а вниз — для від'ємних a. Чим більше a (числово беручи), тим вужча параболя; для $|a|>1$ всі параболи містяться

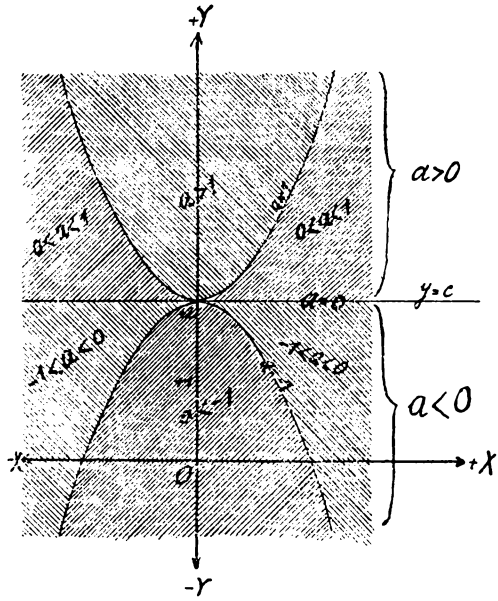


Рис. 118.

в нутрі обох нормальних парабол ($y=x^2$ та $y=-x^2$), а для $|a|<1$ вони є поза нормальними. Межевою вартістю парабол, що розширюються вгору і вниз, є позема проста, у віддалі c від осі; до тої межевої форми змагають обидві ці параболи, коли a наближається до нуля (з додатнього або від'ємного боку). Її рівняння отримаємо, коли в рівнянні громади покладемо $a=0$; воно буде: $y=c$.

При незмінному c громада парабол покриє цілу площу *щільно*, т. зн. через *кожну точку площі* буде переходити одна й *тільки одна парабола* тої громади.

Коли тепер затримаємо a постійним, а будемо змінювати тільки c, отримаємо ту ж саму паралолу в рівних положеннях із вершком на осі Y. І ця громада покриє теж щільно всю площу.

г) Остаточно узагальнимо квадратову функцію ще так, що праворуч додамо лінійний член bx:

$$y=ax^2+bx+c. \tag{23}$$

Найвигідніший спосіб досліду тої функції такий: розбиваємо правий бік рівняння на два доданки:

$$y_1=ax^2 \quad \text{і} \quad y_2=bx+c \text{ так, що } y=y_1+y_2.$$

Щоб отримати образ цієї складнішої функції, нарисуємо образи обох частинних функцій і будемо додавати їхні рядні у відповідних точках (отже для однакових вартостей аргументу x). У нас образом першої функції буде парабола (зміненої форми, тільки в нормальному положенні), образом другої — проста лінія.

Нехай буде нпр.

$$y=x^2+2x-2$$

(рис. 119); тоді матимемо: $y_1=x^2$(норм. параб.), $y_2=2x-2$.

x	y
0	—2
1	1
2	6
...	...
—1	—3
—2	—2
—3	1
—4	6
...	...

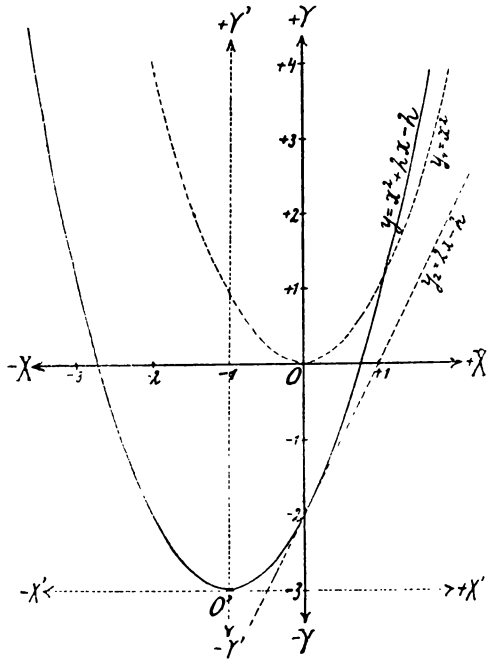


Рис. 119.

Виконаймо тут дію додавання рядних; отримаємо криву, в якій розпізнаємо нашу нормальну параболу, тільки в зовсім иншому, як досі бувало, положенні; вона пересунена на 1 одиницю вліво і на 3 одиниці вниз; у цьому випадкові вісь Y перестає бути віссю симетрії, а стає нею проста рівнобіжна до тої осі, яку назвемо віссю Y'.

Взагалі, коли параболу $y=ax^2$ пересунути на p одиниць убік (т. зн. здовж осі X) і на q одиниць здовж осі Y, то в її рівнянні треба буде всі рядні збільшити (або зменшити) на p, а всі відрізні — на q

(над знаками тих величин не будемо тут застановлятися). Тоді наше рівняння прийме вигляд:

$$y+q=a(x+p)^2,$$

або після редукції:

$$y=ax^2+2apx+(ap^2-q),$$

отже матиме справді вигляд (23) для $b=2ap$, $c=ap^2-q$; тільки співчинник a при x^2 не зміниться.

Отсе стверджує наш здогад, що образ функції $y=x^2+2x-2$ — нормальна парабола, тільки в иншому положенні.

Обчислім похідну функції (23); робимо це звичайним способом:

$$y^2=ax^2+bx+c, \qquad y_1=ax_1^2+bx_1+c,$$

$$y_1-y=(ax_1^2+bx_1+c)-(ax^2+bx+c)=a(x_1^2-x^2)+b(x_1-x),$$

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=a(x_1+x)+b,$$

$$y'=\lim_{x_1\to x}\frac{y_1-y}{x_1-x}=2ax+b,$$

а що наша функція зложена з двох доданків, ax^2 і $bx+c$, похідні яких є $y_1'=2ax$ і $y_2'=b$, то:

$$(ax^2+bx+c)'=(ax^2)'+(bx+c)', \tag{24}$$

отже: *похідна суми двох функцій рівна сумі похідних її доданків.*

Символично значимо це так:

$$(y_1+y_2)'=y_1'+y_2', \tag{24a}$$

де y_1 і y_2 означують *дві ріжні функції* аргументу x.

Отсе правило обов'язує загально, для всіх родів функцій; бо коли:

$$y=f(x)+(\varphi x),$$

то:

$$y_1-y=[f(x_1)+\varphi(x_1)]-[f(x)+\varphi(x)]=[f(x_1)-f(x_1)]+[\varphi(x_1)-\varphi(x)],$$

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}+\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x)}{x_1-x},$$

а при переході до межевих вартостей буде:

$$\lim_{x_1\to x}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}+\lim_{x_1\to x}\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x)}{x_1-x},$$

т. зн.:

$$y'=[f(x)+\varphi(x)]'=f'(x)+\varphi'(x).$$

Отсе правило влекшує нам обчислювання похідних складніших функцій: творимо похідні їхніх доданків, отже простіших функцій, і додаємо їх.

Лінію росту такої функції отримуємо так само: до рядних лінії росту одного з доданків будемо додавати рядні лінії росту другого доданка:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2.$$

У нашому прикладі є: $y_1' = 2x$, $y_2' = 2$, отже $y' = y_1' + y_2' = 2x + 2$. Лінія росту першої кривої — проста $\eta_1 = 2x$, лінія росту другої — проста рівнобіжна до осі X у віддалі 2, отже $\eta_2 = 2$; отже лінію росту сумової функції отримаємо так, що просту η_1 підсунемо на 2 одиниці вгору. — Це вповні згоджується з тим, що парабола в лівій половині, аж до свого вершка (який лежить на 1 одиницю в ліво від осі Y), опадає, а праворуч від вершка піднімається, бо проста $\eta = 2x + 2$ перетинає вісь X у точці $x = -1$, отже простісінько над вершком параболи.

д) Наш дослід квадратового тричлена не був би повний, як би ми не обговорили випадку, в якому як образ функції виступає парабола, відома нам із досліду коріневої функції (уст.105 а, рис. 97); це нор-

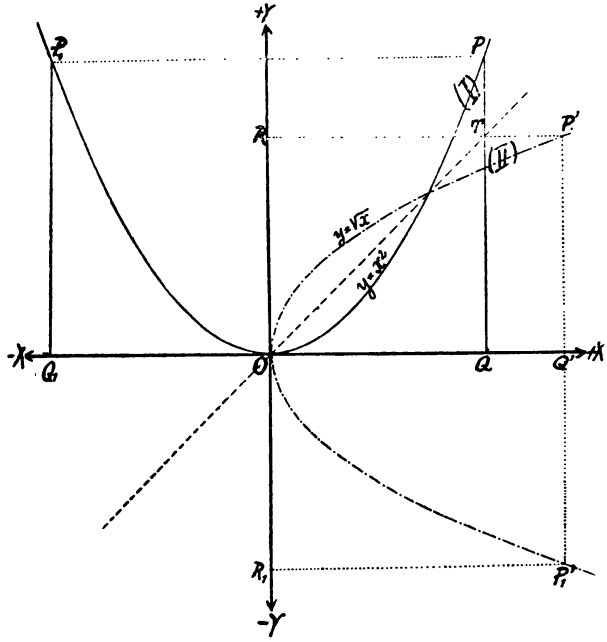


Рис. 97

мальна парабола, в нормальному положенні, відбита на першій медіяні; отже її віссю симетрії є вісь X, а друга вісь є її вершковою

доторкальною. Її рівняння отримаємо, коли в даному рівнянні $y=x^2$ заміняємо обидві зміни, то-б то напишемо: $x=y^2$ або $y=\sqrt{x}$.

Коли до попереднього нашого досліду докинемо ще те одне, щоби в даній функції заміняти змінні, отже в її образі заміняти ролю обох осей співрядних — або криву відбити на першій медяні, то це дасть нам повний дослід функції $y+q=\sqrt{ax+p}$.

З отсього рівняння отримаємо:

$$(y+q)^2=ax+p \qquad \text{або:} \qquad x=\frac{1}{a}(y+q)^2-\frac{p}{a},$$

а після переставлення змінних x і y:

$$y=\frac{1}{a}(x+q)^2-\frac{p}{a}.$$

Отсю функцію вміємо представити рисунком; це нормальна парабола, поширена у відношенні $1:a$, відсунена від осі Y на q одиниць у напрямку протилежному, як показує знак при q, а від осі X на $-\frac{p}{a}$ одиниць у напрямку згідному із знаком тої величини. Накінець відбиваємо цю лінію на першій медіяні.

Питання про ріст або опадання тої кривої вяжеться з обчисленням її похідної; метод цього обчислення викажемо на найпростішому випадкові $y=\sqrt{x}$ або:

$$y^2=x. \tag{25}$$

Коли тут перейдемо до сусідньої пари вартостей: $x_1=x+h$ і $y_1=y+k$, отримаємо: $(y+k)^2=x+h$ або: $y^2+2ky+k^2=x+h$, т. зн.:

$$2ky+k^2=h.$$

Звідсіля: $k(2y+k)=h$, отже: $\frac{k}{h}=\frac{1}{2y+k}$, а при переході до межевих вартостей матимемо:

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=\frac{1}{2y},$$

бо приріст k у знаменику наближиться до нуля й відпаде. Коли тут за y введемо вартість $\sqrt{x}$, напишемо: $y'=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Наша функція може досягти найбільшої або найменшої вартости, коли похідна стане нулем, а це можливе тільки тоді, коли буде

$\lim x \to \infty$. Це справді так, бо коли x росте вище всякої міри, то парабола теж безконечно ширшає. Ріст і опадання кривої залежні від знаку похідної; а що знак величини y' у нашому випадкові є $+$ або $-$, залежно від того, котру з двох вартостей квадратового коріня виберемо, то з ростом аргументу x крива одночасно росте й опадає; росте в горішній, опадає — в долішній половині. Розуміється, що тут x не може бути від'ємне; це стоїть у згоді з тим, що парабола, відбита на першій медіяні, буде ціла міститися в правій півплощі.

Подібно рішаємо це питання для кожної більше складної функції того роду.

130. **Положення вершка параболи. Найбільші й найменші вартости квадратової функції.** а) Щоби могти нарисувати параболу:

$$y=ax^2+bx+c, \tag{23}$$

мусимо знати дві річі:

(1) її *форму* (т. є. ширину в порівнянні до нормальної параболи) і

(2) *положення її вершка* відносно осей.

На перше питання дає нам готову відповідь співчинник a; для вирішення другого не маємо поки що иншого способу, як тільки складати функційну табличку та шукати вершка параболи на рисунку.

Рахунок похідних показує нам богато вигідніший шлях до того.

Ми вже бачили, що парабола піднімається, коли її лінія росту над віссю X, а опадає, коли ця лінія опиниться під віссю. Точці перетину ліній росту з віссю X відповідає перехід параболи від опадання допіднімання або навпаки, т. зн. найнижча або найвища точка параболи, яку ми назвали її *вершком*.

Отже, коли хочемо знайти вершок параболи, мусимо похідну відповідної функції прирівняти до нуля, т. зн. шукати, коли лінія росту переходить через вісь X. Похідна функції (23) є:

$$y'=2ax+b.$$

Коли покладемо $y'=0$, матимемо: $2ax+b=0$, отже $x=-\frac{b}{2a}$.

Отсю особливу вартість аргументу значимо x_0 : $x_0=-\frac{b}{2a}$; коли її вставимо в рівняння кривої, отримаємо бажану вартість функції y.

Точка із співрядними (x_0, y_0) — це *вершок параболи*.

Нпр. на рис. 120 маємо параболу $y=2x^2+7x+3$; для неї є: $y'=4x+7$, отже $y'=0$ дає $x=-{}^7/_4$. Це одна співрядня вершка; друга буде: $y=2.(-{}^7/_4)^2+7.(-{}^7/_4)+3=-3{}^1/_8$. І справді, з нашого рисунку читаємо, що точка $(-1{}^3/_4, -3{}^1/_8)$ є вершком параболи; табличка підтверджує, що нижче цієї точки парабола не виходить.

x	y
0	3
1	12
...	...
—1	—2
—2	—3
—3	0
—4	7
...	...

x	η
0	7
...	...
—1	3
—2	—1
...	...

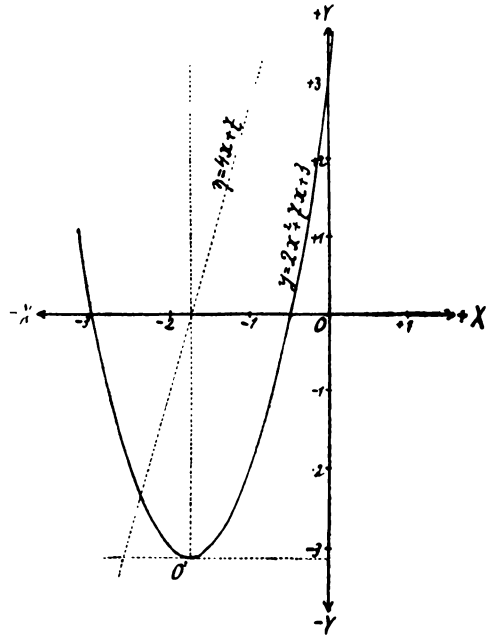


Рис. 120.

Отже вершок параболи (23) має такі дві прикмети:

(1) визначує вісь симетрії параболи;

(2) коли a додатнє, він є найнижчою точкою кривої.

Нетрудно доказати обидві ці прикмети.

(1) Симетрія кривої виявляється в тому, що коли від осі симетрії віддалитися в рівній мірі вліво або вправо, отримаємо дві однакові вартости рядної y. І справді: коли замість x напишемо раз x_0+h, а потім x_0-h, отримаємо:

$$y_1=a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c=(ax_0+bx_0^2+c)+(2ax_0+b)h+ah^2,$$

$$y_2=a_0(x_0-h)^2+b(x_0-h)+c=(ax_0+bx_0^2+c)-(2ax_0+b)h+ah^2.$$

Тут перший вираз у скобці є y_0, а що друга містить у собі $2ax_0+b=0$, то цей член відпадає, тому зістанеться:

$$y_1=y_0+ah^2,$$

$$y_2=y_0+ah^2,$$

отже:

$$y_1=y_2.$$

Це рівняння — доказ симетрії кривої.

(2) З того самого рівняння бачимо теж, що вершок параболи, яка розширюється вгору, лежить найнижче. Бо коли збільшимо x_0 на $\pm h$, то y завсіди зросте на ah^2, а що ця величина додатня, то для всякого h буде $y_1=y_2>y_0$. Це значить, що y_0 — найменша із усіх вартостей функції.

б) Коли співчинник при x^2 від'ємний, тоді парабола простягається обома раменами вниз, а її вершок є вгорі; в такому разі це не найнижча, а найвища точка кривої. Знайдемо його зовсім так само, як передтим. Бо коли замість (23) возьмемо функцію:

$$y=-ax^2+bx+c, \qquad (23)$$

то її похідна буде $y'=-2ax+b$, отже вершок параболи матиме рядну $x_0=+\frac{b}{2a}$. Лінія росту тої параболи, $\eta=-2ax+b$, спершу є над віссю, а аж потім переходить нижче осі, отже парабола перше піднімається (в лівій половині), а по другій стороні вершка опадає, так що у вершку доходить до своєї найвищої точки.

І справді, коли в рівнянні (23) підставимо за x_0 раз x_0+h, другий раз x_0-h, й виконаємо відповідну редукцію, отримаємо:

$$y_1=y_0-ah^2, \qquad y_2=y_0-ah^2,$$

отже $y_1=y_2<y_0$, яке б не було h.

На рис. 121 бачимо параболу: $y=-3x^2+6x+15$; (тут поділка на осі Y втроє вужча, отже парабола має нормальний вигляд). Вершок кривої є в точці $x_0=1, y_0=18$, бо для тої вартости аргументу похідна функції y, т. зн. $y'=-6x+6$, має вартість 0.

в) *Аритметичний бік* того завдання виглядає так: дана квадратова функція (квадратовий тричлен):

$$y=ax^2+bx+c \qquad (23)$$

і нам треба знайти *найбільшу* або *найменшу* її вартість (т. зв. *максимум* або *мінімум* функції); обидві ці вартости, разом узяті, називаються *крайніми вартостями (екстремами) функції*.

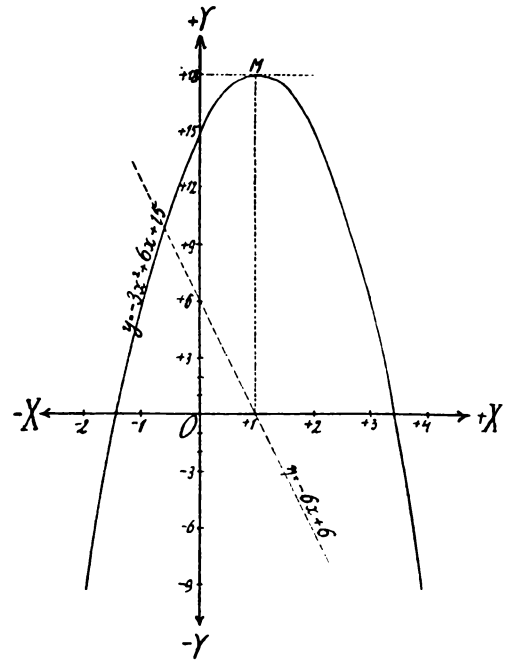


Рис. 121.

Беручи зразок із геометричної розвязки, можемо порозуміти легко, що для тої вартости аргументу, для якої функція приймає крайню вартість, похідна функції мусить бути нулем. Ця вартість буде максимум, коли $a<0$, а мінімум, коли $a>0$ (бо в першому разі образом функції буде парабола, звернена вершком угору, в другому—вершком униз). Це дає таке правило:

Функція $y=ax^2+bx+c$ *досягає крайньої вартости, коли* $y'=0$, *а саме:* $\begin{cases} \textit{мінімум для} & a>0, \\ \textit{максимум для} & a<0. \end{cases}$

Приклади: (1). Знайти крайні вартости функції

$$y=(a-x)^2+(b-x)^2.$$

Коли її зредукуємо, отримаємо:

$$y=2x^2-2(a+b)x+(a^2+b^2),$$

отже:

$$y'=4x-2(a+b).$$

Звідсіля для $y=0$ буде: $x_0=\frac{a+b}{2}$. Співчинник при x^2 додатній, отже для x_0 функція має *найменшу* вартість, а саме:

$$y_0=2x_0^2-2(a+b)x_0+(a^2+b^2)=\frac{(a-b)^2}{2}.$$

Провірте це на числових прикладах!

2). Число s розкласти на суму двох доданків так, щоб їх добуток мав можливо найбільшу вартість».

Нехай один із доданків буде x, тоді другий матиме вартість $s-x$, а бажаний добуток обох цих доданків буде $x(s-x)$, отже нам треба шукати крайньої вартости функції:

$$y=x(s-x)=sx-x^2.$$

а потім мусимо впевнитися, що це буде максимум. Похідна тої функції є :

$$y'=s-2x,$$

а її нулева вартість дасть: $x_0=\frac{s}{2}$, і це буде бажана вартість аргументу. Співчинник при x^2 від'ємний, отже екстрем буде максимум. Але коли перший доданок є $x_0=\frac{s}{2}$, то й другий буде йому рівний: $s-x_0=\frac{s}{2}$, а їхній добуток матиме вартість:

$$y_0=\left(\frac{s}{2}\right)^2.$$

Це значить, що *добуток двох чисел, що мають постійну суму, найбільший тоді, коли ці числа однакові.*

Провірте це на прикладі $s=6$ для $x=0$, 1, 2, 3, 4,.., а далі в окруженні точки $x=3$: $x=2{,}9$; 2,99; 2,999; 2,9999.....

Геометрично можемо висловити цей вислід ось як:

Із усіх прямокутників, що мають однаковий обвід, найбільше поле займає квадрат.

(3). Гармата наставлена під кутом $\alpha=23^0$ до поземи, вистрілює своє стрільно з початковою швидкістю $c=400m/sec$; до якої висоти підніметься стрільно й як далеко воно залетить?.

Коли не будемо вважати на опір повітря, можемо прийняти, що шляхом стрільна буде *парабола*; її рівняння є, як учить физика:

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{g}{2c^2\cos^2 x}x^2,$$

де $\alpha=23^0$, $c=400m/sec$, $g=981cm/sec^2=9{,}81m/sec^2$.

Покладім для скорочення $\operatorname{tg}\alpha=A$, $\frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}=B$; це дасть:

$$y=Ax-Bx^2.$$

Похідна тої функції є $y'=A-2Bx$, отже її нулева вартість дає: $x_0=\frac{A}{2B}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\cdot\frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}}=\frac{c^2\sin 2\alpha}{2g}$. Цю вартість підставляємо в (7) і маємо:

$$y_0=\frac{c^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Отсе найбільша висота, до якої підніметься стрільно; в нашому прикладі буде кругло $y_0=1300$ м.

Щоби знайти даль лету, заважимо, що сторчова в точці x є віссю симетрії параболи, отже даль лету буде $2x_0=\frac{c^2\sin 2\alpha}{g}$; для наших вартостей матимемо: $2x_0=12250\ m$.

131. **Виріжник квадратової функції.** При дискусії квадратової функції, а далі й при розвязці квадратового рівняння, виринає питання про точки перетину параболи з обома осями співрядних.

Коли в рівнянні (23) підставимо $x=0$, отримаємо: $y=c$; це буде точка перетину параболи з віссю Y, отже *кожна парабола перетинає вісь Y в одній і тільки в одній точці.*

Для визначення перетину з віссю X перш за все важно знати положення вершка параболи, бо парабола з раменами вгору перетинає вісь тільки тоді, коли її вершок лежить нижче осі X, отже коли його рядна y від'ємна. Навпаки: парабола, що розширюється вниз, перетнеться з віссю X тоді, коли вершок має додатню рядну, отже коли він лежить над віссю. В обох випадках співчинник a і вершкова рядна y_0 мусять мати протилежні знаки, отже добуток тих двох величин буде від'ємний:

$$ay_0<0. \qquad \text{(a)}$$

В противному разі парабола не перетинає осі X, бо вона або піднімається вгору й має вершок вище осі, а тоді вона лежить у горішній півплощі, або розширюється вниз і має вершок під віссю, отже ціла належить до долішньої півплощі. Це буде тоді, коли:

$$ay_0 > 0. \tag{б}$$

Врешті, коли $y_0=0$, вершок параболи лежить на осі X, отже парабола має з віссю тільки одну точку спільну; тоді вісь буде *вершковою доторкальною параболи*. Для того випадку є, яке б не було a:

$$ay_0=0. \tag{в}$$

Обчислім цей характеристичний добуток ay_0. Коли рівняння (23) обіруч помножимо на $4a$ й за x підставимо x_0, матимемо:

$$4ay_0=4a^2x_0^2+4abx_0+4ac;$$

щоби тут отримати повний квадрат двочлена $2ax_0+b$, треба два перші члени тої суми доповнити доданком b^2, який зараз же мусимо також відняти; це дасть:

$$4ay_0=(2ax_0+b)^2+(4ac-b^2).$$

З огляду на те, що відрізна x відповідає вершкові, отже $x_0=-\frac{b}{2a}$, перший доданок відпаде й нам залишиться:

$$4ay=4ac-b^2;$$

тому, коли $ay_0<0$, є: $4ac-b^2<0$ або: $b^2-4ac>0$, а коли $ay_0>0$, то: $b^2-4ac<0$. Отсю характеристичну величину b^2-4ac називаємо *виріжником квадратової функції* і значимо її буквою Δ:

$$\Delta=b^2-4ac, \tag{24}$$

отже $4ay_0=-\Delta$. Вживаючи цього означення, напишемо співрядні вершка параболи так:

$$x_0=-\frac{b}{2a}, \qquad y_0=-\frac{\Delta}{4a}. \tag{24а}$$

Звідсіля бачимо, що коли $ay_0<0$, то $\Delta>0$, отже тоді парабола перетинає вісь X у двох точках; коли $ay<0$, маємо $\Delta<0$, і парабола осі не перетинає (є вся в одній півплощі), — а в межевому випадкові, коли $ay_0=0$, отже й $\Delta=0$, парабола доторкається осі X тільки в одній точці. Отсей вислід висловимо так:

Парабола

$$y=ax^2+b+c \tag{23}$$

перетинає вісь X у 2 т.
доторкається осі X,
не перетинає осі X,

} *коли виріжник квадр. ф.* $\Delta=b^2-4ac \gtreqless 0$.

Отсі вартости аргументу x, для яких функція y стає нулем, звемо *нулевими точками* або *зерами* функції, отже можемо сказати ще й так:

Квадратова функція:

$$y=ax^2+bx+c$$

має $\left\{\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}\right\}$ *зер, коли її виріжник* $\Delta=b^2-4ac\gtreqless 0$.

Отсей вислід буде грати дуже важну при розвязці квадратового рівняння див. § 23).

132. **Приклади дискусії квадратової функції.** Квадратова функція досі була дана тільки в один спосіб, а саме рівнянням того вигляду, як (23); одначе для її визначення вистарчать нам часто ще інші дані. Знаючи їх, складаємо рівняння функції, а потім рисуємо її образ — параболу.

Спитаймо, скільки треба мати даних для повного визначення функції; це питання рівнозначне з тим, скільки треба даних точок для визначення параболи. Знаємо, що парабола визначена формою (т. зн. співчинником при x^2 у її рівнянні) і положенням вершка на площі, а на це треба двох даних: співрядних вершка; значить, для визначення параболи треба *трох* даних. Отсе вповні згоджується з тим, що рівняння (23) має теж три співчинники a, b, c, отже й тут треба трох даних (напр. рівнянь), щоби їх визначити.

Напр. (1). «Яка це квадратова функція, що для $x=+1, -1, +3$ приймає вартости: $y=2, -8, -4$?»

Для визначення трох співчинників рівняння (23) матимемо такі три рівняння:

x	y	$y=ax^2+bx+c$		
1	2	$2=a\,.\,1+b\,.\,1+c$	або:	$a+b+c=2,$
−1	−8	$-8=a\,.\,1+b\,.\,(-1)+c$	,,	$a-b+c=-8,$
3	−4	$-4=a\,.\,9+b\,.\,3+c$	,,	$9a+3b+c=-4.$

Звідсіля: $a=-2$, $b=5$, $c=-1$, отже бажана функція є: $y=-2x^2+5x-1$.

Провірте цей вислід рахунком і рисунком!

(2). «Про параболу знаємо, що вона перетинає вісь X в точках 2 і 5, а вісь Y у точці 3. Знайти її рівняння».

Із тих трох даних складаємо такі три рівняння:

x	y	$y=ax^2+bx+c$		
2	0	$0=a\,.\,2^2+b\,.\,2+c$	або	$4a+2b+c=0,$
5	0	$0=a\,.\,5^2+b\,.\,5+c$	,,	$25a+5b+c=0,$
0	3	$3=a\,.\,0+b\,.\,0+c$	,,	$c=3.$

Отсей уклад дає розвязку: $a=-{}^3/_{10}$, $b=-{}^9/_{10}$, $c=3$, отже рівняння параболи є: $y=-{}^3/_{10}x^2-{}^9/_{10}x+3$.

Провірте це!

(3). «Квадратова функція для $x=4$ має вартість $y={}^1/_2$, а для $x={}^3/_2$ досягає своєї крайньої вартости, $y_0=13$. Що це за функція?»

І тут маємо три дані: дві пари вартостей: $\begin{cases} x=4 \\ y={}^1/_2 \end{cases}$ і $\begin{cases} x={}^3/_2 \\ y=13 \end{cases}$, а по третє знаємо, що для $x_0={}^3/_2$ похідна функції — нуль: $2ax_0+b=0$.

Це дає такі три рівняння:

x	y	y'	$y=ax^2+bx+c$	$y'=2ax+b$
4	${}^1/_2$		${}^1/_2=a\,.\,4^2+b\,.\,4+c$ або: $16a+4b+c={}^1/_2$,	
${}^3/_2$	13	0	$13=a\,.\,({}^3/_2)^2+b\,.\,{}^3/_2+c$,, ${}^9/_4a+{}^3/_2b+c=13$,	$0=2a\,.\,{}^3/_2+b$

З них маємо: $a=-2$, $b=6$, $c={}^{17}/_2$, отже функція є: $y=-2x^2+6x+{}^{17}/_2$. Крайньою вартістю, про яку тут мова, є максимум.

4) «Парабола переходить через початок співрядних, а крім того перетинає вісь X удруге в точці $x=2$; співчинник нахилу її лінії росту є 4. Знайти її рівняння.»

Коли в (23) підставимо: $x=0$, $y=0$ і $x=2$, $y=0$, отримаємо: $0=a\,.\,0+b.0+c$, отже $c=0$, і $0=a\,.\,4+b\,.\,2+c$, отже $2a+b=0$. Щоби використати третю дану, пишемо рівняння лінії росту параболи: $\eta=2ax+b$, а що її співчинник нахилу має бути 4, то це дає $2a=4$ або $a=2$, а звідсіля $b=4$. Так отже буде бажане рівняння:

$$y=2x^2-4x.$$

ВПРАВИ.

1 Знайти міру росту таких функцій: $y=-\dfrac{x^2}{3}-1$;

$y={}^2/_5x^2-{}^7/_5$; $y=\dfrac{(x+2)(x-3)}{6}$; $y=ax^2+2ax+(a^2-1)$ для $x=1,\ 2,\ 3,\ldots$; визначити зміну міри росту при рівних вартостях аргументу.

2. Визначити вигляд і положення відносно осей таких парабол:
$y=x^2-{}^1/_2$; $y=-{}^1/_2x^2+1$; $y=x^2-2x$; $y^2=2x^2+3$; $y=-{}^1/_2x^2-2x$;
$y=x^2+x+1$; $y=-x^2-x+1$; $y=x^2-x-1$; $y=-x^2+x+1$;
$y=-x^2-x-1$; $y=3x^2-2x+5$; $y=3x^2-2x-5$; $y=-{}^1/_7x^2+4x-{}^1/_3$;
$y=2(x+1)^2-3(x-2)+8$;
$y=(x-2)^2-(2x+1)^2$; $3y=x^2+(x+1)^2+(x+2)^2$;
$7y=(x-1)^2+(2x-1)(3x-1)$.

3. Тіло спадає свобідно на протязі 4^s; знайти: а) середню швидкість на протязі одної, двох і т. д. секунд; б) середню швидкість на протязі першої, другої і т. д. секунди; в) правдиву швидкість у часі $t=1^s$, ${}^1/_2{}^s$, 2^s і т. д.

4. Тіло кинено вгору з початковою швидкістю c; знайти відповіді на питання попередньої вправи для $c=10m/sec$, $20m/sec$, $50m/sec$ і т. д. Коли тіло припинить свій рух і коли вернеться до землі?

5. З З вежі, високої на h^m, кинено тіло поземо з початковою швидкістю c m/sec; знайти його шлях для ріжних вартостей h і c.

6. З вежі, високої на h^m, вистрілено кулю косо в гору під кутом α^0 до поземy з початковою швидкістю c m/sec; як високо тіло підніметься і де воно впаде? За h і c приймати ріжні вартости.

7. Визначити положення вершка та вісь симетрії таких парабол:
$y=3x^2+3x-2$; $y=-2x^2+5x-1$; $y=-x^2+2x+3$;
$y=(x+2)(2x-1)-(x-1)^2$; $y=(x^2+1)+(x+1)^2$; $y=(x^2+1)+(x-1)^2$;
$y=x^2+2(x-1)^2+3(x-2)^2$; $y=(ax+b)(cx-d)+(ax-b)(cx+d)$.

8. Дослідити й представити рисунком такі функції:
$y=\sqrt{2x-1}$; $2y+1=\sqrt{3x-2}$;
$(y+1)(y+2)-(y-1)(y-2)=2\sqrt{(x+1)(x-2)-(x-1)(x+2)}$.

9. Знайти найбільші або найменші вартости таких функцій:
$y={}^1/_2x^2+{}^1/_3x-{}^1/_4$; $y=a(x+1)^2+b(x+1)+c$; $y=a(x-1)^2+b(x-1)-c$;
$y={}^1/_2(x+1)^2-{}^1/_3(x-1)^2$;
$y=(a_1-x)^2+(a_2-x)^2+(a_3-x)^2+\ldots+(a_n-x)^2$.

10. Число s розкласти на суму двох доданків так, щоби сума їхніх квадратів мала найменшу (або найбільшу) вартість: $s=8$, 11, 15, 18, 26,..., 100, ..., 1000 і т. д.

11. У квадрат вписати другий квадрат такий, щоби його поле мало найменшу вартість.

12. У мурі вибито вікно, що має форму прямокутника з півколом на верху. Які мусять бути розміра вікна, коли його обвід має бути $8m$, а ми хочемо, щоби воно впускало як найбільше світла?

13. У трикутник вписати такий прямокутник, який мав би найбільше поле*).

14. Дані: основа b й висота h трикутника; знайти такий трикутник, у якому сума квадратів обох остальних боків матиме найменшу вартість.

15. Доказати, що між усіма трикутниками, які мають однакову основу b й однакову суму двох других боків, рівнобічний трикутник має найбільше поле.

16. Квадратова функція $y=x^2-px+q$ для $x=1$ має вартість $y=6$, а для $x_0=6$ має свою найменшу вартість. Що це за функція?

---

*) Один бік (основа прямокутника) буде лежати на основі трикутника, а два протилежні основі вершки на двох других боках трикутника.

17. Функція $y=x^2-ax+b$ для $x=1$ має вартість $y=7$, а її найменша вартість є $y_0=6$. Що це за функція?

18. Функція $y=ax^2+bx+c$ має зеро в точці $x=2$, а для $x_0=6$ має свою найменшу вартість $y_0=-12$. Що це за функція?

19. Функція $y=ax^2+bx+c$ має зера в точках $x=-1$ і $x=+3$, а її найбільша вартість є $y_0=-4$. Що це за функція?

20. Парабола $y=ax^2+bx+c$ для $x=2$ і $x=4^1/_2$ має однакову рядну, $y=3$, а її вершковою доторкальною є вісь X. Що це за парабола?

21. Найвища точка параболи лежить на 5 одиниць над віссю X; на осі Y парабола відтинає 2 додатніх одиниці, а віддаль обох її зер є 4, при чому зеро по додатній стороні втроє дальше від початку співрядних, як зеро ліворуч. Що це за парабола?

22. Що це за парабола, що переходить через точку $x=1$, $y=1$, а співрядні вершка має $x_0=2$, $y_0=-1$?

§ 22. Квадратові рівняння з одною невідомою.

133. **Геометрична розвязка квадратового рівняння.** а) Рівняння з одною невідомою зветься *квадратовим* або *рівнянням другого ступіня*, коли в ньому, побіч невідомої в першому ступіні, виступає ще квадрат тої самої невідомої. Його найзагальніша форма є:

$$ax^2+bx+c=0; \tag{1}$$

тут a, b, c відомі, постійні величини, які звемо *співчинниками рівняння* (і то так: a — першим, b — другим, c — третім співчинником), а x — невідома величина, яку нам треба обчислити. До розвязки такого рівняння та найповнішого пізнання всіх його прикмет найвигідніше дійти шляхом геометричного досліду. Для більшої вигоди пишемо рівняння в трохи зміненому вигляді:

$$ax^2-bx-c=0, \tag{1a}$$

а це значить то саме, що:

$$ax^2=bx+c. \tag{2}$$

Геометричну розвязку рівняння поведемо так, що обидва його боки вважитимемо двома ріжними функціями того самого аргументу x:

$$\left.\begin{aligned} y&=ax^2, \\ y&=bx+c. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Коли їх представимо рисунково, отримаємо параболу в нормальному положенні й просту лінію, і шукатимемо точок перетину тих двох ліній.

Їх вигляд і положення будуть залежати від співчинників рівняння; отже від величин a, b, c залежатиме й розвязка рівняння.

б) Щоби лекше розібратися в цьому складному завданні, зводимо його до можливо найпростішого вигляду: замість (2) пишемо:

$$x^2=bx+c \tag{2a}$$

й розбиваємо рівняння, як і передше, на дві функції:

$$\begin{aligned} y&=x^2, \\ y&=bx+c; \end{aligned} \tag{3a}$$

через те облегчуємо собі нашу працю настільки, що матимемо до діла з нормальною параболою. Це дозволене тому, що співчинники рівняння простої лінії: b і c, можуть самі по собі бути цілими числами або дробами, отже зовсім не обмежимо нашої загальности, коли приймемо $a=1$.

Так отже доходимо до укладу (3а), образ якого побачимо на рис. 122: нормальна парабола $y=x^2$ перетинається з одною із простих (I) — (IV) а саме: у двох точках: (I) і (II), або доторкається її в одній точці: (IV), або переходить зовсім оподалік від неї: (III).

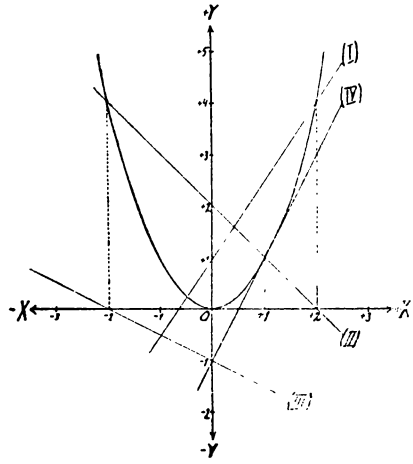


Рис. 122.

Проста (I) $y={}^3/_2x+1$ перетинає параболу в точках $x=2$ і $x=-{}^1/_2$, отже кажемо, що рівняння $x^2-{}^3/_2x-1=0$ має два коріні: 2 і $-{}^1/_2$. Проста (II) $y=-x+2$ перетинає параболу теж у двох точках, $x=-2$ і $x=+1$, отже рівняння $x^2-x-2=0$ має два коріні, -2 і $+1$. Зате проста (III) $y=-{}^1/_2\,x-1$ параболи не перетинає зовсім, отже рівняння $x^2+{}^1/_2x+1=0$ не має корінів.

Врешті проста (IV) $y=2x-1$ є доторкальною параболи в точці $x=+1$, отже вона має тільки про одну точку спільну з парабалою, Це значить, що рівняння $x^2-2x+1=0$ має тільки один корінь 1.

в) Подрібну дискусію квадратового рівняння зачнемо з того випадку, що за просту приймемо рівнобіжну до осі X; її рівняння буде: $y=c$, отже матимемо найпростіший уклад:

$$\left.\begin{aligned} y&=x^2\\ y&=c, \end{aligned}\right\} \qquad (3в)$$

який відповідає рівнянню:

$$x^2=c. \qquad (12в)$$

Таке рівняння звемо *чистим квадратовим**); його коріням будуть відповідати точки перетину параболи з поземою простою (рис. 123), а що і парабола і позема мають сторчову вісь за вісь симетрії, то точки W_1 і W_2 лежатимуть симетрично, т. зн. *коріні рівняння* (2в) *є однакової величини, тільки протилежних знаків.*

Рівняння, в якому виступає також член bx, зветься *повним квадратовим* (або теж *мішаним*).

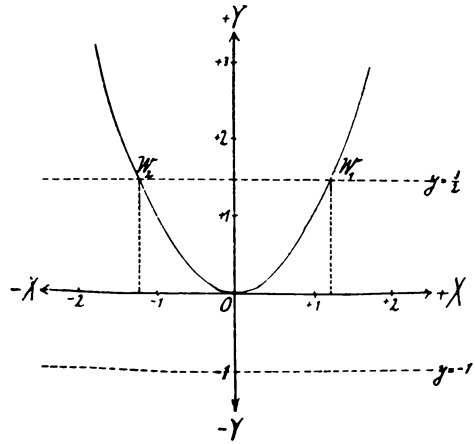


Рис. 123.

134. **Чисте квадратове рівняння.** а) Коли в чистому квадратовому рівнянні (2в) будемо змінювати правий бік c, то це буде відповідати рівнобіжному пересуненню поземої простої $y=c$. Наслідком того будуть змінюватися й точки перетину тої простої з параболею, W_1 і W_2, отже будуть змінюватись і коріні рівняння. Із збільшуванням величини c проста буде сунутися вгору, отже точки W_1 і W_2 будуть віддалюватись від осі Y, т. зн. коріні рівняння числово будуть рости. Навпаки із зменшуванням c проста буде присуватися до осі X, отже вартости корінів будуть меншати. Все ж таки, як довго c додатнє, проста й парабола матимуть дві точки перетину, отже рівняння матиме *два коріні*, які ми зазначимо x_1 і x_2.

Коли c стане нулем, позема проста впаде на вісь X; вона матиме з параболою тільки одну спільну точку: вершок O, отже тоді рівняння матиме тільки один корінь: $x=0$. Щоб одначе зазначити, що цей корінь повстав із злиття двох точок в одну, ми кажемо, що *нуль грає ролю подвійного коріня рівняння* $x^2=0$, і пишемо: $x_1=x_2=0$.

*) Його звуть також *неповним*, бо недостає в ньому лінійного члена bx.

Нехай далі проста опуститься нижче осі X, тоді c стане від'ємне. В такому разі парабола вже не буде перетинатися з простою, отже *при від'ємному c рівняння* (2в) *корінів не має.*

Таким чином наша дискусія доводить до ось якого висліду:

Рівняння $x^2=c$ *має* $\left\{\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}\right\}$ корінів, коли $c \gtreqless 0$.

На рис. 123 є $c=^3/_2$; при докладному виконанні рисунку знайдемо, що $x_1=1{,}22\ldots$, $x_2=-1{,}22\ldots$; ці вартости, підставлені в рівняння $x^2=^3/_2$, дадуть: $(+1{,}22)^2=(-1{,}22)^2=1{,}4884\approx{}^3/_2$. Зате проста $y=-1$ не перетинає параболи, отже рівняння $x^2=-1$ не має корінів.

б) Як би число c було дробом і ми поширили рівняння його знаменником, отримали би трохи загальніший вигляд, нпр.

$$px^2=q, \tag{4}$$

де обидва співчинники — цілі числа. Отся переміна веде до того, що замість нормальної параболи беремо параболу в p разів ширшу, а позема проста відтинатиме на осі Y довжину q. Одначе замість того можемо залишити параболу в нормальному вигляді, але зате зменшити поділку на осі Y у p разів, отже мусітимемо позему в p разів приближити до осі X так, щоби вона знову припала на точку q осі Y при новій поділці. — Та це вийде знову на такий самий уклад (3в): нормальна парабола $y=x^2$ і позема $y=\dfrac{q}{p}$, отже матимемо ту саму розвязку.

Коли дане рівняння (4), то мусимо звернути ще увагу на знаки величин p і q; коли вони однакові, то парабола й проста лежать по тому самому боці осі X, отже перетинаються в двох точках. Коли ж одна з них додатня, друга від'ємна, тоді одна з цих ліній є надвіссю, а друга під віссю — і вони не перетинаються.

Звідсіля виходить таке правило:

Щоби рівняння (4) *мало коріні, співчинники p і q мусять мати однакові знаки.*

Коли $q=0$, позема проста зливається з віссю X, отже є вершковою доторкальною параболи, без огляду на те, по котрому боці осі лежить парабола.

Врешті, як би було $p=0$, мали б ми уклад $y=0$, $y=q$, зложений із двох рівнобіжних простих, які не перетинаються, або — як каже елєментарна геометрія — «перетинаються в безконечно далекій точці»; тому мали би право написати $x=+\infty$. Одначе, приймаючи одно-

часно $p=0$ і $q=0$, ми отримали би подвійне рівняння осі X, $y=0$: кажемо, що кожна вартість змінної x сповнює рівняння $0=0$. — Про це докладніше при досліді рівнянь (§ 23).

в) До тих самих вислідів дійдемо теж *рахунковим шляхом*. Рівняння (2в) — це пояснююче рівняння для квадратового коріня величини c; одначе, щоби зазначити, що цей корінь може мати як додатню, так і від'ємну вартість, пишемо його розвязку так:

$$x=\pm\sqrt{c}. \qquad (2в)$$

(див. уст. 104). Коли ж хочемо виписати кожний корінь із окрема, назначимо це так:

$$x_1=+\sqrt{c}, \qquad x_2=-\sqrt{c}. \qquad (2в)$$

І справді: $(\sqrt{c})^2=(-\sqrt{c})^2=+c$.

Звідсіля виходить далі, що рівняння (2в) може мати розвязку тільки тоді, коли c додатнє, бо з від'ємного числа не вміємо добути квадратового коріня. В межевому випадкові $c=0$ маємо: $x=0$, і вважаємо нуль — як і передше — подвійним корінем рівняння.

г) Приклади: (1) Рис. 123 подає геометричну розвязку рівняння $x^2=\frac{3}{2}$ або $2x^2=3$. Вона є $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}=\pm 1{,}2246\ldots$, отже в згоді з попереднім.

(2) Той самий рисунок показує теж, що рівняння $x^2=-1$ або $x^2+1=0$ не має розвязки. І справді: того роду величина, як $x=\sqrt{-1}$, не має для нас (поки що) ніякого значіння.

3) «Перекутня квадрату має одиницю довжини; обчислити бік квадрату». Назвім бік квадрату x, то по правилу Пітагора матимемо:

$$2x^2=1;$$

це дасть: $x^2={}^1/_2$, отже $x=\pm{}^1/_2\sqrt{2}=\pm 0{,}707\ldots$ Одначе для нас буде придатна тільки додатня розвязка (бо x має означувати довжину), отже: $x=0{,}707\ldots$

(4) «У прямокутнику один бік у півтора разів довший від другого, а перекутня має 18 одиниць довжини. Обчислити обидва його боки й поле».

Коли один бік назвемо x, то другий буде ${}^3/_2\,x$ і ми матимемо знову:

$$x^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2=18^2 \quad \text{або:} \quad \frac{1}{3}x^2=18^2.$$

Звідсіля: $x^2=\frac{18^2.4}{13}$, одначе для вигоди поширюємо дріб на число 13:

$$x^2=\frac{18^2.4.13}{13^2},$$

отже:

$$x = \pm \sqrt{\frac{18^2.4.13}{13^2}} = \frac{18.2}{13}\sqrt{13};$$

а що $\sqrt{13} = 3{,}6056\ldots$, **то:**

$$x = \pm 9{,}985.$$

Для нас має значіння тільки додатній корінь; отже один бік прямокутника є 9,985, а другий $^3/_2 . 9{,}985 = 14{,}977$.

Спроба: квадрат перекутні буде:

$$9{,}985^2 + 14{,}977^2 = 99{,}700 + 224{,}32 = 324{,}02.$$

а $18^2 = 324$. Поле прямокутника вийде:

$$9{,}985 \,.\, 14{,}977 = 149{,}556.$$

135. **Повне квадратове рівняння; геометрична розвязка.** а) Вернімся тепер знову до загальнішого виду квадратового рівняння:

$$x^2 = bx + c, \tag{2b}$$

яке можна розбити на таку пару функцій:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2, \\ y &= bx + c; \end{aligned}\right\} \tag{3б}$$

тут очевидно співчинник b не буде нулем, бо ми мали би знову чисте рівняння. Проста, що її подає друге рівняння нашого укладу, тратить свою симетричність відносно осі Y, отже точки перетину її з параболою — якщо вони взагалі є — будуть неоднаково віддалені від неї, т. зн. коріні будуть ріжної величини.

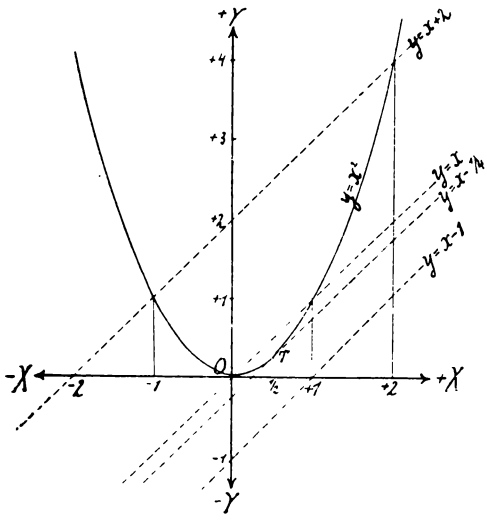


Рис. 124.

Нпр. із рівняння:

$$x^2 = x + 2$$

отримусмо параболу $y = x^2$ і просту $y = x^2$ і просту $y = x + 2$, яка перетинається з параболою в двох точках із рядними $x_1 = +2$, $x_2 = -1$ (рис. 124).

Щоби дослідити ці відносини ближче, возьмім загальніше рівняння:

$$x^2 = x + c$$

і змінюймо параметер c. Парабола $y = x^2$ буде перетинатися з простою $y = x + c$, або ні, відповідно до вартости параметру c, а саме:

(I), з простою $y = x + 2$ в двох точках: $x_1 = +2$, $x_2 = -1$, отже рівняння $x^2 - x - 2 = 0$ має два коріні: 2 і -1;

(II). з простою $y=x$ ($c=0$) теж у двох точках: $x_1=1$, $x_2=0$, отже рівняння $x^2-x=0$ має два корені: 1 і 0.

(III). з простою $y=x-{}^1/_4$ тільки в одній точці $x={}^1/_2$, бо це доторкальна параболи, отже рівняння $x^2-x+{}^1/_4=0$ має один «подвійний» корінь: $x_1=x_2={}^1/_2$; врешті (IV). з простою $y=x-1$ парабола не перетинається, отже рівняння $x^2-x+1=0$ не має коренів.

Спроба: (I) $2-2+2$; $(-1)^2=-1+2=1$;
(II) $1^2-1=0$; $0^2-0=0$;

$$\text{(III)}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=0.$$

Звідсіля бачимо, що в громаді рівнобіжних простих, які містяться в рівнянні $y=bx+c$ з постійним b та змінним (параметром) c, є такі прості, які перетинають параболу в двох точках (I) і (II), і є такі, що з нею не перетинаються (IV); на пограниччі матимемо просту (III), доторкальну параболи, яка має з нею спільну тільки одну точку, подвійну.

б) Возьмім тепер під увагу замість громади рівнобіжних простих жмуток простих із вершком на осі Y (рис. 125); тоді в рівнянні простої $y=bx+c$ треба буде співчинник c залишити постійним, а змінювати тільки параметер b. Проста буде обертатися кругом вершка жмутка S, і в кожному положенні матиме инші точки перетину з параболою.

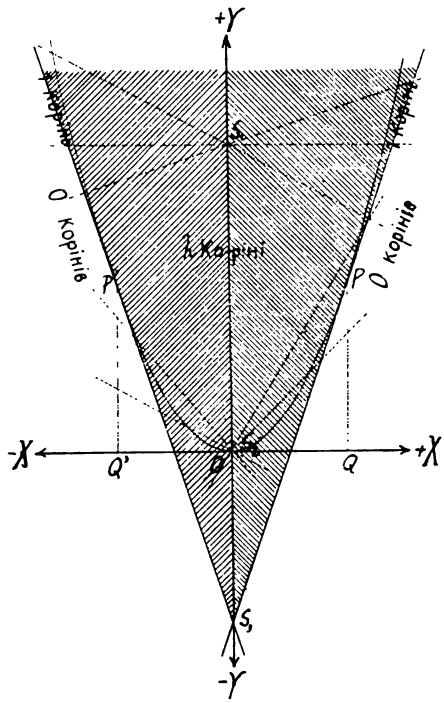


Рис. 125.

Нехай S лежить у нутрі параболи, отже *на додатній половині* осі Y ($c>0$; вершок S_1), тоді *кожна* проста, що належить до жмутка, буде перетинати параболу в двох точках, по обох боках осі Y, отже *рівняння* $x^2-bx-c=0$ *(т. є. з від'ємним третім співчинником) завсіди має два корені, і то протилежних знаків.*

Коли приймемо $c=0$, отже вершок S_2 опиниться *у вершку параболи*, кожна проста буде перетинати параболу теж у

двох точках, але одною з тих точок буде 0; це значить, що *рівняння* $x^2=bx$ *має теж завсіди два корінї; один із них є нулем, а другий має такий самий знак, як співчинник* b.

Врешті, нехай вершок жмутка буде поза параболою, S_3, отже на долішній половині осі Y ($c<0$); тоді для вигоди напишемо рівняння жмутка так: $y=bx-c$, і в цьому випадкові матимемо три роди простих:

(а) одні такі, що будуть перетинати параболу в двох точках — по одному боці осі Y,

(б) другі, які зовсім не будуть її перетинати,

(в) на пограниччі тих двох родів — дві доторкальні параболи, які матимуть тільки по одній спільній точці з параболою.

Прості, що мають співчинники напрямку більші*) як у доторкальних, належать до кляси (а), прості з меншими співчинниками, належать до кляси (б), отже вони не перетинають параболи. Щоби знайти цей межевий випадок, зважмо, що доторкальна параболи половинить відрізну точки дотику, отже $OT=TQ=\frac{c}{x|_2}$.**) Із $\triangle PQT=\triangle OTS_3$ виходить (див. стр. 323): $PQ=OS_3$, або $y=c$; а що співчинник нахилу b—це відношення прямок у $\triangle PQT$, т. зн. $b=\frac{PQ}{QT}=\frac{c}{x|_2}$, то $x=\frac{2c}{b}$, отже *співрядні точки дотику* P є: $x=\frac{2c}{b}$ і $y=c$. Щоби зазначити, що точка P спільна простій та параболі, підставлюємо ці вартости в рівняння $y=x^2$, отже матимемо: $c=\left(\frac{2c}{b}\right)^2$ або:

$$b^2=4c. \tag{5}$$

Звідсіля виходить далі: $b=\pm\sqrt{4c}$, отже є дві вартости співчинника b, які сповнюють цю вимогу, а це значить, що існують дві доторкальні параболи, поведені з точки S_3.

Рівняння (5) *подає умову, яка мусить бути сповнена, щоби проста*:

$$y=bx-c \tag{6}$$

була доторкальною параболи $y=x^2$. В такому разі рівняння:

$$x^2-bx+c=0 \tag{7}$$

має один подвійний корінь.

---

*) Беремо під увагу їхні *числові* вартости.

**) На рис. 125 помилково не зазначено точку T там, де вісь X перетинається з простою PS_3.

Із (5) виходить: $b^2-4c=0$; тут ріжниця ліворуч — це *виріжник функції* $y=x^2-bx+c$ (співчинник a має вартість $+1$); його будемо називати також *виріжником квадратового рівняння* (7).

Отже: *квадратове рівняння* (7) *має один подвійний корінь, коли його виріжник*:

$$\Delta=b^2-4c \tag{8}$$

є нулем.

Нехай тепер співчинник b зросте (що до числової вартости); тоді буде $b^2>4c$, отже виріжник стане додатній; у такому разі проста (6) підніметься вгору, отже прихилиться до осі Y, а тим самим перейде до кляси (а) й перетинатиме параболу в двох точках (по тому самому боці). Коли ж b зменшиться (числово), матимемо $b^2<4c$, отже Δ буде від'ємне; тоді проста відхилиться нижче до позему й перейде до кляси (б), яка не дає точок перетину з параболою. Арифметично висловлюємо це так:

Рівняння (7) *має два корені, коли його виріжник додатній; не має корінів, коли виріжник від'ємний.*

Оті досліди що до виріжника, які відносяться до жмутків із вершком S поза параболою, можна віднести до всіх можливих випадків. Бо коли $c=0$ (вершок S_2 в точці O), тоді $\Delta=b^2$, отже це величина додатня, а в цьому разі рівняння має два коріні; а коли вершок є в нутрі параболи (S_1), тоді при c треба змінити знак, отже буде $\Delta=b^2+4c>0$ (для всякого b й додатнього c), і рівняння знову має два коріні.

Дотеперішні висліди зберемо в такій табличці:

$x^2-bx+c=0$; $\Delta=b^2-4c$.				
$c<0$	$\Delta>0$		2 коріні ріжних знаків	
$c=0$	$\Delta=b^2>0$		,, ,, ,,	$x_1=0$ при x протилежний знак, як при b.
$c>0$	$\Delta>0$	$b^2>4c$	2 коріні однакових знаків	знак корінів протилежний до знаку при b.
	$\Delta=0$	$b^2=4c$	1 корінь подвійний	
	$\Delta<0$	$b^2<4c$	(дійсних) корінів нема	

Тут бачимо, яку велику полекшу маємо з того, що прийняли співчинник a рівний $+1$, бо в нашій табличці маємо до діла тільки з двома величинами, а не з трома; про рівняння (7) кажемо, що воно *в нормальному (простому) вигляді.*

Звести рівняння до нормального (простого) вигляду значить те саме, що перенести всі три його члени ліворуч і поділити рівняння на співчинник при x^2.

в) Розвязку того самого рівняння можемо повести ще иншим шляхом. Розбиймо його лівий бік так: $x^2+c=\pm bx$, отже матимемо уклад:

$$\left.\begin{aligned} y&=x^2+c,\\ y&=\pm bx. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Це буде значити, що параболу пересуваємо здовж осі Y і шукаємо її перетину з простою, яка переходить через O. Дискусія цього випадку не дасть нам нічого нового, бо таке пересунення параболи можна заступити пересуненням осі X у протилежний бік, а тоді й наша проста не буде вже переходити через O і ми матимемо попередній випадок.

Зате деяке нове світло на розвязку рівняння кине нам таке розбиття:

$$\left.\begin{aligned} y&=ax^2\pm bx+c,\\ y&=0: \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

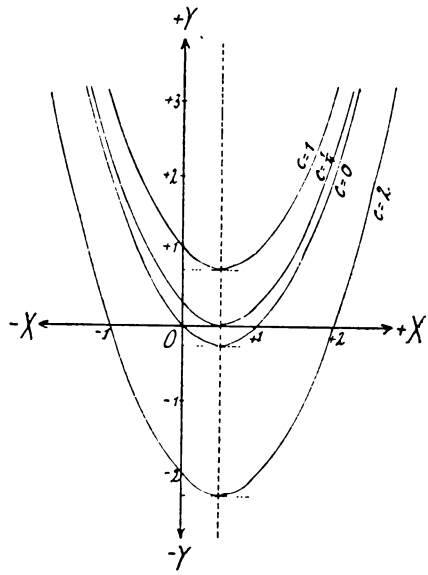


Рис. 126.

у цьому випадкові пересуваємо параболу (нормальну або зміненого вигляду) рівнобіжно до обох осей і шукаємо її перетину з віссю X. Вислід тої дискусії знаємо вже з уст. 132; парабола має з віссю X 2, 1, 0 точок спільних відповідно до того, чи виріжник її рівняння додатній, нуль, від'ємний; пізніший наш дослід тільки підтвердить це.

Нпр. рівняння із змінним параметром c:

$$y=x^2-x+c$$

уявляє собою громаду нормальних парабол, пересуваних уздовж осі Y (рис. 126); виріжник тої функції є $\Delta=1-4c$, а співрядні вершка параболи будуть:

$$x_0=\frac{1}{2},\quad y_0=-\frac{\Delta}{4}=c-\frac{1}{4}.$$

Для $c=+1$ є $\Delta=-3$, $y_0=\frac{3}{4}$; парабола не перетинає осі X, отже рівняння $x^2-x+1=0$ не має корінів.

Для $c=+\frac{1}{4}$ є $\Delta=0$, $y_0=0$; вісь X буде вершковою доторкальною параболи, отже рівняння $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ матиме один подвійний корінь: $x_0=\frac{1}{2}$.

Для $c=0$ є $\Delta=1$, $y_0=-\frac{1}{4}$; парабола перетинає вісь X у двох точках, а рівняння $x^2-x=0$ має два коріні: $x_1=0$, $x_2=+1$.

Врешті для $c=-2$ є $\Delta=+9$, $y_0=-\frac{9}{4}$; парабола перетинає вісь X у двох точках, а це значить, що рівняння $x^2-x-2=0$ має два коріні: $x_1=+2$, $x_2=-1$.

Таким чином громада парабол (*) розпадається на дві частини; одні перетинаються з віссю X і дають по два коріні рівняння; для них є $c>+\frac{1}{4}$. Другі, що мають $c<+\frac{1}{4}$, не перетинають осі й не дають корінів рівняння. Межева парабола ($c=1/4$) лежить своїм вершком на осі X.

136. **Повне квадратове рівняння; рахункова розвязка.** Отся геометрична розвязка квадратового рівняння і звязаний з нею дослід наводять нас на шлях, яким повинна піти рахункова розвязка.

Ми бачили, яку велику ролю при розвязці рівняння грає його *виріжник*; тому, коли маємо дане рівняння, то перш за все зводимо його до *нормального вигляду*:

$$x^2+bx+c=0 \tag{7a}$$

(тут b і c можуть бути також дробами) і змагаємо до того, щоби праворуч виступив його виріжник:

$$\Delta=b^2-4c. \tag{8}$$

Цього досягнемо, коли c перенесемо на правий бік, обидві сторони помножимо на 4 й обіруч додамо b^2:

$$x^2+bx=-c,$$
$$4x^2+4bx=-4c,$$
$$4x^2+4bx+b^2=b^2-4c.$$

Та тут, як легко доглянути, маємо ліворуч квадрат двочлена $2x+b$, а праворуч виріжник (8), отже:

$$(2x+b)^2=\Delta.$$

Тому, коли введемо тут скорочення $X=2x+b$, матимемо чисте рівняння:

$$X^2=\Delta,$$

з розвязкою $X=\pm\sqrt{\Delta}$, отже $X_1=+\sqrt{\Delta}$, $X_2=-\sqrt{\Delta}$. Отся розвязка, розуміється, можлива тільки тоді, коли Δ не-від'ємне.

Вернімся тепер до попередньої невідомої x; вона матиме вартість $x=-\frac{b}{2}+\frac{X}{2}$, отже коли вживемо за X вираження $\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{b^2-4c}$, матимемо:

$$x=-\frac{b}{2}\pm\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}.$$

Цій формі легко надати більше прозорий вигляд. Напишім:

$\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}=\sqrt{\frac{b^2-4c}{4}}=\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}$, а тоді матимемо:

$$x=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}. \qquad (11)$$

Словами:

Корінь квадратового рівняння в нормальному вигляді рівний половині співчинника при x із зміненим знаком, збільшеній або зменшеній на квадратовий корінь, під яким стоять: квадрат тої половини (співчинника при x) *і другий співчинник* (член свобідний від невідомої) *з таким знаком, який він мав би по правому боці рівняння.*

Розділ корінів дасть:

$$x_1=-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}, \qquad x=-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}. \qquad (11a)$$

Нпр. (1). $x^2+2x-3=0;$

тут співчинник невідомої є 2, отже беремо -1, підносимо це число до квадрату: $(-1)^2=+1$ і збільшуємо його на третій співчинник із таким знаком, який він мав би праворуч, т. зн. на $+3$:

$$x=-1\pm\sqrt{(-1)^2+3}=-1\pm\sqrt{4}=-1\pm2,$$

т. зн. $x_1=-1+2=+1$, $x_2=-1-2=-3$.

Спроба: $(+1)^2+2\,.\,(+1)-3=0$; $(-3)^2+2.(-3)-3=0$.

(2). $x^2-x+c=0$:

співчинник при x є -1, отже беремо $+\frac{1}{2}$, а під корінем буде $\left(\frac{1}{2}\right)^2-c=\frac{1}{4}-c$,

т. зн.:

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-c}.$$

Порівняйте цей вислід із рис. 124 та переведіть дослід! Спроба!

137. Приклади. Для пояснення техніки розвязування рівнянь перечислимо тут у цілости кілька прикладів.

(1) Невимірні величини зводимо до найпростішого виду, т. зн. добуваємо з них усі квадратові чинники. Нпр.:

$$x^2+6x-19=0,$$

$$x=-3\pm\sqrt{(-3)^2+19}=-3\pm\sqrt{28}.$$

а що $28=4\cdot 7=2^2\cdot 7$, то:

$$x=-3\pm 2\sqrt{7}.$$

Ось такий вигляд розвязки звемо «алгебричним». Він для практичних потреб непригожий, тому треба замість невимірного числа впровадити його приближну вартість. Знаючи, що $\sqrt{7}=2{,}6457\ldots$, матимемо: $x=-3\pm 2\cdot 2{,}6457\ldots$, отже $x_1=2{,}29$, $x_2=-8{,}29$.

Зробіть спробу й провірте вислід на рисунку!

(2) Рівняння

$$105x^2+79x-72=0$$

треба перше звести до нормального вигляду, т. зн. обіруч поділити на 105:

$$x^2+\frac{79}{105}x-\frac{24}{35}=0;$$

$$x=-\frac{79}{210}\pm\sqrt{\left(-\frac{79}{210}\right)^2+\frac{24}{35}}=-\frac{79}{210}+\sqrt{\frac{79^2}{210^2}+\frac{24}{35}}.$$

Коли в такому вираженні виступають дроби, то треба вважати, щоби не виконувати зайвих дій; так нпр. тут *було би зайвим підносити знаменик до квадрату*, бо потім і так треба із знаменика добувати корінь. Тому то величину під корінем перетворюємо так:

$$\frac{79^2}{210^2}+\frac{24}{35}=\frac{79^2}{210^2}+\frac{24.6.210}{35.6.210}=\frac{79^2+24.6.210}{210^2}=\frac{36481}{210^2};$$

а що $\sqrt{36481}=191$, то буде:

$$x=-\frac{79}{210}\pm\frac{191}{210};$$

$$x_1=-\frac{79}{210}+\frac{191}{210}=\frac{112}{210}=\frac{8}{15},\quad x_2=-\frac{79}{210}-\frac{191}{210}=-\frac{270}{210}=-\frac{9}{7}.$$

Зробіть спробу!

(3) «Кидаючи камінь до криниці, ми завважили, що плюскіт води, яку порушив камінь, приходить до нашого вуха через t^s. Обчислити глибину криниці».

Час t^s треба розкласти на дві частини: на час x, якого треба, щоби камінь долетів до води, і час $t-x$, потрібний на поворот відгомону від води до нас. У часі x камінь перебіжить шлях $y=\frac{1}{2}gx^2$, а голос у часі $t-x$ шлях $y=c(t-x)$, де c — швидкість голосу. А що шлях в обох випадках однаковий, то для x маємо рівняння:

$$\frac{1}{2}gx^2=c(t-x),$$

або в нормальному вигляді:

$$x^2+\frac{2c}{g}x-\frac{2ct}{g}=0.$$

Його розвязка є $x=-\frac{c}{g}\pm\sqrt{\frac{c^2}{g^2}+\frac{2ct}{g}}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2+2cgt}}{g}$, отже:

$x_1=\frac{-c+\sqrt{c^2+2cgt}}{g}$, $x_2=\frac{-c-\sqrt{c^2+2cgt}}{g}$; та для нашого завдання придатна тільки перша розвязка, бо час мусимо вважати додатньою величиною, а x_2 є від'ємне. Знаючи x, обчислимо глибину криниці — нпр. із другого рівняння для y_1 (бо воно простіше).

Нехай буде нпр. $t=5^s$; тут є $g=9{,}80665 m/sec^2$, $c=333 m/sec$, отже:

$$x=\frac{-333\pm\sqrt{333^2+2\,.\,333\,.\,9{,}80665\,.\,5}}{9{,}80665}=4{,}68^s\ ;$$

це час, потрібний на падання каміня. На поворот голосу зістається $5-4{,}68=0{,}32^s$, отже глибина криниці є:

$$y=333\,.\,0{,}32=\text{кругло } 100m.$$

ВПРАВИ.

I.

Розвязати такі чисті квадратові рівняння:

1. $7x^2=105903$;
2. $13x^2-1573=0$;
3. $(3x+2)(3x-2)=140$;
4. $(x+7)^2+(x-7)^2=260$;
5. $11-\frac{x+25}{x^2}=3-\frac{x-25}{x^2}$;
6. $\frac{x^2}{2}+\frac{2x^2}{3}+\frac{3x^2}{4}=92$;
7. $\frac{x+1}{3}=\frac{5}{x-1}$;
8. $\frac{3}{x-4}-\frac{x+1}{3}=1$;
9. $\frac{15+x}{11-x}=\frac{47+x}{73-x}$;
10. $\frac{x^2-5x+11}{x^2-7x+17}=\frac{5}{7}$;
11. $(x+3)(x-4)+(x-3)(x+4)=74$;
12. $\frac{4}{1+2x}+\frac{4}{1-2x}=9$;

13. $(2x+3)(3x-4)+(4x-5)(5x+6)=10$;

14. $(x-3)(x-5)+(x+1)(x+7)+10=0$;

15. $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x-a}{x+a}=\dfrac{2(a^2+1)}{(1+a)(1+a)}$; 16. $\dfrac{x-m}{x+m}=\dfrac{n-x}{n+x}$;

17. $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}=\dfrac{1}{x}$; 18. $\dfrac{x+ab}{x-ab}=\dfrac{a+bx}{a-bx}$;

19. $\dfrac{7x+2}{7x-2}=\dfrac{4x+7}{4x-7}$; 20. $\dfrac{(a-x)(x-b)}{(a-x)-(x-b)}=x$;

21. $x\sqrt{\dfrac{x-12}{x+16}}=32-x$; 22. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x+3}$

23. $\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x^2-10}+\sqrt{x^2-13}=x$; 24. $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{3+\sqrt{9+x^2}}}=\dfrac{1}{2}$;

26. $\sqrt[3]{x+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$; 25. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\sqrt{\dfrac{2+x^2}{1-x^2}}$.

II.

Укласти й розвязати такі чисті квадратові рівняння:

1. Що це за число, що його п'ята частина, помножена його сьомою частиною, дає на добуток 4235?

2. Знайти такі три числа, що стоять у відношенні $^1/_2:^1/_3:^1/_4$, а сума їхніх квадратів виносить 10309.

3. Коли шнур, що ним обведено квадрат, скоротити на $8m$, то зможемо ним обвести менший квадрат, який займає $^{16}/_{25}$ площини даного. Обчислити довжину шнура й боки обох квадратів.

4. Протипрямка трикутника має добжину $1m$, а одна з прямок є в $3^3/_7$ разів більша від другої. Обчислити його площину.

5. Два подорожні виходять одночасно з одного місця; один іде просто на північ по $4^1/_2$ милі денно, другий на схід і відбуває в день 6 миль. По якому часі віддаль між ними в повітряній лінії буде 30 миль?

6. Із поля у виді прямокутника, боки якого стоять у відношенню 6 : 5, властитель продав шосту частину й досталось йому ще $5625m^2$. Яка була довжина й ширина того поля?

7. Боки прямокутника, площина якого рівна квадратові з боком a, стоять у відношенні $m : n$; обчислити їх.

8. Людина, що її спитали, скільки їй років, каже: «Коли я вродився, моїй матері було 30 років. Добуток віку мого й віку матері є на 9 менший від 15-кратті їхньої суми». Скільки йому років?

9. Кулю з промінем R перетяти площею так, щоби площина кола в перетині було рівне ріжниці піль більшого й меншого верху кулі.

10. Дані рівняння: а) $\frac{x+m}{x+n}=\frac{p+x}{q-x}$; б) $\frac{Ax+B}{Cx+D}=\frac{Ex+F}{Gx+H}$.

Як треба добірати в них числа m, n, p, q; A, B,..., H, щоб отримати *чисте* квадратове рівняння? щоб воно мало одну подвійну розвязку? щоби ця розвязка була нулем? щоби рівняння не мало розвязки?

11. Два співосередкові кола перетяти спільною тетивою так, щоби вона розпалася на три рівні відтинки. Знайти умову розвязальности завдання.

III.

Розвязати такі мішані квадратові рівняння:

А.

1. $x^2+6x=27$;
2. $x^2+2x=8$;
3. $x^2-10x=24$;
4. $x^2-8x+15=0$;
5. $x^2+10x=-24$;
6. $x^2-2x=99$;
7. $x^2-7x+12=0$;
8. $x^2+5x-84=0$;
9. $x^2-77x+1452=0$;
10. $x^2-11x+30=0$;
11. $3x^2-8x+4=0$;
12. $6x^2-13x+6=0$;
13. $x(32-x)=256$;
14. $(x+10)(30-x)=400$;
15. $x^2-6x=0$;
16. $x^2+8x=0$;
17. $15x^2-16x+4=0$;
18. $33x^2-38x+5=0$;
19. $89x^2+29x-1308=0$;
20. $127x^2-11x+2=0$;
21. $432x^2-6x-221=0$;
22. $1675x^2+37x-546=0$.

Б.

1. $abx^2-(a+b)(ab+1)x+(a^2+1)(b^2+1)=0$;
2. $\frac{1-ax}{1+bx}=\frac{1+cx}{1-dx}$;
3. $2(a+b)x^2=4ax+\frac{4a^2}{a+b}$;
4. $\frac{x+a}{2x-a}=\frac{2x-b}{x+b}$;
5. $x^2+1=x\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\sqrt{mn}$;
6. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{4a(a+b)}{b(2a+b)}$;

7. $(x-a)^2-b(x-a-c)=bc$; 8. $x^2+a^2=b^2+c^2-2bc+2ax$;

9. $\frac{x^2}{(m+n)^2}-\frac{4mnx}{(m+n)^2}-(m-n)^2=0$; 10. $(m-n)x^2-nx=m$.

В.

1. $x+\frac{1}{x+1}=1+\frac{x}{x+1}$; 2. $\frac{x}{x+60}=\frac{7}{3x+5}$;

3. $\left(\frac{2x}{3}+4\right):\left(\frac{3x}{4}+5\right)=(x-6):(x-7)$; 4. $\left[\frac{x}{3}-\frac{1}{4}\right]:\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{5}\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]:\left[x-\frac{4}{3}\right]$;

5. $\frac{2x+5}{3-x}+\frac{4x-3}{3+x}=10$; 6. $\frac{12}{5-x}+\frac{8}{4-x}=\frac{32}{x+2}$;

7. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-3}=\frac{x+4}{x-2}+\frac{x-3}{x-4}$; 8. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;

9. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=1$; 10. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{a+b}{x}=2$.

Г.

1. $3\sqrt{\frac{x}{x+1}}=2\sqrt{\frac{x+1}{x}}$; 2. $x+\sqrt{x+6}=2+3\sqrt{x+6}$;

3. $\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{2x+1}}$; 4. $\sqrt{2x-10}+\sqrt{3x+10}=\sqrt{2x-17}+\sqrt{3x+25}$;

5. $\sqrt{x^2+3x+4}+\sqrt{x^2-3x-2}=6$; 6. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+12}}=1+x$;

7. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\frac{14}{3}$; 8. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$;

9. $\sqrt{\frac{a}{b}-x}-\sqrt{\frac{a}{b}+x}=2\sqrt{2x+2\sqrt{\frac{a-4bx}{2b}}}$.

10. $\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-10}=1$.

IV.

Укласти й розвязати такі мішані квадратові рівняння:

1. Сума двох чисел 579, а добуток 56088. Що це за числа?

2. Сума двох чисел є 19, а їхня ріжниця, помножена на більше число, дає на добуток 60. Що це за числа?

3. Сума двох чисел є a, сума їхніх квадратів b^2. Що це за числа? (Приклад: $a=79$, $b=3145$. Коли завдання можливе, а коли ні?).

4. Що це за число, що, збільшене на свою відворотність, дає m? (Дослід. Приклади: $m=2$, $2^1/_2$, 3, 4, 6, 7,...).

5. Які це числа, що мають суму s, а суму відворотностей t? (Дослід!).

6. Ширина прямокутника, що має поле p, є на b більше від його висоти. Яка довжина його боків? (Дослід!).

7. Гурток приятелів обмінявся фотографіями; на це вийшло всього разом 46 дюжин фотографій. Кілько було приятелів?

8. Два робітники, А і Б, потрібують на виконання якоїсь праці 42 дні. Як би працювали кожен із окрема, то А був би з роботою на 7 днів раніше готовий від Б. Як довго працюватиме кожен із них?

9. Учитель дав завдання: помножити дві числі, із яких одне було на 75 більше від другого, а для спроби казав поділити добуток на менше число. При діленні показалася крім частки 227 ще решта 113, а це було спричинене помилкою при множенню. При провірці вийшло, що учень забув дочислити одну одиницю третього порядку. Які числа були дані?

10. По закону Н'ютона небесні тіла притягають з силою прямо пропорційною до їхніх мас, а відворотно пропорційною до квадратів віддалі. Знаємо, що маси Місяця й Землі стоять у відношенню 1 : 81 та що їхня віддаль є 51.000 миль. Знайти точку, в якій притягання обох тих тіл є однакове.

11. Дві лямпі, віддалені одна від одної на m, мають силу світла l_1 і l_2; знайти місце, рівно освітлене обома лямпами.

12. Збірник води можна наповнити двома рурами; одна з них наповнила б його сама на 2^h скоріше як друга, а обома нараз наповнить в $1^7/_8{}^h$. В якому часі наповниться збірник, коли вода тече кожною рурою з окрема?

13. Із бочки з $360l$ чистого спірту, надчерпано трохи спірту й долито туди стільки ж води. Після змішання надчерпано ще $84l$ тої ж

мішанини і знову долито до повна води. Тоді показалося, що спірт був 50%-ий. Скільки спірту відчерпано за першим разом?

14. У коло з поперечником $2R$ вписано прямокутник із обводом $2s$; яке його поле?

15. Із $2kg$ золота надібрано якусь кількість і заступлено її міддю; потім узято тої мішанини на $100g$ більше, як за першим разом золота, й заступлено її знову міддю. З того вийшло золото спроби 680; скільки золота взято з початку?

16. У збірнику завдань індійського математика *Баскари* (ур. 1114 після Хр.) подибуємо такі два приклади на квадратові рівняння:

(а) Осьма частина стада малп, піднесена до квадрату, скакала по луці, а решта, в кількости 12, гуторила на горбочку. Скільки було малп?

(б) П'ята частина стада малп, зменшена на 3 й піднесена до квадрату, сховалася в печері, а одну малпу можна було бачити, бо скочила на дерево. Скільки їх було?

(До сього завдання Баскара додає таку заввагу: друга розвязка, $x=5$, не відповідає вимогам завдання, бо п'ятої частини того числа не можна зменшити на 3).

§ 23. Розклад квадратового тричлена та дослід квадратового рівняння.

138. **Звязок між коріннями та співчинниками квадратового рівняння.** а) Ми бачили, що коріні квадратового рівняння залежать від вартостей співчинників рівняння. І так рівняння:

$$x^2+bx+c=0 \tag{1}$$

має коріні:

$$x_1=-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2},\quad x_2=-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \tag{2}$$

де $\Delta=b^2-4c$ — виріжник рівняння. При зміні співчинників b і c будуть змінюватися коріні рівняння, а навіть рівняння може втратити свою розвязальність.

Шукаймо тепер відворотної залежности, т. зн. питаймо, як знайти b і c, коли дані x_1 і x_2. Із рівнянь (2) виходить просто:

$$x_1+x_2=-b,$$
$$x_1-x_2=\sqrt{\Delta},$$
$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)=\left(-\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{b^2}{4}-\frac{b^2-4c}{4}=c,$$

отже перше й останнє рівняння дають бажані звязки:

$$b=-(x_1+x_2),\quad c=x_1x_2, \tag{3}$$

т. зн. *коли дане квадратове рівняння в нормальному вигляді, то співчинник при x рівний сумі обох корінів зі зміненим знаком, а член свобідний від невідомої рівний добуткові корінів.*

Мимоходом зазначимо ще, що ріжниця корінів рівна квадратовому коріневі з виріжника.

Нпр. $x^2-5x+6=0$; $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$; $x_1=3, x_2=2$,

отже: $x_1+x_2=5$, $x_1\cdot x_2=6$. І справді: $-5=-(x_1+x_2)$, $6=x_1x_2$.

Врешті $\Delta=25-24=1$, $\sqrt{\Delta}=1$, і $x_1-x_2=\pm1$, бо тут нам байдуже, котрий із корінів назвемо першим, а котрий другим.

б) На основі того правила можемо збудувати рівняння, з якого дані обидва коріні. Рівняння, що має коріні x_1 і x_2, матиме співчинники: $b=-(x_1+x_2)$, $c=x_1 . x_2$, отже воно буде:

$$x^2+bx+c=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0. \qquad (4)$$

Нпр. (1) $x_1=-2$, $x_2=+5$; $x_1+x_2=3$, $x_1 . x_2=-10$, отже рівняння буде: $x^2-3x-10=0$.

(2) $x_1=2+\sqrt{3}, x_2=2-\sqrt{3}; x_1+x_2=4$, $x_1 . x_2=2^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$; отже: $x^2-4x+1=0$.

в) Чисте квадратове рівняння має при x співчинник нуль: $b=0$, отже $x_1+x_2=0$, т. зн. $x_2=-x_1$, а $c=-x_1^2$. Його коріні є рівні, тільки протилежних знаків; їхній добуток — від'ємний квадрат коріня.

Нпр. $x_1=2\sqrt{2}$, $x_2=-2\sqrt{2}$; $x_1+x_2=0$, $x_1 . x_2=-(2\sqrt{2})^2=-8$, отже рівняння буде: $x^2-8=0$.

139. **Розклад квадратового тричлена на лінійні чинники.** а) Виконаймо в рівнянні (4) множення:

$$x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=0;$$

тут два перші доданки мають спільний чинник x : $x^2-x_1x=x(x_2-x_1)$, два другі — спільний чинник $-x_2$: $-x_2x+x_1x_2=-x_2(x-x_1)$, так, що обидві суми мають знову спільний чинник $x-x_2$, отже можемо написати:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=(x-x_1)(x-x_2). \qquad (5)$$

Це значить, що *квадратовий тричлен можна розкласти на добуток двох лінійних чинників*: $x-x_1$ і $x-x_2$. Ці чинники — це ріжниці змінної x та корінів квадратового рівняння, яке отримаємо, коли даний тричлен зрівняємо з нулем. Їх звуть *коріневими чинниками даної функції*.

Нпр. (1) Рівняння $x^2-5x+6=0$ має коріні $x_1=3$, $x_2=2$, отже коріневі чинники є $x-3$ і $x-2$. Це значить, що $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, як стверджує справжнє множення.

(2) Рівняння $x^2-3x-10=0$ має коріні $x_1=5$, $x_2=-2$; його коріневі чинники є $x-5$ і $x+2$, так що $x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$.

б) Із уст. 30а знаємо, що добуток двох величин може тільки тоді стати нулем, коли один із його чинників матиме вартість нуля. Звідсіля виходить, що рівняння:

$$(x-x_1)(x-x_2)=0 \qquad (5a)$$

можна задовольнити тільки так, що приймемо:

$$x-x_1=0, \text{ або } x-x_2=0.$$

Перша можливість веде до $x=x_1$, друга до $x=x_2$. Це значить, що тільки числа x_1 та x_2 можуть сповнити дане рівняння, отже *квадратове рівняння не може мати більше чим два коріні.* І справді, коли в (5а) підставити x_1 або x_2 за x, отримаємо $(x_1-x_1)(x_1-x_2)=0\,.\,(x_1-x_2)=0$, або: $(x_2-x_1)(x_2-x_2)=(x_2-x_1).0=0$.

Третього коріня квадратове рівняння не може мати; бо як би ми приймили, що ще й x_3 є корінем рівняння, то це дало би:

$$(x_3-x_1)(x_3-x_2)=0,$$

а тоді мусило би бути $x_3=x_1$ або $x_3=x_2$, отже x_3 було би рівне першому або другому коріневі рівняння.

в) Коли $x_2=x_1$, матимемо розклад:

$$(x-x_1)(x-x_1)=(x-x_1)^2=0, \tag{6}$$

а він вимагає тільки $x=x_1$, отже це рівняння має тільки один корінь; але що тут у добутку виступає той сам коріневий чинник двічі, то наша назва: «подвійний корінь» — оправдана.

Функція, що виступає у (6), є:

$$y=x^2-2x_1x+x_1^2,$$

де x змінне, а x_1 постійне; тому її похідна буде:

$$y=2x-2x_1=2(x-x_1).$$

Звідсіля бачимо, що коли x *— подвійний корінь квадратового рівняння, то це одночасно корінь лінійного рівняння, в якому лівий бік є похідною лівого боку даного рівняння.*

г) Коли знаємо коріневі чинники якогось рівняння, то тим самим знаємо вже й його коріні; отже розкласти квадратовий тричлен на лінійні чинники — значить те саме, що розвязати квадратове рівняння. Навпаки, коли відомі коріні рівняння, то одночасно даний також розклад його тричлена на чинники. Це значить, що *розвязка рівняння рівнозначна з розкладом його лівого боку на чинники.*

Нпр. у рівнянні $ax^2+bx=0$ чинник x можна виставити перед скобки: $x(ax+b)=0$, а тоді буде: $x=0$ і $ax+b=0$, отже коріні того рівняння є: $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$, як це й отримали би з розвязки по зразкові.

Коли співчинник при x^2 відмінний від $+1$, виконуємо розклад так: нехай буде нпр. даний тричлен: $36x^2+69x-35$; тоді пишемо: $y=36\left(x^2+\frac{23}{12}x-\frac{35}{36}\right)$

Рівняння $x^2+\frac{23}{12}x-\frac{35}{36}=0$ має розвязку: $x=-\frac{23}{24}\pm\sqrt{\frac{23^2}{24^2}+\frac{35}{36}}=-\frac{23}{24}\pm\frac{33}{24}$,

отже: $x_1=\frac{5}{12}$, $x_2=-\frac{7}{3}$. Коріневі чинники даного рівняння є: $x-\frac{5}{12}$ і $x+\frac{7}{3}$, отже: $y=36\left(x-\frac{5}{12}\right)\left(x+\frac{7}{3}\right)$, або: $y=36\,.\,\frac{12x-5}{12}\,.\,\frac{3x+7}{3}$, т. зн.:

$$y=(12x-5)\,(3x+7).$$

д) Розкладом многочленів на лінійні чинники ми займалися вже в уст. 49 г—є; та там не могли його перевести в кожному даному випадкові. При допомозі квадратових рівнянь ми з'уміємо розкласти на чинники кожний квадратовий тричлен, що має *не-від'ємний виріжник*.

Нпр. тричлена x^2-4x-3 не можна розкласти попереднім способом; одначе рівняння $x^2-4x-3=0$ розвязальне, бо його виріжник $\Delta=4^2+4\,.\,3=28>0$. Його розвязка є $x=2\pm\sqrt{7}$, отже коріневі чинники є: $x-2-\sqrt{7}$ і $x-2+\sqrt{7}$, так що:

$$x^2-4x-3=(x-2-\sqrt{7})\,(x-2+\sqrt{7}).$$

Так отже розклад, неможливий в обсягу вимірних чисел, стає можливим, коли це тіло поширимо якимось невимірним числом; у нашому прикладі тричлен x^2-4x-3 можна розкласти в тілі $k(\sqrt{7})$. Многочлен, який можемо розкласти на простіші чинники, називається *зводильним*; коли його розклад неможливий, звемо його *незводильним*. Із наших дослідів видко, що незводильний многочлен при відповідному поширенні числового тіла стає зводильним, отже зводильність і незводильність многочлена — відносні поняття. Завсіди мусимо зазначувати, *в якому тілі* даний многочлен зводильний або ні.

140. **Квадратові нерівности.** а) Безпосереднім застосуванням розкладу квадратового тричлена, а одночасно й першим прикладом дискусії рівнянь, буде *дослід квадратових нерівностей*.

Нехай буде дана квадратова функція:

$$y=ax^2+bx+c; \tag{7}$$

спитаймо, серед яких обставин вона може приймати додатні або від'ємні вартости; відповісти на це питання — значить *розвязати квадратову нерівність*:

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{або:} \quad ax^2+bx+c<0. \tag{8}$$

Тут ми перш за все нерівність (8) зведемо до нормального вигляду, тоб-то приймемо $a=+1$. Бо коли a додатнє і ми нерівність поділимо обіруч на a, отримаємо:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0 \quad \text{або:} \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0,$$

отже кожна нерівність затримує свій знак; коли ж a від'ємне, то нерівність тільки змінює знак $>$ на $<$ або навпаки. Так отже займемося нерівностями:

$$\text{(I)} \qquad x^2+bx+c>0 \quad \text{і} \quad \text{(II)}. \quad x^2+bx+c<0, \tag{9}$$

де співчинники b і c можуть бути цілими числами або дробами.

Виконаймо розклад лівого боку на лінійні чинники: нехай α і β будуть корінями рівняння $x^2+bx+c=0$, тоді є:

$$x^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta). \tag{10}$$

Нерівність (I) розвязуємо так, що шукаємо таких вартостей x, для яких обидва коріневі чинники мають однакові знаки, бо тільки тоді їхній добуток може бути додатній, — отже добіраємо x так, щоби було:

$$x>\alpha \quad \text{і} \quad x>\beta, \quad \text{або:} \quad x<\alpha \quad \text{і} \quad x<\beta.$$

Приймім, що $\alpha>\beta$; тоді $x>\alpha$ потягає за собою також $x>\beta$, а $\alpha<\beta$ вимагає, щоби було $x<\alpha$, отже ми дану нерівність (I) сповнимо, коли приймемо $x>\alpha$ або $x<\beta$; значить, вона має *два обсяги розвязальности*. Обсяг $\alpha>x>\beta$ виключений, бо в ньому є $x-\alpha<0, x-\beta>0$, отже добуток тих двох чинників від'ємний.

Навпаки нерівність (II) вимагає, щоб обидва ці чинники були протилежних знаків; у тому випадкові якраз обсяг, що його ми перше виключували, а саме: $\alpha>x>\beta$, буде *єдиним обсягом розвязальности нерівности*.

Нпр. (I). $x^2-x-2>0$ і (II). $x^2-x-2<0$; тричлен ліворуч розкладаємо, розвязуючи рівняння $x^2-x-2=0$. Звідсіля маємо: $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$, отже нерівність (I) буде сповнена в обсягах: $x>2$ і $x<-1$, а нерівність (II) в обсягу $2>x>-1$.

б) Розклад (10) вимагає, щоби виріжник рівняння був додатній; бо коли він від'ємний, тоді відповідне рівняння не розвязальне.

Одначе й нулева вартість виріжника робить розклад можливим: $x^2+bx+c=(x-\alpha)^2$, бо тоді рівняння має подвійний корінь. Тільки ж у тому разі функція має завсіди додатні вартости (це квадрат), з виїмком $x=\alpha$, коли вона стає нулем, отже тут можлива до сповнення тільки нерівність (I) — для всякого x. Нерівність (II) не сповниться ніколи, а на пограниччі стоятиме рівняння:

$$x^2+bx+c=0.$$

Врешті, коли виріжник функції від'ємний, тоді її не можна розкласти на чинники; зате можна її представити як суму двох квадратів:

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}\right)^2,$$

бо тут $b^2<4c$, отже другий доданок завсіди додатній, а тому можна вважати його квадратом. У такому разі функція для всякого x приймає тільки *додатні вартости*, отже *завсіди* сповнюється тільки нерівність (I), а нерівність (II) — *ніколи*.

в) Ці висліди підтвердимо геометричним розслідом, який знову зведемо до розбиття функції $y=x^2+bx+c$ на квадратову й лінійну частину:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=x^2,\\ y_2&=-bx-c \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

так, що $y=y_1-y_2$. Коли хочемо сповнити нерівність (I), шукаємо таких x, щоби було $y_1>y_2$; при нерівности (II) будемо шукати навпаки: $y_1<y_2$.

Один погляд на рис. 127 переконає нас, що коли проста y перетинає параболу в двох точках, W_1 і W_2, тоді для всіх точок простої праворуч від W_1 і ліворуч від W_2 сповнена нерівність $y_1>y_2$ т. зн. (I), а між W_1 і W_2 нерівність $y_1<y_2$, т. зн. (II). Точки W_1 і W_2 відповідають рівнянню $y_1=y_2$, т. зн. $x^2+bx+c=0$.

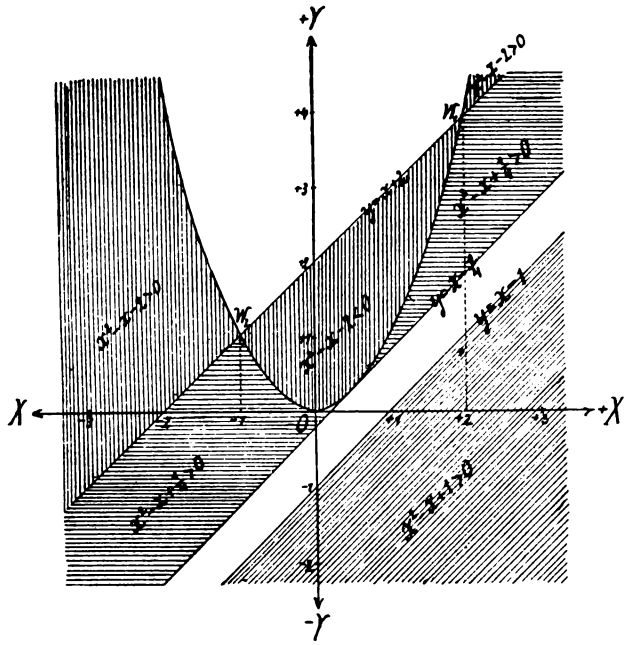


Рис. 127.

Коли проста є доторкальною параболи, тоді всі рядні параболи більші від рядних простої, отже сповнюють нерівність (I) — із виїмком рядної в точці дотику T, де обовязує рівняння $y_1=y_2$, т. зн. $y=0$. Друга нерівність тут неможлива.

Врешті, коли проста не перетинає параболи, всі рядні параболи більші від рядних простої, отже всяке x сповнює першу нерівність, а другої — так само як і рівняння — не сповнює ні одна.

Нпр. (1) $y=x^2-x-2;$

проста $y_2=x+2$ перетинає параболу в двох точках: $x_1=2$ і $x_2=-1$; для всякого $x>2$, а також для $x<1$ сповнена нерівність (I) $x^2-x-2>0$, а нерівність (II) $x^2-x-2<0$ тільки в обсягу між -1 і $+2$.

(2) $$y=x^2-x-\frac{1}{4};$$

проста $y_2=x-\frac{1}{4}$ доторкається параболи в точці T, для якої $x=\frac{1}{2}$, отже тільки в тій одній точці сповнюється рівняння, а позатим завсіди нерівність (I).

(3) $$y=x^2-x+1;$$

парабола лежить у цілости над простою, отже всяке x сповнює тільки нерівність (I).

г) «Подвійна» або «біжуча» нерівність:

$$A<ax^2+bx+c<B \qquad (12)$$

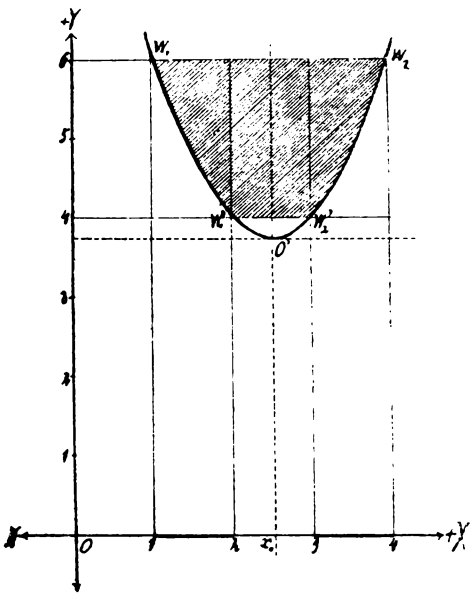


Рис. 128.

вимагає, щоби вартість функції $y=ax^2+bx+c$ замкнути в дві межі: A і B, та шукати відповідних вартостей аргументу x, які сповнюють ці вимоги. Її розбиваємо на дві «прості» нерівности:

$$ax^2+bx+(c-A)>0$$

і $$ax^2+bx+(c-B)<0 \qquad (12a)$$

і затіснюємо обсяг змінности аргументу, відповідно до вимог одної й другої нерівности.

Нпр. дана нерівність:

$$6>x^2-5x+10>4$$

Коли її розуміти геометрично, то вона буде значити ось що: знайти такі точки параболи, рядні яких мають вартости між 6 і 4 (рис. 128). Парабола

$$y=x^2-5x+10$$

має вершок у точці $\left(\frac{5}{2},\frac{15}{4}\right)$, бо похідна функції, $y'=2x-5$, стає нулем для $x_0=\frac{5}{2}$. Із рисунку, який легко виконати, бо парабола нормальна, видко, що точки, які лежать на параболі між W_1 і W_1' та W_2' і W_2, сповнюють наше завдання; відрізні тих точок лежать між 1 і 2 та 3 і 4.

До того самого висліду дійдемо й рахунком, розбиваючи біжучу нерівність на дві прості:

$$x^2-5x+4<0 \text{ і } x^2-5x+6>0.$$

Їх обидві можна розкласти на чинники:

$$(x-1)(x-4)<0 \quad \text{і} \quad (x-2)(x-3)<0.$$

Перша нерівність вимагає, щоби її чинники її лівого боку мали протилежні знаки, отже щоби було $x>1$ і $x<4$, друга, щоб їхні знаки були однакові, отже $x>3$ або $x<2$. Обидві разом виключують із першого дозволеного обсягу: (1,4), недозволений другою нерівністю частинний обсяг (2, 3), так, що ми маємо два дозволені обсяги: (1,2) і (3,4), отже розвязку даної нерівности напишемо так:

$$1<x<2, \qquad 3<x<4.$$

141. **Дискусія квадратового рівняння.** Знаємо вже, що квадратове рівняння розвязальне, коли його виріжник не від'ємний; головні висліди дискусії подані в табл. уст. 135 б (див стр. 359).

Найближчим нашим завданням буде основна дискусія того рівняння, застосована як до готових рівнянь, так і до текстових завдань. Її перепровадимо таким порядком, що будемо вважати по черзі кожний із співчинників змінним (параметром), а далі за співчинники прийматимемо функції якогось параметру. До тої мети будемо йти двома шляхами: рахунковим і рисунковим; вони обидва будуть доповнювати один одного і служитимуть обопільно перевіркою.

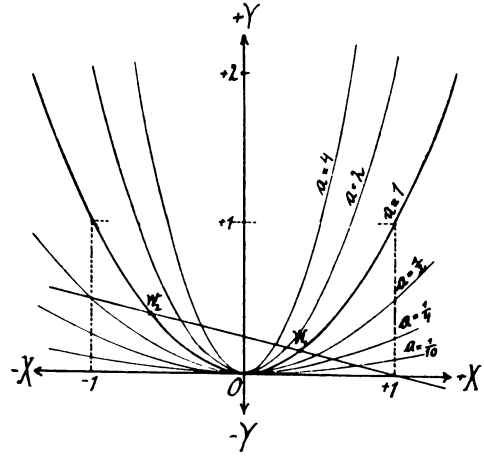


Рис. 129.

а) Зачнемо зі співчинника a, що стоїть при квадратовому члені, отже відступимо від нашого правила й напишемо рівняння виїмково не в нормальному вигляді:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a \neq 1) \qquad (13)$$

при чому вважатимемо a додатнім (в противному разі множимо рівняння обіруч на -1). Його розбиваємо так: $ax^2=-bx-c$, отже отримуємо з нього пару функцій:

$$\left.\begin{aligned} y&=ax^2 \\ y&=-bx-c. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Перша з них уявляє собою параболу в нормальному положенні, але її ширина буде змінюватись, бо ж приймаємо, що a — змінний параметер; зате проста лінія, дана другим рівнянням, буде постійна. Відповідно до змін співчинника a будуть змінюватись точки перетину обох ліній, отже й коріні рівняння (рис. 129).

Коли a росте, парабола стає вужча, а точки W_1 і W_2 наближаються до осі Y; та для нас особливо важний цей випадок, що a безмежно меншає, отже $\lim a \to 0$.

В такому разі рівняння (13) змагає до того, щоби стати лінійним:

$$bx+c=0 \tag{13a}$$

та мати тільки одну розвязку: $x=-\frac{c}{b}$. Отсій розвязці відповідатиме точка перетину простої $y=-bx-c$ з віссю X, т. зн. із лінією $y=0$. Повстає питання, що стається тоді з другим корінем рівняння.

Відповідь на нього знайдемо в геометричному поясненні. Коли a меншає, отже парабола ширшає, тоді точки W_1 і W_2 пересуваються по простій (W_1W_2); W_1 відсувається в напрямку до осі X, отже до A, а W_2 віддалюється над усяку міру вліво, так, що ми не матимемо змоги відчитати її рядну на рисунку. Таким чином наш уклад, який у межевому випадкові прийме форму:

$$\lim_{a\to 0} y=0, \qquad y=-bx-c, \tag{14^1}$$

матиме розвязки:

$$\lim_{a\to 0} x_1=-\frac{c}{b}, \qquad \lim_{a\to 0} x_2=\pm\infty.$$

До того самого висліду дійдемо теж рахунком. Розвязка рівняння (13) є:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{15}$$

тут знаменик $2a$ змагає до межі нуль, але не може стати нулем, бо тоді розвязка стратила би своє значіння. Що тоді станеться, до того дійдемо дорогою межевого переходу. Обчислім $\sqrt{b^2-4ac}$, приймаючи, що a дуже мале в порівнянні до b; це дасть (уст. 109 г):

$$\sqrt{b^2-4ac} \approx b-2\frac{ac}{b}$$

(бо $\left(b-2\frac{ac}{b}\right)^2=b^2-4ac+4\frac{a^2c^2}{b^2}$ ріжниться від виріжника тільки дуже малим доданком $4\frac{a^2c^2}{b^2}$, який можна пропустити). Отже:

$$x \approx \frac{-b\pm\left(b-2\frac{ac}{b}\right)}{2a}, \tag{16}$$

т. зн.:

$$x_1 \approx \frac{-b+b-2\frac{ac}{b}}{2a} = -\frac{c}{b},\quad x_2 \approx \frac{-b-b+2\frac{ac}{b}}{2a} = -\frac{b}{a}+\frac{c}{b}, \tag{17}$$

отже x_1 змагає до межі $-\frac{c}{b}$, а x_2 при $\lim a \to 0$ росте над усяку міру.

Нпр. $0{,}001\,x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}=0$; тут є: $a=0{,}001$, $b=\frac{1}{4}$, $c=-\frac{1}{4}$, отже: $x_1 \approx 1$, $x_2 \approx -251$. Докладна ж розвязка дала би:

$$x^2 = -125 \pm \sqrt{125^2+250} = -125 \pm 5\sqrt{635} = -125 \pm 125{,}9963\ldots,$$

$$x_1 = +0{,}9963\ldots \approx +1,\quad x_2 = -250{,}9963\ldots \approx -251.$$

Зробіть спробу!

Рівняння, в якому a дуже мале (в порівнянні до b і c) завсіди розвязальне, бо тоді у виріжнику b^2-4ac переважає b^2, отже: $b^2-4ac>0$.

б) Того самого методу можна вжити часами у випадках, коли співчинники b і c рівняння в нормальному вигляді (1) дуже великі,— а нам вистарчить тільки приближний вислід; тоді ділимо рівняння обіруч на якесь дуже велике число того самого порядку, що числа b і c, отже отримуємо рівняння з дуже малим співчинником при x^2.

Нпр. рівняння $x^2-584\,292x+1\,387\,491=0$ зведемо до форми: $0{,}000\,001x-0{,}584\,292x+1{,}387\,491=0$;

тут є $a=0{,}000001$, $b=-0{,}584\,292$, $c=1{,}387\,491$, отже буде $x_1 \approx -\frac{c}{b}=+2{,}37465\ldots$,

$x_2 \approx -\frac{b}{a}+\frac{c}{b}=584292{,}37465\ldots$ Докладна розвязка є: $x_1=2{,}37466\ldots$,

$x_2=584289{,}62534\ldots$, отже недокладність в обох корінях менша $0{,}001\%$.

в) Тепер уже можемо знову вернутися до нормального вигляду рівняння й будемо дискувати змінність співчинників b і c.

Рівняння форми:

$$x^2+mx+c=0, \tag{19}$$

$$x^2+bx+m=0, \tag{20}$$

де b, c, постійні, а m — змінне, ми пояснювали як уклади, зложені з нормальної параболи в нормальному положенні та жмутка простих із вершком на осі Y, або громади рівнобіжних простих. Отсі два випадки в цьому простому вигляді для нас мало інтересні; тому замість параметру m будемо приймати якусь функцію того параметру.

Нпр. (1) $$x^2-(2m+3)x+4=0. \qquad (*)$$

Отсе рівняння розвязальне тоді, коли його виріжник невід'ємний, отже $\Delta=(2m+3)^2-4.4\geqq 0$.

Розкладім цей квадратовий тричлен на лінійні чинники; зробимо це так, що будемо його вважати ріжницею двох квадратів:

$$(2m+3+4)(2m+3-4)=(2m+7)(2m-1).$$

Отсей добуток додатній, коли обидва його чинники однакових знаків, отже коли одночасно є: $2m+7>0$ і $2m-1>0$, або: $2m+7<0$ і $2m-1<0$.

Коли приймемо $2m-1>0$, отже $2m>1$, то тим самим буде $2m+7>0$, а коли буде $2m+7<0$, т. зн. $2m<-7$, тоді матимемо також $2m-1<0$. Таким чином буде $\Delta>0$, коли $m>\frac{1}{2}$, або $m<-\frac{7}{2}$. Коли ж захочемо мати $\Delta=0$, то це вимагає, щоб один із чинників став нулем, а це буде для $m_1=\frac{1}{2}$ і $m_2=-\frac{7}{2}$. Загалом же m виріжник буде не-від'ємний, коли m належатиме до одного із двох обсягів: $m\geqq m_1=\frac{1}{2}$, $m\leqq m_2=-\frac{7}{2}$. Обсяг $\left(-\frac{7}{2},+\frac{1}{2}\right)$ виключений, бо в ньому один із чиннників виріжника додатній, другий від'ємний.

Вислід дотеперішньої дискусії представимо наглядно так:

Рис. 130.

Тепер розбиваємо дане рівняння на: $x^2=(2m+3)x-4$, отже творимо з нього уклад:

$$\left.\begin{aligned} y&=x^2,\\ y&=(2m+3)x-4,\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

який уявляє собою нормальну параболу в нормальному положенні та жмуток простих, що має вершок S у віддалі — 4 на осі Y (рис. 131). Отсей вершок лежить поза параболою, тому не всі прості, які належать до жмутка, будуть перетинати параболу. Дозволений обсяг відмежований двома доторкальними параболи, ST_1 і ST_2, які можна повести з точки S. Їх отримаємо так, що прирівняємо виріжник укладу до нуля, т. зн. приймемо за параметер: $m_1=\frac{1}{2}$ або: $m_2=-\frac{7}{2}$ (рівняння доторкальних будуть $y=\pm 4x-4$, отже вони обидві однаково нахилені до осі X). Точки дотику мають рядні $+2$ та -2, отже обидва рівняння: $x^2\pm 4x+4=0$ мають подвійні коріні: перше $+2$, друге -2.

Коли за m возьмемо число більше від $\frac{1}{2}$ або менше від $-\frac{7}{2}$, то через те зросте співчинник нахилу простої (беручи числово), отже проста стане більше стрімка, т. зн. вона буде перетинати параболу в двох точках, а саме: коли m

належить до обсягу $A\left(m>\frac{1}{2}\right)$, обидві точки перетину лежать праворуч осі Y, отже обидва корені рівняння додатні, коли ж m із обсягу $Б\left(m<-\frac{7}{2}\right)$, точки перетину обидві ліворуч, отже обидва корені від'ємні. В обох випадках точки дотику T_1 і T_2 розмежовують точки перетину простої з параболою.

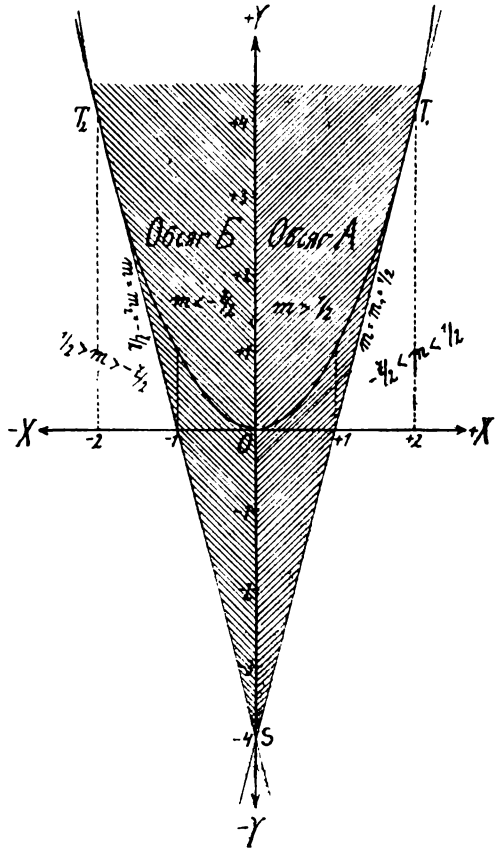


Рис. 131.

Зате, коли m належатиме до виключеного обсягу, т. зн. $\left(-\frac{7}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, то ні одна проста не буде перетинати параболи, отже рівняння не матиме корінів.

Для $m=\pm\infty$ співчинник нахилу простої стає безконечно великий, отже проста зливається з віссю Y, яка й розмежовує обсяги A і $Б$; в цьому пограничному випадкові маємо корені:

$$\lim_{m\to\infty} x_1=\pm\infty,\quad \lim_{m\to\infty} x_2=0.$$

Вислід дискусії представимо наглядно так, що на числовій лінії, яку вважатимемо «віссю m», будемо писати відповідні вартости коренів рівняння (див. рис. 130).

(2) $$x^2-x+(2m-1)=0.$$

Виріжник рівняння має бути невід'ємний, отже:

$$\Delta=1-4(2m-1)=5-8m\geqq 0,$$

т. зн. $m\leqq\frac{5}{8}$. Таким чином маємо тільки один дозволений обсяг, ліворуч від точки $\frac{5}{8}$, на межі якого $\left(m=\frac{5}{8}\right)$ буде $\Delta=0$.

Розбиваючи рівняння на $x^2=x-(2m-1)$, творимо уклад:

$$\left.\begin{aligned} y&=x^2,\\ y&=x-(2m-1),\end{aligned}\right\}$$

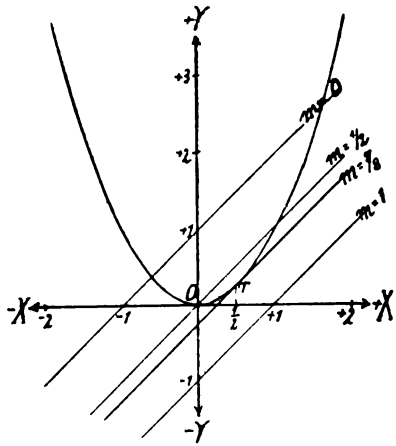


Рис. 132.

який вимагає, щоби парабола перетиналася з громадою рівнобіжних простих (рис. 132). Коли $\Delta=0$, маємо доторкальну параболи, яка розмежовує дозволений обсяг (горішній) від недозволеного (долішнього); доторкальна доторкається параболи в точці $T\left(x=\frac{1}{2}\right)$, яка й дає подвійний корінь рівняння. Нехай m меншає, від $m_0=\frac{5}{8}$ униз; тоді проста буде підсуватися рівнобіжно вгору. Доки вона не перейде через осередок перехрестя 0, обидва коріні є додатні; при $m=\frac{1}{2}$ один із коренів стає нулем, а далі цей корінь переходить на від'ємний бік, тоді

як другий корінь постійно додатній та постійно росте. Врешті треба ще завважити, що додатній корінь має завсіди більшу числову вартість.

Виспід дискусії:

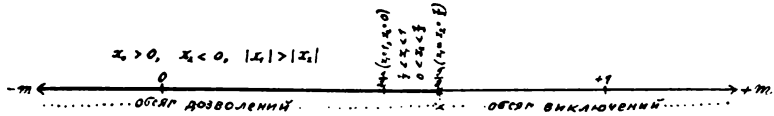


Рис. 133.

142. **Дискусійні завдання другого ступіня.** «Завданням другого ступіня» звемо завдання (з физики, геометрії, а то й практичного життя), яке веде до розвязки рівняння другого ступіня. В попереднього параграфі займались ми вже того роду прикладами; тут перейдемо кілька завдань, які крім розвязки вимагають іще дальшого досліду. Розуміється, що такі рівняння будуть містити в собі загальні величини, які могли би грати ролю змінних параметрів. Для простоти обмежимося тут (і у вправах) до таких завдань, які матимуть тільки один параметер (вже при двох параметрах могли би ми наткнутися на великі трудноші).

До найпростіших завдань того роду належить нпр. таке:

«Дані: обвід прямокутника $2s$ і його площина p; знайти довжину його боків».

Коли один бік прямокутника назвемо x, то другий бік буде $s-x$, отже площина матиме вартість $x(s-x)=p$. Звідсіля виходить рівняння: $x^2-sx+p=0$; воно розвязальне, коли $\Delta=s^2-4p\geqq 0$, отже коли $s^2\geqq 4p$. Тоді є: $x=\frac{s}{2}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, і ми маємо обидва боки прямокутника: $x_1=\frac{s+\sqrt{\Delta}}{2}$, $x_2=\frac{s-\sqrt{\Delta}}{2}$.

Спроба: $x_1+x_2=s$, $x_1x_2=\frac{s^2-\Delta}{4}=p$, як і повинно бути.

У граничному випадкові є: $x_1=x_2=\frac{s}{2}$, $s^2=4p$, і ми маємо квадрат.

Тут ми розвяжемо два складніші завдання й покажемо дорогу, як такі завдання зводити до квадратових (і взагалі алгебричних) рівнянь.

(1) «Даний рівнораменний трикутник (основа s і рамено r); на простій, що поведена через вершок рівнобіжно до підстави, визначити точку так, щоби її віддаль від одного з двох других вершків була рівна даній довжині l».

Дуже легко розвязати це завдання геометрично (рис. 134): дану довжину беремо в циркель і заточуємо нею з точки A лук, який рівнобіжну через 0 перетне в 2, 1 або 0 точках. Перший випадок буде, коли $l>AP$, другий, коли $l=AP$,

третій — при $l<AP$; а що $AP^2=r^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2$, то ці можливости зберемо в такий вислів:

завдання має: $\left\{\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}\right\}$ розвязок, коли $l^2 \gtreqless r^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2$.

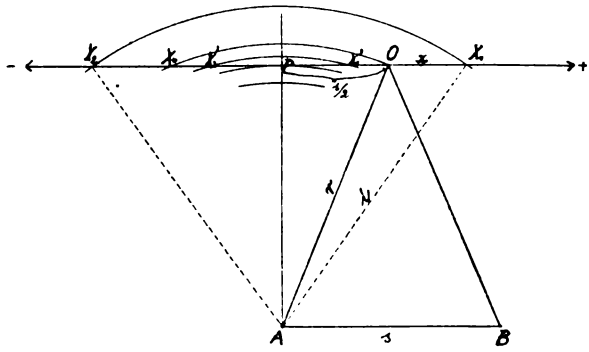


Рис. 134.

Та тут звернемо ще ввагу на положення точки X; вона може лежати направо або наліво від вершка O, а саме:
коли $l<r$, обидві точки X ліворуч вершка O;
коли $l=r$, одна точка падає на O, другає ліворуч у віддалі s;
коли $l>r$, одна точка ліворуч, друга — праворуч вершка O.

Всі ці відносини мусять відбитися в алгебричній розвязці завдання.

Назвім x віддаль точки X від O; тоді з ΔAPX, читаємо:

$$l^2=AP^2+\left(\frac{s}{2}+x\right)^2,$$

отже після підставлення вартости за AP й редукції отримаємо:

$$x^2+sx+(r^2-l^2)=0.$$

Рівняння розвязальне, коли $\Delta=s^2-4(r^2-l^2)\geqq 0$, отже: $l^2\geqq r^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2$; ця вимога згоджується з попередньою.

Сума корінів є $x_1+x_2=-s$, а добуток $x_1x_2=r^2-l^2$, отже обидва коріні можуть бути від'ємні, або ріжних знаків, але від'ємний мусить переважати. У першому випадкові їхній добуток додатний, отже $r^2-l^2>0$, т. зн. $l<r$, в другому — добуток від'ємний, т. зн. $l>r$; коли ж один корінь — нуль, тоді $l=r$.

Геометричне значіння додатніх та від'ємних корінів таке, що на простій через O вибіраємо додатній напрямок нпр. направо, отже всяка точка X праворуч від O має відрізну додатню, ліворуч від O — відрізну від'ємну. Таким чином стверджуємо, що при $l>r$ від'ємний корінь, т. зн. OX_2, переважає над додатнім OX_1.

(2) «Дані: прямий коловий рівнобічний стіжок (промінь підстави $=r$, творча лінія $s=2r$) і куля (промінь $=R$); обидва ці тіла лежать на спільній поземій площі. Перерізати їх другою поземою площею так, щоби кола, які отримаємо в перерізах, були однакові».

Тут питаємо про такі річі: (а) в якій висоті треба повести цей переріз? (б) яке мусить бути R у порівнянні до r, щоби завдання було можливе? (Приймаємо, що r постійне, R — змінне, отже стіжок завсіди один і той самий, а тільки куля зміняється).

І це завдання найлекше розвязати геометрично (рис. 135); кулю вставляємо в стіжок так, щоби її сторчовий поперечник упав на вісь стіжка, а точка дотику на осередок його основи. Тоді ці кола, в яких обидва тіла перерізуються, відповідають вимозі нашого завдання, яке в загальному випадкові матиме дві розвязці: коло CD і коло $C'D'$.

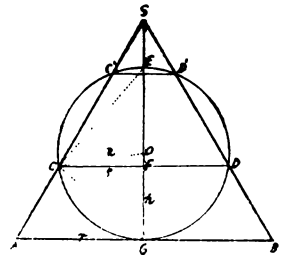


Рис. 135.

Коли будемо змінювати кулю, то будуть змінюватися й перерізи; із зменшуванням кулі вони будуть наближатись один до одного, потім — коли дійдемо до кулі, вписаної в стіжок — матимемо тільки один переріз, коло дотику, а коли куля ще далі зменшиться, то ціла поміститься в нутрі стіжка й перерізу не буде. Знову ж коли куля ростиме, горішній переріз буде меншати аж до нуля й стане нулем, коли поперечник кулі буде рівний висоти стіжка. Після того матимемо тільки один, долішній переріз; при безконечному рості кулі він буде змагати до того, щоби зійтися з підставою стіжка AB.

Тепер укладемо відповідне рівняння. Назвім віддаль площі перерізу від підстави h, а промінь кола в перерізі ϱ, тоді буде: з ΔCEG (в кулі) $\varrho^2=h(2R-h)$, а з $\Delta SCF\backsim\Delta SAG$ (в стіжку): $\frac{\varrho}{r}=\frac{SF}{SG}=\frac{r\sqrt{3}-h}{r\sqrt{3}}$, т. зн. $\varrho=r-\frac{h}{\sqrt{3}}$, отже: $\left(r-\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2=h(2R-h)$, т. зн.:

$$\frac{4}{3}h^2-2\left(R+\frac{r}{\sqrt{3}}\right)h+r^2=0, \qquad (*)$$

де невідоме h, постійне r, а змінний параметер R. Виріжник того рівняння є:

$$\Delta=4\left(R+\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2-4\cdot\frac{4}{3}r^2=4\left[\left(R+\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2\right]=4\left(R+r\sqrt{3}\right)\left(R-\frac{1}{3}r\sqrt{3}\right).$$

Його перший чинник завсіди додатній, отже умова розвязальности буде:

$$R\geqq\frac{1}{3}r\sqrt{3},$$

т. зн. дана куля мусить бути більша від кулі, вписаної в стіжок, або бодай рівна їй; межевою вартістю є саме ця вписана куля з промінем:

$$R_0=\frac{1}{3}r\sqrt{3}.$$

З другого боку завважуємо, що не кожне h відповідає умовам даного *геометричного* завдання; для $h>2R$ матимемо тільки одну розвязку, бо тоді не буде горішнього перерізу, а при $h>r\sqrt{3}$ розвязки взагалі не буде.

Вислід дискусії вберемо в таку табличку:

$R<R_0$		розвязок нема;
$R=R_0=\frac{1}{2}r\sqrt{3}$		1 розвязка: куля вписана в стіжок;
$R>R_0$	$R<r$	2 розвязки;
	$R=r$	2 розвязки; з того одна редукується до нуля: куля переходить через вершок S;
	$R<r$	1 розвязка; друга непригожа, бо куля виходить поза стіжок.

Пробуйте розвязувати завдання так, щоби за невідому брати $\frac{h}{r}=x$, а за параметер $\frac{R}{r}=m$.

На цьому прикладі бачимо, що не цілий обсяг розвязальности алгебричного рівняння дає пригожі розвязки поставленого геометричного завдання; звичайно цей другий обсяг буває вужчий.

ВПРАВИ.

I.

1. Укласти квадратові рівняння, що мають такі пари корінів:

а) $x_1=3$ | 2 | 4 | 5 | 8 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{7}{11}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{63}{64}$;

$x_2=5$ | -2 | $4\frac{1}{2}$ | -7 | -11 | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{5}{4}$ | $\frac{8}{3}$ | $\frac{4}{11}$ | $-\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{64}$;

б) $x_0=a+b$ | $a+\frac{1}{b}$ | $\frac{a}{b}$ | $\frac{a}{b}$ | $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ | $a+\frac{1}{a}$ | $a+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{4}$;

$x_2=a-b$ | $b+\frac{1}{a}$ | $\frac{b}{a}$ | $-\frac{b}{a}$ | $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ | $a-\frac{1}{a}$ | $\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{4}{a^3}$;

в) $x_1=2+\sqrt{2}$ | $3+\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{5}$ | $1+\sqrt{7}$ | $-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}\sqrt{11}$;

$x_2=2-\sqrt{2}$ | $3-\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{5}$ | $1-\sqrt{7}$ | $-\frac{2}{9}-\frac{4}{9}\sqrt{11}$;

г) $x_1=\sqrt{2}\left|1+\sqrt{3}\right|\sqrt{2}+\sqrt{3}\left|\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right.$;

$x_2=-3\sqrt{2}\left|1-2\sqrt{3}\right|\sqrt{2}-\sqrt{3}\left|\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right.$;

д) $x_1=a+b\sqrt{2}\left|\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sqrt{2}\right|\frac{a}{2}\sqrt{2}+\frac{b}{3}\sqrt{3}\left|\frac{a+b}{2}\sqrt{3}+\frac{a-b}{3}\sqrt{5}\right.$;

$x_2=a-b\sqrt{2}\left|\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sqrt{2}\right|\frac{a}{2}\sqrt{2}-\frac{b}{3}\sqrt{3}\left|\frac{a-b}{2}\sqrt{3}-\frac{a+b}{3}\sqrt{5}\right.$;

2. Розкласти на лінійні чинники такі квадратові тричлени:

а) $x^2-13x+36$; $x^2+7x-144$; $3x^2-22x+35$; x^2-6x+7; $x^2-9x-22$; $x^2-18x-63$; $x^2-10x-24$; $x^2-13x-30$; $3x^2-8x+4$; $x^2-0{,}1x-0{,}06$; x^2-4; $2x^2-18$; $3x^2-75$; $16x^2-9$;

б) $x^2-8x+14$; $9x^2-18x-19$; $16x^2-24x-71$; $x^2+8x+14$; x^2-3; $2x^2-9$; $3x^2-25$; $8x^2-9$;

в) $2a^2x^2-abx-b^2$; $cx^2+(bc-a)x-ab$; $ax^2+bx-(b-a)$; $4x^2+2(p-3q)x-(2p^2+3pq-2q^2)$.

II.

Розв'язати такі нерівності:

1. $x^2+3x-15>0$;
2. $x^2-3x-15<0$;
3. $(x-1)(x+2)+2>0$;
4. $(x-1)(x-2)-2<0$;
5. $2<\frac{x^2-x-2}{x-1}<4$;
6. $\frac{x+2}{x-3}>\frac{x-3}{x+4}>\frac{x+4}{x-1}$.

III.

Дискусія рівнянь:

А.

1. $0{,}0001x^2-px+q=0$;
2. $\frac{x^2}{10^n}-px+q=0$ $(n\geqq 5)$;
3. $x^2+10^npx+10^{2n}q=0$;
4. $x^2-10^npx+10^{2n}p^2=0$;

Б.

1. $x^2-(m+1)x+3=0$;
2. $x^2-\left(m-\frac{3}{2}\right)x+\frac{1}{2}=0$;
3. $x^2+(m+2)x-1=0$;
4. $2x^2-(4-m)x-2=0$;
5. $4x^2-(2m+1)x+3=0$;
6. $6x^2-(3m-1)x-5=0$.

В.

1. $x^2-6x+(5-m)=0$;
2. $x^2-4x+(3-m)=0$;
3. $2x^2-9x+m=0$;
4. $3x^2-2x+(m-3)=0$;
5. $ax^2-bx+(c-m)=0$;
6. $x^2-(a+b)x-(m-ab)=0$.

Г.

1. Доказати, що рівняння:

а) $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}+\frac{1}{c-x}=0$;

б) $(x-a)(x-b)-c^2=0$;

в) $\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-9}-1=0$;

г) $\frac{a^2}{p^2+x}+\frac{b^2}{a^2+x}=1$;

д) $x^2+2bx-p^2=0$;

мають завсіди по два коріні.

2. Для яких вартостей параметру m рівняння: $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+m}$ має два ріжні коріні? (Приймаємо нпр. $a>b$).

3. Доказати, що параметер m має дві такі вартости: m_1 і m_2, для яких функція $ax^2+bx+c+m(x^2+1)$ стає квадратом лінійної функції.

4. Розвязати приближним способом такі рівняння:

а) $x^2+2005x+4118=0$;

б) $x^2+10000x-100\,000=0$;

в) $x^2-312\,689x+48\,739\,611=0$;

г) $x^2-47\,000x+16\,000=0$.

5. Рівнобічний трикутник і коло, що лежить на продовженні підстави трикутника, перетяти простою рівнобіжною до підстави так, щоби її відтинок між боками трикутника був рівний тетиві кола. Дослід; геометрична інтерпретація.

6. Квадрат і рівнобічний трикутник, що лежать на спільній основі, перетяти простою рівнобіжною до основи так, щоби площина відрізаної горішньої частини квадрату була рівна площині трапезу, який отримаємо з трикутника між обома рівнобіжними.

7. Даний довільний трикутник; усі три його боки продовжити або скоротити на однакову довжину x так, щоби новий трикутник став прямокутним.

8. У півколо вписати такий трапез, щоби його обвід був $2s$.

9. В коло (r) вписати рівнораменний трапез із обводом $4p$.

10. На колі (r) описати такий трапез, щоби мав площину t.

11. Кулю (r) перерізати площею так, щоби сума кола в перерізі й меншого верха кулі, була рівна колу з промінем a.

12. Через дану точку p провести просту так, щоби відтинки на січній даного кола, числячи від P, стояли у відношенні $k:1$.

13. Два співсередкові кола перетяти січною так, щоби між колами повстали три рівні відтинки.

14. У півколо з промінем R вписати прямокутний трикутник так, щоби сума його прямок була $=a$.

§ 24. Теорія злучених чисел.

143. **Пояснення злучених чисел і дії ними.** а) З досліду квадратових рівнянь (уст. 135б) знаємо, що рівняння:

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

розвязальне, коли його виріжник:

$$\Delta=b^2-4ac \tag{2}$$

не від'ємний; рівняння має тоді два ріжні коріні або один подвійний. Коли ж виріжник від'ємний, тоді не вміємо розвязати рівняння; це стоїть у звязку з тим, що не існують квадратові коріні з від'ємних чисел.

Щоби позбутися цієї останньої неможливости у викональности алгебричних дій, мусимо рішитися ще на одне поширення числового тіла: нам треба ввести нові символи, які відповідали би квадратовим коріням із від'ємних чисел.

З тією метою **пояснюємо**: *корінь рівняння*:

$$x^2+1=0 \quad \text{або} \quad x^2=-1 \tag{3}$$

зветься *уявною одиницею*; *його значимо буквою* i:

$$i=\sqrt{-1}. \tag{4}$$

Таким чином вводуємо **нове число**: *уявну одиницю*, *тоб-то таку величину*, *що її квадрат рівний від'ємній одиниці*:

$$i^2=-1. \tag{5}$$

Уявна одиниця — це справді *нове число*, бо в обсягу дотеперішніх чисел немає таких величин, які піднесені до квадрату давали би від'ємні висліди; бо:

$$(+a)^2=+a^2 \text{ і } (-a)^2=+a^2.$$

б) Розвязку рівняння:

$$x^2+k^2=0 \quad \text{або} \quad x^2=-k^2$$

ведемо так: $\frac{x^2}{k^2}=\left(\frac{x}{k}\right)^2=-1$, $\frac{x}{k}=\sqrt{-1}=i$, отже $x=k\,.\,i$. Величина $k\,.\,i$ або ki зветься *уявним числом*, отже *уявне число — це збірка* (сума) *уявних одиниць*:

$$ki=\underbrace{i}_{1}+\underbrace{i}_{2}+\underbrace{i}_{3}+\ldots+\underbrace{i}_{k}.$$

У противенстві до уявних чисел усі дотеперішні числа будемо **називати** *дійсними*.

в) Розвязка повних квадратових рівнянь із від'ємним виріжником веде нас до творення величин, які будуть зложені із обох родів чисел: дійсних і уявних.

Нпр. $x^2-4x+13=0$; $\Delta=(-4)^2-4\cdot 13=16-52=-36$.

Це рівняння нерозвязальне, бо його розвязка мусіла б бути:

$$x=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}.$$

Коли ж напишемо далі: $-9=9\cdot(-1)$, отже: $\sqrt{-9}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=3i$, то корінь рівняння зможемо представити в такому вигляді:

$$x=2\pm 3i.$$

Значить, та сама потреба, яка приневолила нас ввести уявні числа, велить нам теж творити числа, зложені з дійсних та уявних одиниць; будемо їх писати як суму тих двох родів чисел. Вони матимуть назву *злучених чисел*; їхній загальний вигляд буде:

$$a+bi,$$

де співчинники a та b — дійсні числа. a зветься *дійсною*, b — *уявною частиною* злученого числа.

Дві злучених числі, що ріжняться тільки знаком співчинника уявної частини, творять *пару спряжених чисел*: $a+bi$ та $a-bi$. Дві злучених числі, що ріжняться знаками обох частин, назвемо *парою протилежних чисел*: $a+bi$ та $-a-bi$.

Дві пари спряжених, протилежних чисел називають часами *четвіркою подібних чисел*: $a+bi$, $a-bi$; $-a-bi$, $-a+bi$.

г) *Дії злученими числами виконуємо* так, що кладемо дві умови:

(а) два злучені числа будемо вважати рівними тоді й тільки тоді, коли їхні дійсні частини рівні й уявні частини рівні;

(б) при аритметичних діях злучені числа трактуємо як алгебричні суми (отже символ i як звичайний співчинник).

На основі цеї другої умови отримаємо такі висліди:

(1) $$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i; \qquad (6)$$

злучені числа додаємо або віднімаємо так, що додаємо або віднімаємо окремо їхні дійсні й окремо їхні уявні частини.

Особливо ж буде:

$$(a+bi)+(a-bi)=2a; \qquad (6a)$$

сума двох спряжених чисел дійсна, рівна подвійному дійсному співчинникові, і далі:

$$(a+bi)+(-a-bi)=0; \qquad (6b)$$

сума двох протилежних чисел — нуль.

(2) $$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2,$$

а що на основі рівняння (5) можемо замість i^2 написати -1, то матимемо:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i; \qquad (7)$$

добуток двох злучених чисел — теж злучене число.

Особливо ж буде $(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2$, а що i^2 можемо заступити від'ємною одиницею, то матимемо:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2. \tag{7a}$$

Добуток двох спряжених чисел дійсний; він рівний сумі квадратів обох співчинників.

У світлі рівняння (7a) являється нам нова змога розкладати деякі многочлени на чинники, яких досі нам не вдавалося розкласти. Так напр. сума квадратів, a^2+b^2 незводильна у всякому дійсному тілі (вимірному чи невимірному), розкладається на суму двох спряжених чинників, $a+bi$ та $a-bi$; отже й тут (подібно як було при невимірних числах) поширення числового тіла якоюсь коріневою величиною (а саме корінем із від'ємного числа) веде до поширення можливостей розкладу на чинники.

Відноситься те саме до чисел, які в тілі вимірних і невимірних чисел були прості; напр. $5=2^2+1^2=(2+i)(2-i)$, або теж $5^2=1^2+2^2=(1+2i)(1-2i)$.

(3) При діленні, в якому дільником є злучене число, треба нам перше позбутися уявного складника із знаменика; подібно, як було при невимірних числах, поширюємо дріб числом, що спряжене з дільником. Тоді на основі рівняння (7a) отримаємо в знаменику дійсне число:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

або:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i. \tag{8}$$

Особливо ж буде:

$$\frac{1}{i}=\frac{1.(-i)}{i.(-i)}=\frac{-i}{-i^2}=\frac{-i}{1},$$

т. зн.:

$$\frac{1}{i}=-i. \tag{8a}$$

Напр. $\dfrac{2+3i}{4-5i}=\dfrac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=\dfrac{(8-15)+(12+10)i}{4^2+5^2}=-\dfrac{7}{41}+\dfrac{22}{41}i.$

(4) Коли будемо степенювати уявну одиницю, отримаємо:

$$i^2=-1,$$
$$i^3=i^2\,.\,i=(-1)\,.\,i=-i,$$
$$i^4=i^3\,.\,i=(-i)\,.\,i=-i^2=+1 \text{ або } i^4=(i^2)^2=(-1)^2=+1,$$
$$i^5=i^4\,.\,i=1\,.\,i=i,$$
$$i^6=i^4.\,i^2=1\,.\,i^2=1\,.\,(-1)=-1,$$
$$i^7=i^4.\,i^3=1\,.\,i^3=1\,.\,(-i)=-i,$$
$$i^8=(i^4)^2=1,$$

і т. д., отже чергові степені уявної одиниці будуть повторюватися періодово, що чотири, в такому порядкові:

$$+i,\ -1,\ -i,\ +1.$$

Загально цей наступ буде виглядати так:

$$\begin{aligned} i^{4n+1} &= +i, \\ i^{4n+2} &= -1, \\ i^{4n+3} &= -i, \\ i^{4n+4} &= +1, \end{aligned}$$

бо $i^{4n}=(i^4)^n=1$, отже:

$$i^{4n+4}=i^{4n}\cdot i^k=i^k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{9}$$

Кожний степень злученого числа можна знову зредукувати до злученого числа.

Нпр. $(3-2i)^4=3^4-4.3^2.2i+6.3^2.2^2i^2-4.3.2^3i^3+2^4i^4=81-216i-216+96i+16=-119-120i$.

д) Так отже кожна з чотирох основних дій (сюди можна вчислити теж степенювання), перероблена на злучених числах, дає знову злучене число. На основі того можна сказати, що *злучені числа творять числове тіло*. Його отримаємо, коли до тіла дійсних чисел добавимо уяву одиницю; назначимо його $k(\sqrt{-1})$ або $k(i)$. Зветься це тіло *квадратовим злученим* (*числовим*) *тілом* або коротко *злученим тілом*.

Назва «уявне число» вибрана доволі невдало, бо ж у суті річі кожне число уявне; ми уявляємо собі, що всі предмети, які перечислюємо, однакові, хоч у дійсности кождий із них ріжниться від другого.

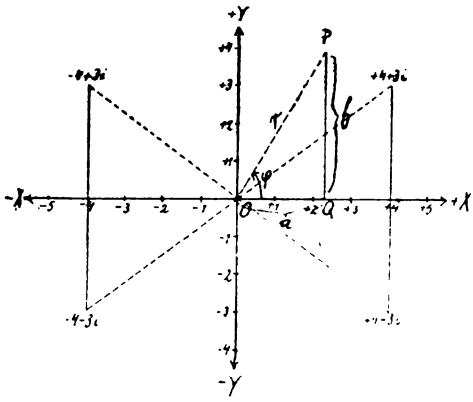


Рис. 136.

144. **Рисункове з'ясовування злучених чисел.** а) Для образів злучених чисел не стає вже місця на числовій лінії, на якій ми з'ясовували всі дотеперішні поширення природнього ряду чисел (від'ємні, дробові та невимірні числа). Для злучених чисел, які не мають ніякого мірного відношення з тими всіми дійсними числами, треба придумати з'ясування поза числовою лінією.

До тої цілі в точці *O* числової лінії (рис. 136) рисуємо сторчову лінію й робимо на ній поділку (звичайно таку саму, як на поземій лінії); на цій лінії будемо відмірювати уявні числа, отже назвемо її *віссю уявних чисел* або *уявною віссю* — у відріжненню від поземої *осі*

дійсних чисел або *дійсної осі*. Горішня половина уявної осі служить до відзначування додатніх, долішня — до відзначування від'ємних уявних чисел.

Злучені числа будемо з'ясовувати точками площі, так що числу $a+bi$ буде відповідати точка із співрядними (a, b), отже образ того числа буде віддалений на a одиниць від сторчової і на b одиниць від поземої осі.

На рис. 136 бачимо образи чисел $4+3i$, $-4+3i$, $-4-3i$, $4-3i$, які лежать у I, II, III і IV чвертці. Що-дві спряжених числі лежать у I і і IV або II і III чвертці; протилежні числі — в протилежних чвертках I і III та II і IV, а всі ці чотири точки розложені симетрично на обводі кола.

б) Віддаль точки $a+bi$ від початку співрядних O обчислюємо по теоремі Пітагора: з $\triangle OPQ$ (рис. 136) виходить:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

Цю віддаль звемо *без'оглядною вартістю* злученого числа, а значимо її так: $|a+bi|$, отже:

$$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{10}$$

Із рисунку видко, що чотири подібні злучені числа: $a+bi$, $a-bi$, $-a+bi$, $-a-bi$ мають однакові без'оглядні вартости, бо квадрати співрядних усіх тих чисел є $+a^2$ і $+b^2$, отже:

$$|a+bi|=|a-bi|=|-a+bi|=|-a-bi|=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{10a}$$

Без'оглядну вартість злученого числа приймаємо завсіди за додатнє число, як і без'оглядну (числову) вартість відносного числа (див. уст. 32б); тут в обох випадках без'оглядна вартість числа — це віддаль відповідної точки на площі від початку числення на числовій лінії або площі.

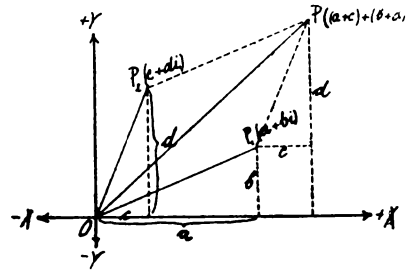


Рис. 137.

На нашому рисункові є: $|4+3i|=|4-3i|=|-4+3i|=|-4-3i|=\sqrt{4^2+3^2}=5$; усі чотири точки лежать на обводі кола промінем 5 кругом O.

в) На числовій лінії можна виконувати також дії злученими числами.

Суму двох злучених чисел з'ясовуємо так, що рисуємо образи доданків, сполучуємо їх із точкою O, а потім ці дві прості доповнюємо до рівнобіжника; його вершок, протилежний точці O, буде образом суми (рис. 137).

Така дія зветься *геометричним додаванням*. Вона лежить у тому, що ми до кінцевої точки відрізка OP_1 дочіплюємо відрізок OP_2, пересунений рівнобіжно аж до точки P_1, отже робимо це так, неначе б то кінець першого відрізка (образ числа $a+bi$) був осередком нового перехрестя, і в ньому визначуємо образ другого доданка $c+di$. Коли ламану лінію OP_1P заступимо простою OP, матимемо *геометричну суму* відрізків r_1 і r_2.

Відрізки r_1 і r_2 замітні тим, що при них нам ходить не тільки про їхню довжину, але й про їхній напрямок; такі відрізки звуться *векторами*. Вектор не зміниться, коли його пересунемо рівнобіжно, бо тим не змінимо ні його довжини, ні напрямку. — Вектори мають дуже важне значіння м. и. у физиці.

Із рис. 137 видко, що $r_1+r_2 \geqq r$ (сума двох боків трикутника більша від третього боку); замість нерівности мали б ми рівність тільки тоді, як би відрізки OP_1 і P_1P (або OP_2) припали на одну просту лінію, отже:

$$r_1+r_2 \geqq r,$$

т. зн.

$$|a_1+b_1\,i|+|a_2+b_2\,i| \geqq |(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\,i|$$

або:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geqq \sqrt{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)^2} \qquad (11)$$

Сума без'оглядних вартостей двох злучених чисел не менша від без'оглядної вартости їхньої суми, або: *геометрична сума двох відрізків не менша від їхньої аритметичної суми.*

Віднімання злучених чисел виконуємо на основі взірця:

$$(a+bi)-(c+di)=(a+bi)+(-c-di),$$

отже замість віднімати від'ємник, додаємо до вменшимка число, що до нього протилежне; це значить, що його образ переносимо до протилежної чвертки (отже з I до III або з II до IV — чи навпаки) й тоді виконуємо додавання.

Для рисункового з'ясування множення й ділення злучених чисел краще надається тригонометричний спосіб.

145. **З'ясовування злучених чисел гоніометричними функціями.** а) Точка P, образ числа $a+bi$, це вершок прямокутного трикутника з прямками a і b (див. рис. 136). Кут φ в цьому трикутникові можемо обчислити з таких двох рівнянь:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r}\ ^*); \qquad (12)$$

---

*) Пригадуємо, що для визначення кута треба мати *дві ріжні* функції або одну функцію і принайменше знак другої (sin і cos, або sin і tg, або cos і tg — tg і ctg не вистарчать; чому?)

тут φ зветься *відхилом* злученого числа $a+bi$, а r — як знаємо — це *без'оглядна вартість* числа (кажуть також: *модуль* числа або *провідний промінь* точки P*).

Із тих основних рівнянь виходить:

$$a=r\cos\varphi, \quad b=r\sin\varphi, \tag{12a}$$

так, що співрядні числа $a+bi$ (або також: співрядні точки P) можна з'ясувати при допомозі модулю числа та функцій його відхилу. Звідсіля буде:

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{13}$$

Число, що має модуль r і відхил φ, називають теж «числом r із оборотом φ» і значать його: r_φ, так що:

$$r_\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{14}$$

Через те можемо злучені числа зводити до форми *напрямкових* або *оборотових величин*.

Нпр. перекутня одиничного квадрату має довжину $\sqrt{2}$, отже маємо (рис. 138):

$$1+i=(\sqrt{2})_{45^0}=\sqrt{2}\,(\cos 45^0+i\sin 45^0);$$

у прямокутному трикутникові, що є половиною рівнобічного з боком $=1$, маємо (рис. 139):

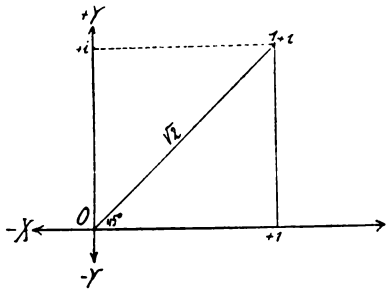


Рис. 138.

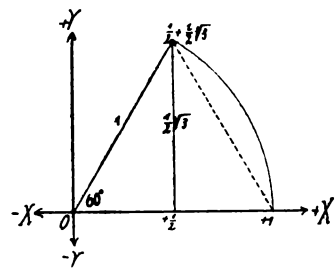


Рис. 139.

$$1_{60}=1\,.\,(\cos 60^0+i\sin 60^0)=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Для чисел дійсних, отже на осі X, відхил виносить 0^0 (на правій половині), або 180^0 (на лівій половоні), отже нпр. $+5=5_0$, $-3=3_{180^0}$. Для чисел на осі Y, отже чисто-уявних, є відхил 90^0 або 270^0, нпр. $+i=1_{90^0}$, $-2i=2_{270^0}$.

Коли точка P лежить на одиничному колі, отже коли $r=\sqrt{a^2+b^2}=1$, тоді є:

$$1_\varphi=\cos\varphi+i\sin\varphi. \tag{15}$$

*) Від латинського «*radius vector*».

З (14) і (15) виходить:

$$[r_\varphi = r \cdot 1_\varphi.] \tag{16}$$

Число 1_φ називаємо *напрямковою* (*оборотовою*) *одиницею*; рівняння (16) каже, що напрямкову величину (злучене число) можна представити як добуток його модулю (без'оглядної вартости) та напрямкової одиниці.

б) *Множення злучених чисел* виконаємо рисунково як множення напрямкових величин. Зачнемо з напрямкових одиниць.

Добуток $1_\varphi \cdot 1_\psi$ представимо так:

$$\begin{aligned} 1_\varphi \cdot 1_\psi &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot (\cos\psi + i\sin\psi) = \\ &= \cos\varphi\cos\psi + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) + i^2\sin\varphi\sin\psi = \\ &= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi), \end{aligned}$$

а що по правилах тригонометрії є:

$$\begin{aligned} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi &= \cos(\varphi+\psi), \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi &= \sin(\varphi+\psi), \end{aligned}$$

то цей наш добуток рівний сумі: $\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) = 1_{\varphi+\psi}$, отже:

$$1_\varphi \cdot 1_\psi = 1_{\varphi+\psi}. \tag{17}$$

Це значить:

Напрямкові одиниці множимо так, що додаємо їхні відхили.

Нпр. $1_{45^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = 1_{45^\circ+60^\circ} = 1_{105^\circ}$. Коли ці напрямкові величини зведемо до злученої форми, отримаємо:

$$1_{45^\circ} = \cos 45^\circ + i\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i),$$

$$1_{60^\circ} = \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ \quad \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}),$$

отже:

$$1_{45^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) \cdot \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\left[(1-\sqrt{3}) + i\,(1+\sqrt{3})\right].$$

З другого боку є:

$$1_{105^\circ} = \cos 105^\circ + i\sin 105^\circ,$$

а що $\cos 105^\circ = -\sin 15^\circ$, $\sin 105^\circ = \cos 15^\circ$, то:

$$1_{105^\circ} = -\sin 15^\circ + i\cos 15^\circ.$$

Далі знаємо, що $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, отже:

$$1_{105^\circ} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right).$$

Остаточно треба ще переконатися, що ці дві злучених числі, які ми тут отримали, однакові, отже що їхні дійсні та їхні уявні частини однакові. Коли ми в числі $\frac{1}{4}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$ двочлен, що є в скобках, втягнемо під знак коріня, отримаємо:

$$\frac{1}{4}\sqrt{2}(1+\sqrt{3}) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{2(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$ і так само для другої частини.

б) Нехай тепер будуть дані дві напрямкові величині, r_φ і ϱ_ψ; їхній добуток буде:

$$r_\varphi \cdot \varrho_\psi = r.1_\varphi \cdot \varrho.1_\psi = (r.\varrho).1_\varphi \cdot 1_\psi = (r\varrho).1_{\varphi+\psi},$$

отже на основі рівняння (15) напишемо:

$$r_\varphi \cdot \varrho_\psi = (r\varrho)_{\varphi+\psi}. \qquad (18)$$

Добуток двох напрямкових величин — нова напрямкова величина. Її модуль — добуток модулів обох чинників, а відхил — сума відхилів чинників.

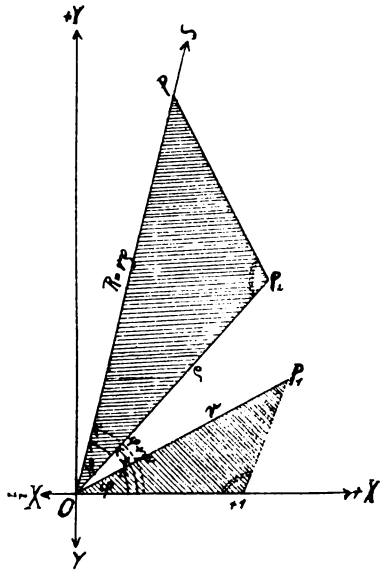


Рис. 140.

Геометричне множення виконуємо так (рис. 140):

Нехай будуть дані образи чисел r_φ і ϱ_ψ (точки P_1 і P_2), тоді рисуємо кут $\varphi+\psi = \sphericalangle XOS$, а на проміні OS відмірюємо довжину $R=r\varrho$. Щоби подати геометрично добуток двох довжин, не можемо рисувати прямокутника з боками r і ϱ, бо хочемо, щоби добутком була знову такиж довжина. До тої цілі пишемо такий добуток: $R.1=r.\varrho$ і творимо

з нього пропорцію: $\frac{R}{\varrho} = \frac{r}{1}$; тоді можна довжину R нарисувати як четверту пропорційну до трох даних $1, r, \varrho$. Маючи на осі X одиницю довжини, рисуємо $\triangle O1P_1$ і подібний до нього $\triangle OP_2P$ (при P_2 відмірюємо той кут, що є при 1); його вершок P буде образом добутку $r_\varphi \cdot \varrho_\psi$.

Геометричним образом множення на i буде оборот відтинка на прямий кут; образом множення на -1 оборот на півповний кут, отже :

$$r_\varphi i = r_\varphi \cdot 1_{90^\circ} = r \cdot 1_\varphi \cdot 1_{90^\circ} = r \cdot 1_{\varphi+90^\circ} = r_{\varphi+90^\circ},$$

$$r_\varphi \cdot (-1) \quad r_\varphi \cdot 1_{180^\circ} = r \cdot 1_\varphi \cdot 1_{180^\circ} = r \cdot 1_{\varphi+180^\circ} = r_{\varphi+180^\circ}.$$

Коли число r дійсне, отже $\varphi = 0^0$ або 180^0 (загалом $\varphi = k \cdot 180^0$), тоді число $r_{\varphi+180^\circ}$ буде перекинене на протилежну половину осі X. Це доказує, що наші дотеперішні пояснення множення дійсних та злучених чисел не суперечні одні з одними.

Коли число $a+bi$ будемо множити на степені уявної одиниці, отримаємо по черзі:

$$\begin{aligned}
(a+bi)i &= ai+bi^2 &&= -b+ai,\\
(a+bi)i^2 &= (a+bi)i^2 &&= -a-bi,\\
(a+bi)i^3 &= ai^3+bi^4 &&= -ai+b,\\
(a+bi)i^4 & &&= a+bi;
\end{aligned}$$

цим добуткам будуть відповідати вершки квадрату, перекутні якого сполучують протилежні точки $a+bi$ та $a-bi$ і $-b+ai$ та $-b-ai$. Такі чотири числа звуться *спорідненими*.

в) Нехай буде $\varphi = \psi$; тоді замість рівняння (17) матимемо:

$$(1_\varphi)^2 = 1_{2\varphi}, \tag{19}$$

отже *квадрат напрямкової одиниці отримаємо, коли подвоїмо її відхил.* Отсе правило можемо поширити й на більшу кількість чинників і матимемо:

$$(1_\varphi)^n = 1_{n\varphi} \tag{20}$$

для всякого цілого, додатнього числа n. Коли цей останній взірець перепишемо в тригонометричному вигляді, отримаємо:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Отсе дуже важне рівняння зветься *взірцем Муавра**).

Він пожиточний м. и. для обчислювання функцій $\sin n\varphi$ та $\cos n\varphi$, коли дані $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$. Провіримо його для 2φ і 3φ.

(1) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi + i^2\sin\varphi = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + i \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi =$
$= \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$;

(2) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi + 3i^2\cos\varphi\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi$,

---

*) Авраам *Муавр* (Moivre, 1667—1754), англієць, французького походження, подав отсей взірець 1722 р.

а що по взірцеві Муавра лівий бік цього рівняння має вартість $\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$, то порівняння дійсних і уявних співчинників дасть:

$$\begin{cases} \cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\,(1-\cos^2\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \\ \sin 3\varphi = 3\sin\varphi \cos^2\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi\,(1-\sin^2\varphi \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi. \end{cases}$$

До тих самих вислідів доводить нас теж тригонометрія.

г) Коли відхил напрямкової величини переступить межу 360^0 $(=2\pi)$, тоді будуть повторюватися ці самі вартости, що й досі, бо кінцева точка провідного проміня буде описувати округ того самого кола вдруге. Це з'явище стоїть у звязки з тим, що вартости гоніометричних функцій косинус і синус повторюються періодово, що 2π:

$$\cos(\varphi + k.360^0) = \cos(\varphi + 2k\pi) = \cos\varphi,$$
$$\sin(\varphi + k.360^0) = \sin(\varphi + 2k\pi) = \sin\varphi,$$

отже:

$$1_{\varphi + k.360^0} = 1_{\varphi + 2k\pi} = 1_\varphi, \tag{22}$$

а так само:

$$r_{\varphi + k.360^0} = r_{\varphi + 2k\pi} = r_\varphi, \tag{22a}$$

На основі тої уваги можна кожний від'ємний відхил заступити додатнім. Звичайно називаємо той оборот *додатнім*, що йде протилежно до руху стрілки годинника, отже *від'ємний відхил буде відбуватися згідно з рухом годинника*, (т. зн. від додатньої половини осі X униз — рис. 141). Взірець (22a) позволить нам написати:

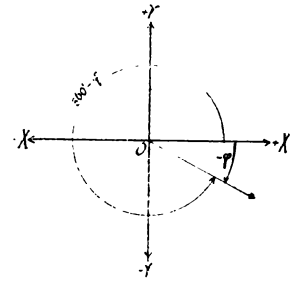


Рис. 141.

$$r_{-\varphi} = r_{360^0 - \varphi} = r_{2\pi - \varphi}. \tag{22б}$$

д) Із відвернення взірця (16) виходить:

$$\frac{1_\varphi}{1_\psi} = 1_{\varphi - \psi}, \tag{23}$$

бо $1_\psi \cdot 1_{\varphi-\psi} = 1_{\psi+(\varphi-\psi)} = 1_\varphi$, отже *дві напрямкових одиниці ділимо так, що віднімаємо їхні відхили.*

Коли $\varphi < \psi$, тоді ріжниця $\varphi - \psi$ від'ємна; її можна заступити додатнім відхилом $360^0 - (\varphi - \psi) = (360^0 - \varphi) + \psi$, отже можна написати також так:

$$\frac{1_\varphi}{1_\psi} = 1_{(360^0 - \varphi) + \psi} = 1_{(2\pi - \varphi) + \psi}. \tag{23a}$$

Частка двох напрямкових величин буде:

$$\frac{r_\varphi}{\varrho_\psi} = \frac{r.1_\varphi}{\varrho.1_\psi} = \left(\frac{r}{\varrho}\right).\ 1_{\varphi - \psi},$$

отже:

$$\frac{r_\varphi}{\varrho_\psi} = \left(\frac{r}{\varrho}\right)_{\varphi-\psi}. \tag{24}$$

Дві напрямкові величини ділимо так, що ділимо їхні модулі й віднімаємо нахили.

Тому то до геометричного з'ясування ділення треба нарисувати відхил $\varphi - \psi = \sphericalangle SOX$ і на цьому проміні OS відміряти R на основі пропорції:

$$R = \frac{R}{1} = \frac{r}{\varrho}$$

(рис. 142). Точка P буде образом частки.

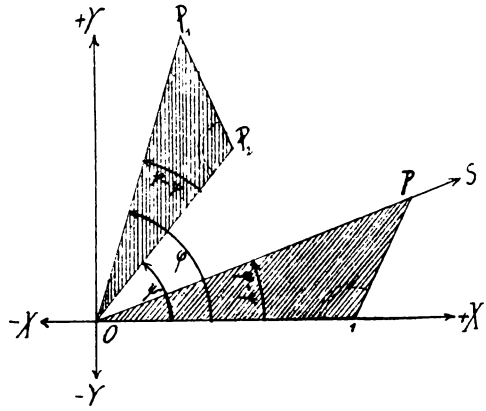


Рис. 142.

Нпр.

$$\frac{4_{120^\circ}}{2_{45^\circ}} = 2_{75^\circ}.$$

$$4_{120^\circ} = 4\,.\,(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = 4\,.\,(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}) = 2(-1+i\sqrt{3});$$

$$2_{45^\circ} = 2.(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = 2.(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{2}(1+i);$$

$$\frac{4_{120^\circ}}{2_{45^\circ}} = \frac{2(-1+i\sqrt{3})}{\sqrt{2}(1+i)} = \sqrt{2}\,.\,\frac{(-1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left[(-1+\sqrt{3})+i\,(1+\sqrt{3})\right] =$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) + \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\right] = 2(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ) = 2_{75^\circ}.$$

Про корінювання злучених чисел буде мова у звязку з розвязкою укладів рівнянь із двома невідомими (уст. 158 в).

146. **Доповнення дискусії квадратових рівнянь.** а) При вжитті злучених чисел маємо змогу розвязати *кожне* квадратове рівняння. Бо коли виріжник рівняння:

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

т. зн.:

$$\Delta=b^2-4ac \tag{2}$$

від'ємний, тоді пишемо: $\Delta'=4ac-b^2$, і ця ріжниця буде додатня, отже можна з неї добути квадратовий корінь. Це дасть: $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-\Delta'}=i\sqrt{\Delta'}$, отже матимемо:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{i}{2a}\sqrt{\Delta'},$$

або кожний корінь із окрема:

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{i}{2a}\sqrt{\Delta'},\quad x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{i}{2a}\sqrt{\Delta'}. \tag{28}$$

Це значить, що коріні того рівняння будуть *парою злучених, спряжених чисел.* Їхні образи будуть розложені симетрично до осі X.

Звертаємо увагу, що у випадку від'ємного виріжника рисункова розвязка рівняння (при допомозі параболи й простої) неможлива.

До тих розвязок відносяться теж основні правила про залежність між коріннями та співчинниками рівняння (уст. 138а):

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\Delta'}}{2a^2}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=\frac{c}{a},$$

бо ж сума й добуток двох спряжених чисел — дійсні.

Нпр. (1) $x^2+1=0$, $x^2=-1$; $x=\pm i$, т. зн. $x_1=+i$, $x_2=-i$.

(2) $$x^2+2x+5=0,$$

$$x=-\pm\sqrt{1-5}=-1\pm\sqrt{-4}=-1\pm 2i,$$

$$x_1=-1+2i,\ x_2=-1-2i.$$

Спроба: $(-1+2i)^2+2(-1+2i)+5=1-4i-4-2+4i+5=0,$
$(-1-2i)^2+2(-1-2i)+5=1+4i-4-2-4i+5=0;$

$$x_1+x_2=-2,\ x_1x_2=(-1)^2+2^2=5.$$

(3) $$21x^2+22x+23=0;\ x^2+\frac{22}{21}x+\frac{23}{21}=0,$$

$$x=-\frac{11}{21}\pm\sqrt{\frac{121}{21^2}-\frac{23\cdot 21}{21^2}}=-\frac{11}{21}\pm\frac{i}{21}\sqrt{362}.$$

б) Маючи цей вислід, можемо доповнити основну дискусію квадратового рівняння (уст. 135б, табличка):

Рівняння:

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

має $\left\{\begin{array}{l}2\text{ дійсні}\\1\text{ дійсний подвійний}\\2\text{ злучені спряжені}\end{array}\right\}$ *коріні, коли його виріжник:* $\Delta=b^2-4ac\gtreqless 0$.

Коли дане рівняння чисто-квадратове, отже співчинник b — нуль:

$$ax^2+c=0 \tag{1a}$$

тоді виріжник є $\Delta=-4ac$; він додатній, коли співчинники a і c протилежних знаків, а від'ємний, коли вони однакових знаків. Введім скорочення: $k=-\frac{c}{a}$, тоді рівняння матиме вигляд:

$$x^2=k \tag{1aa}$$

і ми скажемо:

Чисте квадратове рівняння (1aa):

має $\left\{\begin{array}{l}2\text{ дійсні протилежні}\\1\text{ подвійний, рівний нулеві}\\2\text{ уявні протилежні}\end{array}\right\}$ *коріні, коли* $k\gtreqless 0$.

в) Введення злучених чисел дає нам змогу розкладати на лінійні чинники такі квадратові тричлени, які ми досі мусіли вважати незводильними; це ті тричлени, що мають від'ємний виріжник. Ось так нпр. рівняння (1), коли його напишемо в нормальному вигляді: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{a}{c}=0$, має коріневі чинники: $x+\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{\Delta'}}{2a}$ та $x+\frac{b}{2a}i++\frac{\sqrt{\Delta'}}{2a}$, отже можемо написати такий розклад:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{\Delta'}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{\Delta'}}{2a}\right). \tag{29}$$

І справді, після вимноження добуток праворуч буде:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\Delta'}}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}.$$

Нпр. (1) рівняння $x^2+2x2x+5=0$ має коріні $x=-1+2i$, $x=-1-2i$, отже його коріневі чинники є: $x+1-2i$ та $x+1+2i$, так що:

$$x^2+2x+5=(x+1-2i)(x+1+2i).$$

(2) Рівняння $x^2-8x+24=0$ має розвязку $x=4\pm\sqrt{16-24}=4\pm2i\sqrt{2}$; коріневі чинники є тут $x-4-2i\sqrt{2}$ та $x-4+2i\sqrt{2}$, отже матимемо такий розклад тричлена:

$$x^2-8x+24=(x-4-2i\sqrt{2})(x-4+2i\sqrt{2}).$$

147. Огляд теорії злучених тіл. а) Із попередніх уступів бачимо що злучені числа творять *числове тіло*, бо чотири основні дії, виконувані ними, дають знову тільки числа того самого роду. Коли дана якась злучена величина — назвім її ω, — то добавлюємо її до тіла вимірних чисел і отримуємо тіло $k(\omega)$; воно зложене з чисел виду $a+b\omega$, де a і b — дійсні, вимірні числа.

Нехай буде нпр. $\omega=\sqrt{-3}=i\sqrt{3}$; тоді «злучене невимірне числове тіло» $k(i\sqrt{3})$ буде складатися з чисел виду $a+bi\sqrt{3}$, де a, b — дійсні, вимірні числа. Сума й ріжниця та добуток і частка двох яких небудь чисел того тіла дадуть знову ж злучене число.

Нпр. $(1+i\sqrt{3})(5-2i\sqrt{3})=11+3i\sqrt{3}$;

$$\frac{2+3i\sqrt{3}}{7-i\sqrt{3}}=\frac{(2+3i\sqrt{3})(7+i\sqrt{3})}{7^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{5}{52}+\frac{23}{52}\,i\sqrt{3}$$ і т.д.

б) Таким чином отримуємо найзагальніші числові тіла через ступневе поширювання того числового матеріялу, з якого зачинали будувати нашу аритметику, тоб-то *цілих додатніх чисел*, — або, говорячи геометрично, так, що праву половину числової лінії з рідко розложеними точками поширили на цілу площу, засіяну точками щільно й суцільно. Поширень маємо *чотири*:

(*А*)
- (I) *від'ємні числа* — геометрично: продовження числової лінії на ліво з рідкими точками, в таких самих відступах;
- (II) *уявні числа* — до поземої числової лінії добираємо другу, сторчову, й беремо на ній тільки ці точки, що відповідають цілим числам.

Таким чином після двох перших поширень числового матеріялу отримуємо замість точок на одній половині числової лінії — цілу сітку точок на площі. Ці поширення не дають нам нових *величин* (крім двох нових одиниць: -1 та i), а ведуть тільки до змін напрямку ходу на площі; тому їх можемо назвати *напрямковими*.

Коли ж хочемо *числову лінію* (позему), а потім і всю *площу*, засіяти новими точками, мусимо виконати два нові поширення: до дотеперішніх чисел добираємо:

(Б)
- (III) *дробові числа* — і
- (IV) *невимірні числа*.

І одні і другі додають нам безліч нових величин: перші через дію ділення, другі через корінювання. Перші засівають площу точками *щільно*; тоді кожному числу буде відповідати одна — й тільки одна — точка площі, але не навпаки: на площі будуть іще такі точки, які не знайдуть собі представників між вимірними числами. Аж тоді, коли доберемо *всі невимірні числа*, то вони покриють усю площу *суцільно*; тоді кожній точці площі буде відповідати число. — Ці два останні поширення будемо називати *мірними*, бо величини, які з них випливають, подають нам безліч нових мір.

Щоби повстало найменше числове тіло, мусимо обсяг цілих додатніх чисел збагатити всіми числами, що повстають через поширення (I) і (III); тоді отримаємо *вимірне, дійсне* (*числове*) *тіло*, або т. зв. *основне числове тіло*. Воно творить складову частину кожного иншого (числового) тіла.

Через докинення якоїсь одної величини з поширення (II) або (IV), отримуємо нове (числове) тіло, яке буде стояти *понад основним* тілом. Воно може бути або невимірне й дійсне (II), або вимірне й злучене (IV), або невимірне й злучене (II і IV).

Всі тіла, що стоять понад основним, звуться *алгебричними*, бо доходимо до них при допомозі шости алгебричних дій, включно з корінюванням.

в) *Невимірні числа* в геометричному вигляді були відомі вже старинним грекам; вони знали, що нпр. бік квадрату не має спільної міри з перекутнею (Піта-гор), — але не вживали ще свідомо тих величин як чисел. У пізніших греків (Евклід) виступають навіть доволі складні невимірні числа (нпр. $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$), які вони й побудовують геометрично при допомозі лінійки й циркля. — Крім того вони знали теж деякі завдання, що ведуть до невимірних величин вищих ступінів, але розвязували їх тільки геометрично (приближно) або механично*).

Злучені (уявні) *числа* появилися богато пізніше від невимірних; для греків такі завдання, де треба було добувати квадратові коріні з від'ємних чисел, являлися просто нерозвязальними. Про них згадує вперше принагідно *Кардано***); назва «уявних чисел» (*nombres imaginaires*) походить від *Декарта*. У перші часи вони являлися чимось зовсім незрозумілим, майже наприроднім; так нпр. *Ляйбніц* 1702 р. пише, що це «чудне прибіжище божого духа, щось посереднє між буттям і небуттям». Все ж таки поширюється їхній ужиток, а з тим у парі й виказується їхня корисність; — а хоч математики й відкидають їхнє існування та можливість розумового пояснення, то все ж таки вживають їх що раз частіше, бачучи, що при їх допомозі можна пояснити в дуже простий спосіб богато складніших звязків. Так нпр. *Ойлер* 1748 р. відкриває інтересний звязок між злученими числами й гоніометричними функціями***). Він вводить теж знак i.

Повна теорія злучених чисел разом із геометричною інтерпретацією, — заслуга *Карла Фрідріха Гавса*†); вона повстала якраз на переломі XVIII та XIX ст. Гавс уводить назву «злучені числа» замість «уявні» й тим чином відбирає їм усяку містичну закраску.

Загальна ідея невимірного числа повстала аж при кінці XVI ст., після того, як розповсюдилися десятинні дроби; тоді виробилося зрозуміння, що хоч дія корінювання часто не дається доводити до краю (т. зн. «не сходить» без остан-ку), то все ж таки можемо до практичних обчислень приближних чисел. беручи до рахунку кілька перших цифр. Строгу аритметичну теорію невимірних чисел дали в другій половині XIX ст. німецькі математики *Карло Вайєрштрас* (у 60. рр), *Георг Кантор* (1872) та *Ріхард Дедекінд* (1872).

---

*) Нпр. т. зв. «делійське завдання»; див. увагу до уст. 109 в, стр. 284.

**) Єронім *Кардано* (1501—1576), визначний італійський математик, розвязав перше рівняння, що не мало дійсних корінів: «число 40 розкласти на такі два чинники, щоб їхня сума була 10». Рівняння було: $x(10-x)=40$ із корінями $x=5\pm\sqrt{-15}$ (1539 р); він назвав їх «*radices fictae*» (подумані, тоб-то уявні, коріні). — З іменем Кардана вяжеться теж розвязка рівняння третього ступіня (див. III частину).

***) Див. далі, уст. 234. а.: $e^{xi}=\cos x+\sin x$.

†) Карло Фрідріх *Гавс* (*Gauss*), (1777—1855), проф. унів. в Гетінгені (в Німеччині) — найвизначніший математик XIX ст. («*princeps mathematicorum*» —князь математиків). Від поклав підвалини до багатьох ділянок математики, м. и. поставив на твердий грунт теорію злучених чисел.

З огляду на те, коли ми на площі, на якій нарисовано перехрестя, рисуємо образи функцій, тоді говоримо про *площу Декарта*; коли ж значимо на ній образи злучених чисел, тоді маємо до діла з *площею Гавса*.

Незалежно від Гавса розвинули таку саму геометричну теорію француз *Арган* (*Argand*, 1806) та данський землемір *Вессель* (1798).

Коші *) впроваджує означення $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, а *Вайєрштрас* знак $|a+bi|$ для без'оглядної вартости злученого числа.

Поширення злучених чисел на більше чим дві одиниці (отже числа форми $a+bi+cl+dk+\ldots$, де $i,l,k,\ldots$ мають означувати якісь нові одиниці, відмінні від 1 і ріжні між собою), завдячуємо *Гемілтонові* **); він доказав, що число з чотирма одиницями, $a+bi+cl+dk$ (це т. зв. *кватерніон*) не підпадає під усі формальні закони аритметики; так напр. не стосується до нього закон переміни добутків: xy не є те саме, що yx). — Гемілтонові кватерніони знайшли широке з'ужиткування у физиці.

ВПРАВИ.

I.

1. Виконати такі дії:

а) $(2+3i)+(4+5i)$; $(5+i)+(4-2i)$: $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right)$;

$(\sqrt{2}+5i)+(2\sqrt{2}-4i)$;

б) $(8-7i)-(-1-2i)$; $(4+3i)-(1-4i)$; $\left(\frac{3}{5}-\frac{5}{3}i\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{3}i\right)$;

$(1+i\sqrt{2})-(1-3i\sqrt{2})$;

в) $(a+bi)+(b-ai)+(a-bi)+(b+ai)$; $(4+i)+(3+2i)-(2-3i)-(1-4i)$;

г) $(2+3i)(3+2i)$; $(2+i)(i-2)$; $(3+4i)(-2+3i)$;

$\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{4}{3}+2i\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)$;

$\left(-1+2i\right)\left(-2+3i\right)$; $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}i\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}i\right)$;

$\left(a+2bi\right)\left(b-2ai\right)$;

д) $(1+2i)^2$; $(1+i\sqrt{3})^2$; $[(a^2+b^2)-(a^2-b^2)i]^2$; $\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2$;

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}i\right)^2$; $(1+i)^3$; $(-1+2i\sqrt{3})^3$; $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}+\frac{2-\sqrt{2}}{3}i\right)^3$;

---

*) Августин *Коші* (*Cauchy*, 1789—1857), визначний французький математик.

**) Англієць *Уіллєм Гемілтон* (*Hamilton*, 1805—1865), математик і астроном.

е) $\frac{4+2i}{1-i}$; $\frac{5-i}{1+i}$; $\frac{9-4i}{3+2i}$; $\frac{-1+2i}{2+i}$; $\frac{12\sqrt{2}-13i}{21+4i}$; $\frac{a+bi}{a-bi}$; $\frac{(a^2-b^2)-2abi}{a+bi}$.

2. Подати в простішому вигляді такі величини: $\frac{50}{3+4i}$;

$\frac{169}{12+5i}$; $\frac{25i}{4+3i}$; $\frac{2i+i}{5-3i}$; $\frac{x+i\sqrt{1-x^2}}{x-i\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{1}{1i+}+\frac{1}{1-i}$; $\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}$;

$\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1-i)^2}$; $\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1-i)^4}$; $\frac{2+3i}{3+4i}-\frac{3-4i}{2-3i}$; $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 \pm \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$;

$\frac{a+bi}{(a+b)-(a-bi)}$; $\frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$.

3. Доказати, що частка: $\frac{a+i}{1-ai}$ незалежна від величини a.

4. З'ясувати рисунком (на площі *Гавса*) такі злучені числа:

$1+2i$; $2-3i$; $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}$; $\frac{1+\sqrt{2}}{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}i$; $-1-\frac{1}{2}i$; $\frac{1}{2}-2i$; $\sqrt{3}+i\sqrt{2}$;

5. Виконати геометричні додавання та віднімання, подані у впр. 1а, 1б, 1в.

6. Знайти без'оглядні вартости таких чисел:

$2-\frac{5}{2}i$; $-\frac{1}{2}+2i$; $-1-i$; $\frac{4}{3}+\frac{2}{3}i$; $-\sqrt{2}+i\sqrt{3}$;

$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}i$.

7. Подати як напрямкові величини такі злучені числа:

$1+i$; $1-i$; $-1+i$; $-1-i$; $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}$;

$-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}$ $2+3i$; $-2-3i$; $3-2i$; $-3+2i$; $1+\frac{i}{2}$; $\frac{1}{2}-i$; $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$;

$2+i\sqrt{5}$.

8. Виконати геометричні множення й ділення, подані у впр. 1г, 1д, 1е.

9. Обчислити безпосередньо і по взірцеві *Муавра* такі величини:

$$(1+2i)^3;\ (-2-i\sqrt{3})^4;\ \left(\frac{2}{3}-\frac{i\sqrt{2}}{3}\right)^3;\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^5.$$

Коли дане напр. $(1+2i)^3$, покладім: $1+2i=\sqrt{5}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, бо $1^2+2^2=5$. Звідсіля отримаємо: $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$ отже $\varphi=63^0 26'$. По правилу Муавра є $(1+2i)^3=(\sqrt{5})^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)$, а що $3\varphi=190^0 18'$, $\cos 3\varphi=-\cos 10^0 18'$, $\sin 3\varphi=-\sin 10^0 18'$, то $(1+2i)^3=5\sqrt{5}(-\cos 10^0 18'-i\sin 10^0 18')=$ $=5.2,2361\ (-0,9839-0,1782i)=-10,99\ldots-1,99\ldots i$.

Одначе не можемо припустити, щоби третій степень злученого числа з цілими співчинниками був не-цілим числом, тому мусимо ці невимірности взяти на рахунок неповних чисел, отже заокруглимо цей вислід до найближчих цілих чисел: $(1+2i)^3=-11-2i$.

Безпосередньо буде так само: $(1+2i)^3=1+3\cdot 2i+3\cdot 2^2i^2+2^3i^3=$ $=1+6i-12-8i=-11-2i$.

II.

Розвязати такі рівняння:

1. $x^2+2=0$;
2. $\frac{x^2}{32}+8=0$;
3. $\frac{x^2}{2}+\frac{2x^2}{3}=\frac{3x^2}{4}-15$;
4. $(x-3)(x-5)+(x+1)(x+7)+$ $+10=0$;
5. $x^2-2x+5=0$;
6. $x^2-6x+18=0$;
7. $\frac{x-3}{x}-\frac{x-2}{4}=\frac{1}{4x}$;
8. $x^2+1=x$;
9. $x^2+x+1=0$;
10. $8x^2-4x+3=0$;
11. $49x^2-98x+50=0$;
12. $3x^2+2x+1=0$;
13. $2x^2+5x+7=0$;
14. $7x^2-6x+62=0$;
15. $x^2-(a+b)x+\frac{a^2+b^2}{2}=0$;
16. $2ax^2-4bx+\left(\frac{2b^2}{a^2}+1\right)=0$;
17. $9x^2-6ax+(a^2+2b^2)=0$;
18. $4x^2-4p\sqrt{3}.x+(3p^2+5q^2)=0$;
19. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x}$; які мусять бути a і b, щоби коріні рівняння були парою спряжено-злучених чисел?

20. Визначити параметер m так, щоби коріні рівняння $x^2-4x+m=0$ були злучені і мали без'оглядну вартість більшу від 5.

III.

1. Укласти квадратові рівняння, що матимуть такі коріні:

$1 \pm 2i$; $1 \pm \frac{1}{2} i$; $2 \pm \frac{1}{2} i$; $-1 \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1 \pm 2i}{3}$; $-\frac{2}{5} \pm \frac{4i}{5}\sqrt{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2} i$.

2. Розкласти на лінійні чинники такі величини:

a^2+b^2; a^4+b^4; a^2+2b^2; $25a^2+16b^2$; $25=3^2+4^2$; $7=3+4=(\sqrt{3})^2+2^2$; $11=2+9$ або $11=4+7$; x^2-2x+2; $4x^2+4x+2$; $9x^2+6x+3$; x^2-ax+a; $x^2-2ax+3a^2$; $2x^2-(a+b)x+(a^2+b^2)$; $(x-3)(x-4)+1$; $(x-1)(5x-3)+(x-2)(7x-1)+1$.

§ 25. Найпростіші уклади квадратових рівнянь із двома невідомими.

148. **Уклади параболичного типу.** а) Коли ми розвязували квадратове рівняння з одною невідомою:

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

то могли розбивати його на два рівняння з двома невідомими на ріжні способи:

$$\begin{cases} y=ax^2, \\ y=bx+c; \end{cases} \quad \text{або:} \quad \begin{cases} y=ax^2+c, \\ y=bx; \end{cases} \quad \text{або:} \quad \begin{cases} y=ax^2+bx+c, \\ y=0 \end{cases}$$

і т. д. Перше з тих рівнянь кожного укладу уявляє собою якусь параболу, друге — якусь просту. Розвязуємо їх так, що шукаємо точок перетину тих двох ліній; при цьому ходить нам тільки про вартість змінної x, а змінна y для нас тільки помічна величина, бо ж ми розвязуємо рівняння (1) із невідомою x. Відповідно до способу розбиття отримуємо щораз то инші вартости y, але вартість x зістається завсіди та сама.

Инакше є, коли маємо *уклад двох рівнянь із двома невідомими*; нехай одне буде квадратове, друге лінійне:

$$\left.\begin{aligned} y&=ax^2+bx+c, \\ y&=mx+n; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ту нам іде про *обидві невідомі*, x і y, отже мусимо знайти обидві співрядні точок перетину, і то в такому виді, як нам ці рівняння дані. Нам *не вільно* їх розбивати довільно та переносити члени з одного рівняння в друге, бо нам треба знати і вартість аргументу, при якому функції приймають однакову вартість, і відповідну вартість функцій.

б) Уклад (2), в якому перше рівняння уявляє собою параболу, друге просту, назвемо *параболичним*. Щоби його розвязати, рисуємо параболу в її властивій формі та положенні і перетинаємо її простою; при цьому може трапитися таке, що ці лінії перетинаються, або ні, або врешті проста є доторкальною параболи (рис. 143).

Рахунково розвязуємо його так, що порівнюємо y, визначене обома рівняннями:

$$ax^2+bx+c=mx+n.$$

Таким чином із двох рівнянь із двома невідомими отримуємо одне з одною невідомою:

$$ax^2+(b-m)x+(c-n)=0; \tag{3}$$

воно зветься *вислідним рівнянням* укладу. Воно має дійсні розвязки, коли виріжник укладу:

$$\Delta=(b-m)^2-4a(c-n)\geqq 0;$$

у противному разі його розвязки подаються злученими числами.

Другу невідому отримуємо так, що вартість першої невідомої підставлюємо в одне з даних рівнянь; маючи дві вартости невідомої x, отримаємо теж дві вартости на y, так що матимемо *дві пари* відповідних вартостей невідомої, отже дві парі розвязок.

Ипр:
$$x^2-3(x+y)+5=0,$$
$$2x-3y+1=0.$$

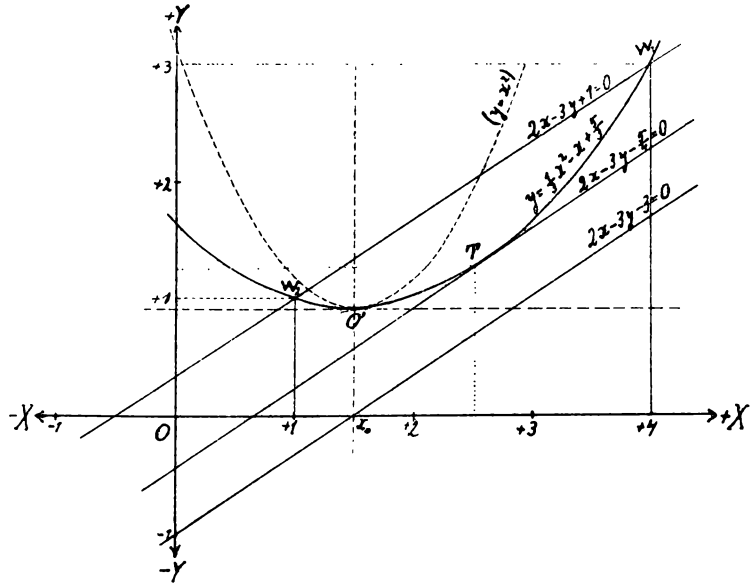


Рис. 143.

Перше рівняння дає параболу $y=\frac{1}{3}x^2-x+\frac{5}{3}$, отже втроє ширшу від нормальної (рис. 143); її вершок знайдемо, коли похідну функції y прирівняємо до нуля: $y'=\frac{2}{3}x-1$; $x_0=\frac{3}{2}$, $y_0=\frac{11}{12}$. Проста $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ перетинає її в точках $W_1(4,\ 3)$, $W_2(1,\ 1)$.

Зовсім такий самий був би рахунковий вислід: $3y=2x+1$, вставлене в перше рівняння, дасть: $x^2-3x-2x-1+5=0$, $x^2-5x+4=0$; $x_1=4$, $x_2=1$, а далі: $y_1=3$, $y_2=1$.

Як би замість тої простої взяти иншу, а саме $2x-3y-\frac{5}{4}=0$ (отже рівнобіжну до неї), то вже рисунок показав би, що це доторкальна параболі; а й рахунком отримали би вислід: $x^2-5x+\frac{25}{4}=0$ $x=\frac{5}{2}\pm 0$, отже: $y=\frac{5}{4}$.

Врешті проста $2x-3y-3=0$ не перетинає параболи; тоді вислідне рівняння буде: $x^2-5x+8=0$, отже: $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{32}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{7}$, а це дає такі дві пари злучених розвязок:

$$x_1=\frac{5+i\sqrt{7}}{2}, \quad y_1=\frac{2+i\sqrt{7}}{3}; \qquad x_2=\frac{5-i\sqrt{7}}{2}, \quad y_2=\frac{2-i\sqrt{7}}{3}.$$

149. Уклади гіперболичного типу. Дослід рівнобічної гіперболи. а) Про уклад:

$$\begin{aligned} xy&=a, \\ mx+ny&=b, \end{aligned} \tag{4}$$

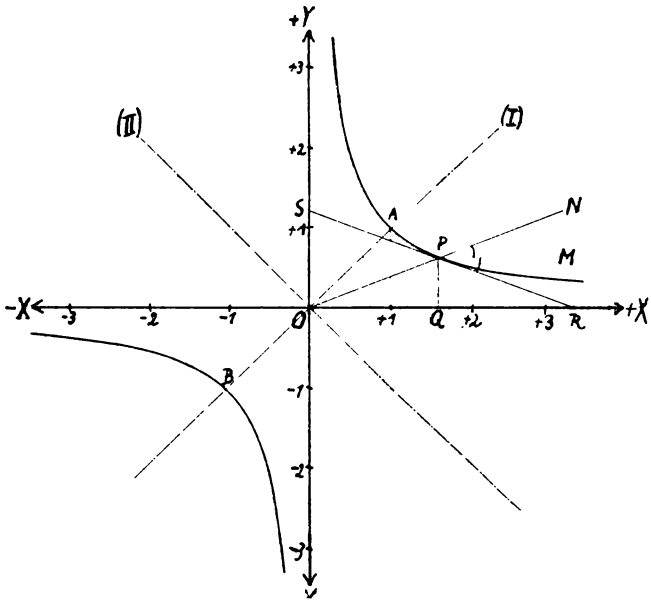


Рис. 144.

в якому перше рівняння уявляє собою рівнобічну гіперболу, а друге просту, скажемо, що він належить до *гіперболичного типу*.

Рівнобічна гіпербола $xy=a$ або:

$$y=\frac{a}{x} \tag{5}$$

(рис. 144; див. теж рис. 65, стр. 149), складається з двох однакових віток у протилежних чвертках (у I та III, коли $a>0$, і в II та IV при $a<0$); її осями симетрії є обидві медіяни, т. зн. прості (I) $y=x$ і (II) $y=-x$, а обидві осі співрядних її асимптотами, т. зн. крива наближається до них усе більше й більше, але ніколи їх не досягає. Точки перетину одної вітки гіперболи з відповідною медіяною звуться її *вершками* (A і B), а їхня віддаль, т. зн. довжина $AB=\sqrt{2|a|}$, — *довжиною головної осі* гіперболи.

Коли $a=\pm 1$, гіпербола зветься *нормальною*; чим більше a (беручи числово), тим далі крива від осей співрядних; коли a буде меншати (числово), крива буде наближатися до осей.

Із рисунку бачимо, що рівнобічна гіпербола $y=\frac{1}{x}$ (рис. 144) заєдно опадає: у від'ємній вітці зразу дуже звільна, а потім — від вершка B аж до осі Y — дуже стрімко, в додатній вітці навпаки: перше дуже стрімко аж до вершка A, потім щораз повільніше. Щоби знайти міру зросту гіперболи, творимо похідну функції:

$$y=\frac{1}{x} \tag{5a}$$

подібним способом, як це робили з квадратовою функцією. До тої цілі вигідніше нам написати це рівняння в *нерозвиненому вигляді*:

$$xy=1. \tag{4a}$$

Коли змінній x надамо приріст h, тоді функція y зросте на k, отже матимемо:

$$(x+h)(y+k)=1,$$

а коли обіруч віднімемо (4a), отримаємо:

$$kx+hy+hk=0.$$

Звідсіля обчислимо відношення $\frac{k}{h}$:

$$k(x+h)+hy=0,$$

$$\frac{k}{h}=-\frac{y}{x+h},$$

а при переході до межі $h \to 0$ отримаємо похідну:

$$y' = -\frac{y}{x}, \tag{6}$$

бо $\lim\limits_{h \to 0} \frac{k}{h} = y'$, а h у знаменику праворуч відпаде.

Легко пояснити геометричне значіння похідної. $\frac{y}{x}$ — це співчинник нахилу простої OP, отже похідна має бути від'ємною вартістю того співчинника. Це значить, що доторкальна гіперболи нахилена до осі X під таким самим кутом, як і згадана проста, тільки в протилежний бік: $\sphericalangle PRQ = \sphericalangle POQ$. Звідсіля виходить, що точка P половинить доторкальну SR ($\triangle POQ \cong \triangle PQR$, $OQ = QR$, отже: $SP = PR$). Звідсіля виникає правило для рисування доторкальної рівнобічної гіперболи в даній точці P: подвоюємо відрізну тої точки й точку R ($QR = OQ = x$) сполучуємо з P.

Похідна була би додатня, як би x і y мали протилежні знаки; та це неможливе, бо гіпербола (5а) переходить через I і III чвертку, де знаки обох співрядних однакові. Це значить, що похідна завсіди від'ємна, отже гіпербола *завсіди опадає*. Нулем похідна теж не може стати, коли обмежимося до закінчених вартостей оргументу x.

Пор. спосіб рисування доторкальної параболи — уст. 126.

Лінія росту гіперболи має рівняння: $\eta = -\frac{y}{x}$; коли тут підставимо $y = \frac{1}{x}$, отримаємо:

$$\eta = -\frac{1}{x^2}. \tag{6а}$$

Криву, що її визначує це рівняння, отримаємо з кривої $y = \frac{1}{x^2}$ (рис. 96), коли відіб'ємо її на осі X. — Вся вона є під віссю, бо X додатнє, отже y завсіди від'ємне; це підтверджує наш вислід, що гіпербола постійно опадає, і то тим сильніше, чим менше x.

Виконайте цей рисунок!

б) Коли возьмемо загальніше рівняння:

$$y = \frac{a}{x}, \tag{5}$$

похідна тої функції буде так само $y' = -\frac{y}{x}$, як це легко обчислити;

після підставлення вартости за x отримаємо: $y' = -\frac{a}{x^2}$. Гіпербола (5) заховується так само, як і нормальна; коли $a>0$, тоді є $y'<0$, отже гіпербола в I і III чвертці заєдно опадає, а коли $a<0$, тоді є $y'>0$, т. зн. гіпербола в II і IV чвертці заєдно росте.

в) Розгляньмося тепер ближче в укладі (4). Нехай друге рівняння — лінійне — приймає щораз то инші вигляди; розглянемо тут два найважніші подрібні типи й один загальний випадок.

Перший тип:

$$\begin{cases} xy = a, \\ x+y = b. \end{cases} \tag{4a}$$

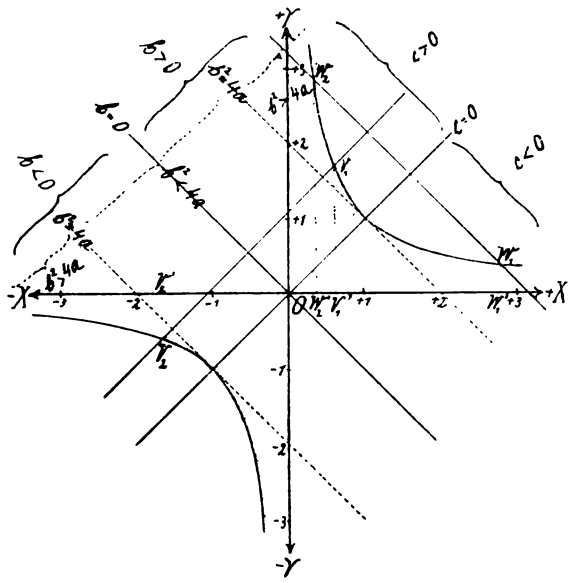


Рис. 145.

Проста, що її подає друге рівняння, належить до громади ліній, що рівнобіжні до другої медіяни (рис. 145); коли $b>0$, вона перетинає горішні половини обох осей, коли $b<0$ — долішні, а її віддаль від осередка перехрестя O виносить $\frac{|b|}{2}\sqrt{2}$.

Приймім, у першу чергу, $a>0$. Зрозуміло, що проста буде перетинатися з гіперболою тільки тоді, коли ця віддаль більша від по-

ловини осі гіперболи, т. зн. $\frac{|b|}{2}\sqrt{2} > \sqrt{2|a|}$, або — після впорядкування — коли:

$$b^2 > 4a.$$

Коли ця віддаль менша від OA, отже $b^2 < 4a$, тоді, очевидно, проста йде між обома вітками кривої, — а в пограничному випадкові, $b^2 = 4a$, вона доторкальною гіперболи. Так отже умова розвязальности є:

$$b^2 \geqq 4a. \tag{7}$$

Придивімся до точок W_1 і W_2 що відповідають розвязкам укладу; вони лежать на одній і тій самій вітці кривої, і то симетрично відносно першої медіяни, так що: $x_1 = OW_1' = W_2'W_1 = y_2$ і $x_2 = OW_2' = W_1'W_2 = y_1$. Таким чином, знаючи тільки одну з точок, нпр. W_1, тим самим знаємо вже також співрядні другої точки; значить, наш уклад в дійсности має не дві, а тільки *одну пару розвязок*. Другу пару отримаємо так, що переставимо обидві невідомі. Такий уклад називаємо *симетричним*.

До того самого висліду дійдемо теж рахунковим шляхом. Є ріжні методи розвязки укладу (4a). Найпростіший такий, що одну невідому з одного рівняння вставимо в друге; та ми тут уживемо иншого методу, симетричного.

Піднесім друге рівняння обіруч до квадрату:

$$x^2 + 2xy + y^2 = b^2$$

і додаймо до його обіруч $-4xy = -4a$:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = b^2 - 4a,$$

отже:

$$x - y = \pm\sqrt{b^2 - 4a}.$$

Тут перш за все бачимо, що мусить бути сповнена умова (7), бо инакше під корінем стояла би від'ємна величина й ми могли би рівняння розвязати тільки при допомозі злучених чисел, а геометрична розвязка була би неможлива. Щоби влегчити собі дальшу працю, введемо одне скорочення: корінь рівняння $z^2 = +1$, т. зн. $z = \pm 1$, назвім ε; таким робом чинник ε, дописаний до якогось числа, буде означувати, що це число може мати знак додатній або від'ємний. При вжитті цього скорочення матимемо такий лінійний уклад:

$$\begin{aligned} x + y &= b, \\ x - y &= \varepsilon\sqrt{b^2 - 4a}, \end{aligned}$$

а його розвязка будє:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}\left(b+\varepsilon\sqrt{b^2-4a}\right),\\ y&=\frac{1}{2}\left(b-\varepsilon\sqrt{b^2-4a}\right).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Памятаючи, що чинник ε може означувати так само $+1$, як і -1, матимемо дві парі розвязок, одначе в них будуть повторюватися ці самі числа, бо $\varepsilon=+1$ дасть пару (x_1, y_1), а $\varepsilon=-1$ пару (x_2, y_2):

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{2}\left(b+\sqrt{b^2-4a}\right)=y_2,\\ y_1&=\frac{1}{2}\left(b-\sqrt{b^2-4a}\right)=x_2.\end{aligned} \tag{8a}$$

Завважимо тут іще, що коли $a>0$ (як ми це поки що приймаємо постійно), то $\sqrt{b^2-4a}<b$, отже в цих обох величинах переважує знак числа b; коли $b>0$, тоді вони додатні, а при $b<0$ — від'ємні. Те саме підтверджує нам рис. 145, на якому друга медіяна ділить громаду простих $x+y=b$ на дві частини, відповідно до знаку числа b.

Врешті є ще третій спосіб розвязки того самого укладу: уклад подає суму b й добуток a двох невідомих нам чисел; як би ми вважали їх двома корінями одного рівняння з одною невідомою, то мали би зараз визначену суму й добуток тих корінів, отже й обидва співчинники згаданого рівняння. Назвім цю невідому v; тоді рівняння буде:

$$v^2-bv+a=0, \tag{9}$$

а його коріні:

$$v=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}=\frac{1}{2}\left(b+\varepsilon\sqrt{b^2-4a}\right),$$

отже можемо зараз же й написати, в згоді з взірцем (8a):

$$\left.\begin{aligned} x_1&=v_1=y_2,\\ y_1&=v_2=x_2.\end{aligned}\right\} \tag{8б}$$

Напр. (1) $xy=15$, $x+y=-8$ веде до рівняння $v^2+8v+15=0$, $v=-5_1$, $v_2=-3$, отже розвязка укладу буде:

$$\begin{aligned} x_1&=-5=y_2,\\ y_1&=-3=x_2.\end{aligned}$$

2) $xy=8$, $x+y=5$—уклад нерозв'язальний у дійсних числах, бо $\Delta=b^2-4a=$ $=25-32=-7<0$. Він дає помічне рівняння $\rho^2-5\rho+8=0$, яке має коріні $\rho=\frac{1}{2}(5+\varepsilon i\sqrt{7})$, отже:

$$x_1=\frac{1}{2}(5+i\sqrt{7})=y_2,$$

$$y_1=\frac{1}{2}(5-i\sqrt{7})=x_2.$$

г) *Другий тип*:

$$\left.\begin{aligned} xy&=a,\\ x-y&=c.\end{aligned}\right\} \tag{4б}$$

Тут друге рівняння подає нам громаду простих, рівнобіжних до першої медіяни ($c=0$), яка й ділить громаду на дві частини: долішню (праву) для $c>0$ і горішню (ліву) для $c<0$.

Приймім і тут $a>0$; один погляд на рис. 145 учить, що проста $x-y=c$ *завсіди* перетинає *обидві* вітки гіперболи. Точки перетину V_1 і V_2 розложені симетрично до другої медіяни, так що $x_2=-y_1$, і $y_2=-x_1$, отже від одної пари розвязок переходимо до другої через переміну невідомих із одночасною зміною знаків на протилежні. Такий уклад назвемо *пів-симетричним*.

До неї застосуємо обидві методи розвязки, яких ужили при першому типі. Коли лінійне рівняння обіруч сквадруємо:

$$x^2-2xy+y^2=c^2,$$

і до нього додамо обіруч $4xy=4a$, отримаємо:

$$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=c^2+4a>0,$$

а це дасть такий лінійний уклад:

$$\begin{aligned} x+y&=\varepsilon\sqrt{c^2+4a},\\ x-y&=c.\end{aligned}$$

Звідсіля:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}\left(\varepsilon\sqrt{c^2+4a}+c\right),\\ y&=\frac{1}{2}\left(\varepsilon\sqrt{c^2+4a}-c\right),\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

отже:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2+4a}+c\right)=-y_2,\\ y_1&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2+4a}-c\right)=-x_2.\end{aligned}\right\} \tag{10а}$$

Величина під корінем, при додатньому a, завсіди додатня, отже розвязка завсіди можлива.

Другий метод, який назвемо «*методом v*», можна буде застосувати тільки тоді, коли ріжницю невідомих заступимо їхньою сумою; зробимо це так, що підставимо $y=-z$: $x+z=c$, $x(-z)=a$ або $xz=-a$, а тоді рівняння з невідомою v буде:

$$v^2-cv-a=0.$$

Коли $a>0$, тоді рівняння завсіди розвязальне, бо $\Delta=c^2+4a>0$; його коріні є:

$$v=\frac{c}{2}\pm\sqrt{\frac{c^2}{4}+a}=\frac{1}{2}\left(c+\varepsilon\sqrt{c^2+4a}\right),$$

отже розвязки даного укладу будуть:

$$\begin{aligned} x_1&= \quad v_1=z_2=-y_2,\\ z_1&=-y_1=v_2= \quad x_2, \end{aligned}$$

як і попереду.

Тепер можемо остаточно позбутись обмеження, що його зробили в обох досліджуваних типах, а саме $a>0$. Як би було $a<0$, тоді наш уклад через підставлення $y=-z$ переводимо з одного типу в другий, бо тоді перше рівняння дасть $xy=-xz=a$, отже $xz=-a$, а друге з суми переміниться в ріжницю або навпаки. Так отже обидва ці типи обіймають усі можливі уклади того роду, як:

$$\left.\begin{aligned} xy&=\pm a,\\ x\pm y&=\pm b. \end{aligned}\right\} \tag{4в}$$

д) *Третій тип (загальний)*:

$$\left.\begin{aligned} xy&=a,\\ mx+ny&=p. \end{aligned}\right\} \tag{4г}$$

Він уявляє собою ту ж саму гіперболу; проста, що дана другим рівнянням, не лежить симетрично до осей, отже й розвязки укладу не будуть повторюватися двічі. Побачимо це спершу рахунковим шляхом.

Коли лінійне рівняння сквадрувати обіруч:

$$m^2x^2+2mnxy+n^2y^2=p^2,$$

то до нього треба буде обіруч додати $-4mnxy=-4mna$, щоб отримати:

$$m^2x^2-2mnxy+n^2y^2=(mx-ny)^2=p^2-4mna,$$

т. зн. уклад:

$$\left.\begin{aligned} mx+ny&=p,\\ mx-ny&=\varepsilon\sqrt{p^2-4mna}. \end{aligned}\right\}$$

Уклад розвязальний у дійсних числах, коли $p^2 \geqq 4mna$, — а в злучених, коли $p^2 < 4mna$; його розвязка є:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2m}\left(p + \varepsilon\sqrt{p^2 - 4mna}\right), \\ y &= \frac{1}{2n}\left(p - \varepsilon\sqrt{p^2 - 4mna}\right), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

отже симетричну чи пів-симетричну розвязку: $x_1 = \pm y_2$, $y_1 = \pm x_2$ маємо тільки тоді, коли $m = \pm n$; в кожному иншому випадкові маємо дві *ріжні* пари розвязок.

Щоби дійти до «*методу v*», мусимо лівий бік лінійного рівняння перетворити в чисту суму двох невідомих; цього досягнемо, коли підставимо:

$$mx = \xi, \quad ny = \eta;$$

тоді перше рівняння переміниться в $mx.ny = \xi\eta = mna$, отже буде:

$$\xi + \eta = p, \quad \xi\eta = mna,$$

і матимемо рівняння для v:

$$v^2 - pv + mna = 0$$

з розвязкою:

$$v = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - mna} = \frac{1}{2}\left(p + \varepsilon\sqrt{p^2 - 4mna}\right). \tag{11a}$$

Геометрично буде це значити, що змінюємо поділку на обох осях, у відношеннях: на поземій $1 : m$, на сторчовій $1 : n$, а тоді проста отримає нахил $\pm 45^0$, до обох осей.

Нпр. (1) $xy = 18$, $7x - 3y = 3$.

З другого рівняння отримаємо: $49x^2 - 42xy + 9y^2 = 9$, а що $84xy = 84 \cdot 18 = 1512$, то $49x^2 + 42xy + 9y^2 = (7x + 3y)^2 = 9 + 1512 = 1521$, отже:

$$7x + 3y = 39\ \varepsilon.$$

Уклад: $7x + 3y = 39\ \varepsilon$,
$7x - 3y = 23$,

дасть: $x = \frac{1}{14}(39\varepsilon + 3)$, $y = \frac{1}{6}(39\varepsilon - 3)$, отже:

$x_1 = 3$,	$x_2 = -\frac{18}{7}$,
$y_1 = 6$;	$y_2 = -7$.

Як бачимо, симетричности розвязок тут не має.

Для «*методу* v» треба би вжити підставлень $7x=\xi$, $3y=\eta$; тоді матимемо: $\xi\eta=21xy=378$, $\xi-\eta=3$, отже це буде другий тип. Уведім сюди ще $\eta=-\zeta$; це дасть $\xi+\zeta=3$, $\xi\zeta=-378$, а тому рівняння у v буде: $v^2-3v-378=0$.

Звідсіля:

$$v=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+378}=\frac{1}{2}\,(3+\varepsilon\sqrt{1529})=\frac{1}{2}\,3+39\varepsilon)$$

і т. д.

Зробіть розвязку ще геометричним шляхом!

(2) $$xy=2,\quad 4x+5y=2.$$

Тут отримуємо чергою: $16x^2+40xy+25y^2=4,$

$$-80xy\qquad\quad=-160,$$

$$16x^2-40xy+25y^2=(4x-5y)^2=-176,$$

$$4x-5y=4\varepsilon i\sqrt{11}.$$

$$x=\frac{1}{8}(2+4\varepsilon i\sqrt{11}),\quad y=\frac{1}{10}(2-4\varepsilon i\sqrt{11}):$$

$$x_1=\frac{1+2i\sqrt{11}}{4},\quad y_1=\frac{1-2i\sqrt{11}}{5},\qquad x_2=\frac{1-2i\sqrt{11}}{4},\quad y_2=\frac{1+2i\sqrt{11}}{5}.$$

(3) *Приклад дискусії квадратового укладу.*

$$xy=1,\qquad y=ax+1.$$

Отсей уклад уже зовсім не має симетричного вигляду; тут y у другому рівнянні виступає як функція аргументу x. Коли це друге рівняння обіруч помножимо на x, отримаємо $xy=ax^2+x$, отже вислідне рівняння буде:

$$ax^2+x-1=0. \qquad (*)$$

Його виріжник є:

$$\Delta=1+4a,$$

отже умова розвязальности в дійсних числах буде: $a\geqq-\frac{1}{4}$. Розвязка укладу, як легко знайти, представиться так:

$$x=\frac{-1+\varepsilon\sqrt{1+4a}}{2a},\quad y=\frac{1+\varepsilon\sqrt{1+4a}}{2};$$

вартість $a=0$ мусимо виключити, бо инакше було би $x=\pm\infty$.

Геометрично уклад уявляє собою нормальну гіперболу та жмуток простих із вершком S на осі Y у віддалі $+1$ (рис. 146). Для вартостей параметру $a>-{}^1/_4$ кожна проста перетинає гіперболу в двох точках, а саме: для $a>0$ обидві її вітці по одному разові, а для $a<0$ горішню вітку двічі, по обох сторонах точки дотику T. — Для $a<-{}^1/_4$ перетину немає.

Вартости $a=-{}^1/_4$ відповідає доторкальна ST; точка дотику T має співрядні $(2,{}^1/_2)$, а що $OS=1$, то тангенс кута нахилу тої доторкальної буде $=-{}^1/_4$; доторкальна перетне вісь X у точці з відрізною 4, так що T справді половинить відтинок доторкальної між обома осями.

Врешті розгляньмо ще виртість $a=0$, якій відповідає позема проста. Вона перетинає гіперболу тілки раз, у точці (1,1), яку отримаємо з рівняння (*) для $a=0$, а тоді й $y=1$. Вдруге буде перетинатися вона з другою віткою в безконечности.

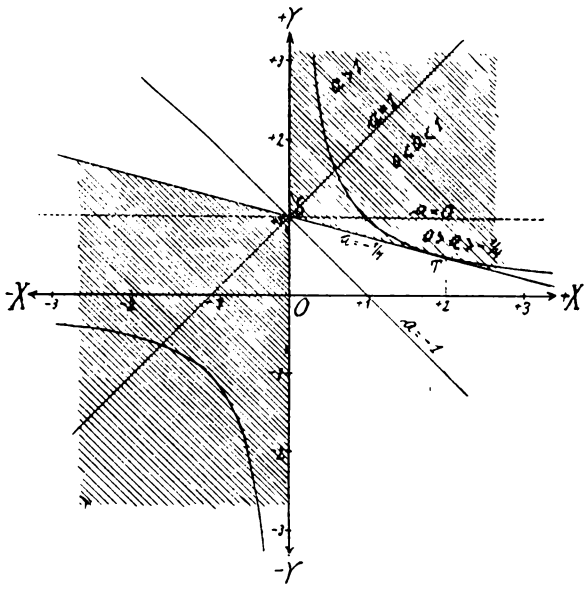


Рис. 146.

150. **Узагальнення рівнобічної гіперболи.** а) Ми бачили, що коли в рівнянні:

$$y=\frac{1}{x} \tag{5a}$$

чисельник 1 заступити загальним числом a, отримаємо замість нормальної гіперболи загальну:

$$y=\frac{a}{x}. \tag{5}$$

Дивімся тепер, який вплив матимуть доданки до змінних x і y. Возьмім спершу функцію:

$$y=\frac{1}{x+m} \tag{12}$$

і складім її табличку, порівнюючи її з табличкою функції (5) (рис. 147).

$y=\dfrac{1}{x+m}$

x	y
0	$\frac{1}{m}$
1	$\frac{1}{m+1}$
2	$\frac{1}{m+2}$
...	...
-1	$\frac{1}{m-1}$
...	...
$-m$	$1/0=\infty$
$-m+1$	1
$-m+2$	$1/2$
...	...
$-m-1$	-1
$-m-2$	$-1/2$

$y=\dfrac{1}{x}$

x	y
m	$\frac{1}{m}$
$m+1$	$\frac{1}{m+1}$
$m+2$	$\frac{1}{m+2}$
...	...
$m-1$	$\frac{1}{m-1}$
...	...
0	$1/0=\infty$
1	1
2	$1/2$
...	...
-1	-1
-2	$-1/2$
...	...

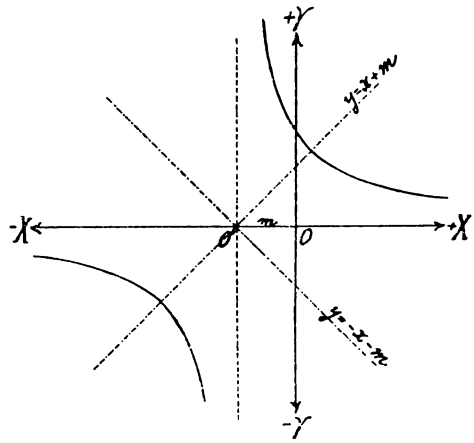


Рис. 147.

З них бачимо, що перша функція має однакові вартости з другою, коли аргумент матиме вартість на m меншу, як у другої. Образом тої функції буде та ж сама рівнобічна гіпербола, тільки пересунена здовж осі X на $-m$ одиниць, отже вліво, коли m додатнє, а вправо при від'ємному m. Разом із гіперболою пересунуться й її осі (які зістануться рівнобіжними до медіян) і сторчова асимптота теж на таку саму віддаль. Асимптота буде перетинати вісь X у точці O з відрізною $-m$; для $x=-m$ є $y=\pm\infty$. Вартість аргументу, для якої функція приймає безконечно велику вартість, звуть *бігуном* тої функції, отже:

Функція (12) *має в точці* $x=-m$ *бігун.*

б) Коли ж тепер матимемо функцію $y=\dfrac{1}{x}-n$, або:

$$y+n=\frac{1}{x}, \tag{13}$$

то це буде значити, що мусимо кожну відрізну функції (5а) зменшити на n, щоб отримати рядну функції (13): иншими словами, мусимо

пересунути рівнобічну гіперболу здовж осі Y на одиниць у протилежному напрямкові, як показує знак при n. Через те пересунуться рівнобіжно вгору або вниз осі гіперболи й позема асимптота, а сторчова асимптота залишиться на місці, отже й бігун функції не зміниться.

Накінець, коли скомбінуємо обидва ці узагальнення, отримаємо функцію:

$$y=\frac{1}{x+m}+n; \tag{14}$$

перше з них означує пересунення здовж осі X у напрямку відмінному як показує знак доданка m, та пересунення здовж осі Y у напрямкові, згідному із знаком доданка. — Як би ще тут узяти замість чисельника і загальне число a, отримали б ми найзагальнішу функцію того роду:

$$y=\frac{a}{x+m}+n, \tag{14a}$$

яка уявляє собою рівнобічну гіперболу з головною віссю $2\sqrt{2|a|}$ та з пересуненням асимптот $(-m,\ n)$.

в) Коли в рівнянні (14а) знесено знаменик, отримаємо:

$$xy+my=a+nx+mn,$$

і цьому рівнанню можемо надати ось таку найзагальнішу форму:

$$Axy+Bx+Cy+D=0, \tag{15}$$

де A, B, C, D означують дійсні (вимірні або невимірні), постійні (або й змінні) співчинники. Щоби дослідити цю функцію, приводимо її в *розвинений вигляд*, отже розвязуємо з огляду на змінну y:

$$y=-\frac{Bx+D}{Ax+C}. \tag{15a}$$

Отсю функцію звемо *лінійною дробовою*, бо вона являється дробом, чисельник та знаменик якого — лінійні функції. Вона тратить цю свою дробову форму, коли чисельник являється многократтю знаменика: $Bx+D=k(Ax+C)$; це можливе для всякої вартости змінної x тільки тоді, коли $B=kA$, $D=kC$, отже $BC=AD$. Ми кажемо, що *означник лінійної дробової функції*, т. зн. ріжниця $AD-BC$, *мусить бути відмінний від нуля*; инакше функція уявлятиме собою постійну величину: $y=k$.

Форму (15а) легко довести до вигляду (14а) через такі чергові переміни:

Перш за все завважуємо, що один із співчинників можемо прийняти рівним додатній одиниці, нпр. $A=1$; бо як би так не було, скорочуємо дріб тим співчинником і маємо:

$$y=-\frac{\frac{B}{A}x+\frac{D}{A}}{x+\frac{C}{A}},$$

а що дроби $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$ і $\frac{D}{A}$ такі ж самі числа, як і попередні співчинники B, C, D (бо A треба приймити відмінним від нуля), то нічого не зміниться на річі, коли напишемо:

$$y=-\frac{Bx+D}{x+C}. \qquad (15б)$$

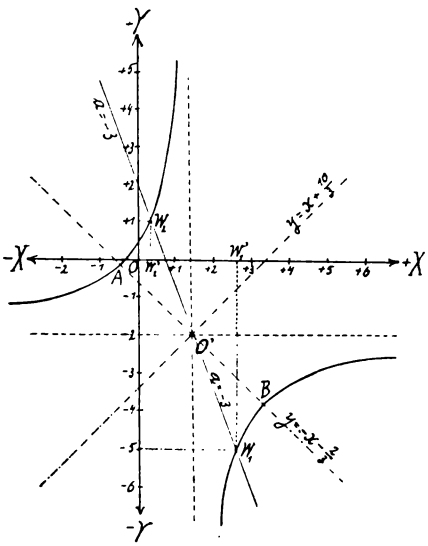


Рис. 148.

Тепер пишемо далі так:

$$y=-\frac{B(x+C)+(D-BC)}{x+C}=$$

$$=\frac{BC-D}{x+C}-B,$$

і ви е маємо нашу функцію, зведену ло вигляду (14а), коли тільки змінимо означення: $a=BC-D$, $m=C$, $n=-B$.

Таким чином можемо лінійну дробову функцію представити як рівнобічну гіперболу (відмінну від нормальної, коли $a=BC-D$ відмінне від 1) і з пересуненими асимптотами, коли величини B та C відмінні від нуля.

Нпр. (1). $3xy+6x-4y+1=0.$

Отсю функцію доводимо до вигляду:

$$y=\frac{-3}{x-{}^4/_3}-2;$$

її образом буде рівнобічна гіпербола, що має асимптоти пересунені на $^4/_3$ одиниць управо й на 2 одиниці вниз, так що її осередком є точка $O'(^4/_3, -2)$, а осями прості $y=-x-{}^2/_3$ та $y=x-{}^{10}/_3$, рівнобіжні до обох медіян (рис. 148). Довжина головної осі, т. зн. AB, є $2\sqrt{2|a|}$, а що $a=-3$, то $AB=2\sqrt{6}$, отже віддал вершків від осе-

редка гіперболи: будуть $AO'=BO'=\sqrt{6}=2{,}45$, як це й видно з рисунку. Співрядні вершків знайдемо, коли розвяжемо рівняння гіперболи з рівнянням головної осі $y=-x-{}^{2}/_{3}$; це дасть:

$$A({}^{4}/_{3}-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3}),\quad B({}^{4}/_{3}+\sqrt{3},-2-\sqrt{3}).$$

2) Нехай у другу чергу буде даний уклад:

$$3xy+6x-4y+1=0,$$
$$y=ax+2;$$

його перше рівняння ми тільки що розглянули, а друге уявляє собою жмуток простих із вершком S на осі Y у віддалі $+2$. Точка лежить у нутрі гіперболи (лівої вітки), отже кожна проста, проведена через неї, перетне гіперболу двічі (одну або обидві вітки); в цьому жмуткові не може бути навіть доторкальних параболи. Так нпр. проста, що переходить іще через точку O, перетне обидві вітки гіперболи в точках $W_1({}^{7}/_{3},-5)$; $W_2({}^{1}/_{3},+1)$; її рівняння буде $y=-3x+2$. Коли тепер цей уклад будемо розвязувати рахунково, методом підставлення, отримаємо вислідне рівняння:

$$3ax^2+(12-4a)x-7=0,$$

виріжник якого:

$$\Delta=(12-4a)^2+4.3a.7=144-12a+16a^2=4(4a^2-3a+36)$$

завсіди додатній, бо виріжник виріжника від'ємний:

$$\Delta_1=9-4.4.36<0.$$

Це значить що уклад завсіди розвязальний у дійсних числах.

Для $a=-3$ (див. рисунок) отримаємо $-9x^2+24x-7=0$ або:

$$x^2-\frac{8}{3}x+\frac{7}{9}=0,$$

$$x=\frac{4}{3}+\varepsilon,\qquad y=-2-3\varepsilon,$$

отже:

$$x_1=\frac{7}{3},\quad y_1=-5;\qquad x_2=\frac{1}{3},\quad y_2=1.$$

г) Похідну лінійної дробової функції отримаємо так: у рівнянні (15) збільшим x і y на h і k, віднімім тоді обіруч дане рівняння й шукаймо відношення $\frac{k}{h}$:

$$A(x+h)(y+k)+B(x+h)+C(y+k)+D=0,$$
$$A(kx+hy+hk)+Bh+Ck=0,$$
$$k[A(x+h)+C]+h(Ay+B)=0,$$

$$\frac{k}{h}=-\frac{Ay+B}{A(x+h)+C},$$

отже:

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=-\frac{Ay+B}{Ax+C}.$$

Коли ж тут за y підставимо вартість (15а), отримаємо:

$$y'=\frac{AD-BC}{(Ax+C)^2}, \tag{16}$$

отже дріб, чисельник якого постійний (рівний означникові функції), а знаменик рівний квадратові знаменика даної функції. Це значить, що знак похідної згоджується із знаком означника функції.

Коли $AD-BC=0$, тоді й $y'=0$, а це згоджується з тим, що в цьому випадкові функція була би постійною величиною.

В нашому попередньому прикладі: $3xy+6x-4y+1=0$, є: $A=3$, $B=6$, $C=-4$, $D=1$, отже означник $AD-BC=3+24=27$, тому:

$$y'=\frac{27}{(3x-4)^2}.$$

Отся функція постійно росте, коли йдемо здовж осі X від лівої до правої руки (див. рис. 148), бо її похідна завсіди додатня.

д) Накінець узагальнимо наш дослід гіперболи так, що возьмемо функцію:

$$y=ax+\frac{b}{x}, \tag{17}$$

отже скомбінуємо функції лінійну цілу й лінійну дробову (в найпростішому вигляді). Нерозвинена форма тої функції була би:

$$ax^2-xy+b=0,$$

а що ми лівий бік (17) можемо написати також так: $\frac{ax^2+b}{x}$, тому не маємо вже права цю функцію звати «лінійною дробовою».

Розбиймо функцію (17) на два доданки:

$$y_1=ax,\quad y_2=\frac{b}{x}; \tag{18}$$

тоді буде:

$$y=y_1+y_2.$$

Образом першої функції буде проста через осередок перехрестя, образом другої — рівнобічна гіпербола в нормальному положенні (рис. 149). Образ функції (18а) отримаємо, додаючи рядні обох цих ліній (порівн. уст. 129г); крива, що з того вийде, буде зватись теж

гіперболою, тільки вже не рівнобічною. Вона має теж дві симетричні вітці, по протилежних боках точки O (бо коли в (17) замість x підставимо $-x$, отримаємо $-y$ замість y). Медіяни перестають уже бути осями симетрії; ці осі отримаємо, коли переполовинимо кут між додатнім напрямком осі Y та простою y_1.

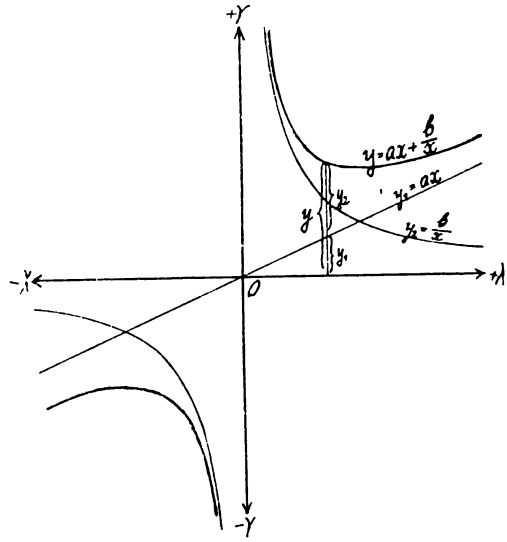


Рис. 149.

Вісь Y тут, як і перед тим, є сторчовою асимптотою кривої; другою асимптотою буде проста $y_1=ax$. Про це переконуємося так: коли x меншає (беручи числово), тоді крива наближається до осі Y, бо y_1 стає незмітне, а y_2 дуже сильно росте. Коли ж x росте над усяку міру, тоді y_2 стає дуже мале, так що y усе більше й більше наближається до вартости y_2, отже ця проста буде асимптотою кривої.

Коли a і b однакових знаків, тоді кут між асимптотом гострий; коли ж їхні знаки ріжні, то асимтоти творять тупий кут.

Поясніть це!

Приглядаючись до вигляду функції (17) (рис. 149), бачимо, що гіпербола може часами й підніматися, а не тільки заєдно опадати; це діється тоді, коли її асимптоти $y_1=ax$ переходять через ці самі чвертки, що й гіпербола. Щоби знайти точку переходу від опадання до зросту (чи навпаки), творимо похідну функції. На основі правила про похідну суми (уст. 129) є:

$$y'=a-\frac{b}{x^2}, \tag{19}$$

бо $y_1'=a$, $y_2'=-\frac{b}{x^2}$; y' стає нулем для $x^2=\frac{b}{a}$, а це вимагає, щоб a і b були однакових знаків (отже гіпербола й асимптота були в тих самих чвертках). У такому разі є $x_0=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ і $y_0=\pm 2\sqrt{ab}$, і ці дві точці — це максимум та мінімум гіперболи (17) у скінченім обсязі.

Коли a і b протилежних знаків ($ab<0$), рівняння $y'=0$ не має дійсної розвязки, отже гіпербола не має перехідної точки; вона заховується цілий час одностайно, бо її похідна затримує однаковий знак.

Отсей дослід пригодиться нам до розвязки завдання, що його можна назвати оберненням того, яке мали в уст. 130:

«Число p розкласти на два чинники так, щоб їхня сума була як найменша».

Назвім один із чинників x, тоді другий буде $\frac{p}{x}$, отже їхня сума буде функцією змінної x:

$$y=x+\frac{p}{x}.$$

Щоби знайти найменшу вартість тої функції, творимо її похідну й прирівнюємо до нуля: $y'=1-\frac{p}{x^2}$, $x_0^2=p$, $x_0=\pm\sqrt{p}$; тут вимагається, щоби p було додатнє. Із двох вартостей коріня виберемо додатню, яка відповідає найнижчій точці правої вітки (бо відповідна точка лівої вітки була би найвища). Так отже отримуємо один чинник: $x_0=\sqrt{p}$, а тоді другий буде: $\frac{p}{x_0}=\sqrt{p}$, т. зн. вони обидва *однакові*. — Геометрично висловимо це так:

«Із усіх прямокутників, що мають однакову площину, найменший обвід має квадрат».

Зробіть спробу подібно як в уст. 130 для ріжних вартостей p! Складайте таблички!

151. **Параболично-гіперболичний уклад. Характеристика укладів квадратових рівнянь.** а) Всі дотеперішні уклади вели до вислідного рівняння другого ступіня, отже могли мати дві або одну пару розвязок, якщо взагалі були розвязальні в дійсних числах. Геометрично виглядало це так, що ми мали що найбільше дві точці перетину простої з т. зв. «кривою другого ступіня», тоб-то параболою або рівнобічною гіперболою. Більше пар розвязок ані більше точок перетину ми отримати не могли.

Коли ж тепер возьмемо уклад, в якому одне рівняння відповідає параболі, а друге гіперболі, можемо отримати три, дві або одну точку перетину (рис. 150). Рахунково значить це, що уклад матиме три, дві або одну пару розвязок; *він буде завсіди розвязальний.* Коли обчислимо вислідне рівняння, побачимо, що воно буде *третього ступіня*, т. зн. міститиме в собі член x^3.

Нехай уклад виглядає так:

$$\left.\begin{aligned} y&=ax^2+bx+c,\\ Axy&+Bx+Cy+D=0; \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

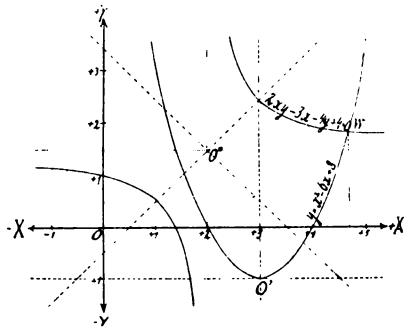


Рис. 150.

образи обох функцій нарисуємо відомим із попередніх уступів способом. Коли будемо одну й другу лінію пересувати або й змінювати їх величину, побачимо, що вони обидві будуть перетинатися принаймні один раз. Виходить це з такого досліду: парабола, яка з ростом аргументу x (у додатній або від'ємний бік) росте в безкрає, перетинає кожну позему просту, отже й позему асимптоту гіперболи, а що гіпербола не може безконечно віддалитися від своєї асимптоти, то її мусить колись перетяти парабола.

Вислідне рівняння отримаємо, коли в друге рівняння укладу вставимо y із першого:

$$Ax(ax^2+bx+c)+Bx+C(ax^2+bx+c)+D=0,$$

отже після редукції:

$$Aax^3+(Ab+Ca)x^2+(Ac+B+Cb)x+(Cc+D)=0. \qquad (21)$$

Для розвязки рівняння третього ступіня не маємо покищо способів, тому мусимо обмежитись до відчитання висліду з рисунку.

Напр.: $y=x^2-6x+8$, $2xy-3x-4y+4=0$

(див. рис. 150). Першій функції відповідає нормальна парабола; її вершок знайдемо, коли похідну прирівняємо до нуля: $y'=2x-6$; $x_0=3$, отже: $y_0=9-18+8=-1$.

Друга функція дасть нам нормальну рівнобічну гіперболу; її рівняння можна написати теж так: $y \quad \frac{1}{x-2}+\frac{3}{2}$, з асимптотами пересуненими: на 2 одиниці вправо і на $^3/_2$ одиниць угору. Отсі дві криві перетинаються тільки в одній точці W із співрядними $x=4{,}75$, $y=1{,}65$, — і це одинока пара розвязок рівняння.

б) Інші уклади ведуть до вислідних рівнянь четвертого ступіня, нпр. уклад, що має за образи дві ріжні квадратові параболи, одну розтягнену здовж осі Y, другу здовж осі X:

$$\left.\begin{aligned} y&=ax^2+bx+c,\\ x&=Ay^2+By+C. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Уклад може мати від 4 до 0 пар дійсних розвязок (рис. 151). Вислідне рівняння буде, коли в друге рівняння введемо y із першого:

$$x=A(ax^2+bx+c)^2+B(ax^2+bx+c)+C$$

або:

$$\begin{aligned} &Aa^2x^4+2Aabx^3+[A(b^2+2ac)+Ba]x^2+\\ &+(2Abc+Bb-1)x+(Ac^2+Bc+C)=0; \end{aligned} \tag{22a}$$

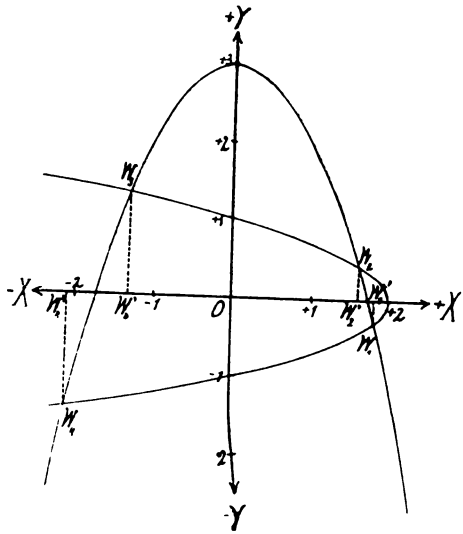


Рис. 151.

воно може мати що-найвище 4 розвязки (як це побачимо пізніше, в уст. 178), або може й не мати їх. А що з кожного x на основі першого рівняння отримаємо одну вартість y, то справді можемо мати 4 пари розвязок укладу.

Нпр. рис. 151 бачимо образ укладу:

$$\begin{aligned} x^2+y&=3,\\ x+2y^2&=2. \end{aligned}$$

отже дві параболи: першу нормальну з вершком на осі Y у віддалі $+1$, звернену вниз, другу звужену у відношенні $1:2$, з вершком на осі X у віддалі $+2$, звернена вліво. Вони мають чотири точки перетину; їхні співрядні можна відчитати з докладного рисунку:

$$W_1\begin{cases}x_1=-1{,}8,\\ y_1=-0{,}3;\end{cases}\qquad W_2\begin{cases}x_2=1{,}7,\\ y_2=0{,}4;\end{cases}\qquad W_3\begin{cases}x_3=-1{,}3,\\ y_3=1{,}3;\end{cases}\qquad W_4\begin{cases}x_4=-2{,}1,\\ y_4=-1{,}4.\end{cases}$$

Спроба покаже, що недокладности дуже невеликі.

в) Взагалі ж бачимо, — і це підтверджує повніший вислід, — що уклад зложений з одного рівняння ступіня m і другого рівняння ступіня n, дає mn пар розвязок, т. зн. вона веде до вислідного рівняння ступіня mn, яке може мати що найвище mn розвязок. Та не всі вони мусять бути дійсні; можуть між ними виступати також злучені величини, парами як спряжені. В такому разі відповідні криві будуть мати менше, чим mn точок перетину.

ВПРАВИ.

I.

Розвязати такі уклади квадратових рівнянь із двома невідомими:

1. $y=x^2-5x+3,$
   $2x-3y-1=0;$

2. $x^2-x-y-1=0,$
   $x+y=0;$

3. $x^2-y=y-x,$
   $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=2;$

4. $y-x^2=x^2+x+1,$
   $y-x=2x+3;$

5. $xy=15,$
   $2x+3y+7=0;$

6. $xy=-1,$
   $3x-2y=0;$

7. $x+y+a=0,$
   $xy+b^3=0;$

8. $x-y+a=0,$
   $xy-b^2=0;$

9. $xy=4,$
   $y=x^2+1;$

10. $xy+1=0,$
    $x^2-y=2;$

11. $xy+x+y+2=0.$
    $y^2=x;$

12. $xy+2x-3y=1,$
    $2x-3y^2=4;$

13. $y=x-\frac{1}{x},$
    $x=y+\frac{2}{y};$

14. $(x+a)(y+b)=x+y+c,$
    $x-y=a+b+c.$

II.

Дослідити такі функції:

1. $y=\frac{3}{x+1}$; 2. $y=\frac{3x+1}{3x-1}$; 3. $y+1=\frac{1}{x-1}$; 4. $xy+2x-4y=5$;
5. $y-x=\frac{2}{x+1}$; 6. $(x+y+2)(x-1)=1$; 7. $xy+ax+1=0$ (a — змінний параметр); 8. $axy+(x+y)+1=0$.

III.

Зробити дослід таких укладів:

1. $xy+1=0$,
   $y=2x+a$;
2. $y=\frac{2}{x+a}$,
   $y=x-1$;
3. $axy=1$,
   $y=3x$;
4. $xy=a$,
   $x=y+a$;
5. $x-y-a=0$,
   $a-\frac{x}{y}=x$;
6. $\frac{3}{2}x(y+a)=a$,
   $x-a=y$.

26. Продовження досліду квадратового рівняння.

152. Положення точок на площі відносно параболи та чисел відносно корінів рівняння. а) Часто виринає таке питання: дана точка P на площі, із співрядними X і Y; як лежить вона відносно даної параболи:

$$y=ax^2+bx+c, \tag{1}$$

тоб-то: серед її поля, на ній, чи поза нею?

Ясно, що коли пара чисел (X, Y) сповняє рівняння (1), отже :

$$Y=aX^2+bX+c, \tag{1a}$$

тоді точка P лежить на параболі; в противному разі вона або в нутрі параболи, або поза нею, і нам ходить тепер про вирішення тих двох можливостей.

Зачнемо з нормальної параболи в нормальному положенні; цей випадок буде найчастіше подибуватися в практиці. Коли дана парабола $y=x^2$ і точка P (X, Y), то P буде лежати на полі параболи, коли $Y>X^2$, отже Y більше від рядної тої точки параболи, що має відрізну X, а поза параболою, коли $Y<x^2$, отже:

$$\textit{Точка } P\ (X, Y) \textit{ лежить} \left\{\begin{matrix}\textit{на полі}\\ \textit{на лінії}\\ \textit{поза полем}\end{matrix}\right\} \textit{параболи } y=x^2, \textit{ коли } Y\gtreqless X^2.$$

Очевидно, коли $Y=0$, то тільки вершок $(X=0)$ лежить на контурі параболи, а всі инші точки поза параболою; коли $Y<0$, то точка P лежить завсіди поза параболою.

У загальному випадкові треба перш за все ввести одне скорочення: лівий бік рівняння (1) означимо $f(x)$:

$$f(x)=ax^2+bx+c, \tag{2}$$

так, що вислід під ставлення у функційне рівняння за x вартости X будемо писати:

$$f(X)=aX^2+bX+c.$$

Тут треба нам розріжнити дві можливости, відповідно до знаку співчинника a.

(1) Нехай буде $a>0$; тоді нерівність:

$$Y>aX^2+bX+c \qquad \text{або} \qquad Y>f(X) \tag{a}$$

означує, що точка (X, Y) лежить на полі параболи. Бо коли парабола розширюється вверх і ми за Y возьмемо вартість *більшу*, ніж її отримали би, вставлюючи X у рівняння (1а), то це буде значити, що підсунулися вище, отже *знайшлися на полі параболи*. Навпаки, нерівність:

$$Y<aX^2+bX+c, \qquad \text{або} \qquad Y<f(X) \tag{3б}$$

показує, що ми *зменшили* вартість функції, дану рівнянням (1а), отже відсунулися від параболи вниз, а через те опинились *поза її полем*.

(2) Коли ж приймемо $a<0$, то виступить з'явище протилежне; тоді парабола звернеться своїми раменами вниз, отже *збільшити* вартість Y значить те саме, що *вийти поза параболу*, *а зменшити її — знайтися на полі параболи*. Це значить, що тут нерівности (3а) і (3б) міняють своє значіння (рис. 152).

Щоби ці два випадки звести під одне правило, множимо обидві нерівности обіруч на a; коли це додатнє число, то тут нічого не зміниться, а при від'ємному a тільки обернуться знаки нерівности. Через те, без огляду на знак співчинника a, перша нерівність показуватиме, що точка лежить на полі параболи, а друга, що точка поза нею.

Отсе все зберемо в таке правило:

Точка $P(X, Y)$ *лежить* $\left\{\begin{matrix} на\ полі \\ на\ лінії \\ поза\ полем \end{matrix}\right\}$ *параболи* $y=f(x)$, *коли* $aY \gtreqless af(X)$.

Нпр. дана парабола $y=-3x^2+5x-4$; точка (2, 3) лежить поза полем параболи, бо $f(2)=-3\cdot 2^2+5\cdot 2-4=-6$, отже $(-3)\cdot 3<(-3)\cdot(-6)$. Спроба!

б) Тісно з цим питанням вяжеться друге, яке можна вважати його особливим випадком: дане рівняння:

$$ax^2+bx+c=0 \tag{4}$$

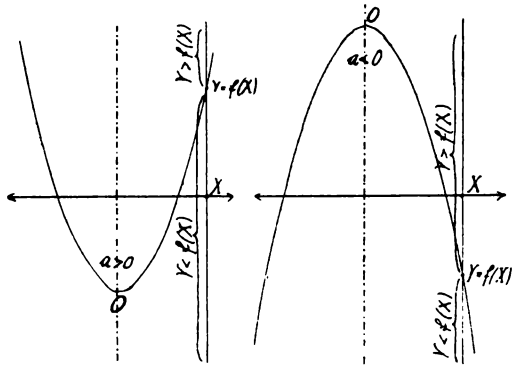


Рис. 152.

і дійсне число k; вирішити положення того числа відносно корінів рівняння.

Дане число k може бути корінем рівняння, або воно буде: (а) більше від більшого коріня рівняння, або (б) менше від меншого коріня рівняння, або остаточно (в) може лежати між корінями рівняння; отже ми маємо при даному рівнянній даному числі вирішити, котра з трох можливостей тут заходить.

Отсе питання можна ставити собі тільки тоді, коли рівняння розвязальне, т. зн. *коли його виріжник не-від'ємний*; тільки ж у випадку $\Delta=0$ відпадає можливість (3), бо тоді рівняння має подвійний корінь і між x_1 та x_2 немає ріжниці.

Геометрично значить це, що парабола (7а) перетинає вісь X, отже ділить її на три частини: точки двох крайніх лежать поза параболою, точки середущої — на полі параболи; для $\Delta=0$ середуща частина зводиться до нуля.

Згаданому поділові осі X відповідає поділ усіх чисел при допомозі корінів рівняння (14) на три кляси, які знову відповідають можливостям (а), (б) і (в) нашого завдання. Наслідком того наше питання зводиться до такого: «до котрої з трох частин осі X належить точка, яка відповідає числу k?»

Точка, про яку тут мова, має співрядні $(k, 0)$; застосовуючи до неї попереднє правило, поставимо таку оцінку:

$$a \cdot 0 \gtreqless af(k);$$

тут знакові горішньому $(>)$ відповідає можливість (а) і (б), середущому $(=)$, що k—корінь рівняння, а долішньому $(<)$ — можливість (в).

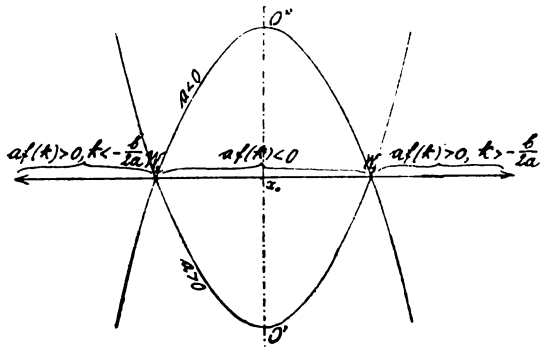


Рис. 153.

Щоби розріжнити ще далі можливости (а) і (б), зважмо, що для вершка параболи є $x_0 = -\frac{b}{2a}$, отже для кожної точки праворуч маємо $x > x_0$, для точки ліворуч $x < x_0$; те значить, що можливість (а) відповідає точкам праворуч вершка (а навіть поза W_1), а можливість (б) — точкам ліворуч вершка (і точки W_2). Загалом напишемо таку табличку (див. теж рис. 153):

$f(x) = ax^2 + bx + c; \quad \Delta \geqq 0; \quad x_1 > x_2.$		
$af(k) < 0$	$k > -\frac{b}{2a}$	k більше від більшого коріня
	$k < -\frac{b}{2a}$	k менше від меншого коріня
$af(k) \quad 0$	$k > -\frac{b}{2a}$	k рівне більшому коріневі
	$k - -\frac{b}{2a}$	k рівне подвійному коріневі
	$k < -\frac{b}{2a}$	k рівне меншому коріневі
$af(k) < 0$*)		k лежить між обома корінями

*) Коли $\Delta = 0$, ця можливість виключена, бо тоді обидва коріні були б однакові і між ними не могло би лежати ніяке число.

Нпр. рівняння $2x^2+3x-8=0$ розвязальне, бо $\Delta=3^2+4\,.\,2\,.\,8>0$. Не розвязуючи рівняння, можемо на основі таблички сказати, що нпр. число $k_1=2$ більше від більшого коріня рівняння, бо $2.\,f(2)=12>0$, і $2>-\frac{3}{2.2}$; число $k_2=-4$ менше від меншого коріня, бо $2.f(-4)=12>0$ і $-4<-\frac{3}{2.2}$, а число $k_3=-2$ лежить між коріннями рівняння, бо $2f(-2)=-12<0$.

Провірте цей вислід рахунком і рисунком!

в) Із попереднім вяжеться ще таке третє питання: «Чи в данім обсязі (m,n) лежить бодай один корінь рівняння ах $ax^2+bx+c=0$?» або: «чи парабола $y=ax^2+bx+c$ перетинає вісь X бодай один раз між точками m і n?»

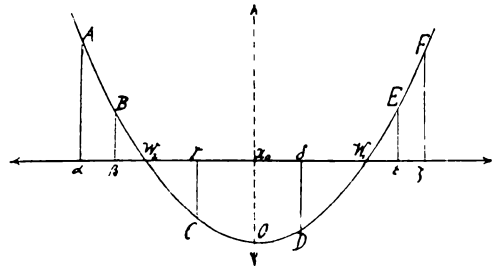


Рис. 154.

Коли парабола перетинає вісь X між точками m і n тільки один раз (як нпр. на рис. 154 між β і γ або δ і ε), то рядні цих кінцевих точок матимуть протилежні знаки, отже їхній добуток буде від'ємний:

$$f(m)\,.\,f(n)<0. \tag{5}$$

Коли ж ці дві величини мають однакові знаки, тоді можливе одне з двох:

(1) в обсягу $(m,\ n)$, лежать обидва коріні рівняння, нпр. в обсягу $(\beta,\ \varepsilon)$,— або:

(2) в обсягу (m, n) не лежить ні один корінь рівняння, нпр. в обсягах (α,β), $(\varepsilon,\ \zeta)$, або $(\gamma,\ \delta)$.

Коли між кінцевими точками обсягу лежать обидва коріні, то це значить, що одна з точок лежить ліворуч від меншого, а друга — праворуч від більшого коріня; тоді мусить бути $af(m)>0$ і $af(n)>0$, а ці точки мусять лежати по обох боках вершка параболи, т. зн. мусить бути $m<-\frac{b}{2a}$ і $n>-\frac{b}{2a}$(приймаємо, що $m<n$).

Відноситься це до укладу точок нпр. B і E; тут $\beta<x_0$, $\varepsilon>x_0$, бо $x_0=-\frac{b}{2a}$.

Зате всі инші комбинації точок не сповнюють бодай одної із цих умов: ось так для обсягу $(\alpha,\ \beta)$ є — правда — $af(\alpha)>0$ і $af(\beta)>0$, але зате $\alpha<x_0$ і $\beta<x_0$; для $(\varepsilon.\zeta)$ буде $af(\varepsilon)>0$ і $af(\zeta)>0$, але $\varepsilon>x_0$ і $\zeta>x_0$; врешті для $(\gamma,\ \delta)$ маємо $af(\gamma)<0$ і $af(\delta)<0$, бо обидві точки лежать між W_1, та W_2.

Вислід того помістимо в такій табличці:

$f(x)=ax^2+bx+c$; $\Delta\geqq 0$; $m<n$.				
$af(m)>0$ і $af(n)>0$	$m<-\frac{b}{2a}<n$	в обсягу (m, n) містяться	2	коріні рівняння $f(x)=0$.
	m і $n \gtrless -\frac{b}{2a}$		0	
$af(m)<0$ і $af(n)<0$				
$f(m).f(n)<0$			1	

Нпр. (1) Дане рівняння $3x^2-5x-8=0$; не розвязуючи його, читаємо з таблички, що в обсягах $(-4, -3)$ або $(5, 7)$ немає корінів рівняння, бо хоч $3f(-4)=120>0$ і $3f(-3)=102>0$, то проте $-4<x_0$ і $-3<x_0$ (бо $x_0=5/3$), отже обсяг $(-4, -3)$ лежить ліворуч обсягу W_1W_2; і хоч $3f(5)=126>0$ і $3f(7)=312>0$, то проте $5>x_0$ і $7>x_0$, отже обсяг $(5, 7)$ ліворуч обсягу W_1W_2. Подібно в обсязі $(0, 2)$ не має корінів рівняння, бо $3f(0)=-24<0$ і $3f(2)=-18<0$, і цей обсяг лежить у нутрі обсягу W_1W_2. Зате в $(-3, +5)$ містяться обидва коріні, бо $-3<x<+5$. Обсяги $(-3, 0)$ та $(0, 5)$ містять по одному кореневі рівняння, бо $f(-3)\,.\,f(0)<0$ і $f(0)\,.\,f(5)<0$.

Провірте вислід рахунком і рисунком!

(2) Дане рівняння з параметром:

$$x^2-(2m+3)x+4=0$$

(див. уст. 141 **б**, приклад (1); рис. 131); (а) знайти умову, щоби коріні рівняння були <5, (б) щоби число -3 лежало між корінями рівняння; (в) щоби в обсягу $(1, 4)$ лежали обидва коріні рівняння.

На питання (а) відповімо — геометричним методом — так, що в точці $+5$ на осі X виставимо простопадну та будемо дивитися, яку вартість матиме параметер m для тої простої, що сполучує відповідну точку параболи $(x=5,\ y=5^2=25)$ із вершком жмутка S.

Аритметична розвязка буде полягати на рахунковому винайденні тієї вартости, отже нам треба би знайти рівняння згаданої простої та порівнювати співчинники нахилу. Рівняння простої, що належить до нашого жмутка, мусить мати форму:

$$y=kx-4,$$

а що проста має переходити через точку $(5, 25)$, то після підставлення цих вар-вартостей отримаємо: $25=k\,.\,5-4$, т. зн. $k=\frac{29}{4}$, отже з $2m+3=\frac{29}{4}$ виходить: $m=\frac{17}{8}$. Значить, маємо бажану умову: $m<\frac{17}{8}$; вимогу нашого завдання (а) сповнюють: цілий обсяг B, а з обсягу A вартости, менші від $\frac{17}{8}$.

Коли якась вимога неможлива, доходимо до явної суперечности; нпр. коли коли хочемо, щоби в обсягу $(-1, +1)$ містились обидва коріні рівняння. На

основі нашої таблички мусіли б ми мати $1 \cdot f(-1)>0$ і $1 \cdot f(+1)>0$, отже одночасно $m<1$ і $m>-4$, а далі: $-1<\frac{2m+3}{2}$ і $+1>\frac{2m+3}{2}$ т. зн. $m>-\frac{5}{2}$ і $m<-\frac{1}{2}$. Ясно, що не має такої вартости для m, яка сповнювала би ці чотири вимоги нараз.

153. **Дослід жмутків простих ліній.** Вернімся ще раз до досліду квадратового рівняння:

$$ax^2+bx+c=0, \tag{6}$$

де a, b і c — функції змінного параметру m, і приймім, що цей параметер виступає принаймні у двох співчинниках; тоді можемо — на загал — розріжнити такі два випадки:

(1) співчинник a при x^2 вільний від змінного параметру; тоді при зведенні до нормального вигляду отримаємо рівняння, що має за співчинник цілу функцію параметру (т. зн. параметер не буде виступати в знаменику);

(2) співчинник a — теж функція аргументу; тоді в нормальному вигляді аргумент появиться теж у знаменику других співчинників.

Тут у першу чергу приймемо, що співчинники можуть бути тільки *лінійними функціями* аргументу, отже приймаючи в першому випадкові відразу нормальний вигляд, матимемо:

$$x^2+(\alpha m+\beta)x+(\gamma m+\delta)=0, \tag{21}$$

а в другому: $(\mu m+\nu)x^2+(\alpha m+\beta)x+(\gamma m+\delta)=0$, отже в нормальному вигляді:

$$x^2+\frac{\alpha m+\beta}{\mu m+\nu}x+\frac{\gamma m+\delta}{\mu m+\nu}=0. \tag{22}$$

Геометричний метод веде нас — після розбиття лівого боку рівняння — до досліду якоїсь громади простих:

$$y=-(\alpha m+\beta)x+(\gamma m+\delta) \text{ або: } y=-\frac{\alpha m+\beta}{\mu m+\nu}x+\frac{\gamma m+\delta}{\mu m+\nu}, \tag{23}$$

і ми мусимо вирішити, що уявляють собою такі рівняння. Як би це мали бути громади рівнобіжних простих, співчинники нахилу мусіли би бути постійні, отже було би $\alpha=0$, а в другому рівнянні також $\mu=0$, а це зводиться до попереднього випадку, де змінний тільки третій співчинник рівняння. Так отже матимемо до діла із *жмутком* простих, або ще з якоюсь иншою громадою простих, якої досі не знаємо.

У попередніх уступах займались ми вже жмутками простих, які мали свій вершок на осі X; у їхньому рівнянні параметер m виступав тільки в середущому співчинникові (при x). Через те тут мусимо припустити, що вершок жмутка лежить поза віссю X, а провіримо це таким шляхом: коли точка S має бути вершком жмутка, то через неї мусить переходити кожна проста, що належить до жмутка; а що до визначення точки треба нам двох простих, тому творимо два рівняння для двох довільних вартостей параметру m і шукаємо точки їхнього перетину. Коли це вершок жмутка, то його співрядні, вставлені в рівняння жмутка, мусять сповнити його тотожно, і це буде для нас доказ, що дане рівняння уявляє собою жмуток простих.

Положення вершка жмутка відносно параболи може бути трох родів: він може лежати: (1) на параболі, і тоді його співрядні (X, Y) сповнюють рівняння $Y=X^2$, або (2) на полі параболи й тоді є $Y>X^2$, або (3) поза параболою, т. зн. $Y<X^2$ (див. попер. уст.).

У першому разі точка S — це постійна точка перетину параболи з простою, а опріч неї існує ще друга точка перетину; тільки ж проста, що є доторкальною параболи, має в S подвійну точку. Це значить, що в цьому разі рівняння завсіди має два коріні, один із них постійний, а другий змінний, і тільки для одної вартости параметру m змінний корінь зливається з постійним і ми отримуємо подвійний корінь.

У другому випадкові, коли S на полі параболи, *кожна* проста жмутка перетинає параболу в двох точках, отже кожна вартість параметру дає дві розвязки; тут доторкальна не існує, отже подвійного коріня не маємо.

Врешті при третій можливости, S поза параболою, треба всі прості жмутка поділити на три кляси, а саме: такі, що перетинають параболу в двох точках, такі, що її не перетинають, і дві доторкальні, що мають по одній точці спільній із параболою; тільки ж, коли вершок S не лежить симетрично відносно параболи (тоб-то на осі Y), то й доторкальні не будуть симетричні.

Хід дискусії покажемо на прикладах.

(1) $$x^2-(m+2)x+2m=0.$$

Виріжник цього рівняння є: $\Delta=(m+2)^2-4\,.\,2m=m^2-4m+4=(m-2)^2$; це квадрат, отже величина не-від'ємна. Це значить, що дане рівняння завсіди розвязальне; коли $m=2$, є $\Delta=0$, отже тоді рівняння має подвійний корінь:

$$x^2-4x+4=(x-2)^2=0;\ x_1=x_2=2.$$

Розвязка даного рівняння є:

$$x=\frac{m+2}{2}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{(m+2)\pm(m-2)}{2},$$

т. зн. $x_1=m$, $x_2=2$, отже другий корінь постійний—незалежний від параметру.

Для геометричної розвязки й дискусії пишемо: $x^2=(m+2)x-2m$ і розбиваємо рівняння на уклад:

$$\left.\begin{aligned} y&=x^2,\\ y&=(m+2)x-2m;\end{aligned}\right\}$$

її образом буде нормальна парабола в нормальному положенні і якась громада простих, що до якої мусимо перевести згаданий попереду дослід (рис. 155).

В рівняння громади підставлюємо дві довільні вартости параметру m, щоби знайти дві прості, які повинні визначити вершок жмутка. Нам найвигідніше буде взяти $m=0$ та нпр. $m=1$; це дасть: $y=2x$ і $y=3x-2$, а розвязка укладу буде $x=2$, $y=4$, і ми *здогадуємося*, що це вершок. Щоби це ствердити, підставмо ці вартости в рівняння громади: $4=(m+2)\,.\,2-2m$, отже рівняння справджується для всякого m. Це значить, що точка $S(2,\ 4)$ — справді вершок жмутка.

Далі бачимо, що ця точка лежить на самій параболі (бо $4=2^2$), отже заходить випадок (1). Це згоджується з тим, що дане рівняння має один постійний корінь. Другий корінь є m, отже його вартість росте й меншає одночасно з вартістю параметру. З ростом m проста буде обертатися вгору (проти стрілки годинника), а коли m меншає, оборот відбувається вниз (згідно із стрілкою). Обидва ці обороти змагають до одного спільного положення й ми питаємо, коли це наступить. Коли m дуже велике, то співчинник нахилу простої стане теж дуже великий, отже проста наближається до сторчового положення, те саме станеться, коли m буде змагати до межі $-\infty$. Отся проста має з параболою тільки одну точку спільну, бо друга відсувається в безмежну даль.

Ці відносини відібються і в рахунку, коли застосуємо метод із уст. 141б: рівняння ділимо обіруч на m:

$$\frac{1}{m}x^2-\left(1+\frac{2}{m}\right)x+2=0,$$

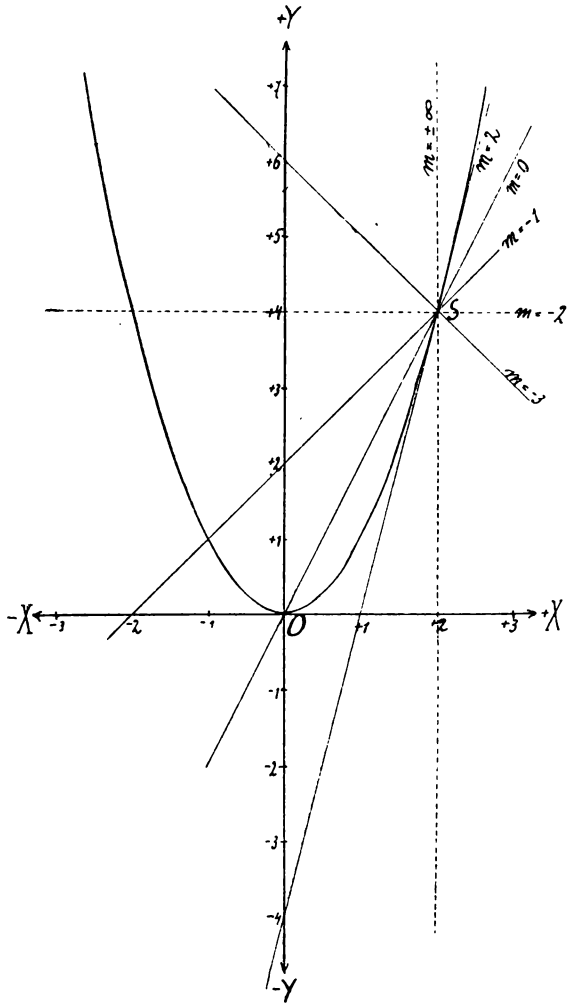


Рис. 155.

і переходимо до $m\to\pm\infty$; тоді воно прийме форму: $-x+2=0$, т. зн. матиме корінь: $x_1=\pm\infty$, $x_2=2$, а це останє — це рівняння простої рівнобіжної до осі Y, що переходить у віддалі $+2$.

Вислід дискусії, при якій говоритимемо тільки про змінний корінь x_1, такий:

Посуваючися здовж осі m від $-\infty$ до $+\infty$, маємо спершу $x_1=-\infty$; цей корінь від'ємний і росте до 0 (при $m=0$), а потім переходить на додатній бік. Аж до $m=2$ є $x_1<x_2$, потім обидва коріні порівнюються, а далі змінний корінь стає більший і знову росте аж до $+\infty$.

(2) $$mx^2-2x+1=0.$$

Зачинаємо з виріжника, який має бути не-від'ємний:

$$\Delta=4-4m=4(1-m)=0,$$

отже $m\leqq 1$; межевій вартости $m=1$ відповідає рівняння: $x^2-2x-1=(x-1)^2=0$ із подвійним корінем $x=1$. Для $m=0$ отримуємо виїмковий вигляд, а саме лінійне рівняння $-2x+1=0$, отже коріні дяного рівняння змагають до вартостей $x_1=\pm\infty$, $x_2={}^1/_2$.

Коли зведемо рівняння до нормального вигляду $x^2-\frac{2}{m}x+\frac{1}{m}=0$ і розіб'ємо на уклад:

$$\left.\begin{aligned} y&=x^2,\\ y&=\frac{2}{m}x-\frac{1}{m}, \end{aligned}\right\}$$

переконаємося легко, що вершком жмутка, визначеного другим рівнянням, буде точка зі співрядними $x={}^1/_2$, $y=0$, отже на осі X (рис. 156).

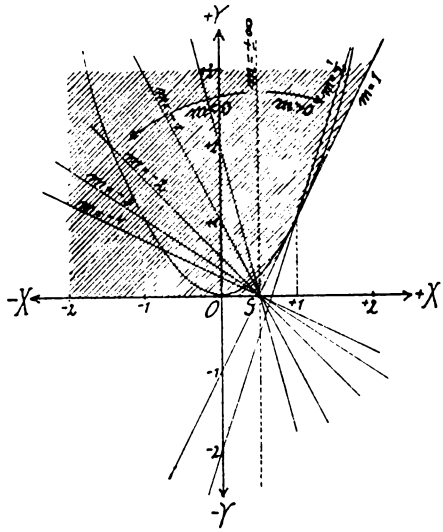


Рис. 156.

Для $m\to 0$ є $\lim\frac{2}{m}=\infty$, отже проста стає рівнобіжна до осі Y; вона перетинає параболу тільки в точці з відрізною $x={}^1/_2$, а друга точка перетину стає безконечно далека.

Коли m росте в додатній бік, проста хилиться вправо аж до положення доторкальної для $m=+1$, отже перетинає параболу завсіди в додатній половині у двох точках, направо і на ліво від точки дотику T. Дальший

оборот у цьому напрямкові недозволений. Коли ж m росте у від'ємний бік, проста хилиться вліво й перетинає параболу двічі для всякого m; раз у додатній, другий раз у від'ємній половині. Точки перетину змагають спільної межі $x=0$, якої й досягають, коли $m\to-\infty$; тоді отримуємо рівняння $y=0$, а це є рівняння осі X. Це значить, що вісь X — друга доторкальна параболи, яка відмежовує дозволений обсяг змінности від недозволеного.

Вислід дискусії (рис. 157):

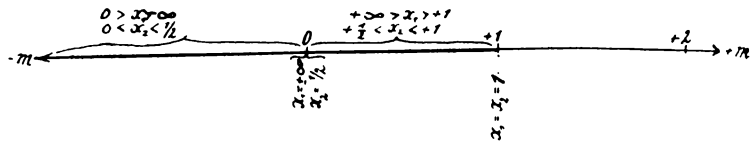


Рис. 157.

(3) Приклад трохи труднішої дискусії матимемо в рівнянні:

$$(m+3)x^2+2(2m+1)x-(m+5)=0.$$

Воно має виріжник:

$$\Delta=4[(2m+1)^2+(m+3)(m+5)]=4(5m^2+12m+16),$$

від якого вимагаємо, щоби був не-від'ємний. Щоби знайти обсяг розвязальности рівняння, мусіли б ми розкласти цей виріжник на лінійні чинники; одначе перед тим хочемо впевнитися, чи такий розклад можливий. Це буде тоді, коли рівняння $\Delta=0$ розвязальне, отже коли його виріжник не-від'ємний. Одначе показується, що воно так не є, бо $\Delta_1=12^2-4\,.\,5\,.\,16<0$*); значить, виріжник не розвязальний, не можна його розкласти на лінійні чинники, отже не може стати нулем. Звідсіля виходить, що Δ має завсіди той самий знак; легко переконатися, що ця величина завсіди додатня**), отже наше рівняння *завсіди* (т. зн. *для всякого* m) *розвязальне*; обсяг розвязальности є $(-\infty, +\infty)$. Далі розбиваємо рівняння, зведене до нормального вигляду, на пару функцій:

$$y=x^2; \qquad y=-\frac{2(2m+1)}{m+3}x+\frac{m+5}{m+3}.$$

Щоби знайти вершок жмутка простих, підставляємо за m дві довільні вартости, одначе добіраємо їх так, щоби мати з того якусь вигоду, нпр. $m=-1/2$ (тоді відпадає перший доданок) і $m=-5$ (щоби відпав другий доданок), отже буде: $y=9/5$ і $y=-9x$, а звідсіля: $S(-1/5, 9/5)$. Вершок лежить на полі параболи, бо $9/5>(-1/5)^2$, отже кожна проста, що належить до жмутка, перетинає параболу двічі (рис. 158).

Тепер врисовуємо кілька простих того жмутка, перш за все ті, що відповідають визначним вартостям параметру, отже: $m=-1/2$ (позема проста), $m=-5$ (проста через 0) і $m=-3$ (сторчова проста).

---

*) Уважати! Тут творимо виріжник виріжника!

**) Парабола $y=5m^2+12m+19$ лежить ціла над поземою віссю.

Просту, що відповідає вартости $m=\pm\infty$, отримаємо так: в обох доданках правого боку скорочуємо дроби на m:

$$y=-\frac{2\left(2+\frac{1}{m}\right)}{1+\frac{3}{m}}x+\frac{1+\frac{5}{m}}{1+\frac{3}{m}}.$$

Коли m зросте над усяку міру, відпадуть дроби $\frac{1}{m}$, $\frac{3}{m}$, $\frac{5}{m}$, а рівняння прийме вигляд:

$$y=-4x+1,$$

отже це проста, що відтинає $+1$ на осі Y.

Остаточно маємо ще для $m=0$:

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

і ці всі прості позволять нам з'орієнтуватися в обсягу змінности.

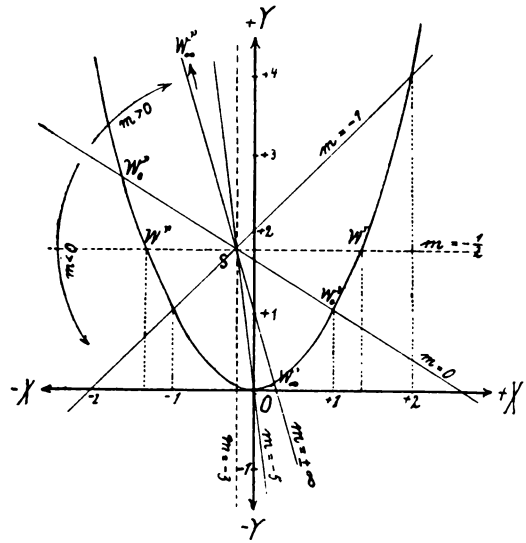


Рис. 158.

Коли m росте від 0 до $+\infty$, проста обертається кругом S направо; тоді одна точка перетину біжить від W_0' до W_∞', друга від W_0'' до W_∞'', отже x_1 є додатнє й меншає від $+1$ до $+0{,}24\ldots$, а x_2 від'ємне і теж меншає від $-{}^5/_3$ до $-4{,}24\ldots$ (відрізна точки W_∞'').

Коли ж m буде змінюватися від 0 до $-\infty$, проста буде обертатись уліво; тоді точка W_0' буде підніматись угору, отже x_1 буде рости, а W_0'' опадатиме вниз так, що x_2 буде меншати. При $m=-{}^1/_2$ обидва коріні приймають симетричні вартости (W' і W''; $x_1={}^3/_5\sqrt{5}=1{,}34\ldots$, $x_2=-{}^3/_5\sqrt{5}=-1{,}34\ldots$) а потім x_1 росте далі в безконечність, а x_2 наближається до нуля. При $m=-3$ є $x_1=+\infty$, а x_2 від'ємне, близьке нуля ($x_2=-{}^1/_5$); далі x_1 перескакує від дуже великих додатніх

до дуже великих від'ємних вартостей і ми маємо аж до $m=-5$ обидва корені від'ємні. Остаточно, коли m стає дуже великим від'ємним числом, x_1 і x_2 наближаються до тих вартостей, які мали при $m=\pm\infty$. Виразніше виступить залежність між m і x, коли представимо наглядно x як функцію аргументу m (рис. 159).

Звідсіля видно, що з ростом m від $-\infty$ до $+\infty$ корінь x заєдно й суцільно меншає від асимптотичної вартости $-4{,}24\ldots$ через $\pm\infty$ до другої асимптотичної вартости $+0{,}24\ldots$, а x меншає від $+0{,}24\ldots$ через 0 до $-4{,}24\ldots$

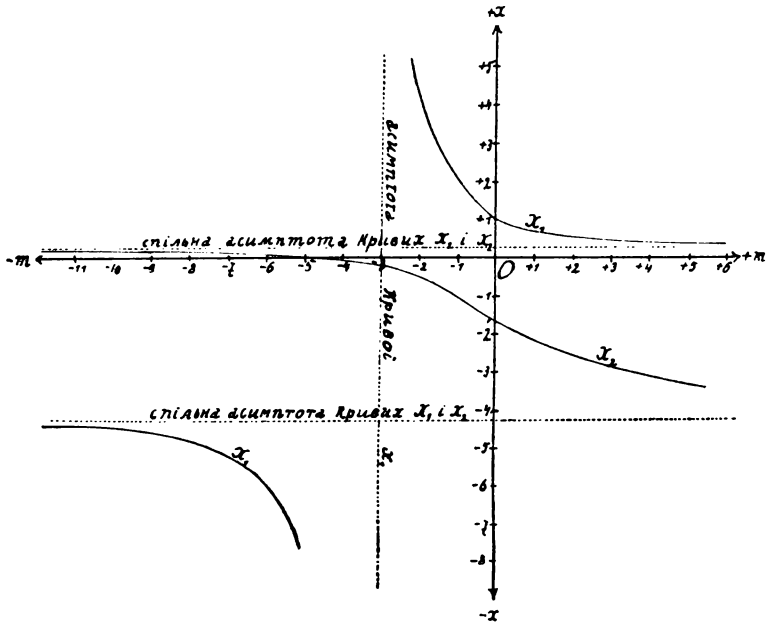


Рис. 159.

Підчас усіх тих дискусій насуваються деякі труднощі при розгляді безконечних вартостей параметру m та аргументу x; так нпр. x при вартости $m=\pm\infty$ приймає зовсім означені, закінчені вартости, а для одної з посередніх вартостей параметру один із коренів рівняння стає безмежно великий (в останньому прикладі, рис. 158, для $m=-3$). Далі бачимо, що перехід через цю критичну вартість викликує в тої змінної нагальний перескік від $-\infty$ до $+\infty$ або навпаки*) (пор. рис. 158 і 159).

Щоби пояснити ці — на перший погляд такі дивні — з'явища, вживаємо порівнянь, які впровадив до математики *Ріман***). Уявляємо собі, що необме-

*) Подібно в тригонометрії функція $y=\operatorname{tg}x$ при переході через критичні вартости $x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ (т. зн. 90°, 270° і т. д.) перескакує від $+\infty$ до $-\infty$.

**) *Бернгард Ріман* (Riemann, 1826–1866), визначний німецький математик, проф. унів. в Гетінгені, відомий своїми працями м. и. над основами геометрії.

жена проста (нпр. числова лінія або вісь змінної) — це *коло* з безконечно великим промінем; таким чином можемо посуватися по простій в одному напрямкові й вернутися на те саме місце, з якого вийшли.

Подібно уявляємо собі, що площа — безконечно велика *куля*, а кожна проста — одно з великих кол тієї кулі. Отсе уявління в нічому не суперечить нашому поглядові на істоту простої та площі, коли приведемо на думку справжню постать нашої землі та всі відрізки й частини площ, із якими маємо до діла в геометрії чи в практиці*).

На такій кулі орієнтуємося здовж великих кол, отже здовж рівника й полуденників, як у географії; позему вісь (X) уважаємо рівником, а сторчову (Y) — першим полуденником. Коли x переходить через безконечність, то це діється в точці, де рівник у друге перетинається з першим полуденником**), отже тоді змінна зараз після переходу міняє свій знак. Подібно перехід змінної y через безконечність пояснюємо так, що змінна посувається здовж полуденника, переходить через один із бігунів і перебиває рівник у тій же самій протилежній точці (в «антиподах»)***).

Вживаючи цього пояснення, можемо уявити собі, що рівнобічна гіпербола:

$$y = \frac{1}{x}$$

(див. рис. 64 стр. 147), яка складається з двох неповязаних віток — суцільна. Коли x росте безмежно, y меншає нижче всякої міри; переходові змінної x через $+\infty$ відповідає $\lim y \to 0$, отже в «антиподах» гіпербола перетинає рівник і при від'ємному x являється нижче поземної осі. Зате, коли x меншає до нуля, y росте в безконечність; для $x \to 0$ стає $\lim y \to \pm\infty$ і зараз після переходу через нуль ця змінна міняє свій знак. Так отже гіпербола в нашому розумінні буде суцільною кривою, яка перетинає сама себе на протилежній точці кулі, отже виглядає неначе великанська вісімка, яка має свій перетин в «антиподах».

Так само вдасться нам вияснити подвійну прірву коріневих кривих, які бачимо на рис. 159. Коли будемо посуватися здовж осі m (поземної) в додатньому напрямкові (т. зн. від $-\infty$ до $+\infty$), крива буде віддалюватися від своєї горішньої асимптоти, перебє в $m = -5$ позему вісь, а в $m = -{}^5/_3$ сторчову вісь і буде наближатися до долішньої асимпоти, яку й досягне в $m = +\infty$†). У цій точці††) можна звязати її з другою кривою, що відповідає коріневі x_1; ця крива у лівій півплощі опускається вниз від долішньої асимптоти, приймаючи в околиці

---

*) Як би взяти кулю, більшу від земної, то ріжниця між її частинами та відповідними плоскими творами стала би ще більш незамітною; нпр. на кулі, що обнімає цілий сонішній уклад ($R = 4\,500\,000\,000$ *km*), проста, довжиною в 1000 *km*, піднялась би над велике коло кулі всього на 11 *cm*.

**) У географії такому переходові відповідає перехід із східньої на західню півкулю, отже зміна східньої (+) географичної довжини на західню (−), — або навпаки.

***) Пор. перехід из північної на південну півкулю — або навпаки — та зміну знаку при географичній ширині.

†) Можемо уявити собі, що ці асимптоти — це рівнолежники кулі: горішня в ширині $+0{,}23\ldots$, долішня в ширині — $4.23\ldots$

††) Де долішня асимптота в друге перетинає перший полуденник.

$m=-3$ дуже великі від'ємні вартости. При $m=-3$ вона доходить до сторчової асимптоти й перебиває її в «антиподах», так, що незабаром з'являється в горішній півплощі й далі опадає; в $m=+1$ перетинає сторчову вісь і поволі наближається до горішньої поземої асимптоти. В безконечно далекій точці можна її знову з'єднити з попередньою кривою, перебиваючи горішню позему асимптоту. На загал уявиться нам ціла та крива суцільною лінією, яка оповиває нашу безконечно велику кулю двічі в рівниковому поясі й раз уздовж одного з полуденників.

Отсе Ріманівське пояснення показалося дуже пожиточним, особливо в т. зв. «теорії функцій»; воно дозволяє легко поконувати труднощі, які виступають при переході змінних і функцій через безконечно великі вартости.

(4) Остаточно розберемо ще таку можливість, що й вартість коріня підпадає деяким обмеженням. Нпр.:

$$(m+1)\sin^2\alpha-2(m+3)\sin\alpha+(m+1)=0.$$

Коли тут підставимо $\sin\alpha=x$, отримаємо рівняння:

$$(m+1)x^2-2(m+3)x+(m+1)=0,$$

але в ньому змінність величини x обмежується вартостями $+1$ і -1:

$$-1\leqq x\leqq+1.$$

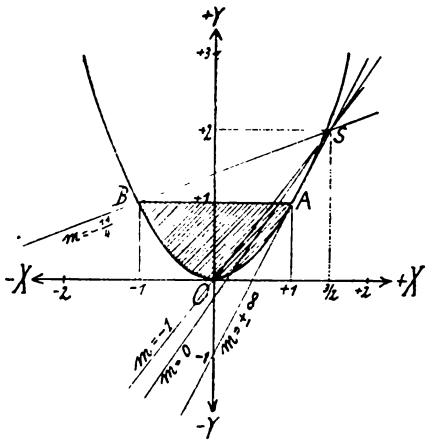


Рис. 160.

Наше рівняння розвязальне, коли $\Delta=4(m+5)\geqq0$, отже $m\geqq-5$; одначе коли в рівнянні підставимо за x вартости $+1$ і -1, отримаємо інші, обмежуючі умови розвязальности, а саме: для $x=+1$: $(m+4)-2(m+3)+(m+1)=0$, т. зн. недоречність $-1=0$, а це значить, що це можливе тільки при $m=+\infty$. Для $x=-1$ буде: $(m+4)+2(m+3)+(m+1)=0$, т. зн. $m=-{}^{11}/_{4}$.

Таким чином у сторону додатніх m немає ніякого обмеження, зате ж від'ємні мусять сповнювати умову $m\geqq-{}^{11}/_{4}$, вужчу від попередньої $m\geqq-5$; вона подиктована тою вимогою, що x має означувати функцію *синус*.

Залишаючи на боці подрібну дискусію, яка йде зовсім подібно як у попередніх прикладах, з'ясуємо тільки безпосередній звязок між m і α.

Перш за все бачимо, що коли рівняння розбити на уклад:

$$y=x^2,\quad y=\frac{2(m+3)}{m+4}x-\frac{m+1}{m+4},$$

то нас обходитиме тільки те, що діється на параболі між точками $x=-1$ та $x=+1$; решта параболи не грає тут ніякої ролі; так, що вважатимемо тільки на подвійний одиничний квадрат, утворений коло осередку перехрестя в I та II чвертці площі (рис. 160).

Вершком жмутка простих є точка $S(^3/_2, 2)$ поза параболою. Кожна проста з дозволеного обсягу $-^{11}/_4 \leqq m \leqq +\infty$ перетинає параболу в дозволенім обсязі $-1 \leqq x \leqq +1$ в одній і тільки в одній точці. Для $-^{11}/_4 \leqq m \leqq -1$ є: $-1 \leqq x \leqq 0$, а для $m > 1$ буде: $0 \leqq x < +1$; при $m = +\infty$ маємо рівняння простої $y = 2x - 1$, отже точкою перетину є $x = +1$. Звязок між m і α подає табличка:

m	x	α^0	$arc\,\alpha$*)
$-^{11}/_4$	-1	-90^0	$-\frac{\pi}{2} = -1{,}57$
-2	$\frac{1-\sqrt{3}}{2} = -3{,}660$	$-21{,}5^0$	$-0{,}375$
-1	0	0^0	0
0	$\frac{3-\sqrt{5}}{4} = 0{,}191$	11^0	$0{,}192$
1	$\frac{4-\sqrt{6}}{5} = 0{,}310$	18^0	$0{,}314$
2	$\frac{5-\sqrt{7}}{6} = 0{,}392$	23^0	$0{,}401$
3	$\frac{6-\sqrt{8}}{7} = 0{,}453$	27^0	$0{,}471$
4	$\frac{1}{2}$	30^0	$\frac{\pi}{6} = 0{,}524$

Тут беремо за x очевидно тільки цю одну вартість, яка лежить між -1 і $+1$; друга вартість — це була би розвязка, яку отримали би, як би не обмежували нічим змінности величини x.

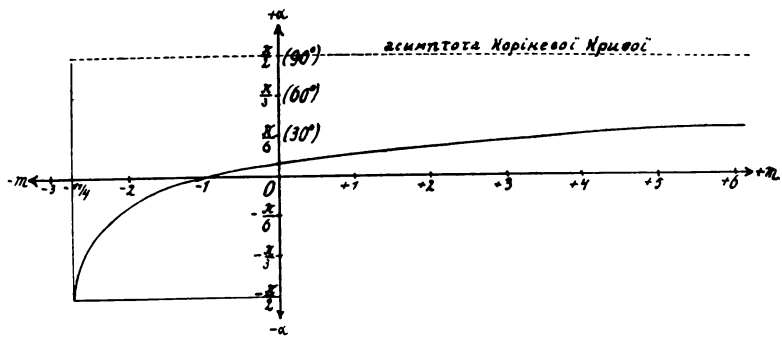


Рис. 161.

Коли ж остаточно нарисуємо α як функцію аргументу x, отримаємо таку криву (рис. 161):

*) *arcus* α, (зн. дуга), тоб-то довжина дуги одиничного кола, що відповідає осередковому кутові α.

Вона зачинається в точці $m=-\frac{11}{4}$ вартістю $-\frac{\pi}{2}=-90^0$; при $m=-1$ переходить на горішній бік поземої осі, при $m=0$ має вартість 1^0, при $m=4$ досягає $\frac{\pi}{6}=30^0$, а потім дуже вільно наближається до своєї поземої асимптоти, яка йде у віддалі $\frac{\pi}{2}=90^0$.

154. Дослід громад обводячих простих. Коли в співчинниках квадратового рівняння параметер виступає у формі не лінійної, але квадратової функції, нам не вдасться знайти відповідного жмутка простих, т. зн. не зможемо означити постійної точки, через яку переходили би всі прості даної громади.

Нпр.: $$x^2+(m+{}^1/_2)x-(m+1)^2=0.$$

Виріжник того рівняння є:

$$\Delta=(m+{}^1/_2)^2+4(m+1)^2;$$

він, як сума двох квадратів, завсіди додатній, отже дане рівняння завсіди розвязальне.

Його розбиваємо звичайним способом на уклад:

$$y=x^2\ ,\ y=-(m+{}^1/_2)x+(m+1)^2$$

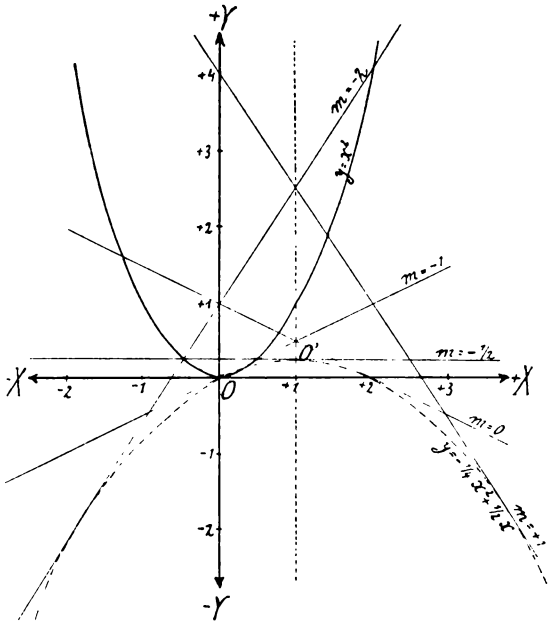


Рис. 162.

і шукаємо, чи громада простих, що визначена другим рівнянням, буде жмутком, отже чи вона має постійну точку, спільну всім простим. Нпр. для $m=0$ і $m=1$ отримаємо такі прості: $y=-{}^1/_2x+1$ і $y=-{}^3/_2x+4$; вони перетинаються в точці $x=3$, $y=-{}^1/_2$. Таколиці вартости підставимо в рівняння громади, отримаємо: $-{}^1/_2=-(m+{}^1/_2).3+(m+1)^2$, або $m^2-m=0$, отже $m_1=0, m_2=0$. Це значить, що через точку $(3, -{}^1/_2)$ переходять тільки ці прості, яким відповідають вартости параметру 0 і 1. Інші прості не переходять через неї, отже наша громада простих, не маючи *постійного* вершка, тоб-то спільної точки перетину, не може бути жмутком.

Та коли нарисуємо кілька простих тої громади (рис. 162), побачимо, що вони немов обхоплюють якусь криву, похожу на параболу, і є її доторкальними. Що це за крива, побачимо ось як:

Точка перетину двох простих нашої громади буде тим ближча досліджуваної кривої, чим менша ріжниця відповідних вартостей параметру m; отже коли

приймемо дві дуже близькі вартости параметру, m і $m+\mu$, отримаємо дві прості, які перетинаються майже на кривій. Дійдім до межевої вартости $\lim\mu\to 0$; тоді межевим положенням точки перетину буде точка кривої.

Рівняння таких двох сусідніх простих будуть:

$$y=-\left(m+\frac{1}{2}\right)x+(m+1)^2$$

і $$y=-\left(m+\mu+\frac{1}{2}\right)x+(m+\mu+1)^2,$$

а точка перетину матиме співрядні $x=2(m+1)+\mu$, $y=-m(m+1)-\mu(m+{}^1/_2)$. При переході до межі $\lim\mu\to 0$ матимемо: $\lim x=2(m+1)$, $\lim y=-m(m+1)$, отже точка зі співрядними $x=2(m+1)$, $y=-m(m+1)$ лежить на досліджуваній кривій. Із цих двох рівнянь викидаємо (елімінуємо) параметер m і отримуємо з першого $m=\frac{x}{2}-1$, а це вставлене в друге, дасть бажане рівняння кривої:

$$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x.$$

Є нею справді парабола, яка розширюється вниз; вона вчетверо ширша від нормальної. Її вершок отримаємо, прирівнюючи похідну до нуля: $y'=-\frac{1}{4}\cdot 2x+\frac{1}{2}$, отже $x_0=1$, а далі $y_0=\frac{1}{4}$. Вона переходить через точку O, а другий раз перетинається з віссю X в точці $x=2$. — Кожна з простих нашої громади буде доторкальною параболи; виходить це вже з нашого попереднього досліду, що вони всі мають тільки по одній спільній точці (подвійній) із параболою. Бо коли в рівняння кривої вставимо: $y=-\left(m+\frac{1}{2}\right)x+(m+1)^2$, отримаємо після редукції рівняння: $x^2-4(m+1)x+4(m+1)^2=[x-2(m+1)]^2=0$, що має подвійний корінь: $x_1=x_2=2(m+1)$.

У цьому випадкові кажемо, що прості даної громади *обгортають* параболу, бо є її доторкальними; зате ж параболу називаємо *обгорненою* даною громадою простих.

ВПРАВИ.

А.

1. Дана парабола: а) $y=2x^2-3x+4$; б) $y=-\frac{x^2}{3}+5x-1$. Знайти відносно неї положення таких точок: $A(-1, 9)$, $B(3, 11)$, $C(2, -1)$, $D(-2, -5)$.

2. Яку вартість мусить мати параметер m, щоби парабола $y=mx^2+4x-2$: (а) перетинала вісь X між точками -1 та $+3$? (б) перетинала її наліво від точки 2? (в) направо від точки -2? (г) доторкалась її? (знайти точку дотику); (д) лежала вся в одній півплощі?

3. Дане рівняння: а) $x^2-x-1=0$; б) $4x^2+5x-6=0$; знайти положення чисел: ± 1, ± 2, $\pm\frac{7}{3}$, $\pm\sqrt{2}$, $\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{11}$ відносно коріннів рівняння.

4. Яку вартість треба надати параметрові m, щоби коріні рівняння $x^2-(4m+1)x-(2m-1)=0$: (а) були більші від $+2$? (б) були менші від -2? (в) належали до обсягу $(-1, +1)$? (г) лежали поза обсягом $(-3, -1)$?

5. Що станеться з коріннями рівняння: (а) $mx^2-(2m+1)x+m=0$, (б) $x^2-(m+1)x+(m-1)=0$, коли m буде змагати до межі $+\infty$?

6. Що станеться з коріннями рівняння $m^2x^2-(m^2+m+1)x+(m^2+1)=0$, коли m буде змагати до межі: (а) нуль, (б) $\pm\infty$?

Б.

Дослідити такі рівняння:

(I). 1. $(3m+10)x^2+4mx+1=0$;
2. $mx^2-2x-m=0$;
3. $(m-1)x^2-2(m-1)x+(2m-3)=0$;
4. $mx^2+(2m-1)x+(m-2)=0$;
5. $(m-1)x^2+(m+1)x^2+(m-1)=0$;
6. $(m+3)x^2-(2m+3)x+(m+5)=0$;
7. $(m+1)x^2-2mx+(m-1)=0$;
8. $(m-2)x^2+2(m+2)x+(m+2)=0$.

(II). 1. $(1+4m)\sin^2\frac{\alpha}{2}-2(2m-1)\sin\frac{\alpha}{2}+1=0$, $0^0\leqq\alpha\leqq 180^0$;
2. $(m+3)\cos^2\alpha-4(m+1)\cos\alpha+2m=0$, $0^0\leqq\alpha\leqq 180^0$;
3. $(2m-5)\cos 2\alpha+4(2m+1)\cos\alpha+2(2m-3)=0$, $0''\leqq\alpha\leqq 90^0$,
4. $\left(m+\frac{3}{2}\right)\sin\alpha+\left(m-\frac{1}{2}\right)\cos\alpha+2(m-1)=0$ (замість $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ ввести $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$).

(III). 1. $x^2-(2m+1)x+m^2=0$;
2. $x^2-(2m+4)x+m^2=0$;
3. $x^2-2x+(m-1)^2=0$;
4. $x^2+4x-(m+1)^2=0$;
5. $x^2=mx+\frac{1}{m}$;
6. $x^2=mx-\frac{m^2}{4}$;
7. $m^2x^2=x-2$;
8. $m^2x^2=1-m$;
9. $(am+b)x^2\ (am-b)x+(a^2m^2-b^2)=0$;
10. $(1+m+m^2)x^2-2(1-m-m^2)x-(1-m+m^2)=0$.

B.

1. Дане квадратове рівняння: $ax^2+bx+c=0$. З нього отримуємо: $\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}+\frac{1}{x}=0$, отже можемо його розбити на уклад:

$$y=\frac{1}{x},$$
$$y=-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c},$$

який уявляє собою (постійну) рівнобічну гіперболу й просту (а при змінних співчинниках b і c жмуток простих). Виконати дослід цього укладу геометричним шляхом.

2. Визначити положення довільної точки $P(X, Y)$ відносно рівнобічної гіперболи: $axy+bx+cy+d=0$. Приклади: гіпербола (а) $xy-x-2y+1=0$, (б) $2xy-2x+5=0$; точки: $A(2,3)$, $B(3,2)$, $C\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, $D(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. Знайти умову, щоби рівняння $xy-mx+(m-2)y-3=0$ уявляло собою не гіперболу, тільки пару простих.

ДОПОВНЕННЯ

(до стр. 227, рівн. 9).

Взірець для тангенсу ріжниці двох кутів можна вивести теж безпосередньо, а саме так*): на поземому проміні OA рисуємо два кути, α і β, і в довільній точці A ведемо прямову CA; таким чином є: $tg\,\alpha = \frac{CA}{OA}$, $tg\,\beta = \frac{BA}{OA}$.

Щоби знайти тангенс ріжниці кутів, $\alpha - \beta = \sphericalangle BOC$, описуємо на $\triangle OBC$ коло (з осередком M) і в B ведемо $DB \perp AC$; тоді буде: $\sphericalangle BDC = \alpha - \beta$ (має з кутом BOC спільну тетиву BC), отже:

$$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{BC}{BD}.$$

Коли поведемо ще $OE \perp BD$ і сполучимо O з D, отримаємо: $\sphericalangle EOD = \alpha$ (бо ці два кути мають рамена парами прямові), отже: $tg\,\alpha = \frac{DE}{OE}$, а тоді буде:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC - AB}{OA + DE} = \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{DE}{OA}},$$

а що:

$$\frac{DE}{OA} = \frac{DE}{OE} \cdot \frac{BA}{OA} = tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta$$

(бо $OE = BA$),

то можемо написати:

$$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\beta}.$$

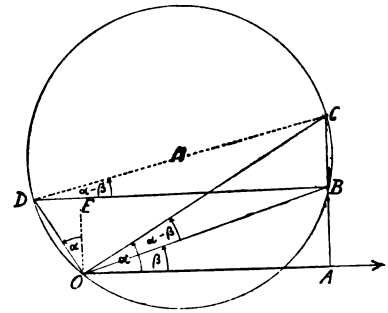


Рис. 163.

*) Провідну думку цього доказу піддав мені проф. Никифор Садовський

Друкарня «Легіографія», Прага-Вршовіце.