Ч. 13. [517. 2(02)].

На правах рукопису.

Проф. Є. ІВАНЕНКО.

Диференціяльне числення



Видавниче т-во „СІЯЧ"
при Українському Педагогічному Інституті ім. М. Драгоманова
Прага 1925 р.

[517(02)]
На правах рукопису.

Проф. Є. Іваненко.

Диференціяльне числення

Конспект лекцій, читаних в Українському Педаг. Інституті ім. М. Драгоманова

Видавниче т-во „сіяч" при Укр. Педаг. Інституті ім. М. Драгоманова.
Прага 1925.

Літографовано 100 примірників.

§1. В попередньому курсі ми докладно розглядали похідні й диференціали функцій від одного незалежного, а тому далі на них зупинатися не будемо.

Зараз повторимо й простудіюємо більш широко диференціювання визначених функцій від кількох незалежних і диференціювання невизначених функцій, а також зупинимося над складними функціями. Будемо розглядати випадок визначеної функції від 3^x незалежних. В дальшому переконаємося, що цей випадок можна поширити й на функції від кількох більшого числа незалежних.

Отже припустімо, що маємо функцію від 3^x незалежних x, y і z і означимо її через u:

$$u = f(x, y, z)$$

Коли всі змінні x, y і z незалежні між собою, то ми можемо до однієї з них, напр., x додати приростання Δx, лишаючи в той час y і z незмінними. Тоді ціла функція u матиме приростання:

$$f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$$

Будемо шукати межу відношення приростання цілої функції до приростання відповідного незалежного, а саме:

$$\frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

коли це приростання незалежного Δx прямує до нуля (при умові що y і z є незмінні).

Коли ця межа існує, себто є обмеженою, цілком визначеною величиною, то її називають <u>окремою похідною від функції u через x</u> і (як ми вже в пропедевтичному курсі зазначили) має символом:

$$u'_x = f'_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

Аналогічно можемо визначити й окремі похідні від тієї ж функції u через y і через z, а саме:

$$u'_y = f'_y(x,y,z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$u'_z = f'_z(x,y,z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,3)}{\Delta z}.$$

[і т.д. коли б незалежників було більш ніж три]

На практиці при відшуканні якої окремої похідної користуються правилами, що доведено для функцій від одного незалежника, бо згідно умови цього диференціювання всі інші змінні, крім одної, що має приріщення, лишаються на час диференціювання сталими (незмінними)

<u>Приклад.</u> Дано функцію:

$$u = x^3y^2 - 3x^2z - y\lg z$$

Тоді окремі похідні:

1) через x: $3x^2y^2 - 6xz$ 2) через y: $2x^3y - \lg z$ і

3) через z: $-\left(3x^2 + \frac{y}{z}\right)$

§2. Припустімо, що всі окремі похідні даної $f(x,y,z)$ – існують і є такими в границях, що ми розглядаємо для вартостей x, y і z. Розберемось тепер у випадку, коли всі незалежні змінні разом мають відповідні приріщення.

Означимо в цьому році приріст цієї функції через Δu, тоді маємо:

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$$

Щоб перейти до попередніх виразів, додамо до правої частини многочлен рівний нулеві, а саме:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) + f(x+\Delta x, y, z) - f(x+\Delta x, y, z)$$

Тоді матимемо:

$$\Delta u = \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\right] +$$

$$+\left[f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y, z)\right] + \left[f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)\right] \quad (A)$$

З попередніх викладень маємо:

$$f'_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

звідки можемо написати:

$$\frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x} = f'_x(x,y,z) + \alpha$$

де α є безмежно мала величина, що разом з Δx прямує до нуля. Тому:

$$f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z) = f'_x(x,y,z)\Delta x + \alpha \Delta x \quad (a)$$

Аналогічно:

$$f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z) = f'_y(x,y,z)\Delta y + \beta \Delta y \quad (б)$$

і $$f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z) = f'_z(x,y,z)\Delta z + \gamma \Delta z \quad (в)$$

де β і γ теж є безмежно малі величини, що прямують відповідно разом з Δy і Δz до нуля.

Зокрема на <u>**тотожність**</u> функції зміна x на $x+\Delta x$ і y на $y+\Delta y$ збільшить приріст відповідних цілих функцій теж на безмежно малі величини, а тому:

1) застосувавши в рівності (б) вартість x через

$x + \Delta x$, матимемо:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y, z) = f'_y(x+\Delta x, y, z)\Delta y + \beta_1 \Delta y \quad (\delta_1)$$

де β_1 може бути й більш β, але лишається безмежно малою величиною тієї ж малості, що й β.

2) заступаючи в рівності (в) вартості x через $x+\Delta x$ і y через $y+\Delta y$, матимемо:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) = f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\Delta z + \gamma_1 \Delta z \quad (в_1)$$

де γ_1 також може бути й більш γ_1 але лишається безмежно малою величиною тієї ж малості, що й γ.

Вставляючи останні вартості (а), (δ_1) і ($в_1$) в рівність (А), маємо:

$$\Delta u = f'_x(x,y,z)\Delta x + f'_y(x+\Delta x, y, z)\Delta y + f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\Delta z + \alpha\Delta x + \beta_1 \Delta y + \gamma_1 \Delta z. \quad (В)$$

Розглянемо окремі вартості:

$$f'_y(x+\Delta x, y, z)\Delta y \quad \text{і} \quad f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\Delta z$$

Ми умовились, що окремі похідні: $f'_y(x,y,z)$ і $f'_z(x,y,z)$ є малі в границях вартостей x, y, z, що ми їх розглядаємо, тому кожне безмежно мале приростання незалежних цих функцій тягне безмежно мале приростання самої функції, а саме:

$$f'_y(x+\Delta x, y, z) = f'_y(x, y, z) + \varepsilon$$

$$f'_z(x+\Delta x, y+\Delta z, z) = f'_z(x, y, z) + \eta$$

де ε і η є безмежно малі величини відповідні приростам f'_y і f'_z про заступлення в них x через $x+\Delta x$ і y через $y+\Delta y$. Тоді:

$$f'_y(x+\Delta x, y, z)\Delta y = f'_y(x, y, z)\Delta y + \varepsilon\Delta y$$

$$f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\Delta z = f'_z(x,y,z)\Delta z + \eta\Delta z$$

Вставляючи ці вартості в рівність (B) одержимо:

$$\Delta U = f'_x(x,y,z)\Delta x - f'_y(x,y,z)\Delta y + f'_z(x,y,z)\Delta z + \alpha\Delta x + (\beta_1+\varepsilon)\Delta y + (\gamma_1+\eta)\Delta z \quad (C)$$

Умовимося, як було й для функцій від одного незалежного, застосувати безмежно малі прирощення незалежних Δx, Δy і Δz через їх похідні (диференціяли) й означати їх через dx, dy і dz.

Назвемо многочлен:

$$f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz$$

цілими похідними (диференціялом) функції $f(x,y,z)$ (або u) і означимо його через символ:

$$df(x,y,z) = du$$

Тоді:

$$df(x,y,z) = du = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz$$

або:

$$du = d_x u + d_y u + d_z u$$

Порівнюючи цей вираз з рівністю (C), маємо:

$$\Delta u = du + \alpha\Delta x + (\beta_1+\varepsilon)\Delta y + (\gamma_1+\eta)\Delta z$$

Коли Δx, Δy і Δz згадно dx, dy і dz є одної малости між собою, то міг же малости буде й похід du, бо числики f'_x, f'_y і f'_z - є сталі величини (і вважаємо їх перівними з нулем). Вартости же $\alpha\Delta x$, $(\beta_1+\varepsilon)\Delta y$ і $(\gamma_1+\eta)\Delta z$ - мають малість значно більшу, бо є здобутками безмежно малих величин попередньої ділянки тому ними можна нехтувати й твердити, що:

Ціле прирощення функції $f(x,y,z)$ буде еквівалентним (рівнозначним) з її цілими похідними

(диференціалом):

$$\Delta u = du$$

Цей довід дуже легко поширити на функцію кількох довільно незалежних. Таким чином ми доведемо, що <u>цілий похід функції від кількох незалежних є сумою окремих походів цієї функції через кожного окремого незалежного.</u>

§3. На підставі цього доводу кожний окремий похід можна вважати, як окремий випадок цілого, а саме:

Припустімо, що для даної зміни незалежних x, незалежних y і z лишаються незмінними (тимчасово сталими), тоді їх походи мають бути рівні з нулем, себто $dy = 0$ і $dz = 0$. А звідси:

$$du = f'_x(x,y,z)\,dx + f'_y(x,y,z)\,dy + f'_z(x,y,z)\,dz$$

стає рівним:

$$du = f'_x(x,y,z)\,dx \quad \cancel{+0+0}$$

Даний в даному разі похід du символом $d_x u$, маємо:

$$d_x u = f'_x(x,y,z)\,dx$$

Аналогічно:

$$d_y u = f'_y(x,y,z)\,dy$$

$$d_z u = f'_z(x,y,z)\,dz$$

З останніх рівностей маємо:

$$f'_x(x,y,z) = \frac{d_x u}{dx}$$

$$f'_y(x,y,z) = \frac{d_y u}{dy}$$

$$f'_z(x,y,z) = \frac{d_z u}{dz}$$

Ми бачимо, що аналогічно до похідних функцій від одного незалежного, <u>окремі похідні від функцій кількох незалежних є відношеннями відповідного окремого походу до походу самого незалежного.</u>

Як знаємо з пропедевтичного курсу для таких відношень Якобі дає символи:

$$f'_x(x,y,z) = \frac{d_x u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\ ;\ f'_y(x,y,z) = \frac{d_y u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y}\ \text{ і т.д.}$$

Тому:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \dots$$

§4. <u>Окремі похідні вищих порядків функцій кількох незалежних.</u>

Як ми говорили в пропедевтичному курсі, на випадок, коли окремі похідні даної $f(x,y,z\dots)$ себто $f'_x, f'_y, f'_z \dots$ є також такими функціями незалежних $x,y,z\dots$ то ми можемо й від цих функцій вимагати нові окремі похідні, що мають назву других похідних. Так напр.,

$$\frac{\partial f'_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

є другою окремою похідною взятою двічі через x.

Або:

$$\frac{\partial f'_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial z}$$

є другою окремою похідною взятою перше через x, а потім через z.

Наприклад:

$$\frac{\partial f_2'}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$$

є другою похідною f взятою перше через z, а потім через x.

Коли б і другі окремі похідні були такими функціями незалежних $x, y, z \ldots$ то в той же спосіб ми взяли б треті окремі похідні і т.д. Напр.

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^p \cdot \partial y^q \cdot \partial z^r} \quad (\text{де } n = p+q+r)$$

§5. Коли дана функція f від кількох незалежних $(x, y, z \ldots)$ і її відповідні похідні є такими для певних вартостей яких будь незалежних x, y, то в границях цих вартостей ті вартості окремих похідних не залежать від порядку диференціювання через ці незалежних, себто:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^m} = \frac{\partial^n u}{\partial y^m \partial x^k} \quad (\text{де } m+k=n)$$

Для доводу цієї теореми досить показати, що при тих же умовах другі окремі похідні підлягають цьому закону, а саме доведемо, що

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

В даному разі, коли ми цікавимося окремими похідними лише незалежних x і y, то решту незалежних можемо вважати за сталі величини й тому розглядати цінну $f(x, y, z \ldots)$ як якусь-небудь функцію незалежних x і y, а тому можемо описати:

$$f(x,y,z\ldots) = \varphi(x,y)$$

Дамо числу x яке-будь безмежно мале, але довільне приростання h. Тоді приростання самої функції буде:

$$\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) = a$$

Але вартість a при даних незмінних вартостях x і $x+h$ буде все таки змінною в залежності від змін вартости y, а тому вартість a можна означити як де-яку функцію y, а саме:

$$\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) = f(y)$$

Як само дамо де-яке довільне безмежно мале приростання незалежному y у функції $f(y)$, тоді матимемо приростання самої функції.

$$f(y+g) - f(y) = A$$

Вставляючи в цю рівність вартости $f(y)$ одержимо вартість величини A, а саме:

$$A = \varphi(x+h,y+g) - \varphi(x,y+g) - \varphi(x+h,y) + \varphi(x,y) \ldots (I)$$

Перетворимо вартість A у два способи й порівнявши одержані вислови.

1 спосіб. Перепишемо рівність (I) так:

$$A = [\varphi(x+h,y+g) - \varphi(x+h,y)] - [\varphi(x,y+g) - \varphi(x,y)]$$

Для спрощення зауважимо, що $[\varphi(x,y+g) - \varphi(x,y)]$ є також записом де-якої функції від x і y, а тому тимчасово означимо її через $\psi(x,y)$, тоді $\varphi(x+h,y+g) - \varphi(x+h,y)$ відрізнятиметься від $\psi(x,y)$ заміною в ній незалежного x через $x+h$, тому можна написати, що:

$$[\varphi(x+h,y+g) - \varphi(x+h,y)] = \psi(x+h,y)$$

Отже:

$$A = \Psi(x+h, y) - \Psi(x, y)$$

За теоремою Лагранжа о середній вартості незалежника (а саме за виром: $F(x+h) - F(x) = hF'(x+\theta h)$ де $0<\theta<1$) матимемо:

$$A = h\Psi'_x(x+\theta h, y) \quad \text{де } 0<\theta<1$$

Але $\Psi(x,y) = \varphi(x, y+y) - \varphi(x,y)$, що дає:

$$\Psi'_x(x,y) = \varphi'_x(x, y+y) - \varphi'_x(x,y)$$

А тому:

$$A = h\Psi'_x(x+\theta h, y) = h[\varphi'_x(x+\theta h, y+g) - \varphi'_x(x+\theta h, y)]$$

В правій частині при незмінній вартості $x+\theta h$, маємо приріст функції $\varphi'_x(x+\theta h, y)$, коли даємо незалежникові y приріст g, а тому знова можемо скористатися теоремою Лагранжа, а саме:

$$A = h[g\varphi''_{yx}(x+\theta h, y+\vartheta g)] \text{ де } 0<\vartheta<1$$

або:

$$A = hg\varphi''_{yx}(x+\theta h, y+\vartheta g) \quad \cdots \quad (M)$$

Від перестановки членів многочлена з їх знаками, вислід многочлену не змінюється, а тому рівність (I) можна написати ще й так:

$$A = [\varphi(x+h, y+g) - \varphi(x, y+g)] - [\varphi(x+h, y) - \varphi(x,y)]$$

Так самo, як і раніш, ми можемо означити:

$$[\varphi(x+h, y) - \varphi(x,y)] = \chi(x,y)$$

тоді:

$$[\varphi(x+h, y+g) - \varphi(x, y+g)] = \chi(x, y+g)$$

Отже:

$$A = \chi(x, y+g) - \chi(x,y)$$

або на підставі теореми Лагранжа:

$$A = g\chi'_y(x, y+\vartheta_1 g) \quad \text{де } 0<\vartheta_1<1$$

Вставляючи вартість:

$$X'_y = \varphi'_y(x+h, y) - \varphi'_y(x, y)$$

матимемо:

$$A = g\left[\varphi'_y(x+h, y+\vartheta_1 g) - \varphi'_y(x, y+\vartheta_1 g)\right]$$

На підставі попередніх міркувань ми й до виразу в клямрах можемо пристосувати теорему Лягранжа, а тому:

$$A = g\left[h\,\varphi''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\vartheta_1 g)\right] \quad \text{де } 0<\theta_1<1$$

Отже:

$$A = hg\,\varphi''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\vartheta_1 g) \cdots (N)$$

Рівности (M) і (N) дають нам:

$$\cancel{hg}\,\varphi''_{yx}(x+\theta h, y+\vartheta g) = \cancel{hg}\,\varphi''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\vartheta_1 g)$$

Зогляду на тяглість функцій φ''_{yx} і φ''_{xy} (загадану умовою) при простуванню до нуля вартостей h і g і самі вартости: $\varphi''_{yx}(x+\theta h, y+\vartheta g)$, та $\varphi''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\vartheta_1 g)$ будуть простувати до своїх меж, а саме до:

$$\varphi''_{yx}(x, y) \quad \text{і} \quad \varphi''_{xy}(x, y)$$

тому матимемо рівність:

$$\varphi''_{yx}(x, y) = \varphi''_{xy}(x, y)$$

Ми довели нашу теорему на випадок 2х похідних. Але зогляду на те, що треті похідні є відповідно другими для третіх і т.д. то цей довід легко поширити для загального твердження, щодо похідних всіх порядків, бо кожну переставку кількох бажано диференцувань можна звести до шерегу ступневих переставок по два диференцування кожний раз.

Напр хай вислід до якого торгу диференцуван. буде:

$$K = \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial x} < \frac{\partial}{\partial z} < \frac{\partial u}{\partial y}$$

покажемо, що вартість цього висліду не зміниться коли порядок тих же диференцувань буде такий:

$$\frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial x} < \frac{\partial u}{\partial z}$$

На підставі доведеної теореми ми можемо змінити порядок останніх диференцувань і матимемо:

$$K = \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial x} < \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial u}{\partial z}$$

значивши похідну $\frac{\partial u}{\partial z}$ через v, матимемо:

$$K = \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial x} < \frac{\partial v}{\partial y}$$

Знов змінюючи порядок останніх двох диференцувань, маємо;

$$K = \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial v}{\partial x}$$

або вставляючи вартість v, маємо:

$$K = \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial x} < \frac{\partial u}{\partial z}$$

що й треба було довести.

§6. Зупинимося тепер трохи докладніш ніж в пропедевтичному курсі над походами вищих порядків для кількох незалежників.

Припустім, що маємо якусь функцію u від двох незалежників x і y, себто $u = f(x, y)$. Візьмім її цілий похід:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

і продиференцуємо ще раз. Цей новий похід будемо звати другим походом функції $f(x, y)$. Так само

можемо взяти 3й, 4й і т. д. похідні функції $f(x,y)$. Ми вважаємо du за нову тяглу функцію від x і y і означимо її тимчасом через $\varphi(x,y)$. Тоді цілий похід цієї функції буде:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy \dots \quad (I)$$

Але $\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$, а тому:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)$$

dx і dy є безмежно-малі прирощення незалежників і тому в жадний спосіб не залежатимуть від тих вартостей, що будуть набувати самі незалежники. От же, при новому диференцуванню через x, або через y і величини dx і dy відограють ролю сталих величин. Вони не змінюватимуться й тоді, коли цим незалежникам придати які-будь прирощення h або g. Тому при диференцуванню чинники dx і dy можна винести за знак диференцування. Таким чином маємо:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = dx\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + dy\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

а звідци:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dy$$

Анальогічно:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy$$

Вставляючи знайдені вартости $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ і $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ у взір (I) маємо:

$$d\varphi = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right)dy$$

або:

$$d\varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

Але $\varphi(x,y) = du$, а тому:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

Так само вважаючи d^2u за таку функцію тих же незалежних змінних x і y, та означуючи її через $\psi(x,y)$, матимемо:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (II)$$

Але:

$$\psi(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

а тому:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^2 + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} dy^2$$

де на підставі попередніх міркувань dx і dy (а також і їх степені) є сталими величинами.

Аналогічно:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx\,dy + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^2$$

Таким чином вставляючи ці вартості в (II) матимемо:

$$d\psi = d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} dy^2 dx +$$

$$+ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3$$

або:

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3$$

У розгорнених виразах перших трьох похідних від функції u ми помічаємо зовнішню схожість з розгорненим перетом Ньютона. Різниця лише в тому, що символи $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ означають не степені, а порядок диференціювання. Тому взявши умовно

символ u за сомножник і винести його за дужки, маємо:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)u$$

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot u$$

$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 u$$

Доведемо, що цей символ можемо поширити на цілий похід від функції двох незалежних змінних якого бажаємо порядку. Для цього за методом індукції, припустімо, що згаданий символ є придатний для n-го цілого походу функції $f(x,y)$, а саме:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u \quad \cdots (A)$$

і покажемо, що в цьому разі він буде придатним і для наступного порядку $(n+1)$-го походу:

При розкритті символа (A) через шерег Ньютона ми будемо мати такий загальний член:

$$f_{m+1} = C_n^m \frac{\partial^{n-m}}{\partial x^{n-m}}dx^{n-m} \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m}dy^m \cdot u$$

або переходячи до попередніх означень:

$$f_{m+1} = C_n^m \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-m}\partial y^m}dx^{n-m}dy^m$$

Даючи значнику m вартости від 0 до n, ми одержимо всі члени многочлену, що є виразом цілого походу функції u порядку n. Тому можемо написати, що:

$$dp(x,y) = d^n u = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m \frac{d^n u}{\partial x^{n-m}\partial y^m}dx^{n-m}dy^n \quad (B)$$

Ми знаємо, що:

$$d^{n+1}u = d\,dp(x,y)$$

Тому: $$d^{n+1}u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy \quad \ldots\ldots (B)$$

але:
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{m=0}^{m=n} C_n^m \frac{d^n u}{\partial x^{n-m}\partial y^m} dx^{n-m} dy^m\right]$$

і $$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{m=0}^{m=n} C_n^m \frac{d^n u}{\partial x^{n-m}\partial y^m} dx^{n-m} dy^m\right]$$

Ми вважаємо величини dx і dy за сталі, а тому:
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{d^n u}{\partial x^{n-m}\partial y^m}\right]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d^n u}{\partial x^{n-m}\partial y^m}\right]$$

а звідси:
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n-m+1}\partial y^m}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n-m}\partial y^{m+1}}$$

Вставляючи тепер знайдені вартості $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ і $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ у взір (B) маємо:
$$d^{n+1}u = dx\sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n-m+1}\partial y^m} + dy\sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n-m}\partial y^{m+1}}$$

або:
$$d^{n+1}u = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \left(\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n-m+1}\partial y^m} dx + \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n-m}\partial y^{m+1}} dy\right)$$

або:
$$d^{n+1}u = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial^n}{\partial x^{n-m}\partial y^m}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right) u$$

Індекс в дужках входить в кожний член незалежно від вартості m і або не залежить від m, тому його можемо винести за знак $\sum$ і маємо:
$$d^{n+1}u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)\sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial^n}{\partial x^{n-m}\partial y^m} u$$

На підставі взорів (A) і (B) можемо $\sum$ зачинити

через $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n.u$, а тому одержимо:

$$d^{n+1}u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n.u$$

а звідси:

$$d^{n+1}u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1}.u$$

що й треба було довести.

Рас ми переконались в правильності цього символу для $3^{го}$ цілого походу від функцій $2^х$ незалежних, то, на підставі доведеного, цей символ можна поширити й для $4^{го}$ походу, далі для пятого і т.д.

§7. Нехай функція u буде від кількох незалежних, напр.

$$u=f(x,y,z\ldots)$$

то $1^й$ похід буде:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\cdots$$

Тоді, беручи способом що вказали перед цим, другий похід, матимемо:

$$d^2u=d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz+\cdots=$$

$$=\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dy+\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}dz+\cdots\right)dx+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}dy+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}dz+\cdots\right)dy+$$

$$+\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}dx+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}dy+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}dz+\cdots\Big)dz+\cdots$$

А звідси, зносячи дужки, маємо:

$$d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}dz^2+\cdots\cdots+$$

$$+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dx\,dy+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}dx\,dz+2\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}dy\,dz+\cdots\cdots$$

Це, як і попереднє, можна виобразити символом:

$$d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz+\cdots\right)^2.u$$

Анальогічним шляхом дійдемо, що:

$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \dots\right)^3 . u$$

і нарешті:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \dots\right)^n . u.$$

§8. Взір $d^n u$ є правильний в разі коли всі змінні $x, y, z \dots$ є цілком незалежні, або в крайньому випадкові уявляють лінійні залежности.

Справді, коли б x, y, z були б у свою чергу функціями яких-небудь нових змінних, напр. $k, p, q \dots$, то dx, dy, dz не можна було б вважати за сталі величини, як це ми робили при виводі взору (бо коли $x = \varphi(k, p, q \dots)$, $y = \psi(k, p, q)$ і $z = \chi(k, p, q)$, то, напр. $dx = \varphi'_k(k, p, q)dk + \varphi'_p(k, p, q)dp + \varphi'_q(k, p, q)dq$ - себто загалом є функцією k, p, q). Наколиб φ, ψ і χ були б лінійні функції k, p і q, то φ', ψ' і χ' були б сталі величини, а dk, dp і dq будуть сталі величини, як походи незалежників, а тому dx, dy і $dz \dots$ можна вважати сталими величинами, тобто взір $d^n u$ можна буде поширити й на цей випадок.

Невизначені функції.

§9. В пропедевтичному курсі ми розглядали відшукання першої похідної невизначеної функції, даної рівнянням:

$$f(x, y) = 0$$

Для цього диференцуючи за правилом складних функцій, мали:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

а звідси:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

або:

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Очевидно, що вартість y' можлива при умові що $f'_y(x,y) \neq 0$.

Розглянемо тепер випадок системи рівнянь, що зв'язують кілька невідомих функцій. Напр.,

$$f(x, y, z, u, v, t) = 0$$
$$\varphi(x, y, z, u, v, t) = 0$$
$$\psi(x, y, z, u, v, t) = 0$$

де x, y і z - є незалежними, а u, v і t є певні функції цих незалежних. Могі диференціюючи за правилом складних функцій, матимемо:

1) через x:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Ми маємо систему рівнянь, щодо змінних:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial t}{\partial x}$$

Розв'язавши її знайдемо окремі похідні через x всіх невідомих функцій.

Таксамо, диференціюючи, через y і через z, знайдемо:

$$\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial t}{\partial y}\ ;\quad \frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial v}{\partial z},\ \frac{\partial t}{\partial z}$$

Приклад:

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 5u = 0$$
$$3x - y^2 - z + 2u^2 = 0$$

де x і y вважаємо за незалежні. Тоді:

$$2x + 6z\frac{\partial z}{\partial x} - 5\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \;; \quad 3 + \frac{\partial z}{\partial x} + 4u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Звідки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8xy + 15}{5 - 24uz} \;; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{18z + 2x}{5 - 24uz}$$

Далі:

$$4y + 6z\frac{\partial z}{\partial y} - 5\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \;; \quad -2y - \frac{\partial z}{\partial y} + 4u\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

а звідки:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y(8u + 5)}{24uz - 5} \;; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4y(1 + 3z)}{24uz - 5}$$

Загалом, коли дається система $n-1$ рівняння з n змінними, напр.,

$$\begin{aligned} f_1(x, y, u, v \ldots\ldots w) &= a_1 \\ f_2(x, y, u, v \ldots\ldots w) &= a_2 \\ &\vdots \\ f_{n-1}(x, y, u, v \ldots\ldots w) &= a_{n-1} \end{aligned}$$

то беручи довільно за незалежне, напр., x, а решту за функції x ми після диференцювання, маємо:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots \frac{\partial f_1}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots \frac{\partial f_2}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ &\vdots \\ &\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

А звідки:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \vdots & \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \vdots & \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial w} \end{vmatrix}}$$

Загалом же коли рівнянь k, а змінних $n = k+p$, то ми маємо тоді похідні через p незалежних, виражені через k невідомих функцій. Це ми розглядали на попередньому прикладі.

Щоб знайти ще другі похідні, ми щойно рівняння (13) ще раз продиференціювати. Напр., дано рівняння:

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 0$$

Очевидно тут лише одну із змінних можна вважати функцією решти. За таку змінну візьмемо z, тоді 1-ше диференціювання:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

маємо: $2x + 6z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, або $x + 3z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$$-4y + 6z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{або} \quad -2y + 3z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

2-ге диференціювання:

$$1 + 3\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 3z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad 3\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + 3z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$-2 + 3\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 3z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad 3\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + 3z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Звідси з першого диференціювання маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{3z} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{3z}$$

Тому: $1 + 3\left(-\frac{x}{3z}\right)^2 + 3z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ або $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{3z^2 + x^2}{9z^3}$

$$3\left(-\frac{x}{3z}\right)\frac{2y}{3z} + 3z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2xy}{9z^3}$$

і $-2\cdot 3\left(\frac{4y^2}{9z^2}\right) + 3z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ або $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2 - 4y}{9z^3}$

§10. Одновимірні функції.

Функція $f(x,y,z\dots)$ зветься одновимірного, коли від положення її незалежних на яке будь довільне число, вимність самої функції помножиться на певну ступінь цього довільного числа.

Себто, коли $f(x,y,z\dots)$ є одновимірною функцією, то

$$f(xt, yt, zt\dots) = t^m f(x,y,z\dots)$$

Число m має назву виміру одновимірної функції

Приклад. $f(x) = x^3 + \frac{y^4}{z} + z^3 \sin\frac{x}{y}$

Заступаючи вартість незалежних через xt, yt і zt маємо:

$$x^3t^3 + \frac{y^4t^4}{zt} + z^3t^3 \sin\frac{xt}{yt} = t^3\left(x^3 + \frac{y^4}{z} + z^3 \sin\frac{x}{y}\right)$$

Отже $f(x)$ - є одновимірною, третього виміру (або ступіня).

Коли ця умова має бути виконана при кожному t, то очевидно виконається й при $t = \frac{1}{x}$. Тому множуть всі незалежні $f(x,y,z\dots)$ на $\frac{1}{x}$, матимемо:

$$f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\cdots\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^m f(x,y,z\dots)$$

А звідси:

$$f(x,y,z\dots) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\cdots\right) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\cdots\right)$$

Отже, **кожна одновимірна функція є рівна зі здобутком степені, рівній з виміром функції, одною з незалежних її на функцію від відношення решти незалежних до даної**

Коли функція є нульового виміру (напр. $f(x,y) = \operatorname{tg}\frac{x}{y}$) то $m = 0$, а тому попередня рівність має вигляд:

$$f(x,y,z\dots) = \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\cdots\right)$$

Себто:

Одновимірна функція нульового виміру є функцією від відношення незалежних.

Теорема Ейлера

Коли $f(x, y, z \ldots)$ однорідна функція якого-будь m-го виміру від кількох незалежних, то сума здобутків окремих похідних цієї функції на самих незалежних, через які ці похідні взято, є рівна із самою функцією, помноженою на показателя виміру.

Инакше кажуть: коли в цілому поході одновимірної функції походи незалежних заступити через самі незалежні, то одержимо саму функцію помножену на показателя виміру.

Напр., хай дана одновимірна функція буде:

$$f(x, y, z \ldots) = u$$

Моді цілий її похід буде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \ldots$$

Заступаючи походи незалежних через самі незалежні, матимемо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z + \ldots$$

Теорема Ейлера доводить, що:

$$\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z = m.u$$

де m є показатель виміру функції $u = f(x, y, z \ldots)$

З визначення самої одновимірної функції, маємо:

$$f(xt, yt, zt \ldots) = t^m f(x, y, z \ldots)$$

Означимо тимчасом здобутки: xt, yt, zt ... через ξ, η, ζ

Моді:

$$f(\xi, \eta, \zeta \ldots) = t^m f(x, y, z \ldots) \quad \ldots (\alpha)$$

Розглянемо момент, коли вартости незалежних x, y, z... не змінюються й будемо тільки змінювати вартість t. Тоді: $\xi = xt$, $\eta = yt$, $\zeta = zt$... будуть функціями t, а $f(\xi, \eta, \zeta...)$ складною функцією від t, вартості же x, y, z, а разом і $f(x, y, z...)$ будуть певними сталими. Отже продиференціюємо рівність (a) через t, то при указаних умовах матимемо:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \cdots = mt^{m-1} f(x, y, z...)$$

Але $\xi = xt$, то $\frac{\partial \xi}{\partial t} = x$; маємо: $\frac{\partial \eta}{\partial t} = y$; $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = z$ і т.д.
Отже маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}x + \frac{\partial f}{\partial \eta}y + \frac{\partial f}{\partial \zeta}z + \cdots = mt^{m-1} f(x, y, z...)$$

Ми маємо вартість t цілком довільного, а тому беручи $t = 1$, одержимо:

$$\partial\xi = \underset{t=1}{\partial(xt)} = \partial x;\quad \partial\eta = \underset{t=1}{\partial(yt)} = \partial y \quad \text{і т.д.}$$

Маємо тепер:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{\partial z}z = m f(x, y, z...).$$

Що й треба було довести.

<u>Приклад.</u> $u = x^2y + 3xy^2 - 2x^2 - \frac{y^4}{2}$

Це є однорідна функція 3-го виміру. Беремо окремі похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y^2 - 2zx;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6xy - \frac{4y^3}{2};\quad \frac{\partial u}{\partial z} = -x^2 + \frac{y^4}{2^2}$$

Тому: $\frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial y}y + \frac{\partial u}{\partial z}z = \underline{2x^2y} + \underline{3xy^2} - \underline{2x^2z} + \underline{x^2y} +$

$$+ \underline{6xy^2} - \underline{\frac{4y^3}{2}} - \underline{x^2z} + \underline{\frac{y^4}{2}} = 3x^2y + 9xy^2 - 3x^2z - \frac{3y^4}{2} =$$

$$= 3\left(x^2y + 3xy^2 - x^2z - \frac{y^4}{2}\right)$$

§ 11. Ряд Тейлора.

В елементарному курсі ми вивели вже ряд Тейлора, а саме:

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

Цей вірш є можливим при довільних a і z. Коли існують вартості $f(a)$ і її перших $(n-1)$ похідних. Очевидно, що число n є в даному разі довільне, а тому від його вартості (себто від числа взятих похідних) буде залежати та або інша вартість суми, що є в правій частині рівності. Це нас переконує, що права частина не є точною вартістю $f(z)$, а лише певним її наближенням, а тому виникає потреба в обчисленні похибки, що ми робимо, коли прирівнюємо ліву частину до правої. Це й поставимо ми собі як задачу

Означимо нашу похибку через $R = (z-a)^p \cdot Q$, де Q є величина поки-що нам невідома, а p довільне число від 1 до n. Тоді:

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + (z-a)^p Q \quad (A)$$

є правдивою рівністю. Звідси:

$$f(z) - \left[f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + (z-a)^p Q \right] = 0$$

В цій різниці a цілком довільне й тому замінивши його через x, припустивши що x також змінюється в інтервалі від a до z. Тоді, означивши ліву частину рівності через $\varphi(x)$, матимемо:

$$\varphi(x) = f(z) - \left[f(x) + \frac{z-x}{1!} f'(x) + \frac{(z-x)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + (z-x)^p Q \right]$$

Ця функція обертається в нуля 1) при $x=z$ і 2) при $x=a$ (на підставі попереднього взору). Тому за теоре-

мою Ролля можна твердити, що між вартостями z і a існує якесь вартість ξ незалежника, при якій перша похідна $\varphi'(x)$ обертається в нуля. Беручи цю похідну маємо: (z=const)

$$\varphi'(x) = -\left[f'(x) - f'(x) + \frac{z-x}{1!}f''(x) - \frac{z-x}{1!}f''(x) + \frac{(z-x)^2}{2!}f'''(x) - \frac{z-x}{1!}\frac{(z-x)^2}{2!}f'''(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{(z-x)^3}{3!}f^{IV}(x) - \dots\dots - \frac{n-1}{n-1}\frac{(z-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n}(x) - p(z-x)^{p-1}Q\right]$$

$$\varphi'(x) = -\left[\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) - p(z-x)^{p-1}Q\right] = p(z-x)^{p-1}Q - \frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)$$

Отже ця похідна за теорією Ролля мусить для якоїсь вартости $a < \xi < z$ обертатися в нуля, а саме:

$$p(z-\xi)^{p-1}Q - \frac{(z-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi) = 0$$

звідси:

$$Q = \frac{(z-\xi)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(\xi)$$

Вартість ξ лежить в інтервалі a...z, а тому різниця $\xi - a < z - a$. Отже: $0 < \frac{\xi-a}{z-a} = \theta < 1$ (себто $0<\theta<1$)

Звідси: $\xi - a = \theta(z-a)$ і $\xi = a + \theta(z-a)$

Різниця же $z - \xi = z - a - \theta(z-a) = (z-a)(1-\theta)$. Вставляючи ці вартости в Q, матимемо:

$$Q = \frac{(z-a)^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{p\cdot(n-1)!}f^{(n)}[a+\theta(z-a)]$$

Тимчасом тепер Тейлора матиме вигляд: [вставляємо вартість (A)].

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!}f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R$$

$$\text{де } R = \frac{(z-a)^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}[a+\theta(z-a)] \quad \cdots (B)$$

де $0<\theta<1$. Ця похибка R носить назву остаточного члена Шльомильха (від імені німецького вченого, що його довів). Такого же значіння, як це робили в

пропедевтичному курсі, а саме через: $a=x$; $z-a=h$; звідци $z=a+h=x+h$, одержимо для шерегу Тейльора такий вигляд:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R$$

де $R=\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(x+\theta h)$, де $0<\theta<1$, а p довільне.

Зогляду на довільність вартости p, Лагранж вважав її рівній n, себто $p=n$ і тоді остаточний член Лагранжа мав вигляд:

$$R=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$$

де $x+\theta h$ - є середня вартість x в інтервалі $x \dots x+h$.

Таксамо Коші вважав $p=1$ й остаточний член Коші має вигляд:

$$R=\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x+\theta h)$$

Коли тепер довільну величину a прирівнаємо до нуля, себто в шерезі (B) положимо $a=0$, то матимемо відомий шерег Макльорена, а саме:

$$f(z)=f(0)+\frac{z}{1!}f'(0)+\frac{z^2}{2!}f''(0)+\dots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R$$

де R:

$$\text{(Шльомильха)} - R=\frac{z^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(\theta z)$$

$$\text{(Лагранжа)} - R=\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(\theta z)$$

$$\text{(Коші)} - R=\frac{z^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta z)$$

Шерег Макльорена має важне приспосування для розгорнення окремих функцій в шерги.

§12. Розгорнення в шерег $f(x)=\sin x$. Перш за все

треба переконатися, чи існують всі n-1 похідні цієї функції. Ми вже знаємо, що $(\sin x)^n = \sin(\frac{n\pi}{2}+x)$. Тому $(\sin x)' = \sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$; $(\sin x)'' = \sin(\pi+x) = -\sin x$; $(\sin x)''' = \sin(\frac{3\pi}{2}+x) = -\cos x$; $(\sin x)^{IV} = \sin(2\pi+x) = \sin x$ і т.д. Отже: $f(0)=0$; $f'(0)=1$; $f''(0)=0$; $f'''(0)=-1$; $f^{IV}(0)=0$; $f^{V}(0)=1$ і т.д. Ми бачимо, що паристі похідні є рівні з нулем а не паристі: $1, 5, 9\ldots$ рівні $+1$, а $3, 7, 11\ldots$ рівні -1. Це вірно і непарисного можна висловити так: $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ (бо число непарисне $n = 2k+1$, звідки $k = \frac{n-1}{2}$) Звідси, вставляючи знайдені вартості в ряд Маклорена, маємо:

$$\sin x = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

або: $$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} + \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} + \ldots$$

Щоб знайти похибку користуємося з остаточного члена Лягранжа, й маємо:

$$R_1 = \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x) = \frac{x^n}{n!} \sin(\frac{n\pi}{2} + \theta x)$$

$\sin(\frac{n\pi}{2}+\theta x)$ не більше від 1, тому є величиною обмеженою. Доведемо що $\frac{x^n}{n!}$ прямує до нуля, коли $n \to \infty$. Хай число a і $a+1$ є вартості, що містяться в своїм інтервалі x, себто:

$$a < x < a+1 < n$$

Вираз $\frac{x^n}{n!}$, напишемо так:

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} \cdots \frac{x}{n}$$

Зупинимо ряд на вартості знаменателя a, тоді матимемо:

$$\frac{x^n}{n!} = J \cdot z$$

де $J = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{a}$ = обмеженому числу, позначимо

від вартости n. Але:

$$r = \frac{x}{a+1} \cdot \frac{x}{a+2} \cdot \frac{x}{a+3} \cdots \frac{x}{n}$$

Коли в цій рівності замінити всі знаменники через $a+1$, то права частина збільшиться й ми одержимо

$$r < \left(\frac{x}{a+1}\right)^{n-a}$$

Але з умови $x < a+1$, тому дріб $\frac{x}{a+1} < 1$ й $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{a+1}\right)^{n-a} = 0$

Очевидно, що й здобуток:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} r = 0$$

Це нам дає право твердити, що й останній член R прямує до нуля зі збільшенням n до безмежности, а тому розгорнення в ряд через $\sin x$ можливе при кожній вартости x. Таким чином маємо:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

§13. Розгорнення в ряд через $\cos x$.

Коли $f(x) = \cos x$, то, як відомо, $f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$; $f''(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{2}+x\right) = -\cos x$; $f'''(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sin x$; $f^{IV}(x) = \cos(2\pi+x) = \cos x$; $f^{V}(x) = -\sin x$ і т. д. Загалом $f^{(n)}(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$. Всі похідні при кожному x - існують, отже, беручи $x = 0$, матимемо: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$; $f^{IV}(0) = 1$; $f^{V}(0) = 0$ і т. д. Отже коли n є непарне, то $f^{(n)}(0) = 0$, коли n парне, то $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}$; $\left[n = 2k,\ k = \frac{n}{2}\right]$. Тому:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots R$$

де R за Лагранжем буде:

$$R = \frac{x^n}{n!}\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right)$$

$\cos$ не може мати вартости більшої 1, а ми до-

вели, що $\frac{x^n}{n!}$ для кожної вартости x простує до нуля при зростанню n до ∞, а тому:

$$\lim_{n\ldots\infty} R = 0$$

Таким чином розгорнення $\cos x$ в шерег можливе при кожній вартості x. Отже:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

§14. Розгорнення в шерег e^x.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ і т. д. $f^{(n)}(x) = e^x$. Отже всі n перших функцій існує. Вважаючи $x = 0$, матимемо:

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1 \text{ і т. д.}$$

Тому за взором Макльорена, маємо:

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots R$$

де R за Лягражем буде:

$$R = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$$

θ є дріб менший від одиниці і здобуток $\theta x < x$, а тому якеб не було R вартість $e^{\theta x}$ - є обмеженою, бо $e^{\theta x} < e^x$. Щодо $\frac{x^n}{n!}$ нами доведено, що для кожної вартости x $\lim_{n\ldots\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, а тому $\lim_{n\ldots\infty} R = 0$. Розгорнення можливе при кожному x, а тому:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Взявши $x = 1$, одержимо шерег, яким користуються для обчислення самого e, а саме:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Розгорнемо ще в шерег ступінів x функцію a^x хай $a = e^y$; знайдемо y. Логаритмуємо й маємо

$\lg a = y$, тому $a = e^{y \lg a}$, а звідси $a^x = e^{x \lg a}$. Отже:

$$f(x) = a^x = e^{x \lg a}$$
$$f'(x) = \lg a\, e^{x \lg a}$$
$$f''(x) = \lg^2 a\, e^{x \lg a}$$
$$f'''(x) = \lg^3 a\, e^{x \lg a}$$
$$\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots$$
$$f^{(n)}(x) = \lg^n a\, e^{x \lg a}$$

Тому:

$$f(0) = 1;\ f'(0) = \lg a;\ f''(0) = \lg^2 a;\ f'''(0) = \lg^3 a \text{ і т.д.}$$

А тому ряд Маклорена має вигляд:

$$a^x = 1 + \frac{x \lg a}{1!} + \frac{(x \lg a)^2}{2!} + \frac{(x \lg a)^3}{3!} + \dots R$$

де $R = \frac{(x \lg a)^n}{n!} e^{\theta x \lg a}$

або беручи $x \lg a = y$, маємо:

$$R = \frac{y^n}{n!} e^{\theta y}$$

А ми перед цим довели, що при всякому y $\lim\limits_{n \dots \infty} R = 0$

Отже розкладення в ряд степенів x функції a^x можливе при кожному x

Коли візьмемо ряд:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \qquad (a)$$

і замінимо в ньому x на $-x$, то матимемо:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \qquad (б)$$

Взявши півсуму й півріжницю цих рядів (а) і (б) матимемо:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2m}}{2m!}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Вартість $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ має назву гіперболичного синуса,[1]

$$\operatorname{Sin}_{hip.} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

а вартість $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ має назву гіперболичного косинуса

$$\operatorname{Cos}_{hip} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

§15. Розгорнення в шерег лозаритмичної функції.

Функцію $\lg x$ розгорнути не можна, бо при $x=0$ ця функція має розрив тяглости ($\lg 0^\circ = \infty$)

Розглянемо $f(x) = \lg(1+x)$. Тоді:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x};\quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2};\quad f'''(x) = \frac{1.2}{(1+x)^3};\quad f^{(IV)}(x) = -\frac{1.2.3}{(1+x)^4}$$

і загалом:
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

Тому:

$$f(0) = \lg 1 = 0;\quad f'(0) = 1;\quad f''(0) = -1;\quad f'''(0) = 2!\ \text{ і }\ f^{n}(0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

Тому шерег Макльорена матиме вигляд:

$$\lg(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2.1!}{2!} + \frac{x^3.2!}{3!} - \frac{x^4 3!}{4!} + \dots$$

або:

$$\lg(x-1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} \qquad (d)$$

де R за взором Коші:

$$R = (-1)^{n-1}\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n}$$

або (тут $\frac{(n-1)!}{(n-1)!}$ скорочується):

$$R = (-1)^{n-1}\frac{x}{1+\theta x}\cdot\left(\frac{x-x\theta}{1+x\theta}\right)^{n-1}$$

де $0<\theta<1$.

1) бо по-грецькому ὑπερβολεὶν – v – довге.

Розглянемо випадки:

1) $|x| > 1$

В цьому разі ряд (2) є розбіжний, бо ознака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} : (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{n}{n+1} x = \lim_{n\to\infty} -\left(1-\frac{1}{n+1}\right) x = -x$$

Отже при $|x|>1$ ряд є розбіжний, а при $|x|<1$ ознака Даламбера виконується і ряд має бути збіжним.

2) $|x| = 1$, себто при $x = \pm 1$

Коли $x = 1$, то ряд обертається в

$$\lg 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

це ряд гіпотетичний, а тому (як ми розглядали у вступі в аналізу) є збіжний.

Коли $x = -1$, то ряд обертається в

$$\lg 0 = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

або

$$\lg 0 = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right)$$

Це ряд гармонійний, що розбігається

3) Коли $|x| < 1$

Тоді розглядаючи $R = (-1)^{n-1} \frac{x}{1+\theta x} \cdot \left(\frac{x-x\theta}{1+x\theta}\right)^{n-1}$, маємо:

а) при $x > 0$

Дріб $\frac{x}{1+\theta x}$ завжди менше одиниці, бо $x<1$, $1+\theta x > 1$, а дріб $\frac{1-x\theta}{1+x\theta}$ - також менше одиниці, бо здобуток $x\theta$ при $x<1$ і $\theta<1$, буде:

$$x\theta < x$$

Тому: $0 < x - x\theta < 1$, а $1 + x\theta > 1$.

Ми знаємо, що коли дріб менший одиниці підносити у досить велику ступінь, то вислід ступінування може бути як бажано малим, себто

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-x\theta}{1+x\theta}\right)^{n-1} = 0$$

тому й

$$\lim_{n\to\infty} R = 0$$

б) при $x < 0$ (але більшому -1)

Заступаючи x через $-y$, ми матимемо:

$$0 < y < 1$$

Тому:

$$R = (-1)^{n-1}\frac{-y}{1-\theta y}\cdot\left(\frac{-y+y\theta}{1-y\theta}\right)^{n-1}$$

а) дріб $\frac{y}{1-\theta y}$ є <u>числом обмежним</u>, бо при $y<1$ і $\theta<1$ здобуток $y\theta<1$, а тому знаменатель завжди $\neq 0$ а числитель цього дробу не більш одиниці

б) дріб $\frac{y-y\theta}{1-y\theta} < 1$, бо $y<1$, а відлічуючи з обох частин по $y\theta$ (що є менше y) матимемо:

$$y - y\theta < 1 - y\theta$$

Отже

$$\frac{y-y\theta}{1-y\theta} < 1$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{y-y\theta}{1-y\theta}\right)^{n-1} = 0$. А звідци

$$\lim_{n\to\infty} R = 0$$

Це доводить, що для всіх вартостей x, абсолютною величиною не нижчих від одиниці розгорнення в степенний шерег функції:

$$\lg(1+x)$$

можливе, а саме:

$$\lg(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$|x|<1$

Цей шерег має свої незручности, а саме:

1) дає можливість розгортати лозаритми не більше 2.

а 2) досить повільно збігається особливо при вартостях, що наближаються до 1.

Тому цей шерег перетворюють в другий таким шляхом:

Візьмім даний шерег:

$$\lg(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

і заміним в ньому вартість x на $-x$:

$$\lg(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

Тепер відлічимо другий шерег від першого і матимемо:

$$\lg(1+x) - \lg(1-x) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right)$$

Означимо суму $1+x$ через y, а ріжницю $1-x$ через z, тоді матимемо:

$$\lg\frac{y}{z} = 2\left[\frac{y-z}{y+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^5 + \ldots\right]$$

Знаючи $\lg z$, ми за допомогою даного взору обчислимо $\lg y$. Очевидно, що шерег буде збігатися тим скорше, чим більша ріжниця між знаменателем і числителем (себто між величинами: $y+z$ і $y-z$)

Приклади.

1). $\lg\frac{y}{z} = \lg\frac{2}{1}$

$$\lg 2 - \overset{0}{\cancel{\lg 1}} = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots\right] = 0{,}6931471\ldots$$

2). $\lg \frac{y}{z} = \lg \frac{3}{2}$

$$\lg 3 - \lg 2 = 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^4} + \cdots\right] = 0,0986122\ldots$$

Очевидно, що лозаритм складних чисел, напр. $6 = 3\cdot 2$; $8 = 2^3$; $36 = 3^2\cdot 2^2$ і т.д. знайдуться шляхом складання й множення основних лозаритмів, напр. $\lg 24 = \lg 3 + 3\lg 2$.

Ми вже знаємо, що для того щоб перейти від природніх лозаритмів до десяткових, відповідні природні лозаритми ми мусимо помножити на модуля:

$$M = 0,43429448\ldots$$

Напр. $\lg_e 2 = 0,6931471\ldots$ Множимо на M, матимемо: $\lg 2 = 0,301026854\ldots$, або $\lg 2 = 0,30103$.

§16 Розгорнення в шерег ступінів x функції $f(x) = (1+x)^m$, де m є якесь реальне число.

Всі похідні функції існують, а саме:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}; \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \quad \text{і т.д.}$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

Звідси маємо такі Макльоренові функції

$f(0) = 1$; $f'(0) = m$; $f''(0) = m(m-1)$ і т.д. $f^{(n-1)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+2)$

Тому:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 +$$

$$+ \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + R \qquad (A)$$

де R, взяте за взором Коші, буде:

$$R = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(1-\theta)^{n-1}x^n}{(n-1)!}(1+\theta x)^{m-n}$$

Ми знаємо, що при m цілому й додатньому цей шерег зупиниться сам собою, бо починаючи з певного місця всі сочинники обертаються в нуля.

При инших вартостях m цей шерег є безмежним.

Отже, ми розглянемо цей шерег як раз для m дробового, або від'ємного.

1й випадок. $|x|>1$

Тоді шерег є розбіжний, бо вживши ознаку Деламбера, ми бачимо, що:

$$\lim_{n\dots\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\dots\infty}\left[\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1} : \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n\right] =$$

$$= \lim_{n\dots\infty}\left(\frac{m-n}{n+1}x\right) = \lim_{n\dots\infty}\left(\frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}\right)x = -x$$

Отже при $|x|>1$ шерег є розбіжний.

У 2му випадку $x=\pm 1$ ми приходимо до конкретних ступінів $2^m : 0$, а тому ми розліджувати їх не будемо. Перейдемо до наступних випадків, а саме:

3ій випадок. $|x|<1$

Розглянемо межу остаточного члену:

$$R = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{m-n}$$

При простуванню $n\dots\infty$

Напишем цей член так:

$$R = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\cdot(1+\theta x)^{m-1}\cdot\left(\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n\right)$$

1) Дріб $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ а) при $x>0$ - є менший від одиниці.

б) при $x<0$ (але, коли $|x|<1$), маємо $\frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|}$, але $0<\theta<1$, то здобуток двох дробів менших від одиниці

$$\theta|x| < \theta$$

а тому $1-\theta|x| > 1-\theta$ і дріб $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ при $x<0$ буде також правильний.

В цьому разі завжди можна взяти n остільки великим, що цей дріб може бути менш малого наперед заданого числа, себто:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} = 0$$

2) Число $(1+\theta x)^{m-1}$ є обмежена величина, бо коли $0<\theta<1$; $|x|<1$, то двочлен $1+\theta x$ - є обмежений (ні нуль, ні безмежність, а ступінь m є також обмежений.

3) Член

$$a_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n$$

Цей член можна розкладати, як n-й член ряду:

$$\frac{m(m-1)}{1} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2!} x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{3!} x^4 + \dots\dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n$$

Коли ряд цей буде збіжний, то останній його член a_n буде прямувати до нуля при $n \to \infty$

Вживаємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)}{n!} x^{n+1} : \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{m-n}{n} x = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{m}{n} - 1\right) x = -x$$

Отже коли $|x|<1$, то ряд збіжний, а тому

$$\lim a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n = 0$$

Таким чином:

$$\lim R = 0$$

Покажемо (A) з Міжнайдеться кожного x абсолютної величини меншої від одиниці.

Висновки.

1) Беручи $x = -y$, одержимо:

$$(1-y)^m = 1 - mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} \qquad (B)$$

2) Беручи $m = -k$, одержимо: 1) зі взору (A)

$$\frac{1}{(1+x)^k} = 1 - kx + \frac{k(k+1)}{2!}x^2 - \frac{k(k+1)\cdot k(k+2)}{3!}x^3 + \dots \qquad (C)$$

2) зі взору (B)

$$\frac{1}{(1-x)^k} = 1 + kx + \frac{k(k+1)}{2!}x^2 + \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}x^3 \dots \qquad (D)$$

3) Беручи $k = 1$ одержимо

а) зі взору (C):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

б) зі взору (D)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

4) Беручи $x = \frac{y}{a}$ де $y < a$ зі взорів (C) і (D) маємо:

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \dots$$

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \dots$$

Вправи.

1° Розкласти в степені: $f(x) = \operatorname{arcsin} x$ і $f(x) = \operatorname{arctg} x$ і обчислити межі збіжності степенів; також, беручи в 1-му степені $x = \frac{1}{2}$, а в 2-му $x = 1$, обчислити π.

Відповіді.

$$\operatorname{arcsin} x = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{4} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Збіжні при $|x| < 1$.

$$\operatorname{arcsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \dots$$

§17 Взори Ейлера для тригонометричних функцій

Ми вивели:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \frac{y^n}{n!} \quad (a)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (б)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \quad (в)$$

У взорі (а) берем $y = ix$, тоді:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

або:

$$e^{ix} = \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}\right] + i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \quad (г)$$

або, користуючися взорами (б) і (в), маємо:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (д)$$

Далі беручи у взорі (г) $x = -x$, одержимо:

$$e^{-ix} = \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right] - i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right]$$

а звідци: $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ . . . . . (ж)

Отже можна написати:

$$a \pm ib = \rho(\cos x \pm i \sin x) = \rho e^{\pm i\theta}$$

А з другого боку додаючи и віднімаючи рівности (д) і (ж) одержимо взори Ейлера:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad ; \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

що висловлюють тригонометричні функції через показательні.

§18. Розгорнення неозначенностей за допомогою розгорнення функцій в степенні шереги незалежника.

Крім способів розгорнення неозначенностей указаних нами в пропедевтичному курсі, зупинимося тут ще на одному способі V за допомогою розгорнення функцій в степенні шереги незалежників.

Припустім, що ми маємо дріб функцій, що при вартостях незалежника $x = a$ дають неозначенність $\frac{0}{0}$.

Припустім також, що за допомогою шерегу Макльореня ми зможемо наданих числителя й знаменателя розгорнути в шереги з ступінів x.

Коли тепер ми числителя й знаменателя скоротимо на найменший ступінь x, то, або в числителі, або в знаменателі, або в обох разом ми одержимо член, що не містить x, тому беручи межу вартости дробу при $x = a$, ми матимемо або ∞ (коли в числителі є вільний член),

V обчислення правдивих вартостей неозначенностей

або 0 (коли вільний член є в знаменнику), або обмежене число (в останньому випадкові), що й буде правдивою вартістю невизначеності.

Приклад 1 $u = \frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ при $x = 0$

Отже $u = \frac{x^2}{1-\cos x}$, але $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$, тому

$u = \frac{x^2}{1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots}$ скорочуючи на x^2, маємо:

$u = \frac{1}{\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots}$, а звідси: $\lim\limits_{x \to 0} u = \frac{1}{\frac{1}{2!}} = 2$

Приклад 2. $u = \sec x - \operatorname{tg} x$; при $x = \frac{\pi}{2}$

Це є невизначеність типу $\infty - \infty$, тому перетворюємо: $u = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{1 - \cos y}{\sin y}$

(де $y = \frac{\pi}{2} - x$). Треба знайти $\lim u = \frac{1 - \cos y}{\sin y}$ при $y = 0$

$u = \frac{1 - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!} + \dots}{\frac{y}{1} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots}$ після скорочення на y, матимемо:

$$\lim_{y \to 0} u = \frac{\frac{y}{2!} - \frac{y^3}{4!} + \dots}{1 - \frac{y^2}{3!} + \dots} = \frac{0}{1} = 0$$

§19. Ряд Тейлора для функцій кількох незалежних.

Для функцій одного незалежного ми мали:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{h^n f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}$$

(останній член беремо за Лагранжем)

Ми знаємо, що:

$$f'(x)h = df(x) = du$$
$$f''(x)h^2 = d^2f(x) = d^2u$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n-1)}(x)\, h^{n-1} = d^{n-1} f(x) = d^{n-1} u$$

$$\text{і} \quad f^{(n)}(x+\theta h)(h\theta)^n = d^n f(x+\theta h) = d^n u_0$$

Тоді:

$$f(x+h) - f(x) = du + \frac{d^2u}{2!} + \frac{d^3u}{3!} + \dots \frac{d^{n-1}u}{(n-1)!} + \frac{d^n u_0}{n!} \qquad (A)$$

Доведемо тепер, що цей вигляд має й тепер від кількох незалежників. Справді, хай $u = f(x, y, z \dots)$, а прирощення незалежників будуть $h, k, l \dots$, себто наша різниця функцій (див. (A) ліву частину) буде:

$$f(x+h, y+k, z+l, \dots) - f(x, y, z \dots)$$

Візьмім довільну величину t і помножимо на неї всі наші прирощення й означимо через $\xi = x + ht$; $\eta = y + kt$; $\zeta = z + lt \dots$ Таким чином:

$$f(x+ht, y+kt, z+lt \dots) = f(\xi, \eta, \zeta \dots)$$

Нову функцію $f(\xi, \eta, \zeta)$ можна розглядати, як певну функцію t, себто:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(t)$$

при чому при $t=0$, ми одержуємо $f(x, y, z)$, себто:

$$\varphi(0) = f(x, y, z \dots)$$

а при $t=1$ одержуємо:

$$\varphi(1) = f(x+h, y+k, z+l, \dots)$$

За Макльоренем ми можемо написати:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)t}{1!} + \frac{\varphi''(0)t^2}{2!} + \dots \frac{\varphi^{(n)}(\theta t)t^n}{n!} \qquad (\bar{I})$$

Отже треба нам знайти всі n похідних $\varphi(t) = f(\xi, \eta, \zeta \dots)$.

Коли візьмемо який p-й похід функції, то ми матимемо:

$$d^p \varphi(t) = d^p f(\xi, \eta, \zeta \dots) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta} d\zeta \dots\right)^p f(\xi, \eta, \zeta \dots)$$

але $\xi = x + ht$, тому $d\xi = h\,dt$ і аналогічно $d\eta = \kappa\,dt$; $d\zeta = l\,dt$ і т.д. Тому:

$$d^p\varphi(t) = d^p f(\xi, \eta, \zeta \ldots) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} h\,dt + \frac{\partial}{\partial \eta}\kappa\,dt + \frac{\partial}{\partial \zeta} l\,dt \ldots\right)^p f(\xi, \eta, \zeta \ldots)$$

або:

$$d^p\varphi(t) = d^p f(\xi, \eta, \zeta \ldots) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} h + \frac{\partial}{\partial \eta}\kappa + \frac{\partial}{\partial \zeta} l + \ldots\right)^p \cdot (dt)^p f(\xi, \eta, \zeta \ldots)$$

А звідси, поділивши обидві частини на $(dt)^p$, маємо:

$$\varphi^{(p)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} h + \frac{\partial}{\partial \eta}\kappa + \frac{\partial}{\partial \zeta} l + \ldots\right)^p \cdot f(\xi, \eta, \zeta \ldots)$$

При $t = 0$, матимемо:

$$\varphi^{(p)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y}\kappa + \frac{\partial}{\partial z} l + \ldots\right)^p \cdot f(x, y, z \ldots)$$

(бо $\xi = x + ht$, а при $t = 0$ $\xi = x$, аналогічно $\eta = y$; $\zeta = z \ldots$)

Даючи p вартості $1, 2 \ldots n$, ми одержимо всі вартості: $\varphi'(0)$, $\varphi''(0) \ldots \varphi^{(n)}(0)$ і вставляючи їх у рівність (I), матимемо:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y}\kappa + \frac{\partial}{\partial z} l \ldots\right) t f}{1!} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y}\kappa + \frac{\partial}{\partial z} l \ldots\right)^2 t^2 f^2}{2!} +$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y}\kappa + \frac{\partial}{\partial z} l \ldots\right)^{n-1} \cdot t^{n-1} \cdot f^{n-1}}{(n-1)!} + R_n \qquad (\text{II})$$

Нам треба знайти вартість розгорнення рівності:

$$f(x + h, y + \kappa, z + l \ldots) - f(x, y, z \ldots)$$

Але:

$$f(x + h, y + \kappa, z + l \ldots) - f(x, y, z \ldots) = \varphi(1) - \varphi(0)$$

а тому вставляючи в рівність (II) $t = 1$, і переносячи $\varphi(0)$ в ліву частину, одержимо:

$$f(x + h, y + \kappa, z + l \ldots) - f(x, y, z \ldots) = \varphi(1) - \varphi(0) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y}\kappa + \frac{\partial}{\partial z} l \ldots\right) f + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y}\kappa + \frac{\partial}{\partial z} l \ldots\right)^2 f + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y}\kappa + \frac{\partial}{\partial z} l \ldots\right)^3 f \ldots + R_n$$

Але прирощення $h = dx$, $k = dy$; $l = dz$, тому вираз:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \dots\right)^p f = d^p f(x, y, z \dots) = d^p u$$

де $p = 1, 2, 3 \dots n$. Отже:

$$f(x+h, y+k, z+l \dots) - f(x, y, z \dots) = du + \frac{d^2u}{2!} + \frac{d^3u}{3!} + \dots R_n$$

де $R_n = \frac{d^n u_0}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \dots\right)^n f(x, y, z \dots)\right]_{\substack{x = x+\theta h \\ y = y+\theta k \\ z = z+\theta l}}$

при $0 < \theta < 1$.

Себто маємо взір аналогічний, що й для функції з одним незалежником.

§20 Maximum і minimum невизначених функцій

Коли в пропедевтичному курсі ми розглядали maximum і minimum функцій, то ми зупинялися на випадку лише визначеної функції від одної незалежної змінної. Тепер розглянемо ще випадок maximum'а й minimum'а від функції невизначеної. Хай такою цілою функцією буде:

$$u = f(x, y) = 0 \quad \dots \quad (a)$$

де y є якась алгебрична функція x. Вважаючи в цьому разі, як і раніш $f'_x(x, y)$ для нашого інтервала вартостей x і y нерівного з нулем, ми напишемо першу похідну y' так як це робили в пропедевтичному курсі, а саме:

$$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \quad \dots \quad (б)$$

Функція y' - є тяглою в даних границях (бо

f'_x і f'_y - також таглі підно умові, що y є тягла функція x), а тому беруги на увагу, що y' при тахітиті й тінітиті мусить змінювати знак, вона має обертатися нуль.

Раз $f'_y(x,y) \neq 0$, то має бути в цьому разі $f'_x(x,y)=0$ Таким чином для визначення вартостей x і y, при яких може бути або тахітит, або тінітит, ми матимо систему рівнянь.

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ f'_x(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (в)$$

Припустім, що розвязавши цю систему, ми одержимо:

$$x = \alpha \; ; \quad y = \beta$$

Тоді, як нам відомо, щоб довідатися, чи при $x=\alpha$, і $y=\beta$ є тахітит або тінітит, ми мусимо знайти знак другої похідної y''. Тому складаємо цю похідну.

Ми знаємо, що:

$$f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

Звідци:

$$f''(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y')^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

або:

$$f''(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y')^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

Але при даних вартостях $x=\alpha$; $y=\beta$ перша похідна $y'=0$, тому:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

Отже:

$$y'' = -\left(\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{f''_{xx}(x,y)}{f'_y(x,y)} \right)_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}}$$

Коли в цьому разі 1) вартість $y'' < 0$, то (як ми знаємо) буде максимум

2) $y'' > 0$ мінімум

3) $y'' = 0$, то питання не вирішене й вимагає дослідження наступних похідних.

Приклад $f(x,y) = x^3 + y^3 - 8xy = 0$

Маємо: $f'_x = 3x^2 - 8y$; $f'_y = 3y^2 - 8x$

Системка:

$$x^3 + y^3 - 8xy = 0$$
$$3x^2 - 8y = 0$$

дає розв'язки: $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$; $\alpha_2 = \frac{8\sqrt[3]{2}}{3}$, $\beta_2 = \frac{8\sqrt[3]{4}}{3}$ і т.д.

Обмежимося розглядом лише реального розв'язку α_2 і β_2 не рівного з нулем (бо α_1 і β_1 негодиться, бо при них $f'_y(x,y) = 0$).

$f''_{xx}(x,y) = 6x$, тому:

$$y''_{(x=\alpha_2)} = -\left(\frac{6x}{3y^2 - 8x}\right)_{\substack{x=\alpha_2 \\ y=\beta_2}} = -\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{8\sqrt[3]{4} - \frac{8\sqrt[3]{2}}{3}}\right) = -\frac{3}{32}$$

Отже вартости α_2 і β_2 - є максимум

§21 Максимум і мінімум визначених функцій від двох незалежних.

Припустім, що маємо:

$$u = f(x,y)$$

від двох незалежних x і y.

З попередніх визначень максимуму й мінімуму функції від одного незалежного, очевидно що під максимумом функції u, ми будемо розуміти ту вартість цієї функції при вартостях $x = \alpha$ і $y = \beta$, коли існує таке рівність:

$$f(\alpha + h, \beta + k) < f(\alpha, \beta)$$

при всіх можливих додатніх і від'ємних h і k близьких до нуля.

Максимум умового мінімума тієї ж функції буде:

$$f(\alpha+h, \beta+k) > f(\alpha, \beta)$$

також при всіх можливих додатніх і від'ємних h і k досить близьких до 0.

Загальна різниця:

$$f(\alpha+h, \beta+k) - f(\alpha, \beta)$$

лишить при всіх можливих додатніх і від'ємних величинах h і k (близьких до 0), затримувати знак „мінус" при максимумі, а „плюс" при мінімумі.

Коли ж зі зміною знаку h або k і знак різниці змінюється, то ні максимуму, ні мінімуму не існує.

Доведемо теорему: <u>Конечною умовою того, щоб при даних величинах $x=\alpha$, $y=\beta$ дана функція від двох незалежних $f(x,y)$ мала або максимум, або мінімум є рівність з нуля при цих величинах x і y її окремих перших похідних, себто $f'_x(\alpha,\beta)=0$ і $f'_y(\alpha,\beta)=0$</u>

Ми вже казали, що для максимума, або мінімума лишить приростання функції

$$f(\alpha+h, \beta+k) - f(\alpha,\beta) \lesseqgtr 0$$

зберігати сталий знак для всіх можливих h і k близьких до нуля. Отже це приростання має зберігати той же знак коли δ і $k=0$, себто:

$$f(\alpha+h,\beta)-f(\alpha,\beta)\lessgtr 0$$

Але за теоремою Лагранжа:

$$f(\alpha+h,\beta)-f(\alpha,\beta)=h f'_x(\xi,\beta)$$

де ξ якесь середнє значення між α і $\alpha+h$. Функція $f'_x(\alpha,\beta)$, а разом і $f'_x(\xi,\beta)$ - стала ~ , а тому, коли $f'_x(\alpha,\beta)\neq 0$, то $f'_x(\xi,\beta)$ <u>мусить зберігати свій знак для всіх досить малих значень h.</u>

Отже в цих умовах здобуток:

$$h f'_x(\xi,\beta)$$

що має другий сомножник сталого знаку, <u>змінює-</u>ться свій знак разом зі зміною знаку h, а тому й приріст функції змінює свій знак.

Значить тоді, коли $f'_x(\alpha,\beta)\neq 0$, то немає ні max-imum'a, ні minimum'a

Значить, для існування maximum'a, або minimum'a конечно мусить $f'_x(\alpha,\beta)=0$. Аналогічно, беручи $h=0$ доведемо конечність умови:

$$f'_y(\alpha,\beta)=0$$

Ці умови дають нам для визначення величин $x=\alpha$ і $y=\beta$, тому систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y)&=0\\ f'_y(x,y)&=0\end{aligned}\right\}\quad\dots(a)$$

Розв'язуючи її ми й одержимо потрібні $x=\alpha$; $y=\beta$. Зважаючи на те, що при нескінченно малих x і y величини похідних dx і dy - цілком довільні, то умову існування maximum'a й minimum'a можемо написати ще й так:

$$du_{x=\alpha;\, y=\beta} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}} = 0$$

де цей двочлен при довільних dx і dy буде рівний нулеві тоді, коли $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ і $\frac{\partial u}{\partial y}=0$. Таким чином:

Конечною умовою того, щоб при даних вартостях $x=\alpha$, $y=\beta$ функція $f(x,y)$ мала maximum або minimum є рівність з нулем цілого походу (диференціяла)

Тепер розслідуємо, коли ця функція буде мати maximum, а коли minimum.

Доведемо теорему:

Коли $f(x,y)$ при даних вартостях $x=\alpha$; $y=\beta$ має перший цілий похід рівний з нулем то вона матиме:

1) maximum, коли при тих же вартостях $x=\alpha$, $y=\beta$, ріжниця:

$$f''_{xx}(\alpha,\beta)\cdot f''_{yy}(\alpha,\beta) - \left(f''_{xy}(\alpha,\beta)\right)^2 > 0 \quad (1) \text{ і } f''_{xx}(\alpha,\beta) < 0 \quad (2)$$

2) minimum, коли при тих же умовах і при того ж роду вартости розгляненої ріжниці (1):

$$f''_{xx}(\alpha,\beta) > 0$$

Коли ж згадана ріжниця:

$$f''_{xx}(\alpha,\beta)\cdot f''_{yy}(\alpha,\beta) - \left(f''_{xy}(\alpha,\beta)\right)^2 < 0$$

то не існує ні minimum, ні maximum;

і нарешті, коли ця ріжниця є рівна з нулем, то справа лишається не з'ясованою й вимагає дальших досліджень.

Для спрощення введемо, вживані при цьому, позначення:

$$f''_{xx}(\alpha,\beta)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}}=A;\quad f''_{xy}(\alpha,\beta)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}}=B;\quad f''_{yy}(\alpha,\beta)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}}=C$$

тоді наша умова має вигляд:

$$AC-B^2$$

і коли $AC-B^2>0$, то існує або max, коли $A<0$, або min, коли $A>0$. А коли $AC-B^2<0$, то немає ні max, ні min, і, нарешті, коли $AC-B^2=0$, то справа є нерозв'язаною.

Хай розв'язками рівнань (a) будуть $x=\alpha;\ y=\beta$

Тоді візьмім досить близькі до α і β вартості x і y:

$$x=\alpha+h\ ;\quad y=\beta+k$$

де h і k наближуються до нуля. За взором Тейлора маємо:

$$f(\alpha+h,\beta+k)=f(\alpha,\beta)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)f(\alpha,\beta)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(\alpha,\beta)+\cdots R_n$$

Для нашого дослідження досить зупинитись ще перед на другому члені й ми маємо:

$$f(\alpha+h,\beta+k)-f(\alpha,\beta)=\left(\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial x}h+\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial y}k\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\alpha+\theta h,\beta+\theta k)\quad \text{де } 0<\theta<1$$

Ми знаємо, що умовою існування max'а й min'а є $\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial x}=f'_x(\alpha,\beta)=0$ і $\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial y}=f'_y(\alpha,\beta)=0$

а тому нам вгір у цьому випадку матиме вигляд:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(a+\theta h, b+\theta k)$$

З аналогією з означеннями $f''_{xx}(a,b) = A$ і т. д. Означимо:

$$f''_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) = \frac{\partial^2 f(a+\theta h, b+\theta k)}{\partial x^2} = A_\theta$$

$$f''_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) = \frac{\partial^2 f(a+\theta h, b+\theta k)}{\partial x \partial y} = B_\theta$$

і $$f''_{yy}(a+\theta h, b+\theta k) = \frac{\partial^2 f(a+\theta h, b+\theta k)}{\partial y^2} = C_\theta$$

і матимемо:

$$\Delta = f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}\left[A_\theta h^2 + 2B_\theta hk + C_\theta k^2\right]$$

Очевидно нам приросту функції залежатиме знаку правої частини, яку й будемо досліджувати.

Припустимо, що $A_\theta \neq 0$, тоді:

$$\Delta = \frac{1}{2A_\theta}\left[A_\theta^2 h^2 + 2A_\theta B_\theta hk + A_\theta C_\theta k^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2A_\theta}\left[A_\theta^2 h^2 + 2A_\theta B_\theta hk + B_\theta k^2 - B_\theta^2 k^2 + A_\theta C_\theta k^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2A_\theta}\left[(A_\theta h + B_\theta k)^2 + (A_\theta C_\theta - B_\theta^2)k^2\right]$$

Отже знак Δ незалежно від величин h і k (бо вони в квадратах) залежатиме від знаків 1) A_θ 2) $(A_\theta C_\theta - B_\theta^2)$

I Нехай $A_\theta C_\theta - B_\theta^2 > 0$

тобто многочлен в квадратових дужках завжди додатній і знак приросту функції залежатиме лише від знаку A_θ, себто коли $A_\theta < 0$ максимум, $A_\theta > 0$ мінімум.

Коли $A_0 C_0 - B_0^2 < 0$, то, щоб переконатися, що вираз:

$$\left[(A_0 h + B_0 k)^2 + (A_0 C_0 - B_0^2) k^2\right]$$

змінює знак в залежності від величини h і k, досить взяти два яких будь окремих випадків, напр., коли при $k \neq 0$ віднімемо для h такту величину, щоб перший член в дужках обертався в нуль, себто $h = -\frac{B_0}{A_0} k$ (що одержимо, розв'язавши рівняння $A_0 h + B_0 k = 0$), то при $(A_0 C_0 - B_0^2) < 0$ многочлен в дужках буде від'ємним. Навпаки, коли при $h \neq 0$ такому ж k буде наближатися до нуля, то многочлен в дужках матиме знак однаковий з членом $A_0^2 h^2$, себто буде додатнім.

Зокрема на такій функції:

$$A_0 = f''_{xx}(\alpha + h, \beta + k)$$

залежить сталий знак, а через те знак приросту Δ буде змінюватися в залежності від знаку величини многочлена в дужках. Отже ні max., ні min. не буде.

Випадок, коли $A_0 = 0$ зводиться до тільки що розглянутого, бо тоді:

$$A_0 C_0 - B_0^2 = -B_0^2 < 0$$

Величини:

$$A_0 = f''_{xx}(\alpha + h, \beta + k)$$

$$B_0 = f''_{xy}(\alpha + h, \beta + k)$$

$$C_0 = f''_{yy}(\alpha + h, \beta + k)$$

є безумовно функціями h і k (бо α і β є певні сталі величини). Ми розглядаємо ці функції при всіх

можливих вартостей h і k, а тому вважаємо A_0, B_0 і C_0 за <u>певні</u> функції h і k.

Вартості A, B і C є неповними вартостями функцій A_0, B_0 і C_0 коли h і k прямують до нуля. В силу своєї малості при достатньо малих абсолютних величинах h і k A і A_0, B і B_0, C і C_0 будуть однакового знаку, а разом і різниці:

$$A_0C_0 - B_0^2 \quad \text{і} \quad AC - B$$

також будуть однакових знаків, тому при дослідженні максимум'а й мінімум'а замість виразу $A_0C_0 - B_0^2$, досить, а практично зручніш, користатися з виразу $AC - B^2$

Отже 1) коли

$$AC - B^2 > 0$$

то при $A<0$ максимум, а при $A>0$ мінімум

2) коли

$$AC - B^2 < 0$$

немає ні максимума, ні мінімума і

3) коли

$$AC = B^2$$

то справа стоїть ще не розв'язаною. На дослідження цього випадку ми не зупиняємося

<u>Приклад 1</u> Сума всіх вимірів прямокутного бруса S, який з усіх брусів має найбільший об'єм!

Задача зводиться до поділу числа на три такі частини, щоб їх здобуток був максимум. Хай частини будуть x, y і $S-(x+y)$. Тоді

$$u = xy(S-x-y) = Sxy - x^2y - xy^2$$

Щоб він був maximum або minimum, треба щоб $f'_x(u)=0$, $f'_y(u)=0$. Тому:

$$f'_x(u) = 5y - 2xy - y^2 \qquad f'_y(u) = 5x - x^2 - 2xy$$

Маємо систему:

$$y^2+(2x-5)y=0;\ y=0;\ y+2x-5=0 \qquad x^2+(2y-5)x=0;\ x=0;\ x+2y-5=0$$

$$\begin{array}{r} 2y+4x-25=0 \\ -\ x+2y-5=0 \\ \hline 3x-5=0 \end{array}$$

$$x_1=0 \quad x_2=0 \quad x_3=5 \quad x_4=\frac{5}{3}$$

$$y_1=0 \quad y_2=5 \quad y_3=0 \quad y_4=\frac{5}{3}$$

Очевидно, що ні один із розв'язків: x_1, x_2, x_3 не відповідає задачі (бо нульових вимірів бруса не має), крім розв'язків x_4, y_4. Тоді 3-ій руб: $z=5-\frac{5}{3}-\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$. Довідаймося, чи це буде maximum?

$$f''_{xx}(u) = -2xy; \qquad A = -\frac{25}{3}$$

$$f''_{xy}(u) = 5-2x-2y \qquad B = 5-\frac{25}{3}-\frac{25}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$f'_{yy}(u) = 2x \qquad C = -\frac{25}{3}$$

Отже $AC-B^2 = \frac{45^2}{9} - \frac{5^2}{9} = \frac{5^2}{3} > 0$. Раз $A=-\frac{25}{3}<0$ то маємо maximum.

Отже при даній умові найбільшого об'єму бруса має бути кубом.

Приклад 2. Який з прямокутних брусів, що має сталий об'єм $V=a^3$ має найменшу поверхню. Означимо руби бруса через $x, y, z=\frac{a^3}{xy}$. Тоді поверхня:

$$u = S = 2xy + 2\frac{a^3}{y} + 2\frac{a^3}{x}$$

$$u'_x = 2y - 2\frac{a^3}{x^2}; \qquad u'_y = 2x - \frac{2a^3}{y^2}$$

$y-\frac{a^3}{x^2}=0$; $x^2y=a^2$ (1); $x^3y^3=a^6$ Поділивши почергі рівняння (1) і (2) на (3) маємо: $x=a$; $y=a$

$x-\frac{a^3}{y^2}=0$ $xy^2=a^3$ (2); $xy=a^2$ (3)

Решта нереальних розв'язків рівнянь:

$$x^3 = a^3 \; ; \quad y^3 = a^3$$

нам логічно не відповідають.

Отже $x = a$; $y = a$; $z = a$

$$U''_{xx} = \frac{4a^3}{x^3} \; ; \quad U''_{xy} = 2 \; ; \quad U''_{yy} = \frac{4a^3}{y^3}$$

$$A = 4 \; ; \quad B = 2 \; ; \quad C = 4$$

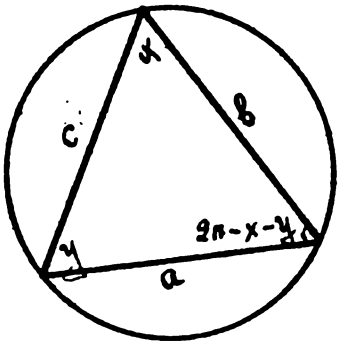
$$AC - B^2 = 16 - 2 > 0$$

але $A = 4 > 0$, тому маємо мінімум. Значить із всіх брусів даного об'єму найменшу поверхню має куб.

Приклад 3. В круг ввести Δ-к з найбільшим полем.

Бокн введеного в коло Δ будуть:

$$a = 2r \sin x \; ; \quad b = 2r \sin y$$



$$S_\Delta = \frac{ab \sin[\pi - (x+y)]}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4r^2 \sin x \sin y \sin(x+y) = 2r^2 \sin x \sin y \sin(x+y)$$

Ясно, що треба знайти максимум здобутку:

$$U = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$$

$$U'_x = \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y)$$

$$U'_y = \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y)$$

Системка:

$$\begin{cases} \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0 \\ \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

Перенесемо другий член у праву частину й поділимо їх почленно рівняння

тоді: $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1 \; ; \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$

$$\cos x \sin(x+y) = -\sin x \cos(x+y) \qquad \sin y = 0$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = -\operatorname{tg} x \qquad \sin x = 0$$

А перетворюючи функцію $\operatorname{tg}(x+y)$ за тригон. взорами

маємо: $\frac{tg x + tg y}{1 - tg x \cdot tg y} = -tg x$; $\frac{2tg x}{1 - tg^2 x} = -tg x$; $tg x = 0$

$2 = -1 + tg^2 x$; $tg x = \pm\sqrt{3}$; $x = 60°, 120°$; $y = 60°, 120°$ (бо $tg x = tg y$)

[Другі варіанти не годяться, бо сума кутів Δ-ка $= 180°$]

Отже кути тр-ка: $x = 60°$, $y = 60°$, $z = 60°$

$$U''_{xx} = -\sin x \sin y \sin(x+y) + \cos x \sin y \cos(x+y) + \cos x \sin y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y) =$$
$$= 2\cos x \sin y \cos(x+y) - 2\sin x \sin y \sin(x+y)$$

$$A = 2\cos 60° \sin 60° \cos 120° - 2\sin 60° \sin 60° \sin 120° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}$$

$$U''_{xy} = \cos x \cos y \sin(x+y) + \cos x \sin x \cos(x+y) + \sin x \cos y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y)$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$U''_{yy} = -\sin x \sin y \sin(x+y) + \sin x \cos y \cos(x+y) + \sin x \cos y \cos(x+y) -$$
$$- \sin x \sin y \sin(x+y) = 2\sin x \cos y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y)$$

$$C = 2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = -\sqrt{3}$$

Отже $AC - B^2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$. Але $A < 0$ тому маємо максимум

<u>Із всіх трикутників введених у дане коло найбільше поле має правильний</u>

<u>Приклад 4</u> В якому з Δ-ів, введених у дане коло обвід буде найбільший?

Нехай тр-ка:
$$a = 2r \sin x$$
$$b = 2r \sin y$$
$$c = 2r \sin(x+y)$$
$$S = a + b + c = 2r(\sin x + \sin y + \sin(x+y))$$

Очевидно треба знайти максимум виразу в дужках, а саме:

$$u = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$

$u'_x = \cos x + \cos(x+y)$ $\qquad \cos x + \cos(x+y) = 0$

$u'_y = \cos y + \cos(x+y)$ $\qquad \cos y + \cos(x+y) = 0$

$\cos\alpha = -\cos(\alpha+\gamma)$ $\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = 1 \quad$ $\cos\alpha = \cos\gamma$ (1)

$\cos\gamma = -\cos(\alpha+\gamma)$ $\quad$ $\cos\alpha = -\cos(\alpha+\gamma)$ а тому:

$\cos\alpha = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma$; $\cos\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\gamma} - \cos\alpha\cos\gamma$ а як підставі (1):

$\cos\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\alpha} - \cos^2\alpha$; $\cos\alpha = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha$

$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$; $\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$; $\cos\alpha = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} =$

$= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$; $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\cos\alpha = -1$ (для Δ-ка не годиться). Отже $\alpha = 60°$; $\gamma = 60°$; $\beta = 60°$

$U''_{xx} = -\sin x - \sin(x+y)$ $\quad A = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

$U''_{xy} = -\sin(x+y)$ $\quad B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$C = U''_{yy} = -\sqrt{3}$ $\quad AC - B^2 = 3 - \frac{3}{4} > 0 \quad A < 0$

З припущених, введених у коло має найбільший обвід правильний.

Приклад 5. Який Δ-к, що має даний обвід $2p$ буде мати найбільше поле?

Нехай: $a = x$; $b = y$; $c = 2p - x - y$

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-2p+x+y)} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

Очевидно, що поле буде мати максимум, коли найбільшу вартість матиме функція

$$U = (p-x)(p-y)(x+y-p)$$

Беремо окремі похідні функції U через x і через y, маємо:

$$U'_x = -(p-y)(x+y-p) + (p-x)(p-y)$$

$$U'_y = -(p-x)(x+y-p) + (p-x)(p-y)$$

Складаємо систему:

$$(p-x)(p-y) - (p-y)(x+y-p) = 0$$

$$(p-x)(p-y) - (p-x)(x+y-p) = 0$$

перенесши другий член в другу частину й поділивши наші рівняння одно на друге, одержимо:

$$1 = \frac{p-y}{p-x}; \quad p-x = p-y; \quad x = y$$

Далі:

$(p-y)[p-x-x-y+p]=0$; $p-y=0$; $y_1=p$ } не годяться.
$p-x=0$; $x_1=p$ }

$-2x-y+2p=0$ $\quad 2x+y=2p$

$$\begin{array}{r} 2y+x=2p \\ \hline 2x+y=2p \\ -\quad 4y+2x=4p \\ \hline 3y=2p \end{array}$$

$b=y=\frac{2p}{3}$; $\quad a=x=\frac{2p}{3}$; $\quad c=\frac{2p}{3}$

$W''_{xx}=-(p-y)-(p-y)=-2(p-y)$; $\quad A=-2\cdot\frac{1}{3}p=-\frac{2}{3}p$

$W''_{xy}=-(p-y)+(x+y-p)-(p-y)=-p+x+x+y-p-p+y=$
$=2x+2y-3p=-\frac{p}{3}$

$W''_{yy}=-2(p-x)=-\frac{2}{3}p$. Отже $AC-B^2=\frac{4}{9}p^2-\frac{p^2}{9}=\frac{p^2}{3}>0$

$A=-\frac{2}{3}p<0$ тому маємо справу з максимумом.
Очевидно, що <u>при даному обводі найбільше поле має правильний Δ.</u>

<u>Приклад 6</u>. З кулі вирізати прямокутний брус найбільшого об'єму.

Косина цього бруса буде поперечником, а тому:

$$(2r)^2=x^2+y^2+z^2$$

$$4r^2=x^2+y^2+z^2\ ;\quad z=\sqrt{4r^2-x^2-y^2}$$

$$V_{бруса}=xyz=xy\sqrt{4r^2-x^2-y^2}$$

Отже маємо функцію:

$$u=xy\sqrt{4r^2-x^2-y^2}$$

$$u'_x=y\sqrt{4r^2-x^2-y^2}-\frac{x^2y}{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}$$

$$u'_y=x\sqrt{4r^2-x^2-y^2}-\frac{xy^2}{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}$$

$$y\sqrt{4r^2-x^2-y^2}=\frac{x^2y}{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}\ ;\quad x\sqrt{4r^2-x^2-y^2}=\frac{xy^2}{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}$$

$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$; $x^2=y^2$; $x=y$ (брус від'ємних рубів немає)

$$y(4r^2-x^2-y^2)=x^2y \qquad (y\neq 0 \text{ - тому ж})$$

$$\begin{array}{l|l} 4r^2-x^2-y^2=x^2 & 4r^2-y^2=2x^2 \\ 4r^2-x^2-y^2=y^2 & 4r^2-x^2=2y^2 \end{array} ;\quad \begin{array}{l} y^2=4r^2-2x^2 \\ 4r^2-x^2=8r^2-4x^2 \end{array}$$

$3x^2=4r^2$; $x=\frac{2r}{\sqrt{3}}$; $y^2=4r^2-2\cdot\frac{4r^2}{3}$; $y^2=4r^2\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4r^2}{3}$

$y=\frac{2r}{\sqrt{3}}$; $\frac{4r^2}{3}+\frac{4r^2}{3}+z^2=4r^2$; $z^2=\frac{4}{3}r^2$; $z=\frac{2r}{\sqrt{3}}$

Отже $x=y=z$; куб.

$$u'_{xx}=-\frac{yx}{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}-\frac{2xy(4r^2-x^2-y^2)+x^3y}{(4r^2-x^2-y^2)\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}=$$

$$=-\frac{4r^2yx-\cancel{yx^3}-y^3x+8r^2xy-2x^3y-2xy^3+\cancel{x^3y}}{4r^2-x^2-y^2\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}=-\frac{12r^2xy-2x^3y-3xy^3}{4r^2-x^2-y^2\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}$$

$$A=-\frac{12r^2\cdot\frac{4}{3}r^2-2\cdot\frac{16r^4}{9}-3\frac{16r^4}{9}}{\left(4r^2-2\cdot\frac{4r^2}{3}\right)\sqrt{4r^2-2\cdot\frac{4r^2}{3}}}=-\frac{16r^4-\frac{32r^4}{3}-\frac{48r^4}{9}}{\frac{4}{3}r^2\sqrt{\frac{4}{3}r^2}}=-\frac{64r}{24\sqrt{\frac{1}{3}}}=-\frac{8r}{3\sqrt{\frac{1}{3}}}<0$$

maximum.

§ 22. Поширюючи правило находження maximum'у й minimum'у на функції від багатьох незалежників, напр.

$$u=f(x,y,z,u,t\ldots)$$

ми в той спосіб як і для двох незалежників (приймаючи всі прирощення $k, l, m, n, p\ldots$ за нулі, а одно, напр. $h\neq 0$) переконаємося, що конечною умовою того щоб $f(x,y,z\ldots)$ мала maximum або minimum є рівність з нулем $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial f}{\partial z}\ldots$ що загально висловиться в умові рівности (при всіх $x, y, z\ldots$ незалежних між собою)

з нулем першого цілого походу функції:

$$du = 0$$

Загалом розпізнати, чи буде при цій умові тахітит або тінітит в загальному вигляді трудно й приходиться пробувати в кожному окремому випадкові зокрема.

Але у випадку, коли при $du = 0$, цілий другий похід функції:

$$d^2u$$

заховує свій знак, визначення тахітит'а й тінітит'а легке. А саме:

За взором Тейльора маємо (досить 2^x членів)

$$\Delta = f(\alpha+h, \beta+k, \gamma+l \ldots) - f(\alpha, \beta, \gamma \ldots) = du + \frac{d^2u}{2!} + \ldots$$

Отже при двох членах:

$$\Delta = du + \frac{d^2u_\theta}{2!}$$

де u_θ вислід вставки у d^2u вартости: $(x+\theta h)$ і т.д. $0<\theta<1$, але $du=0$, то

$$\Delta = \frac{d^2u_\theta}{2!}$$

Отже, коли d^2u_θ при довільних $h, k, l \ldots$ заховує для всіх вартостей змінних знак, то

при $d^2u_\theta < 0$ – є тахітит

а при $d^2u_\theta > 0$ – є тінітит

У випадку, колиб d^2u зі зміною вартостей $h, k, l \ldots$ змінювалоб знак, то ні тахітит'а, ні тінітит'а немає.

До цього часу ми відшукуючи тахітит і тінітит, мали справу лише з функція-

ли від незалежних змінних, яких не підпорядковували ніякими умовами. Тому всі розглянені мах. і мін. мають назву безумовних

§ 23. Умовні максимум і мінімум.

Тепер розглянемо максимум і мінімум функцій від змінних, що зв'язані між собою певними умовами. Такі максимум і мінімум, що мають виповнюватися при певних обмеженнях, створених умовами, накладеними на змінні функції, звуться умовними максимумами й мінімумами функції.

Хай дано нам функцію:

$f(x_1, x_2, x_3 \dots)$ від n змінних і треба знайти максимум і мінімум цієї функції, коли ці змінні зв'язано умовами (такими рівняннями)

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) = 0 \\ &\varphi_2(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) = 0 \\ &\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots \\ &\varphi_k(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) = 0 \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

де $k < n$.

Очевидно, що розв'язуючи ці k рівнянь, ми виразимо k з цих n змінних через решту $n-k$ змінних. Коли б ми знайдені вартості вставили б у дану функцію, то одержали б нову функцію від $n-k$ незалежних змінних і задача наша обернулася б у задачу відшукання безумов-

них максимума й минимума, що ми вже
вміємо.

В де-яких випадках, цей спосіб розв'язання задачі можливий і легко виконується, але в загальному випадку він є надзвичайно складним, а тому Лагранж дав інший значно простіший (а іноді єдиний до виконання) спосіб.

Візьмімо цілий похід даної функції:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \qquad (\beta)$$

Ми вже бачили, що ті вартости змінних, що при них може бути максимум або мінімум функції мусять при всіх вартостях походів змінних (себто тотожньо) обертати в нуля цілий похід функції.

Отже, коли б ми після розв'язання рівнань і вставивши вартостей розв'язків у $f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ мали б що функцію від $(n-k)$ незалежних, то для існування максимума й минимума конечного була рівність:

$$df = 0$$

при всіх вартостях цих незалежних.

Далі беручи походи условних рівнань (α), маємо:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots \dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\
&\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots \dots \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} dx_n = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} dx_2 + \dots \dots \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} dx_n = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Йдучи за Лагранжем, будемо вилучати з

рівняння (β), походи згаданих к змінних, що ми вважаємо їх функціями решти, в такий спосіб: Помножимо всі рівняння (γ) на якісь довільні чинники $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ і додамо їх до рівняння (β), тоді матимемо:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}\right) dx_2 + \dots\dots\dots\dots +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\right) dx_n .$$

(бо ми до df додали вартости рівні з нулем.) Тепер припустім, що перші змінні $x_1, x_2 \dots x_k$ є ті, що ми вважаємо залежними від решти, [зогляду на рівняння (α)]. Тому їх походи $dx_1, dx_2 \dots dx_n$ є змінні величини.

Отже добіраємо вартости $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ так, щоб сочинники при $dx_1, dx_2 \dots dx_k$ були рівні з нулем, тоді лишиться рівність.

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+1}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k+1}} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+1}}\right) dx_{k+1} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+2}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+2}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k+2}} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+2}}\right) dx_{k+2} + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\right) dx_n$$

Це є похід функції від незалежних змінних, а ми знаємо, що для існування тахітит'а й тінітит'а конечним є рівність його, а себто й окремих сочинників, з нулем. Таким чином ми маємо n рівнянь (перші k сочинників походів

рівні з нулем через добір вартостей $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$, а решта на підставі останніх міркувань);
отже:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (\delta)$$

Таким чином маємо n одержаних рівнянь і k рівнань даних - разом $n+k$ рівнань; а змінних:

n змінних: $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$

і k змінних: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_k$

разом $n+k$ змінних. Очевидно, що ці рівняння дадуть нам змогу знайти ві вартості $x_1, x_2 \dots x_n$ при яких можуть бути або max., або min. Лишається лише дослідити, що саме?

Означимо $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ через u і складемо нову функцію:

$$V = u + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots \lambda_k \varphi_k$$

(де $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_k$ - є дані нам умовними рівняннями) Візьмімо окремі похідні цієї функції й маємо:

$$V'_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}$$

$$V_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$V_{x_n} = \frac{\partial u}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}$$

Ми бачимо, що прирівнюючи до нуля всі ці окремі похідні, ми одержимо рівняння (δ).

Тому спосіб Лагранжа зводиться до наступного:

Коли нам дано якусь функцію від n змінних і k рівнянь, що зв'язують ці змінні, то:

1) Множимо ліві частини знайдених нами рівнянь на довільні числа й додаємо їх до даної функції.

2) Беремо окремі похідні від нової, одержаної нами додаткової функції, й дорівнюємо їх до нуля.

3) З одержаних n рівнянь і даних k рівнянь складаємо систему, з якої визначаємо потрібні нам змінні, що можуть дати максимум або мінімум.

Дослідження, чи справді одержимо max. або min. - дуже й дуже складне в загальному випадку, а тому його опустимо. В окремих випадках будемо шукати найпростіших способів перекопатися в правдивості питання.

Приклад. Які з трикутників даного обводу мають найбільше поле?

Хай півобводу p, означимо боки через x, y, z, тоді як відомо:

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

але як ми бачимо існує умова:

$$x + y + z = 2p.$$

Очевидно, щоб S_Δ було максимум, треба, щоб було максимум:

$$U = (p-x)(p-y)(p-z)$$

Складаємо функцію V:

$$V = (p-x)(p-y)(p-z) + \lambda(x+y+z-2p)$$

mogi:

$$V_x = \lambda - (p-y)(p-z)$$

$$V_y = \lambda - (p-x)(p-z)$$

$$V_z = \lambda - (p-x)(p-y)$$

Отже маємо систему:

$$x + y + z = 2p$$

$$(p-y)(p-z) = \lambda$$

$$(p-x)(p-z) = \lambda$$

$$(p-x)(p-y) = \lambda$$

Перемножимо три останні рівняння:

$$(p-x)^2(p-y)^2(p-z)^2 = \lambda^3$$

$$(p-x)(p-y)(p-z) = \sqrt{\lambda^3} = \lambda\sqrt{\lambda}$$

Ділимо ці рівняння почерзі на останні три:

$$p-x = \sqrt{\lambda} \qquad x-y=0$$

$$p-y = \sqrt{\lambda} \qquad x-z=0$$

$$p-z = \sqrt{\lambda} \qquad y-z=0$$

Отже $x=y=z=\frac{2p}{3}$. Це є правильний трикутник.

Розділ II

Диференціяльна геометрія

В цьому розділі ми маємо митою пристосувати методи аналізи б-малих до дослідження властивостей геометричних образів. Ми вже вивчили основні властивости цих образів за допомогою аналітичної геометрії й тепер, грунтуючися на них зможимо перейти до більш складних випадків окремих образів, а також дослідити різні їх комбінації й системи. Очевидно, що розгляду нашому належатимуть лише ті геометричні образи, рівняння яких дають можливість пристосування до них диференціяльного числення, себто ці криві є тяглими в границях нашого дослідження й у більшости дають право вживання шерегу Тейльора (себто мають похідні навіть вищих порядків).

Першим нашим завданням буде вивчення плоских кривих. Як побачимо далі, про особливі властивости кожної точки такої кривої ми зможимо судити по характеру дотичної, поведенної через цю точку, а тому головним нашим завданням буде дослідження цих дотичних.

Аналітичне рівняння плоскої кривої.

Ми вже знаємо, що функція, що може для всіх загалом вартостей незалежника (крім, може бути,

де яких окремих, що звуться особливими), розгортуватися в шерег Тейльора, зветься аналітичною.

Із попередніх міркувань видно, що ми будемо мати діло лише з кривими аналітичними, що визначаються того ж імени функціями.

Звернемося до аналітичної геометрії, де ми студіювали рівняння:

1) простої:

$$y = mx + n$$
$$x\cos\varphi + y\cos(\omega - \varphi) = \delta$$
$$Ax + By + C = 0$$

або 2) кривої другого ступіня, загалом, вигляду:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

і 3) де-які криві вищих ступінів.

Всі ці рівняння в загальному вигляді можна виобразити так:

1) $f(x, y) = 0$ — (невизначено)

2) $y = f(x)$ — (визначено)

Очевидно, що кожна точка кривої, напр. M визначається певними вартостями значників: $x = x_0$, $y = y_0$. Кожна инша точка N буде визначена вже новими вартостями значників, а саме: $x = x_1$, $y = y_1$. Щоб мати визначення цілої кривої, яко певного геометричного осередку окремих її точок, нам треба буде установити

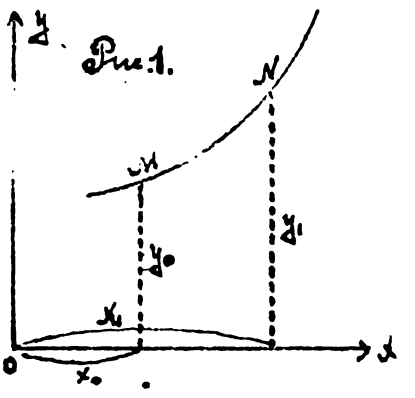


Рис. 1.

функціональну залежність між цими змінними, щоб ця залежність висловлювала ту спільну прикмету (або закон), що їй підлягають всі точки кривої без виключення.

Ця залежність і буде:

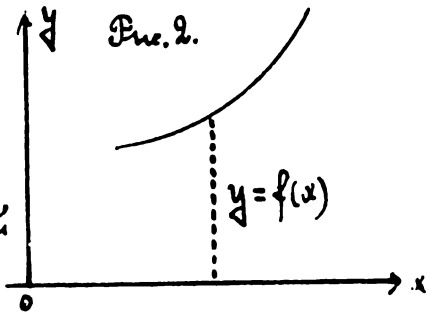
$$F(x, y) = 0 \qquad (1),$$

що устанавлює закон взаємозмінності між x і y — значеннями окремих точок кривої. Цей самий закон устанавлюється й рівнянням

$$y = f(x) \qquad (2)$$

де вартости рядної y підпорядковуються змінам вартостей відтинкової x.

В цьому разі крива лінія є геометричним осередком кінців рядних для всіх можливих вартостей відтинкової x.



Фиг. 2.

Очевидно, що рівняння (2) є висловленим рівнянням (1) як вислід визначення з нього вартости рядної y через x.

Крім наданого роду рівнянь, ми в аналітичній геометрії зустрічаємо ще й такі:

$$x = a(\theta - \sin\theta) \; ; \qquad y = a(1 - \cos\theta)$$

(рівняння циклоїди), де θ була загадана нами змінником. В цьому разі устанавлюється закон підпорядкування вартостей обох змінних значників окремих точок кривої якійсь незалежно-змінній третій величині, що має назву параметра або змінника.

Це підпорядкування й є тою причиною, що визначає криву як певний геометричний осередок. Загально виображаємо його так:

$$x = \varphi(t) \; ; \quad y = \psi(t) \quad \ldots (3)$$

Очевидно вилучивши з цих рівнань змінника t, ми перейдемо до одного з рівнань (1) або (2).

§2. Виведемо змінникові рівняння де-яких простіших геометричних образів:

I Проста

Візьмімо осі координат і просту, що переходить через задану точку $A(a,b)$. Означимо кути, що творить проста з осями x і y через α і β, а $\cos\alpha = \lambda$ і $\cos\beta = \mu$. Ми знаємо, що лет відтинку AM на вісь x-ів буде:

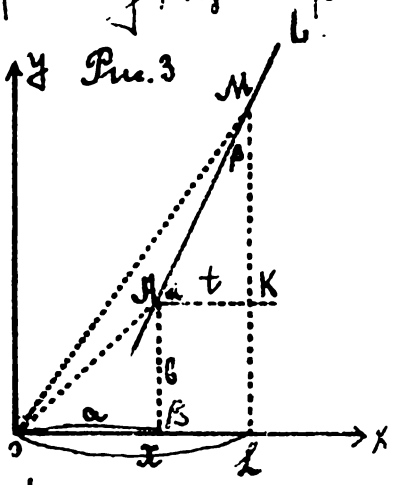


Рис. 3

$$AM_x = AK = x - a = t\cos\alpha = \lambda t,$$

а лет цього ж відтинку AM на вісь y-ів буде:

$$AM_y = KM = y - b = t\cos\beta = \mu t$$

Таким чином ми можемо за рівняння простої взяти:

$$x = a + \lambda t$$
$$y = b + \mu t$$

це є змінникові рівняння простої. А виключаючи змінника t ми одержимо:

$$(t=)\ \frac{x-a}{\lambda} = \frac{y-b}{\mu}$$

рівняння прямої, що проходить через дану точку, а саме:

$$\mu(x-a) - \lambda(y-b) = 0$$

або, помноживши на спільника пропорційності κ і беручи $\kappa\mu = A$ і $\kappa\lambda = B$, матимемо відоме рівняння:

$$A(x-a) + B(y-b) = 0$$

II Змінникове рівняння кола.

Візьмімо початок вісей в центрі кола й точку $M(x,y)$ на обводі його. Поведемо луч r в цю точку й який кут, що творить цей луч з віссю x-ів буде θ. Тоді з тр-ка OMK маємо:

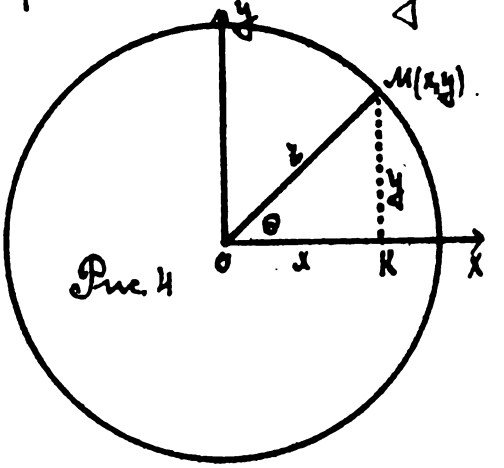


Рис. 4

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

Це й є змінникові рівняння кола, бо виключаючи з них змінника θ (підносячи до квадрату й додаваючи), ми матимемо відоме рівняння кола:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

III Змінникове рівняння еліпси.

Очертімо навколо початку вісей два концентричні кола лучів a і b. На більшому колі візьмімо точку K й поведемо луч $OK = a$, тоді $OZ = b$. З точок K і Z спустимо на вісь x-ів прямі

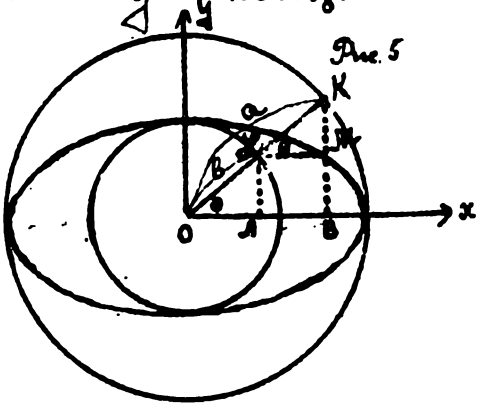


Рис. 5

і через точку L поведемо $LM \parallel$ вісі [illegible] зна-
чимо, що точка M перетина пряма KB і LM
буде наближати до еліпси, що має осі $2a$ і $2b$
(див. будування еліпси). Означимо змінні точ-
ки M через: $x = OB$ і $y = BM = AL$ і обчислимо їх.
З $\triangle OBL$ маємо: $OB = x = a\cos\theta$, а з $\triangle OLA$ маємо $AL = y = b\sin\theta$. Ці дві залежності x і y (змінних до-
вільної точки еліпси) від одного й того самого
змінника θ і є змінниковими рівняннями
еліпси:

$$x = a\cos\theta$$

$$y = b\sin\theta$$

Справді: $\sin\theta = \frac{y}{b}$, $\cos\theta = \frac{x}{a}$. Піднесемо до квадрату
й додамо рівності:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

IV Змінникове рівняння гіперболи.

Із курсу аналітичної геометрії знаємо, що ко-
ли від початку координат відкласти відтинки $OA = a$
і $OB = b$ поставити до осі x-ів
в цих точках прямі, повес-
ти довільний промінь OK
що відтинає його OD до пе-
ретину з першою прямою
(в точці A) буде одного з
відтинкових точок гіперболи, а відтинок дру-
гого прямої BC утворений тим самим променем
буде рядною тієї ж точки, що має відтинкову OD (рис. 6)

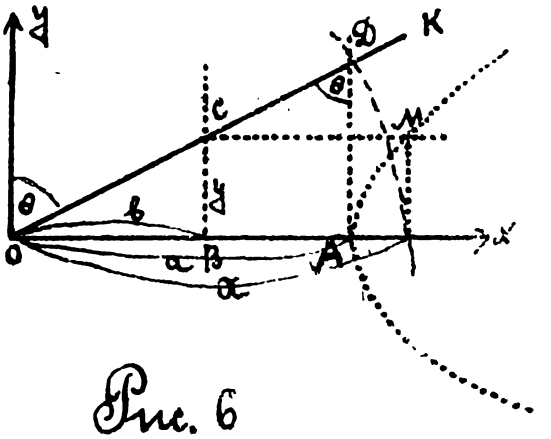


Рис. 6

Означимо кут відхилення променя ОА від осі y-ків через θ, тоді $x = OD = \frac{OA}{\operatorname{tg} ODA} = \frac{a}{\operatorname{tg}\theta}$. А з Δ ОВС маємо: $y = BC = OB \operatorname{ctg} OCB = b \operatorname{ctg}\theta$. Таким чином змінникові рівняння гіперболи є:

$$x = \frac{a}{\operatorname{tg}\theta}$$

$$y = b \operatorname{ctg}\theta$$

§3. Дотична до плоскої кривої.

Ми вже зазначили, що для дослідження властивостей окремих точок кривої нам необхідно довідатися про характер дотичної до кривої, через цю точку поведеної. Тому в першу чергу перейдемо до складання загального рівняння дотичної до кривої в поданій її точці.

Зогляду на те, що ми розглядатимемо не певну означену точку кривої (x_0, y_0), а кожну точку в цій кривій, то замість її будемо означати x, y. Щоб відрізняти бігучі змінні рівняння ми їх будемо означати через заставні літери X, Y.

Отже хай в прямокутній системі координат дана крива виражається рівнанням:

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots (a)$$

Візьмім на цій кривій точку $M(x, y)$ (рис. 7) і другу близьку до неї точку $M_1(x_1, y_1)$ де $x_1 = x + \Delta x$ і $y_1 = y + \Delta y$. Тоді рівняння простої (в даному разі січної), що перейде через ці точки M і M_1 буде:

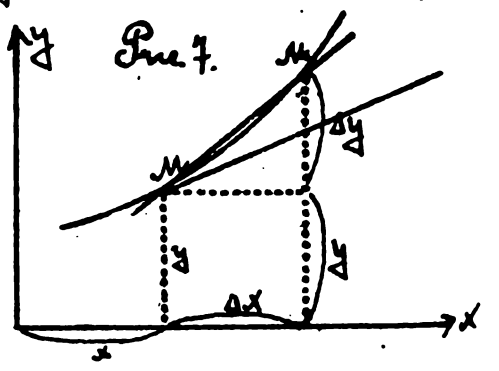


Рис. 7.

$$y - y = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}(x - x)$$

або:

$$y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x)$$

Коли наближуватимемо точку M_1 до M до їх злиття, то Δx і Δy прямуватимуть до нуля і в момент злиття M і M_1, себто, коли дана січна стане дотичною до кривої в точці M, ми матимемо:

$$y - y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x)$$

або:

$$y - y = y'(x - x) \quad \ldots\ldots (4)$$

або:

$$y - y = f'(x)(x - x)$$

де із розуміння про похідну ми вже знаємо, що $y' = \operatorname{tg}\alpha$ - кутовому коефіцієнту самої дотичної. З рівняння (4) маємо:

$$y - y = \frac{dy}{dx}(x - x)$$

або:

$$\frac{x - x}{dx} = \frac{y - y}{dy} \quad \ldots\ldots (5)$$

Коли б крива визначалася б залежностями рівняннями: $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ то ми мали б

$$dx = \varphi'(t)\,dt \quad \text{і} \quad dy = \psi'(t)\,dt$$

А тому рівняння (5), після вставки знайдених величин dx і dy, та скорочення на dt, мало б вигляд:

$$\frac{x - x}{\varphi'(t)} = \frac{y - y}{\psi'(t)}$$

Нарешті, коли рівняння кривої є в неявній формі:

$$F(x,y)=0$$

то за правилом диференціювання невиявних функцій маємо:

$$y'=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

А тому вставивши нові вартості y' в рівняння (4), після зведення до спільного знаменателя, дає:

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}=0\ldots..(7)$$

Лишається ще нам з'ясувати положення сталої дотичної на площі, а це, як нам відомо з аналітичної геометрії, виявляється кутами, що творить ця дотична з осями координат. До обчислення цих кутів і перейдемо:

§4. Кути спаду дотичної до кривої на осі координат.

Ми вже зазначили, що $y'=tg\alpha$, а тому:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{dy}{dx}$$

а звідси:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{dy^2}{dx^2}$$

Складаючи попередню пропорцію й маємо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{dy^2}{dx^2+dy^2}$$

або:

$$\sin^2\alpha=\frac{dy^2}{dx^2+dy^2}$$

Таким чином:

$$\sin\alpha=\frac{dy}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

Але $\angle\alpha + \angle\beta = \frac{\pi}{2}$ (див. рис. 8), а тому:

$$\cos\beta = \pm \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

Аналогічно:

$$\cos\alpha = \pm \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

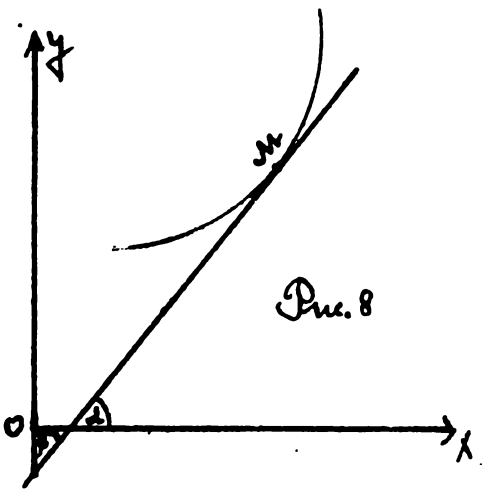


Рис. 8

З попередніх курсів ми знаємо, що:

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

а тому:

$$\lambda = \cos\alpha = \pm \frac{dx}{ds};\ \mu = \cos\beta = \pm \frac{dy}{ds} \quad \ldots\ldots (8)$$

Умовимося брати знак + коли дотична спрямована в бік зростання дуги й навпаки.

Очевидно, що коли рівняння кривої має вигляд:

$$x = \varphi(t)\ ;\quad y = \psi(t),$$

то $dx = \varphi'(t)\,dt$; $dy = \psi'(t)\,dt$ і

$$ds = \pm dt\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2},$$

а тому (після скорочення на dt):

$$\lambda = \cos\alpha = \pm \frac{\varphi'(t)}{\frac{ds}{dt}};\ \mu = \cos\beta = \pm \frac{\psi'(t)}{\frac{ds}{dt}}$$

або вживаючи символів: $\frac{dx}{dt} = x'$; $\frac{dy}{dt} = y'$; $\frac{ds}{dt} = s'$

маємо:

$$\lambda = \cos\alpha = \pm \frac{x'}{s'};\ \mu = \cos\beta = \pm \frac{y'}{s'} \quad \ldots\ldots (9)$$

Розглянемо тепер кілька прикладів:

1) Написати рівняння дотичної до параболи $y^2 = 2px$.

Рівняння дотичної є: $y - y_1 = y'(x - x_1)$.

Але $2yy' = 2p$; $yy' = p$; $y' = \frac{p}{y}$ тому:

$$y - y_1 = \frac{p}{y}(x - x_1)$$

або:

$$y^2 - yy' = px - px_1$$

тому:

$$yy' = p(x + x_1)$$

(відоме з аналітичної геометрії рівняння)

2) Написати рівняння дотичної до еліпса:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$$

$$(x - x_1)\frac{2x}{a^2} + (y - y_1)\frac{2y}{b^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 0; \quad \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

3) Написати рівняння дотичної до кривої

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + D; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2By + E$$

Отже:

$$(x - x_1)(2Ax + D) + (y - y_1)(2By + E) = 0$$

або:

$$2Ax^2 + Dx - 2Axx_1 - Dx_1 + 2By^2 + Ey - 2Byy_1 - Ey_1 = 0$$

або:

$$Ax^2 + \frac{D}{2}x - Axx_1 - \frac{D}{2}x_1 + By^2 + \frac{E}{2}y - Byy_1 - \frac{E}{2}y_1 = 0$$

$$Axx_1 + Byy_1 + \frac{D}{2}x_1 + \frac{E}{2}y_1 = Ax^2 + By^2 + \frac{D}{2}x + \frac{E}{2}y$$

Додамо до обох частин рівняння: $\frac{D}{2}x + \frac{E}{2}y + F$ і після упорядкування маємо:

$$Axx_1 + Byy_1 + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) - F = 0$$

4) Написати рівняння дотичної до циклоїди.

Рівняння її:

$$x = a(t - \sin t);\quad y = a(1 - \cos t) \quad \ldots\ldots (1)$$

$dx = a(1-\cos t)\,dt = 2a\sin^2\frac{t}{2}\,dt;\quad dy = a\sin t\,dt$

А тому рівняння дотичної до циклоїди матиме вигляд (див. рівн. 4)

$$y - y_1 = \frac{a\sin t\,dt}{2a\sin^2\frac{t}{2}dt}(x - x_1)$$

або:

$$y - y_1 = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}(x - x_1)$$

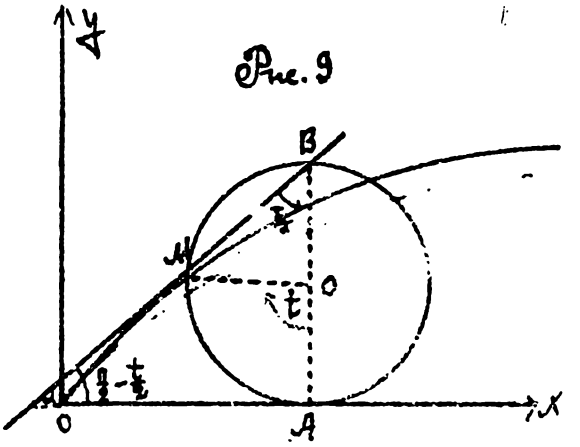
або:

$$y - y_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)(x - x_1) \quad \ldots\ldots (\beta)$$

Очевидно, що кут спаду дотичної навіть x-ів є $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$.

Візьмімо на циклоїді точку $M(x_1, y_1)$ і твірне коло що переходить через точку M. Поведемо поперечник кола $AB \perp$ до вісі x-ів і отримаємо точку M_1 і B. Маємо ΔOBM, рівнораменний, в якому кути $\angle B$ і $\angle M_1$ є рівні половині зовнішнього Δ-ові кутут t. Отже $\angle MBO = \frac{t}{2}$ а з Δ-ка ABK маємо $\angle\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$. Отже кут спаду простої MB буде $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ але як свідчить рівняння (β), це є кут спаду дотичної, що проходить через точку M, а тому MB є рештою дотичною самої циклоїди.

Рис. 9



Ці міркування дають спосіб збудування дотичної до циклоїди, а саме: через точку дотику ведемо твірне коло й проста MB, що отримуємо

точку дотику з верхнім кінцем основного поперечника кола й буде дотичною.

§5. Нормаля (прямова)

Ми знаємо, що прямовою зветься прям до дотичної, поведений через точку дотику. З цього видно, що для кутових змінників обох простих мусить існувать умова їх прямовости, а саме

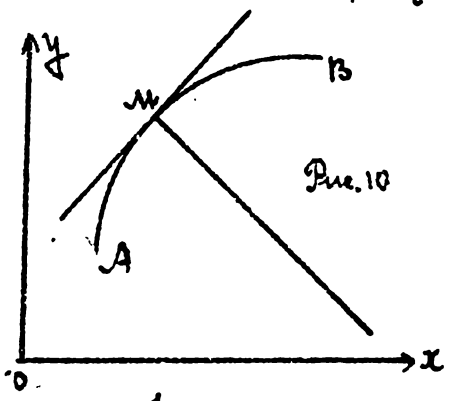


Рис. 10

$m_1 = -\frac{1}{m}$ де m_1 є кутовий змінник нормалі, а m - кутовий змінник дотичної. Ми довели, що кутовий змінник дотичної $\frac{dy}{dx}$, а тому кутовий змінник прямової має вигляд:

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}$$

Отже I) коли крива визначається рівнянням $y = f(x)$, то рівняння прямової буде:

$$1)\ Y - y = -\frac{1}{f'(x)}(X - x)$$

або:

$$(X + x) + f'(x)(Y - y) = 0 \ldots\ldots (10)$$

$$2)\ Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

або:

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0 \ldots\ldots (11)$$

II коли крива визначається рівнянням $F(x, y) = 0$ то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

а тому:

$$y - y = + \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} (x - x)$$

або:

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad \ldots\ldots (12)$$

і III коли крива визначається параметричними рівняннями:

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

то: $dx = \varphi'(t)\,dt$; $dy = \psi'(t)\,dt$, а через те рівняння (11) після скорочення на dt дає:

$$(X - x)\varphi'(t) + (Y - y)\psi'(t) = 0 \quad \ldots\ldots (13)$$

§6. Кути прямової з осями.

Означимо кути спаду дотичної АМ на вісь x-ів через α, а на вісь y-кіл - через β. Кути ж спаду прямової на тупі вісь x-ів через τ, а на вісь y-ів через ν. Тоді з Δ АМВ маємо (рис 11):

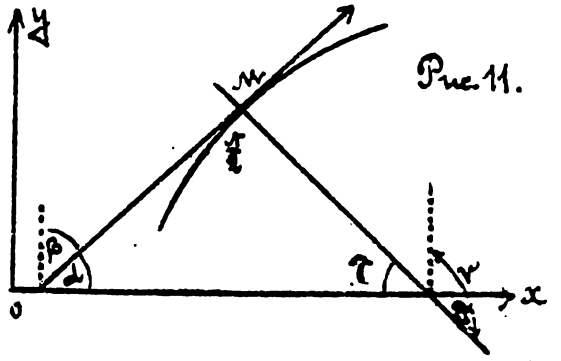


Рис. 11.

$$\tau = \beta$$

(як прямово-рачені кути)

а кут $\nu = \frac{\pi}{2} + \tau = \pi - \alpha$ (з Δ АМВ)

А тому:

$$\cos\tau = \cos\beta$$

а $\cos\nu = -\cos\alpha$; але $\cos\alpha = \pm\frac{dx}{ds}$; $\cos\beta = \pm\frac{dy}{ds}$, тому:

$$\lambda_n = \cos\tau = \pm\frac{dy}{ds}; \quad \mu_n = \cos\nu = \mp\frac{dx}{ds}$$

В даному разі знак $\pm$ взято щодо напрямку прямової, так: + беруть тоді, коли напрям прямової одержується поворотом додатнього напрямку дотичної на 90° проти стрілки годинника.

Коли ж крива визначається рівнянням:

$$F(x,y)=0$$

то з рівности:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \quad (\text{див. рівн } 12)$$

Як вислід попередніх перетворень маємо:

$$\lambda_n = \operatorname{cs}\tau = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\Delta F} = \frac{1}{\Delta F}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}$$

і аналогічно:

$$\mu_n = \operatorname{cs}\nu = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\Delta F} = \frac{1}{\Delta F}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}$$

де вираз:

$$\Delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} \quad \ldots\ldots (13)$$

має назву <u>диференціяльного змінника першого порядку.</u>

Як приклад напишемо рівняння прямової до циклоїди.

Рівняння самої кривої буде:

$$x = a(t-\operatorname{sn}t) \qquad y = a(1-\operatorname{cs}t)$$

а тому:

$$dx = a(1-\operatorname{cs}t)\,dt\,; \qquad dy = a\operatorname{sn}t\,dt$$

Таким чином, вставляючи ці рівности в рівняння (11) і скорочуючи члени на a і dt, маємо:

$$(X-x)(1-\operatorname{cs}t)+(Y-y)\operatorname{sn}t = 0$$

де t є центровий кут творчого кола AOM, що відповідає даній точці дотику. Вставляючи в наше рівнян-

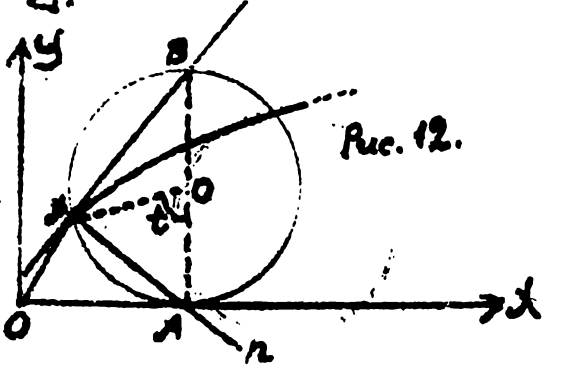


Рис. 12.

на вартості x і y матимемо:

$$[x-a(t-\sin t)](1-\cos t)+[y-a(1-\cos t)]\sin t=0,$$ або:

$$(x-at)(1-\cos t)+a\sin t(1-\cos t)+y\sin t-a\sin t(1-\cos t)=0,$$

або:

$$(x-at)\sin\frac{t}{2}+y\cos\frac{t}{2}=0.$$

Щоб збудувати прямову до циклоїди, ми будемо шукати точку перехрещення її з віссю x-ів і для цього вважатимемо в останньому рівнянні $y=0$; тоді:

$$(x-at)\sin\frac{t}{2}=0, \text{ або } x=at$$

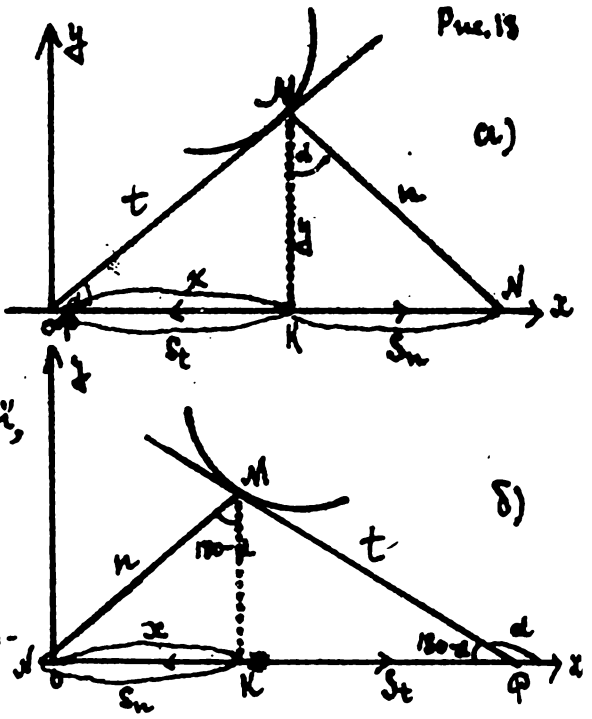
Але, з властивости циклоїди: $OA=\smile AM=at$, а тому прямова має проходити через точку A дотику творного кола до осі x-ів. Отже спосіб будувати прямової до циклоїди ясний: Для цього досить сполучити просту точку дотику з нижнім кінцем головного поперечника творного кола.

Це твердження цілком оправдується геометрично, бо коли, як доведено, дотична до циклоїди є проста (тятива), що проходить через точку дотику й верхній кінець головного поперечника творного кола циклоїди, то прямова мусить проходити через нижній кінець того ж поперечника, бо кут BMA (рис 12) є прямий і обводовий для кола (бо рахуємо MB є тятивою кола) а тому він спирається на поперечника, що й підтверджує наші доводи.

§7. Обчислення величин дотичностей кривої.

Ми знаємо, що відтинки KP і KN (рис 13) звуть-

ся відповідно піддотичного й підпрямового. Їх напрям вважається від основи метового пряму до перехрестя дотичної, або прямової, з віссю x-ів. Коли напрям чи піддотичної, чи підпрямової однаковий з напрямом вісі x-ів, то ми беремо їх вартости за додатні й навпаки.



Розглянемо Δ PMK (рис. а). З нього маємо:

$$-S_t = PK = y\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

(тут знак — бо напрям піддотичної противний напряму вісі x-ів). Звідци:

$$S_t = -\frac{y}{\mathrm{tg}\,\alpha} = -\frac{y}{y'} \text{ або } S_t = -\frac{y\,dx}{dy} \;\ldots\ldots\; (14)$$

[Таксамо з Δ KMP (рис. б) маємо: $S_t = y\,\mathrm{ctg}(180-\alpha) = -y\,\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{y}{y'} = -\frac{y\,dx}{dy}$].

Звідци, за теоремою Пітагора, маємо:

$$t^2 = y^2 + S_t^2 = y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2} = \frac{y^2}{dy^2}(dx^2 + dy^2)$$

або:

$$t = \frac{y}{dy}\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{y\,ds}{dy} \;\ldots\ldots\; (15)$$

Далі з Δ-ка MKN (рис. а) маємо:

$$S_n = y\,\mathrm{tg}\,\alpha = yy' \;\ldots\ldots\; (16)$$

або:

$$S_n = \frac{y\,dy}{dx} \;\ldots\ldots\; (16^a)$$

[а з Δ MKN (рис. б) маємо: $-S_n = NK = y\,\mathrm{tg}(180-\alpha) = -y\,\mathrm{tg}\,\alpha$, або $S_n = yy'$].

і нарешті, за теоремою Піфагора, одержимо:

$$n^2 = S_n^2 + y^2 = y^2 y'^2 + y^2 = y^2\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right); \quad n^2 = \frac{y^2}{dx^2}(dx^2 + dy^2)$$

$$n = \frac{y\,ds}{dx} \quad \ldots\ldots (17)$$

Приклади.

I. Обчислити величину субнормалей еліпса:

$$x = a\cos\theta$$

$$y = b\sin\theta$$

Маємо:

$$dx = a\sin\theta\,d\theta; \quad dy = -b\cos\theta\,d\theta$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

Маємо 1). $$t = \frac{y\,ds}{dy} = \frac{b\sin\theta\,d\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}{b\cos\theta\,d\theta} = \operatorname{tg}\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

[Виключаємо змінний θ:

$$\sin\theta = \frac{y}{b}; \quad \cos\theta = \frac{x}{a}; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{ay}{bx}$$

$$t = \frac{ay}{bx}\sqrt{a^2\frac{y^2}{b^2} + b^2\frac{x^2}{a^2}} = \frac{y}{b^2x}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$$

(де x, y змінні точки дотику). Це є відомий з аналітичної геометрії взір.].

2) $$S_t = -\frac{y\,dt}{dy} = \frac{b\sin\theta\cdot a\sin\theta\,d\theta}{b\cos\theta\,d\theta} = \frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta}$$ [Виключимо θ:

$$S_t = \frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{a(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta} = \frac{a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}{\frac{x}{a}} = \frac{a^2-x^2}{x}\,]$$

Примітка. Ми бачимо, що величина піддотичної не залежить від величини малої осі еліпса, а тому можна твердити що: коли на спільній великій осі збудувати декілька еліпсів і через яку-небудь точку цієї осі провести

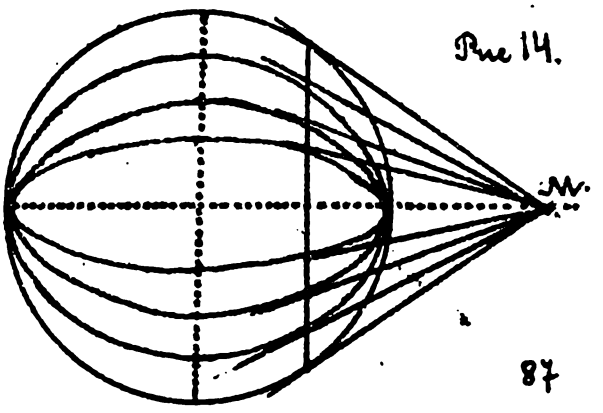


Рис 14.

прямову до неї тятиву, то дотичні поведені до всіх цих еліпс через перехрестя їх з даною тятивою збігаються в одній точці, що лежить на продовженню головної осі.

Коли ця тятиву наближати до малої осі, то точка збігу дотичних простує на безмежність і в лінійному положенню (коли тятива простує до малої осі) всі ці дотичні є рівнобіжні. Навпаки, коли тятива віддаляється від малої осі, тоді точка збігу дотичних наближається до еліпс і в лінійному положенню, коли ця тятива переходить через вершок еліпс дотичного їй, то й точка збігу дотичних зливається зі спільним вершком еліпс, а всі дотичні зливаються з цією тятивою творять одну спільну дотичну до всіх еліпс.

Очевидно, що в кожні еліпс збудовані на даній великій осі буде й приналежне коло цих еліпс і дотична поведена до цього кола через перехрестя його з даною тятивою також перейде через ту ж точку збігу дотичних.

Для власності дає змогу нам збудувати дотичну до еліпси в даній точці її обводу. Припустім, що нам дається еліпса AB (рис. 15) і точка на ній M через яку треба повести дотичну до еліпси. Будуємо приналежне коло й з точки M спускаємо пряму MN на головну вісь

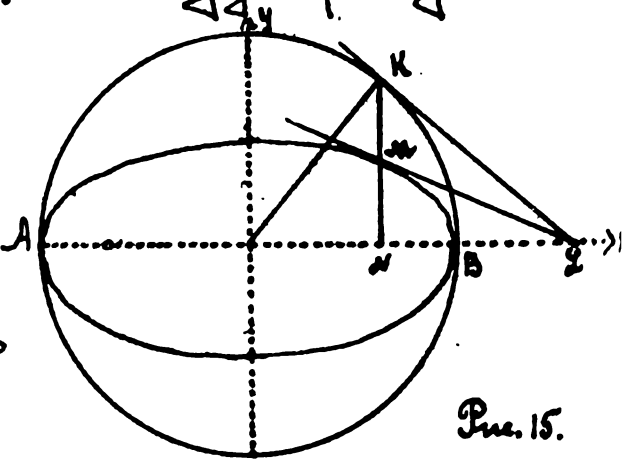


Рис. 15.

еліпси. Продовжуємо цей прям до перехрестя його з прикметним колом в точці K. Ми тільки-що довели, що дотичні поведені до кола в точці K і до еліпси в точці M будуть збігатися в одній точці L, а тому будуємо в точці K дотичну до кола й точку L перехрестя її з продовженням головної вісі еліпси сполучаємо з точкою M. Це й буде потрібна дотична

$$3)\quad n=\frac{y\,ds}{dx}=\frac{b\sin\theta\,d\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}{-a\sin\theta\,d\theta}=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

Знак „–" тут є через те, що за додатно прямову ми вважаємо зовнішню, тоді як в даному разі будемо мати завжди внутрішню прямову. Тому за міру відтинку беремо лише абсолютну величину:

$$n=\frac{b}{a}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

[після перетворення до рівняння вигляду $f(x,y)=0$ матимемо:

$$n=\frac{1}{a^2}\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}$$

що є знайомим для нас взором.]

$$4)\quad S_n=\frac{y\,dy}{dx}=\frac{b\sin\theta\cdot b\cos\theta\,d\theta}{-a\sin\theta\,d\theta}=-\frac{b^2}{a}\cos\theta$$

Тут знак „–" цілком зрозумілий, бо коли піддотична є додатнього, то підпрямова мусить бути відємною (по напряму) тому для обчислення її величини скористуємося абсолютною вартістю:

$$S_n=\frac{b^2}{a^2}\cos\theta$$

[перетворюємо: $\cos\theta=\frac{x}{a}$; тому $S_n=\frac{b^2x}{a^2}$].

II приклад. Знайти величини дотичности до параболи: $y^2=2px$.

Звідси: $2yy' = 2p$; $y' = \frac{p}{y}$. тому:

$$t = \frac{y\,ds}{dy} = y\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy} = y\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1} = y\sqrt{\frac{1}{y'^2}+1} = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} =$$

$$= \frac{y^2}{p}\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}} = \frac{y}{p}\sqrt{y^2+p^2}$$

або:
$$t = \sqrt{\frac{y^4}{p^2}+y^2}$$

але $y^2 = 2px$; $y^4 = 4p^2x^2$; тому:

$$t = \sqrt{4x^2+y^2}$$

2) $S_t = -\frac{y}{y'} = -\frac{y^2}{p}$ або $y^2 = 2px$, тому: $S_t = -2x$

(„–" відповідає напрямку піддотичної противному до напрямку осі x-ів.)

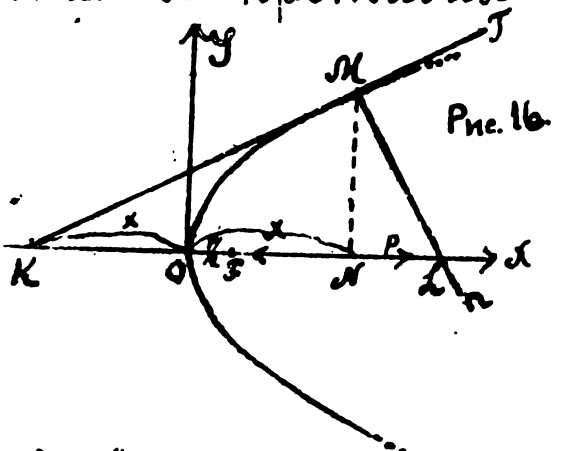


Рис. 16.

3) $n = \frac{y\,ds}{dx} = y\sqrt{1+y'^2} = y\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}} =$

$$= \sqrt{p^2+y^2}$$

4) $S_n = yy' = y\frac{p}{y} = p$ (const).

Як ми вже знаємо, це ось лива властивість параболи, що для кожної точки її обводу підпрямова її є рівна з півзмінником p.

Доведемо тепер, що така властивість належить лише параболі, а ніякій іншій кривій.

Коли маємо що:

$$yy' = a \text{ (const)}$$

то звідси:

$$y\,dy = a\,dx$$

Інтегруємо:

$$\int y\,dy = c\int dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = ax + c \quad \text{або} \quad y^2 = 2ax + C$$

$$y^2 = 2a\left(x + \frac{c}{a}\right)$$

Це є парабола зі зліпником $2p = 2a$ й вершиною вершина $(-\frac{c}{a}, 0)$. Даючи довільному числу c всяких від нуля до $\pm\infty$, ми одержимо через параболи що мають віссю вісь x-ів. В окремому випадку, коли $c=0$, матимемо параболу з вершиною в початку координат.

III Приклад. Обчислити величини досліджуючи: $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1-\cos\theta)$

Диференціюємо:

$$dx = a(1-\cos\theta)\,d\theta; \quad dy = a\sin\theta\,d\theta$$

Тому: $ds = a\,d\theta\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = a\,d\theta\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$$ds = a\,d\theta\sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

Отже:

1) $t = \frac{y\,ds}{dy} = \frac{a(1-\cos\theta)}{\cos\frac{\theta}{2}} = 2a\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

2) $\mathcal{J}_t = -\frac{y}{y'} = -a\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta} = -2a\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}$

3) $n = \frac{y\,ds}{dx} = \frac{a(1-\cos\theta)\,2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta}{a(1-\cos\theta)\,d\theta} = 2a\sin\frac{\theta}{2}$

4) $\mathcal{J}_n = \frac{y\,dy}{dx} = \frac{a(1-\cos\theta)\cdot a\sin\theta\,d\theta}{a(1-\cos\theta)\,d\theta} = a\sin\theta$

§8. Крива в бінуп овних координатах.

З аналітичної геометрії ми знаємо, що кожна крива в бінуповій координатах визначається певною залежністю між величиною луча-вектора ρ й величиною бінупового кута. Таким типом в загальному випадку рівняння такої кривої буде:

1) у явній формі: $\rho = f(\theta)$

або 2) в неявній формі: $F(\rho, \theta) = 0$

і нарешті 3) в зліпниковій формі: $\rho = \varphi(t)$; $\theta = \psi(t)$

Всі ці рівняння легко перетворити одно в друге.

Візьмім якусь криву L і зорієнтуємо її, щодо бігунових координат з віссю OX і бігуном O. Хай луч-вектор її буде ρ а бігуновий кут θ. Таким чином рівняння її можна буде написати:

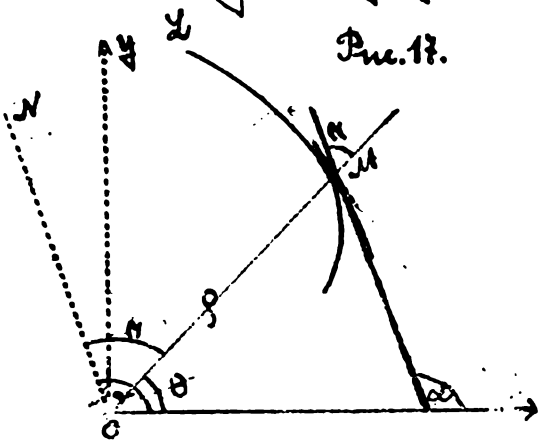


Рис. 17.

$$\rho = f(\theta) \quad \ldots\ldots (a)$$

Поведемо через яку будь точку $M(x, y)$ кривої дотичну до неї MK (рис 17.)

Очевидно, що коли нам відомо напрям луча-вектора, що переходить точку M, то легко установити й напрям дотичної MK. Для цього лише треба знайти кут-нахилу цієї дотичної до луча вектора ρ. Цей <u>дотиковий кут</u> означимо через μ й обчислимо його. Повівши через сгуп O просту ON рівнобіжну до дотичної ми одержимо кут MON рівний куту μ. Коли кут спаду дотичної означимо через α, то кут:

$$\mu = \alpha - \theta$$

А звідци:

$$tg\mu = tg(\alpha - \theta) = \frac{tg\alpha - tg\theta}{1 + tg\alpha\, tg\theta} \quad \ldots\ldots (\delta)$$

Лишається лише обчислити $tg\alpha$ через координати ρ і φ. Кут α є кут спаду дотичної (на вісь x-ів) а тому в декартових координатах $tg\alpha = y' = \frac{dy}{dx}$

Тому:

$$tg\varkappa = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx}{\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy}$$

Але взори переходу від прямокутних до бігусових координат:

$$x = \rho\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta$$

А звідси:

$$dy = \sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\varphi$$
$$dx = \cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\varphi$$

Множимо перше рівняння на $\cos\theta$, а друге на $\sin\theta$ й віднімаємо одне від одного. Тоді маємо:

$$\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta = \rho\, d\theta$$

Множимо, навпаки, перше рівняння на $\sin\theta$, а друге на $\cos\theta$ й додавши одне до другого одержимо:

$$\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\rho = d\rho$$

Таким чином:

$$tg\varkappa = \frac{\rho\, d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{\rho'} \quad \ldots\ldots (18)$$

§9. Величини дотичності кривої у бігусових координатах.

Визначення.

I. Вісь метів.

Віссю метів кривої $\rho = f(\theta)$ в даній точці зветься пряма, проведена через бігус паралельно до кута вектора точки, що досліджується.

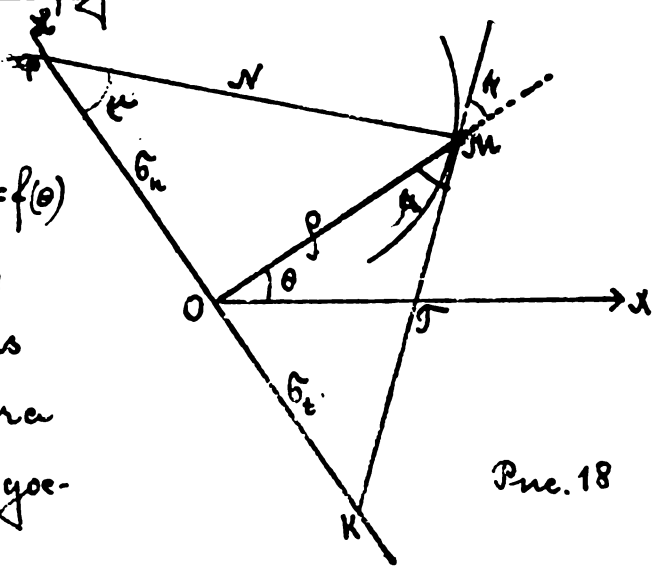


Рис. 18

II Величини дотичності в бігусових координатах

1) Відтинком дотичної й прямової звуться відтинки згаданих простих від точки дотику до зустрічі їх з віссю метів. [Рис. 18 - відтинок дотичної МК; прямової - МР.]

2) Піддотичною й підпрямовою звуться відтинки осі метів від бігуна до зустрічі з відповідною простою [рис. 18: піддотична ОК, а підпрямова ОР.]

<u>Обчислення.</u> З Δ-ка МОК маємо:

1) $KM = T = \frac{\rho}{\cos\alpha} = \rho \sec\alpha = \rho = \sqrt{1+tg^2\alpha}$

але $tg\alpha = \frac{\rho}{\rho'}$, тому <u>відтинок дотичної</u> буде:

$$T = \frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2+\rho'^2} \quad \ldots\ldots (19)$$

2) З того ж Δ-ка <u>відтинок піддотичної</u>

$$T_t = \rho\, tg\alpha = \frac{\rho^2}{\rho'} \quad \ldots\ldots (20)$$

3) Відтинок прямової: Δ-ка МОР маємо:

$$N = \frac{\rho}{\sin\alpha} = \rho \operatorname{cosec}\alpha = \rho\sqrt{1+ctg^2\alpha}$$

або

$$N = \rho\sqrt{1+\frac{\rho'^2}{\rho^2}} = \sqrt{\rho^2+\rho'^2} \quad \ldots\ldots (21)$$

Підпрямова: з того ж Δ-а маємо:

4) $$b_n = \rho\, ctg\alpha = \rho' \quad \ldots\ldots (22)$$

Дамо цим величинам ще инші вирази.

Диференціял дуги:

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

але $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$, де $\rho = f(\theta)$

Тому:

$$dx = \cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta$$
$$dy = \sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta$$

А звідци:

$$dx^2+dy^2 = (\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\rho^2 + \rho^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

або:

$$dx^2+dy^2 = d\rho^2+\rho^2 d\theta^2 = d\theta^2(\rho'^2+\rho^2)$$

Таким чином:

$$ds = d\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}$$

Вставляючи цю вартість у взори (19) і (21) маємо:

$$T=\frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \frac{\rho\, ds}{\rho' d\theta} = \frac{\rho\, ds}{d\rho} \quad \text{----} (23$$

$$N=\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{d\rho}{d\rho} = \frac{\rho' ds}{d\rho} \quad (24)$$

§10. Цисоїда Діокля.

Візьмім в колі луча ч поперечник і через один з його кінців B поведемо дотичну, а другий його кінець A візьмемо за бігун промінів, що перетинають коло. Кожний з цих промінів зустріне в якійсь точці обвід кола, а далі своїм продовженням і згадану дотичну BK.

Коли віддалення від точки зустрічі проміня з колом до зустрічі з цією дотичною будемо відкладати на тому ж самому промінi від бігуна A, то геометричний осередок кінців цих відтинків є кривою, що зветься цисоїдою Діокля.

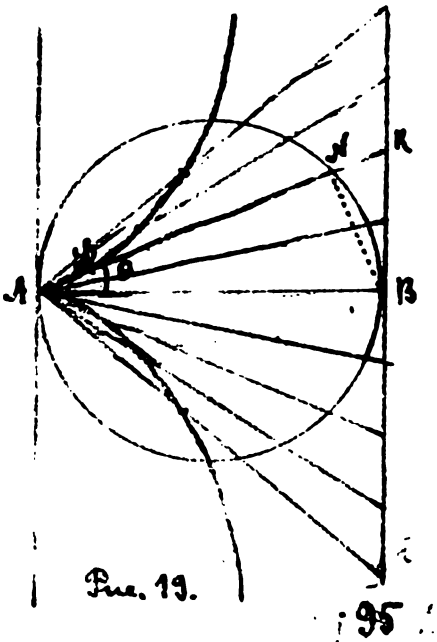


Рис. 19.

Означимо кут між якимнебудь промінем і основним поперечником AB через θ, напр. ∠KAB = θ й візьмім за бігунову вісь сам поперечник AB

а точку A за бігун. Очевидно що для даного проміня AK луч вектор $\rho = AL$. Але згідно умові відтинок $AL = NK$, а тому $\rho = AL = AK - AN$. Тепер з Δ-ка AKB маємо: $AK = \frac{2r}{\cos\theta}$, а з Δ-ка ANB: $AN = 2r\cos\theta$. Тому:

$$\rho = \frac{2r}{\cos\theta} - 2r\cos\theta = \frac{2r}{\cos\theta}\overset{\sin^2\theta}{\cancel{(1-\cos^2\theta)}}$$

або

$$\rho = 2r\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta \quad \ldots\ldots (25)$$

Це й є бігунове рівняння цисоїди.

Щоб перевести це рівняння до прямокутних координат, беремо взори відповідного переходу, а саме:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}\ ; \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}\ ; \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

і вставляємо їх у рівняння (25). Тоді маємо:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2ry^2}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

або:

$$x^3 = y^2(2r - x) \quad \ldots\ldots (26)$$

Як спостерігаємо, рівняння цисоїди Діокля є третього ступіня.

Для аналізи рівняння визначуємо y:

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{2r-x}}$$

і бачимо, що коли x наближується до вартости $\sqrt{2r}$, то y простує на безмежність, себто крива асимптотично наближається до дотичної, поведеної через кінець B головного поперечника.

Обчислимо тепер кут, що творить дотична до кривої в якій-небудь її точці з відповідним лучем вектором.

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{2r\sin\theta\operatorname{tg}\theta}{\frac{2r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{2r\sin\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\operatorname{tg}\theta}{1+\frac{1}{\cos^2\theta}}, \text{ або } \operatorname{tg}\mu = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+1}$$

Знайдемо ρ': диференціал дуги:

$$\rho' = 2r\sin\theta\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right) = 2r\operatorname{tg}\theta\sec\theta\left(1+\cos^2\theta\right)$$

$$ds = d\theta\sqrt{4r^2\sin^2\theta\operatorname{tg}^2\theta + 4r^2\operatorname{tg}^2\theta\sec^2\theta\left(1+\cos^2\theta\right)} =$$

$$= 2r\operatorname{tg}\theta\sec\theta\, d\theta\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta + (1+\cos^2\theta)^2} = 2r\operatorname{tg}\theta\sec\theta\, d\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

1) Обчислення відрізку дотичної:

$$T = \frac{\rho ds}{d\rho} = \frac{2r\sin\theta\operatorname{tg}\theta\cdot 2r\operatorname{tg}\theta\sec\theta\, d\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{2r\cdot\operatorname{tg}\theta\sec\theta\left(1+\cos^2\theta\right)d\theta} = \frac{2r\sin\theta\operatorname{tg}\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{1+\cos^2\theta}$$

2) Обчислення відрізку нормалі:

$$N = \frac{\rho' ds}{d\rho} = \frac{ds}{d\theta} = \frac{2r^2\operatorname{tg}\theta\sec\theta\, d\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{d\theta} = 2r\operatorname{tg}\theta\sec\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

3) Обчислення піддотичної:

$$T_t = \frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{4r^2\sin^2\theta\operatorname{tg}^2\theta}{2r\operatorname{tg}\theta\sec\theta\left(1+\cos^2\theta\right)} = 2r\frac{\sin^3\theta}{1+\cos^2\theta}$$

4) Обчислення піднормалі:

$$T_n = \rho' = 2r\operatorname{tg}\theta\sec\theta\left(1+\cos^2\theta\right)$$

§11. Архімедова спіраль.

Рівняння її $\rho = a\theta$

Припустимо, що луч-вектор обертається рівномірно кругу бігуна і в той самий час точка M рівномірно посувається вздовж луча вектора від бігуна (рис. 20).

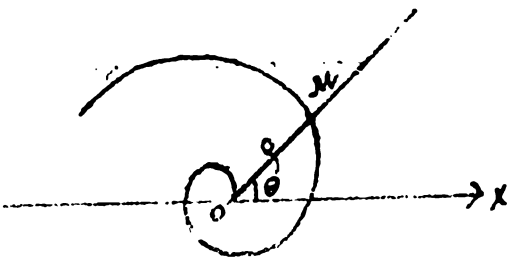


Рис. 20

Виміряємо кут (фазу) в

круговий одиницю і припускаємо, що одиниці міри кута θ відповідає віддалення a - точки M від бігуна O. Тоді зрозуміло, що відділення ρ є пропорційним куту θ, а тому:

$$\rho = a\theta \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

де a служить коефіцієнтом пропорційності.

Знайдемо величину стичностей:

$$\rho = a\theta; \qquad \rho' = a$$

Отже:
$$ds = d\theta\sqrt{\rho^2+\rho^2} = d\theta\sqrt{a^2\theta^2+a^2} = a\,d\theta\sqrt{1+\theta^2}$$

А тому:
$$T = \frac{a\theta\, a\,d\theta\sqrt{1+\theta^2}}{a\,d\theta} = a\theta\sqrt{1+\theta^2}$$

$$N = \frac{a\cdot a\,d\theta\sqrt{1+\theta^2}}{a\,d\theta} = a\sqrt{1+\theta^2}$$

$$\sigma_t = \frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{a^2\theta^2}{a} = a\theta^2; \qquad \sigma_n = \rho' = a$$

Вартість підприємової $\sigma_n = a$ незалежить від бігункового кута θ, а тому для всіх точок архімедової спіралі є величиною сталою. Що властивість можна скористати для будування дотичної в якій бажано точці спіралі. А саме:

Візьмімо на архімедовій спіралі яку будь точку M і поведімо через неї кут вектор OM. Тоді S, прямо ρ, поведений через бігун O буде нормового вісею, а через те $OK = \sigma_n$ є підприємовою, а тому рівна a. Тепер спосіб будування дотичної стає цілком ясним, а саме:

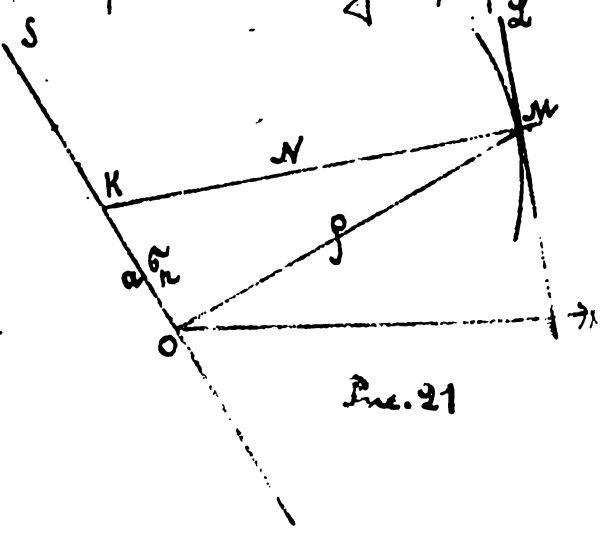


Рис. 21

1) Через точку M ведемо луч вектор і будемо метову вісь L (рис 21). 2) На цій вісі від бігуна O відкладаємо a й намічуємо точку K. Далі 3) сполучаємо точку K з точкою M і це буде прямовою, а 4) прям поведений до KM через точку M буде потрібною нам дотичною

§11. Гіперболична спіраля.

Візьмім бігунову координатну систему й припустім, що дана точка по мірі зростання бігунового куту наближається з безмежности до бігуна рівномірно посуваючися вздовж луча вектора. Тоді ясно, що в кожний мент, віддалення точки від бігуна буде зворотне пропорційним величині бігунового куту. Припустім, що одиниці (круговій) міри бігонового куту відповідає віддалення точки від бігуна рівна a. Тоді:

$$\rho : a = 1 : \theta$$

а звідци рівняння гіперболичної спіралі:

$$\rho\theta = a \quad \ldots\ldots\ldots (28)$$

З аналізи рівняння видко, що коли $\theta = 0$, то $\rho = \infty$; коли θ зростає, то ρ зменшується і нарешті, коли $\theta = \infty$, то $\rho = 0$. Отже крива творить безліч оборотів навколо бігуна, все більш і більш наближуючися до бігуна, але його не досягає його хоч і віддалення від нього точки може

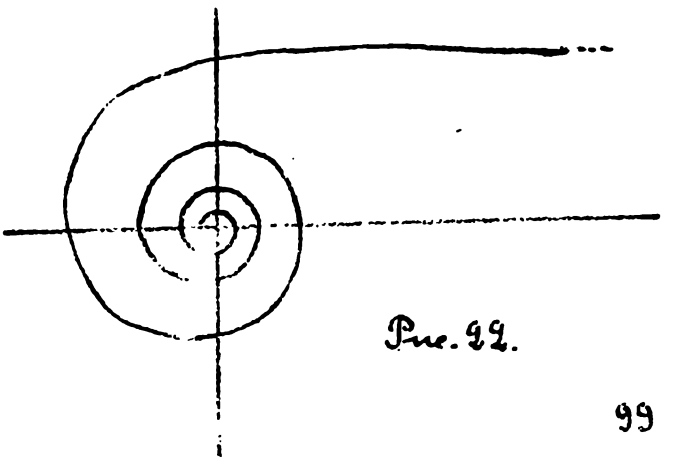


Рис. 22.

стати як бажано малим) Тому цей бігун зветься асимптотичною точкою гіперболичної спіралі (рис. 22).

Ми залишаємо студіюючим для вправи обчислення всіх величин стичностей цієї спіралі, а зупинимося лише на обчисленні величини бігунової піддотичної. Отже:

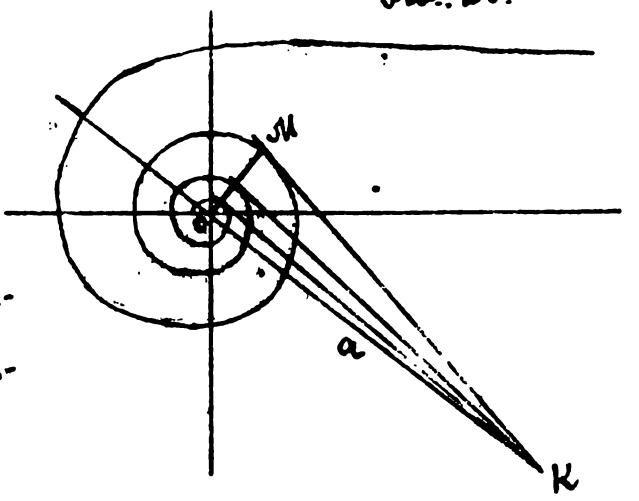
$$\sigma_t = \frac{\rho^2}{\rho'} \quad \text{але} \quad \rho' = \left(\frac{a}{\theta}\right)' = -\frac{a}{\theta^2}$$

тому:

$$\sigma_t = \frac{a^2}{\theta^2} : -\frac{a}{\theta^2} = -a$$

Таким чином бігунова піддотична для дотичних у всіх точках гіперболичної спіралі є однаковою, а це дає легкий спосіб будування самої дотичної, а саме: сполучаємо точку дотику M з бігуном, й через бігун ведемо метову вісь. Коли на цій вісі відкладимо $OK = |a|$, то проста, що сполучить точку K з даною M буде потрібною дотичною

Рис. 23.



§12. Логаритмична спіраль

Розглянемо властивости ще третьої спіралі, що має назву логаритмичної й визначається рівнянням:

$$Lg\frac{\rho}{a} = m\theta \quad \text{або:} \quad \rho = ae^{m\theta} \quad \ldots \quad (29)$$

де a є довільно вибране число.

Дослідимо рівняння:

1) коли $\theta \neq 0$, то $\rho \neq 0$

2) коли $\theta = 0$, то $\rho = a$

3) коли $\theta = +\infty$, то й $\rho = +\infty$

4) коли $\theta = -\infty$, то $\rho = 0$

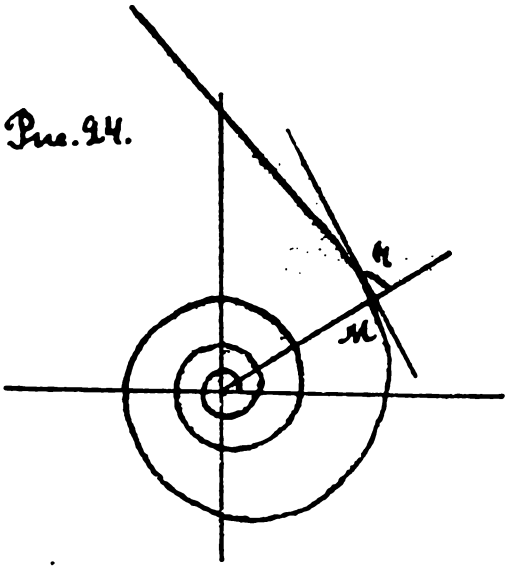


Рис. 24.

Очевидно, що точка O (бігун) знова є асимптотичною. Лишаючи на боці обчислення величини дотичностей, ми обчислимо дотиковий кут μ. Ми знаємо вже, що $tg\theta = \frac{\rho}{\rho'}$, але

$$\rho' = ame^{m\theta}$$

а тому:

$$tg\mu = \frac{ae^{m\theta}}{ame^{m\theta}} = \frac{1}{m} \text{ (const)}$$

Таким чином кут нахилу дотичної не залежить від величини бігунового кута, а тому однаковий для всіх точок логарифмичної спіралі. Це є причиною того, що логарифмичну спіраль звуть рівнокутньою. Очевидно, що ця властивість також дає дуже простий спосіб будування дотичної в кожній точці спіралі, коли відома вартість $tg\mu$

§13. Форма кривої (вигнутість або вгнутість).

Візьмім якусь криву AB визначену рівнянням $y = f(x)$ і на ній точку $M(x, y)$. Через цю точку ведемо дотичну L. Візьмім ще другу точку N дуже близьку

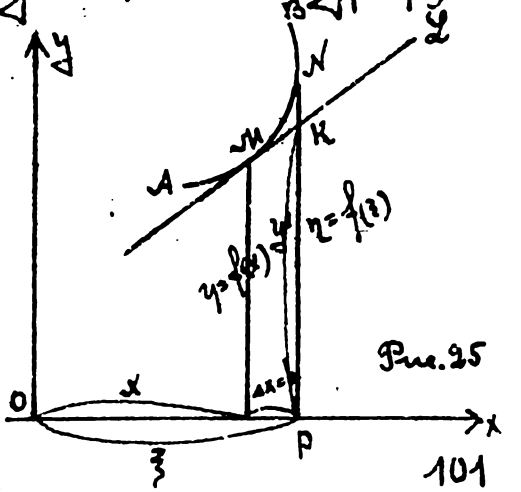


Рис. 25

до M і означимо її значення через ξ і η, причому $\xi = x + \Delta x = x + h$ і $\eta = f(x+h)$

Щоб дослідити форму кривої нам треба буде знайти як вона віддалена від дотичної з обох боків її дотику. Для цього знайдемо вартість NK, віддалення точки N кривої від даної дотичної взагалі від відповідної рядної. З рис. 25 ми бачимо що $NK = PN - PK$, але $NP = y = f(x+h)$ а для визначення PK уявляємо те, що точка K лежить на дотичній, а тому її значення повинні задовольняти рівняння цієї дотичної, а саме, вставляючи ці значення $x_1 = \xi = x+h$ і y_1 в загальне рівняння дотичної ми маємо мати тотожність:

$$y - y_1 = f'(x)(x - x_1)$$

або: $$f(x) - y_1 = f'(x)(x - x - h) = h f'(x)$$

А звідси: $$KP = y_1 = f(x) + h f'(x) -$$

іншим чином: $NK = f(x+h) - [f(x) + h f'(x)]$.

Або розкриваючи $f(x+h)$ в ряд Тейлора, маємо:

$$NK = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \dots - f(x) - h f'(x) =$$

$$= \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \dots \qquad (d)$$

Ми взяли точку N дуже близько до точки M і через те можемо вважати величину h так малою, що за властивістю цілих функцій матимемо право твердити, що знак NK залежить лише від знаку старшого члену, себто від знаку $\frac{h^2}{2} f''(x)$. В цьому члені h є в ква-

тому ступені, а через те знак відтинка NK залежатиме лише від знаку $f''(x)$. Зверніть увагу ще й на те, що при сталому ступені k знак його залежати не впливає на вартість величини NK. Тобто крива з обох боків точки дотику лежить лише по один бік дотичної. Виявилося, що бік кривої обернений до дотичної її *випуклістю*, а протилежний бік *випуклістю* кривої. Тоді можна сказати що коли $f''(x) > 0$, то крива (що лежить в першій або в другій чвертках координатних осей) обернена випуклістю до осі ікс-ів (лежить поза кутом створеним дотичною й віссю ікс-ів), а коли $f''(x) < 0$, то крива обернена до осі ікс-ів випуклістю (лежить на полі згаданого кута) (рис. 26).

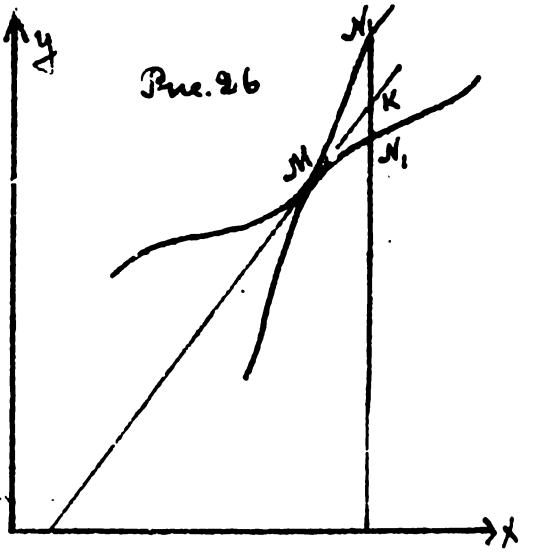


Рис. 26

Легко довести, що коли крива лежить в III і IV чвертках координат (від'ємні вартості змінних) то ці твердження трансформуються навпаки (бо тоді y і η є від'ємні і різниця $(\eta - y)$ має вартість протилежну знаком відповідній вартості різниці $(\eta - y)$ в першому випадку)

Щоб об'єднати обидва випадки, зверніть увагу на те, що в першому з них сама функція $y = f(x)$ має додатню вартість, себто має той

же знак, що $f''(x)$ при <u>випуклості кривої</u>, а у другому випадкові $y = f(x)$ – є від'ємною, але також буде мати знак однаковий зі знаком $f''(x)$ при <u>випуклості кривої</u>.

Тому можна загалом твердити, що:

<u>Коли для кривої $y = f(x)$ вартість другої похідної $f''(x)$ має знак однаковий з самою функцією $f(x)$, то крива обернена випуклістю до осі ікців, а коли ці величини функції та її другої похідної різних знаків, то крива обернена до осі ікців випуклістю.</u> Це твердження можна аналітично висловити так.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f''(x)}{f(x)} > 0 \quad \text{– випуклість} \\ &\frac{f''(x)}{f(x)} < 0 \quad \text{– випуклість} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (30)$$

Розглянемо ще й той випадок, коли вартість $f''(x)$ обертається в нуля. Очевидно, що тоді (див. вище d):

$$NK = \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}(x) + \ldots$$

і на підставі попередніх міркувань знак NK залежатиме від вартости:

$$\frac{h^3}{3!} f'''(x)$$

Але в цьому разі зміна знаку h змінює знак NK, а через те крива лежить з обох боків дотичної. Такого роду точка (M) має назву точки <u>перегину кривої</u>. Очевидно, що тоже і $f'''(x)$ обер-

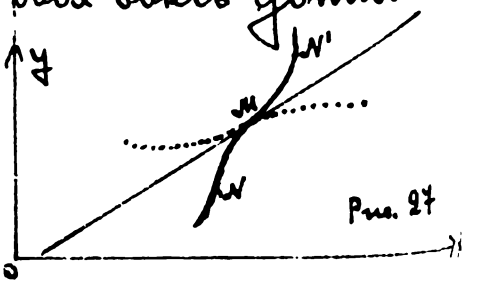


Рис. 27

тангенс в нуля і т.д. Тоді ми досліджуємо криву за допомогою першої по черзі $\neq 0$ похідної. Коли вона парного, то крива лежить по один бік дотичної, коли не парного, то маємо справу з точкою перегину.

Відношення $\frac{f''(x)}{f(x)}$ дає нам розуміння про форму кривої, але при $f'(x)=0$ вздовж (30) не дадуть нам критерія для пізнання форми кривої. Але в цьому разі (перегину) обидві гілки кривої (з обох боків точки M) матимуть ту, чи іншу форму й положення, що до вісі ікс-ів. З метою їх дослідження ми вибираємо на кривій з обох боків точки M допоміжні точки N і N', досить близькі до точки M, але таке щоб для тангенсів їм друга похідна функція не була рівною з нулем. Хай відповідні цих точок N і N' будуть $x+h$ (де h для першої й другої точки різного знаку) тоді вздовж (30) матиме вигляд:

$$\alpha = \frac{f''(x+h)}{f(x+h)}$$

а розкладаючи числителя в ряд Тейлора маємо:

$$\alpha = \frac{f''(x) + h f'''(x) + \frac{h^2}{2!} f^{IV}(x) + \cdots}{f(x+h)}$$

але $f''(x)=0$, а тому обмежуючи ряд лише другим членом (бо h беремо досить малим) маємо:

$$\alpha = \frac{h f'''(x+\theta h)}{f(x+h)}$$

Тут друга похідна $f(x+h)$ буде з огляду на

свою тяглість однакового знаку з $f(x)$, а знак числителя завжди залежить від знаку h, бо містить його в першому ступіні, в той час як $f'''(x+\theta h)$ в силу своєї тяглости раз не обертається в нуль буде заховувати свій знак. Отже, коли d буде для $\pm h$ змінювати знак з $-$ на $+$ то крива переходить від вгнутости до вигнутости й навпаки.

Розглянемо ще випадок, коли дотична рівнобіжна до осі іксів, чи до осі ігреків:

в першому разі $f'(x)=0$

а в другому — $f'(x)=\infty$

Ми бачимо, що в другому разі маємо розрив тяглости й користуватися взором Тейльора не можемо. Але тоді визначаючи з рівняння $y=f(x)$, вартість x матимемо нову функцію: $x=\varphi(y)$, для якої вже перша похідна $\varphi'(y)=0$. Отже в обох випадках можна користатися однакових ознак.

Очевидно, що при цих умовах, коли $f''(x)=0$ (себто $\frac{d^2y}{dx^2}=0$), то точка перегнуття має дотичну рівнобіжну до осі x-ів, а коли $f''(y)=0$ (себто $\frac{d^2x}{dy^2}=0$) то точка перегнуття має дотичну рівнобіжну до осі y-ків (рис. 28). Загалом ознакою існування точки перегнуття є рівність $f''(x)=0$ [або $f''(y)=0$]

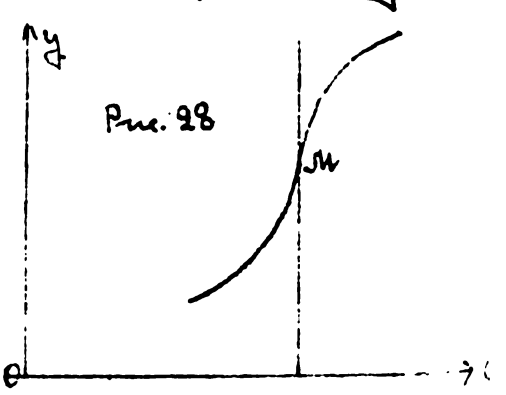


Рис. 28

Очевидно, що значниками точки M, точки перегнуття,

можна знайти, як розвязки системи:

$$\left.\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ y &= f(x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (31)$$

Приклад 1. (позичено у Поссе)

Знайти точку перегнуття кривої:

$$y = \frac{x^3}{a^2+x^2}$$

Диференцуючи маємо:

$$y' = \frac{x^2(x^2+3a^2)}{(x^2+a^2)^2} \qquad y'' = \frac{2a^2x(3a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^3}$$

Очевидно що рівняння $y''=0$, при умові, що $y'''\neq 0$ дає нам відтинкові потрібних точок перегнуття. Тому розвязуючи рівняння $y''=0$, або $2a^2x(3a-x^2)=0$, маємо $x=0$; $x_{2,3}=\pm a\sqrt{3}$. Коли тепер ці вартости вставимо в рівність:

$$y''' = \frac{6a^2(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^3}$$

то матимемо:

$$1)\ y''' = \left[\frac{6a^2(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^3}\right]_{x=0} \neq 0 \qquad 2)\ \left[y'''\right]_{x=\pm a\sqrt{3}} \neq 0$$

Отже всі знайдені точки є перегнуттям. Рядні їх знайдемо вставивши наші вартости x_1, x_2 і x_3 в само рівняння кривої.

Точок перегнуття з дотичною, рівнобіжною до осі y-ів немає, бо умова $y'=\infty$ дає $x^2+a^2=0$ $x=\pm ai$. Точка є уявна.

Приклад 2. Які точки перегнуття має синусоїда $y=\sin x$?

Диференцуємо рівняння $y=\sin x$ і маємо:

$$y' = \cos x\ ; \quad y'' = -\sin x$$

точки перегину одержимо з си-

$$\left.\begin{array}{l} y = -\sin x = 0 \\ y = \sin x \end{array}\right\} \text{або} \quad \begin{array}{l} \sin x = 0 \\ y = 0 \end{array} \quad x = k\pi \Bigg\} \text{ при умові що } y''' \neq 0$$

Тому досліджуємо що третю похідну й маємо:

$$y''' = -\cos x \underset{(x = \pi k)}{=} \mp 1$$

Отже існує безліч точок $(x = k\pi, y = 0)$, що лежать на осі x-ів. Точок же перегину, що мають горизонтальну дотичну до осі y-ів немає, бо $f'(x) = \cos x$ ніколи не може бути рівною 3 см.

Приклад 3. Знайти точку перегину кривої:

$$y^3 = x^2$$

Звідси $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Диференціюємо й маємо:

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}; \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$$

Точок перегину звичайних немає, бо рівняння $(y'') = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = 0$ дає розв'язки $x = \infty$; а тому й $y = \infty$. Але однаково з цим ми маємо вартість $x = 0$ для якої: $y' = \left[\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right]_{x=0} = \infty$. Отже треба дослідити чи не буде перегину при дотичних, рівнобіжних до осі y-ів. Висловлюємо з рівняння x і маємо:

$$x = \sqrt{y^3} = y^{\frac{3}{2}}$$

Звідси: $x' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$; $x'' = \frac{3}{4}y^{-\frac{1}{2}}$; тому маємо:

$$(x'') = \frac{3}{4}y^{-\frac{1}{2}} = 0; \quad y = \infty$$

Отже й такого роду точок перегину

Приклад 4. Знайти точки перегину;

кривої $x^3 = y$.

Диференціюємо й прирівнюємо до нуля другу похідну, тоді маємо:

$$1)\ y' = 3x^2\ ;\ y'' = 6x$$
$$2)\ 6x = 0;\ x = 0;\ y = 0$$

Досліджуючи третю похідну: $y''' = 6 \neq 0$ ми переконуємося, що точкою перегину є початок координат.

§14. Дослідження точок перегину кола рівняння кривої має інші форми

I) Коли рівняння кривої має участь в параметровій формі:

$$x = \varphi(t)\ ;\ y = \psi(t)$$

то відшукуючи похідні через x і y маємо:

$$dx = \varphi'(t)\,dt\ ;\ dy = \psi'(t)\,dt$$

А звідси:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \left(\text{або } \frac{y'}{x'}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]' \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} =$$

$$= \frac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}$$

Аналогічно ми можемо обчислити й другу похідну x:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{y'x'' - y''x'}{(y')^3}$$

Отже для визначення точок перегину маємо рівняння:

$$\left.\begin{array}{l} \text{або: } x'y'' - y'x'' = 0 \\ \text{або: } y'x'' - y''x' = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (32)$$

Дослідження подібне до попереднього й тому на ньому не зупиняємося.

II). Коли криву дано в формі:

$$F(x, y) = 0$$

Тоді:

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

Знайдемо другу похідну y'' і для цього диференціюємо рівняння $F(x,y)=0$ і маємо:

1) в першому разі:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

2) в другому разі:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + y'' \frac{\partial F}{\partial y} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + y'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} =$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + y'' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

А вставляючи вартість y' з рівності (α) одержимо:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + y'' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

або:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + y''\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3 = 0 \quad \ldots (\beta)$$

Ми знаємо, що умовою існування точок перегину є рівність $y''=0$, а тому рівняння (β) ма-

таке вигляд:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \quad (33)$$

Останнє рівняння (33) легко записати в формі детермінанта, а саме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (34)$$

Розв'язання цього рівняння нам дасть значення точок, що можуть бути перегинами і між їх досліджуємо, як і попередньо.

Приклад 1. Знайти точки перегину кривої $y^3 - x^5 = 0$

Відшукуємо потрібні окремі похідні і складаємо рівняння (34)

1) $\frac{\partial F}{\partial x} = -5x^4$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -20x^3$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6y$

Отже 2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \pm 20x^3 & 0 & \pm 5x^4 \\ 0 & 6y & 3y^2 \\ -5x^4 & 3y^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Звідси: $\Delta = 150x^8 y - 180 y^4 x^3 = 0$. Маємо (після скорочення) маємо систему:

$$x^3y^3(5x^5 - 6y^3) = 0$$

$$y^3 - x^5 = 0$$

Звідси $x^5 = y^3$ і маємо $5y^3 - 6y^3 = 0$; $y = 0$; $x = 0$

Це є точка перегину, бо крива переходить через початок координат: по обидва боки його $y'' = \frac{\Delta}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$ [див. рівн. (3)] змінює знак, бо містить непарну ступінь x.

Приклад II. Знайти точку перегину кривої $y = (x-a)^4$.

Диференціюємо рівняння й маємо:

$$y' = 4(x-a)^3; \quad y'' = 12(x-a)^2, \quad y''' = 24(x-a)$$

Прирівнявши до нуля другу похідну y'', одержимо:

$12(x-a)^2 = 0$; звідси $x = a$; але тоді $y''' = 0$ а $y^{IV} = 24 \neq 0$

Отже першою нерівною з нуля є парна похідна, а через те точки перегину немає.

Вставляючи величину $x = a$ в рівняння кривої матимемо $y = 0$, тому сама функція y і парна перша нерівна нулю четверта похідна y^{IV} одного знаку. Тому в цій точці крива вигнута в бік осі x-ів.

Приклад III. Знайти точку перегину кривої: $x = t^3$; $y = 2t + 1$.

Похідні цих функцій будуть:

$$x' = 3t^2; \quad x'' = 6t; \quad x''' = 6; \quad y' = 4t; \quad y'' = 4; \quad y''' = 0$$

Тому: $\frac{dy}{dx} = \frac{4t}{3t^2} = \frac{4}{3t}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3} = \frac{3t^2 \cdot 4 - 4t \cdot 6t}{27t^6} = -\frac{12t^2}{27t^3}$

Умова існування точок перегину: $x'y'' - y'x'' = 0$ має вигляд: $-12t^2 = 0$, або $t = 0$. Звідси $x = 0$, $y = 1$ (рів. рівняння кривої).

Приклад IV. Дослідити циклоїду: $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1-\cos\theta)$.
Шукаємо y' і y'' і маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{a\sin\theta\, d\theta}{a(1-\cos\theta)\, d\theta} = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$$

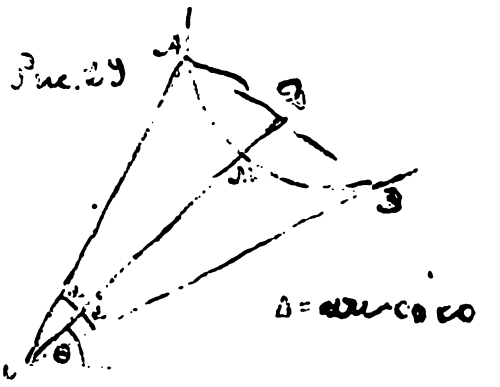
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)'\frac{1}{x'} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{a(1-\cos\theta)} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Очевидно, що $\frac{d^2y}{dx^2}$ є завжди від'ємне, а тому крива звернена до осі x-ів своєю випутістю (загалом випутість її завжди звернена в бік відємних y-ів).

§15. Дослідження форми кривої в бігунових координатах.

Хай рівняння кривої буде $\rho = f(\theta)$. Візьмім на кривій (рис 29) точку $M(\rho, \theta)$ і відкладаємо при бігуні O з обох боків ρ досить малий кут α, тоді утворяться нові вектори з фазами $\theta+\alpha$ і $\theta-\alpha$, що зустрінуть криву AB в якихсь точках A і B. Сполучимо ці точки тятивою AB. Очевидно, що коли крива AB буде повернена випутістю до бігуна O, то точка M буде лежати з того ж боку тятиви AB що й бігун і навпаки, якщо продовжимо вектор ρ до зустрічу з тятивою AB то:

Рис. 29

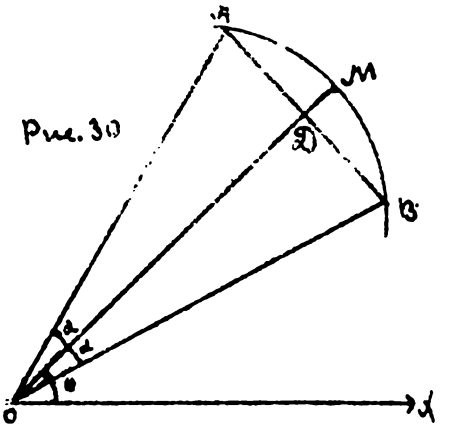


1) Коли крива обернена випутістю до бігуна то $\Delta = OM - OA < 0$

2) Коли крива обернена випутістю до бігуна то $\Delta = OM - OA > 0$ (рис 30)

$OM = \rho = f(\theta)$

Рис. 30



Обчислимо ще варіянту OD з ΔOAB.

OD є симетрисальна Δ-ка, а тому в силу тригонометричного взору

$$\therefore OD = B_{AB} = \frac{2OA \cdot OB \cdot \cos\alpha}{OA + OB}$$

Якщо точки A і B лежать на кривій, а тому значення її задовольняють рівняння кривої. Значить тогож:

1) A будуть $OA_1(\theta+\alpha)$; 2) B будуть OB і $(\theta-\alpha)$. Отже вставляючи їх в рівняння $\rho = f(\theta)$ кривої маємо:

$$OA = f(\theta+\alpha) \; ; \qquad OB = f(\theta-\alpha)$$

Маємо тоже:

$$OD = \frac{2\cos\alpha \, f(\theta+\alpha) f(\theta-\alpha)}{f(\theta+\alpha) + f(\theta-\alpha)} \quad \ldots\ldots (a)$$

Отже:

$$\Delta = f(\theta) - \frac{2\cos\alpha \, f(\theta+\alpha) \cdot f(\theta-\alpha)}{f(\theta+\alpha) + f(\theta-\alpha)} \lesseqgtr 0$$

А звідси:

$$f(\theta)\left[f(\theta+\alpha) + f(\theta-\alpha)\right] - 2\cos\alpha \, f(\theta+\alpha) \cdot f(\theta-\alpha) \lesseqgtr 0 \ldots (б)$$

Це й є ознака випуклості або вгнутості кривої що-до бігуна в бігунових координатах.

Спростимо цей вираз:

1) Ми беремо варіянту α досить малою, дуже близького до 0 (коли α прямує до нуля, а тому для $f(\theta+\alpha)$ і $f(\theta-\alpha)$ можемо застосувати розвинення в ряд Тайлора, а саме:

$$f(\theta+\alpha) = f + \alpha f' + \frac{\alpha^2}{2} f'' + \frac{\alpha^3}{3} f''' + \ldots$$

$$f(\theta-\alpha) = f - \alpha f' + \frac{\alpha^2}{2} f'' - \frac{\alpha^3}{3} f''' + \ldots$$

де символом f означаємо $f(\theta)$

Тоді:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ f(\theta+\alpha)+f(\theta-\alpha)=2f+\alpha^2f'' \\ &2)\ f(\theta+\alpha)\cdot f(\theta-\alpha)=f^2+\alpha^2ff''-\alpha^2(f')^2 \end{aligned}\right\}$$

спричинені в вищенаведеній формулі, при даній малості α - нехтуємо.

Вставляючи ці вартості у вираз (δ) маємо:

$$2f^2+\alpha^2ff''-2\cos\alpha\, f^2-2\alpha^2\cos\alpha\, ff''+2\alpha^2\cos\alpha\,(f')^2\lesseqgtr 0$$

або:

$$2f^2(1-\cos\alpha)+2\alpha^2ff''\left(\tfrac{1}{2}-\cos\alpha\right)+2\alpha^2\cos\alpha\,(f')^2\lesseqgtr 0$$

або:

$$f^2+\frac{\alpha^2\left(\frac{1}{2}-\cos\alpha\right)}{1-\cos\alpha}ff''+\frac{\alpha^2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}(f')^2\lesseqgtr 0$$

Обчислимо справжні вартості коефіцієнтів виразу при згаданій умові, що α прямує до нуля.

$$1)\ \frac{\alpha^2\left(\frac{1}{2}-\cos\alpha\right)}{1-\cos\alpha}=\frac{\alpha^2\left[(1-\cos\alpha)-\frac{1}{2}\right]}{1-\cos\alpha}=\alpha^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}}=-1$$

(бо при $\alpha\to 0$, маємо $\alpha=0$; $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$)

$$2)\ \frac{\alpha^2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\alpha^2\left[1-(1-\cos\alpha)\right]}{1-\cos\alpha}=\frac{\alpha^2}{1-\cos\alpha}-\alpha^2=2\quad\text{(через те саме)}$$

Таким чином, ознаки випуклості або випуклості кривої що-до бінума буде:

$$f^2-ff''+2(f')^2\lesseqgtr 0 \qquad \ldots\ldots(35)$$

або:

$$\rho^2-\rho\rho''+2\rho'^2\lesseqgtr 0$$

Словами: Положення кривої в бінумових координатах визначається так: коли для даної вартості ρ: 1) вираз $\rho^2-\rho\rho''+2\rho'^2<0$ то випуклість кривої для даної точки повернена в бінума (рис. 29) а 2) коли цей же вираз є достатній (>0) то до бінума обернена випуклість кривої (рис. 30) 3) коли цей вираз є рівний з нулем, то дана точка кривої є точкою перегину (рис. 31)

Приклади: I) Візьмімо спіраль Архімеда: $\rho = a\theta$ і дослідимо її положення щодо бінуса.

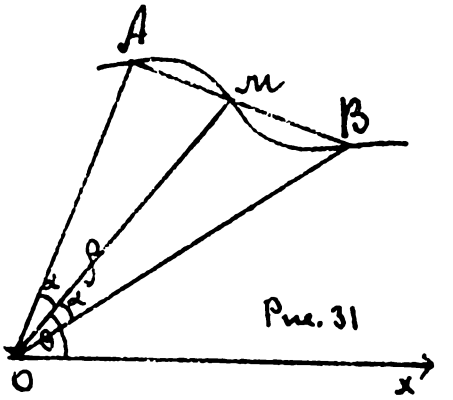


Рис. 31

Маємо:

$$\rho' = a; \qquad \rho'' = 0$$

тому:

$$\Delta = (a\theta)^2 + 2a^2 = a^2(\theta^2+2)$$

Цей вираз завжди додатній, а тому спіраль Архімеда у всіх своїх точках обернена до бінуса своєю вигнутістю (рис. 32)

II Гіперболічна спіраль: $\rho\theta = a$

1) $\rho = \frac{a}{\theta}$; 2) $\rho' = -\frac{a}{\theta^2}$; 3) $\rho'' = \frac{2a}{\theta^3}$

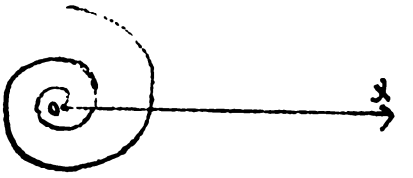


Рис. 32

тому:

$$\Delta = \frac{a^2}{\theta^2} - \frac{2a^2}{\theta^4} + \frac{2a^2}{\theta^4} = \frac{a^2}{\theta^2}$$

Отже $\Delta = \left(\frac{a}{\theta}\right)^2$ також завжди додатнє і крива у всіх точках повернена вигнутістю до бінуса (рис 33)

III приклад: Дослідити положення циссоїди рівняння $\rho = 2a \sin\theta \operatorname{tg}\theta$.

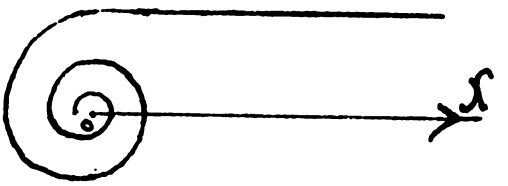


Рис. 33

Знаходячи ρ' і ρ'', ми одержимо: $\Delta = \frac{c}{\cos^3\theta}$, себто крива завжди обернена до бінуса вигнутістю.

§16. Загальне розуміння про кривину (лук) кривих.

Припустімо, що нам дано якусь криву й ми хочемо дослідити міру її скривлення. Цю міру скривлення будемо звати кривиною кри-

бої при даній точці. Щоб дослідити її нам треба розглянути яку-будь дугу цієї кривої обмежену, напр., точками M і N. Вважаємо, що на цій дузі немає точок перегину, себто дуга в цілому або випукла, або вгнута. Через граничні точки дуги M і N (рис. 34) проведемо дотичні й за додатний напрям їх будемо брати згідно з попередньо узятою, бік зростання кривої. Тоді кут між цими додатними напрямами дотичних γ будемо звати середньою кривиною даної дуги MN (кут γ вимірюється в кругових одиницях). Хай довжина дуги MN буде Δs, тоді відношення:

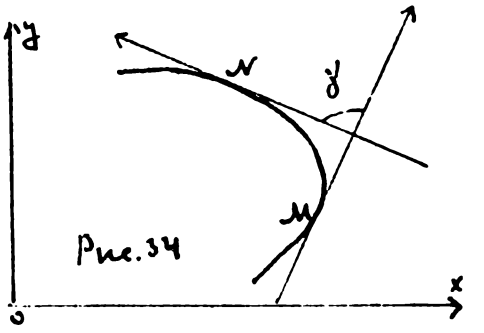


Рис. 34

$$K = \frac{\gamma}{\Delta s}$$

звуть середньою кривиною даної дуги MN.

Припустимо, що ми хочемо точку N поволі наближувати до точки M; в той самий час і кут γ, а разом з тим і дуга Δs будуть зменшуватися простуючи обоє до нуля. В цьому випадку межу нашого відношення K:

$$\lim_{\Delta s \to 0} K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\gamma}{\Delta s} = \mathcal{K} \quad \ldots\ldots (36)$$

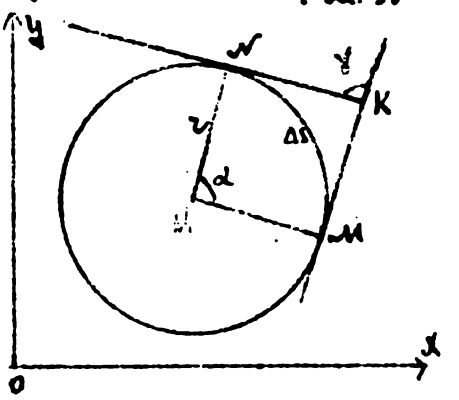
звуть (правдивою) кривиною кривої в точці M. При цьому кут γ стає безмежно-малим кутом між двома суміжними дотичними і тому зветься кутом суміжності.

Отже:

Кривиною кривої в даній точці зветься межа відношення кута суміжности до величини замкненої відповідними дотичними дуги, коли ця дуга простує до нуля.

Приклад. Знайти кривину кола.

Рис. 35



Хай кут між лучами, поведеними в точки дотику даних дотичних буде α. Тоді $\gamma = \alpha$ (кути є прямовораменні). Кут ми вимірюємо круговими одиницями, а тому дуга $\Delta s = r.\alpha$ (рис. 35)

Таким чином пересічна кривина дуги кола MN буде:

$$K = \frac{\gamma}{\Delta s} = \frac{\alpha}{r\alpha} = \frac{1}{r}$$

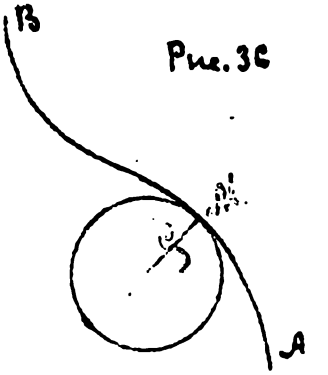
Пересічна кривина K є величиною сталою, незалежною від величини Δs, а тому й правдива кривина кола в кожній його точці буде $K = \frac{1}{r}$.

Звідци маємо:

$$r = \frac{1}{K}$$

Цю величину (луч кола) будемо звати лучем кривини (луку) кривої в даній точці і умовимося її означати через ρ.

Рис. 36



Хай точка M належить до якоїсь кривої AB і для кривини її в точці M ми одержимо вартість K (рис. 36)

Тоді рух кривини кривої в точці M:

$$\rho = \frac{1}{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

буде уявляти з себе рух того кола, що повсюдно його через точку M, так щоб він мав перетину свою кривину однакову з кривиною кривої AB в точці M.

Очевидно, що коли:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\gamma}{\Delta s}$$

то

$$\rho = \frac{1}{K} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\gamma}$$

§17. Кривина плоскої кривої.

I. Хай крива визначається рівнянням $y = f(x)$ Візьмімо на ній дві дуже близькі точки $M(x, y)$ і $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Проведемо через точку M і N дотичні і хай їх кути спаду на вісь ікс'ів будуть: α і $\beta = \alpha + \Delta\alpha$

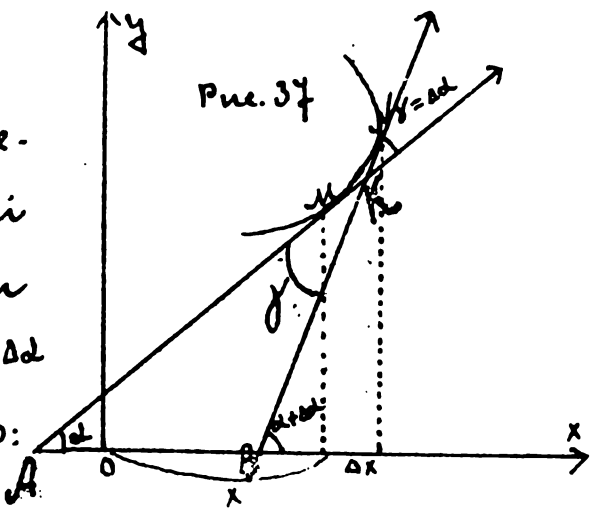


Рис. 37

Тоді з Δ-ка MBN маємо:

$$\gamma = \Delta\alpha$$

де α, а разом і Δs є функціями змінної x.

А тому:

$$\rho = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}} \quad \ldots (a)$$

Але:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

а тому:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

Крім того відомо, що $y' = \operatorname{tg}\alpha$, а тому:

$$\alpha = \operatorname{arctg} y'$$

Звідци:

$$\frac{d\alpha}{dx} = (\operatorname{arctg} y')' = \frac{y''}{1 + y'^2}$$

Отже, вставляючи знайдені вартости у взір (a), маємо:

$$\rho = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}} = \frac{(1+y'^2)^2\sqrt{1+y'^2}}{y''} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad \ldots (38)$$

причому беремо лише абсолютну величину цього виразу, бо вартість ρ умовилися вважати завжди додатньою.

II. Колиб рівняння кривої було загадане у змінниковій формі, напр.

$$x = \varphi(t) \; ; \; y = \psi(t)$$

то

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

можна булоб написати так:

$$\rho = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\alpha}{dt}}$$

Але в цьому разі:

$$ds = dt\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

або:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

Крім того, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ або $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

тому:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \left[\operatorname{arctg}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]' =$$

$$= \frac{1}{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2} \cdot \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

Таким чином:

$$\rho = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\alpha}{dt}} = \frac{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)} \quad \ldots\ldots (39)$$

або скорочуючи позначення $\varphi(t) = x$; $\psi(t) = y$, маємо:

$$\rho = \frac{[x'^2 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}{x''y' - x'y''} \quad \ldots\ldots (40)$$

де похідні x і y взято по t.

Або ще інакше:

$$x' = \frac{dx}{dt}; \quad y' = \frac{dy}{dt}; \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$$

тому:

$$\rho = \frac{[dx^2 + dy^2]^{\frac{3}{2}}}{d^2x\,dy - dx\,d^2y} \quad \ldots\ldots (41)$$

III. Коли рівняння кривої є в неявній формі:

$$F(x, y) = 0$$

то:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0$$

Отже:

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$y'' = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

або, вставляючи у цей вірш вартість y', маємо:

$$y'' = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}\right]$$

а звідци:

$$y'' = -\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]$$

Вставляючи ці вартости у вираз:

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

маємо:

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2} \quad \ldots (42)$$

IV. Ще дуже корисно мати мати визначення луча кривини в тому випадку, коли незалежником є сама дуга кривої, себто, коли крива визначена рівнянням:

$$x = \varphi(s) \quad y = \psi(s) \quad \ldots\ldots (a)$$

Ми вже довели, що кути, що творить дотична з осями визначаються:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\beta (= \pm\sin\alpha) = \frac{dy}{ds} \quad \ldots (\delta)$$

й знаємо, що:

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{\frac{d\alpha}{ds}} \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

А тому:

щоб знайти цю вартість: $\frac{d\alpha}{ds}$, знаючи, що s є незалежником, ми диференцуємо через s рівняння (δ) і маємо:

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}$$

$$\pm\cos\alpha\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2}$$

Далі підносячи до квадрату ці рівности і взаємно їх додаючи, маємо:

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

або:

$$\frac{d\alpha}{dt}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}$$

тому:

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}} \quad \ldots\ldots (43)$$

або инакше:

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\varphi''(s)^2+\psi''(s)^2}} \quad \ldots\ldots (44)$$

V. Дуже простий вираз луча кривини в даній точці одержимо, коли визначемо його через величину прямової до кривої, поведеної через туж точку. Ми знаємо вже, що:

$$n=y\sqrt{1+y'^2}$$

а звідци:

$$n^2=y^2(1+y'^2) \quad \text{або} \quad 1+y'^2=\frac{n^2}{y^2}$$

Коли крива загадана рівнянням $y=f(x)$, то:

$$\rho=\frac{\left[1+y'^2\right]^{3/2}}{y''}$$

а тому:

$$\rho=\frac{n^3}{y^3y''} \quad \ldots\ldots (45)$$

§18. Основні приклади обчислення кривини.

Приклад 1. Знайти вираз луча кривини кри-

вої 2го ступіня.

Рівняння цієї кривої:

$$y^2 = 2px + qx^2$$

а тому, диференцуючи його маємо:

$$2yy' = 2p + 2qx; \quad \text{або} \quad yy' = p + qx$$

Звідци:

$$y' = \frac{p + qx}{y}$$

Диференцуючи далі, маємо:

$$y'^2 + yy'' = q$$

й звідци:

$$y'' = \frac{q - y'^2}{y}$$

або:

$$y'' = \frac{qy^2 - (p+qx)^2}{y^3} = \frac{q(2px + qx^2) - (p+qx)^2}{y^3} = -\frac{p^2}{y^3}$$

Таким чином:

$$\rho = \frac{n^3}{y^3\left(-\frac{p^2}{y^3}\right)}$$

або:

$$\rho = \left|\frac{n^3}{-p^2}\right| \quad \ldots\ldots (46)$$

Отже:

Луч кривини кривої 2го ступіня є рівний з абсолютною величиною відношення кубу прямової до квадрата півзмінника кривої.

Висновок. Луч кривини є пропорційний до кубу відповідньої прямової до кривої.

Приклад. Висловити луч кривини параболи рівняння: $y^2 = 2px$.

Маємо: $n = y^2\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right) = y^2 + p^2; \quad n = (y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$.

Таким чином:

$$\rho = \left| \frac{n^3}{-p^2} \right| = \frac{(y^2 + p^2)^{3/2}}{p^2}$$

Приклад 2. Знайти вирази радіуса кривини еліпса й гіперболи, що визначаються рівнянням:

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots (a)$$

Ми знаємо що:

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2} \quad \ldots (8)$$

А тому обчислюємо елементи цього виразу із рівняння (а) окремо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2b^2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \pm 2a^2y; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2b^2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \pm 2a^2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

і вставляємо їх у задане рівняння (б) і маємо:

$$\rho = \left| \frac{(4b^4x^2 + 4a^4y^2)^{3/2}}{8a^4b^2y^2 \pm 8a^2b^4x^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{8(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}}{8a^2b^2(a^2y^2 \pm b^2x^2)} \right| = \left| \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}}{a^2b^2(\pm a^2b^2)} \right|$$

бо $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$, звідки: $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$.

Тому:

$$\rho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4} \quad \ldots (в)$$

Це буде рад кривини еліпса й гіперболи.

З рівнянь кривих:

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$$

одержимо:

$$\pm a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2 = b^2(a^2 - x^2)$$

Отже:

$$a^2y^2 = \pm b^2(a^2 - x^2)$$

Вставляючи ці вирази у рівність (6), маємо:

$$\rho = \frac{\left[b^4x^2 \pm a^2b^2(a^2-x^2)\right]^{3/2}}{a^4b^4}$$

або:

$$\rho = \frac{b^6\left[b^2x^2 \pm a^4 \mp a^2x^2\right]^{3/2}}{a^4b^4}$$

Звідки:

$$\rho = \frac{\left[(b^2 \mp a^2)x^2 \pm a^4\right]^{3/2}}{a^4b} = \frac{\left[\frac{b^2 \mp a^2}{a^2}x^2 \pm x^2\right]^{3/2}}{ab}$$

де $\frac{a^2 \mp b^2}{a^2} = \varepsilon^2$ (– еліпса, + гіпербола). Тому:

$$\rho_{еліп} = \frac{(a^2 - \varepsilon^2x^2)^{3/2}}{ab}$$

$$\rho_{гіп} = \frac{(\varepsilon^2x^2 - a^2)^{3/2}}{ab}$$

Приклад 3. Знайти вираз радіуса кривизни циклоїди, що має рівняння: $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$

Скористуємося виразом (40) радіуса кривизни кривої визначеної рівняннями, а саме:

$$\rho = \left|\frac{\left[x'^2 + y'^2\right]^{3/2}}{x''y' - y''x'}\right| \quad \ldots\ldots (d)$$

Обчислимо окремі члени виразу:

$x' = a(1-\cos\theta) = 2a\sin^2\frac{\theta}{2}$; $y' = a\sin\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$; $x'' = a\sin\theta$; $y'' = a\cos\theta$

Тому:

$$\rho = \left|\frac{\left[4a^2\sin^4\frac{\theta}{2} + 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right]^{3/2}}{a^2\sin^2\theta - a^2\cos\theta(1-\cos\theta)}\right| = \left|\frac{8a^3\sin^3\frac{\theta}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{3/2}}{a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - a^2\cos\theta}\right| =$$

$$= \frac{8a\sin^3\frac{\theta}{2}}{1-\cos\theta} = \frac{8a\sin^3\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 4a\sin\frac{\theta}{2}$$

З другого боку:

$$n = \frac{y\,ds}{a\,dx} = \frac{a(1-\cos\theta)\,d\theta\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}}{a(1-\cos\theta)\,d\theta}$$

Після скорочення й перетворення маємо:

$$n = a\sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} = a\sqrt{2(1-\cos\theta)} = a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

Таким чином:

$$\rho = 2n$$

Луч кривини циклоїди в кожній її точці є рівний із подвійною довжиною відповідної прямової.

§19. Коло кривини й центр кривини.

Хай дано криву AB і на ній точку $M(x, y)$. Через цю точку поведемо (як ми вже згадували) коло кривини. Очевидно, що це коло має такі прикмети:

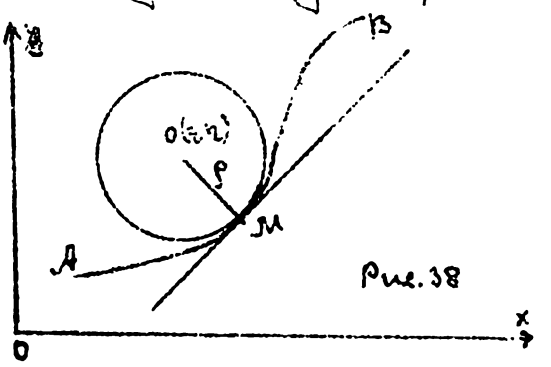


Рис. 38

1) Має спільну з кривою дотичну, поведену через точку M.

2) Луч цього кола буде ρ.

3) Центр його $O(\xi, \eta)$ лежатиме на прямовій до кривої, поведеній через точку $M(x, y)$ і на віддаленні від цієї точки рівному MO.

і 4) Коло це буде положене з боку вгнутости кривої.

Центр $O(\xi, \eta)$ цього кола зветься центром кривини данної кривої AB в точці її M. Щоб обчислити значника цього центру, збудуємо в точці $M(x, y)$ коло кривини центру $O(\xi, \eta)$ (Рис 39).

Хай прямова творить з осями координат кути τ і ϑ. Тоді з ΔMOK маємо:

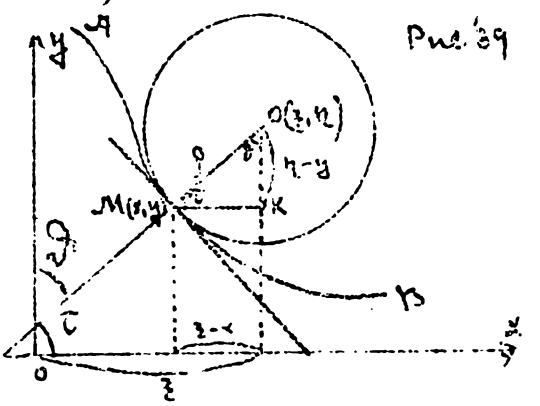


Рис. 39

1) $\xi - x = \rho\cos\tau$

2) $\eta - y = \rho\cos\vartheta$

або:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + \rho\cos\tau \\ \eta &= y + \rho\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (47)$$

Але ми знаємо, що косинуси кутів прямової з осями координат визначаються:

$$1)\quad \cos\tau = \mp\frac{dy}{ds} = \mp\frac{dy}{dx\sqrt{1+y'^2}} = \mp\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$2)\quad \cos\vartheta = \pm\frac{dx}{ds} = \pm\frac{dx}{dx\sqrt{1+y'^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Тому:

$$\xi = x \mp \frac{\rho y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\eta = y \pm \frac{\rho}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Але $\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, а тому:

$$\xi = x \mp y'\,\frac{1+y'^2}{y''} \ldots\ldots (\alpha)$$

$$\eta = y \pm \frac{1+y'^2}{y''} \ldots\ldots (\beta)$$

Лишається проаналізувати знак $\mp$.

В дробу $\frac{1+y'^2}{y''}$ числитель завжди додатній, а тому знак самого дробу залежить від знаку знаменателя y''.

Коли $y''>0$, то відношення $\frac{y}{y''}>0$ [де $y=f(x)$ - з рівняння кривої], себто випутість кривої обернена в бік осі x-ів (рис 40а), але тоді $\eta>y$.

Таким чином у взорі (β) знак перед дробом мусить бути $+$.

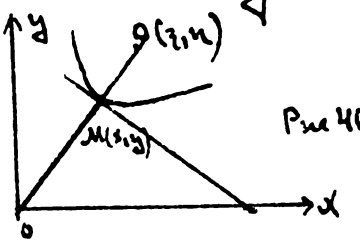


Рис 40а

Коли ж $y''<0$, то й відношення $\frac{y}{y''}<0$. Крива обернена до осі x-ів випутістю (рис 40б). Але тоді $\eta<y$, а тому у взорі (β) дріб $\frac{1+y'^2}{y''}$ має бути від'ємним, себто матиме знак y''. Таким чином перед дробом також мусить стояти +.

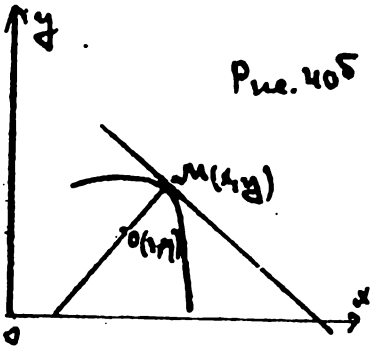


Рис. 40б

Отже маємо:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - y'\frac{1+y'^2}{y''} \\ \eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (48)$$

(бо знак перед дробом у визначення ξ є противний знаку перед дробом у визначення η.)

§20. Визначення луча кривини в бігунових координатах.

Введемо такі означення:

1) Луч кривини – ρ
2) Відповідний луч вектор – r
3) Фаза даного луча вектора – θ
4) Кут спаду відповідної дотичної – α
5) Напрямний (векторовий) кут дотичної – μ

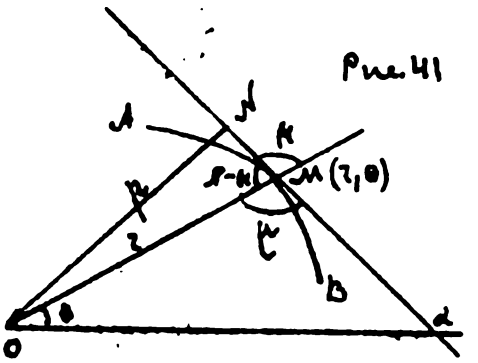


Рис. 41

Тоді можемо написати:

$$\alpha = \theta + \mu \ldots\ldots (a)$$

Перед цим ми довели, що:

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} \quad \text{де} \quad ds = d\theta\sqrt{r^2 + r'^2}$$

Треба ще обчислити величину $d\alpha$:

Для цього диференціюємо рівність (α) і маємо:

$$d\alpha = d\theta + d\mu$$

Але $tg\mu = \frac{r}{r'}$, або $\mu = arctg\frac{r}{r'}$

а звідси:

$$d\mu = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{r'^2}} \cdot \frac{r'^2 - rr''}{r'^2} d\theta$$

або:

$$d\mu = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} d\theta$$

Отже:

$$d\alpha = d\theta + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} d\theta = \left[\frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right] d\theta$$

Таким чином:

$$\rho = \left| \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \right| \quad \ldots\ldots\ldots (49)$$

Примітка. До цього самого висліду дійдемо шляхом перетворення осей.

Приклади.

1) Обчислити луг кривини архімедової спіралі: $r = a\theta$.

Диференціюючи рівняння кривої маємо: 1) $r' = a$, 2) $r'' = 0$

Тому:

$$\rho = \frac{a^3(1+\theta^2)^{3/2}}{a^2(2+\theta^2)} = \frac{a(1+\theta^2)^{3/2}}{2+\theta^2}$$

2) Обчислити луг кривини гіперболічної спіралі: $r\theta = a$.

Маємо диференціюючи рівняння кривої маємо:

1) $r' = -\frac{a}{\theta^2}$; 2) $r'' = \frac{2a}{\theta^3}$. Тому:

$$\rho = \frac{a^3(\theta^2-1)^{3/2}}{\theta^6\left(\frac{a^2}{\theta^2} + 2\frac{a^2}{\theta^4} - 2\frac{a^2}{\theta^4}\right)} = \frac{a(\theta^2-1)^{3/2}}{\theta^4}$$

3) Обчислити луч кривини логаритмичної спіралі: $r = ae^{m\theta}$

Ми знаємо, що $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$, де $\alpha = \theta + \mu$, а тому: $d\alpha = d\theta + d\mu$. Але для логаритмичної спіралі $\mu = const$, себто $d\mu = 0$. Отже $d\alpha = d\theta$.

Таким чином:

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2} = N$$

себто: <u>Луч кривини логаритмичної спіралі є рівний з відтинком бігунової прямової.</u>

<u>Висновок.</u> Центри кривини логаритмичної спіралі завжди лежать на осі метів.

§21. <u>Визначення луча кривини через віддалення відповідної дотичної від бігуна.</u>

Ми тут розглянемо ще один спосіб обчислення луча кривини, що ним дуже часто користуються в механиці.

Спустимо з бігуна O на дотичну, поведену через точку, прям ON (рис. 41) і означимо його вартість через p.

З Δ MON маємо:

$$p = r\sin(\pi - \mu) = r\sin\mu$$

Але ми довели, що $tg\mu = \frac{r}{r'}$, а звідци $\sin\mu = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$

Тому:

$$p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

Беремо похід (диференціял) від p й маємо:

$$dp = \frac{2r\,dr\sqrt{r^2+r'^2} - \frac{r^2(2r\,dr + 2r'r''d\theta)}{2\sqrt{r^2+r'^2}}}{r^2 + r'^2} = \frac{2r\,dr(r^2+r'^2) - r^2(r\,dr + r''dr)}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

бо $r'd\theta = dr$

Виносимо rdr за дужки й робимо зведення членів:

$$dp = rdr\,\frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

Далі користуючись виразом ρ (49) ми одержимо:

$$dp = \frac{rdr}{\rho}$$

А звідси:

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp} \quad \ldots\ldots\ldots (50)$$

Як переконаємося в механіці цей вираз через свою простоту дає великі зручності для його використання.

§22. Евольюта й евольвента (інволюта)

Припустімо, що нам дано де-яку криву AB. Для кожної її точки збудуємо відповідний їй круг кривини й визначимо центр кривини. Геометричний осередок всіх цих центрів має назву <u>евольюти</u> (A_1B_1) або <u>кривої розгортання</u> (рис. 42)

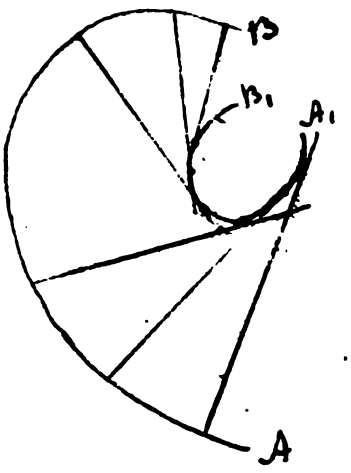


Рис. 42

Сама ж крива AB зветься <u>евольвентою (інволютою)</u> кривої A_1B_1, або розгортною кривою (евольюти) A_1B_1.

Очевидно, що кожна пряма, що проходить через відповідний центр кривини матиме лише одну спільну точку з евольютою, себто всі прямі евольвенти є дотичними евольюти. Так звати, евольюта є спільно-дотичною до

всіх кривих - евольвенти.

Хай рівняння кривої $y = f(x)$

Ми довели, що значки центра кривини якої-будь точки M кривої будуть:

$$\xi = x - y' \frac{1+y'^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \quad (a)$$

Очевидно, щоб одержати рівняння геометричного осередку центрів кривини, треба вилучити змінні x і y і установити зв'язок лише між ξ і η. Вставляючи вартості: $y = f(x)$; $y' = f'(x)$ і $y'' = f''(x)$ ми маємо два рівняння, що містять крім ξ і η лише x:

$$\xi = x - f'(x) \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)}$$

$$\eta = f(x) + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)} \quad (б)$$

Вилучаючи з цих рівнянь x, ми одержимо шукане рівняння:

$$\varphi(\xi, \eta) = 0$$

що й є рівнянням евольвенти кривої AB.

Приклад 1. Написати рівняння евольвенти параболи: $y^2 = 2px$.

Диференціюючи рівняння маємо:

1) $2yy' = 2p$, або $y' = \frac{p}{y}$ 2) $y'^2 + yy'' = 0$, або $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$

Крім того з самого рівняння одержимо: 3) $x = \frac{y^2}{2p}$.

Тепер вилучаючи з (a) змінні x і маємо:

$$\xi = \frac{y^2}{2p} - \left(\frac{p}{y} \cdot \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}}\right); \quad \eta = y + \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}}$$

Або:

$$\xi = \frac{y^2}{2p} + \frac{y^2+p^2}{p} = \frac{3y^2}{2p} + p$$

$$\eta = y + y\cdot\frac{y^2+p^2}{-p^2} = \frac{-yp^2+y^3+yp^2}{-p^2} = -\frac{y^3}{p^2}$$

Нарешті, коли з цих рівнянь,

$$\xi = \frac{3y^2}{2p} + p \quad і \quad \eta = -\frac{y^3}{p^2}$$

виключимо й останню змінну y, то одержимо:

$$(\xi - p)^3 = \frac{27y^6}{8p^3}\ ; \qquad \eta^2 = \frac{y^6}{p^4}$$

а поділивши почленно перше рівняння на друге маємо:

$$\frac{(\xi-p)^3}{\eta^2} = \frac{27p}{8}$$

або:

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3$$

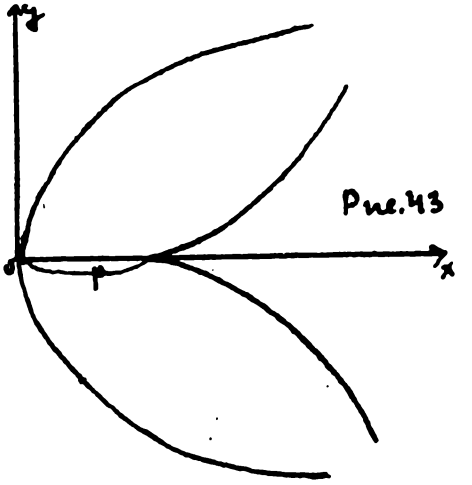


Рис.43

Ми одержали так звану <u>півкубічну параболу</u> (рис.43). Цю параболу ми ще досліджували.

<u>Приклад 2</u>. Евольвента еліпса.

Візьмімо эліптикове рівняння еліпса:

$$x = a\cos\theta\ ; \qquad y = b\sin\theta$$

і диференціювання їх обчислюємо y' і y''. Маємо:

$$dx = -a\sin\theta\, d\theta\ ; \qquad dy = b\cos\theta\, d\theta$$

або:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\theta$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{-a\sin\theta} = -\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3\theta}$$

Отже:

$$1+y'^2 = 1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{ctg}^2\theta = \frac{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta} = \frac{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{a^2-e^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta} = \frac{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

Тому за виразом (48) маємо:

$$\xi = a\cos\theta - \left[+\frac{b\cos\theta(1-\varepsilon^2\cos^2\theta)\,a^2\sin^3\theta}{a\sin\theta\cdot\sin^2\theta\cdot b}\right]$$

або:

$$\xi = a\cos\theta - a\cos\theta + a\varepsilon^2\cos^3\theta. \text{ Отже:}$$

$$\xi = a\varepsilon^2\cos^3\theta \quad (*)$$

$$\eta = b\sin\theta + \frac{1-\varepsilon^2\cos^2\theta\, a^2\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cdot(-b)} = \frac{b^2\sin\theta - a^2\sin\theta + a^2\varepsilon^2\sin\theta\cos^2\theta}{b}$$

$$= \frac{(b^2-a^2)\sin\theta + a^2\varepsilon^2\sin\theta(1-\sin^2\theta)}{b} = \frac{-a^2\varepsilon^2\sin\theta + a^2\varepsilon^2\sin\theta - a^2\varepsilon^2\sin^3\theta}{b}$$

Отже:

$$\eta = -\frac{a^2\varepsilon^2}{b}\sin^3\theta \quad (**)$$

Виключаючи з рівнянь (*) і (**) змінну θ і маємо:

$$\xi^{2/3} = a^{2/3}\cdot\varepsilon^{2/3}\cdot\cos^2\theta; \qquad \eta^{2/3} = +\frac{a^{2/3}\cdot\varepsilon^{2/3}}{b^{2/3}}\sin^2\theta$$

або:

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^{2/3} = \varepsilon^{2/3}\cos^2\theta; \qquad \left(\frac{\eta b}{a^2}\right)^{2/3} = \varepsilon^{2/3}\sin^2\theta$$

А звідси:

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{\eta b}{a^2}\right)^{2/3} = \varepsilon^{2/3}$$

але $\varepsilon = \frac{e}{a}$, тому:

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{\eta b}{a^2}\right)^{2/3} = \frac{e^{2/3}}{a^{2/3}} \text{ або } (a\xi)^{2/3} + (\eta b)^{2/3} = e^{2/3}$$

А звідси:

$$\left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{2/3}+\left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{2/3}=1 \quad \ldots\ldots (51)$$

Ця крива (рис. 44) має назву астроїди (зореподібна крива)

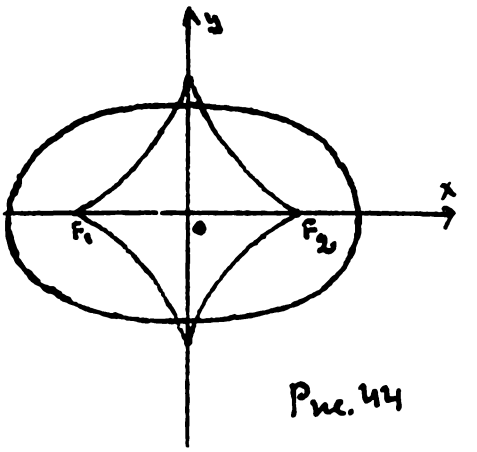


Рис. 44

Приклад 3. Еволюта гіперболи.

Параметричні рівняння гіперболи будуть:

$$x=\frac{a}{\sin t}\ ;\quad y=\frac{b}{\sin t}\cdot\cos t$$

тому, подібно до попереднього, матимемо:

$$\xi=\frac{a^2+b^2}{a\sin^3 t}\ ;\quad \eta=-\frac{a^2+b^2}{b\operatorname{tg}^3 t}$$

або:

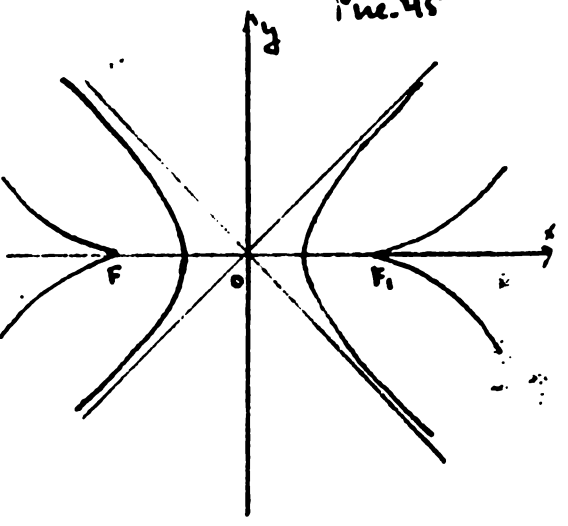
$$\xi=\frac{c^2}{a\sin^3 t}\ ;\qquad \eta=-\frac{c^2}{b\operatorname{tg}^3 t}$$

Отже:

$$\operatorname{cosec}^3 t=\frac{a\xi}{c^2}\ ;\quad \operatorname{ctg}^3 t=-\frac{b\eta}{c^2}$$

$$\operatorname{cse}^2 t=\left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{2/3}\ ;\quad \operatorname{ctg}^2 t=\left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{2/3}$$

Рис. 45



З тригонометрії відомо, що $\operatorname{cse}^2 t=1+\operatorname{ctg}^2 t$, або $\operatorname{cse}^2 t-\operatorname{ctg}^2 t=1$.

Тому:

$$\left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{2/3}-\left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{2/3}=1$$

Це є рівняння еволюти гіперболи (рис. 45).

Приклад 4. Еволюта циклоїди.

Рівняння циклоїди:

$$x=a(\theta-\sin\theta);\quad y=a(1-\cos\theta)$$

Звідси:

$$y'=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2};\quad y''=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{\theta}{2}}\ ;\quad 1+y'^2=\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

Отже:

$$\xi = x - y'\frac{1+y'^2}{y''} = a(\theta - \sin\theta) + \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,\frac{4a\sin^{\cancel{4}\,2}\frac{\theta}{2}}{\cancel{\sin^2\frac{\theta}{2}}} =$$

$$= a(\theta - \sin\theta) + 4a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = a\theta - a\sin\theta + 2a\sin\theta = a(\theta + \sin\theta)$$

Таксамо:

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = -a(1-\cos\theta)$$

Це є рівняння також циклоїди. Справді, беремо $\theta = \pi + \theta_1$ і маємо:

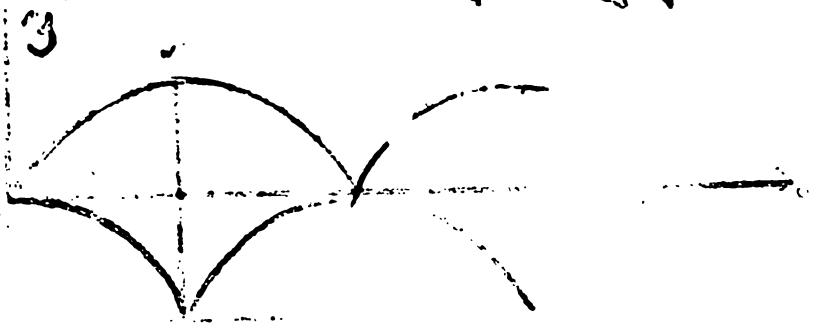
$$\xi = a[(\pi + \theta_1) - \sin\theta_1]; \quad \eta = -a(1+\cos\theta_1)$$

Пересунемо осі координат в точку $A(\pi a, -2a)$, тоді $\xi = \pi a + \xi'$, $\eta = -2a + \eta$ і тому:

$$\xi' = a(\theta_1 - \sin\theta_1); \quad \eta' = a(1-\cos\theta_1)$$

Це знайоме рівняння циклоїди. Збудуємо її.

Рис. 46

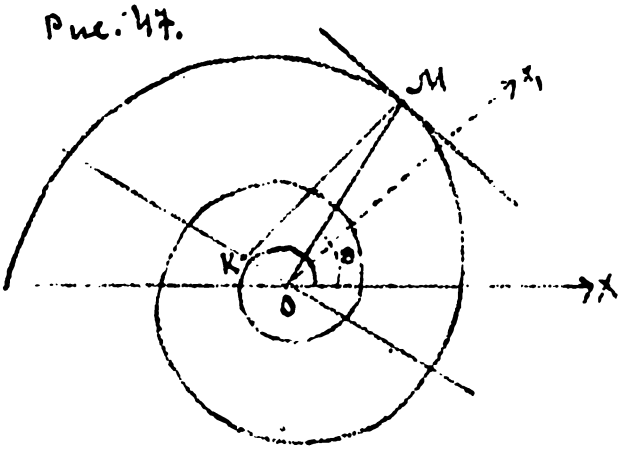


<u>Приклад 5.</u> Еволюта логаритмичної спіралі.

Рівняння спіралі:

$$\rho = ae^{m\theta}$$

Рис. 47.



Ми вже знаємо, що центр кривини буде точка $K(\rho_1, \theta_1)$. Тому значник ρ_1 буде OK (підпрямова). Але $OK = \rho'$, а тому:

$$\rho_1 = ame^{m\theta}$$

Далі, кут $\vartheta_1 = \angle KOA = \frac{\pi}{2} + \theta_1$, а через те:

$$\rho_1 = ame^{m(\theta_1 - \frac{\pi}{2})}$$

Це є також логарифмічна спіраль.

Справді: повернемо осі координат на якийсь кут α, тоді, означивши нові координати через ρ_2 і θ_2, матимемо:

$$\rho_2 = \rho_1 \; ; \quad \theta_2 = \theta_1 - \alpha \quad \text{або} \quad \theta_1 = \theta_2 + \alpha$$

Тому:

$$\rho_2 = ame^{m(\theta_2 + \alpha - \frac{\pi}{2})}$$

або:

$$\rho_2 = ae^{m\theta_2} \cdot me^{m(\alpha - \frac{\pi}{2})}$$

Себто:

$$\lg m + m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \; ; \; \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\lg m}{m}$$

Отже, коли повернути осі координат на кут $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\lg m}{m}$, то матимемо рівняння:

$$\rho_2 = ae^{m\theta_2}$$

що є звичайним рівнянням логарифмічної спіралі

§23. Властивості евольоти.

1) <u>Дотична до евольоти є прямовою евольвенти</u> (себто дотична до евольоти є прямою до дотичної евольвенти)

Хай рівняння даної кривої (евольвенти) $y = f(x)$ а рівняння евольоти її буде: $\eta = \varphi(\xi)$.

Тоді кутовий зміщник дотичної до евольоти буде:

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi}$$

а кутовий злиття дотичної до евольвенти:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Нам треба довести, що ці дотичні є взаємно прямові, себто, що $\eta' y' + 1 = 0$, або

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} + 1 = 0$$

(умова прямовості).

Рівняння прямової до даної кривої:

$$(X - x) + y'(Y - y) = 0$$

Центр кривини, себто відповідна точка евольюти, лежить на цій прямовій, а тому:

$$(\xi - x) + y'(\eta - y) = 0 \quad \ldots \quad (a)$$

Диференціюємо це рівняння, маємо:

$$d\xi - dx + (\eta - y)\,dy' + y'(d\eta - dy) = 0$$

або:

$$d\xi - dx + (\eta - y)y''dx + y'(d\eta - y'dx) = 0$$

а звідси:

$$d\xi + y'd\eta - dx[1 - (\eta - y)y'' + y'^2] = 0$$

Але:

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

а тому:

$$d\xi + y'd\eta - dx\Big[1 - \frac{1 + y'^2}{y''}y'' + y'^2\Big] = 0$$

(0)

або:

$$d\xi + y'd\eta = 0$$

Таким чином:

$$1 + y'\frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

Що й треба було довести.

2). Похід дуги еволюти числово рівний з походом луча кривини евольвенти.

Хай дуга еволюти буде s, тоді:

$$ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$$

Ми знаємо, що луч кривини:

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Але з другого боку квадрат того ж луча через значники кінців його буде:

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \ldots\ldots (б)$$

Тому маємо рівняння:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \ldots\ldots (в)$$

Диференцуючи його, ми після скорочення на 2 одержимо:

$$(\xi - x)d\xi + (\eta - y)d\eta - dx\left[(\xi - x) + (\eta - y)y'\right] = \rho d\rho$$

На підставі ж рівности (а), вираз в квадратових дужках є рівний з нулем і через те:

$$(\xi - x)d\xi + (\eta - y)d\eta = \rho d\rho$$

Підносимо це рівняння до квадрату:

$$(\xi - x)^2 d\xi^2 + 2(\xi - x)(\eta - y)d\xi d\eta + (\eta - y)^2 d\eta^2 = \rho^2 d\rho^2$$

Далі з рівняння (б) маємо:

$$1)\ (\xi - x)^2 = \rho^2 - (\eta - y)^2$$

$$2)\ (\eta - y)^2 = \rho^2 - (\xi - x)^2$$

А тому:

$$\rho^2 d\xi^2 + \rho^2 d\eta^2 - \left[(\eta - y)^2 d\xi^2 - 2(\xi - x)(\eta - y)d\xi d\eta + (\xi - x)^2 dy^2 = \rho^2 d\rho^2\right.$$

або:

$$\rho^2(d\xi^2+d\eta^2)-[(\eta-y)d\xi-(\xi-x)d\eta]^2=\rho^2 d\rho^2 \quad \ldots (2)$$

А із першої властивості маємо:

$$-1+y'\frac{d\eta}{d\xi}=0$$

або $d\xi=-y'd\eta$

Вставляючи це в рівність (2), одержимо:

$$\rho^2(d\xi^2+d\eta^2)+[(\eta-y)y'+(\xi-x)]^2 d\eta^2=\rho^2 d\rho^2$$

$[\ ]=0$ на нормалі рівності (а)

Маємо:

$$d\xi^2+d\eta^2=d\rho^2$$

а звідси:

$$d\rho=\pm\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}=\pm ds$$

де + відповідає одночасному зростанню і ρ, і s, а −, коли при зростанню s дуг ρ спадає.

Хай дуга зростає, коли дуг спадає, тоді:

$$\Delta s=-\Delta\rho$$

або:

$$\Delta(s+\rho)=0$$

себто:

$$\rho+s=\text{const}$$

Хай дано еволюту AB (рис. 48). Візьмімо нитку, що не розтягується, нитку і закріпимо її кінець в якій будь точці C еволюти. Натягнемо цю нитку вздовж дотичної до еволюти CK і зрізаному нитку в точці K.

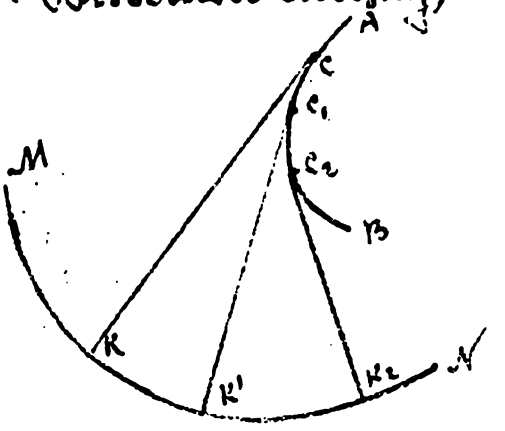


Рис. 48

Коли далі будемо натягати

ти нитку на еволюту (тримаючи її натягнутою в напрямку дотичної), тоді кінець цієї нитки K буде очеркувати евольвенту MN, бо при цьому зменшення натягнутої нитки завжди буде рівне прирощенню нагорнутої на дугу нитки, себто:

$$-\Delta\rho = \Delta s$$

Теж саме одержимо, коли навернуту на еволюту нитку будемо розгортати. [Отже звідкіль створилася назва: евольвента = розгортка]

§24. Огортальні кривих.

Ми знаємо, що кожна крива визначається рівнянням:

$$F(x, y) = 0 \cdots\cdots (1)$$

Припустім, що в це рівняння введемо довільну величину α, яко довільний змінник і будемо розглядати рівняння:

$$F(x, y, \alpha) = 0 \cdots\cdots (2)$$

де x і y є певні змінні величини, а α параметр, що йому ми довільно можемо давати ріжні вартости.

Очевидно, що при всіх вартостях α, рівняння (2) буде визначати однакові криві (напр. всі вони будуть або еліпси, або кола і т. д.) подібні до кривої (1), для якої $\alpha = 0$

Шерег таких кривих, що визначаються рівнянням (2) при всіх можливих вартостях α зветься родиною (famille) кривих.

А рівняння (2) є рівнянням цієї родини кривих.

Хай маємо (рис. 49) дві яких-небудь кривих L_0 і L_1 із родини кривих визначених рівнянням: $F(x,y,\alpha)=0$. Крива L_0 відповідає якійсь сталій вартості змінника $\alpha=\alpha_0$, а крива L_1 вартості $\alpha=\alpha_1$

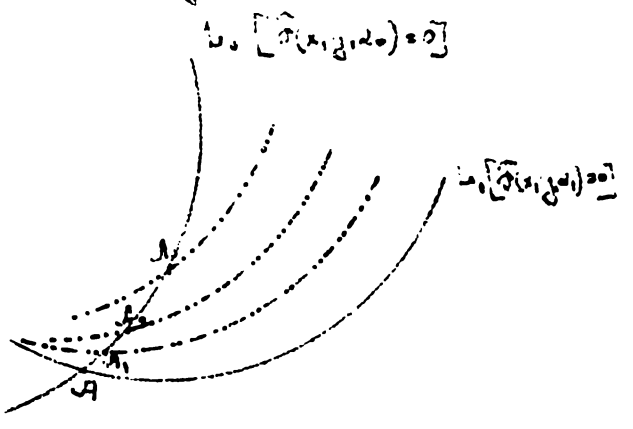


Рис. 49.

Припустім, що ми взяли вартість α_1 так близькою до α_0, що різниця між ними $\alpha_1-\alpha=\Delta\alpha$ дає можливість кривим L_0 і L_1 загалом перетинатися. Кожні дві криві можуть перетинатися або в одній, або в двох, або в кількох точках. Хай одна з таких точок буде A. Очевидно, що ця точка визначається яко перехрестя кривих:

$$F(x,y,\alpha)=0 \quad і \quad F(x,y,\alpha+\Delta\alpha)=0$$

Коли $\Delta\alpha$ буде зменшуватися, простуючи до нуля, то крива L_1 буде повертатися й переформовуватися так, щоб в останній момент, коли $\Delta\alpha$ зрівняється з нулем, злятися з кривою L_0. Підсає згаданого процесу й точка A, перехрестя цих кривих, посуватиметься (положення $A_1, A_2 \ldots$), так що в самий момент їх злиття займе якесь межове положення A_n. Останнє положення точки A_n звуть <u>прикметною точкою</u> кривої L_0.

Таким чином: <u>коли нам дано родину кри-</u>

вих, то прикметною точкою однієї з них є остаточне (межове) положення перетину її з безмежно-близькою до неї иншою кривою з тієї ж родини кривих.

Зогляду на те, що дві криві можуть перетинатися і в кількох точках, то загалом, на кожній даній кривій з родини, може бути не тільки одна, але й кілько прикметних точок.

Ясна річ, що значники прикметної точки мають визначатися із системи рівнянь:

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

$$F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$$

коли в останньому рівнянню $\Delta\alpha$ простуватиме до нуля. Це друге рівняння можна ще перетворити так:

1) Відлічимо з нього 1-ше рівняння, а саме:

$$F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha) = 0$$

2) поділимо всі члени цього рівняння на $\Delta\alpha$;

Тоді маємо:

$$\frac{F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0$$

Одержимо нову систему рівнянь:

$$F(x, y, \alpha) = 0 \cdots\cdots (\alpha)$$

$$\frac{F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0 \cdots (\beta)$$

Ця система є рівномірна з першою, бо друге її рівняння є вислідом рівнянь попередньої системи. Коли тепер $\Delta\alpha$ простуватиме до своєї межевої вартости, себто до нуля, то рівняння (β) обернеться в:

$$F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

і через те значення цього параметра точки будуть розв'язками системи:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, \alpha) &= 0 \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (52)$$

Очевидно, що ця прикметна точка належатиме кожній ріс до певної кривої із родини їх, в залежності від заданої вартості α.

Коли ж із системи (52) вилучити змінника α, то ми одержимо геометричний осередок всіх прикметних точок даної родини кривих виразу: $\Phi(x, y) = 0$ Це буде кривою, що має назву: <u>огортальної родини кривих</u>, самі ж криві цієї родини звуться <u>огорненими.</u>

Міркування цього § приводять нас до таких висновків:

Кожне рівняння виразу:

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

може бути:

1) Рівнянням <u>родини кривих</u>, коли в ньому α є довільним змінником, що може мати які нам бажано вартости.

2) рівнянням <u>однієї з кривих</u>, що належить до даної родини, себто рівнянням якоїсь огорненої кривої, що відповідає <u>одній (окремій) сталій</u> вартості α [напр. $F(x, y, \alpha) = 0$]

3) рівнянням <u>огортальної</u>, коли в ньому α є змінною функцією x і y, вибраною з прикметно-

го рівняння $F_\alpha(x, y, \alpha) = 0$

Приклад: Знайти огортальну родини кол рівняння: $u = (x-\alpha)^2 + y^2 = r^2$. (1)

З форми самого рівняння ми бачимо, що це є родина кол сталого радіуса, центри яких лежать на осі x-ів (рис. 50). Складаємо приєднане рівняння:

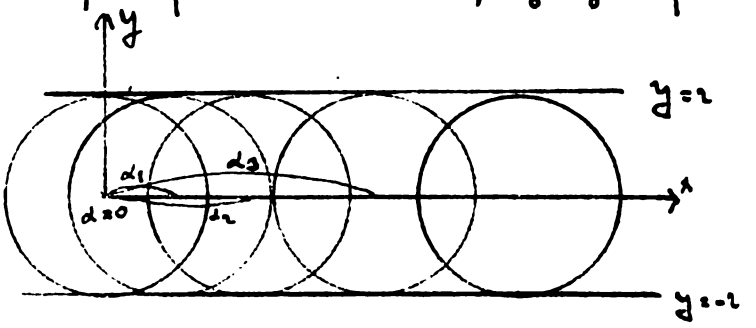


Рис. 50

$$u'_\alpha = -2(x-\alpha) = 0 \quad \text{або} \quad x-\alpha = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

Щоб мати рівняння огортальної даних кол, ми виключаємо з (1) і (2) змінне α й одержуємо:

$$0^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad \text{або} \quad y^2 - r^2 = 0$$

Звідси:

$$(y+r)(y-r) = 0 \quad \text{або} \quad y = -r; \; y = +r$$

Це є система двох простих рівнобіжних до осі x-ів і в даному разі спільних дотичних до всіх кол.

§25. Основна властивість огортальних родини кривих.

Дотична до огортальної в кожній її точці є також дотичною до тієї огорненої з родини кривих, для якої задана точка є приєднаною.

Візьмімо будь яку криву з родини даних кривих. Хай вона буде L_0. Означимо одну з її приєднаних точок через $M(x, y)$. Очевидно, що ця точка буде спільною й для даної огорненої L_0 і для огортальної всій родині З. Щоб довести, що дотична, поведена

через точку M до кривої $\mathfrak{J}$ буде дотичною також і до кривої L_0, досить нам скласти рівняння дотичної поведеної через точку M, окремо до кривої L_0 і кривої $\mathfrak{J}$ і показати, що ці рівняння є ідентичні. Отже:

1) Рівняння дотичної до кривої L_0, що має рівняння $F(x,y,\alpha_0)=0$, де $\alpha_0=\text{const}$, матиме вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)=0 \quad \ldots \quad (\alpha)$$

2) Аналогічно, рівняння дотичної поведеної через ту саму точку $M(x,y)$ до огортальної $\mathfrak{J}$ буде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\big[F(x,y,\alpha)\big](X-x)+\frac{\partial}{\partial y}\big[F(x,y,\alpha)\big](Y-y)=0 \quad \ldots \quad (\beta)$$

Тепер обчислимо похідні: $\frac{\partial}{\partial x}\big[F(x,y,\alpha)\big]$ і $\frac{\partial}{\partial y}\big[F(x,y,\alpha)\big]$, беручи на увагу, що дана крива $\mathfrak{J}$ є огортальною, а тому у рівнянні $F(x,y,\alpha)=0$ змінна α є функцією x і y, визначеною з рівняння $F'_\alpha=0$, або $\frac{\partial F}{\partial \alpha}=0$. Тому тоді $F(x,y,\alpha)$ є складною й ми маємо:

$$1)\ \frac{\partial}{\partial x}\big[F(x,y,\alpha)\big]=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$2)\ \frac{\partial}{\partial y}\big[F(x,y,z)\big]=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

Але приймаючи рівняння дає $\frac{\partial F}{\partial \alpha}=0$, а тому маємо:

$$1)\ \frac{\partial}{\partial x}\big[F(x,y,\alpha)\big]=\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$2)\ \frac{\partial}{\partial y}\big[F(x,y,\alpha)\big]=\frac{\partial F}{\partial y}$$

(ці самі вислідки, коли ми вважали $\alpha=\text{const}$)

Таким чином, рівняння (β) дотичної до огортальної S в точці M одержує вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)=0 \ldots (\gamma)$$

Себто рівняння (γ) є ідентичним з рівняннями (α), а тому теорема є доведена.

<u>Висновок. Коли б ми мали родину з простих лілій, то їх огортальна була б [illegible] до неї всі дані огорнені прості самі були дотичними.</u>

Очевидно, що коли ми будемо мати рівности $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ і $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, то певно означеної дотичної в даній точці M не існує, а тому такого рода точка зветься <u>особливою</u>. В цьому випадку вилучення α з системи рівнянь (51) дає рівняння геометричного осередку особливих точок родини. Це питання ми будемо розглядати пізніше і уділимо для нього окремий §.

§26. <u>Инші трактування еволюти.</u>

<u>Еволюта є огортальною всіх прямових до еволюти.</u>

Хай дана крива визначається рівнянням $y=f(x)$ (1). Тоді складаючи за загальним правилом рівняння прямової до неї в довільній точці $M(x,y)$, одержимо:

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}=0 \ldots (2)$$

Точка M лежить в обсязі цієї кривої, а тому й [illegible] рівняння (1), а са-

ме $з = f(\alpha)$. Отже:

$$(x-\alpha) + [y - f(\alpha)] f'(\alpha) = 0 \ldots (3)$$

Даючи α всі можливі вартости, ми одержимо рівняння всіх прямових до даної кривої (1).

Очевидно, що рівняння (3) є змінною функцією x, y і довільного змінника α, а через те ми можемо йому дати вигляд: $F(x, y, \alpha) = 0$. Це є рівняння родини прямових до даної кривої.

Далі, щоб знайти рівняння огортальної і цієї родини прямових (3) ми до рівняння (1) прилучимо ще прикметне рівняння вигляду $F_\alpha(x, y, \alpha)$, а саме [беручи похідну через α від рівняння (3)] маємо:

$$-1 + [y - f(\alpha)] f''(\alpha) - f'^2(\alpha) = 0 \ldots\ldots (4)$$

Очевидно, що коли з рівнянь (3) і (4) вилучити змінник α, то одержимо рівняння огортальної. Але коли ми з тих самих рівнянь (3) і (4) вилучимо вартости x і y (через α), то матимемо точки перехрестя огортальної з окремими прямовими з їх родини, себто їх прикметні точки. Отже, визначаючи y з рівняння (4) і вставляючи його потім в рівняння (3), матимемо:

$$y = f(\alpha) + \frac{1 + f'(\alpha)}{f''(\alpha)}$$

$$x = \alpha - f'(\alpha) \frac{1 + f'^2(\alpha)}{f''(\alpha)}$$

Це є, як ми зазначали, значники прикметних точок родини даних прямових до кривої $y = f(\alpha)$, але разом з тим, (див. взір 48), це є значники

центрів кривини тієї ж кривої. Отже, огортальна прямових до кривої $y=f(x)$, себто геометричний осередок прикметних точок їх, буде одночасно й геометричним осередком центрів кривини тієї ж самої кривої $y=f(x)$, себто її еволютою.

Висновок. Центр кривини кожної кривої є межовим положенням перетину перетину двох безмежно-близьких прямових її (їх прикметною точкою).

§27. Родина кривих від кількох незалежників.

I. Розглянемо попереду родину кривих, залежну від 2^x яких довільних змінників α і β.

Хай, напр., родина кривих визначається рівнянням:

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0 \quad \cdots\cdots (a)$$

де змінники α і β звязано рівнянням:

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0 \quad \cdots\cdots (б)$$

Очевидно, що рівняння (б) дає змогу визначити β, як функцію α, себто:

$$\beta = \psi(\alpha)$$

Тоді:

$$F[x, y, \alpha, \psi(\alpha)] = 0$$

або:

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0$$

Ми приходимо до випадку одного змінника, а тому огортальна визначиться як вислід вилу-

, α з рівнянь:

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0$$

і $$\Phi'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

Ясна річ, що Φ'_α можна трактувати як:

$$F'_\alpha(x, y, \alpha, \beta) = 0 \quad \text{де } \beta = \psi(\alpha)$$

А через те:

$$\Phi'_\alpha(x, y, \alpha) = F'_\alpha(x, y, \alpha, \beta)_{\beta=\psi(\alpha)} = F'_\alpha(x, y, \alpha, \beta) + F'_\beta(x, y, \alpha, \beta)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

Щоб знайти вартість $\frac{d\beta}{d\alpha}$ диференціюємо рівняння (δ) і маємо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

або:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}}$$

Отже, ми маємо систему:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & F(x, y, \alpha, \beta) = 0 \\ 2) & \varphi(\alpha, \beta) = 0 \\ 3) & F'_\alpha(x, y, \alpha, \beta)\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - F'_\beta(x, y, \alpha, \beta)\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0 \end{array}\right\} \cdots (53)$$

Виключення з цих рівнянь α і β дає нам рівняння огортальної.

<u>Приклад 1.</u> Знайти огортальну сім'ї, визначеної рівнянням:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

де α і β є довільно змінними величинами зв'язаними умовою: $\alpha + \beta = \varkappa (const)$

Отже, наша задача є знайти огортаючу еліпс зі змінними осями, що сума їх величин стала. Щоб скласти рівняння (3) системи (53) беремо:

$$F'_\alpha = -\frac{2x^2}{\alpha^3} \; ; \qquad F'_\beta = -\frac{2y^2}{\beta^3} \; .$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 1 \; ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 1$$

і тому маємо систему:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

$$\alpha + \beta = \kappa$$

$$\frac{x^2}{\alpha^3} - \frac{y^2}{\beta^3} = 0$$

З останнього рівняння системи ми маємо пропорцію:

$$\frac{x^2}{\alpha^3} : \alpha = \frac{y^2}{\beta^3} : \beta$$

і складаємо з неї таку похідну:

$$\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}\right) : (\alpha + \beta) = \frac{x^2}{\alpha^2} : \alpha = \frac{x^2}{\alpha^3} = \frac{y^2}{\beta^2} : \beta = \frac{y^2}{\beta^3}$$

Але $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, а $\alpha + \beta = \kappa$, тому:

$$\frac{x^2}{\alpha^3} = \frac{1}{\kappa} \; ; \quad \frac{y^2}{\beta^3} = \frac{1}{\kappa}$$

Звідси:

$$\alpha^3 = \kappa x^2 \; ; \quad \beta^3 = \kappa y^2$$

або:

$$\alpha = (\kappa x^2)^{1/3} \; ; \quad \beta = (\kappa y^2)^{1/3}$$

Додаючи останні рівності одна до одної, і беручи на увагу, що $\alpha + \beta = \kappa$, маємо:

$$(\kappa x^2)^{1/3} + (\kappa y^2)^{1/3} = \kappa$$

або:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3} \quad \ldots\ldots (54)$$

що уявляє циклоїду з 4-ма вістрями. (рис. 51)

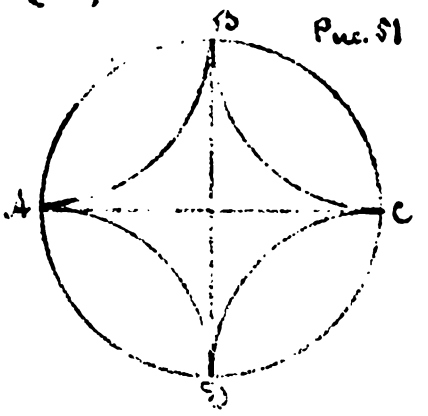


Рис. 51

Задача. Довести, що ту саму огинальну лінію родина прямих: $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$, коли змінники α і β є кінцями гіпотенузи прямокутного Δ-ка зі сталою протилежною, себто $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$.

Приклад 2. Знайти огинальну прямих, що творять на осях координат відтинки сталої суми S.

Отже ми маємо рівняння прямої:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

де $\alpha + \beta = S$. Обчислюємо елементи 3-го рівняння:

$$F'_\alpha = -\frac{x}{\alpha^2}; \quad F'_\beta = -\frac{y}{\beta^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 1.$$

і одержимо систему:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1; \quad \alpha + \beta = S; \quad \frac{y}{\beta^2} - \frac{x}{\alpha^2} = 0$$

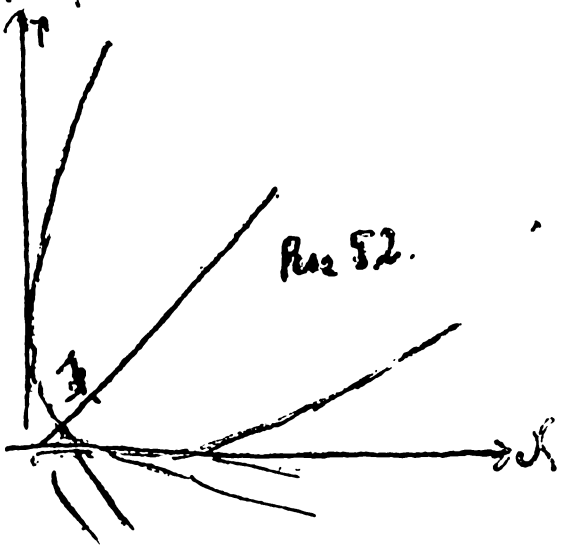


Рис. 52.

З 3-го рівняння маємо пропорцію:

$$\frac{y}{\beta} : \beta = \frac{x}{\alpha} : \alpha, \text{ а звідси: } \left(\frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha}\right) : (\alpha + \beta) = \frac{x}{\alpha^2} = \frac{y}{\beta^2}, \text{ або:}$$

$$1 : S = \frac{x}{\alpha^2} = \frac{y}{\beta^2}; \quad \frac{1}{S} = \frac{x}{\alpha^2}; \quad \frac{1}{S} = \frac{y}{\beta^2}; \quad \alpha = (xS)^{1/2}; \quad \beta = (yS)^{1/2};$$

$$\alpha + \beta = S; \quad (xS)^{1/2} + (yS)^{1/2} = S^1$$

або:

$$x^{1/2} + y^{1/2} = S^{1/2}$$

Не буде нарібним, що ви вже раз одержали

осей координат (рис. 52). Справді, повернемо осі координат на кут $\frac{\pi}{4}$ і перенесемо їх в точку $\left(\frac{s}{4}, \frac{s}{4}\right)$. Тоді загальні взори перетворення будуть:

$$x = \frac{s}{4} - \xi\cos\frac{\pi}{4} - \eta\sin\frac{\pi}{4}; \quad y = \frac{s}{4} + \xi\sin\frac{\pi}{4} + \eta\cos\frac{\pi}{4}$$

де $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Звідци:

$$x = \frac{s}{4} + \frac{\xi}{2}\sqrt{2} - \frac{\eta}{2}\sqrt{2}; \quad y = \frac{s}{4} + \frac{\xi}{2}\sqrt{2} + \frac{\eta}{2}\sqrt{2}$$

або:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{2} - \xi\sqrt{2} - \eta\sqrt{2}\right) \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{2} + \xi\sqrt{2} + \eta\sqrt{2}\right)$$

Вставляючи ці вартости в рівняння $x^{1/2} + y^{1/2} = s^{1/2}$, маємо:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{s}{2} + \xi\sqrt{2} - \eta\sqrt{2}\right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{s}{2} + \xi\sqrt{2} + \eta\sqrt{2}\right)^{1/2} = s^{1/2}$$

або:

$$\left(\frac{s}{2} + \xi\sqrt{2} - \eta\sqrt{2}\right)^{1/2} + \left(\frac{s}{2} + \xi\sqrt{2} + \eta\sqrt{2}\right)^{1/2} = (2s)^{1/2}$$

Останнє рівняння підносимо до квадрату й одержимо:

$$s = 2\xi\sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{s^2}{4} + s\xi\sqrt{2} + 2\xi^2 - 2\eta^2} = 2s$$

або:

$$\sqrt{\frac{s^2}{4} + s\xi\sqrt{2} + 2\xi^2 - 2\eta^2} = \frac{s}{2} - \xi\sqrt{2}$$

Підносимо ще раз до квадрату й маємо:

$$\cancel{\frac{s^2}{4}} + s\xi\sqrt{2} + \cancel{2\xi^2} - 2\eta^2 = \cancel{\frac{s^2}{4}} - s\xi\sqrt{2} + \cancel{2\xi^2}$$

або звідци:

$$\eta^2 = s\xi\sqrt{2}$$

або:

$$\eta^2 = 2p\xi \quad \text{де } 2p = s\sqrt{2}$$

Це, як бачимо, є рівняння параболи.

<u>Приклад 3.</u> Знайти огортальну родини еліпс, що мають центр в початку координатних осей, а осі їх лежать на осях координат. Поле ж всіх цих еліпс є величина стала.

Отже маємо рівняння родини: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (1)
де α і β є довільні змінники звязані умовою:

$$\pi\alpha\beta=S \quad \text{або:} \quad \alpha\beta=k \ (2) \qquad \text{де } k=\frac{S}{\pi}$$

Замісць, щоб визначати одніжіз змінників через другий, ми можемо продеференцувати обидва дані рівняння через ці змінні й матимемо:

$$1)\ \frac{x^2 d\alpha}{\alpha^3}+\frac{y^2 d\beta}{\beta^3}=0; \quad \text{або} \quad \frac{x^2 d\alpha}{\alpha^3}=-\frac{y^2 d\beta}{\beta^3}$$

$$2)\ \beta d\alpha+\alpha d\beta=0 \quad \text{або} \quad \beta d\alpha=-\alpha d\beta$$

Ділючи одно рівняння на друге, маємо:

$$\frac{x^2}{\alpha^3\beta}=\frac{y^2}{\alpha\beta^3} \quad \text{або скорочуючи на } \alpha\beta: \quad \frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{y^2}{\beta^2}$$

Тому роблючи вставку для вартостей у рівняння (1), маємо:

$$\frac{2x^2}{\alpha^2}=1; \quad \frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{1}{2}; \quad \alpha=\pm x\sqrt{2}$$

$$\frac{2y^2}{\beta^2}=1; \quad \frac{y^2}{\beta^2}=\frac{1}{2}; \quad \beta=\pm y\sqrt{2}$$

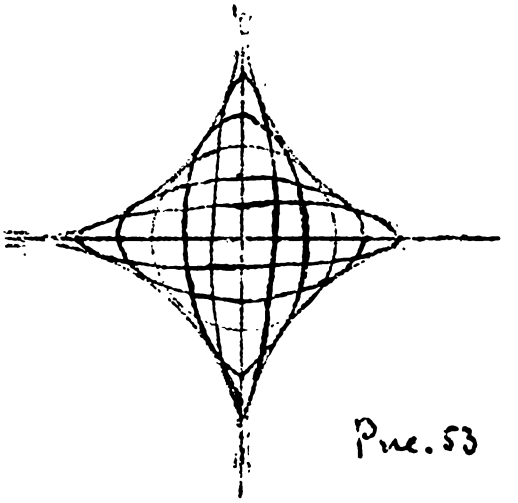


Рис. 53

Тепер вставляючи вартости α і β у рівняння (2) одержимо:

$$xy=\pm\frac{k}{2}$$

рівняння здружених прямокутних гіпербол, віднесених до осей координат, яко асимптот (рис. 53).

II. Очевидно, ту саму методу вживатимемо, коли родина кривих визначається рівнянням:

$$F(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n)=0$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ – є n змінників, звязаних $n-1$ рівняннями.

Мозі математичної системи:

1) Рівняння родини кривих: $F = 0$

2) $n-1$ рівняння лише з параметрами

і 3) Рівняння вигляду:

$$F'_{a_1} + F'_{a_2}\frac{da_2}{da_1} + F'_{a_3}\frac{da_3}{da_1} + \dots = 0$$

де $\frac{da_2}{da_1}$ і $\frac{da_3}{da_1}$ і т. д. визначаються із системи рівнянь 2) шляхом їх диференціювання. Отже маємо $n+1$ рівнянь для знаходження n параметрів $a_1, a_2, a_3 \dots$

§28. Дотичні кривих.

Хай на деякій множині задано дві криві L_1 і L_2. Означимо змінні координати точок першої кривої L_1 через x, y, а другої кривої L_2 через ξ, η. Мозі рівняння цих кривих матимуть такий вигляд:

$$y = f(x) \; ; \quad \eta = \varphi(\xi) \quad \dots\dots (a)$$

Припустимо, що ці дві криві мають якусь спільну точку M_0. Мозі координати її будуть

$$x_0 = \xi_0 \quad \text{і} \quad y_0 = \eta_0$$

Розглянемо, як близько одна до одної лежать ці криві біля точки M_0 (рис. 54). Візьмімо на кривій L_1 безконечно-близьку точку до M_0, напр., $M'[x_0+h, f(x_0+h)]$ де h прямує до нуля. Аналогічно на кривій L_2 маємо точку $M''[\xi_0+h, \varphi(\xi_0+h)]$ або $M''[(x_0+h), \varphi(x_0+h)]$. Віддалення між цими кривими в точках M' і M'' визначається відтинком: $\Delta = M'M''$

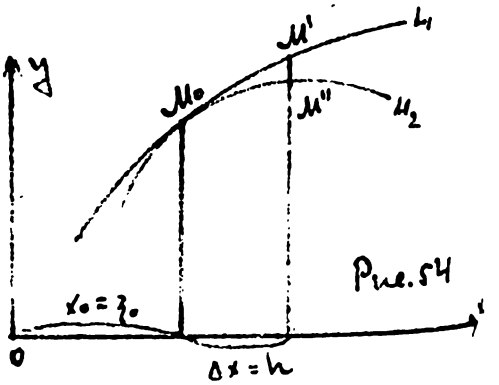


Рис. 54

тобто:

$$\Delta = f(x_0+h) - \varphi(x_0+h)$$

За взором Тейлора маємо:

1) $f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_0) + \dots \frac{h^n}{n!} f^n(x_0+\theta h)$

2) $\varphi(x_0+h) = \varphi(x_0) + h\varphi'(x_0) + \frac{h^2}{1.2.} \varphi''(x_0) + \dots \frac{h^n}{n!} \varphi^n(x_0+\theta h)$

де $f(x_0) = \varphi(x_0)$, бо $\eta_0 = y_0$

Звідци:

$$\Delta = h\left[f'(x_0) - \varphi'(x_0)\right] + \frac{h^2}{2!}\left[f''(x_0) - \varphi''(x_0)\right] + \dots + \frac{h^n}{n!}\left[f^n(x_0+\theta h) - \varphi^n(x_0+\theta h)\right] \dots (\delta)$$

Очевидно, що чим вищий буде ступінь h, що входить в цю-ріжницю, тим ближче будуть лежати криві одна до одної.

1) Припустім, що вартости:

$$f'(x_0) \neq \varphi'(x_0)$$

Тоді до цих кривих в точці M існуватиме дві окремі дотичні, себто ці криві перехрещуватимуться (рис. 55)

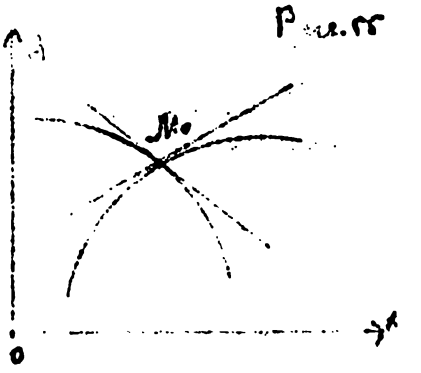


Рис. 55

Кажуть:

<u>Ці криві мають доторкання нулевого порядку.</u>

2) Коли б:

$$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

себто:

$$\Delta = \frac{h^2}{2!}\left[f''(x_0) - \varphi''(x_0)\right] + \dots$$

то ці криві мали б спільну дотичну в точці M_0, бо кутові змінники цих дотичних $f'(x_0)$ і $\varphi'(x_0)$ - є рівні. Ці криві дотикалися б в точці M_0. (рис. 56) <u>Це зветься доторканням 1го порядку.</u>

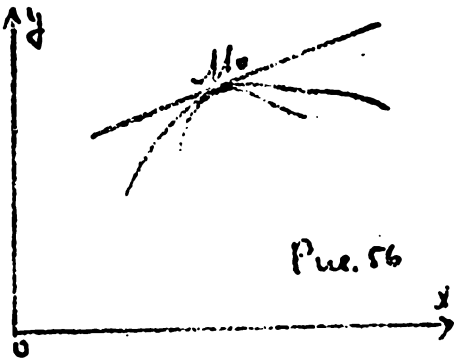


Рис. 56

3) Припустім тепер, що:

$$f'(x_0) = \varphi'(x_0) \text{ і } f''(x_0) = \varphi''(x_0) \text{ але } f'''(x_0) \neq \varphi'''(x_0)$$

Тоді:

$$\Delta = \frac{h^3}{3!}\left[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)\right] + \dots$$

Це є доторкання 2го порядку.

Загалом, коли k-ті похідні від рівнянь першої і другої кривої для значників даної точки є рівні між собою, а $(k+1)^{ші}$ похідні не рівні, себто коли:

$$\Delta = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\left[f^{(k+1)}(x_0) - \varphi^{(k+1)}(x_0)\right] + \dots$$

то криві мають в даній точці доторкання $k^{го}$ порядку.

§29. Геометричне трактування питання про доторкальність кривих.

Визначення.

Коли дві яких-небудь кривих мають спільну точку, що через неї можна повести спільну до обох кривих дотичну, то загалом кажуть, що ці криві доторкаються.

[Цим визначенням виключаємо звичайний перетин кривих (дві дотичних), що ми назвали доторканням нулевого порядку].

Існування спільної дотичної загалом показує, що точка M є складною, а саме: межовим положенням злиття не менше $2^х$ точок. Справді, чекожну одиноку точку можна повести безліч простих. Коли ж через дану спільну точку кривих можна провести лише одну просту дотичну до них, то мусить існувати хоча б без-

межно-малий відтинок простої, себто хоч дві точки, які зазначали напрям злитої з цим відтинком дотичної. Инакше кажучи, ми уявляємо дану точку M як сукупність 2х безмежно-близьких точок. Щоб оправдати цю умову, візьмім дві яких-будь криві L_1 і L_2, що мають спільну точку M (рис. 57) і поведемо [illegible] неї спільну до обох кривих дотичну MK. Цю дотичну можна розглядати, або як межове положення січної AB, коли

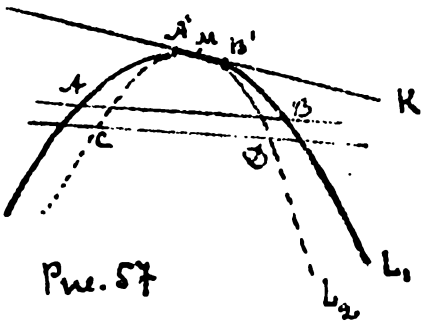


Рис. 57

точки A і B безмежно наближаються одна до одної, або як межове положення січної CD при анальогічних умовах. В обох випадках точка M є злиттям точок A і B, або C і D, або точніш M є сукупністю двох безмежно-близьких точок перетину січної з кривої, що простують до цілковитого злиття. Коли припустимо, що точки A' і B' є ці безмежно близькі точки, що утворюють M, то відтинок A'B', що є фактично частиною дотичної MK буде цілком визначений з напряму (як проста поміж двох точок), а тому й сама дотична MK буде цілковито визначеною. Це й є доторкання першого порядку

Розглянемо тепер доторкання 2го порядку. Припустім, що задані криві L_1 і L_2 мають три досить близькі одна до одної спільні точки (рис. 58) A, B і C. Ми знаємо, що через кожні три точки (що не лежать на простій) завжди може-

на повести цілком визначене коло. Коли б ці точки B і C все наближалися до A, то настав би час, коли дуги AB і AC злилися до нуля й ми одержали б точку злиття M, а коло придбало якесь певне положення і величину. Означимо через x і y біжучі координати якоїсь точки цього кола, а значки центра кола означимо через a і b, тоді рівняння цього кола матиме вигляд:

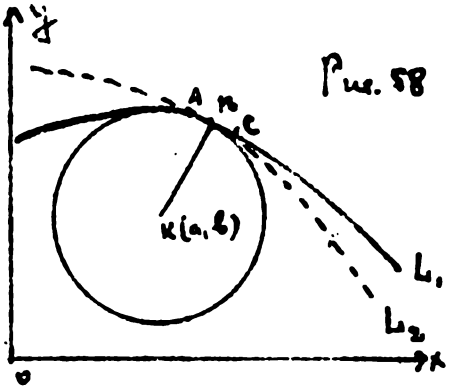


Рис. 58

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

Означимо значки точки A через ξ і η, а значки близької до неї точки B через $\xi_1=\xi+\Delta\xi$, $\eta_1=\eta+\Delta\eta$. Аналогічно значки точки C можемо означити через: $\xi_2=\xi_1+\Delta\xi_1$ і $\eta_2=\eta_1+\Delta\eta_1$. Коли коло рівняння (α) переходить через ці точки, то ми матимемо тотожності:

$$(\xi-a)^2+(\eta-b)^2=r^2 \quad \ldots\ldots (\beta)$$

$$(\xi_1-a)^2+(\eta_1-b)^2=r^2 \quad \ldots\ldots (\gamma)$$

$$(\xi_2-a)^2+(\eta_2-b)^2=r^2 \quad \ldots\ldots (\delta)$$

Віднявши від рівняння (γ) рівняння (β), маючи на увазі що $\xi_1=\xi+\Delta\xi$, $\eta_1=\eta+\Delta\eta$, одержимо:

$$(2\xi-2a+\Delta\xi)\Delta\xi+(2\eta-2b+\Delta\eta)\Delta\eta=0$$

або поділивши всі члени на $\Delta\xi$, матимемо:

$$(2\xi-2a+\Delta\xi)+(2\eta-2b+\Delta\eta)\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}=0$$

Коли ж точка B безмежно-наближатиметься до A, то $\Delta\xi$, а разом і $\Delta\eta$ простуватимуть до нуля, а через те:

$$\lim_{\Delta\xi\to 0}\left[(2\xi-2a+\Delta\xi)+(2\eta-2b+\Delta\eta)\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}\right]$$

матиме вигляд:

$$2(\xi-a)+2(\eta-b)\eta'=0$$

де $\eta'=\frac{d\eta}{d\xi}$, або:

$$(\xi-a)+(\eta-b)\eta'=0 \quad \cdots\cdots (K)$$

Це буде умовою проходження кола через точку A і безмежно-близьку до неї точку B. Також, відлічуючи рівняння (γ) із рівняння (б) і беручи на увагу що $\xi_2=\xi_1+\Delta\xi_1$; $\eta_2=\eta_1+\Delta\eta_1$, одержимо:

$$(2\xi_1-2a+\Delta\xi_1)\Delta\xi_1+(2\eta-2b+\Delta\eta_1)\Delta\eta_1=0$$

або ділючи на $\Delta\xi$ і беручи межу, коли $\Delta\xi_1\to 0$, одержимо:

$$(\xi_1-a)+(\eta_1-b)\eta_1'=0 \quad \cdots\cdots (\lambda)$$

де $\eta_1'=\frac{d\eta_1}{d\xi_1}$. Рівняння (λ) є умовою проходження кола через точки A і C, коли C безмежно наближається до A. Очевидно, що рівняння (K) і (λ) разом є умовою проходження даного кола через всі три безмежно близькі точки A, B і C.

Перетворимо цю умову й для того з рівняння (λ) відлічимо рівняння (K) і після поділу на $\Delta\xi$ маємо:

$$1+(\eta-b)\frac{f'(\xi+\Delta\xi)-f'(\xi)}{\Delta\xi}+\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}f'(\xi+\Delta\xi)=0$$

де ξ_1 ми замінили через $\xi+\Delta\xi$. Коли $\Delta\xi$ простуватиме-

ме то в межі матимемо:

$$1-(\eta-b)f''(\xi)+[f'(\xi)]^2=0$$

А звідси значники центру кола будуть:

$$a=\xi-f'(\xi)\frac{1+f'(\xi)^2}{f''(\xi)}$$

$$b=\eta+\frac{1+f'(\xi)^2}{f''(\xi)}$$

Легко бачити, що в даному разі ми одержали значники центру кривини, що одночасно є і центром нашого кола. Таким чином можна твердити, що коли дві криві мають в точці їх доторкання спільну кривину, то ця точка доторкання є потрійною

Доведемо ще, що при цьому матимемо справу з доторканням 2го порядку.

Хай значники заданої потрійної точки для кривої L_1 будуть x, y, а для кривої L_2 – ξ і η (рис 59) і ми знаємо що для даного випадку обидві криві мають спільну кривину. Тоді значники центру спільної кривини їх можна написати так: 1) Через значники кривої L_1

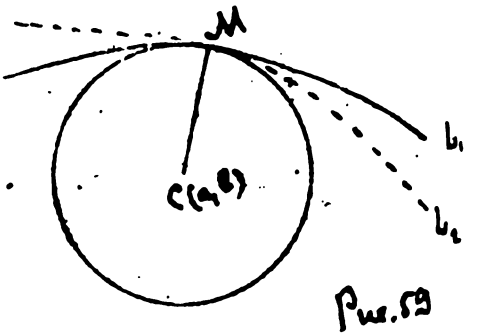


Рис. 59

$$(1)\quad a=x-y'\frac{1+y'^2}{y''}\qquad b=y+\frac{1+y'^2}{y''}\qquad \text{або:}\qquad x-a=y'\frac{1+y'^2}{y''}\qquad b-y=\frac{1+y'^2}{y''}$$

2) Через значники кривої L_2:

$$(2)\quad a=\xi-\eta'\frac{1+\eta'^2}{\eta''}\qquad b=\eta+\frac{1+\eta'^2}{\eta''}\qquad \text{або}\qquad \xi-a=\eta'\frac{1+\eta'^2}{\eta''}\qquad b-\eta=\frac{1+\eta'^2}{\eta''}$$

В кожній із систем (1) і (2) ділимо перше рівняння на друге й маємо:

$$y' = \frac{x-a}{b-y}; \quad \eta' = \frac{\xi-a}{b-\eta}.$$

Але точка M є спільною для обох кривих, а тому $\xi = x$; $y = \eta$, а через те:

$$y' = \eta'$$

Далі повертаючися до рівнянь (1) і (2) маємо:

$$a = x - y'\frac{1+y'^2}{y''} = \xi - \eta'\frac{1+\eta'^2}{\eta''}$$

$$b = y - \frac{1+y'^2}{y''} = \eta - \frac{1+\eta'^2}{\eta''}$$

Коли ж для точки M: $x = \xi$, $y = \eta$ і $y' = \eta'$, то й y'' мусить бути рівним η''.

Раз ми маємо $y' = \eta'$ і $y'' = \eta''$, то доторкання 2го порядку.

Тепер перейдемо до дослідження доторкання якого бажано Kго порядку. Очевидно, що коли в цьому випадку означимо рівняння даних кривих:

1) $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$, а значення спільної точки M через x_0, y_0 то матимемо:

$$f^{(k)}(x_0) = \varphi^{(k)}(x_0)$$

але:

$$f^{(k+1)}(x_0) \neq \varphi^{(k+1)}(x_0)$$

Точка ж M буде $(k+1)^{ої}$ кратності.

Розглянемо два випадки: коли k є паристе й коли k - непаристе.

Ми довели, що на випадок доторкання Kго порядку, маємо:

$$\Delta = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\left[f^{(k+1)}(x_0) - \varphi^{(k+1)}(x_0)\right] + \frac{h^{k+2}}{(k+2)!}\left[f^{(k+2)}(x_0) - \varphi^{(k+2)}(x_0)\right] + \dots$$

Очевидно, що знак Δ залежатиме від знаку лише 1-го члену правої частини, бо h є безмежно малим.

I. Коли k є числом парним, то число $(k+1)$ непарне і тому ступінь h^{k+1} буде змінювати знак в залежності від зміни знаку самого h. Разом з тим буде змінювати знак і Δ. Це свідчить (рис 60) що коли крива L_1 з одного боку точки M лежить ближче до осі x-ів ніж крива L_2, то з другого боку вісі от точки M - навпаки. Ми переконуємось, що дотичні криві в точці дотикання перетинаються.

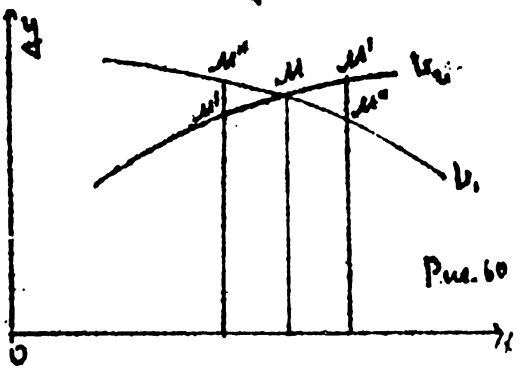


Рис. 60



Рис 61

II. Коли k є числом непарним, то $(k+1)$ буде парним через те, незалежно від знаку h ступінь h^{k+1} буде додатнього, а тому Δ знаку не змінюватиме з якого боку M не лежатиме точка M'. Це свідчить (рис 62) що крива L_2 з обох боків точки M лежить ближче до осі x-ів ніж крива L_1. Ми переконуємось, що дотичні криві в точці дотикання є дотичними одна до одної.

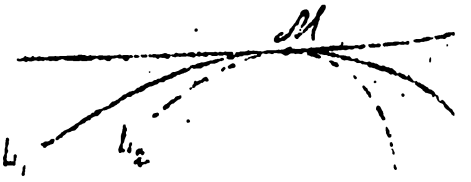


Рис. 62

Умовимося звати:

1) випадок, коли найвищий порядок рівних по- є непаристим - доторканням 1го роду.

і 2) випадок, коли найвищий порядок рівних похідних є паристим - доторканням 2го роду.

Очевидно, що доторкання 1го роду є взаємним дотиком кривих, а доторкання 2го роду перехрещенням кривих в якій будь точці, що лежить на спільній їй дотичній.

§30. Доторкальні криві.

Коли нам дається родина кривих, визначена рівнянням:

$$y = \varphi(x, d_1, d_2, d_3 \ldots d_n) \ldots (I)$$

і якась инша крива, що належить до цієї родини й визначається рівнянням:

$$y = f(x) \ldots\ldots (II)$$

то умовимося називати:

Доторкальною до даної кривої (II) ту криву з даної родини (I), що матиме з нею доторкання можливо найвищого порядку.

Ми в попередніх §§ довели, що умовою доторкання кривої:

$$y = \varphi(x, d_1, d_2, d_3, \ldots d_n)$$

(де $d_1, d_2, d_3 \ldots d_n$ є певно загадані сталі величини) з кривою $y = f(x)$ якого будь kго порядку є рівність k перших похідних вигляду:

$$
\text{III)}\quad \begin{cases} f'(x_0) = \varphi'(x_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) \\ f''(x_0) = \varphi''(x_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(k)}(x_0) = \varphi^{(k)}(x_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) \end{cases}
$$

(де x_0 значник точки доторкання)

Поставимо тепер задання противного характеру, а саме знайти між кривими родини (I) ту криву, що має з даною (II) доторкання $k^{го}$ порядку. Очевидно, що задача зводиться до визначення з системи (III) вартостей змінників $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ або инакше до вилучення їх з рівняння (I) за допомогою вищезгаданої системи. Ми до системи (III) зможемо додати ще одно рівняння, а саме:

$$
f(x_0) = \varphi(x_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) \ldots (\text{IV})
$$

й таким чином матимемо $k+1$ рівняння з n змінними. Очевидно, що коли $k < n-1$, то задача є неозначеною й у висліді вилучення змінників $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ з рівняння (I) ми одержимо нову родину кривих, залежних від $n-k-1$ змінника, що задовольнятимуть вимоги задачі. І лише в тому єдиному випадку коли $k = n-1$ ми матимемо лише одну (або кілько, залежно від числа розв'язків) цілком визначену криву з родини, що буде доторкальною до даної. Кривих же, щоб мали б доторкання до даної кривої вище ніж $(n-1)$ порядку не може бути, бо тоді мали б систему з більшим числом рівнянь ніж самих змінних а тому загалом не спільно-розв'язну. Правда,

ми можемо не задовольняти певної точки дотикання $M(x_0, y_0)$, себто її шукати і тоді в системі (III) і (IV) мали б ще одно зайве x_0 і всіх зайвих тоді було б $n+1$; очевидно, це створило необхідність додати до даних:

$$f(x_0) = \varphi(x_0)$$
$$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0)$$

ще одно рівняння: $f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0)$ і з них ми найшли б точку (вартість x_0) в якій би до кривої (II) було дотикання вже $n^{го}$ порядку. Але це була б одна (або кілька, залежно від числа розв'язків) точка, що мала б цю властивість. Ці точки будемо звати особливими.

Таким чином, найвищим порядком дотикання, що матимуть криві з родини (I) і заданою кривою (II) може бути $(n-1)^{ий}$ (на одиницю нижчий числа зайвих, від яких залежить родина). Одна крива з цієї родини, що матиме заданий найвищого порядку дотикання до даної прості і зветься дотичною до неї

Приклад. З даної родини прямих $y = ax + b$ залежної від $2^{ох}$ незалежних a, b, знайти дотичну до кривої $y = f(x)$

Означимо точку дотикання $M(x_0 y_0)$. Тоді ми маємо два зайвих і тому можливе лише дотикання $1^{го}$ порядку. Складаємо систему:

$ax_0+b=f(x_0)$ або: $ax_0+b=y_0$

$(ax_0+b)'=a=f'(x_0)$ або: $f'(x_0)=y_0'$.

Отже маємо систему:

$$ax_0+b=y_0$$

$$a=y_0'$$

Звідси: 1) $a=y_0'$; 2) $b=y_0-x_0y_0'$

Вставляючи ці величини в рівняння родини прямих, одержимо:

$$y=xy_0'+y_0-x_0y_0'$$

або:

$$(y-y_0)=y_0'(x-x_0)$$

Це є відоме рівняння дотичної в точці $M(x_0,y_0)$

Таким чином, кожна пряма дотична до даної кривої є її дотичною.

§31. Дотичальне коло.

Розв'яжемо задачу: Із родини кол: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ знайти коло дотичальне до даної кривої $y=f(x)$.

Ми маємо знайти $a, b, i=$, тому найвищий можливий порядок дотичання є другий. Отже, опишемо точку дотику через $M(x_0,y_0)$ і складаємо систему:

$$1)\ \varphi(x_0)=y_0$$

або, виписавши з $\varphi(x)=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$, знайдемо y:

$$(y-b)^2=-(x-a)^2+r^2;\qquad y=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}$$

маємо:

$$b+\sqrt{r^2-(x_0-a)^2}=f(x_0)=y_0$$

або:

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$$

(зрозуміло одержимо: коли $x=x_0$, то й $y=y_0$)

2) $\varphi'(x_0) = y'_0$

Визначимо y' і дорівнюємо її вартість до y'_0:

$(x-a) + (y-b)y' = 0$; $y' = -\frac{x-a}{y-b}$; $\frac{x_0-a}{y_0-b} = y'_0$ себто:

$$(x_0-a) + (y_0-b)y'_0 = 0$$

і 3) $\varphi''(x_0) = y''_0$

маємо

$$1 + (y'_0)^2 + (y_0-b)y''_0 = 0$$

А звідси, вилучивши a і b знайдемо:

$$r = \frac{(1+y'^2_0)^{3/2}}{y''_0}$$ вартість кола кривини.

Таким чином, дотичне коло є колом кривини. Це є дотикання другого порядку й тому дотичне коло перерецувати дану криву.

Доведемо тепер, що дотичне коло в точках максимум і мінімум кривини кривої мають дотикання 3го порядку (себто буде доминати кривої, а не перерецувати (рис 63)

Хай рівняння кривої буде:

$$y = f(x) \quad (\alpha)$$

а кола:

$$y = \varphi(x) \quad (\beta)$$

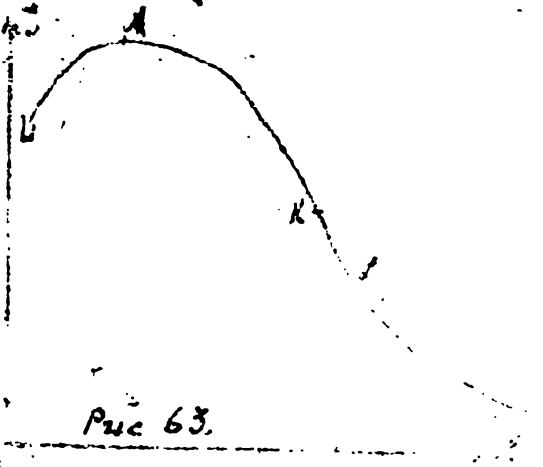


Рис 63.

Отже ми довели умови дотикання кола з точці $M(x_0, y_0)$

$$f(x_0) = \varphi(x_0)$$
$$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$
$$f''(x_0) = \varphi''(x_0)$$

Щоб доторкання було 3-го порядку необхідно також щоб:

$$f'''(x_0) = \varphi'''(x_0)$$

Доведемо, що це буде лише тоді, коли крива (d) матиме тахітит або тінітит кривини в даній точці $M(x_0, y_0)$

Ми знаємо, що кривина кривої має вигляд:

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Умовою, щоб ця крива мала тахітит або тінітит є рівність з нулем її першої похідної через x, себто:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

Отже має бути:

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2} y''' - \frac{3}{2}(1+y'^2)^{1/2} \cdot 2y'y''}{(1+y'^2)^3} = 0$$

або:

$$\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''}{(1+y'^2)^{5/2}} = 0$$

А звідци:

$$(1+y'^2)y''' - 3y'y'' = 0 \quad \cdots\cdots (8)$$

Але для даної кривої:

$$y_0 = f(x_0)$$

а тому:

$$\left[1 + f'(x_0)^2\right] f'''(x_0) - 3f'(x_0)f''(x_0) = 0$$

Але з другого боку луч кривини кола $y = \varphi(x)$ як луч загалом кола є <u>const</u>, а тому для кожної точки і разом для точки (x_0, y_0)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

Отже умова (8) задовольняється для всіх можливих значностей $y = \varphi(x)$, а також і для значності $y = \varphi(x_0)$. Тому:

$$\left[1 + \varphi'(x_0)^2\right]\varphi'''(x_0) - 3\varphi'(x_0)\varphi''(x_0) = 0$$

Звідси маємо:

$$\text{I)}\quad f'''(x_0) = \frac{3f'(x_0)f''(x_0)}{\left[1 + f'(x_0)^2\right]}$$

$$\text{II)}\quad \varphi'''(x_0) = \frac{3\varphi'(x_0)\varphi''(x_0)}{\left[1 + \varphi'(x_0)^2\right]}$$

Але $\varphi'(x_0) = f'(x_0)$; $\varphi''(x_0) = f''(x_0)$; тому: $\varphi'''(x_0) = f'''(x_0)$

§32. Асимптоти кривої.

I. Коли дана крива й пряма такі, що відстань між ними, що поміри віддалення якої будь точки кривої на безмежність, сама пряма безмежно наближається до неї, то ця пряма зветься асимптотою кривої.

II Означення: Асимптотою до кривої називають межове положення дотичної, точка дотику якої віддаляється на безмежність (від початку взятої системи координат)

III Асимптоту можна також розглядати і як межове положення січної (для алгебричних кривих) в яке вона приходить тоді, коли дві точки перетину цієї січної з даною кривою віддаляються на безмежність, рухаючись вздовж кривої в одному й тому самому напрямі.

В цілому дослідах ми ставимо умовою, що

асимптота, якщо з кривою якусь безмежна далеку точку в той час проходить, щодо координатних осей на обмеженому віддаленні від початку їх, а тому творить на осях координат або:

1) обидва обмежені відтинки, коли ця асимптота похила до осей координат (рис. 64), або

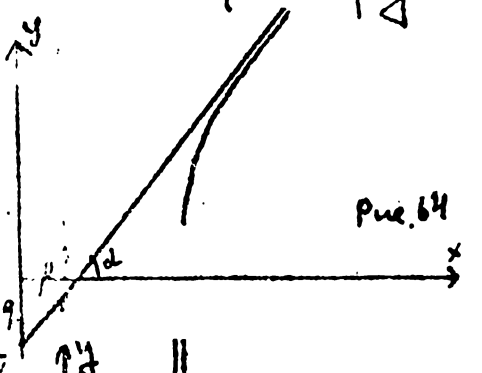


Рис. 64

2) один обмежений відтинок, коли ця асимптота паралельна до однієї з осей координат (рис. 65)

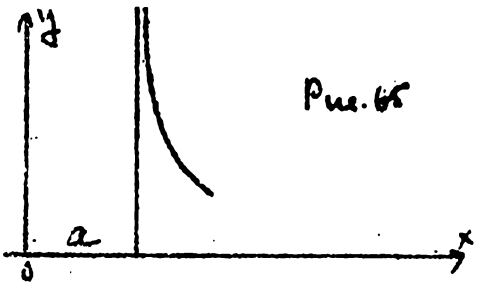


Рис. 65

Отже: Розглядаючи асимптоту як лінійове положення дотичної в точці $M_1(x_1, y_1)$ (коли ця точка віддаляється на безмежність) ми зможемо:

1) Взяти за рівняння асимптоти:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad \cdots \quad (1)$$

як простої, що творить відтинки p і q на осях координат. Коли ми за допомогою рівняння кривої зможемо обчислити ці вартості p і q, то положення асимптоти буде визначене, або

2) Взявши за рівняння асимптоти загальне рівняння прямої

$$y = mx + n \quad \cdots \quad (2)$$

також обчислити при цих умовах вартості m (кутового зміщення дотичної) і n відтинку на осі y-ів.

Хай рівняння кривої буде:

$$y = f(x)$$

а точка дотику x, y. Тоді дотична в цій точці матиме вигляд:

$$(Y - y) = \frac{dy}{dx}(X - x) \quad \cdots\cdots (3)$$

Обчислимо її відтинки на осях:

1) На осі x-ів: беремо $Y = 0$, тоді:

$$X = p_1 = x - y\frac{dx}{dy}$$

2) На осі y-ів: беремо $X = 0$, тоді:

$$Y = q_1 = y - x\frac{dy}{dx}$$

I <u>Випадок.</u> <u>Асимптота не рівнобіжна до осей координат.</u>

Тоді $x \ldots \infty$; $y \ldots \infty$ і відтинки, що творитеме асимптота на осях будуть:

$$p = \lim_{x \ldots \infty,\, y \ldots \infty} p_1 = \lim_{\substack{x \ldots \infty \\ y \ldots \infty}} \left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = k$$

$$q = \lim_{x \ldots \infty,\, y \ldots \infty} q_1 = \lim_{\substack{x \ldots \infty \\ y \ldots \infty}} \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = l$$

Через k і l ми [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

Вставляючи знайдені вартости k і l в рівняння (1) матимемо асимптоту:

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{l} = 1.$$

<u>Приклад.</u> Дано гіперболу:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Звідци:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y} \quad \text{або} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{a^2y}{b^2x}$$

$$\left(\text{бо } \frac{dy}{dx} = y' = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dy}}\right)$$

Тому: $p_1 = x - y\frac{a^2y}{b^2x} = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{b^2x} = \frac{a^2b^2}{b^2x} = \frac{a^2}{x}$

$$q_1 = y - x\frac{b^2x}{a^2y} = \frac{a^2y^2 - b^2x^2}{a^2y} = \frac{-a^2b^2}{a^2y} = -\frac{b^2}{y}$$

Коли взяти межу цих величин при $x \dots \infty$ і $y \dots \infty$, то матимемо: $p = 0$; $q = 0$ Це показує, що асимптота переходить через початок координатних осей. В цьому разі відтинкова рівняння (1) скористатися не можна і тому (і загалом) ліпше скористатися другим рівнянням (2), а саме:

$$y = mx + n$$

Відтинок $n = \lim\limits_{\substack{x \dots \infty \\ y \dots \infty}} q = \lim\limits_{\substack{x \dots \infty \\ y \dots \infty}} \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$, а відтинок m є межею величини кутового коефіцієнта дотичної (3), себто:

$$m = \lim \frac{dy}{dx}$$

Обчислимо його для нашої задачі:

$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$, але $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm b\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2}} = \pm \frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$

А тому:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}$$

Звідси:

$$\lim_{x \dots \infty} \frac{dy}{dx} = \pm \frac{b}{a}$$

Як довели вище $n = \lim q = 0$. Тепер шукане рівняння асимптоти:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

З цих міркувань ми можемо мати висліди:

1) Конечною умовою існування асимптоти до кривої $y = f(x)$; нерівнобіжної до координатних осей, є обмежені вартости меж виразів:

$$(A)\quad \begin{cases} 1)\ \lim\limits_{x\ldots\infty}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \lim\limits_{x\ldots\infty}\left[f(x) - x f'(x)\right] \\ 2)\ \lim\limits_{x\ldots\infty}\frac{dy}{dx} \end{cases}$$

[Першу умову, коли визначати обидва відтинки, відкидаємо, бо вона цілковито заступається другою, тим більш, що для обчислення вартости відтинку p перед тим маємо шукати межу першої похідної.]

Розглянемо ще одно спрощення. Ми бачимо, що на випадок існування асимптоти до кривої $y=f(x)$ рівність [A(1)] має простувати до обмеженої вартости, припустім n. Таким чином, наближаючися до цієї межі матимемо рівність:

$$y - x\frac{dy}{dx} = n + \varepsilon$$

де ε простує до нуля. Звідци поділивши обидві частини на x, маємо:

$$\frac{y}{x} - \frac{dy}{dx} = \frac{n+\varepsilon}{x}$$

Коли тепер взяти межу цього виразу, то матимемо:

$$\lim_{x\ldots\infty}\frac{y}{x} - \lim\frac{dy}{dx} = 0$$

(бо n - є обмежна величина, а $x\ldots\infty$.)

Звідси:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}$$

Ця границя показує, що відшукання другої границі $\lim_{x\to\infty}\frac{dy}{dx}$ завжди можна замінити відшуканням границі:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}$$

II Випадок. Асимптоти рівнобіжні до осей координат.

а) Коли асимптота рівнобіжна до осі x-ів, то очевидно, що в границі (A) вартість:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{dy}{dx}=0$$

і тоді наша границя рівняння асимптоти матиме вигляд:

$$y=n$$

де $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-xf'(x)]$

б) Коли асимптота рівнобіжна до осі y-ків, то очевидно, що в границі (A) вартість $\lim_{x\to\infty}\frac{dy}{dx}$ не має обмеженої границі, тоді нам треба буде рівняння асимптоти виражати через x, себто:

$$x=ky+l$$

В такому разі дотична, межовим положенням якої є дана асимптота, матиме рівняння:

$$X=(Y-y)\frac{dx}{dy}+x$$

[а справа: з рівняння $(Y-y)=\frac{dy}{dx}(X-x)$ маємо: $Ydx-ydx=Xdy-xdy$, а звідси:

$$X=\frac{Ydx-ydx+xdy}{dy}=\left[(Y-y)\frac{dx}{dy}+x\right]$$

З цього рівняння шляхом попередніх міркувань, одержимо:

$$1)\ \lim_{y\to\infty}\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = l$$

$$2)\ \lim_{y\to\infty}\frac{dx}{dy} = k$$

де l і k є обмеженні величини. У випадку асимптоти не $\parallel$ до осі y-ів $k \neq 0$, а коли асимптота є $\parallel$ до осі y-ів, то $k=0$ і ми маємо

$$x = l.$$

§33. Розглянемо ще випадок, коли рівняння кривої дано в параметровій формі:

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

і припустимо, що коли вартість t наближається до якої будь певної вартости t_0 (в границях $-\infty \dots +\infty$) то вартости y і x, або одночасно, або хочаби одна з них наближається до ∞ (себто, крива має безмежно-далеку точку).

Очевидно, що при умові $\lim_{t\to t_0}\varphi(t) = \infty$ і $\lim_{t\to t_0}\psi(t) = \infty$ в разі існування асимптоти має бути обмежена вартість межі:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{dy}{dx} = \lim_{t\to t_0}\frac{y}{x} = \lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = m$$

(кутовий коефіцієнт асимптоти).

Коли відомо на кривій яку-будь точку x, y то рівняння дотичної в ній буде:

$$Y - y = (X - x)\frac{dy}{dx}$$

або:

$$y - y_\Delta = (x - x_\Delta)\frac{y'_\Delta}{x'_\Delta}$$

а звідси:

$$y'_\Delta x - x'_\Delta y = x_\Delta y' - x' y_\Delta \quad \cdots\cdots (\alpha)$$

Коли величина t буде наближатися до даної t_0, то точка дотику шуканої дотичної буде простувати на безконечність і при $t = t_0$, ця дотична стане асимптотою. Отже, щоб мала асимптота існувала, необхідно, щоб лінійні вартості коефіцієнтів її рівняння: y'_Δ, $-x'_\Delta$, і $(x_\Delta y' - x' y_\Delta)$ при $t = t_0$ були обмеженими величинами. Доведемо, щоб відношення:

$$y'_\Delta : (-x'_\Delta) : (x_\Delta y' - x' y_\Delta)$$

простувало при тім же умові до певної межі. Тоді рівняння (α) виражатиме потрібну асимптоту.

Розглянемо звичайний для нього випадок приклад, а саме гіперболічну спіраль. Як відомо її рівняння буде:

$$r = \frac{a}{\varphi}$$

Перейдемо від цього рівняння до рівняння в декартових координатах за допомогою взорів перетворення:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

а саме, вставляючи в них з рівняння спіралі вартість r матимемо шукані залежникові рівняння спіралі:

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\varphi} \quad ; \quad y = \frac{a\sin\varphi}{\varphi}$$

де залежною є φ.

Очевидно, що коли φ наближається до нуля вартости x і y зростатимуть до безмежности. Отже, при $\varphi=0$ гіперболична спіраля має безмежно далеку точку. Дотична до цієї кривої матиме вигляд:

$$Xy' - Yx' = xy' - yx'$$

Але:

$$x' = a\frac{-\varphi\sin\varphi - \cos\varphi}{\varphi^2} = -\frac{a}{\varphi^2}(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)$$

$$y' = \frac{a}{\varphi^2}(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi) \quad і$$

$$xy' - x'y = \frac{a^2}{\varphi}(\overset{\varphi}{\cancel{\varphi\cos^2\varphi}} - \cancel{\sin\varphi\cos\varphi} + \cancel{\sin\varphi\cos\varphi} + \varphi\sin^2\varphi) = \frac{a^2}{\varphi^2}$$

Таким чином рівняння дотичної буде:

$$(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)x + (\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)y = a$$

Коли ж взяти $\varphi=0$, то одержимо рівняння асимптоти:

$$y = a.$$

§34. Перейдем тепер до <u>відшукання асимптот до кривих загаданих алгебричними рівняннями в невизначеній формі:</u>

$$\underline{f(x,y) = 0 \quad \ldots (1)}$$

Після спрощень таке рівняння можно розгорнути в многочлен $n^{го}$ виміру (ступінь кривої), згідно змінної x або y. Напр.

$$f(x,y) = a_0y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots = 0$$

де $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ є функції від x.

Візьмім якусь січну кривої, напр.

$$y = mx + p \quad \ldots (2)$$

ця січна матиме n точок перетину з кривою. Справді, розвязуємо разом рівняння (1) і (2); вставивши з 2го рівняння в 1ше вартість y, ми одержимо:

$$f(x, mx+p) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

Очевидно, щодо змінної x це рівняння буде також nго ступіня, а тому дасть n розвязків, себто існуватиме n точок перетину. На підставі визначення (III) §31 ця січна стане асимптотою лише тоді, коли дві з цих точок для однієї й тої галузі кривої будуть на безмежности (доторкання 1го порядку). Але це є можливим, коли рівняння (3) матиме два безмежно-великих розвязки.

Рівнянню (3) як алгебричному завжди можна дати вигляд:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots A_{n-1} x + A_n = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

де $A_0, A_1, A_2 \ldots A_n$ є функції m і p. З алгебричної аналізи ми знаємо, що коли сочинник найвищого члену рівняння наближається до нуля, то один з розвязків рівняння простує до ∞. Коли ж до нуля наближатимуться сочинники обох найстарших членів, то два з розвязків рівняння простуватимуть до нуля і т. д. Отже, щоб рівняння (4) мало два безмежно-великих розвязки є конечним, щоб:

$$A_0 = 0; \quad A_1 = 0$$

(А те рівняння, що залишиться, буде $n-2$ ступіня й дасть $n-2$ обмежних розвязки). A_0 і A_1 є функції m і p, а тому маємо систему рівнянь,

загалі визначимо потрібні вартості m і p.

Приклад 1. Візьмімо криву, що зветься декартовим листом (рис. 66). Її рівняння буде:

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

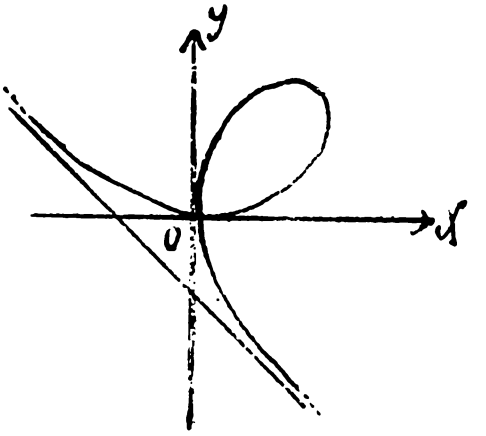


Рис. 66.

Означивши рівняння січної: $y = mx + p$ і вставляючи з нього вартість y в рівняння кривої матимемо:

$$x^3 + (mx+p)^3 = 3ax(mx+p) \quad \text{або:}$$

$$x^3 + m^3x^3 + 3m^2nx^2 + 3mn^2x + n^3 - 3amx^2 - 3anx = 0$$

звідки:

$$(1+m^3)x^3 + (3m^2n - 3am)x^2 + \ldots = 0$$

Дорівнюючи з нулем сполучники при x^3 і x^2, одержимо систему:

$$1 + m^3 = 0$$

$$3m^2n - 3an = 0$$

Тому:

$$m = -1 \text{ (одна реальна вартість)}$$

$$\text{і } n = -a$$

Таким чином рівняння асимптоти матиме вигляд:

$$y = -x - a$$

або:

$$x + y + a = 0$$

Приклад 2. Знайти асимптоту Вересіри Аньєзі, що має рівняння (рис. 67)

$$x^2y = 4a^2(2a - y)$$

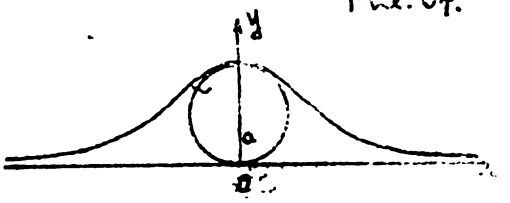


Рис. 67.

Означаючи рівняння січної $y = mx + n$, після вставки з

ного вартости y в рівняння кривої маємо:

$$x^2(mx+n) = 4a^2(2a - mx - n)$$

звідки:

$$mx^3 + nx^2 = 8a^3 - 4amx - 4a^2n$$

або:

$$mx^3 + nx^2 + 4amx + 4a^2(n-2a) = 0$$

Звідки $m=0$; $n=0$. Тому рівняння асимптоти $y=0$, себто, асимптотою служить сама вісь x-ів.

Приклад 3. Дано циссоїду Діокля рівнянням (рис. 68):

$$y = \frac{x^3}{2a-x} \quad \cdots (a)$$

Знайти асимптоти.

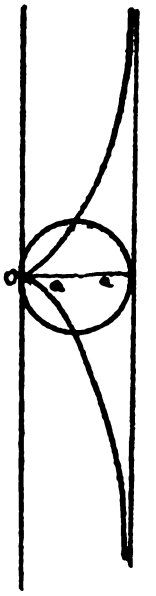


Рис. 68

Коли ми візьмемо рівняння січної: $y = mx + n$ (б), то розв'язання системи (а) і (в) дасть рівняння $m^2+1=0$, що показує, що асимптот не рівнобіжних до осей; або рівнобіжних до осі x-ів немає.

Очевидно може виникнути думка, що існує асимптота рівнобіжна до осі y-ів. Тоді типове рівняння січної: $x = ky + p$ (в) і шукаємо реальні вартости k і p. Для цього розв'язуємо систему (а) і (в) і маємо:

$$y^2 = \frac{(ky+p)^3}{2a-ky-p} \quad \text{або:} \quad y^2 = \frac{(ky+p)^3}{(2a-p)-ky}$$

Звідки:

$$-ky^3 + (2a-p)y^2 - k^3y^3 - 3k^2py^2 - 3kp^2y - p^3 = 0$$

Зрівнюючи з нулем сполучники найвищих ступенів у одержаному системі:

$$k(k^2+1) = 0$$

$$2a - p - 3k^2 p = 0$$

Розв'язуючи цю систему, ми з 1-го рівняння маємо лише один реальний розв'язок: $k=0$, а тоді з другого рівняння одержуємо:

$$2p - p = 0 \quad \text{або} \quad p = 2a$$

Отже існує лише одна асимптота рівнобіжна до осі y-ів, що визначається рівнянням:

$$x = 2a.$$

Можна також, для визначення асимптот (не рівнобіжних до осі y-ів) ми:

1) У рівняння кривої замість y вставляємо вартість $(mx+n)$ і розкриваємо многочлен через степені x.

2) Зрівнюємо знайдені сполучники двох найстарших членів і розв'язуємо одержане при цьому рівняння як систему, знайдемо m і n;

3) Коли виявиться розв'язання є реальні й обмежені то асимптота існує і визначається рівнянням, що одержується, коли в рівність $y = mx+n$ вставити знайдені вартости m і n

[Для відшукання асимптоти, рівнобіжної до осі y-ів, пробуємо тепер, вставляючи у рівняння кривої замість x вартість $(ky+l)$]

§35. Розглянемо тепер де-які спрощення на випадок відшукання асимптот рівнобіжних до координатних осей.

Хай рівняння кривої: $f(x,y) = 0 \cdots (1)$

Розглянемо це рівняння по степенях x:

$$\varphi_0(y)x^n + \varphi_1(y)x^{n-1} + \varphi_2(y)x^{n-2} + \cdots + \varphi_{n-1}(y)x + \varphi_n(y) = 0$$

і поділимо всі члени рівняння на вищу степінь x. Тоді:

$$\varphi_0(y) + \varphi_1(y)\frac{1}{x} + \varphi_2(y)\frac{1}{x^2} + \cdots + \varphi_n(y)\frac{1}{x^n} = 0$$

Коли б для цієї кривої існувала асимптота рівнобіжна до осі x-ів, то мусіла б існувати якесь обмежена вартість y, напр. $y = a$ для якої x зростало б до ∞ (рис. 69). Тоді для цієї вартости $y = a$ будемо мати:

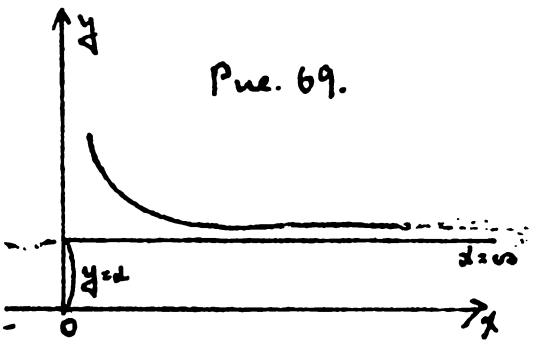


Рис. 69.

$$\varphi_0(a) + \varphi_1(a)\frac{1}{\infty} + \varphi_2(a)\frac{1}{\infty^2} + \cdots + \varphi_n(a)\frac{1}{\infty^n} = 0$$

а звідси:

$$\varphi_0(a) = 0$$

Це показує, що потрібна вартість (a) є розв'язком $\varphi_0(y)$, себто розв'язком співчинника при найстаршому степені x в рівнянні (1).

Аналогічно, (розглядаючи $f(x,y) = 0$ через степінчасті y і діливши всі члени рівняння на найвищий степінь y^n і т. д.) ми переконуємося, що коли існує асимптота рівнобіжна до осі y-ів, то відповідна їй обмежена вартість змінника x, буде завжди розв'язком співчинника найстаршого степеня y в рівнянні (1).

З цього маємо висновок:

Щоб знайти рівняння асимптоти:

1) рівнобіжної до осі x-ів прирівнюємо до нуля

сочинника, при найвищому ступіню x і розвязуємо його через y.

2) рівнобіжної до осі y-ів прирівнюємо до нуля сочинника при найвищому ступіні y і розвязуємо його через x.

Очевидно, що коли ці сочинники або не містять відповідних змінних, або мають уявні розвязки, то асимптот, рівнобіжних до відповідних осей координат немає. Коли ж розвязки цих рівнянь є обмежені й реальні, то в першому разі:

$$y = \alpha$$

а в другому разі:

$$x = \beta$$

є рівнянням відповідних асимптот. Коли ж одержані з сочинників рівняння є вищих ступінів і дають по кілька розвязків реальних, то й асимптот існує кілька.

Приклад 1. Напр., крива:

$$y(y^2-1)x^2 - y^2(6y-1)x + 8y^3 = 0$$

має: I) 3 асимптоти рівнобіжні до осі x-ів а саме:

$$y(y^2-1) = 0; \quad 1)\ y = 0; \quad 2)\ y-1 = 0; \quad 3)\ y+1 = 0$$

і II 2 асимптоти рівнобіжні до осі y-ів, а саме: розгорнувши рівняння по ступіням y:

$$(x^2-6x+8)y^3 + y^2x - yx^2 = 0$$

одержимо:

$$x^2-6x+8 = 0, \text{ а звідци: } 1)\ x = 4; \quad 2)\ x = 2$$

Приклад 2. Візьмім уже розглянені нами рів-

няння цисоїди:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$$

Маємо:

$$(2a-x)y^2 - x^3 = 0$$

1) Асимптоти рівнобіжної до осі x-ів немає, бо сочинник при старшому ступіні x'а є (-1) - стала величина.

2) Асимптота ж рівнобіжна до осі y-ів визначається з рівняння:

$$2a - x = 0 \quad \text{або} \quad x = 2a$$

§36 Асимптоти в бігунових координатах.

Припустім, що криву згадано в бігунових координатах рівнянням: $\varphi(r, \theta) = 0$. Хай ця крива має якусь безмежно далеку точку і в ній асимптоту. Очевидно, що в цій точці зустрінуться луч вектор цієї точки й асимптота. Зустріч їх буде на безмежному віддаленню, а тому на близькому до бігуна віддаленню і луч вектор і асимптота будут рівнобіжними (як дві прості, що перехрещуються на безмежності) (рис. 70)

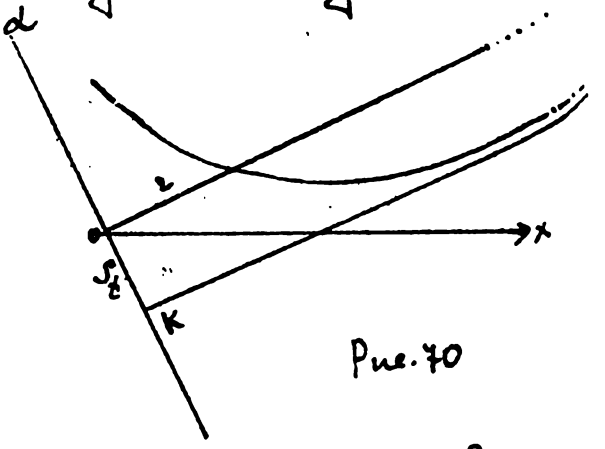


Рис. 70

Через бігун поведемо просту прямову до заданого луча вектора. Ця проста є вісью метів, а тому віддалення ок від бігуна до асимптоти (дотичної до кривої на безмежности) буде піддотичною її. Ми умовилися, що асимптота проходить на обмежному віддаленню від початку координат

а тому задана піддотична мусить мати обмежну вартість (бо асимптота рівнобіжна до r), а піддотична прямова до r, через те вона прямова до асимптоти, себто піддотична буде віддаленням асимптоти від бігуна).

Ці міркування дають такі висновки:

1) Кут спаду асимптоти на бігунову вісь, як рівний фазі вектора, поведеного в безмежну точку, легко визначити з рівняння кривої, змінивши в ньому r на ∞ (себто, шукаючи ту вартість θ в рівнянню кривої, що дає $r=\infty$)

2) Віддалення асимптоти від бігуна визначиться межою вартости піддотичної, коли в ній θ простує до величини, визначеної в 1). Себто:

$$d = \lim_{\theta \ldots \alpha} S_t = \lim_{\theta \ldots \alpha} r^2 \frac{d\theta}{dr}$$

Або визначаючи r із рівняння $\varphi(r,\theta)=0$, а саме: $r=\Psi(\theta)$, маємо:

$$d = \lim_{\theta \ldots \alpha} \left[\Psi(\theta)\right]^2 \frac{d\theta}{dr}$$

Примітка. Коли вартість d є додатня, то асимптота лежить з правого боку зглядно напрямку луча вектора, а коли d від'ємне, то з лівого

Приклад 1. Знайти асимптоти гиперболичної спіралі, рівняння: $r\theta = a$

Звідци:

$$\theta = \frac{a}{r}$$

Отже:

1) коли $r=\infty$; $\theta = 0$

себто асимптота рівнобіжна до бігунової осі (або пристає до неї).

2) $\frac{d\theta}{dr} = -\frac{a}{r^2}$; а тому $\lim\limits_{\theta \ldots 0} r^2 \frac{d\theta}{dr} = -a$,

себто асимптота проходить з лівого боку бігунової осі на віддаленню a, а саме: (див. рис. 71)

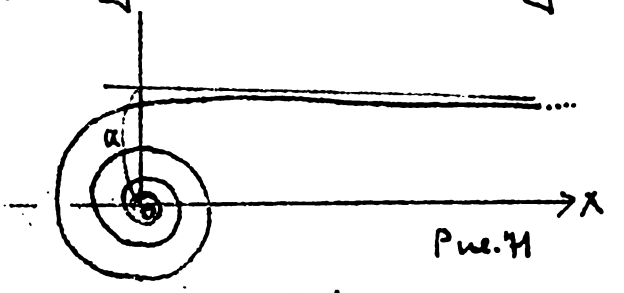


Рис. 71

<u>Приклад 2.</u> Знайти асимптоти Патериці (Litnus) рівняння: $r^2\theta = a^2$

1) $\theta = \frac{a^2}{r^2}$; $r = \infty$; $\theta = 0$

Асимптота рівнобіжна до бігунової осі (або пристає до неї).

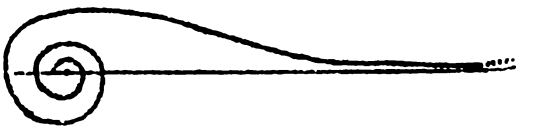
2) $\theta = \frac{a^2}{r^2}$; $\frac{d\theta}{dr} = -\frac{2a^2}{r^3}$

$\lim\limits_{\theta \ldots 0} r^2 \frac{d\theta}{dr} = \lim\limits_{\theta \ldots 0}\left(-\frac{2a^2}{r}\right)$ але $r = \frac{a}{\theta^{1/2}}$, тому:

$$d = \lim_{\theta \ldots \infty}\left(-2a\theta^{1/2}\right) = 0$$

Отже асимптотою є сама бігунова вісь (рис. 71)

Рис. 72.



<u>Приклад 3.</u> Знайти асимптоти до квадратової розети рівняння: $r = a\sin 2\theta$.

1) $\sin 2\theta = \frac{r}{a}$ кут θ, щоб луч вектор був би рівний ∞ немає ($\sin$ не може бути рівний ∞), а тому асимптот немає (рис. 73).

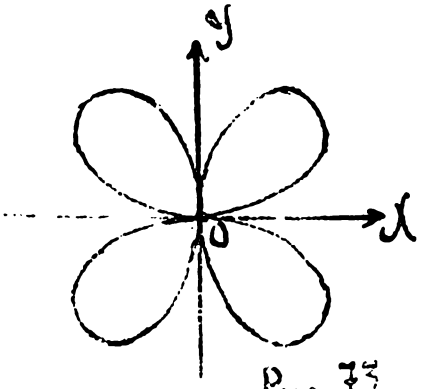


Рис. 73.

Приклад 4. Знайти асимптоти до цисоїди, визначеної рівнянням: $r = 2a\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta$.

1) $\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{2a}{r}$; при $r = \infty$ $\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = 0$

Звідци, або $\cos\theta = 0$, або $\sin^2\theta = \infty$, але $\sin^2\theta$ не може рівнятися ∞, а тому лишається $\cos\theta = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Асимптота є прямова до бігунової осі (себто піддотична мусить лежати на ній)

2) $\dfrac{dr}{d\theta} = 2a\,\overset{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}} + 2a\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = 2a\sin\theta\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)$

Звідци:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\cos^2\theta}{2a\sin\theta(1+\cos^2\theta)}$$

Отже:

$$d = \lim_{\theta\ldots\frac{\pi}{2}} r^2\frac{d\theta}{dr} = \lim_{\theta\ldots\frac{\pi}{2}} \frac{4a^2\sin^2\theta\,\mathrm{tg}^2\theta\cdot\cos^2\theta}{2a\sin\theta(1+\cos^2\theta)} = \lim_{\theta\ldots\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^3\theta}{1+\cos^2\theta} = 2a$$

Асимптота віддалена від бігуна на $2a$ (рис 74) і прямова до бігунової осі

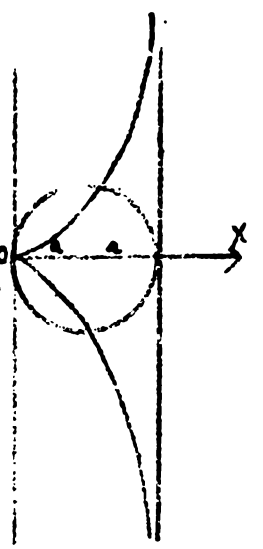


Рис 74.

Приклад 5. Знайти асимптоти конхоїди Никомеда, що має рівняння: $r = a\sec\theta \pm b$.

1) $r = a\sec\theta \pm b$; $\sec\theta = \dfrac{r \mp b}{a}$

при $r = \infty$ $\sec\theta = \infty$; $\theta = \frac{\pi}{2}$

Тому асимптота прямова до бігунової осі

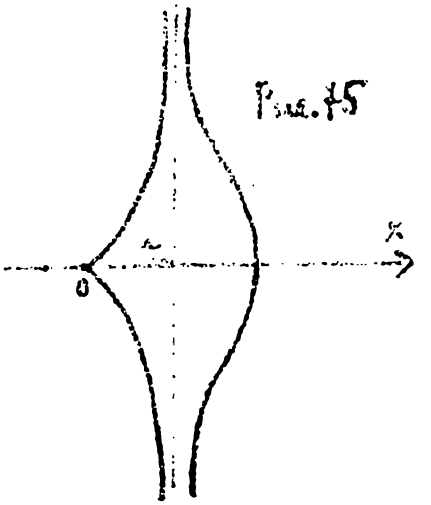


Рис. 75

2) $\dfrac{dr}{d\theta} = a\sec x\,\mathrm{tg}\,x$; $\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{a\sec x}$

Тому:

$$\lim_{\theta\ldots\frac{\pi}{2}} r^2\frac{d\theta}{dr} = a(a\sec\theta \pm b)^2\frac{\mathrm{ctg}\,x}{a\sec x} =$$

$$\lim_{\theta\ldots\frac{\pi}{2}} \frac{a}{\sin x} \pm 2b\,\mathrm{ctg}\,x + \frac{b^2\,\mathrm{ctg}\,x}{a\sec x} = a$$

Асимптота віддалена від бігуна на a (рис. 75).

§37. Особливі точки.

Визначення. Хай дано нам якусь криву $f(x,y)=0$ (рис. 76). Візьмім на ній точку P і навколо неї очеркнемо коло, як можна меншого луча. Звичайно таке коло перехрестить дану криву у двох точках M і N.

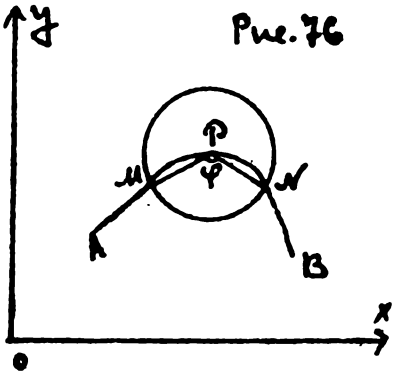


Рис. 76

В ці точки перехрестя з точки P поведемо лучі PM і PN. Хай кут між ними буде φ. Цей кут буде звичайно тупий і чим менш буде коло, тим більш буде наближатися до π, так, що можна сказати, що кут φ простує до вартости π при зменшенню луча кола r до нуля.

Така точка, що для неї виконуються згадані умови, а саме:

1) Коли коло, як бажано малого луча, очеркнуте навколо даної точки P перехрещує дану криву неодмінно в двох точках і коли

2) кут скривлення точок кривої (кут φ) завжди простує до вартости π при зменшенню луча цього прикметного кола даної точки до нуля зветься звичайною точкою.

Кожна точка для якої не виконується хоч одна із згаданих умов зветься особливою.

Розглянемо по черзі можливі порушення цих умов.

А) Порушення першої умови.

1) Коли прикметне коло даної точки кривої, яким би воно малим не було зустрічає цю криву в точках більш ніж двох. Така точка зветься кратною. (рис. 77).

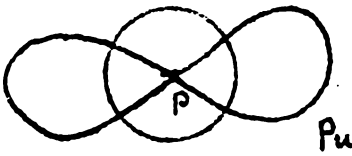


Рис. 77.

2) Коли можна взяти прикметне коло точки кривої остільки малим, що воно зустріне цю криву лише в одній точці. Така точка точкою закінчення або уриву кривої (рис. 78)

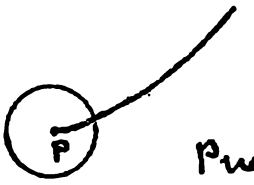


Рис. 78

3) Коли прикметне коло даної точки можна взяти таким малим, що воно не зустріне кривої, хоч значники цієї точки й задовольняють рівняння її, себто ця точка є належною до кривої. Така точка зветься відокремленою або ізольованою (рис. 79). Далі:



Рис. 78

В) Порушення другої умови.

Крім випадку не існування зовсім межі куту скривлення точок кривої (випадок, що ми його не будемо розглядати) можуть бути ще два випадки:

а) Кут скривлення простує до межі рівній з нулем.

б) Кут скривлення простує до межі відмінної від нуля й π.

В першому випадку:

4) Точка зветься точкою повернення або

<u>типами повороту.</u> Очевидно, що коли кут скривлення прямує до нуля по дотичній до обох гілок кривої будуть зливатися в спільну дотичну що й в останнього типу повороту. При цьому тип повороту може бути, або 1-го роду, коли гілки кривої лежать з обох боків дотичної (рис.80-а), або другого роду, коли обидві гілки лежать по одну бік дотичної (рис.80-б). В другому випадку, коли межа кута скривлення буде відмінна від 0 і π ми матимемо:

Рис.80а



Рис.80б

5) <u>Кутову точку або точку злому кривої.</u> В цьому разі через точку P переходить дві окремі дотичні до обох гілок кривої (рис.81, а, б, в) Точки 1, 3, 4 - зустрічаються переважно в алгебричних кривих, а точки 2 і 5 виключно у трансцендентних кривих.

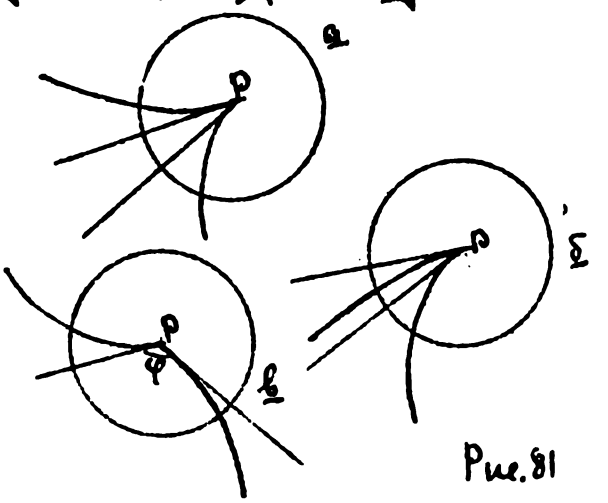


Рис.81

§8. <u>Визначення дотичної до алгебричної кривої в даній особливій точці й дослідження останніх.</u>

Припустимо, що дана алгебрична крива виражається рівнянням $F(x,y)=0$ і припустимо, що

в границях дослідження ця крива є тяглою й має похідні, себто розгортається в шерег Тейльора. Візьмім для дослідження якусь точку $M(x_1, y_1)$, що має обмежені значники (не безмежно-далеку точку) і в ній, як у початку збудуємо нові координатні осі $\xi\eta$ рівнобіжні до попередніх (рис. 82).

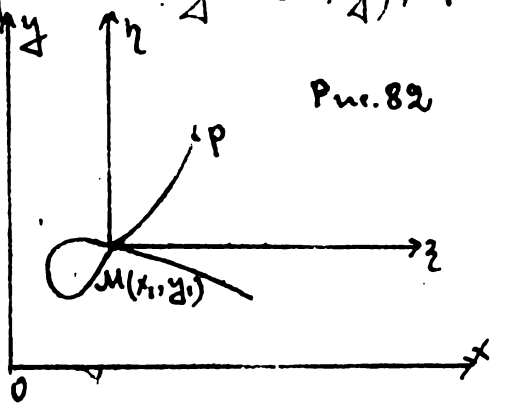


Рис. 82

Координати цього початку будуть x_1, y_1 а тому взори перетворення є: $x = x_1 + \xi$; $y = y_1 + \eta$. Чим ближче буде якась точка кривої P до точки M, тим менше будуть вартости ξ і η і для точки M вони обертаються в $(0, 0)$; таким чином ми можемо їх розглядати як певні прирощення до x_1 і y_1, а тому:

$$F(x, y) = F(x_1 + \xi, y_1 + \eta)$$

можна розгорнути в шерег Тейльора, а саме:

$$F(x, y) = F(x_1, y_1) + \frac{\partial F}{\partial x_1}\xi + \frac{\partial F}{\partial y_1}\eta + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\xi\eta + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\eta^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3}\xi^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^2 \partial y_1}\xi^2\eta + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial y_1^2}\xi\eta^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y_1^3}\eta^3\right) + \cdots = 0$$

Але точка (x_1, y_1) належить до кривої, а тому $F(x_1, y_1) = 0$ і ми маємо рівняння:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\xi + \frac{\partial F}{\partial y_1}\eta + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\xi\eta + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\eta^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3}\xi^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^2 \partial y_1}\xi^2\eta + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial y_1^2}\xi\eta^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y_1^3}\eta^3\right) + \cdots = 0 \quad \cdots (A)$$

Поведемо через точку M (як початок координат) просту:

$$\eta = m\xi \quad \ldots \quad (B)$$

де m є довільний кутовий коефіцієнт. Даючи йому всі можливі величини ми одержимо всілякі січні до кривої, що проходять через точку M. Щоб знайти точку перетину цих січних з кривою, нам треба розв'язати рівняння (A) і (B) як систему і ми матимемо:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + m\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)\xi + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + 2m\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} + m^2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\right)\xi^2 +$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3} + 3m\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^2 \partial y_1} + 3m^2\frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial y_1^2} + m^3\frac{\partial^3 F}{\partial y_1^3}\right)\xi^3 + \ldots = 0 \quad (C)$$

Ми бачимо, що ξ входить у всі члени рівняння, а тому перший розв'язок є $\xi = 0$ [а також і рівняння (B) і $\eta = 0$], себто перша точка перетину прямої з кривою є M. Решта розв'язків ξ (а тому й η) є не рівні з нулем, себто пряма зустрічає далі криву поза точкою M.

Для того, щоб пряма (B) була дотичною до кривої, треба (зважаючи з визначення розуміння дотичної) щоб і друга яка будь точка перетину січної з кривою зливалася з M. Це можливе, коли б рівняння (C) був би двократний розв'язок $\xi = 0$, себто, щоб у всі члени нового рівняння (C) ξ входило в квадраті. Очевидно, що це є можливим, коли ми доберемо величину m таке, щоб сталий член при ξ в першому ступіню був нулем, а саме, коли:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + m\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$$

А звідси маємо:

$$m = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y_1}}$$

А тому рівняння даної простої матиме ляд:

$$\eta = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y_1}}\xi$$

або (див. взори перетворення координат

$$(X - x_1)\frac{\partial F}{\partial x_1} + (y - y_1)\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$$

Це, як бачимо, є рівняння дотичної до кривої в точці $M(x_1, y_1)$ і таким чином точка M при цих умовах буде звичайною точкою [illegible].

Для того, щоб одержати згадану дотичну, ми доберали m так, щоб рівність:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + m\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$$

Але може бути, що зокрема й $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$ і $\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$ тоді очевидно при всякому m згадана рівність буде рівна з нулем, а тому кожна проста, що проходитиме через точку M уявляється з певного погляду дотичну, але без зазначеного її напряму. Це дає нам право вважати точку M не сукупністю двох безмежно-близьких точок, як ми це трактували для дотичної, а просто подвійною точкою (ніби накладеної одна на одну). Така точка зветься кратною й є особливою точкою. Очевидно, щоб зі всіх цих простих, що переходять через точку M вибрати справжню дотичну, таку

що має власний напрям, треба взяти ще одну точку безмежно-близьку M (зв'язану з нею). Ми знаємо, що кожна з прямих, що проходить через точку M зустрічає криву ще в кількох $(n-2)$ точках, а тому за прикладом попередніх міркувань доберемо вартість m так, щоб ще одна з точок поза M злилася з M. Це може бути тоді, коли z буде приймати нульовий розв'язок, себто всі члени рівняння (C) поділяться на z^3. Очевидно, що при умові $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$ і $\frac{\partial f}{\partial y_1}=0$ нам треба буде дібрати вартість m так, щоб і сочинник при z^2 був рівний з нулем, себто

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+2m\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}+m^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}=0 \cdots (\mathfrak{D})$$

Це рівняння квадратове, а тому дає два розв'язки для m. Отже через подвійну точку кривої можемо провести загалом дві дотичні (різні, злиті в одну, або уявні).

Проаналізуємо це:

Вираз $\mathfrak{D}$ (дискримінант) рівняння буде:

$$\mathfrak{D}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}$$

I) Коли $\mathfrak{D}>0$, то m має два різних дійсних розв'язки, а тому через подвійну точку M проходять дві дотичні. Така подвійна точка зветься вузлом. Отже ознакою того, що точка M є вузол буде:

1) $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$; 2) $\frac{\partial f}{\partial y_1}=0$ і 3) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}>0 \cdots (54)$

II) Коли $\mathfrak{D}=0$, то m має два однакових дійсних

розвязки, себто обидві дотичні зливаються в одну. Тут може бути два випадки 1) коли обидві галузі кривої віддаляються від дотичної з обох боків точки дотику, то точка зветься точкою самодоторкання кривої (рис. 83) і 2) коли обидві галузі кривої віддаляються від дотичної з одного боку точку дотику. Це є точка повернення (або шпиль повороту) (рис. 84 а, б).

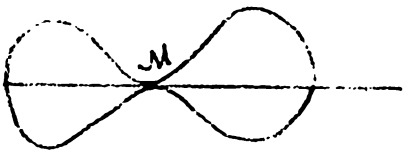


Рис. 83

Як ми казали, шпиль повороту є двох родів, але про це можна в кожному окремому випадку дізнатися звичайною вставкою у рівняння вартостей змінної близьких до вартостей точки дотику. Отже ознакою існування точки самодоторкання або шпилю повороту є:

$$1)\ \frac{\partial F}{\partial x_1}=0;\quad 2)\ \frac{\partial F}{\partial y_1}=0\quad і\ 3)\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\right)^2-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}=0 \quad \ldots\ (55)$$

III) Коли $D<0$, то розвязки m є уявні і тому дотичних в точці M не існує (вони є також уявні). Коли б ми вставкою дослідили вистарчально близькі точки до M, то переконалися б, що вони не задовольняють рівнянню кривої, себто точка M є відокремленою або ізольованою й ознакою її буде:

$$1)\ \frac{\partial F}{\partial x_1}=0;\ \frac{\partial F}{\partial y_1}=0\ і\ 3)\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\right)^2-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}<0 \quad \ldots\ (56)$$

Коли б другі похідні $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ одночасно самі по собі оберталися б в нуля, то ми мали б справу уже з потрійною кратною точкою.

В цьому випадку m також мало довільну вартість і кожна проста, що проходила через цю точку була свого роду „дотичною". Щоб і в цьому випадку мати „справжню" дотичну, ми на підставі попередніх доводів зрівняємо з нулем сочинник при z^3 в рівнянню (C), а саме:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3} + 3m\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^2 \partial y} + 3m^2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y^2} + m^3\frac{\partial^2 F}{\partial y^3} = 0$$

і визначаємо з цього рівняння m. В остаточному висліді ми мали б або 3 окремих реальних дотичних, або 2 з них злитих в одну й третю окрему, або всі три злитих в одну, або одну реальну а дві уявних.

Продовжуючи свою свою аналізу далі, ми зможемо одержати точку якої бажано кратности p.

Очевидно, що це буде тоді, коли всі $p-1$ окремих перших похідних обернеться одночасно в нуля (для даних значників точки M). Але над детальним розвязком цих кратних точок ми не будемо зупинятися.

З цілої нашої аналізи ми мусимо зробити такий висновок: <u>конечною умовою існування всіх особливих точок є обернення в нуля (для значників цих точок) перших окремих похідних:</u>

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \quad і \quad \frac{\partial F}{\partial y_1} = 0 \quad \ldots \quad (57)$$

Але це не є ще вистарчальною умовою, бо значники x і y знайдені із наданих рівнянь можуть і не задовольняти рівняння самої кривої, себто

знайдена точка, значитки якої є розвязки рівняння (57) не належатиме до кривої, а тому не буде її особливою.

З цих міркувань очевидно, що вистарчальною умовою того, щоб дана крива мала особливу точку є спільнорозвязність всіх трьох рівнянь:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \; ; \; \frac{\partial F}{\partial y}=0 \; \text{і} \; F(x,y)=0 \; \cdots \; (58)$$

Крім того, щоб ми могли класифікувати знайдену особливу точку відшукуємо другі окремі похідні і коли хоч одна з них не рівна з нулем - то ця точка є другої кратности, коли й другі похідні є рівні з нулем а лише між третіми окремими похідними є хоч одна не рівна з нулем - то точка є третьої кратности й т. д.

§39. Спрощений спосіб аналізи особливих точок.

Візьмім рівняння (A) й означимо сочинники в ньому через A, B, C і т. д., себто:

$$A\xi + B\eta + (C\xi^2 + D\xi\eta + E\eta^2) + (K\xi^3 - L\xi^2\eta + M\xi\eta^2 + N\eta^3) + \cdots = 0 \quad (I)$$

Коли в це рівняння вставити вартість $\eta = m\xi$ то рівняння (C) прийме такий вигляд:

$$(A + mB)\xi + (C + mD + m^2E)\xi^2 + (K + mL + m^2M + m^3N)\xi^3 + \cdots = 0$$

З наших міркувань знаємо, що коли існує особлива точка то $A=0$, $B=0$ дають розвязки, що задовольняють ціле рівняння. Далі, коли точка

є другої кратності, то хоч один із коефіцієнтів C або D або E не рівні з нулем, також що рівняння починається з членів другого виміру; коли точка третьої кратності, то C, D і E є рівні з нулем але хоч один із коефіцієнтів K, L, M або $N \neq 0$, себто рівняння починається з членів 3го виміру (як найнижчого) і т. д.

Отже при існуванні особливої точки $k^{ої}$ кратності рівняння перше починається з членів $k^{го}$ виміру, як найнижчого.

Коли, припустім, існує точка 2ої кратності то рівняння:

$$C + m\mathfrak{D} + m^2 E = 0 \quad \cdots \quad (\alpha)$$

дає можливість визначити кутовий коефіцієнт m для дотичної:

$$\eta = m\xi \quad \cdots \quad (\beta)$$

Очевидно, що визначивши m з рівнянь (α) і (β) ми одержимо рівняння системи дотичних (обох разом), а саме:

$$C\xi^2 + \mathfrak{D}\xi\eta + E\eta^2 = 0$$

Беручи на увагу рівняння (I) ми бачимо, що рівняння системи дотичних одержимо, коли в цьому рівнянні (I) зрівняємо з нулем сукупність членів найнижчого виміру (бо $A = 0$ і $B = 0$). Наприклад для точки 3ої кратності маємо: $A = B = C = \mathfrak{D} = E = 0$ і для визначення m маємо рівняння:

$$K + mL + m^2 M + m^3 N = 0$$

(з розвязки) Але вилучаючи m з цього рівняння і рівняння простої $\eta = \xi m$, одержимо рівняння системи системи 3х дотичних:

$$K\xi^3 + d\xi^2\eta + M\xi\eta^2 + N\eta^3 = 0$$

І знов спостерігаємо, що рівняння цієї системи дотичних одержимо прирівнюючи до нуля алгебричну суму членів найнижчого в даному разі виміру (бо $A = B = C = D = E = 0$)

Таксамо міркуючи, ми переконуємося, що на випадок $K^{ої}$ кратности точки ми одержимо систему K дотичних, прирівнявши до нуля алгебричну суму всіх членів $K^{го}$ виміру, що буде найнижчим виміром членів даного рівняння (бо всі попередні сочинники обернуться в нуля.)

Таким чином, для практики ми одержимо значно простіший спосіб визначення рівнянь дотичних, поведених через особливу точку, а саме:

1) Коли точка, що ми досліджуємо, не є початком координат, то систему координат перетворюємо рівнобіжним пересуванням до цієї точки, як початку.

2) Коли після перетворення існують члени 1го виміру, то початок координат (дана точка) не є особливою.

3) Коли ж членів 1го (а може й 2го, 3го і т. д.) виміру не існує, то початок координат є особливою точкою тої кратности, який найменший вимір мають члени рівняння.

4) Прирівнюючи до нуля алгебричну суму членів

рівняння найнижчого виміру, яке одержимо рівняння системи дотичних, проведених через цю точку. Після розкладання цього рівняння на рівняння 1го ступеня, матимемо рівняння окремих дотичних.

Приклад. Проаналізувати криву: $x^3-y^3+3y^2-xy-2x^2=0$

Крива не має вільного члену, тому початок координат належить до кривої. Далі це рівняння має найнижчий вимір членів - другий. Тому початок координат може бути точкою 2ої кратності. Рівняння системи дотичних буде:

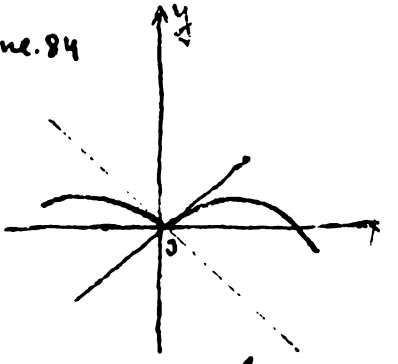
$$3y^2-xy-2x^2=0$$

Звідси:

$$(y-x)(2x+3y)=0 \quad \text{або} \quad y-x=0 \quad 2x+3y=0$$

Отже початок осей є точкою другої кратності. через яку переходять дві дотичні. (Рис 84)

Рис. 84



§40. Дослідження окремих випадків особливих точок.

Приклад 1. Дослідити точку 0(початок координат) Декартового листа визначеного рівнянням:

$$x^3+y^3-3axy=0$$

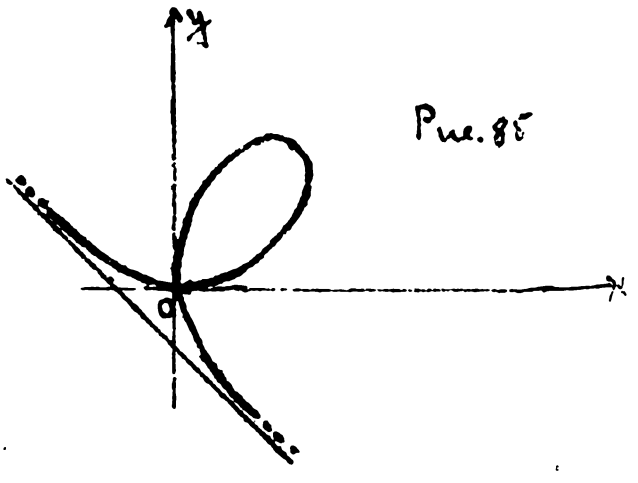


Рис. 85

1) Теоретичний спосіб:

$$\text{I)}\ \frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-3ay;\quad \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-3ax;\quad \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=0$$

Значення $x=0$; $y=0$ задовольняють рівняння кри-

вої і не більше обертаються $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ в нуля. Тому точка 0 є особливою.

II) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$; $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{x=0} = 0$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3a$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$; $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{y=0} = 0$ | тому: $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \neq 0$

Нерівність з нулем $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ показує, що точка є <u>подвійною.</u>

III) $\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9a^2 > 0$

Таким чином точка 0 (початок осей) є <u>вузлом</u> і має дві дотичні (рис. 85)

Для визначення т маємо:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2m\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + m^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$$

Отже:

1) $-2m \cdot 3a = 0$ або $6am = 0$; тому $m = 0$

2) $m = \infty$ (бо обертається в нуль сумніше при m^2.

Перший вислід показує, що дотична є вісю x-ів і має рівняння $y = 0$

А другий вислід показує, що друга дотична є вісь y-ів, себто $x = 0$

<u>2 спосіб (практичний)</u>

I) Найнижчий вимір членів рівняння є другий а тому точка може бути подвійною.

II) Рівняння дотичних одержуємо прирівнюючи до нуля члени $2^{го}$ (низького) виміру, а саме:

$3axy = 0$, або $xy = 0$, а звідси: $x = 0$; $y = 0$

Точка 0 має дві дотичні (осі координат).

тому є подвійною, а саме вузлом.

<u>Приклад 2.</u> Дано Лемніскату: $(x^2+y)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$

Дослідити точку O (поч. осей)

I) 1) $\frac{\partial F}{\partial x}=2(x^2+y^2)2x-4a^2x$; $\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=0$

2) $\frac{\partial F}{\partial y}=4y(x^2+y^2)+4a^2x$; $\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=0$

Початок осей є особливою точкою, бо $x=0$; $y=0$ задовольняють рівняння кривої

II) 1) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=4(x^2+y^2)+8x^2-4a^2$; $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=-4a^2$

2) $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)+8y^2+4a^2$; $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=4a^2$

3) $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=8xy$; $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=0$

Отже точка O є <u>подвійною.</u>

III) $D=16a^2>0$

Точка O – є <u>вузлом.</u> (рис. 86)

Далі шукаємо кутовий змінник дотичних.

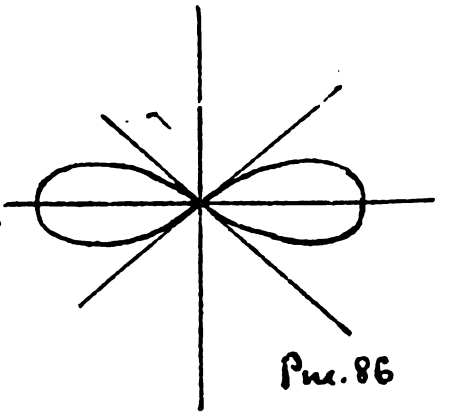


Рис. 86

IV) $-4a^2+4a^2m^2=0$

$m^2=1$; $m=\pm1$

Тому рівняння дотичних: $x\pm y=0$

<u>2й спосіб.</u>

Упорядкуємо рівняння лемніскати і матимемо:

$$x^4+y^4+2x^2y^2-2a^2x^2+2a^2y^2=0$$

Найнижчі члени другого виміру, а тому початок осей має бути подвійною точкою.

Прирівнюючи до нуля ці члени $2^{го}$ виміру, маємо:

$$2a^3x^2 - 2a^2y^2 = 0 \quad \text{або} \quad x^2 - y^2 = 0$$

Звідси рівняння дотичних: $x \pm y = 0$. Точка є вузлом.

Приклад 3. Дослідити точку O (початок координат) параболи Нейля (півкубічної) з рівнянням:

$$x^3 - ay^2 = 0$$

I) 1) $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2$; $\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{x=0} = 0$; 2) $\frac{\partial F}{\partial y} = -2ay$ $\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{y=0} = 0$

Отже початок осей є особливою точкою.

II) 1) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x$ $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]_{x=0} = 0$; 2) $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2a$ $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -2a$ 3) $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$

Отже точка є подвійною

III) $$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right]^2_{\substack{x=0 \\ y=0}} - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$$

Дві дотичні, що зливаються в одну.

IV) Рівняння дотичної: $2amx^2 = 0$; $m = 0$; тому дотична має рівняння: $y = 0$ (вісь x-ів).

Досліджуємо положення гілок кривої. З рівняння параболи маємо:

$$y^2 = \frac{x^3}{a} \; ; \quad y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

При $x > 0$ y має дві однакові величини різних знаків. Тому крива положена симетрично щодо осі x-ів. При $x < 0$, величини y є уявні. Отже крива лежить з обох боків дотичної, але з одного боку вісі y-ів. Тому є точкою повернення $1^{го}$ роду (рис. 87)

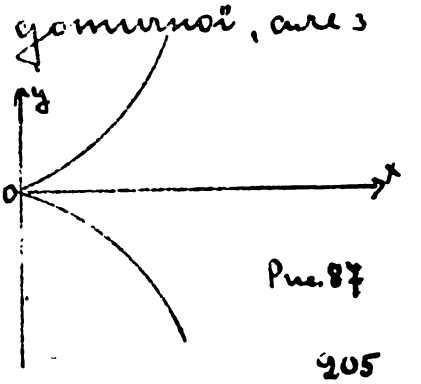


Рис. 87

2 спосіб. Найпростіший вигляд рівняння є другий, а

тому дотична є подвійною.

Прирівнюючи до нуля члени $2^{го}$ виміру, маємо:

$$ay^2 = 0$$

Отже одержуємо дві злиті дотичні рівняння:

$$y = 0 \quad (\text{вісь } x\text{-ів})$$

Вище наведені дослідження гілок кривої свідчать, що початок осей є точкою повернення $1^{го}$ роду.

Приклад 4. Дано криву: $x^5 - x^4 + 2x^2(y-2) + 4y - y^2 = 4$. Знайти особливі точки.

Умовою існування такої точки є: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ і $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Отже:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 5x^4 - 4x^3 + 4x(y-2) = 0 \cdots (a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2 + 4 - 2y; \quad y = x^2 + 2 \cdots (б)$$

З першого рівняння $x = 0$; $5x^3 - 4x^2 - 4(y-2) = 0 \cdots (в)$

А з другого рівняння вставка $x = 0$ дає: $y = 2$. Крім того, вставляючи вартість y з (б) у рівняння (с) маємо:

$$5x^3 - 4x^2 + 4x^2 = 0; \quad 5x^3 = 0; \quad x = 0$$

Отже маємо єдиний розв'язок: $x = 0$; $y = 2$. Вставляємо їх в рівняння кривої і маємо тотожність. Тому точка $M(0,2)$ є особливою.

Тепер перетворимо криву до нових, рівнобіжних до старих координат з початком в точці M. Взори перетворення будуть:

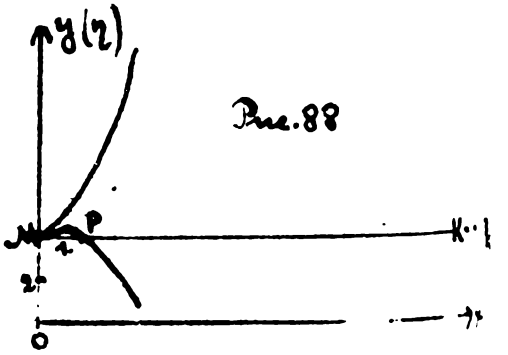


Рис. 88

$$x = \xi; \quad y = \eta + 2$$

тому:

$$\xi^5 - \xi^4 + 2\xi^2\eta + 4(\eta+2) - (\eta+2)^2 = 4$$

або

$$\xi^5 - \xi^4 - 2\xi^2\eta - \eta^2 = 0$$

Прирівнюючи до нуля член найнижчого (себто другого) виміру, маємо:

$$\eta^2 = 0 \quad \text{або:} \quad \eta = 0$$

Отже маємо в цій точці дві дотичні $\eta = 0$ і $\eta = 0$, що злилися. Тому точка є подвійною, що має за дотичну вісь ξ-ів.

Досліджуємо положення гілок кривої:

$$\xi^5 = (\xi^2 - \eta)^2 \text{ або } \xi^2 - \eta = \pm\xi^{5/2}; \text{ або: } \eta = \xi^2(1 \pm \xi^{1/2})$$

Ми бачимо що:

1) Реальні вартості η існують лише для $\xi > 0$ (бо при $\xi < 0$ $\sqrt{\xi} = \xi^{\frac{1}{2}}$ має уявну вартість). Отже крива має свої гілки від точки O в бік додатніх x-ів.

2) η має дві вартості (дві гілки). При тому для вартостей (рис. 88) $\xi < 1$, обидві вартості η додатні, а тому обидві гілки кривої лежать вгорі над віссю ξ-ів, себто вгорі спільної дотичної. При $\xi = 1$; $\eta = 0$: одна гілка перетинає в точці P свою дотичну і при $\xi > 1$ - ця гілка лежить під дотичною.

Отже, ці міркування дають зрозуміти, що особлива точка $M(0,2)$ є точкою повернення (типом повороту) $2^{го}$ роду.

Приклад 5. Дослідити особливі точки кривої:

$$a^4y^2 = x^4(a^2 - x^2)$$

$$1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -4x^3(a^2 - x^2) + 2x^5 = 0$$

$$2) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2a^4y = 0$$

Розв'язуючи ці рівняння маємо: $y = 0$; $x = 0$; $x = \pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Вставляючи ці вартості в рівняння кривої, пере-

конуємося, що йому задовольняють вартости:

$$x=0; \quad y=0$$

Отже точка $O(0,0)$ є особливою (початок координат). Прирівнюючи до нуля члени найнижчого виміру маємо:

$$a^4y^2=0, \text{ звідци: } y^2=0$$

Маємо дві дотичних злятих в одну рівняння (рис. 89)

$$y=0$$

[Спільна дотична є вісь x-ів]

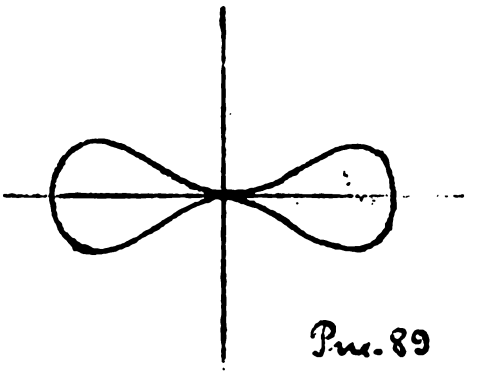


Рис. 89

<u>Перевірка.</u> Беремо другі похідні й маємо:

1) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -12x^2(a^2-x^2)+8x^4+10x^4 =$

$= 30x^4-12a^2x^2$. Отже: $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$

2) $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2a^4 \neq 0$ 3) $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$

Таким чином підтверджуємо, що точка є подвійною і має спільну дотичну, бо:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Дослідимо галузі кривої:

$$y = \pm\frac{x^2}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$$

Для всіх вартостей $|x|<a$ ми маємо реальні вартости y, себто крива лежить з обох боків вісі y-ів, Отже <u>не повертається</u> в точці O, а тому ми маємо точку <u>самодоторкання.</u> (Рис 89)

<u>Приклад 6.</u> Дослідити особливі точки кривої „Каппа",

що визначається рівнянням: (рис. 90)

$$y^4 = x^2(a^2-y^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x(a^2-y^2); \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3+2x^2y$$

Звідци маємо систему:

$$2x(a^2-y^2)=0$$
$$2y(y^2+x^2)=0$$

Розвязки її 1) $x=0$; $y=0$ 2) $y=\pm a$; $x=\pm ai$. Розвязки 2) - відкидаємо, як уявні, а вставка 1х розвязків в рівняння кривої дає тотожність. Отже початок координат $O(0,0)$ є особливою точкою.

$$1)\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2(a^2-y^2); \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = -2a^2$$

$$2)\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 12y^2+2x^2; \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

$$3)\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = 4xy; \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Тому:

$$\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Має дві злятих дотичні, а саме прирівнюючи до нуля члени найнижчого виміру маємо:

$$x^2a^2=0$$

Звідци: $x=0$ (два однакових розвязки). Дотична є вісь y-ів.

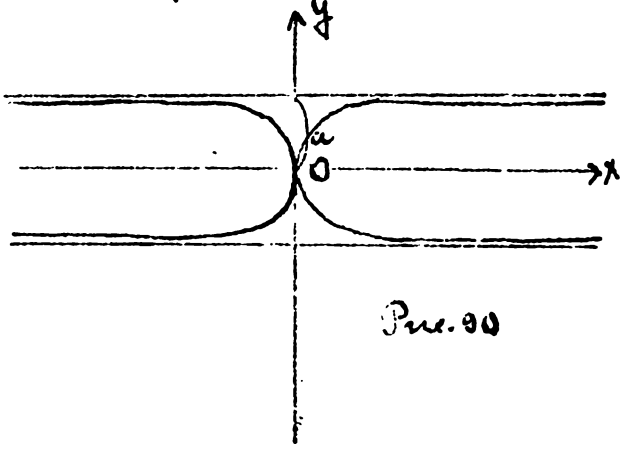


Рис. 90

Досліджуємо галузі

$$x = \pm\frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

Ми бачимо, що для вартостей $|y|<a$ (додатніх і

і відємних) x має реальні вартости. Отже галузі кривої лежать з обох боків дотичної щодо точки O тому це є точкою самодоторкання.

[Заразом ми бачимо, що при $|y| = a$, вартість $x = \infty$, отже прості $y = a$ і $y = -a$ є асимптоти кривої]

Приклад 7. Дослідити особливі точки кривої:

$$(y-2)^2 = x(x+1)^2$$

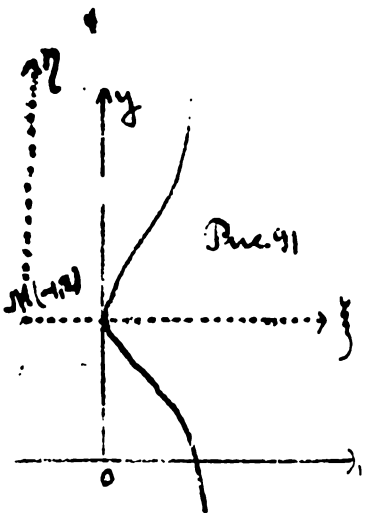


Рис. 91

Шукаємо значники особливої точки:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -(x+1)^2 - 2x(x+1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-2)$$

Отже маємо систему:

1) $(x+1)^2 + 2x(x+1) = 0$ або $(x+1)(3x+1) = 0$

2) $y - 2 = 0$

Звідци: $y = 2$; $x = -1$; $x = -\frac{1}{3}$. Вставка цих розв'язків у рівняння кривої показує, що цьому рівнянню задовольняють значники точки $M(-1, 2)$. Отже вона є особливою.

Перенесім координати рівнобіжно собі до точки M, як початку. Взори перетворення: $x = \xi - 1$, $y = \eta + 2$. Тому рівняння кривої в нових координатах має вигляд:

$$(\xi - 1)\xi^2 = \eta^2$$

і має особливу точку $M(\xi = 0, \eta = 0)$

1-й спосіб.

1) $\frac{\partial F}{\partial \xi} = 2\xi(\xi - 1) + \xi^2$; $\left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\right]_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = 0$ $\quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = -2\eta$; $\left[\frac{\partial F}{\partial \eta}\right]_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = 0$

2) $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 6\xi - 2$; $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right]_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = -2$

$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = -2$. $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right]_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = -2$; $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2 \partial \eta} = 0$. Тому:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right]_0 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}\right]^2_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = -4 < 0$$

Точка є ізольованою (відокремленою). (рис 31).

2й спосіб.

Рівняння: $\xi^3 - \xi^2 - \eta^2 = 0$

не має членів нижче 2го виміру й тому має подвійну точку. Рівняння дотичних буде:

$$\xi^2 + \eta^2 = 0 \text{ ; або } \xi = \pm \eta i$$

Дотичні є уявні, а тому точка є ізольованою. Справді, з рівняння кривої маємо:

$$\eta = \pm \xi \sqrt{\xi - 1}$$

Ми бачимо, що для вартостей $\xi < 1$, вартості η є уявні, а тому крива не переходить через початок координат (цей початок уявляє ізольовану точку) Коли $\xi = 1$, то крива перетинає вісь ξ-ів, бо $\eta = 0$

Приклад 8. Знайти особливі точки кривої:

$$(x^2 - y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

2й спосіб. Рівняння має членів найнижчого 2го виміру, тому існує подвійна точка в початку координат: $O(0,0)$.

Рівняння дотичних:

$$x^2 + y^2 = 0 \text{ або } x = \pm yi$$

Отже точка має бути ізольованою. Справді:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x^2 - y^2) - 2a^2 x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^2} = 4(x^2 - y^2) + 8x^2 - 2a^2 ; \left[\frac{\partial F}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=0\\ y=0}} = -2a^2$$

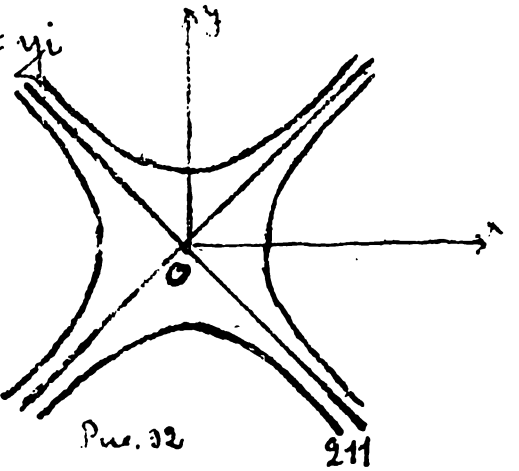


Рис. 32

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -4y(x^2-y^2) - 2a^2y$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -4(x^2-y^2) + 8y^2 - 2a^2; \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = -2a^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -8xy; \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Отже:

$$\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = -4a^2 < 0$$

§41. Особливі точки трансцендентних кривих.

Ми розглянули особливі точки, що належать до алгебричних кривих і для дослідження їх користалися розгорненням функції в шерег Тейльора. Але існує багацько й таких трансцендентних кривих, що мають також особливі точки, напр., точки закінчення, або кутові точки. Щоб ознайомитися з ними ми розглянемо де-кілько прикладів.

Приклад 1. Хай крива має рівняння: $y = e^{\frac{1}{x}}$

Коли візьмемо для x вартість 0, то y одержує невиразну вартість, а саме:

До вартости нуль x може простувате або 1) через додатні свої вартости й тоді $\lim\limits_{x\ldots 0} y = \lim e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty$, або 2) через відємні вартости й тоді $\lim y = \lim e^{-\frac{1}{|x|}} = e^{-\infty} = 0$. Таким чином крива складається з 2^x окремих галузів, що підходять до осі y-ів ($x \ldots 0$), перша галузь асимптотично (бо при $x \ldots 0$, $y \ldots \infty$) а друга переходить через початок осей ($x \ldots 0$, $y \ldots 0$). Перша галузь існує лише для додатніх вартостей x,

а друга лише для від'ємних. Далі, виражаючи x з рівняння маємо: $\frac{1}{x} = \lg y$; $x = \frac{1}{\lg y}$. Це показує, що коли y наближається до вартості 1, тоді вартість x простує на безмежність, себто пряма $y=1$ є асимптотою кривої для обох гілок. З цих міркувань робимо висновки:

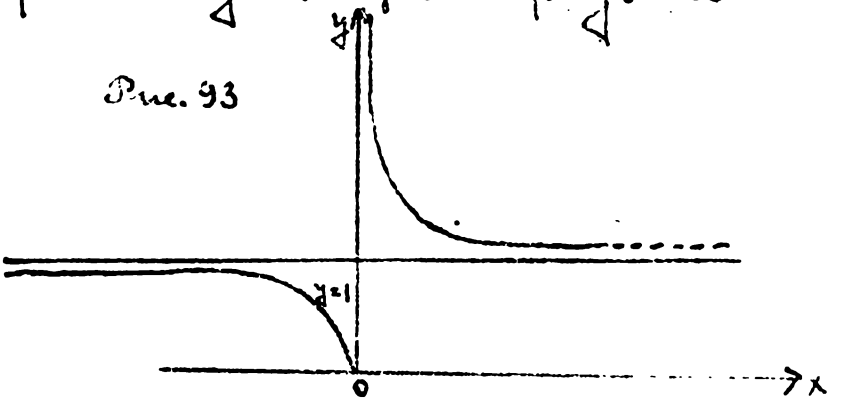


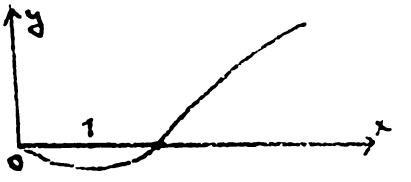
Рис. 93

1) **Перша** (додатна) гілка кривої обмежена прямими $x=0$ (віссю y-ів) і $y=1$ і йдучи своїми кінцями на безмежність, асимптотично наближуються до даних прямих (рис. 93).

2) Друга (від'ємна) гілка кривої одним кінцем йде на $-\infty$, асимптотично наближаючись до прямої $y=1$, а другим кінцем вирастає в точку $0(x=0; y=0)$ і далі не продовжується. Отже точка 0 є особливою точкою, а саме точкою зачіпання (або дотику) кривої.

Приклад 2. Дано криву рівнянням: $y = x \lg x$

Змінна x входить у рівняння під знаком $\lg$, а тому x не може бути від'ємним, себто $x \geq 0$. Отже наша крива лежить з боку додатніх x-ів. Коли $x=0$, то і $y=0$. Отже крива вирастає в початку осей і складається з одної гілки (бо кожній вартості x відповідає лише одна вартість y). Таким чином точка $0(0,0)$ є точкою зачіпання кривої (рис. 94). [Ця крива для вартостей $x<1$ буде під віссю x-ів



бо їд правдивих дробів <0; для вартости $x=1$ й $y=0$ крива переходить через вісь x-ів і для вартости $x>1$ і $y>0$, себто крива йде над віссю x-ів]

Приклад 3. Дослідити особливі точки кривої:

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

Коли візьмемо вартість $x=0$, то й $y=0$, незалежно від того як x простує до нуля чи через від'ємні, чи через додатні свої вартости [бо при переході x до нуля через вартости <0, числитель буде 0, а знаменатель 1 (знак вартости y буде заховуватьcя -), а при переході до нуля величина x через додатні вартости, числитель буде однаково нуль, а знаменатель ∞] Отже крива лежить з обох боків початку координат, що-до осі y-ів, причому додатня галузь лежить в 1 чтверці, а від'ємна в 3й чтверці координат

Далі розглянемо дотичну в точці $(0,0)$. Очевидно її рівняння буде:

$$y=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}\cdot x$$

Знайдемо вартість $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}$:

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, \text{ тому } \frac{dy}{dx}=\frac{x(1+e^{\frac{1}{x}})+e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$$

Але беручи межу $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}$ ми мусимо зауважити що вартість її буде подвійна, залежно від способу пристосування до 0 вартости x. Справді, коли x буде простувати до 0 лишаючися >0, то матимемо:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}=0$$

а коли x буде простувати до 0 лишаючися < 0, то:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = 1$$

Таким чином, до кривої в точці O буде 2 дотичні:

$$y=0 \quad і \quad y-x=0$$

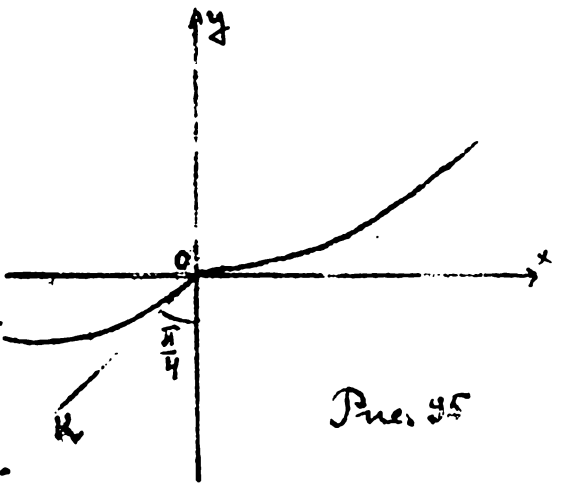


Рис. 95

Ця точка не є кратною, а тому зветься кутовою точкою або точкою злому кривої. (рис. 95). В цій точці одна дотична для додатньої галузі є вісь x-ів, а друга для від'ємної галузі є симетральною 3ої чвертки координат.

Приклад 4. Довести, що крива: $y = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ має кутову точку в початку координат.

При $x=0$ (незалежно від способу простування до цієї вартости) $y=0$ (бо $\operatorname{arctg} \pm\infty$ буде уявляти не парне число $\frac{\pi}{2}$ - себто число обмежене). Також з цього очевидно, що крива буде лежати з обох боків вісі y-ів. Поведемо січні кривої через точку O, як початок осей; рівняння їх загалом буде: $y = mx$. Коли візьмемо на кривій яку-будь точку (x_1, y_1), то одна з цих січних, що переходитиме через дану точку матиме рівняння:

$$y = \frac{y_1}{x_1} x$$

Щоб одержати дотичну в точці O, примусимо вартості x_1, y_1 простувати до нуля [до злиття точки $M(x_1, y_1)$ з точкою $O(0,0)$]. Тоді кутовий змінник дотичної:

$$m = \lim \left[\frac{y_1}{x_1}\right]_{x_1 \ldots 0}$$

Точки y_1 і x_1 належать до кривої, а тому задовольняють її рівняння й ми маємо тотожність:

$$y_1 = x_1 \operatorname{arctg} \frac{1}{x_1}$$

а звідци:

$$\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x_1}$$

Тому:

$$\lim_{x_1 \ldots 0} \left[\frac{y_1}{x_1}\right] = \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{x_1}\right]_{x_1 \ldots 0}$$

Ми знова переконуємося, що ця межа має дві вартости, а саме:

1) Коли x_1 простує до нуля через додатні вартости то $\operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$;

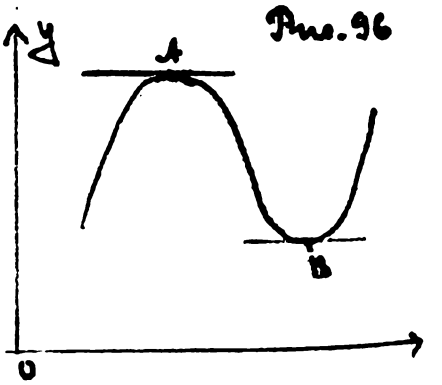
2) Коли x_1 простує до нуля через від'ємні вартости, то $\operatorname{arctg} -\infty = -\frac{\pi}{2}$

Отже точка 0 - є кутовою точкою.

§42 Про точки перегнуття.

Для більшої повноти дослідження точок перегнуття згадаємо ще умови визначення maximum'а й minimum'а функцій, а також визначення точок перегнуття. Як ми вже розглядали теоретично, крива матиме maximum або minimum щодо осі x-ів в тих точках, для яких дотична до кривої є рівнобіжна до осі x-ів, себто, коли її кутовий змінник $f'(x) = 0$. Після переходу через maximum, рядна кривої буде спадати й тому наступна похідна $f''(x)$ буде від'ємною. Навпаки

Рис. 96



після переходу через тінітит рядна кривої буде зростати, а тому $f''(x)$ буде додатньою.

Більш докладно ми досліджуємо це питання розгортуючи функцію $y=f(x)$ в шерег Тейльора. В цьому разі ми можемо узглядити випадки, коли й $f''(x)$ і $f'''(x)$ обертатимуться в нуля, а $f^{IV} \neq 0$ і т. д. Загалом коли першою нерівною з нулем буде парнета похідна

Нагадавши конспективно шлях відповідних міркувань ми робимо такі висновки:

<u>Коли криву загадано рівнянням $y=f(x)$ у визначеній формі, то дана точка буде тахітит'ом або тінітит'ом цієї кривої, коли її значники обертають першу похідну функцію в нуля й першою нерівною з нулем похідною є парнета.</u>

Коли ця нерівна з нулем парнета похідна є:

1) <u>від'ємна</u> [себто, коли $f^{(2k)}_{k=1,2\ldots n}(x)<0$], то дана точка є тахітит кривої і

2) <u>додатня</u> [себто, коли $f^{(2k)}_{k=1,2\ldots n}(x)>0$] то дана точка є тінітит кривої.

Очевидно, відшукуючи точки тахітит'а або тінітит'а кривої ми:

1) Беремо першу похідну й дорівнюємо її до нуля

2) Беремо другу похідну і вставляємо розвязки рівняння, що одержали з першої похідної.

3) Коли 2-га похідна у висліді цієї вставки $\neq 0$, то маємо при $f''(x)<0$ тахітит, а при $f''(x)>0$ тінітит

4) Коли не 2^{ga}, а за неї й третя похідні $=0$, то досліджуємо $4^{ту}$ і т.д. Коли б першої не рівної з нуля були неперервні похідні, то ні максимуму ні мінімуму немає.

Коли рівняння кривої дається в невизначеній формі, себто: $f(x,y)=0$, то тоді:

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$$

де $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, а тому має бути:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Для визначення значників x і y критичної точки (точки дослідження) маємо систему:

$$f(x,y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

[Примітка. Коли й $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, то як відомо з попереднього - ми будемо мати особливу точку)

З диференціювання невизначеної функції, маємо:

$$y'' = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{при } y'=0)$$

а тому, коли:

$$-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

1) відємна - maximum

2) додатня - minimum

Очевидно, що коли $y''=0$; $y'''=0$ то досліджуємо y^{IV} і т. д.

Тепер вернемося до випадку, коли $y''=0$ й першого не рівного з нуля є неперша похідна. В цьому випадку перша похідна переходить через нуля і крива в даній точці змінює форму (відбувається зміна випуклості кривої що до осі x-ів на вгнуту, або навпаки, в залежності від знаку першої $\neq$ з нуля непарної похідної). Ми вже знаємо, що ці точки, де крива змінює випуклість на вгнутість або навпаки звуться точками перегину. Очевидно, що знайти точки перегину випливає з рівняння:

$$y''=0$$

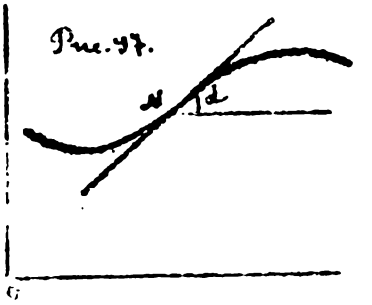
А встановлюючи розв'язки цього рівняння в першу похідну y', ми одержимо величину кутового коефіцієнта відповідної дотичної перегину.

Приклад 1. $x^3-3bx^2+a^2y=0$

$$y=\frac{1}{a^2}(3bx^2-x^3)\ ;\quad y'=\frac{1}{a^2}(6bx-3x^2)\ ;\quad y''=\frac{1}{a^2}(6b-6x)=\frac{6}{a^2}(b-x)$$

Коли існує точка перегину, то $\frac{6}{a^2}(b-x)=0$, або $x=b$. звідси $y=2\frac{b^3}{a^2}$. Беремо: $y'''=-\frac{6}{a^2}$. Незалежно від величини x і y. ~~похідна~~ не рівного з нуля є непарним (3-я похідна), а тому точка $M\left(b, \frac{2b^3}{a^2}\right)$ є точкою перегину. Далі y''' є від'ємна, а тому крива переходить що-до осі x-ів від випуклості до вгнутості. Кутовий коефіцієнт дотичної буде:

$$y'_{(x_0,y_0)}=\frac{1}{a^2}(6b^2-3b^2)=\frac{3b^2}{a^2}$$ (рис. 97)



~~об-то:~~ $tg\alpha=\frac{3b^2}{a^2}$

Приклад 2. $y=(x-3)^5+2x$

$y' = 5(x-3)^4 + 2$; $y'' = 20(x-3)^3$; $y''' = 60(x-3)^2$; $y^{IV} = 120(x-3)$

$y^{V} = 120$; Отже: $20(x-3)^3 = 0$; $x = 3$; $y = 6$; $(y''')_{x=3} = 0$;

$(y^{IV})_{x=3} = 0$; $y^{V} \neq 0$. Тому $M(3,6)$ є точкою перегнуття; $y' = 2$, себто $tg\alpha = 2$; далі $y^{V} > 0$. Отже при точці M крива має вигляд: (рис. 98).

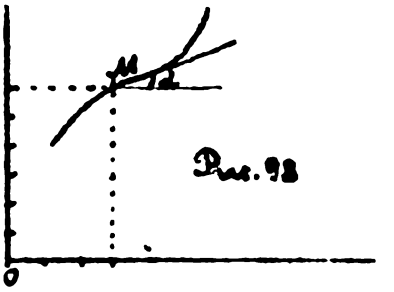


Рис. 98

Дамо нашим вислідам геометричну ілюстрацію. Хай рівняння кривої буде:

$$y = f(x) \ldots . (\alpha)$$

Поведемо до неї дотичну в точці $M(x_0, y_0)$ й тоді матимемо рівняння цієї дотичної вигляду:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

де як відомо $f'(x_0)$ є вислід вставки в $f'(x)$ вартости x_0 значника точки M. Перепишемо одержане рівняння так:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 = \varphi(x) \ldots (\beta)$$

Дослідимо тепер порядок доторкання даної кривої (α) і її дотичної в точці $M(\beta)$ і для цього розглянемо взір (б) §28 а саме:

$$\Delta = f(x_0+h) - \varphi(x_0+h) = h[f'(x_0) - \varphi'(x_0)] + \frac{h^2}{2}[f''(x_0) - \varphi''(x_0)] +$$
$$+ \frac{h^3}{3!}[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)] + \ldots \qquad (\gamma)$$

В цьому випадку, диференцуючи рівняння (β), маємо:

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0)$$

I) Друге ж диференцування дає: $\varphi''(x) = 0$, бо при даній x_0, значника даної точки M, вартість $f'(x_0)$

є сталою. Тому, коли друга похідна функції (α) а саме $y'' = f''(x)$ при вставці в неї вартости x_0 не обернеться в нуля, себто: $f''(x)_{x_0} = f''(x_0) \neq 0$, то ми матимемо:

$$\Delta = \frac{h^2}{2!}\left[f''(x_0) - \varphi''(x_0)\right] + \dots = \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$

що є доторканням першого порядку й таким чином існує дві безмежно-близькі точки, зляті в даній M (рис. 99).

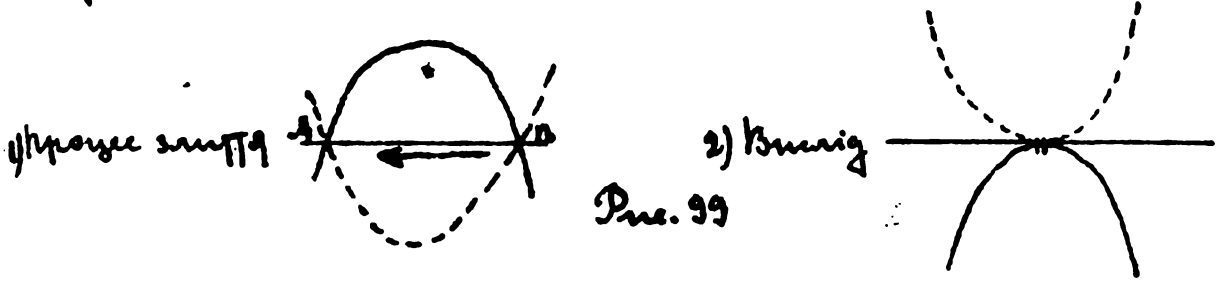


Рис. 99

II) Очевидно, що й третє диференцування функції (β) дасть:

$$\varphi'''(x) = 0 \text{ а тому й } \varphi'''(x_0) = 0$$

Тому коли при умові (I) друга похідна функції (α) обернеться в нуля, себто $f''(x)_{x_0} = f''(x_0) = 0$, а зате третя похідна тієї ж функції, а саме: $f'''(x)_{x_0} = f'''(x_0)$ не буде рівна з нулем, себто $f'''(x_0) \neq 0$, то ми матимемо:

$$\Delta = \frac{h^3}{3!}\left[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)\right] + \dots = \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}\left[f^{IV}(x_0 - \varphi^{IV}(x_0)\right] + \dots$$

Це є доторкання 2го порядку: три безмежно близьких точки злятих в точці M (рис. 100)

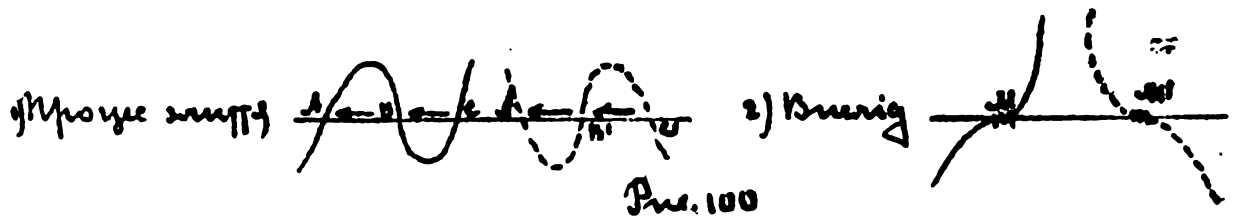


Рис. 100

Будемо цей випадок звати перегнуттям 1го порядку. Ми бачимо, що починаючи з другої всі похідні

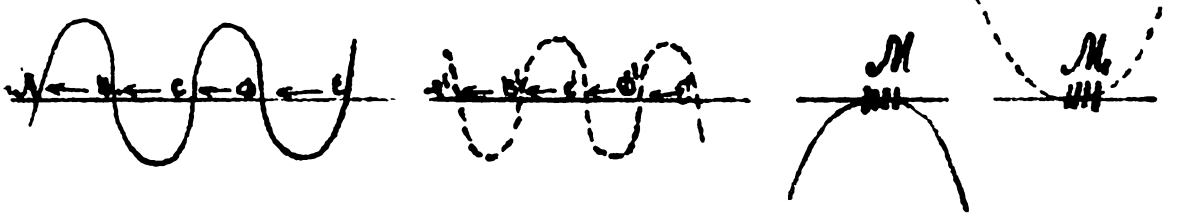
$\varphi(x)$ обертаються в нуля, а тому взору (γ) можна дати вигляд:

$$\Delta = \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}(x_0) + \frac{h^5}{5!} f^{V}(x_0) + \dots \qquad (\delta)$$

бо $\varphi'(x_0) = f'(x_0)$. Звідци буде на підставі попередніх міркувань ясно, що:

III) Коли $f'''(x)_{x_0} = f'''(x_0) = 0$, а $f^{IV}(x_0) \neq 0$, то маємо доторкання 3-го порядку (4 безмежно-близьких точки злятих в M), що дає такий геометричний образ (рис. 101)

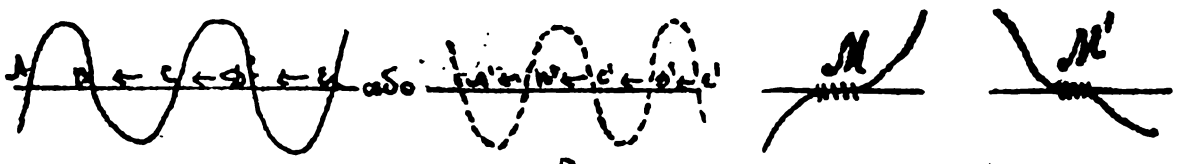
1) Процес злиття Рис. 101 2) Вислід.



Очевидно, що в цьому разі маємо справу з дотиком простої (β) до кривої (α)

IV) Коли $f^{IV}(x_0) = 0$, а $f^{V}(x_0) \neq 0$, то $\Delta = \frac{h^5}{5!} f^{V}(x_0) + \frac{h^6}{6!} f^{VI}(x_0) + \dots$

Це є доторканням 4-го порядку, себто 5 безмежно-близьких точок злятих в точці M. Маємо такий геометричний образ (рис. 102).



1) процес злиття Рис. 102 2) Вислід.

Ми маємо знову перегнуття (2-го порядку). Продовжуючи міркування свої далі, ми дійдимо до висновку, що 1) коли для даної точки M першою (крім $f'(x_0)$ похідною кривої (α) нерівною з нулем буде нариста, то матимемо дотик до простої (β), а у випадку, при цьому, коли $f'(x_0) = 0$, то тахітит або

тінітит, щодо осі x-ів. 2) Коли при тих же умовах першою нерівною з нулем буде непариста похідна, то матимем справу з перегнуттям кривої в даній точці M. Порядок цього перегнуття є завжди рівний $k=\frac{n-1}{2}$ де n є порядок першої нерівної з нулем похідної. [Це дає практично таку ознаку: коли $k=\frac{n-1}{2}$ є ціле число, то маємо перегнуття, а коли k дробове, то дотик.]

§43. Дослідження рівняння кривих.

На протязі пройденого курсу ми досліджували окремі властивости аналітичних функцій й тепер скористуємося придбаним досвідом і методом для всебічної і загальної аналізи рівнянь кривих. Це дасть нам змогу уявити їх геометричний образ, себто їх виобразити графічно.

I) Першим нашим завданням буде через дослідження даного рівняння визначити ту частину поля нашого рисунку, де ця крива міститься. Для цього треба:

1) Визначити положення початку координатних осей, щодо самої кривої. [Вставляємо в рівняння кривої значники $x=0$; $y=0$; цим досліджуємо, чи переходить крива через початок координат чи ні]

2) Знайти точки перетину кривої з осями координат, себто визначити відтинки на осях, що творить крива. [Для цього по черзі беремо або $x=0$, або $y=0$, і визначаємо ту змінну, що лишається.]

3) Дослідити криву на симетричність [роби-

мо по черзі заміну 1) x на $-x$ і 2) y на $-y$. Коли при першій заміні рівняння лишається незмінним-то крива симетрична щодо осі y-ів. Таксамо можемо переконатися (2ою підставкою), чи симетрична крива щодо осі x-ів. Коли вона симетрична до обох осей, то початок є центром симетрії, або центром кривої]

4) Дослідити взаємну змінність x і y, а для того визначаємо або 1) x через y, або 2) y через x і аналізуємо вартости одної в звязку зі змінами другої.

Напр. рівняння: $x^3 - x^2y + 4y = 0$

1) Крива переходить через початок осей, бо задовольняється вартостями $x=0$; $y=0$

2) Крива в жадній точці, крім початку осей, координат не перетинає, бо:

1) коли $x=0$, то $y=0$

і 2) коли $y=0$, то й $x=0$

3) Зміни x на $-x$ і y на $-y$, показують, що рівняння при цьому змінюються, а тому крива не є симетричною, щодо осей координат

4) Визначаємо y: $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

а) для вартостей $0<x<2$ — y має від'ємні вартости, крива лежить під вісью x-ів (в 4й чтверці)

б) для $0>x>-2$ — y має додатні вартости (лежить в 2й чтверці.

в) при $|x|=2$ $y=\infty$, себто прості $x=2$ і $x=-2$ — асимптоти кривої;

г) при $x>2$ і y є додатне й при зростанні $x \ldots \infty$ y також простує до ∞ бо $y = \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{x}{1-\frac{4}{x^2}}$

д) при $x < -2$ y є від'ємне й також при зростанні $x \ldots -\infty$ й y зростає до ∞. Крива своїми галузями йде на безмежність.

II) <u>Аналізуємо криву, щодо окремих її властивостей.</u>

1) Визначаємо першу похідну $y' = \frac{dy}{dx}$ [Це дає дослідити положення кривої в кожній окремій точці]:

а) Коли $f'(x) > 0$, то $f(x)$ зростає, а тому крива віддаляється від вісі x-ів, а коли $f'(x) < 0$ - то навпаки.

б) Коли $f'(x) = 0$, то це є <u>момент повороту</u> кривої (дотична $\parallel$ до осі x-ів) або коли $f'(x) = \infty$ теж [дотична $\parallel$ до осі y-ів]

Отже А) Шукаємо тахітит або тінітит кривої. Тоді: а) згідно 1), б) прирівнюємо до нуля 1ᵘ похідну y' і з цього рівняння за допомогою рівняння самої кривої знаходимо значники точки, що має дотичну $\parallel$ до осі x-ів. б) Беремо від функції рівняння кривої 2ᵘ похідну $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y''$ і вставляємо в неї значники знайденої точки:

коли $y''_0 \neq 0$, то, коли $y''_0 < 0$, крива в цій точці має тахітит, а коли $y''_0 > 0$, то тінітит;

коли $y''_0 = 0$ то досліджуємо 3ю похідну і т. д.

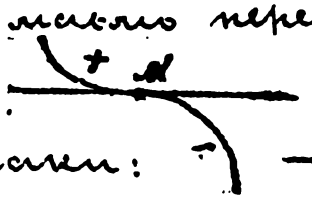
В). Знайти точки перегнуття.

1) Для цього прирівнюємо до нуля другу похідну й знаходимо значники тих точок (за допомогою рівняння самої кривої) для яких може бути перегнуття.

2) Беремо 3ю похідну й вставляємо знайдені вартости значників; коли для них $y''' \neq 0$, то маємо

точку перегнуття

3) Вставляємо значники знайдених точок перегнуття у вираз y' і одержуємо кутовий змінник дотичної перегнуття.

4) Беремо вартости одну трохи менше, а другу трохи більшу даних значників точки перегнуття і вставляємо їх у вартість другої похідної y''. Коли ці вставки дадуть зміну знаків „+" на „−", то ми маємо перехід від випутости до випутости:  і при зміні знаків „−" на „+" навпаки: 

III) <u>Дослідження кривої на асимптоти.</u> Спосіб цього дослідження указанні раніше в окремому §.

IV) Дослідження кривої на особливі точки. Способи – в §§ 39, 40; 41.

V) Коли знайдених прикмет ще не досить для виображення кривої графічно, ми беремо шереги довільних вартостей x (відтинкові) і, обчисливши відповідні рядні з розвязання рівняння кривої, наносимо кілько помічних точок. Візьмім для з'ясування кілько прикладів.

<u>Приклад 1.</u> Дослідити й накреслити криву:

$$x^3 - x^2y + 4y = 0$$

Ми вже дослідили для цієї кривої:

1) Крива переходить через 0, початок координат

2) Крива більш не перетинає осей

3) Крива не є симетричною

4) Для вартостей $0 < x < 2$ крива лежить під додатнім напрямом вісі x-ів (4-а ґавертка).

5) Для вартостей $0>x>-2$ має додатні вартості y, себто лежить в 2 чверті.

6) При $|x|=2$, вартість $y=\infty$, себто $x=2$; $x=-2$ асимптоти

7) При $x>2$ - крива при зростанні x має завжди додатні вартості y (крива в 1-й чверті)

8) При $x<-2$ має завжди $y<0$ (в 3-й чверті)

9) При зростанні абсолютних вартостей x в (7) і (8) дося й y зростає до безмежності. Тому крива має безмежні галузі.

Отже крива положена у всіх 4-х чвертях і переходить через початок осей [графічна ілюстрація (рис. 103)].

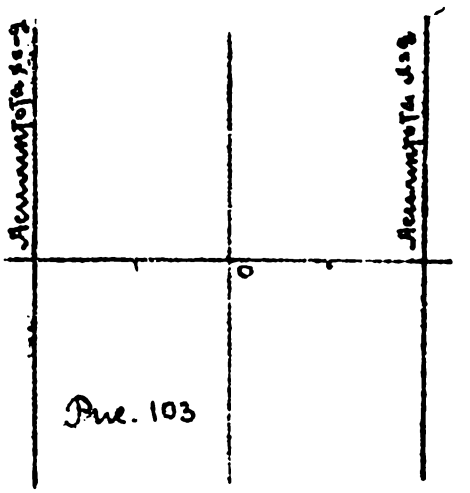


Рис. 103

II) Беремо похідну $y'=\frac{dy}{dx}$

$$y'=\left(\frac{x^3}{x^2-4}\right)'=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

Шукаємо maximum або minimum. Для цього

$$\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=0 \quad \text{або} \quad x_1=0\ ;\ x_{2,3}=\pm 2\sqrt{3}=\pm 3{,}464\ldots$$

$$y_1=0\ ;\quad y_{2,3}=\pm 3\sqrt{3}=\pm 5{,}196\ldots$$

Беремо другу похідну:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

і вставляємо вартості x_1, $x_{2,3}$. Тоді:

$$1)\ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=0}=0$$

Це показує, що при $x=0$ є можливою точка пе-

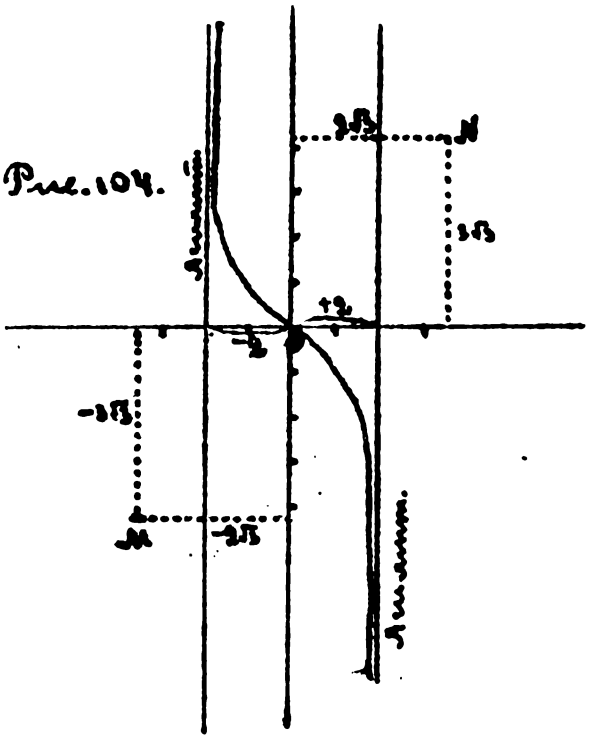
перегину. Але:

$$2)\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=-2\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \quad [\text{Maximum}]$$

$$3)\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=+2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad [\text{Minimum}].$$

Для дослідження точки $x=0$, $y=0$ ми беремо 3-ю похідну, вставляємо вартості $x=0$, $y=0$ й переконуємося, що: $\left(\frac{d^3x}{dx^3}\right) \neq 0$. Отже точка $O(0,0)$ є точкою перегину. Ці дослідження дають нам такі точки (рис. 104)

III) Досліджуємо на асимптоти. 1) Рівняння кривої: $x^3 - x^2y + 4y = 0$ має сотий при x^2-одиницю, тому асимптот, рівнобіжних до осі x-ів немає.



2) Сотий при найстарших степенях y буде $(-x^2+4)$. Тому $x^2-4=0$; $x=\pm 2$. Себто асимптоти рівнобіжні до осі y-ів є дві (вони вже знайдені раніше).

3) Шукаємо асимптоти не рівнобіжні до осей: беремо рівняння простої $y=mx+n$ і вставляємо у рівняння кривої; тоді маємо:

$$x^3 - x^2(mx+n) + 4(mx+n) = 0 \quad \text{або}$$

$$x^3(1-m) - x^2n + 4mx + 4n = 0$$

Тому:

$$1-m=0;\ n=0;\ \text{звідси}\ m=1,\ n=0$$

і рівняння асимптот має вигляд:

$$x - y = 0$$

(є рівнодільною першої чвертки)

IV) Особливі точки: 1) $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2xy = 0$; $\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 + 4 = 0$ Звідси $x = \pm 2$; $y = \pm 3$. Значники цієї точки не задовольняють рівнянню кривої, тому особливих точок нема. (Це очевидно ще з того, що рівняння містить члени в 1 ступіні)

Перейдемо тепер до графічного виображення кривої (рис. 105).

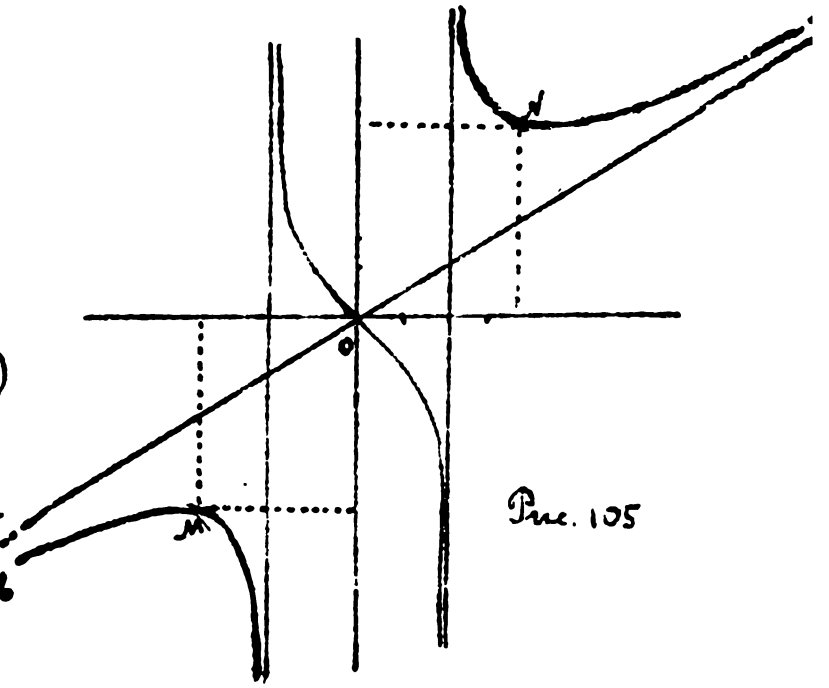


Рис. 105

Приклад 2. Дослідити криву:

$$x^3 - 2ax^2 + y^3 = 0$$

1) Крива переходить через початок (чому?) координат.

2) Крива перетинає крім початку вісь x-ів ще в точці: $[x^3 - 2ax^2 = 0]$ $x = 2a$ (рис. 105а точки через які переходить крива означено ∘).

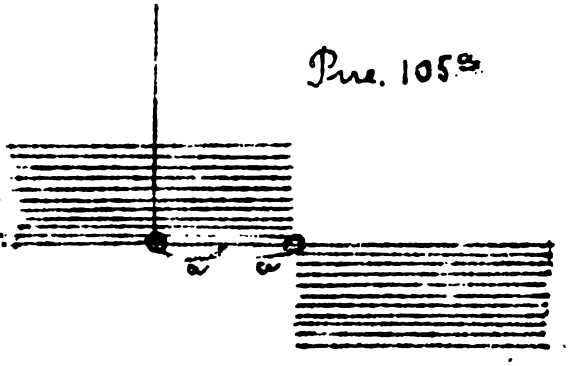


Рис. 105а

3) Крива не симетрична щодо осей координат.

4) Визначивши y, маємо:

$$y = \sqrt[3]{x^2(2a - x)}$$

а) коли x зростає до $+\infty$, то y зростає до $-\infty$, а коли x зростає до $-\infty$, то y зростає до $+\infty$, себто маємо дві безмежно далекі точки: $(\infty, -\infty)$ і $(-\infty, \infty)$

б) для додатніх вартостей $x < 2a$, $y > 0$; а для тих

же вартостей $x>2a$, $y<0$. в) для від'ємних вартостей x, завжди $y>0$ (рис. 105а, заштриховані ≡ частини площі є ті де міститься крива).

5) Досліджуємо maximum і minimum (яко невизначеної функції) Для цього:

$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-4ax$; тому: $3x^2-4ax=0$; $x_1=0$; $x_2=-\frac{4}{3}a$. Вставляючи ці вартости в рівняння кривої, маємо:

$y_1=0$; $y_2=\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}a$ Але $y''=-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}:\frac{\partial F}{\partial y}=-[6x-4a]:3y^2=\frac{4a-6x}{3y^2}$, y^2 буде завжди додатнім, а тому досить дослідити знак числителя: $u=4a-6x$. Отже:

а) $x_1=0$ не надається до дослідження, бо при тому $y_1=0$ і $\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2$ обертається в нуля. Це є особлива точка, коли $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$ і $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$ разом рівні з нулем.

б) При $x_2=\frac{4}{3}a$ маємо: $u=4a-8a=-4a<0$. В цій точці маємо maximum (рис. 106)

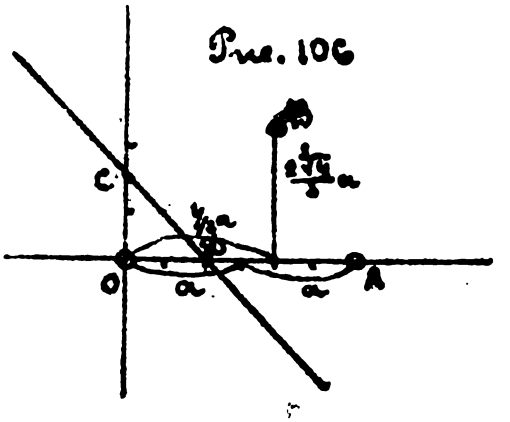


Рис. 106

6) Досліджуємо на асимптоти. а) асимптот рівнобіжних осі x-ів і y-ів нема, бо сочинники при старших ступінях x і y в рівнянні кривої є сталі величини. б) Асимптоти не рівнобіжні до осей координат: беремо рівняння простої $y=mx+n$ і вставляємо в рівняння кривої, тоді маємо:

$$\underline{\underline{x^3}}-\underline{2ax^2}+\underline{\underline{m^3x^3}}+\underline{3m^2x^2n}+3mxn^2+n^3=0$$

$n=\frac{2}{3}a$. Рівняння асимптоти: $y=-x+\frac{2}{3}a$ (Звідци маємо $x=\frac{2}{3}a$; $y=n=\frac{2}{3}a$ - відтинки асимпто-

ти на осях (рис. 106, асимптота CD)

7) Досліджуємо на особливі точки. Находимо точку, що є особливою, себто беремо:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0$$

Отже:

$$3x^2-4ax=0 \; ; \; x_1=0 \; ; \; x_2=\tfrac{4}{3}a \; ; \; \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2 \; ; \; y_1=0 \quad y_2=0$$

а) Точка (x_1, y_1) обертає рівняння кривої в тотожність, а тому є особливою. б) Точка (x_2, y_2) не обертає рівняння кривої в тотожність, а тому не є особливою (не належить до кривої).

Користуємося практичним способом. Члени нижчого виміру є $-2ax^2$ прирівнюємо їх до нуля й маємо: $2ax^2=0$; $x^2=0$; $x=0$ і $x=0$. Отже маємо подвійну точку з двома злятими дотичними, що є віссю y-ів. Ми в початку дослідження (рис 105) переконалися, що галузі кривої з обох боків точки O (для додатніх і відємних x-ів) лежать в бік додатніх y-ів. Це є точка повороту 1-го роду (як доведено раніш) галузі кривої йдуть з обох боків вісі y-ів (рис. 107)

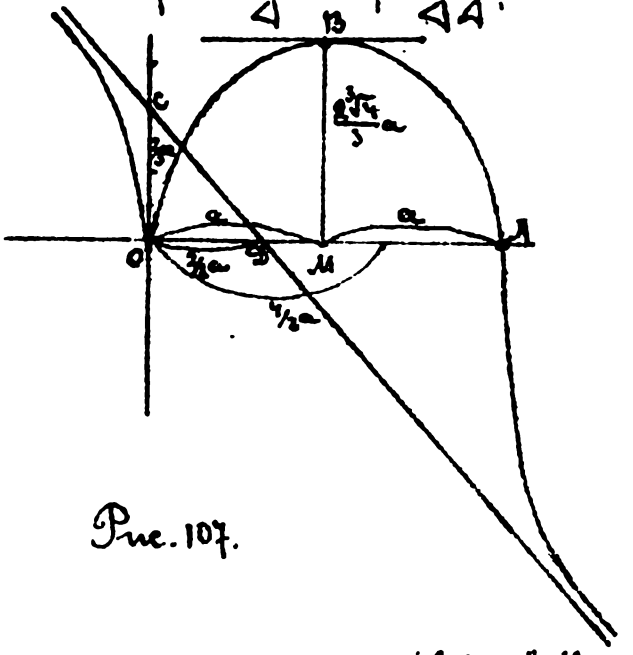


Рис. 107.

Приклад 3. Дослідити криву:

$$y=\frac{a^2x}{(x-a)^2}$$

1) Крива переходить через початок осей (чому?).

2) Крива крім початку не перетинає ні вісь x-ів, ні вісь y-ів (чому?).

3) Крива не симетрична щодо осей (чому?).

4) Досліджуємо зміни змінних: а) коли x наближається до $\pm\infty$, то y до 0, справді: $y = \frac{a^2}{(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2}$ асимптота вісь x-ів для обох напрямів). б). Коли x наближається до a, то y наближається до ∞ ($x \to a$, є асимптота для обох напрямів, бо x може наближатися до a як зростаючи, як спадаючи)

в) Для x додатніх і y додатні, а для x від'ємних і y від'ємне. Отже крива міститься в 1-ій і 3 чверті координат (рис.108)

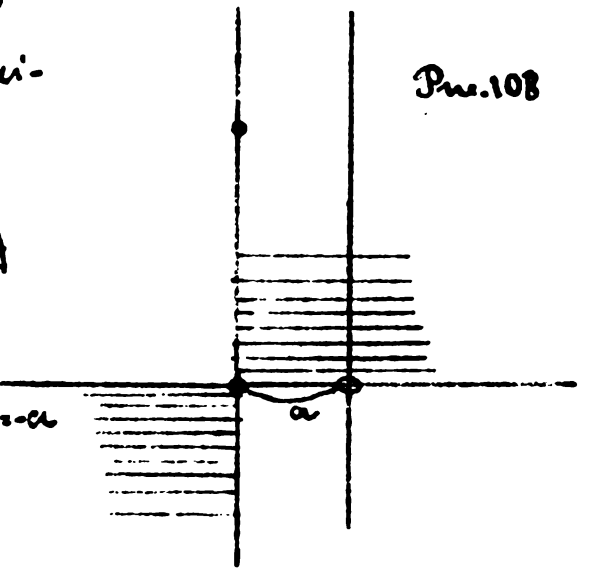


Рис.108

5) Досліджуємо на екстремум і мінімум.

$$y' = -\frac{a^2(x+a)}{(x-a)^3}$$ тому

$y' = 0$, коли $x = -a$

А як $y'' = \frac{2a^2(x+2a)}{(x-a)^4}$ при $x = -a$

дає: $y'' = \frac{1}{8a} > 0$

Маємо в точці $(-a; -\frac{a}{4})$ максимум.

6) Досліджуємо на асимптоти. Маємо рівняння кривої:

$$y(x-a)^2 = a^2x \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

або:

$$yx^2 - 2axy + a^2y = a^2x$$

або:

$$x^2y - (2ax - a^2)y - a^2x = 0$$

а) прирівнюючи коефіцієнт найстаршого ступеня x маємо асимптоту рівнобіжну до осі x-ів, а саме: $y = 0$ (сама вісь x-ів)

б) шукаємо прирівнюючи коефіцієнт най-

старшого ступіня y маємо [див. рів(а)]

$$(x-a)^2=0 \quad ; \quad x=a$$

Асимптота рівнобіжна вісі y-ів.

е) Беручи рівняння асимптоти $y=mx+n$, маємо:

$$(mx+n)(x-a)^2=a^2x^2$$

або:

$$mx^3-(2am-n)x^2+\dots$$

Отже: $m=0$; $2am-n=0$; $n=0$ Асимптот не рівнобіжних до осей нема.

7) Особливі точки. Рівняння кривої $y(x-a)^2-a^2x=0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=2y(x-a)-a^2\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=(x-a)^2\end{aligned}\right\}\ \text{Тому}\ \begin{aligned}2y(x-a)-a^2&=0\\ (x-a)^2&=0\end{aligned}$$

Рівняння не спільно-розвязані і особливих точок нема. Отже крива має вигляд (рис. 109)

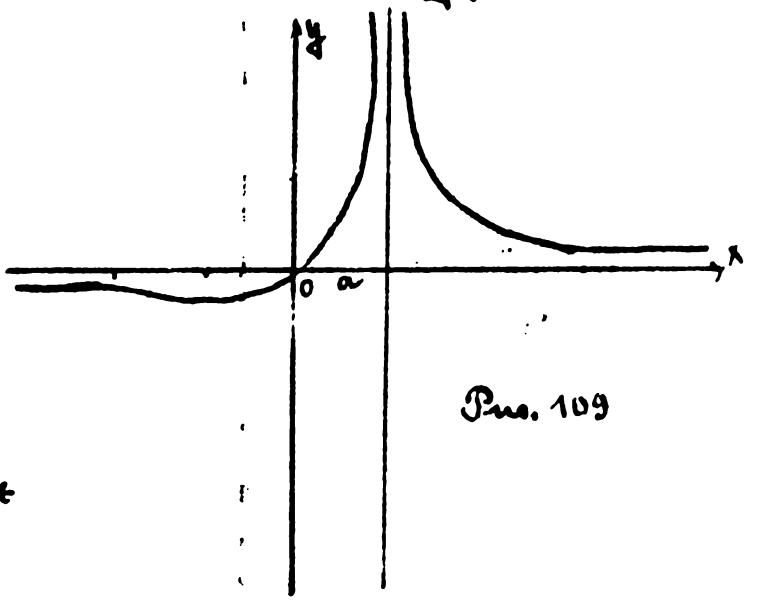


Рис. 109

Приклад 4. Дослідити криву:

$$xy^2-x^2+2x-1=0$$

1) Крива не переходить через початок (чому?).

2) Крива перетинає вісь x-ів в точці $x=1$ і зустрічає вісь y-ів на безмежности, бо

$$y=\pm\frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

при $x=0$, $y=\pm\infty$ (рис. 110)

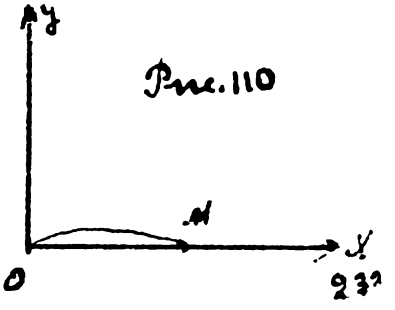


Рис. 110

3) Крива симетрична щодо осі x-ів (бо зміна y на $-y$ не зміняє рівняння).

4) $$y = \pm \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

а) Коли x зростає від нуля до 1, то $|y|$ спадає від ∞ до 0; б) коли x зростає від 1 до ∞, то $|y|$ зростає від 0 до ∞; в) кривої немає в лівій частині хреста координат, бо для відємних x є уявне y.

5) Досліджуємо на maximum і minimum.

$$y' = \pm \frac{1}{2}\frac{x+1}{x\sqrt{x}}$$

тому $y'=0$; $x=-1$. Такої точки не існує, бо y для неї є уявне. Тому maximum'а й minimum'а нема.

6) Точок перегнуття немає, бо $y'' = \mp \frac{1}{4}\frac{x+3}{x^2\sqrt{x}}$; $y''=0$; $x=-3$. Такої точки теж нема.

7) Досліджуємо на асимптоти. а) Рівнобіжних до осі x-ів немає, бо сочинник старшого ступіня x є -1; б) рівнобіжна до осі y-ів існує, а саме, сама вісь, бо сочинник при старшому ступіні y буде x; отже асимптота $x=0$. в) Асимптот не рівнобіжних осям координат немає, бо маємо:

$x(mx+n)^2 - x^2 + 2x - 1 = 0$, або $m^2x^3 + (2mn-1)x^2 + \ldots$

$m^2=0$; $m=0$; $2mn-1=0$; $n = \frac{1}{2m} = \infty$ (знова маємо асимптоту вісь y-ів).

8) Особливі точки. Маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 2x + 2; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy$$

Тому $y^2 - 2x + 2 = 0$; $2xy = 0$; $y^2 = 2(x-1)$; $y = \pm\sqrt{2(x-1)}$

Отже $2x\sqrt{2(x-1)} = 0$; $2x^2(x-1) = 0$; $\cancel{x=0}$; $x_2 = 1$

Звідци: 1) $y^2 + 2 = 0$; y = уявна; 2) $y^2 = 2(1-1) = 0$; $y = 0$

Ці значники $(1,0)$ задовольняють рівняння, а тому знайдена точка може бути особливою

Перетворимо осі координат до неї, тоді вирази перетворення будуть: $x = \xi + 1$; $y = \eta$ і маємо:

$$(\xi+1)^2\eta^2 - (\xi+1)^2 + 2(\xi+1) - 1 = 0$$

або:

$$(\xi+1)\eta^2 - \xi^2 = 0 \quad \text{або} \quad \xi\eta^2 + \eta^2 - \xi^2 = 0$$

Дорівнюючи до нуля члени найнижчого виміру маємо:

$$\eta^2 - \xi^2 = 0$$

або:

$$\eta + \xi = 0; \quad \eta - \xi = 0$$

Є дотичні. Вузлова точка, де дотичні нахилені до осі x-ів під кутами 45°, 135° (рис. 111)

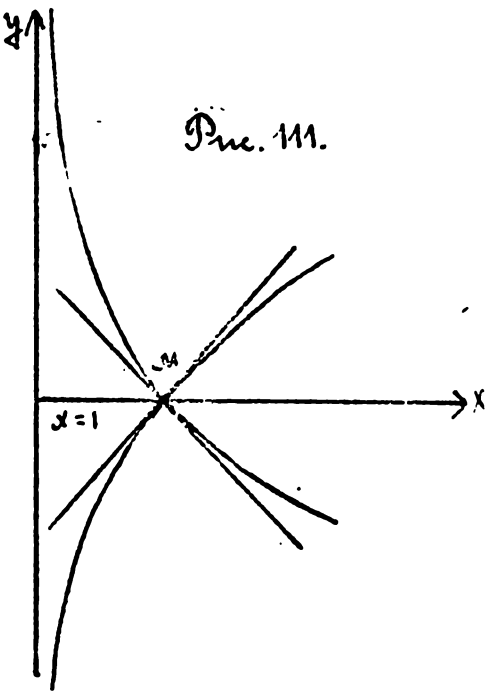


Рис. 111.

Частина II.

Розділ I

Просторові криві.

§44. Визначення кривої в просторі.

Аналітична геометрія дає 4 способи визначення кривої в просторі; а саме:

$$\text{I)} \ldots\ldots\ldots \left.\begin{aligned} f(x,y,z)&=0 \\ \varphi(x,y,z)&=0 \end{aligned}\right\}$$

Крива, як перетин двох поверхонь.

$$\text{II)} \ldots\ldots \left.\begin{aligned} f(y,z)&=0 \\ \varphi(x,z)&=0 \end{aligned}\right\} \text{або} \left.\begin{aligned} x&=\varphi(z) \\ y&=\psi(z) \end{aligned}\right\}$$

Крива, як перетин двох циліндричних поверхонь. В окремому випадку (при вилученні одного з двох змінних) ми маємо криву, як перетин циліндричної поверхні плоскою

$$f(x,y)=0 \ ; \ z=a \ (\text{const})$$

$$\text{III)} \ldots\ldots x=\varphi(t) \ ; \ y=\psi(t) \ \text{і} \ z=\chi(t)$$

Рівняння (III) визначає криву утворену рухом точки в просторі, а ~~самі~~ змінні її сліди на координатних осях.

Очевидно, що всі три роди рівнянь можна перетворити один з одного. Так, рівняння (II) маємо з рівняння (I) вилучивши з них по черзі z і y і визначивши з одержаних виразів

певних змінних. Далі розглядаючи z, як задану функцію змінного t, ми одержимо з рівнянь (II) рівняння (III). Навпаки, виключивши з рівнянь (III) змінну t, одержимо рівняння (II).

При цьому дослідженні будемо мати на увазі, що всі криві, які розглядаємо, є аналітичні, себто в межах дослідження вони і їх рівняння розгортаються в ряди Тейлора (хоча б для цілого першого порядку).

§45. Дотична до просторової кривої.

I) Припустімо, що рівняння кривої визначено через рівняння:

$$x=\varphi(t);\quad y=\psi(t);\quad z=\chi(t)$$

Візьмімо на цій кривій якусь-будь точку $M(x,y,z)$ і нашій точці безмежно близьку до неї точку M_1, таку, щоб її координати були: $x_1=x+\Delta x=\varphi(t+\Delta t)$; $y_1=y+\Delta y=\psi(t+\Delta t)$ і $z_1=z+\Delta z=\chi(t+\Delta t)$. Проведемо через ці точки січну MM_1 до кривої. Рівняння її, як прямої, що проходить через дві задані точки буде:

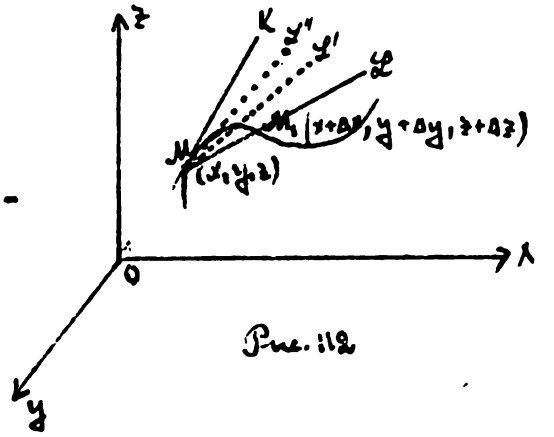


Рис. 112

$$\frac{X-x}{x_1-x}=\frac{Y-y}{y_1-y}=\frac{Z-z}{z_1-z}$$

або:

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z}$$

де x, y і z задано в функції t [в окремому випадку величини x, y і z відповідають певній величині $t=t_0$], а точку помножимо всі ці рівності

на Δt, матимемо:

$$\frac{X-x}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{Y-y}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)} = \frac{Z-z}{\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)}.$$

Будемо тепер точку M_1 наближати до M аж до злиття; тоді Δt буде прямувати до нуля, а разом з тим знаменники наших рівностей до: $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ і $\frac{dz}{dt}$, або ж другими означеннями до x', y' і z'. Але в цьому разі січна обертається в дотичну й тому її рівняння матиме вигляд:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'} \quad \ldots\ldots (59)$$

Або після скорочення на dt:

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz} \quad \ldots\ldots (60)$$

Приклад. В аналітичній геометрії ми розглядали гвинтову лінію, що має рівняння:

$$x = a\cos t; \quad y = a\sin t; \quad z = \frac{h}{2\pi}t$$

Написати рівняння дотичної до неї в якій-будь точці $M(x_0, y_0, z_0)$ де $x_0 = \varphi(t_0)$ і т. д.

$$x' = -a\sin t; \quad y' = a\cos t; \quad z' = \frac{h}{2\pi}$$

Маємо:

$$\frac{x - a\cos t_0}{-a\sin t_0} = \frac{y - a\sin t_0}{a\cos t_0} = \frac{z - \frac{h}{2\pi}t_0}{\frac{h}{2\pi}}$$

II) Розглянемо тепер випадок, коли крива задана рівняннями:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0$$

Продиференціювавши кожне з цих рівнянь і мати-

мемо:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = 0$$

В окремому випадку для точки $M(x, y, z)$ маємо:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (\alpha)$$

З рівнянь маємо:

$$dx = \frac{X - x}{\rho}; \quad dy = \frac{Y - y}{\rho}; \quad dz = \frac{Z - z}{\rho}.$$

де ρ є кратність відношень. Отже вставляючи ці вартости в (α) і скорочуючи на ρ, маємо:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0 \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(Z - z) = 0 \end{aligned}\right\} \cdots (61)$$

Покажемо, що це й буде потрібним рівнянням дотичної. Справді;

1) ці 2 рівняння є кожне зокрема рівнянням площі, (1го ступіня, щодо змінних)

2) система цих рівнянь визначає просту (як перетин даних площ).

3) x, y і z є значниками точки, що належать до цієї простої, бо вони задовольняють рівняння (61). Отже, ця проста має бути дотичною до кривої. Означимо тепер для скорочення так:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_1; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = F_3 \text{ й аналогічно } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_1 \text{ і т. д.}$$

Тоді маємо:

$$(X-x)F_1 + (Y-y)F_2 + (Z-z)F_3 = 0$$

$$(X-x)\Phi_1 + (Y-y)\Phi_2 + (Z-z)\Phi_3 = 0$$

Виключимо по черзі з цих рівнянь Y і X і матимемо:

$$(X-x)\left[F_1\Phi_2 - F_2\Phi_1\right] + (Z-z)\left[F_3\Phi_2 - F_2\Phi_3\right] = 0$$

або:

$$Z - z = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix}}(X-x)$$

Аналогічно:

$$Z - z = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ \Phi_3 & \Phi_1 \end{vmatrix}}(Y-y)$$

Звідси:

$$\frac{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix}}(X-x) = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ \Phi_3 & \Phi_1 \end{vmatrix}}(Y-y) = Z-z$$

або поділивши на $\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}$ маємо:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ \Phi_3 & \Phi_1 \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}} \quad \ldots\ldots\ldots (62)$$

Для цих детермінантів часто вживають також означення, напр.

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(x, y)}$$

Тоді рівняння (62) матиме вигляд:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(z,x)}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)}} \quad \ldots\ldots\ldots (63)$$

Це є „напрямні" форми рівняння (61).

§46. Напрямні змінники дотичної до просторової кривої (кривої подвійної кривини)

Хай рівняння нашої дотичної буде:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

З аналітичної геометрії ми знаємо, що коли рівняння простої матиме вигляд:

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{r},$$

то косинуси напрямних кутів (з осями координат) визначатимуться:

$$\lambda=\cos\alpha=\frac{m}{\pm\sqrt{m^2+n^2+r^2}};\quad \mu=\cos\beta=\frac{n}{\pm\sqrt{m^2+n^2+r^2}}\ \text{і}\ \nu=\cos\gamma=\frac{r}{\pm\sqrt{m^2+n^2+r^2}}$$

Таким чином в даному разі напрямні змінники нашої дотичної будуть:

$$\lambda=\frac{dx}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};\quad \mu=\frac{dy}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\ \text{і}\ \nu=\frac{dz}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

або ділючи числителя й знаменателя на dt, маємо:

$$\lambda=\frac{x'}{\pm\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}};\quad \mu=\frac{y'}{\pm\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\quad \nu=\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

і нарешті для рівнянь (61) і (63)

$$\lambda=\frac{\dfrac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}}{\pm\sqrt{\left[\dfrac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)}\right]^2+\left[\dfrac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}\right]^2+\left[\dfrac{\partial(F,\Phi)}{\partial(z,x)}\right]^2}}\ \text{і т. д.}$$

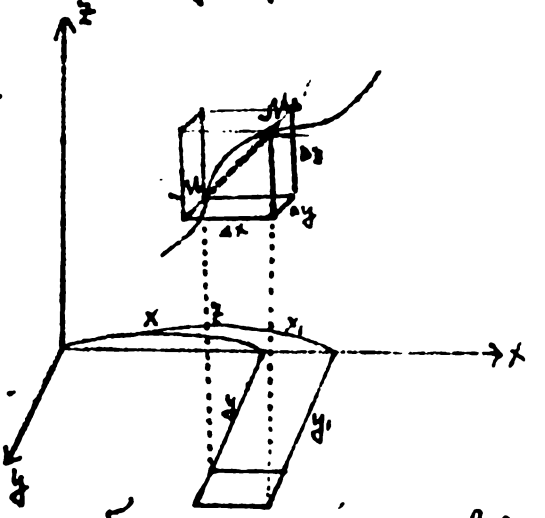
При чому умовляємося брати перед $\sqrt{\ }$ плюс, коли дотична спрямована у бік зростання дуги кривої.

Розглянемо ще друге визначення напрямних змінників дотичної. Візьмім на кривій точку $M(x,y,z)$ де $x=\varphi(t)$ і т. д. і дуже близьку точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, так

що $x_1 = x + \Delta x$; $y_1 = y + \Delta y$; $z_1 = z + \Delta z$. Тоді довжина хорди MM_1, як відомо з аналітичної геометрії буде:

$$\overline{MM_1}^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 \text{ або:}$$

$$\overline{MM_1}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$



Будемо безмежно наближати точку M_1 до точки M і тоді хорда буде безперервно наближатися до відповідного елементу дуги ds і в межі матимемо:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

а звідси

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad \ldots\ldots (64)$$

Це є вираз диференціала дуги просторової кривої. Поділивши обидві частини на dt, ми матимемо другий вигляд цього диференціала:

$$ds = \pm dt\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad \ldots\ldots (65)$$

і нарешті визначаючи вартості x', y' і z' [з порівняння рівнянь (60) і (63)] для випадку, коли рівняння кривої визначене рівняннями $F(x,y,z) = 0$ і $\Phi(x,y,z) = 0$ маємо:

$$ds = \pm\sqrt{\left[\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(z,x)}\right]^2} \quad \ldots\ldots (66)$$

Тут „+" відповідає випадку, коли дуга зростає разом із зростанням відповідного значення, від якого вона залежить. Таким чином, напрямні косинуси кривої можна буде дати вигляд:

$$\lambda = \pm\frac{dx}{ds}; \quad \mu = \pm\frac{dy}{ds}; \quad \nu = \pm\frac{dz}{ds} \quad \ldots\ldots (67)$$

§47. Прямові (нормальні) площини.

В точці M, взятій на даній дотичній ми можемо (як відомо з геометрії) поставити до цієї дотичної безліч прямих, всі вони очевидно є прямовими (нормалями) до кривої в цій точці. Але тепер нам відомо з геометрії, що всі прямі лежатимуть в площині, проведеній через дану точку M прямово до даної дотичної. Цю площину називатимемо прямовою або нормальною площиною до кривої в точці M.

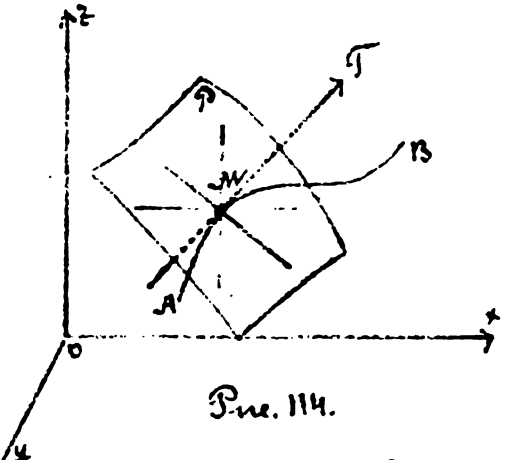


Рис. 114.

З аналітичної геометрії знаємо, що коли нам дано криву: $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$, то рівняння якої-будь площі, проведеної через дану точку $M(x_0, y_0, z_0)$ прямово до цієї прямої матиме вигляд:

$$m(x-x_0) + n(y-y_0) + p(z-z_0) = 0$$

а тому в нашому випадку, коли рівняння даної дотичної буде: $\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}$, то рівняння прямової площі, що переходить через точку дотику $M(x, y, z)$ прямово до цієї дотичної матиме вигляд:

$$(X-x)dx + (Y-y)dy + (Z-z)dz = 0 \quad \ldots\ldots (68)$$

або [див. рівняння дотичної (59)]:

$$x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (69)$$

або [див. рівняння дотичної (62) або (63)]:

$$\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}(X-x) + \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(z,x)}(Y-y) + \frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)}(Z-z) = 0 \quad \ldots\ldots (70)$$

Розкриємо символ $\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}$ і т. д., маємо:

$$(X-x)\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix} + (Y-y)\begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ \Phi_3 & \Phi_1 \end{vmatrix} + (Z-z)\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots (71)$$

де F і Φ мають ті самі значення що й раніше: $F_1 = \frac{\partial F}{\partial x}$; $F_2 = \frac{\partial F}{\partial y}$; $F_3 = \frac{\partial F}{\partial z}$; $\Phi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ і т. д. Звідси:

$$(X-x)\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix} - (Y-y)\begin{vmatrix} F_1 & F_3 \\ \Phi_1 & \Phi_3 \end{vmatrix} + (Z-z)\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix} = 0$$

можна взяти за пропорційний через перший рядок, виписати:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots (72)$$

Це друга форма рівняння прямової площі до кривої визначеної рівняннями: $F(x,y,z)=0$ і $\Phi(x,y,z)=0$

§48. Площа кривини (дотична площа).

Коли в точці $M(x,y,z)$ кривої ми маємо дотичну, то очевидно, що через неї можна провести безліч площ, що будуть проходити й через точку дотику M. Ці площі загалом можна звати дотичними площами до кривої L в точці M.

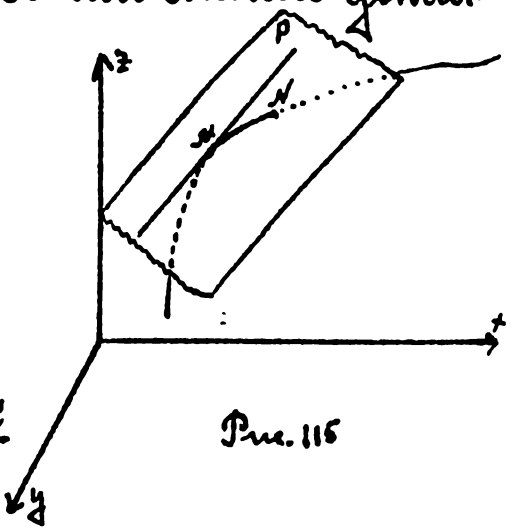


Рис. 116

Також дотична площа неодмінно переходить через дві безмежно-близькі точки (взяті), що визначають напрям дотичної. Коли крива простора (подвійної кривини) то дотична до неї площ де-які, або зовсім не стикається з кривою в цій точці, крім взятої M,

або зустрічають її ще в одній, або кількох точках. З цих площ вибіремо ту, що крім M переходить ще через яку одну точку кривої N, безмежно-близьку до M (рис. 115). Очевидно, що така площа буде одна (визначена трьома безмежно-близькими точками, злятою з двох точкою M і новою N. Коли в цьому місті крива буде плоскою, то очевидно, що надана площа зіллється з площею рисунка (площею де лежить крива), кожне ухилення кривої від площі рисунку викликає й обернення вибраної нами, площі на певний кут навколо даної дотичної. Це дає нам судити про кривину кривої в даній точці M. Тому-то надана нами площа й носить назву площі кривини кривої. З другого боку, розуміння доторкальности, розглянене нами раніш для плоских кривих дає підстави й в даному разі пристосувати ті самі ознаки (а саме проходження площі через 3 безмежно-близькі точки кривої) й до нашої площі, а тому назвати її також і доторкальною площею. Виведемо рівняння цієї площі.

Хай наша крива визначається рівняннями:

$$x = f(t)\ ; \quad y = \varphi(t)\ ; \quad z = \psi(t) \ldots (1)$$

Візьмім на ній точку $M(x, y, z)$ і поведемо через останню дотичну до кривої. Її рівняння буде:

$$\frac{X - x}{f'(t)} = \frac{Y - y}{\varphi'(t)} = \frac{Z - z}{\psi'(t)} \ldots\ldots (2)$$

[Примітка. Загалом точку $M(x, y, z)$ ми вважаємо довільно взятою на кривій L, а через те значники

x, y, z є змінними функціями t. В кожному окремому випадку для якоїсь певної точки M_0 її значники стають сталими величинами x_0, y_0, z_0, що відповідають певній вартості $t=t_0$. В цьому разі кутові змінники рівняння дотичної одержують також сталі вартости: $f'(t)_{t=t_0} = f'(t_0)$; $\varphi(t)_{t=t_0} = \varphi'(t_0)$; $\psi(t)_{t=t_0} = \psi'(t_0)$ що є вислідами вставки в перші похідні зазначених функцій вартости $t=t_0$].

Щоб написати рівняння нашої доторкальної площі, ми звернемо увагу на те, що воно переходить через дотичну до кривої, поведену через точку M, а тому мають виконуватися умови зчиття цієї площі з простою (2). Як відомо з аналітичної геометрії ці умови дають такі рівности:

1) Умова того, що точка M належить до площі:

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0 \ldots (\alpha)$$

[де A, B і C поки-що нам невідомі сочинники рівняння площі]

2) Умова рівнобіжности цієї ж площі й простої (2)

$$A f'(t) + B\varphi'(t) + C\psi'(t) = 0 \ldots\ldots (\beta)$$

Згадані умови (α) і (β) показують, що дана площа переходить через дотичну до кривої в точці M.

Візьмім тепер точку N дуже близьку до точки M, так щоб значники її відповідалиб безмежно-малому прирощенню τ - змінника t, себто точка N малаб значники:

$$x_1 = f(t+\tau); \quad y_1 = \varphi(t+\tau); \quad z_1 = \psi(t+\tau)$$

Очевидно, що колиб наша площа переходила й

через цю точку N, то значники останньої мусіли б задовольняти її рівняння [себто рівняння (α)]. Отже:

$$A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)=0$$

або:

$$A[f(t+\tau)-f(t)]+B[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]+C[\psi(t+\tau)-\psi(t)]=0$$

Але формула Тейльора:

$$\Phi(t+\tau)-\Phi(t)=\tau\,\Phi'(t)+\frac{\tau^2}{2!}\Phi''(t+\theta\tau) \quad \text{де } 0<\theta<1$$

дає нам право попередню рівність написати так:

$$A\left[\tau f'(t)+\frac{\tau^2}{2!}f''(t+\theta\tau)\right]+B\left[\tau\varphi'(t)+\frac{\tau^2}{2!}\varphi''(t+\theta\tau)\right]+C\left[\tau\psi'(t)+\frac{\tau^2}{2!}\psi''(t+\theta\tau)\right]=0$$

або:

$$[Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)]\tau+[Af''(t+\theta\tau)+B\varphi''(t+\theta\tau)+C\psi''(t+\theta\tau)]\frac{\tau^2}{2!}=0$$

Коли взяти на увагу рівність (β), то ми матимемо (після скорочення на $\frac{\tau^2}{2!}$) таку рівність:

$$Af''(t+\theta\tau)+B\varphi''(t+\theta\tau)+C\psi''(t+\theta\tau)=0$$

Це є третьою умовою, що звязує нашу площу, а саме умовою переходження її через точку N. Будемо тепер наближати точку N до M безмежно-близько. Тоді τ буде простувати до нуля й наша третя умова обернеться в:

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0 \quad \ldots (\gamma)$$

Ці три умови дають можливість визначити сочинники A, B і C площі. Справді, розвязуючи всі ці три рівняння (α), (β) і (γ), яко систему, матимемо:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0 \quad [\text{або: } Ax'+By'+Cz'=0]$$

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0 \quad [\text{або: } Ax''+By''+Cz''=0]$$

Ці рівняння є одновимірні, що-до змінних A, B і C, а тому вони спільнорозвязані лише тоді, коли визначник вилучення змінних є рівний з нулем, себто:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f''(t) & \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots (73)$$

або:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots (74)$$

Це й буде рівняння потрібної площі кривини.

Доведемо тепер противне твердження, що кожна площа, яка переходить через три безмежно-близькі точки кривої є відповідньою площею її кривини, себто переходить і через дотичну, поведені через дві з цих даних безмежно близьких точок.

Хай ми маємо на кривій три безмежно близьких точки:

$M(x, y, z)$ де $x = f(t_0)$; $y = \varphi(t_0)$ і $z = \psi(t_0)$

$N(x_1, y_1, z_1)$ де $x_1 = f(t_1)$ і т. д.

$P(x_2, y_2, z_2)$ де $x_2 = f(t_2)$ і т. д.

Ми знаємо, що загалом рівняння якої-будь площі буде:

$$F(t) = AX + BY + CZ = 0$$

[де $X = f(t)$; $Y = \varphi(t)$ і $Z = \psi(t)$] Коли ж ця площа переходитиме через точки M, N і P, то значники їх задовольнятимуть і рівняння її. А тому матиме-

мо тотожности:

$$F(t_0) = Ax_0 + By + Cz + D = 0$$

$$F(t_1) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$F(t_2) = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

Отже для визначення площі матимем такі рівности:

$$F(t) = 0\ ;\quad F(t_0) = 0\ ;\quad F(t_1) = 0 \quad і \quad F(t_2) = 0 \quad \ldots (A)$$

Розглянемо по черзі: 1) $F(t_0) = 0$ і $F(t_1) = 0$ Очевидно, що на підставі теореми Ролля завжди існуватиме така вартість τ $(t_0 \leq \tau \leq t_1)$ для якої $F'(\tau) = 0$.

Таксамо розглядаючи: 2) $F(t_1)$ і $F(t_2)$ за тією же теоремою, маємо:

$$F'(\vartheta) = 0 \quad де\ t_1 \leq \vartheta \leq t_2$$

і нарешті розглядаючи:

$$F'(\tau) = 0 \quad і \quad F'(\vartheta) = 0$$

завжди знайдемо вартість: $\tau \leq \theta \leq \vartheta$, що:

$$F''(\theta) = 0$$

Таким чином систему (A) можна заступити через таку:

$$F(t) = 0\ ;\quad F(t_0) = 0\ ;\quad F'(\tau) = 0\ ;\quad F''(\theta) = 0$$

Коли ми будемо наближати точку N і P безмежно близько до M, то вартости t_1 і t_2 будуть простувати до вартости t_0, а тим скорше до цієї величини t_0 простуватимуть і середні між ними вартости τ і θ. Тому в остаточнім висліді одержимо:

$$F(t) = 0\ ;\quad F(t_0) = 0\ ;\quad F'(t_0) = 0 \quad і \quad F''(t_0) = 0 \quad \ldots (B)$$

Розгортуючи ці функції і первісні вартост

ми одержимо:

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0$$

Ця система дає можливість визначити сочинники A, B, C і D. Попереду відлічуємо 2 рівняння з першого й переходимо до системи:

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$$

$$Ax' + By' + Cz' = 0$$

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0$$

одновимірних рівнянь що дають:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

Ми одержали рівняння площі кривини (74).

Розгортуючи визначника через первні першого рядка, ми одержимо <u>другий вигляд рівняння площі кривини, а саме:</u>

$$(X-x)\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} + (Y-y)\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} + (Z-z)\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

або:

$$(X-x)(y'z''-y''z') + (Y-y)(x''z'-x'z'') + (Z-z)(x'y''-x''y') = 0 \ldots (75)$$

А звідци скорочуючи все рівняння на dt^3, матимемо:

$$(X-x)(dy\,d^2z - d^2y\,dz) + (Y-y)(d^2x\,dz - dx\,d^2z) + (Z-z)(dx\,d^2y - d^2x\,dy) = 0 \ldots (76)$$

Це ж рівняння маємо безпосередньо з визначника:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots (77)$$

що одержимо з визначника (74) після скорочення його на dt^3 (виносячи за знак визначника з 2-го рядка dt а з третього dt^2)

§49. Властивости площі кривини.

I) Площа кривини є межове положення площі, що переходить через дану дотичну рівнобіжно до дотичної, поведеної до кривої через безмежно близьку точку.

Справді, поведемо дотичну через точку $N(x_1, y_1, z_1)$ (див. вивод рівняння площі кривини). Рівняння цієї дотичної буде:

$$\frac{X-x_1}{x_1'} = \frac{Y-y_1}{y_1'} = \frac{Z-z_1}{z_1'}$$

де $x_1 = x + \Delta x = f(t+\tau)$; $y_1 = \varphi(t+\tau)$ і $z_1 = \psi(t+\tau)$. Звідци умова рівнобіжности нашої площі:

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$$

і даної дотичної буде:

$$Ax_1' + By_1' + Cz_1' = 0$$

Але за Тейльором:

$$x_1 = f(t+\tau) = f(t) + \tau f'(t+\theta\tau) \quad \text{де } 0<\theta<1$$

і аналогічно:

$$y_1 = \varphi(t) + \tau\varphi'(t+\theta\tau)$$

$$z_1 = \psi(t) + \tau\psi'(t+\theta\tau)$$

Тому умова рівнобіжности матиме вигляд:

$$A[f(t)+\tau f'(t+\theta\tau)]' + B[\varphi(t)+\tau\varphi'(t+\theta\tau)]' + C[\psi(t)+\tau\psi'(t+\theta\tau)]' = 0,$$

або:

$$Af'(t) + B\varphi'(t) + C\psi'(t) + \tau[Af''(t+\theta \quad B\varphi''(t+\theta\tau) + C\psi''(t+\theta\tau)] = 0$$

Згідно з умовою (другою) проходження площі через дотичну точки M маємо $Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0$, а тому попередня рівність обертається в:

$$Af''(t+\theta\tau)+B\varphi''(t+\theta\tau)+C\psi''(t+\theta\tau)=0$$

В межовому положенню, коли точка N наближається безмежно до точки M, вартість τ простує до нуля, а через те умова рівнобіжности даної площі кривини й безмежно-близької дотичної має остаточно такий вигляд:

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0$$

або:

$$Ax''+By''+Cz''=0$$

Це, як бачимо, є третя умова існування площі кривини, а тому можна твердити, що площа кривини є рівнобіжною до безмежно близької дотичної.

II. <u>Коли через точку дотику повести скілько бажано дотичних площ, то площа кривини є найближчою до безмежно близької до дотику точки кривої</u>, себто це віддалення буде безмежно малою величиною поможливости найвищої малісти.

Хай безмежно близька до дотику $M(x,y,z)$ буде точка $N(x_1,y_1,z_1)$ де $x_1=f(t+\tau)$ і т.д. Поведемо через точку M яку будь площу; тоді її рівняння мусить мати вигляд:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

Віддалення же від неї точки N (як відомо з аналітичної ісометрії) буде:

$$d = \frac{A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Сочинники A, B і C є обмежені величини, що разом не обертаються в нуль, а тому маліст d залежить виключно від числителя:

$$K = A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)$$

Вставляючи в цього числителя вартість x і x_1, y і y_1, z і z_1 матимемо:

$$K = A[f(t+\tau)-f(t)]+B[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]+C[\psi(t+\tau)-\psi(t)]=0$$

А це за взором Тейльора обертається в:

$$K = [Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)]\tau+[Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)]\frac{\tau^2}{2!}+$$
$$+[Af'''(t)+B\varphi'''(t)+C\psi'''(t)]\frac{\tau^3}{3!}+\dots$$

Для кожної площі, що переходить через дотичну маємо:

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0$$

а тому:

$$K=[Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)]\frac{\tau^2}{2!}+\dots$$

є другої малості, щодо τ. Але рівність:

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0$$

виконується лише для площі кривини й тоді:

$$K=[Af'''(t)+B\varphi'''(t)+C\psi'''(t)]\frac{\tau^3}{3!}+\dots$$

є не менш 3ої малості що-до τ.

Таким чином віддалення площі кривини від безмежно близької точки N є найменше.

§50. Головна прямова (нормаля)

Ми вже говорили, що в точці M до кривої можна повести безліч прямових. З них одну, а

саме ту, що є рубом перехрестя площ прямової і кривини беруть за головну прямову (нормалю) (рис. 116)

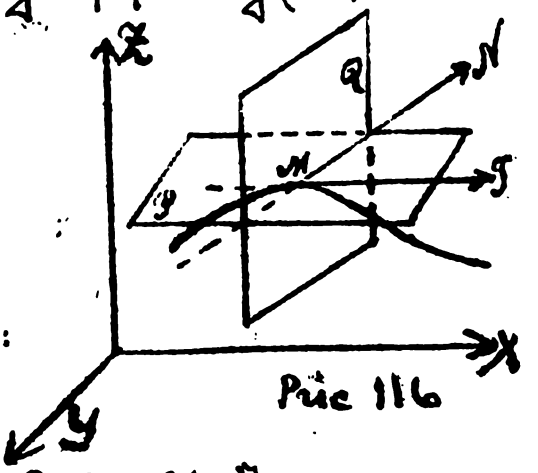


Рис 116

Таким чином за рівняння головної прямової можна вважати систему з:

1) [рівняння прямової площі (69)]:

$$x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0$$

2) [рівняння площі кривини - див. рів (75)]:

$$(y'z''-y''z')(X-x)+(x''z'-x'z'')(Y-y)+$$
$$+(x'y''-x''y')(Z-z)=0$$

Перейдемо до напрямної форми рівняння головної прямової й для цього вилучимо з наших рівнянь по черзі z і y, а саме:

$$(X-x)(Az'-Cx')+(Y-y)(Bz'-Cy')=0$$
$$(X-x)(Bx'-Ay')+(Z-z)(Bz'-Cy')=0$$

де $A=y'z''-y''z'$; $B=x''z'-x'z''$ і $C=x'y''-x''y'$

Звідци:

$$X-x=\frac{Cy'-Bz'}{Az'-Cx'}(Y-y)=\frac{Cy'-Bz'}{Bx'-Ay'}(Z-z)$$

або:

$$\frac{X-x}{Cy'-Bz'}=\frac{Y-y}{Az'-Cx'}=\frac{Z-z}{Bx'-Ay'}$$

Обчислимо тепер кутові змінники, що є в знаменаниях одержаного рівняння:

$$Cy'-Bz'=(x'y''-x''y')y'-(x''z'-x'z'')z'=x'(y'y''+z'z'')-x''(y'^2+z'^2)$$

Ми знаємо, що:

$$ds=dt\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},\ \text{або}\ \left(\frac{ds}{dt}\right)^2=s'^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

А звідци:

$$y'^2 + z'^2 = s'^2 - x'^2$$

Взявши від обох частин похідну, ми одержимо

$$2y'y'' + 2z'z'' = 2s's'' - 2x'x''$$

або:

$$y'y'' + z'z'' = s's'' - x'x''$$

Нарешті вставляючи знайдені вартости у вираз: $Cy' - Bz'$, одержимо:

$$Cy' - Bz' = x'(s's'' - x'x'') - x''(s'^2 - x'^2) = -s'(s'x'' - s''x')$$

Анальогічно:

$$Az' - Cx' = -s'(s'y'' - s''y')$$

$$\text{і} \quad Bx' - Ay' = -s'(s'z'' - s''z')$$

Тому <u>рівняння головної прямової</u> (після скорочення всіх його членів на $-s$) буде:

$$\frac{X - x}{s'x'' - s''x'} = \frac{Y - y}{s'y'' - s''y'} = \frac{Z - z}{s'z'' - s''z'} \quad \ldots\ldots (78)$$

Означивши напрямні змінники прямової через Λ_n, M_n і V_n ми за відомим взором аналітичної геометрії: $\lambda = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ і т. д. складемо:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_n &= \frac{s'x'' - s''x'}{\sqrt{(s'x''-s''x')^2 + (s'y''-s''y')^2 + (s'z''-s''z')^2}}; \quad M_n = \frac{s'y'' - s''y'}{\sqrt{\Sigma(s'x''-s''y')^2}} \text{ і} \\ V_n &= \frac{s'z'' - s''z'}{\sqrt{\Sigma(s'x''-s''x')^2}} \end{aligned}\right\} \ldots (79)$$

Припустім тепер, що за змінника замісць t беремо s, тоді $t = s$; $s' = 1$; $s'' = 0$; $x' = \frac{dx}{ds}$; $x'' = \frac{d^2x}{ds^2}$; $y' = \frac{dy}{ds}$ і т. д. і таким чином:

$$\left.\begin{aligned} \frac{X - x}{\frac{d^2x}{ds^2}} &= \frac{Y - y}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{Z - z}{\frac{d^2z}{ds^2}}, \text{ або:} \\ \frac{X - x}{d^2x} &= \frac{Y - y}{d^2y} = \frac{Z - z}{d^2z} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (80)$$

де d^2x, d^2y і т. д. є другі похідні через s, як невідомими. Через тему самої задачу ми одержимо й вторі напрямні множники головної прямової або функції від s, але невідомими, а саме:

$$\lambda_n = \frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}; \quad M_n = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d^2x}{ds}\right)^2}}; \quad \nu_n = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d^2x}{ds}\right)^2}} \quad \cdots (80)$$

Рівняння головної прямової (78) можна ще перетворити так:

$$\frac{X-x}{\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dz}{dt}}$$

Скоротивши всіх знаменників на dt^3 і зділивши їх на ds^2, матимемо:

$$\frac{X-x}{\frac{d^2x\,ds - d^2s\,dx}{ds^2}} = \frac{Y-y}{\frac{d^2y\,ds - d^2s\,dy}{ds^2}} = \frac{Z-z}{\frac{d^2z\,ds - d^2s\,dz}{ds^2}}$$

або:

$$\frac{X-x}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)} = \frac{Y-y}{d\left(\frac{dy}{ds}\right)} = \frac{Z-z}{d\left(\frac{dz}{ds}\right)} \quad \cdots (81)$$

Але беручи на увагу, що напрямні множники дотичної:

$$\lambda = \frac{dx}{ds}; \quad M = \frac{dy}{ds}; \quad \nu = \frac{dz}{ds}$$

одержимо:

$$\frac{X-x}{d\lambda} = \frac{Y-y}{dM} = \frac{Z-z}{d\nu} \quad \cdots (82)$$

<u>Напрямні множники головної прямової є рівні з диференціалами напрямних множників дотичної.</u>

Повернемо тепер через дотичну нову площину, прямову до головної нормалі. Ця площина має окрему назву: <u>випрямної</u>.

Очевидно, що рівняння названої площі, як тої площі, що переходить через точку $M(x, y, z)$, прямово до простої (78) буде:

$$(X-x)(s'x''-s''x')+(Y-y)(s'y''-s''y')+(Z-z)(s'z''-s''z')=0 \ldots (83)$$

або:

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)(X-x)+d\left(\frac{dy}{ds}\right)(Y-y)+d\left(\frac{dz}{ds}\right)(Z-z)=0 \ldots (83^a)$$

А коли за змінника береться s, то матимемо рівняння випростальної площі в такім вигляді:

$$\frac{d^2x}{ds^2}(X-x)+\frac{d^2y}{ds^2}(Y-y)+\frac{d^2z}{ds^2}(Z-z)=0 \ldots (83^b)$$

Умовимося за додатній напрям головної прямової вважати напрям від точки кривої у той бік випростальної площі, з якого лежить сама крива

§ 51 Співпрямова (бінормаля)

Умовимося ту прямову, що є рубом перехрестя прямової площі з випростальною звати співпрямовою (або бінормалею). Очевидно, що співпрямова є прямом до площі кривини, а тому рівняння її можна легко скласти на основі наступних міркувань, а саме: З аналітичної геометрії відомо, що рівняння простої, що переходить через точку $K(x_1, y_1, z_1)$ і прямової до даної площі $Ax+By+Cz+D=0$ буде: $\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$.

Тому рівняння співпрямової, що переходить через точку $M(x, y, z)$ прямово до площі кривини (75) або (76) матиме вигляд:

$$\frac{X-x}{y'z''-y''z'}=\frac{Y-y}{z'x''-z''x'}=\frac{Z-z}{x'y''-x''y'} \ldots (84)$$

або:

$$\frac{X-x}{dy\,d^2z-d^2y\,dz}=\frac{Y-y}{dz\,d^2x-d^2z\,dx}=\frac{Z-z}{dx\,d^2y-d^2x\,dy}\quad\ldots(85)$$

Означимо вартости напрямних змінників співпрямової через $\lambda_в$, $\mu_в$, $\nu_в$. Очевидно, що вартости цих змінників будуть:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_в&=\frac{y'z''-y''z'}{\sqrt{\Sigma(y'z''-y''z')^2}}\qquad \mu_в=\frac{z'x''-z''x'}{\sqrt{\Sigma(y'z''-y''z')^2}}\\ \text{і}\ \nu_в&=\frac{x'y''-x''y'}{\sqrt{\Sigma(y'z''-y''z')^2}}\end{aligned}\right\}\ldots(86)$$

Таким чином через точку M кривої переходить три взаємно прямових простих: дотична T, прямова N і співпрямова B і три взаємно прямових площі: доторкальна (кривини) NMT, прямова NMB і випростальна TMB. Дуже часто ці прості й площі

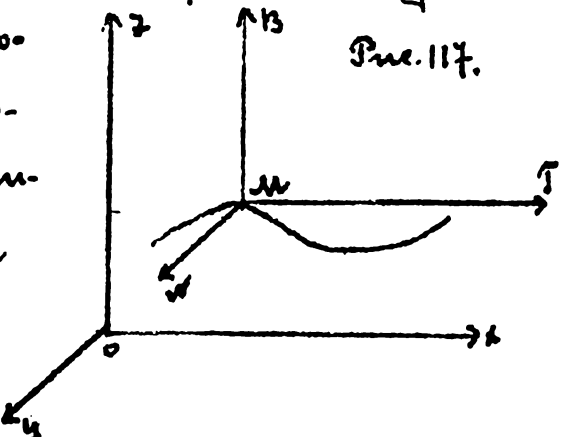


Рис. 117.

беруть за координатні, причому напрям співпрямової B вибирається так, щоб при загаданих, раніш уведених умовами, напрямах T і N напрям B відповідав третій осі координат.

Звичайно, за додатній напрям співпрямової вважають той, коли перед корінем в знаменателі виразів $\lambda_в$, $\mu_в$, $\nu_в$ стоїть знак +.

Усталивши додатній напрям співпрямової, ми тим самим усталюємо який бік площі кривини будемо звати додатнім, а який від-

ємним. А саме, коли ми рухаємося вздовж співпрямової в додатньому напрямі її, то ми переходимо з від'ємного боку площі кривини на додатній і навпаки (рис. 118 а, б).

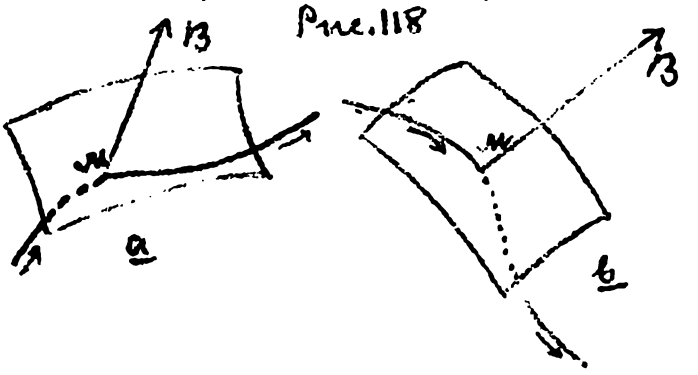


Рис. 118

§ 52. Кривина просторової кривої.

Нам відомо, що кривина елемента дуги кривої зветься межа відношення кута суміжности до даного елементу дуги. Ця дуга визначається колом кривини, що переходить через відповідні три безмежно близькі точки разом з даною. Але ці три безмежно близькі точки також визначають і площу кривини. Тому кожне коло кривини для якої-будь точки кривої завжди лежить на відповідній площі кривини. Коли крива (яку ми раніш досліджували) є плоскою, то площі кривини для всіх її точок будуть зливатися в одну площу, себто у площу самої кривої. Тоді для дослідження кривини кривої досить знайти відповідні лучі кривини для певних точок кривої. Инакше, коли крива просторова. Тоді площі кривини не зливаються в одну, а для кожного нового елемента дуги (для кожної нової тройки безмежно близьких точок) ми будемо мати окрему площу кривини, що лежатиме в просторі під

якимсь кутом до сусідньої собі площі кривини. Разом з цим і кола кривина не лежатимуть в одній площі. Степень відхилення площ кривини (а разом і кол кривини) ми будемо звати <u>крученням</u> кривої. Очевидно, що для дослідження просторової кривої мало знати лише кривину кривої, а треба дослідити й степень кручення її при даній точці. Зупинимося попереду на більш детальному вивченню кривини й для цього візьмім на даній кривій якусь точку $M(x, y, z)$ і досить близько до неї другу точку N, що будемо її невпинно наближувати до M. Дотичні в цих точках, чи будуть вони перехресні, чи мимобіжні створять якись кут φ (кут суміжности). Отже відношення кута φ до самої дуги MN будемо звати пересічною кривиною даної кривої. Коли ми візьмемо межу цього відношення, при умові що N безмежно наближається до M (себто дуга MN простує до нуля, то ця межа зветься справженою кривиною або просто <u>кривиною</u> даної кривої. Зворотню величину кривини $k = \frac{1}{\rho}$ будемо звати лучем кривини.

Щоб визначити кут φ між дотичними суміжности, ми поведемо з початку осей лучі вектори рівнобіжні до даних дотичних. Хай вони будуть

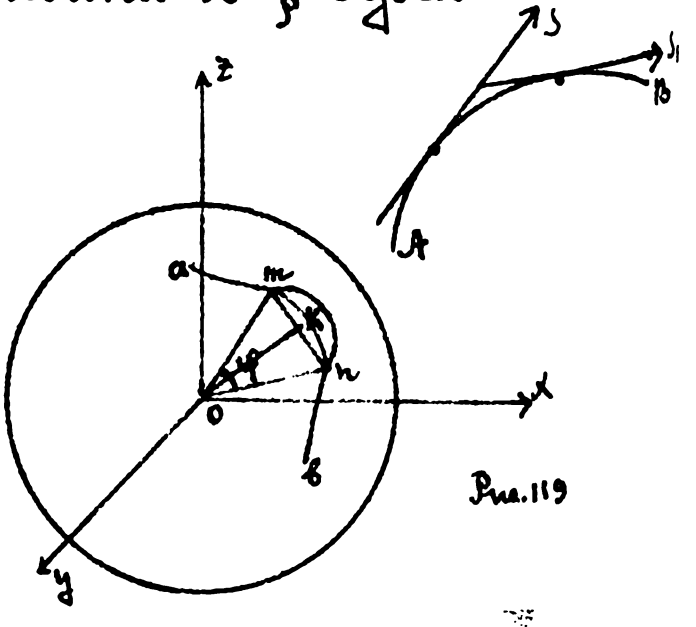


Рис. 119

Om і On. А далі лучем рівним лінійній одиниці очеркнемо навколо початку кулю. Коли б ми з початку координат повели б лучі рівнобіжні до кожної здотичних в усіх точках кривої по черзі, то кінці цих лучів, утворили б на поверхні кулі криву ав (рис. 119) відповідно до даної кривої АВ. Ця крива лежить всіма своїми точками на поверхні даної кулі й має назву кулистої, або сферичної індикатриси дотичних до даної кривої. Для кожної дуги АВ кривої завжди відповідатиме дуга ав індикатриси і коли якась дуга з кривої матиме прирощення Δs, то відповідна їй дуга індикатриси б матиме прирощення $\Delta \sigma$.

Розглянемо тепер тятиву mn, що відповідає дузі її індикатриси mn. Ми маємо рівнораменний тр-к Omn; спустивши в ньому висоту Ok і розглянувши один з утворених прямокутних трикутників, одержимо:

$$\overline{mn} = 2\,On \sin\frac{\varphi}{2}$$

Але On = r кулі = 1, а тому:

$$\overline{mn} = 2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

З другого боку означимо напрямні змінники дотичної MS, а тому й вектора Om через λ, μ і ν. Очевидно, що точку N взято так близько до M, що напрямні змінники дотичної в цій точці, а разом і напрямні змінники вектора On можна вважати рівними: $\lambda + \Delta\lambda$; $\mu + \Delta\mu$ і $\nu = \nu + \Delta\nu$.

Хай значники точки m будуть x, y, z, а точки n – x_1, y_1, z_1. Тоді $x = Om.\lambda = \lambda$ (бо Om = 1); аналю-

нехай $y = \mu$; $z = \nu$; $x_1 = \lambda + \Delta\lambda$; $y_1 = \mu + \Delta\mu$ і $z_1 = \nu + \Delta\nu$

Отже:

$$mn = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = \sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta\mu^2 + \Delta\nu^2}$$

Маємо також:

$$\sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta\mu^2 + \Delta\nu^2} = 2\sin\tfrac{\varphi}{2}$$

Але нам відомо, що:

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} = 1, \text{ або } \lim_{\varphi \to 0} \varphi = \lim_{\varphi \to 0} 2\sin\tfrac{\varphi}{2} = \sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta\mu^2 + \Delta\nu^2}$$

А тому кривина K буде рівна:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta\mu^2 + \Delta\nu^2}}{\Delta s}$$

де Δs є елемент дуги MN. Звідси ділимо чисельник і знаменник на Δt, маємо:

$$K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\mu}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{\Delta t}\right)^2}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} = \frac{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}}{s'} \qquad (a)$$

або:

$$K = \sqrt{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2} \quad \ldots \quad (b)$$

А звідси рад кривини буде:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2}} \quad \ldots \ldots \quad (87)$$

Рад кривини ρ будемо вважати завжди додатним.

Ми маємо, що $\lambda = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{x'}{s'}$; $\mu = \frac{y'}{s'}$; $\nu = \frac{z'}{s'}$, а тому:

$$\lambda' = \frac{x''s' - x's''}{s'^2} \quad \mu' = \frac{y''s' - y's''}{s'^2} \quad \nu = \frac{z''s' - z's''}{s'^2}$$

Вставляючи ці вартости у вірш (a) маємо:

$$K = \frac{\sqrt{(x''s' - x's'')^2 + (y''s' - y's'')^2 + (z''s' - z's'')^2}}{s'^3} \quad \ldots \ldots \quad (88)$$

Перетворимо цей вірш так, щоб мати вираз кривини через змінні точки дотичної

Маємо:

$$\sqrt{\Sigma(x''s'-x's'')^2}=\sqrt{s'^2(x''^2+y''^2+z''^2)-2s's''(x'x''+y'y''+z'z'')+s''^2(x'^2+y'^2+z'^2)}$$

Ми знаємо, що $x'^2+y'^2+z'^2=s'^2$, а диференцуючи цю рівність (після скорочення на 2) маємо:

$$x'x''+y'y''+z'z''=s's''$$

Далі вставляючи знайдені вартости в рівність (88) одержимо:

$$\sqrt{s'^2(x''^2+y''^2+z''^2)-2s'^2s''^2+s''^2s'^2}\text{, або:}$$

$$\sqrt{s'^2(x''^2+y''^2+z''^2)-s'^2s''^2}$$

Тепер зробимо вставку навпаки:

$$s'^2=x'^2+y'^2+z'^2 \text{ і } s's''=x'x''+y'y''+z'z''$$

і під радикалом одержимо:

$$(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')^2=\cancel{x'^2x''^2}+x'^2y''^2+$$
$$+x'^2z''^2+y'^2x''^2+\cancel{y'^2y''^2}+y'^2z''^2+z'^2x''^2+z'^2y''^2+\cancel{z'^2z''^2}-\cancel{x'^2x''^2}-$$
$$-\cancel{y'^2y''^2}-\cancel{z'^2z''^2}-2x'y'x''y''-2x'z'x''z''-2y'z'y''z''=(x'y''-x''y')^2+$$
$$(z'x''-x'z'')^2+(y'z''-z'y'')^2.$$

Таким чином:

$$K=\frac{\sqrt{(x'y''-x''y')^2+(z'x''-z''x')^2+(y'z''-z'y'')^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}$$

А звідци:

$$\rho=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}{\sqrt{\Sigma(x'y''-x''y')^2}}\quad\ldots\ldots(89)$$

Коли б змінника t вважали рівним s, тоді взір (a) мав би вигляд:

$$K=\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2}\quad\text{або}\quad\rho=\frac{1}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2}}$$

або: $\lambda=\frac{dx}{ds}$, то $\lambda'=\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{dx^2}{ds^2}$, а тому:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots (90)$$

Отже, приймаючи під увагу взір (81), маємо:

$$\lambda_n = \pm\rho\frac{d^2x}{ds^2}; \qquad \mu_n = \pm\rho\frac{d^2y}{ds^2}; \qquad \nu_n = \rho\frac{d^2z}{ds^2}$$

(коли незалежником є дуга s). Ми бачимо, що луч кривини лежить на головній прямовій.

Відкладем вартість ρ вздовж головної прямової у бік додатній від точки дотику $M(x, y, z)$. Тоді ми одержимо центр кривини $O(a, b, c)$. Обчислимо значники a, b, c цього центру кривини. (рис. 120.) Відтинок $OM = \rho$ зметуємо на осі координат і матимемо:

$$\rho_x = a - x = \rho\lambda_n$$

$$\rho_y = b - y = \rho\mu$$

$$\rho_z = c - z = \rho\nu$$

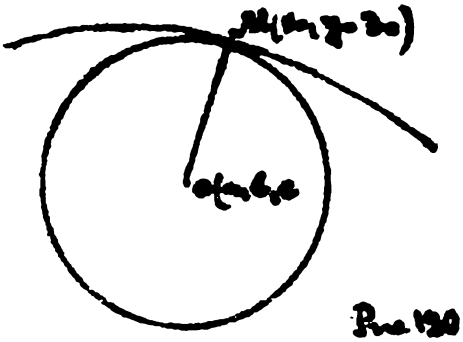


Рис. 120

А звідци:

$$a = x + \rho\lambda_n; \quad b = y + \rho\mu_n; \quad c = z + \rho\nu_n \quad \ldots (91)$$

Ми вже знаємо, що це коло кривини переходить через 3 безмежно близькі дотику точки, а ці точки також визначають площу кривини, а тому коло кривини лежить в площі кривини. Коли ми поведемо через центр прям до площі кривини, то цей прям називатиметься віссю кривини й буде рівнобіжний до співпрямової (до бінормалі).

§53 Кручення кривої.

Зараз ми розглядали кривизну кривої в

даній точці згідно площі кривини. Иншими словами ми розглядали певний елемент дуги кривої, що лежить в даній площі кривини і вважали цей елемент за плоский. Коли б уся крива була плоскою, то вона вміщалася б у спільній площі кривини й тоді всі осі кривини (а разом і співпрямова) були б рівнобіжні, як прями до одної площі. Коли ж ми маємо просторову (не плоску криву), то для кожної нової точки її буде своя площа кривини, що складатиме з попереднього певний кут.

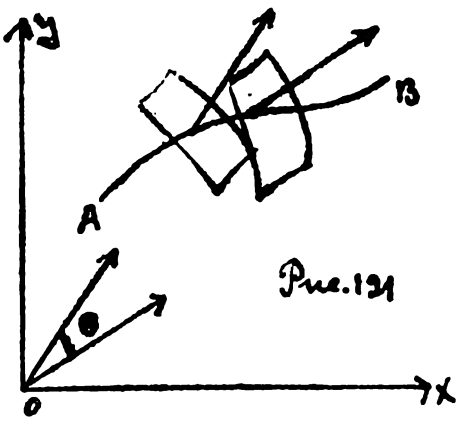


Рис. 121

Цей кут буде показувати, як закручується крива відходячи від площі, в якій перед тим лежала. Тому кут між двома сусідніми площами кривини будемо звати <u>кутом кручення</u> (рис. 121) кривої і означимо його через θ. Аналогічно з визначенням кривини ми будемо звати відношення кута кручення до дуги між точками M і N (точками, що досліджуємо) пересічним крученням кривої, а межу цього відношення, коли точка N наближається безмежно близько до M, себто, коли елемент дуги кривої простує до нуля ($\Delta s \to 0$), називатимемо <u>справжнім крученням</u> кривої при точці M, або просто <u>крученням кривої в точці M</u>.

Визначимо кут кручення. Поставимо до даних площ кривини прями в точках їх дотику (співпрямові). Очевидно, що кут між цими співпрямовими буде рівний із кутом між площами кривин.

а тому ми зможемо кут між цими двома площами кривини завжди заступити через кут між відповідними для них співпрямовими. (Рис 121)

Означимо кручення даного елементу дуги через K. Тоді:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Theta}{\Delta s}$$

Поведемо тепер з початку осей лучі вектори OK і OL (рис. 122), рівнобіжні до співпрямових MB і NB₁ і лучем рівним одиниці очеркнем круг центру кулю. Очевидно, що коли в кожній точці даної кривої AB збудуємо співпрямові й поведемо з

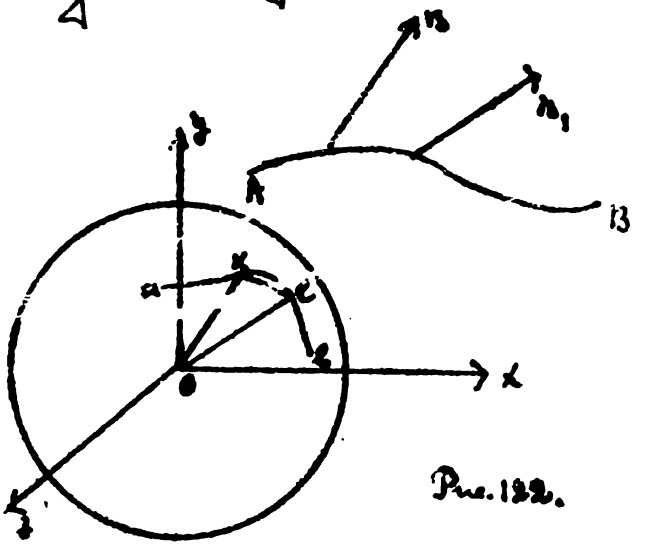


Рис. 122.

початку координат рівнобіжні їм вектори, то останні утворять на кулі криву ab, як геометричний осередок кінців цих векторів. Ця крива зветься <u>кулистою або сферичною індикатрисою співпрямових кривої</u>. Міркуваннями аналогічними з попереднім доводом, ми дойдемо до висліду подібному (a) попереднього s, а саме:

$$K = \frac{\sqrt{\lambda_b'^2 + \mu_b'^2 + \nu_b'^2}}{s'} \quad \ldots (1)$$

або:

$$K = \frac{\sqrt{d\lambda_b^2 + d\mu_b^2 + d\nu_b^2}}{ds} \quad \ldots (2)$$

Але:

$$\lambda_b = \frac{y'z'' - y''z'}{\sqrt{\Sigma(y'z'' - y''z')^2}} \quad \text{і т. д.} \quad \ldots (3)$$

де: $\Sigma(y'z'' - z'y'')^2 = (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - y'x'')^2$

Отметим для сокращения:

$y'z'' - y''z' = A$; $z'x'' - z''x' = B$; $x'y'' - y'x'' = C$. тогда:

$$\lambda_b = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \mu_b = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \nu_b = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \ldots (4)$$

А потому:

$$\lambda_b' = \frac{A'(A^2+B^2+C^2) - A(AA'+BB'+CC')}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}} \quad \ldots (5^a)$$

Аналогично:

$$\mu_b' = \frac{B'(A^2+B^2+C^2) - B(AA'+BB'+CC')}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}} \quad \ldots (5^b)$$

и $$\nu_b' = \frac{C'(A^2+B^2+C^2) - C(AA'+BB'+CC')}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}} \quad \ldots (5^c)$$

Отсюда:

$$\lambda_b'^2 + \mu_b'^2 + \nu_b'^2 = \frac{(A^2+B^2+C^2)^2(A'^2+B'^2+C'^2) + (A^2+B^2+C^2)(AA'+BB'+CC')^2}{(A^2+B^2+C^2)^3} -$$

$$- \frac{2(A^2+B^2+C^2)(AA'+BB'+CC')^2}{(A^2+B^2+C^2)^3}.$$

Або, роблячи зведення й скорочення на $(A^2+B^2+C^2)$, маємо:

$$\lambda_b'^2 + \mu_b'^2 + \nu_b'^2 = \frac{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2) - (AA'+BB'+CC')^2}{(A^2+B^2+C^2)^2} =$$

$$= \frac{(BC'-CB')^2 + (CA'-A'C)^2 + (AB'-A'B)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2} \quad \ldots (6)$$

Обчислимо окремо $BC'-CB'$:

$$B' = (z'x'' - x'z'')' = z''x'' + z'x''' - x''z'' - x'z''' = z'x''' - x'z'''$$

Маємо:

$$C' = (x'y'' - x''y')' = x'y''' - x'''y'$$

тому:

$$BC' - CB' = (z'x'' - x'z'')(x'y''' - x''y') - (x'y'' - x''y')(z'x''' - x'z''') =$$

$$= x'z'x''y''' - y'z'x''x''' - x'^2z''y''' + x'y'z''x''' - x'z'y''x''' + x'^2y''z''' +$$

$$+ y'z'x''^2y''' - x'y'x''z''' = x'[x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - z'y''x''' - y'x''z''' -$$

$$-x'z''y'''] = x'\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = x'.\Delta$$

Аналогічно:

$$CA' - AC' = y'\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = y'\Delta \text{ і } AB' - BA' = z'\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = z'.\Delta$$

Отже:

$$\lambda_b'^2 + \mu_b'^2 + \nu_b'^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)\Delta^2}{[\sum(y'z'' - y''z')]^2} = \frac{s'^2.\Delta^2}{[\sum(y'z'' - y''z')]^2} \quad \ldots (7)$$

А звідци:

$$K = \frac{\cancel{s'}\,\Delta}{\cancel{s'}\sum(y'z'' - y''z')^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\sum(y'z'' - y''z')^2}$$

Таким чином луч кола кручення буде:

$$r = \frac{\sum(y'z'' - y''z')^2}{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Умовимося, що коли r додатнє, то кручення кривої йде з правої руки до лівої, для спостерігача, що стоїть вздовж підпрямової й навпаки.

§54. Взори Френе (Серре).

Щоб установити залежність між напрямами дотичної, головної прямової й співпрямової, а також установити бік (знак) кручення, ми доведемо дуже важні взори Френе.

I. Ми вже знаємо, що 1) напрямні змінники дотичної [взір (67)]: $\lambda = \frac{dx}{ds} = \frac{x'}{s'}$; $\mu = \frac{y'}{s'}$ і $\nu = \frac{z'}{s'}$ ... (1)

2) напрямні змінники головної прямової [взір (79)]

$$\lambda_n = \frac{s'x'' - s''x'}{\sqrt{\sum(s'x'' - s''x')^2}};\ \mu_n = \frac{s'y'' - s''y'}{\sqrt{\sum(s'x'' - s''x')^2}} \text{ і } \nu_n = \frac{s'z'' - s''z'}{\sqrt{(s'x'' - s''x')^2}} \quad \ldots (2)$$

і нарешті:

$$\rho = \frac{s'^3}{\sqrt{\Sigma(s'x'' - s''x')^2}} \quad (\text{див. взір } 88) \ldots\ldots (3)$$

Зі взорів (2) визначимо $U = \sqrt{\Sigma(s'x'' - s''x')^2}$, а саме:

$$U = \frac{s'x'' - s''x'}{\lambda_n}; \; U = \frac{s'y'' - s''y'}{\mu_n} \text{ і } U = \frac{s'z'' - s''z'}{\nu_n}$$

і вставимо їх у вартість ρ (3). Тоді матимемо:

$$1)\ \rho = \frac{\lambda_n s'^3}{s'x'' - s''x'}; \quad 2)\ \rho = \frac{\mu_n s'^3}{s'y'' - s''y'} \quad 3)\ \rho = \frac{\nu_n s'^3}{s'y'' - s''z'}.$$

Але, взявши від взорів (1) перші похідні через t, маємо:

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{s'x'' - s''x'}{s'^2}; \; \mu' = \frac{d\mu}{dt} = \frac{s'y'' - s''y'}{s'^2}; \; \nu' = \frac{d\nu}{dt} = \frac{s'z'' - s''z'}{s'^2}$$

А звідци:

$$s'x'' - s''x' = \lambda' s'^2; \; s'y'' - s'y' = \mu' s'^2; \; s'z'' - s''z' = \nu' s'^2. \text{ Тому:}$$

$$\rho = \frac{\lambda_n s'}{\lambda'}; \; \rho = \frac{\mu_n s'}{\mu'} \text{ і } \rho = \frac{\nu_n s'}{\nu'}$$

або:

$$\frac{\lambda'}{s'} = \frac{\lambda_n}{\rho}; \; \frac{\mu_1}{s'} = \frac{\mu_n}{\rho}; \; \frac{\nu_1}{s'} = \frac{\nu_n}{\rho}$$

Звідци остаточно, (скорочуючи λ' і s' і т. д. на dt), маємо:

$$\lambda_n = \rho \frac{d\lambda}{ds}; \; \mu_n = \rho \frac{d\mu}{ds} \text{ і } \nu_n = \rho \frac{d\nu}{ds} \ldots\ldots (93)$$

Це є перша низка взорів Френе.

II Властивість напрямних змінників головної прямової.

Ми мали рівняння головної прямової: (78)

$$\frac{X - x}{s'x'' - s''x'} = \frac{Y - y}{s'y'' - s''y'} = \frac{Z - z}{s'z'' - s''z'}$$

Вставимо вартости s' і s'' і перетворимо це рівняння до другого вигляду:

$$s'x'' - s''x' = \frac{s'^2x'' - s's''x'}{s'},$$

але $s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$; $s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z''$. тому:

$$s'x'' - s''x' = \frac{1}{s'}\left[x'^2x'' + y'^2x'' + z'^2x'' - x'^2x'' - x'y'y'' - z'z''x'\right] =$$

$$= \frac{1}{s'}\left[y'(y'x'' - x'y'') + z'(z'x'' - z''x')\right] = \frac{M}{s'}$$

Аналогічні вздри застосовано й для:

$$s'y'' - s''y' = \frac{1}{s'}\left[z'(z'y'' - z''y') + x'(x'y'' - x''y')\right] = \frac{N}{s'},$$

$$s'z'' - s''z' = \frac{1}{s'}\left[x'(x'z'' - x''z') + y'(y'z'' - y''z') = \frac{P}{s'}.$$

Вставляючи ці вартості в рівняння прямової, та скорочуючи на s', матимемо:

$$\frac{x-x}{M} = \frac{y-y}{N} = \frac{z-z}{P}$$

З другого боку ми маємо, що: [взір (5) попер. §]

$$\lambda_b' = \frac{A'(A^2+B^2+C^2) - A(AA'+BB'+CC')}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}}$$

і т. д. З цих маємо:

$$\lambda_b' = \frac{A'A^2 + A'B^2 + A'C^2 - A^2A' - ABB' - ACC'}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}} \text{ і т. д.}$$

а тому:

$$\lambda_b' = \frac{C(A'C - AC') - B(AB' - A'B)}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}} \text{ і т. д.}$$

Користуючись перетвореннями з попереднього §, а саме:

$$A = (y'z'' - y''z'); \quad B = z'x'' - z''x' \text{ і } C = x'y'' - y'x''$$

і $A'C - AC = y'\Delta$; $AB' - A'B = z'\Delta$; $BC' - CB' = x'\Delta$,

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

маємо:

$$\lambda'_b = \frac{Cy' - Bz'}{\Sigma(y'z'' - y''z')^{3/2}} \cdot \Delta = -\frac{Bz' - Cy'}{\Sigma(y'z'' - z'y'')^{3/2}} \cdot \Delta$$

Аналогічно:

$$M'_b = \frac{Cx' - Az'}{\Sigma(y'z'' - y''z')^{3/2}} \Delta$$

і $$\nu'_b = \frac{Ay' - Bx'}{\Sigma(y'z'' - z'y'')^{3/2}} \cdot \Delta$$

А звідси:

$$\lambda'_b = -\frac{z'(z'x'' - x'z'') - y'(x'y'' - y'x'')}{K} = -\frac{y'(y'x'' - x'y'') + z'(z'x'' - x'z'')}{K} = -\frac{M}{K}$$

де $$K = \frac{\Delta}{\Sigma(y'z'' - z'y'')^{3/2}}$$

Аналогічно:

$$M'_b = -\frac{N}{K}\ ; \qquad \nu'_b = -\frac{P}{K}$$

Звідси: $M = -K\lambda'_b$; $N = -KM'_b$; $P = -K\nu'_b$

Нарешті, вставляючи ці вартості в рівняння прямової й скорочуючи на $-K$, маємо:

$$\frac{x - x}{\lambda'_b} = \frac{y - y}{M'_b} = \frac{z - z}{\nu'_b}$$

або:

$$\frac{x - x}{d\lambda_b} = \frac{y - y}{dM_b} = \frac{z - z}{d\nu_b} \quad \ldots\ldots (94)$$

Рівняння (94) приводять нас до дуже важливого висновку, а саме:

Напрями дотичних головної прямової пропорційні:

1) (рів. 82) похідні (диференціяли) напрямних дотичних;

2) (рів. 93) похідні (диференціяли) напрямних

змінників співпрямової.

Тепер перейдемо до доводу другої пики взорів Серре-Френе.

III Коли ми знаємо, що напрямні змінники головної прямової пропорційні диференціялам напрямних змінників співпрямової, то можемо записати:

$$\lambda_n = q\,d\lambda_b \;;\; \mu_n = q\,d\mu_b \;\text{ і }\; \nu_n = q\,d\nu_b,$$

де q невідомий нам сочинник пропорційности. Щоб його визначити піднесемо до квадрату всі рівности й додамо їх. Тоді:

$$\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2 = q^2\left(d\lambda_b^2 + d\mu_b^2 + d\nu_b^2\right).$$

Але сума квадратів напрямних змінників одного й того же вектора є рівна з одиницею, а тому:

$$1 = q^2\left(d\lambda_b^2 + d\mu_b^2 + d\nu_b^2\right)$$

а звідци:

$$q = \pm\frac{1}{\sqrt{d\lambda_b^2 + d\mu_b^2 + d\nu_b^2}}$$

або (див. взір (2) попер. §) матимемо:

$$q = \pm\frac{1}{K\,ds} = \pm\frac{r}{ds} \quad (\text{де } r \text{ є луч кручення})$$

Таким чином маємо другу низку взорів Френе.

$$\lambda_n = r\frac{d\lambda_b}{ds} \;;\; \mu_n = r\frac{d\mu_b}{ds} \;;\; \nu_n = r\frac{d\nu_b}{ds} \quad \ldots\ldots (95)$$

При чому беремо лише (+), що встанавлює знак додатнього кручення.

Візьмім просторову криву й при даній точці збудуємо головний тристінний кут, що тво-

риться площами: 1) кривини 2) прямового й випростального (рис. 123) і візьмемо цю систему за нову координатну. Хай кути нових осей зі старими будуть:

дотичної T: λ, μ і ν

прямової N: λ_n, μ_n і ν_n

співпрямової B: λ_b, μ_b і ν_b

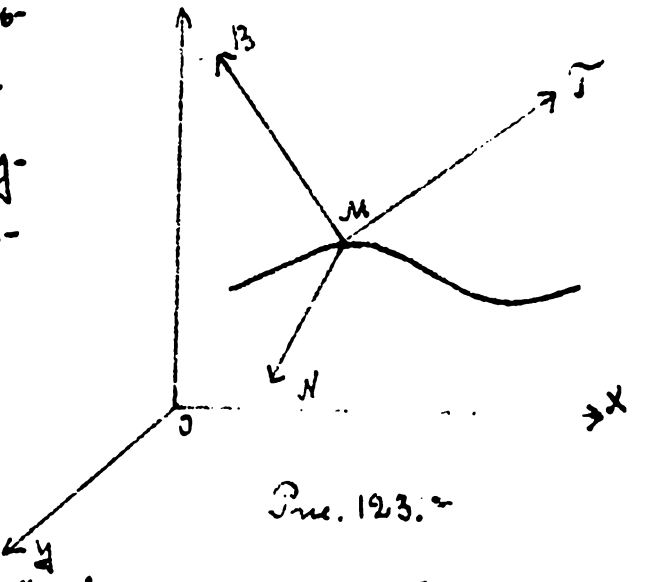


Рис. 123.

Із аналітичної геометрії відомо, що ці 9 кутів будуть звязані між собою так:

	x	y	z
T	λ	μ	ν
N	λ_n	μ_n	ν_n
B	λ_b	μ_b	ν_b

I Із властивости суми квадратів напрямних змінників:

а) нових щодо старих:

1) $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$ 2) $\lambda_n^2+\mu_n^2+\nu_n^2=1$; 3) $\lambda_b^2+\mu_b^2+\nu_b^2=1$

б) старих до нових:

1) $\lambda^2+\lambda_n^2+\lambda_b^2=1$; 2) $\mu^2+\mu_n^2+\mu_b^2=1$; 3) $\nu^2+\nu_n^2+\nu_b^2=1$

II Із умови прямовости: а) нових між собою:

1) $\lambda\lambda_n+\mu\mu_n+\nu\nu_n=0$; 2) $\lambda\lambda_b+\mu\mu_b+\nu\nu_b=0$; 3) $\lambda_n\lambda_b+\mu_n\mu_b+\nu_n\nu_b=0$

б) старих між собою:

1) $\lambda\mu+\lambda_n\mu_n+\lambda_b\mu_b=0$; 2) $\lambda\nu+\lambda_n\nu_n+\lambda_b\nu_b=0$; 3) $\mu\nu+\mu_n\nu_n+\mu_b\nu_b=0$

Візьмім тепер під розгляд головну прямову. Її напрямні змінники звязані рівняннями:

$$1)\ \lambda_n^2+\mu_n^2+\nu_n^2=1 \quad (\mathrm{I}\,a,2)$$

і (умова прямовости до дотичної й співпрямової)

$$2)\ \lambda\lambda_n+\mu\mu_n+\nu\nu_n=0 \quad (\mathrm{II},a,1)$$

$$3)\ \lambda_b\lambda_n+\mu_b\mu_n+\nu_b\nu_n=0 \quad (\mathrm{II},a,3)$$

Продеференцуємо їх і матимемо:

I) $\lambda_n \lambda'_n + \mu_n \mu'_n + \nu_n \nu'_n = 0$

II) $(\lambda' \lambda_n + \mu' \mu_n + \nu' \nu_n) + (\lambda \lambda'_n + \mu \mu'_n + \nu \nu'_n) = 0$

III) $(\lambda'_6 \lambda_n + \mu'_6 \mu_n + \nu'_6 \nu_n) + (\lambda_6 \lambda'_n + \mu_6 \mu'_n + \nu_6 \nu'_n) = 0$

Ако за 1ми низок бројева среме (93) имамо:

$$\lambda_n = \rho \frac{d\lambda}{ds}, \text{ або } \lambda_n = \rho \frac{\lambda'}{s'}$$

а извиди:

$$\lambda' = \frac{\lambda_n s'}{\rho}$$

замену:

II) $\left(\frac{\lambda_n^2 s'}{\rho} + \frac{\mu_n^2 s'}{\rho} + \frac{\nu_n^2 s'}{\rho}\right) + (\lambda \lambda'_n + \mu \mu'_n + \nu \nu'_n) = 0$

або:

$\lambda \lambda'_n + \mu \mu'_n + \nu \nu'_n = -\frac{s'}{\rho}(\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2)$. Онако:

$$\lambda \frac{d\lambda_n}{ds} + \mu \frac{d\mu_n}{ds} + \nu \frac{d\nu_n}{ds} = -\frac{1}{\rho} \ldots (\alpha)$$

Исто само за другога низок бројева среме (95) имамо:

$$\lambda_n = \tau \frac{d\lambda_6}{ds} = \tau \frac{\lambda'_6}{s'} \text{ и т. д.}$$

а извиди:

$$\lambda'_6 = \frac{\lambda_n s'}{\tau} \text{ и т. д.}$$

замену (III)

$$\left(\frac{\lambda_n^2 s'}{\tau} + \frac{\mu_n^2 s'}{\tau} + \frac{\nu_n^2 s'}{\tau}\right) + (\lambda_6 \lambda'_n + \mu_6 \mu'_n + \nu_6 \nu'_n) = 0$$

А извиди:

$$\lambda_6 \lambda'_n + \mu_6 \mu'_n + \nu_6 \nu'_n = -\frac{s'}{\tau} \quad (\text{бо } \lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2 = 1)$$

замену:

$$\lambda_6 \frac{d\lambda_n}{ds} + \mu_6 \frac{d\mu_n}{ds} + \nu_6 \frac{d\nu_n}{ds} = -\frac{1}{\tau} \ldots (\beta)$$

Имамо само исто имено имену:

I) $\lambda_n \frac{d\lambda_n}{ds} + \mu_n \frac{d\mu_n}{ds} + \nu_n \frac{d\nu_n}{ds} = 0$ — [ова добијамо ако извршимо скалирање на s' и потом скалирамо на $dt = \frac{\lambda'_n}{s'} = \frac{d\lambda_n}{ds}$]

II) $\lambda \frac{d\lambda_n}{ds} + \mu \frac{d\mu_n}{ds} + \nu \frac{d\nu_n}{ds} = -\frac{1}{\rho}$ (α)

III) $\lambda_6 \frac{d\lambda_n}{ds} + \mu_6 \frac{d\mu_n}{ds} + \nu_6 \frac{d\nu_n}{ds} = -\frac{1}{\tau}$ (β)

де змінними є: $\frac{d\lambda_n}{ds}$, $\frac{d\mu_n}{ds}$ і $\frac{d\nu_n}{ds}$

Множимо рівняння I) на λ_n, II на λ і III на λ_b і складаємо:

$$\cancel{(\lambda_n^2+\lambda^2+\lambda_b^2)}^{1}\frac{d\lambda_n}{ds}+(\lambda_n\mu_n+\lambda\mu+\lambda_b\mu_b)\frac{d\mu_n}{ds}+(\lambda_n\nu_n+\lambda\nu+\lambda_b\nu_b)\frac{d\nu_n}{ds}=-\left(\frac{\lambda}{\rho}+\frac{\lambda_b}{r}\right)$$

Звідци [беручи під увагу рівности: а) (I, б, 1); б) (II, б, 1) і в) (II, б, 2)] матимемо:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\lambda_n}{ds}&=-\left(\frac{\lambda}{\rho}+\frac{\lambda_b}{r}\right)\\ \text{Аналогічно:}\quad \frac{d\mu_n}{ds}&=-\left(\frac{\mu}{\rho}+\frac{\mu_b}{r}\right)\\ \text{і}\quad \frac{d\nu_n}{ds}&=-\left(\frac{\nu}{\rho}+\frac{\nu_b}{r}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(96)$$

Це є <u>третя низка взорів Серре-Френе.</u>

<u>Приклад.</u> Візьмім трубову лінію рівняння якої:

$x=a\cos t$; $y=a\sin t$; $z=\frac{ht}{2\pi}$

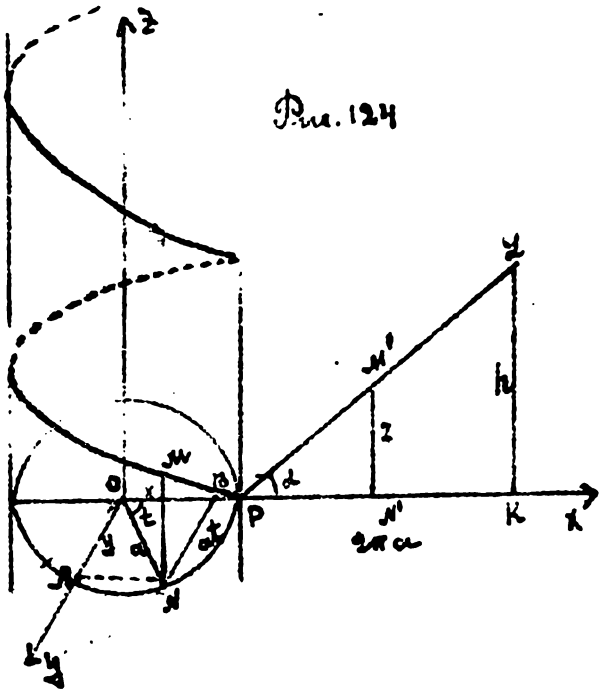


Рис. 124

[Вивід цього рівняння відомий аналітичної геометрії: трубова лінія утворюється, коли на вальцову поверхню (валець луча а) ми будемо нагортати прямокутний трикутник з прямками PK = 2πa (обвід поперечного перерізу вальця) і KL = h, що зветься ходом, або кроком труби. Значники якої-будь точки M(x, y, z) визначатимуться з Δ BON: $x=a\cos t$; з Δ AON: $y=a\sin t$ і, нарешті, $z=MN$. Але MN на пропорції відповідає M'N', а дуга NP відповідає дузі PN'. Коли луч кола a, то дуга NP в кругових мірах буде at,

тому й $PN' = at$. Отже з $\Delta PM'N'$ маємо: $z = MN = at.tg\alpha$, але з ΔLPK $tg\alpha = \frac{h}{2\pi a}$, тому $MN = z = \frac{th}{2\pi}$].

I) Визначимо попереду ρ — луч кривини трубової лінії. Беручи на увагу, що $\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\lambda'}{s'}$ (коли λ і s є функції t), ми скористуємося першою низкою взорів Френе в такому вигляді:

$$\lambda_n = \rho\frac{\lambda'}{s'}\ ;\quad \mu_n = \rho\frac{\mu'}{s'}\ ;\quad \nu_n = \rho\frac{\nu'}{s'} \ldots (\alpha)$$

де λ, μ і ν, як напрямні змінники дотичної, є рівні: $\lambda = \frac{x'}{s'}$; $\mu = \frac{y'}{s'}$; $\nu = \frac{z'}{s'}$, але $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$ і $z' = \frac{h}{2\pi}$.

тому:

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + \frac{h^2}{(2\pi)^2}} =$$

$$= a\sqrt{1 + \frac{h^2}{(2\pi a)^2}} = ak,\ \text{де}\ k = \sqrt{1 + \frac{h^2}{(2\pi a)^2}} = (const)$$

тому:

$$\lambda = -\frac{\sin t}{k}\ ;\quad \mu = \frac{\cos t}{k}\ ;\quad \nu = \frac{\frac{h}{2\pi a}}{k}$$

А звідци:

$$\lambda' = -\frac{\cos t}{k}\ ;\quad \mu' = -\frac{\sin t}{k}\ ;\quad \nu = 0.$$

Вставляючи ці вартости у взори (α), ми одержимо:

$$\lambda_n = \rho\frac{-\frac{\cos t}{k}}{ak} = -\rho\frac{\cos t}{ak^2}\ ;\quad \mu_n = -\rho\frac{\sin t}{ak^2}\ \text{і}\ \nu_n = \rho.0 = 0.$$

Коли ці рівняння піднести до квадрату й додати одно до одного, то одержимо:

$$\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2 = \rho^2\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{a^2k^4} = \rho^2\cdot\frac{1}{a^2k^4}$$

Але $\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2 = 1$, а тому:

$$\rho^2\cdot\frac{1}{a^2k^4} = 1,\ \text{або:}\ \rho = ak^2 = a\left[1 + \frac{h^2}{(2\pi a)^2}\right]$$

Отже кривина трубової лінії є стала. Крім того, ми мали $\nu_n = 0$, це значить, що головна пря-

нова лежить в площині дотичній до площі $\Sigma(xy)$, себто дотичною до лука валька; 2) $\lambda_n = -\rho\frac{\cos t}{ak^2}$ і $\mu_n = -\rho\frac{\sin t}{ak^2}$ є величини від'ємні, бо вставляючи величину ρ у вирази λ_n, μ_n і ν_n маємо:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_n &= -ak^2\frac{\cos t}{ak^2} = -\cos t\\ \mu_n &= -\sin t\end{aligned}\right\} \dots (\rho)$$

А тому головна нормаль має напрям протилежний до напряму лука в валька, себто вона спрямована до осі валька.

II) Обчислимо тепер лук кручення τ. Порівнюючи вздовж першої пари ортогональних з відповідними взаємними другої пари [взори: (33) і (35)], одержимо:

$$\rho\frac{\lambda'}{s'} = \tau\frac{\lambda'_\beta}{s'} \quad \text{або:} \quad \rho\lambda' = \tau\lambda'_\beta$$

Тому:

$$\tau = \rho\frac{\lambda'}{\lambda'_\beta} \dots (*)$$

З другого боку ми маємо, що (взір *):

$$\lambda_\beta = \frac{y'z'' - y''z'}{\sqrt{\Sigma(y'z'' - y''z')}},$$

де в даному випадку:

$$x' = -a\sin t;\ y' = a\cos t;\ z' = \frac{h}{2\pi}$$

$$x'' = -a\cos t;\ y'' = -a\sin t;\ z'' = 0$$

Маємо тепер:

$$y'z'' - y''z' = a\cos t\cdot 0 - \left(-a\sin t\frac{h}{2\pi}\right) = a\frac{h\sin t}{2\pi}$$

$$z'x'' - z''x' = \frac{h}{2\pi}\cdot -a\cos t - (-a\cos t\cdot 0) = -a\frac{h\cos t}{2\pi}$$

і $x'y'' - x''y' = (-a\sin t\cdot -a\sin t) - (a\cos t\cdot -a\cos t) = a^2$

Тому:

$$\sqrt{\Sigma(y'z'' - y''z')} = a^2\sqrt{\frac{h^2\sin^2 t}{(2\pi a)^2} + \frac{h^2\cos^2 t}{(2\pi a)^2} + 1} = a^2\sqrt{1 + \frac{h^2}{(2\pi a)^2}} = a^2 k$$

А звідси:

$$\lambda_b = \frac{\frac{h}{2\pi a}}{k}\sin t \; ; \; \mu_b = -\frac{\frac{h}{2\pi a}}{k}\cos t \; ; \; \nu_b = \frac{1}{k}$$

Далі:

$$\lambda'_b = \frac{\frac{h}{2\pi a}}{k}\cos t \quad \text{і т. д.}$$

Отже: (*)

$$r = \rho\,\frac{-\frac{cst}{k}}{\frac{\frac{h}{2\pi a}}{k}\cos t} = -\rho\,\frac{\cancel{\cos t}\cdot\cancel{k}}{\cancel{k}\cdot\frac{h}{2\pi a}\cdot\cancel{\cos t}} = -\rho\,\frac{2\pi a}{h}.$$

А вставляючи вартість ρ, матимемо:

$$r = -a\left[1+\frac{h^2}{(2\pi a)^2}\right]\cdot\frac{2\pi a}{h} = -\frac{2\pi a^2}{h}\left[1+\frac{h^2}{(2\pi a)^2}\right]$$

<u>Шрубова лінія є сталого кручення.</u> Це кручення є від'ємне (при $h>0$) себто крива накручується з лівої руки до правої (рис. 125)

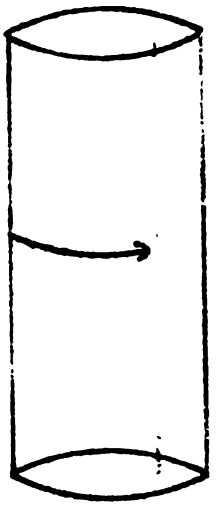


Рис. 125

Розділ II

Поверхні.

§55. Загальні їх рівняння.

Загалом рівняння поверхні усталює функціональний звязок поміж значниками x, y, z її точок, а тому рівняння такої поверхні можна символічно означити:

$$F(x, y, z) = 0 \quad \ldots\ldots (a)$$

Найчастіш, як найбільш зручне, це рівняння зустрічається у визначеній щодо z формі, а саме:

$$z = f(x, y) \quad \ldots\ldots (б)$$

Але цей вигляд не може охопити всіх родів рівнянь поверхні, бо не завжди кожне рівняння можна розвязати що-до z (або якої иншої із змінних) Прикладом цього випадку є наприклад прямі циліндричні поверхні з напрямним контуром в одній з координатних площ, напр. в площі xoy, (себто з творчими рівнобіжними до осі z). Ці поверхні мають рівняння вигляду:

$$F(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots (c)$$

що зовсім не містить z (або иншої відповідної змінної), а тому це z не може бути визначене з нього. Нарешті можна скласти й змінникове рівняння поверхні, а саме:

$$x = \varphi(u,v) \; ; \quad y = \psi(u,v) \quad i \quad z = \chi(u,v) \ldots\ldots (9),$$

де u і v – певні довільні змінні. Коли з цих трьох рівнянь виключити надалі два змінних, то одержимо перше рівняння: $F(x,y,z)=0$

Щоб одержати рівняння вигляду z, то досить для цього взяти за змінними u і v самі змінні x і y. Тоді третє рівняння матиме вигляд:

$$z = \chi(x,y)$$

Очевидно, що кожним окремим вартостям u і v завжди відповідає певна точка зі змінними x, y, z. Тому можна припустити існування на самій поверхні якоїсь системи координат, що для кожної точки M (на цій поверхні) визначатиме певні вартості u і v, як змінні її. Ця система координат, що лежить на цій поверхні буде загалом криволінійною, а тому й змінних u і v звуться криволінійними координатами (змінними) точки M.

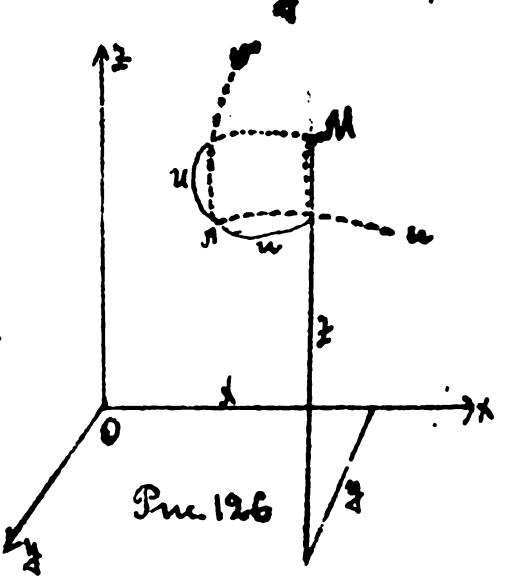


Рис. 126

Щоб мати ще більшу уяву про ці координати, припустимо, що в даній мені одна із змінних, напр. u не матиме своєї вартості ($u = const$), тоді v зможе перебрати всі можливі свої вартості. тоді рівняння (9) є функцією одного лише змінного:

$$x = \varphi_1(v) \; ; \quad y = \psi_1(v) \quad i \quad z = \chi_1(v) \ldots\ldots (e)$$

І ми одержимо рівняння певної кривої в просторі.

Коли тепер тимчасово сталій величині u будемо давати довільні вартости $u_1, u_2 \ldots u_n$, то одержимо шерег (родину) кривих, схожих поміж себе ліній. Цей процес цілком подібний до процесу пересування рядних при довільних змінах вартости відтинкової в простолінійних координатах (рис. 127).

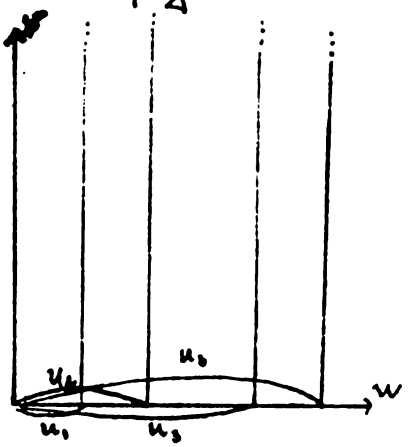


Рис. 127.

[Аналогічні міркування коли й $v = const$].

Ця схожість є причиною назви — „криволінійні координати" і дає нам можливість надавати цим криволінійним координатам всі прикмети простолінійних.

§ 56. Дотична проста й площа до поверхні.

Хай поверхня визначається рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Коли візьмемо на цій поверхні точку M, то через неї можна на самій поверхні повести безліч кривих і до кожної з них окремі дотичні (рис. 128) Цілком зрозуміло що кожна з таких дотичних

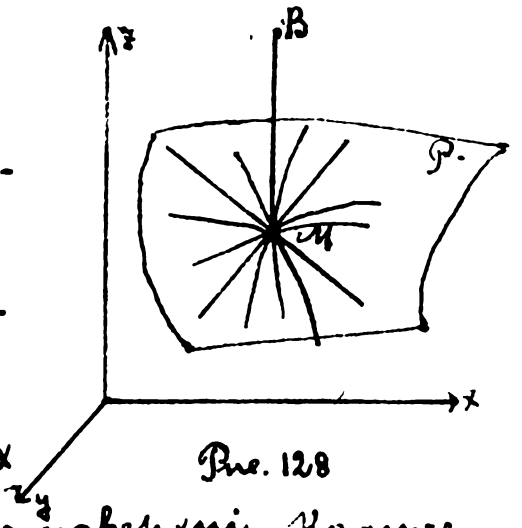


Рис. 128

буде одночасно й дотичною до поверхні. Коли через точку M переходить безліч кривих, то через неї пройде й безліч дотичних до кривої. Очевидно, що всі ці дотичні складуть певний геометричний

осередок. Розглянемо який саме:

Перш за все, кожна крива на даній поверхні, що переходить через точку M є вислідом перетину (в загальному випадку) даної поверхні другою, що також переходить через точку M. Таких поверхнь можна повести безліч і їх рівняння будуть цілком довільні, з одною лише умовою, що значники точки M мусять їх задовольняти, бо всі надані поверхні переходять через точку M.

Означимо рівняння такого роду довільної площі через:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \ldots . (2)$$

Рівняння кожної дотичної до кривої в точці $M(x, y, z)$ матиме вигляд:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$$

або:

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz} \quad \ldots\ldots (3)$$

Лишається лише за допомогою рівнянь (1) і (2) визначити вартости dx, dy і dz. Для цього продеференцуємо дані рівняння (1) і (2) і матимемо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

Ці рівности (3) і (4) звязують між собою невідомі dx, dy і dz і дають змогу вилучити їх з рівнянь (3). Справді, означимо в рівняннях (3) сочинника пропорційности через t. Тоді маємо рівність:

$$\frac{X-x}{dx}=t\ ;\quad \frac{Y-y}{dy}=t\ ;\quad \frac{Z-z}{dz}=t$$

А звідци:

$$dx=\frac{X-x}{t}\ ;\quad dy=\frac{Y-y}{t}\ \text{і}\ dz=\frac{Z-z}{t}$$

Вставляючи ці вартости в (4) і скорочуючи після того всі члени на t, матимемо:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0 \quad (\alpha)\\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial \Phi}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial \Phi}{\partial z}(Z-z)=0 \quad (\beta)\end{aligned}\right\}\ldots(5)$$

Ми переконуємося, що це є рівняння дотичної, як вислід перетину двох площ (α) і (β)

Коли б ми взяли якусь другу поверхню $\Phi_1(x,y,z)$, що переходить через точку M, то у висліді попередніх міркувань мали б рівняння другої дотичної до даної поверхні в точці M такого вигляду:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(Z-z)=0$$

і т. д.

Ми бачимо, що для кожної нової дотичної зміняється лише друге рівняння, а перше рівняння (α) лишається незмінним. Це доводить нам, що всі дотичні до поверхні, що переходять через дану точку цієї поверхні M лежатимуть на площі (α), а через те сама площа (α) є потрібним геометричним осередком всіх даних дотичних. <u>Таку площу звуть дотичною до поверхні площею.</u> Вартости $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ і $\frac{\partial F}{\partial z}$ є певно визначені й загалом єдині, а то

й згадана площа є єдиною дотичною площею до даної поверхні в точці M. Рівняння цієї площі як довели має вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0 \quad \ldots\ldots (97)$$

Коли рівняння поверхні має вигляд:

$$z=\varphi(x,y),$$

то тоді:

$$F(x,y,z)=z-\varphi(x,y)=0$$

Звідци маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial \varphi}{\partial x};\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial \varphi}{\partial y};\quad \frac{\partial F}{\partial z}=1.$$

Введемо за Монжем такі означення: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}=p$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y}=q$ і тоді рівняння дотичної площі буде:

$$-p(X-x)-q(Y-y)+Z-z=0$$

або:

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y) \quad \ldots\ldots (98)$$

§ 57. Прямова до поверхні.

Візьмім просту, що переходить через точку M; напишем її рівняння:

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{r}$$

Коли це є прямова до поверхні, то на підставі умови прямовости простої й площі її кутові змінники є пропорційні сочинникам дотичної площі, а тому рівняння прямової ~~[illegible]~~ вигляд:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \ldots\ldots (99),$$

де $F(x,y,z)$ є рівнянням відповідної поверхні.

Коли поверхня була загадана рівнянням:

$$z = \psi(x, y),$$

тоді рівняння прямової в означеннях Монжа малоб вигляд:

$$Z - z = \frac{X - x}{-p} = \frac{Y - y}{-q} \quad \ldots\ldots\ldots (100).$$

§58. Напрямні змінники дотичної площі.

(косинуси кутів прямової з осями)

Хай α, β і γ є кути що творить прямова даної поверхні з осями координат. Тоді введемо такі означення:

$$\cos\alpha = L \; ; \; \cos\beta = M \text{ і } \cos\gamma = N$$

I. Очевидно, що на підставі взорів (99), за аналітичною геометрією, одержимо:

$$L = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \; ; \; M = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \text{ і } N = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

або означивши коротко:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \Delta F$$

Матимемо:

$$L = \pm\frac{\partial F}{\partial x}\Delta F \; ; \; M = \pm\frac{\partial F}{\partial y}\Delta F \text{ і } N = \pm\frac{\partial F}{\partial z}\Delta F \ldots (101),$$

де „+" відповідає додатньому напряму прямової (зовнішній прямовій, а „−" навпаки.

II. Анальогічно, коли поверхню загадано рівнянням:

$$z = \psi(x, y)$$

матимемо:

$$L=\pm\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}};\quad M=\pm\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\ \text{і}\ N=\pm\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\ \ldots (102)$$

III. Нарешті, хай загадана поверхня визначається рівнянням:

$$x=\varphi(u,v);\quad y=\psi(u,v)\ \text{і}\ z=\chi(u,v)$$

Візьмім на ній якусь точку M і поведемо через неї прямову до поверхні (рис. 128). Очевидно, що ця прямова є одночасно й прямовою до усіх кривих, що лежать на даній поверхні й переходять через дану точку M її. Між останніми кривими неодмінно знаходитимуться й згадані раніш криволінійні координати, що визначатимуться умовами $u=const$ і $v=const$. Отже написавши рівняння довільної дотичної, що переходить через точку M, а саме:

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'},$$

Ми визначимо в цьому рівнянні кутові змінники x', y', z', так щоб згадана точка була по черзі дотичною до 1ої й 2ої криволінійних координат, а для цього:

1) вважаючи в рівняннях поверхні змінник $v=const$, одержимо:

$$x'=\frac{\partial\varphi}{\partial u};\quad y'=\frac{\partial\psi}{\partial u}\ \text{і}\ z'=\frac{\partial\chi}{\partial u}$$

і 2) беручи $u=const$, маємо:

$$x'=\frac{\partial\varphi}{\partial v};\quad y'=\frac{\partial\psi}{\partial v};\quad z'=\frac{\partial\chi}{\partial v}$$

Очевидно, що дотичні:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial \psi}{\partial u}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial x}{\partial u}}$$

$$\frac{X-x}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial \psi}{\partial v}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial x}{\partial v}}$$

і прямові до поличної, що переходить через точку M, а через неї ніяких виконуватиме умови прямовості, а саме:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} L + \frac{\partial \psi}{\partial u} M + \frac{\partial x}{\partial u} N = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} L + \frac{\partial \psi}{\partial v} M + \frac{\partial x}{\partial v} N = 0$$

Виключаючи 1) M (множивши 1-е рівняння на $\frac{\partial \psi}{\partial v}$, а 2-е на $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ і відніманні одне з одного) і 2) L (в той же спосіб) ми виключимо по черзі N через L і M, а саме:

$$1)\ N = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}} L$$

$$і\quad 2)\ N = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}} M$$

А звідси прирівнюючи вартості N маємо:

$$N = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}} L = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}} M$$

або:

$$\frac{L}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}} = \frac{M}{\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}} = \frac{N}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}}$$

або:

$$\frac{L}{A} = \frac{M}{B} = \frac{N}{C},$$

де через A, B і C ми для скорочення означуємо по черзі відповідних знаменателів. Підносимо ці рівности до квадрату й складаємо похідну пропорцію, а саме:

$$\frac{\overset{1.}{\cancel{L^2+M^2+N^2}}}{A^2+B^2+C^2}=\frac{L^2}{A^2}=\frac{M^2}{B^2}=\frac{N^2}{C^2}$$

Тому:

$$L=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ M=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ N=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

де $A=\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}$

$$B=\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}\ \text{і}\quad C=\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$$

Таким чином:

$$L=\pm\frac{\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left[\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v}\right]^2+\left[\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v}\right]^2+\left[\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right]^2}}\ \text{і т.д.}\ \ldots\ (103)$$

Очевидно, що кожна площа, що переходить через прямову KN є також площею прямовою до поверхні. Таких прямових площ буде безліч і всі вони складуть осевий жмут з віссю KN – що є даною прямовою (рис. 129)

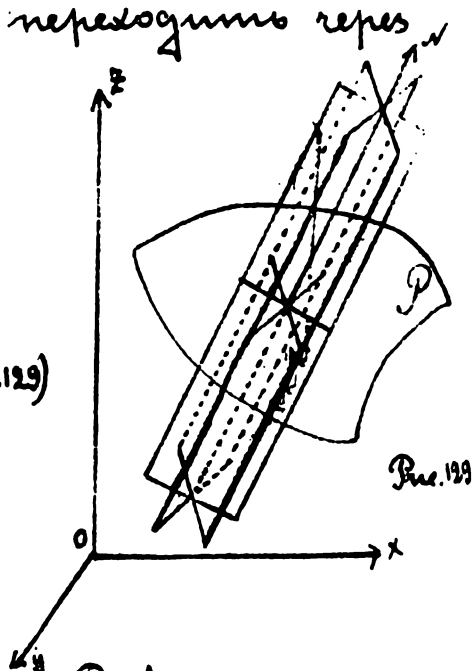


Рис. 129

§59. Кривина ліній пристайних до поверхні, або так званих поверхньових кривих.

Припустім, що задана поверхня P визначена

рівнянням (рис. 130)

$$z = f(x, y)$$

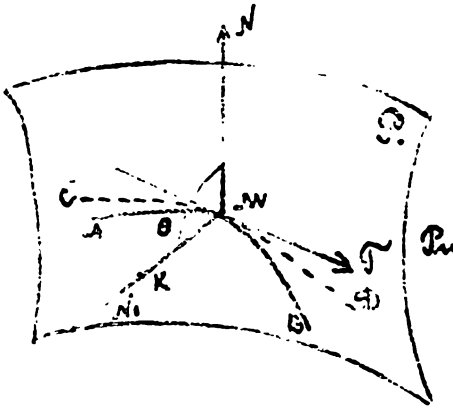


Рис. 130

Візьмім на ній довільну точку $M(x, y, z)$ і через неї поведемо на поверхні якусь криву AB. Хай дотична до неї T, поведена через точку M має напрямні змінники λ, μ і ν. Поведемо також: 1) прямову N до поверхні P і 2) головну прямову N_1 до кривої AB і візьмім на останній точку K - центр кривини AB. Означимо тоді через ρ величину MK = = лучу кривини.

Ми знаємо, що напрямні змінники дотичної є рівні:

$$\lambda = \frac{dx}{d\sigma} \quad ; \quad \mu = \frac{dy}{d\sigma} \quad і \quad \nu = \frac{dz}{d\sigma} \quad \ldots (1)$$

де під $d\sigma$ означимо диференціял дуги кривої AB. Але ця крива лежить на поверхні P, а тому значники x, y і z мають задовольняти її рівнянню. Отже:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = p\,dx + q\,dy$$

(де вживаємо означення Монжа). Вставляючи цю вартість у третє рівняння (1), маємо:

$$\nu = \frac{p\,dx + q\,dy}{d\sigma} = p\frac{dx}{d\sigma} + q\frac{dy}{d\sigma}$$

Що за допомогою перших двох рівнянь (1) дасть нам такий звязок між напрямними змінниками розглянеої дотичної:

$$\nu = p\lambda + q\mu \ldots\ldots (2)$$

Тепер обчислимо кут θ між прямовою поверхні й головною прямовою даної кривої AB, щоб скористатися ним для визначення кривини ρ цієї кривої. З аналітичної геометрії ми знаємо, що cosinus кута між двома простими є рівний сумі здобутків відповідних напрямних змінників рамен його. А тому означивши, як раніш, напрямні змінники прямової до поверхні через L, M і N, а напрямні змінники головної прямової до кривої AB через λ_n, μ_n і ν_n, матимемо:

$$\cos\theta = \lambda_n L + \mu_n M + \nu_n N$$

В попередньому § ми довели (взір 102), що:

$$L = \frac{-p}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}; \quad M = \frac{-q}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}} \text{ і } N = \frac{1}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

А за взорами Френе (1-ша низка) маємо:

$$\lambda_n = \rho\frac{d\lambda}{d\sigma}; \quad \mu_n = \rho\frac{d\mu}{d\sigma} \text{ і } \nu_n = \rho\frac{d\nu}{d\sigma}$$

Тому:

$$\cos\theta = \pm\frac{\rho\left(\frac{d\nu}{d\sigma} - p\frac{d\lambda}{d\sigma} - q\frac{d\mu}{d\sigma}\right)}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \ldots\ldots (3)$$

З рівности (2) маємо, що:

$$\nu = p\lambda + q\mu$$

а тому:

$$d\nu = p\,d\lambda + \lambda\,dp + q\,d\mu + \mu\,dq$$

або ділячи на $d\sigma$:

$$\frac{d\nu}{d\sigma} = \left(p\frac{d\lambda}{d\sigma} + q\frac{d\mu}{d\sigma}\right) + \left(\lambda\frac{dp}{d\sigma} + \mu\frac{dq}{d\sigma}\right)$$

Вставляючи останню варіність $\frac{dw}{ds}$ у рівність (3) після скорочення маємо:

$$\cos\theta = \pm \frac{s\left(\lambda \frac{dp}{ds} + \mu \frac{dq}{ds}\right)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \quad \ldots\ldots (4)$$

Розглянемо тепер, що уявляють з себе диференціали: dp і dq. Ми знаємо, що $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, а $q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Тому:

$$dp = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy$$

і аналогічно:

$$dq = d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy$$

Введемо означення Монжа й Ґурі:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s \;\text{ і }\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t$$

і маємо:

$$dp = r\,dx + s\,dy$$

$$dq = s\,dx + t\,dy$$

Поділивши обидві частини рівності на ds, одержимо:

$$\frac{dp}{ds} = r\frac{dx}{ds} + s\frac{dy}{ds} = r\lambda + s\mu .$$

Також маємо:

$$\frac{dq}{ds} = s\lambda + t\mu .$$

Отже вставляючи знайдені вартості в рівність в рівність (3) маємо:

$$\cos\theta = \pm \frac{s\left[\lambda(r\lambda + s\mu) + \mu(s\lambda + t\mu)\right]}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

або:

$$\cos\theta = \pm \frac{\rho\,(r\lambda^2 - 2s\lambda\mu + t\mu^2)}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \quad \ldots\ldots (104)$$

Очевидно „+" відповідає додатньому напряму головної прямової, а „−" відємному. Надалі ми будемо вважати напрям цієї прямової за додатній, а тому:

$$\rho = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2}\cos\theta \quad \ldots (105)$$

Тут ми констатуємо, що:

Луч кривини (а значить і сама кривина) залежить лише від величини напрямних змінників відповідної дотичної та cosinus'а нормального куту (куту між нормалями до поверхні й до даної кривої. Цей кутек ми умовимся, береться між додатніми напрямами обох нормалей)

Тепер поведемо через точку M нормальний (прямовий) переріз поверхні відповідно до даної кривої AB на ній (рис. 130)

Прямовим перерізом поверхні, відповідно до даної кривої AB на ній, будемо звати криву CD перетину поверхні площею, що переходить через нормалю цієї поверхні й дотичну до даної кривої AB поведених через точку M. (Очевидно, що ця дотична буде разом одною з дотичних до поверхні, а тому буде й дотичною до самого прямого перерізу).

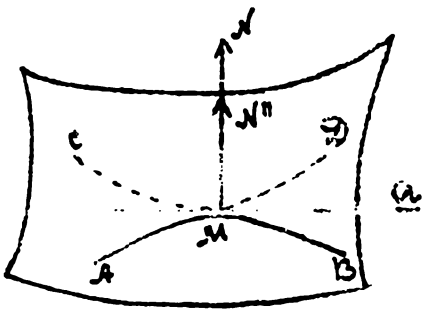
Зрозуміла річ, що прямовий переріз є також поверхньовою кривою даної поверхні P, а тому взір (105) буде виразом і для луча R кривини її. Лиша-

ється лише установити вартість θ, λ, μ і ν для цієї кривої.

1) Як розглянений раніш, так і даний прямовий переріз поверхні мають спільну дотичну T, а тому й вартости λ, μ і ν для обох кривих однакові.

2) Прямовий переріз є плоска крива, а тому її головна нормаля лежить в площі перерізу й проходить через точку M прямово до дотичної T. Але площа перерізу поведена ~~(поведена)~~ через нормалю до поверхні й дотичну T, а тому нормаля до поверхні лежить в цій же площі, переходить через точку M і є прямовою до дотичної T.

Таким чином нормаля поверхні й нормаля прямового перерізу поведені через дану точку поверхні є пристайні (рис. 131, а, в). Але в залежности від форми круг точки M самої поверхні, ці нормалі можуть бути в обох випадках (а) і (в) противних напрямів (в бік випутости, чи випутости поверхні). В першому випадку кут $\theta = 0$, а в другому: $\angle\theta = \pi$, а тому в першому випадку $\cos\theta = 1$, а в другому $\cos\theta = -1$; загалом $\cos\theta = \pm 1$



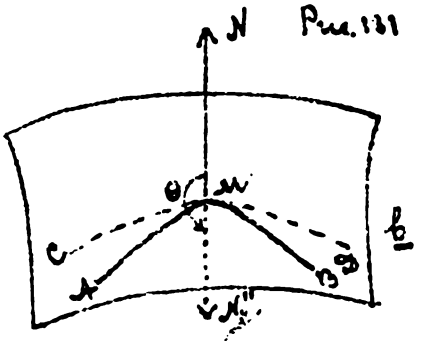


Рис. 131

Отже, вставляючи знайдену вартість $\cos\theta$ у вираз (105) для ρ, ми одержимо вартість R луча кривини прямового перерізу, а саме:

$$R = \pm \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{2\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2} \quad \ldots\ldots\ldots (106)$$

А порівнюючи вздри (105) і (106) маємо:

Теорему Мюнье:

$$\rho = \pm R\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots (107)$$

Словесно: Центр кривини в якій будь точці поверхньової лінії є кінцем центра кривини відповідного нормального перерізу (себто того, що має спільну дотичну з даною кривою) на площині нормальних даної кривої.

З'ясуємо це: кут θ є кутом площин головного нормального даної поверхньової кривої й нормального самої поверхні (що є разом і нормального прямового перерізу (рис. 132). Центри кривини K і K_1 даної кривої й прямового перерізу, лежать на нормалях, а тому рівність $\rho = \pm R\cos\theta$ виявляє, що луг

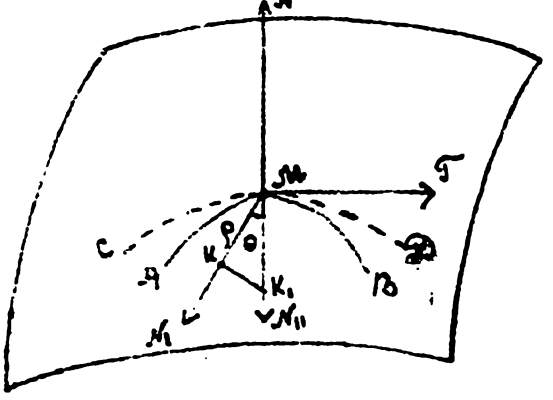


Рис. 132

Пояснення до рис 132.
N – нормаль поверхні
N_1 – нормаль кривої AB
N_{11} – нормаль нормального перерізу CB
K центр кривини даної поверхньової кривої, а K_1 центр кривини прямового перерізу.

кривини ρ поверхньової кривої є кінцем луча кривини R прямового перерізу на головну нормаль даної поверхньової кривої (рис. 132). Але всі нормалі прямові до спільної дотичної, тому кінцем луча кривини R на головну нормаль N_1

є одночасно й метом цього луча на площу кривини ГМN, що переходить через дотичну й цю головну нормалю MN_1. Таким чином луч кривини ρ якоїсь поверхньової кривої АВ є метом луча кривини відповідного прямового перерізу на площу кривини, а разом і центр К кривини цієї поверхньової кривої АВ є метом центру кривини відповідного прямового перерізу на площу кривини тієї ж кривої АВ. Це й є теоремою Монье.

Висновок. Вартість $\cos\theta$ не може бути більшого одиниці, а тому: Із всіх поверхньових кривих, що мають спільну дотичну відповідний прямовий переріз має найбільший луч кривини (найменшу кривину)

§60. Будування кругів кривини для всіх можливих поверхньових кривих, що переходять через точку М поверхні й мають спільну дотичну.

Хай через точку М (рис. 133) переходить через поверхньових кривих, що мають спільну дотичну Г. Вибираємо з них криву СД, що є прямовим перерізом відповідним до цих кривих і збудуємо центр його кривини К. Коли тепер

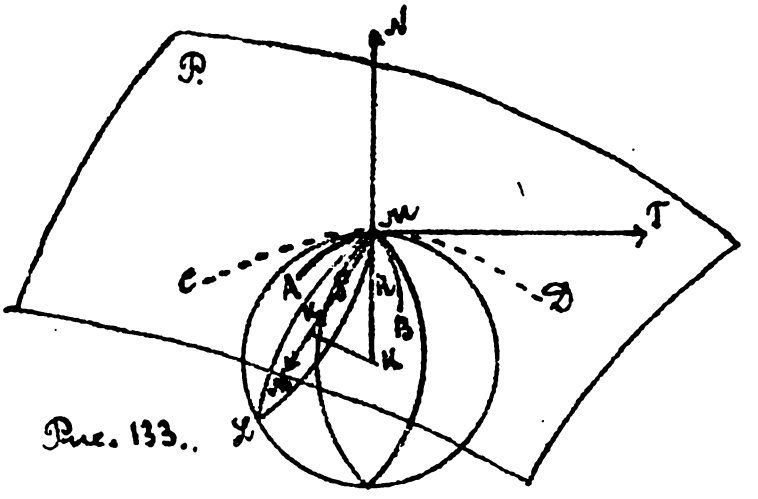


Рис. 133.

круг К, яко центра очеркнемо кулю кривини (кулю луча $R = MK$), то тоді кожний малий круг цієї кулі, що переходить через точку М є кругом

кривини однієї з дання поверхньових кривих. Справді: хай площа кривини якоїсь поверхньової кривої AB перетинає дану кулю по кругу ML. Тоді центр цього кругу K_1 є метом (як відомо з геометрії) центра кулі на площу його, а тому й є центром кривини кривої AB, що має KL за площу кривини.

§61. Кривина прямових перерізів.

Ми вивели, що луч кривини прямового перерізу буде:

$$R = \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}{r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2}$$

Візьмім тепер за початок координат точку M поверхні, а за вісь z нормалю до поверхні, тоді площа дотична до поверхні в точці M буде координатною площею xy. Таким чином дотична до прямового перерізу AB буде лежати в цій площі xy. Ми означимо кут наданої дотичної з віссю x-ів через φ; тоді кут тієї ж дотичної з віссю y-ів буде $\frac{\pi}{2}-\varphi$ (рис. 134)

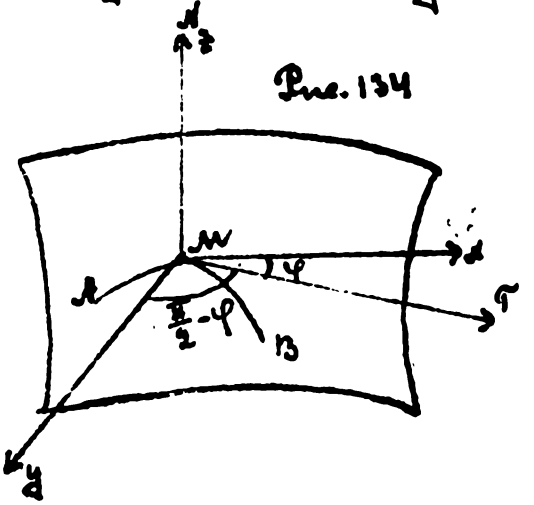


Рис. 134

Перетворимо вираз ρ до нових координат:

1) $\lambda = \cos\varphi$ (бо φ є кут дотичної з віссю x-ів)

2) $\mu = \cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \sin\varphi$

Кути ж нормалі (що взята за вісь z) з осями x-ів і y-ів будуть $\frac{\pi}{2}$, а тому λ_n і $\mu_n = 0$ (як cosinus'и цих кутів)

Але: $\lambda = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$; $\mu = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$

Тому $p \neq 0$ і $q \neq 0$, бо $\sqrt{p^2+q^2+1} \neq 0$

а звідси: $\sqrt{p^2+q^2+1} = \sqrt{1} = 1$

Через те:

$$R = \frac{1}{r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi}$$

а звідси кривина:

$$K = \frac{1}{R} = r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cdot\cos\varphi + t\sin^2\varphi \quad \ldots (4)$$

Будемо шукати при якій варіації φ кривина K буде maximum або minimum. Для цього, як маємо вище, прирівнюємо до нуля першу похідну через φ, а саме:

$$K' = -2r\sin\varphi\cdot\cos\varphi + 2s(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2t\sin\varphi\cdot\cos\varphi = 0$$

або:

$$-r\sin 2\varphi + 2s\cos 2\varphi + t\sin 2\varphi = 0$$

тому:

$$2s\cos 2\varphi = (r-t)\sin 2\varphi$$

або:

$$2s = (r-t)\operatorname{tg} 2\varphi$$

А звідси:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2s}{r-t}$$

Отже:

$$\varphi = \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2s}{r-t}$$

де n в даному випадку може бути або нуль, або 1. Очевидно, цей вірш не виконує φ, коли або $s=0$, або $r=t$. Ці випадки ми розглянемо окремо.

Коли б ми вставили знайдені вартості φ у другу похідну, то одержали б вартості її рівні нулеві, а тому ці вартості φ є в одному випадку maximum, а в другому minimum.

Ці прямові перерізи є взаємно прямові і звуть

ся головними.

Коли б ми одержали, що $s=0$ і $r=t$, то із взору (α) одержали б:

$$\frac{1}{R} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

Це показує, що в цьому випадку кривина всіх прямових перерізів не залежить від куту φ, а тому однакова. Такі точки поверхні звуться кулистими, або закруглення.

Геометрично точку закруглення можна зінтерпретувати так: Припустім, що якась точка M на даній поверхні P, має ту властивість, що навколо неї можна буде очеркнути досить малу частину цієї поверхні, яка зливатиметься з поверхнею кулі, луча кривини R. Очевидно, що для цієї точки кривини всіх прямових перерізів буде однакова й тому вона зватиметься точкою закруглення (або кулистою точкою).

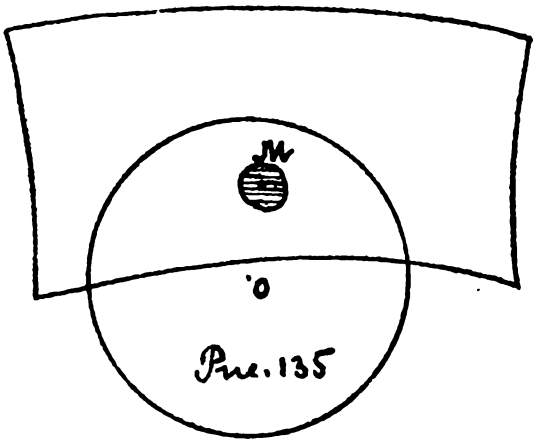


Рис. 135

Обернемо тепер вісь x-ів і y-ів так, щоб площі xz і yz злилися з площами головних перерізів. В цьому разі кут φ для однієї з координатних площ стане рівним з нулем, а тому:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2s}{r-t} = 0 \quad , \text{ а звідци } s=0$$

Отже (з рівняння α) маємо:

$$\frac{1}{R} = K = r\cos^2\varphi + t\sin^2\varphi \quad \ldots (\rho)$$

Очевидно, що при такому перетворенню координатних осей головні лучі кривини, що відповідають головним перерізам будуть відповідати вартостям $\varphi = 0$ і $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Себто:

$$k_1 = r \quad ; \quad k_2 = t$$

а звідци:

$$r = \frac{1}{R_1} \quad ; \quad t = \frac{1}{R_2}$$

де R_1 і R_2 відповідно лучі кривини головних перерізів. Вставляючи ці вартости в (β), одержимо:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2} \quad \ldots\ldots (108)$$

Це є взір Ейлера, що усталює залежність між лучем кривини якого бажано прямового перерізу й лучами кривини головних прямових перерізів.

Коли взяти ще який другий прямовий переріз, площа якого була прямовою до даного перерізу, то очевидно, що його кривина буде висловлюватьcя рівнянням (108) з тим, що в ньому кут φ заступатиметься кутом $(\frac{\pi}{2} - \varphi)$. Отже тоді матимемо:

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin^2\alpha}{R_1} + \frac{\cos^2\alpha}{R_2} \quad \text{або}$$

додаючи це рівняння до рівняння (108), одержимо:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \ldots\ldots (109)$$

<u>Сума кривин двох прямових перерізів, що мають взаємно прямові площі є величина стала рівна сумі кривин головних прямових перерізів.</u>

<u>Суму $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ звуть пересічною кривиною поверхні в точці M, або кривиною Ейлера.</u>

§62. Індикатриса Дюпена.

Хай наша поверхня визначається рівняннями

$$z = f(x, y) \ldots . (1)$$

Переріжемо цю поверхню площею рівнобіжною до дотичної в даній точці M. Хай рівняння її буде:

$$z = d \ldots . (2)$$

Розвязуючи рівняння (1) і (2) як систему, ми одержимо рівняння перерізу поверхні площею (2), а саме:

$$f(x, y) = d \ldots . (3)$$

Будемо вартість d без краю зменшувати, тоді й вартість x і y, що задовольняють рівняння (3) будуть зменшуватися й коли d простуватиме до 0 то й x і y простуватимуть до нуля (бо початок координат є точка M, що належить до поверхні). Добіраючи вартість d так, щоб x і y були безменно малими ми зможемо розкласти $f(x, y)$ в шерег Маклореня, а саме:

$$f(x, y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^2\right) + \ldots$$

Далі вводячи означення Монжа, маємо:

$$f(x, y) = f(0,0) + (px + qy) - \frac{1}{2!}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \ldots$$

Ми взяли за початок осей точку M поверхні, за вісь z-ів нормалю поверхні, а за площу xy - дотичну площу до поверхні в точці M, а тому, як довели в попередньому §-і

$$p = 0 \; ; \quad q = 0$$

і крім того:

$$f(0,0) = 0$$

Отже:

$$f(x,y) = \frac{1}{2!}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$$

Таким чином рівняння перерізу площею $z = d$ буде:

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2d \quad \ldots\ldots (110)$$

Це й є індикатрита Дюпена.

Покажемо, що ця крива 2го ступіня дає можливість судити про кривину даного прямового перерізу.

Виводячи взір цієї кривої ми припустили, що даний прямовий переріз положений так, що дотична до нього в точці M творить з віссю x-ів, кут φ [а з віссю y-ів - кут $\frac{\pi}{2} - \varphi$]. Отже перетворимо рівняння (110) до бігунових координат, беручи за бігун точку M, а за бігунову вісь саму дотичну T. Тоді взори перетворення будуть:

$$x = \rho\cos\varphi; \qquad y = \rho\sin\varphi$$

де ρ є луч вектор. точки M. У висліді нашого перетворення матимемо:

$$r\rho^2\cos^2\varphi + 2s\rho^2\sin\varphi\cos\varphi + t\rho^2\sin^2\varphi = 2d$$

або (поділюючи всі члени по ρ^2):

$$r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cdot\cos\varphi + t\sin^2\varphi = \pm\frac{1}{m^2} \quad \ldots\ldots (111)$$

де $m^2 = \pm\frac{\rho^2}{2d}$ (+ чи − залежить від знаку d). Порівнюючи це рівняння з рівнянням (4) попереднього §-а ми бачимо, що:

$$\frac{1}{R} = \pm\frac{1}{m^2} \quad ; \quad R = \pm m^2$$

Ми бачимо, що <u>квадрати лучів векторів кривої рівняння (111) взяті зі знаком „+" чи „−" пропор-</u>

ційні лучам кривини прямових перерізів, що переходять через ці лучі - вектори. При чому сочинниками пропорційности є $\frac{1}{2d}$, де d є змінник рівняння площі индикатрити. Тому индикатрита дає можливість судити про зміни кривини даного прямового перерізу в залежности від змін куту φ.

Будемо досліджувати рівняння индикатрити (III):

1) Це рівняння не має членів першого виміру, а тому (аналіт. геом.) центр индикатрити лежить на осі z-ів.

2) Виразник (дискримінант) цього рівняння є:

$$D = rt - s^2$$

тому можуть бути 3 випадки: $D \gtreqless 0$. Коли $D = rt - s^2 > 0$, то, як відомо з аналітичної геометрії, индикатрита (III) є еліпса. При чому в залежности від знаку d, ця еліпса може бути реальною, або уявною. Очевидно, ми виберемо вартість d так, щоб еліпса була реальною. Але в цьому разі для всіх вартостей φ кривина $\frac{1}{R}$ буде або завжди $\frac{1}{R} = +\frac{1}{m^2}$, або завжди $\frac{1}{R} = -\frac{1}{m^2}$, себто одного знаку. Отже всі прямові перерізи в точці M мають однакову випутість. З цього видно, що круг точки M вся поверхня $z = f(x)$ лежить з одного боку площі индикатрити.

При змінах $\angle\varphi$ найбільшу й найменшу вартість луча вектора еліпси індикатрити має на великій та малій осях еліпси. Очевидно, що й луч кривини прямового перерізу пропорційний лучу вектору,

буде мати найбільшу й найменшу вартість для прямових перерізів, що переходять через дотичні рівнобіжні до осей еліпси індикатрити. Ці перерізи й будуть головними прямовими перерізами.

II. Припустім тепер, що $D = rt - s^2 = 0$; тоді з рівняння индикатрити маємо:

$$r\cos^2\varphi + 2\sqrt{rt}\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi \mp \frac{1}{m^2} = 0$$

або:

$$\left(\sqrt{r}\cos\varphi + \sqrt{t}\sin\varphi\right)^2 \mp \frac{1}{m^2} = 0$$

Це рівняння роспадається на 2, а саме:

або 1) для верхнього знаку

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{r}\cos\varphi + \sqrt{t}\sin\varphi + \frac{1}{m} = 0 \\ \sqrt{r}\cos\varphi + \sqrt{t}\sin\varphi - \frac{1}{m} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\alpha)$$

або 2) для нижнього знаку:

$$\sqrt{r}\cos\varphi + \sqrt{t}\sin\varphi \pm \frac{i}{m} = 0 \ldots (\beta)$$

Отже, в цьому випадку индикатрита є системою двох простих: (α) – реальних і (β) – уявних. Тому тоді можемо вибрати знак d так, щоб одержали лише перший випадок (α)

Це знова приводить до того, що луч кривини всіх прямових перерізів поверхні, для всіх вартостей φ однакового знаку. Себто поверхня круг точки M лежить з одного боку индикатрити. Розглядаючи рівняння (α), ми бачимо, що система простих индикатрити є системою рівнобіжних. Раз центр индикатрити лежить на осі z-ів, то ці прості однаково відстоять

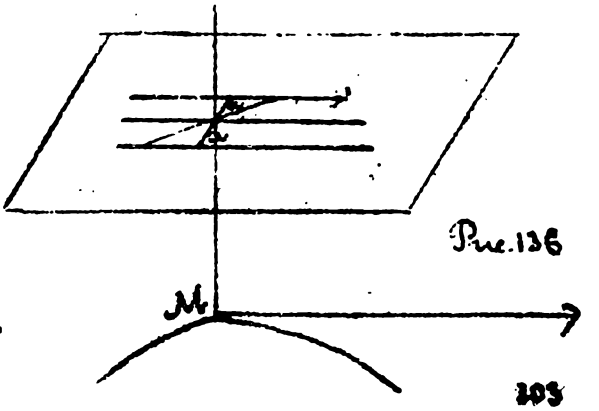


Рис. 136

на певну величину від точки N перетину площі индикатрити віссю z-ів.

Коли змінювати вартість φ, то луч вектор ρ змінюється від найменшої вартости $\rho = a$, де a є стале віддалення простих индикатрити від точки N, до найбільшої: $\rho = \infty$ (рис. 136) Напрям цих конечних вартостей ρ будуть взаємно прямові ($\rho = a$ є прям до даних простих индикатрити, а $\rho = \infty$ є рівнобіжна до них)

Очевидно для прямових перерізів тих же напрямів і луч кривини R (що є пропорційне до луча вектора ρ) буде мати також найменшу й найбільшу вартість (головні перерізи). При чому при $R = \infty$ кривина $\frac{1}{R} = 0$, себто цей головний переріз є проста лінія.

III. Коли же $D < 0$, себто $rt - s^2 < 0$, то згідно з аналітичною геометрією индикатрита є гіпербола, при чому вартостям $\pm d$ відповідають дві взаємно-спружені гіперболи. Отже шлях луча кривини може бути подвійний: $R = \pm m^2$

Хай головні вісі гіперболи будуть a і b (рис. 137). Тоді починаючи від A луч вектор ρ спадає від ∞ до a, потім від вершка K до B зростає знова до ∞, далі спадає до b, знова зростає до ∞, потім спадає до $-a$ і т. д. Разом з цим і відповідний луч кривини прямових перерізів то зростає, то спадає. Тому

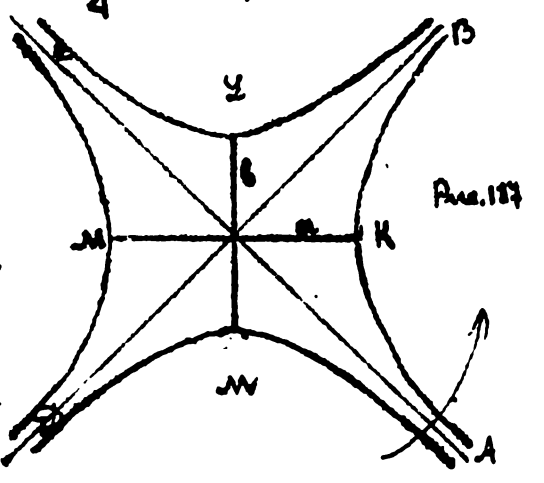


Рис. 137

й кривина $\frac{1}{R}$ змінюється приймає найбільшу вартість для прямових перерізів, що переходять вісь a й найменшу для вісі $b\left(-\frac{2d}{5}\right)$

Ті прямові перерізи, що переходять через асимптоти гіперболи індикатриси мають кривину $\frac{1}{R}=0$. В цей момент відбувається зміна знаку R, а через те прямові перерізи змінюють свою випуклість в протилежному напрямі (рис. 138).

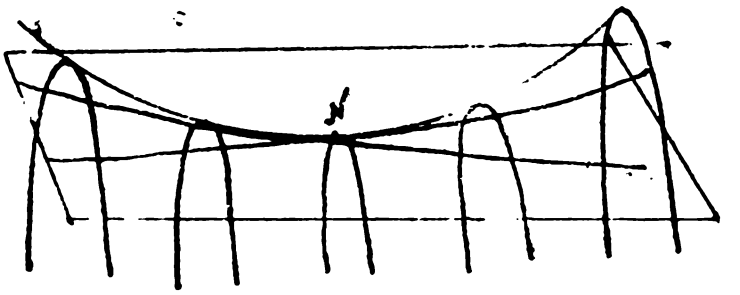


Рис. 138

На підставі попередньої елементарної поверхні можна поділити на еліптичні, параболічні й гіперболічні. Основного цього є те, що 1) для еліптичної поверхні лучі головних перерізів одного знаку, а тому їх здобуток буде:

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_1\cdot R_2}>0$$

2) для параболічної поверхні або $\frac{1}{R_1}=0$, або $\frac{1}{R_2}=0$, а тому здобуток їх:

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=0$$

і нарешті 3) для гіперболічної поверхні лучі кривин головних перерізів різних знаків і тому здобуток їх

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}<0$$

Цей здобуток дає назву <u>кривини Гаусса.</u>

§63. Обчислення головних кутів кривини.

Ми знаємо, що вартість кута кривини косого прямового перерізу в даній точці M буде мати вигляд:

$$k = \frac{\sqrt{h^2+q^2+1}}{2\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2} \quad (1)$$

Як ми зазначали, вартість цього k залежить лише від напрямних зміннихів цього перерізу (власне від напрямних зміннихів відповідної дотичної, що визначає положення перерізу).

Відомо, що для головних прямових перерізів вартість k є максимум або мінімум, а тому щоб знайти кути кривини, цих головних прямових перерізів, досить визначити вартости λ і μ, при яких будуть максимум або мінімум кута кривини k. Але змінних дві, а тому нам треба мати ще умову, що зв'язувала би.

Такою умовою є зв'язок між напрямними зміннихами дотичної, виведеної при обчисленню нормального кута (себто: (2) §59), а саме:

$$V = p\lambda + q\mu$$

Щоб виключити непотрібне нам V, ми пригадуємо вірш звичайної властивости напрямних зміннихів косого вектора й рівняння дотичної, а саме:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

Звідси маємо:

$$\lambda^2 + \mu^2 + (p\lambda + q\mu)^2 = 1 \quad \text{або:}$$

$$\lambda^2(1+p^2) + 2pq\lambda\mu + \mu^2(1+q^2) = 1 \quad \ldots (2)$$

Це й є та умова, що зв'язує наші змінні λ і μ.

Вартість R [вздовж (1)] має змінну лише в знаменнику, а тому досить знайти максимум та мінімум цього знаменника й тоді максимум'у знаменника буде відповідати мінімум R і навпаки. Отже ми маємо задачу:

Знайти максимум і мінімум функції:

$$f = r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2 \quad \ldots (3)$$

де λ і μ зв'язані умовою (2). Розв'язуючи цю задачу способом Лагранжа з рівнянь (2) і (3) складаємо функцію:

$$U = r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2 + \kappa[(1+p^2)\lambda^2 + 2pq\lambda\mu + (1+q^2)\mu^2]$$

де κ є довільний множник. Далі:

1) Беремо похідну цієї функції через λ і зрівнюємо її з нулем, маємо:

$$2r\lambda + 2s\mu + 2\kappa\lambda(1+p^2) + 2\kappa pq\mu = 0$$

або: $$\lambda r + s\mu + \kappa[\lambda(1+p^2) + pq\mu] = 0 \quad \ldots (\alpha)$$

2) Ще одне робимо з похідною функції через μ:

$$2s\lambda + 2t\mu + 2\kappa pq\lambda + 2\kappa\mu(1+q^2) = 0$$

або: $$s\lambda + t\mu + \kappa[pq\lambda + \mu(1+q^2)] = 0 \quad \ldots (\beta)$$

Щоб виключити невідомого множника k, ми помножимо рівняння (α) на λ, а рівняння (β) на μ й додамо їх, тоді:

$$(\lambda^2 r + 2\lambda\mu s + t\mu^2) + k[\lambda^2(1+p^2) + 2\lambda\mu pq + \mu^2(1+q^2)] = 0$$

Але множник в дужках ( ) є рівним з f [див. (3)], а множник в дужках [ ] є рівний з 1 [див. (2)]. Тому:

$$f + k = 0 \quad \text{або:} \quad k = -f$$

Вставляючи тепер вартість k в рівняння (α) і (β) одержимо:

$$\lambda r + s\mu - f[\lambda(1+p^2) + pq\mu] = 0 \quad (\gamma)$$

$$\lambda s + t\mu - f[\lambda pq + \mu(1+q^2)] = 0 \quad \ldots (\delta)$$

Виключимо звідси:

1) f, ми одержимо зв'язок поміж напрямними кутами головної дотичної (дотичні головних перерізів)

2) виключивши λ і μ одержимо рівняння, що визначатиме R_1 і R_2 головних перерізів. Справді:

I) 1) виключимо f з обох рівнянь і прирівняємо одержані вартости, маємо:

$$\frac{\lambda r + s\mu}{\lambda(1+p^2) + pq\mu} = \frac{\lambda s + t\mu}{\lambda pq + \mu(1+q^2)}$$

А звідси після зведення до спільного знаменника й упорядкування, маємо:

$$\lambda^2[s(1+p^2) - rpq] + \lambda\mu[(1+p^2)t - (1+q^2)r] + \mu^2[tpq - s(1+q^2)] = 0 \quad \ldots (\varepsilon)$$

Ці рівняння складено при виконанні умов максимума й мінімума для R, а тому умо-

ляг звязок між напрямними косинусами головної дотичної (є 2 величини для кожної із 2^n головних дотичних)

Це рівняння є однорідним, а тому з нього легко визначити відношення цих напрямних косинусів, а саме означимо відношення:

$$\frac{\mu}{\lambda} = \psi$$

маємо:

$$\psi^2 \cdot \left[pqt - (1+q^2)s\right] + \psi\left[(1+p^2)t - (1+q^2)r\right] + \left[(1+p^2)s - pqr\right] = 0 \quad \cdots (112)$$

де $\mu = \lambda\psi$.

Припустимо, що розв'язавши рівняння (112) ми одержимо дві величини: ψ_1 і ψ_2. Щоб визначити самі λ і μ ми скористуємося рівнянням (2). Справді, коли вставимо в нього величини $\mu = \lambda\psi_1$ і $\mu = \lambda\psi_2$, то одержимо:

$$\lambda^2(1+p^2) + 2pq\lambda^2\psi_1 + (1+q^2)\lambda^2\psi_1^2 = 1$$

або $$\lambda^2\left[(1+p^2) + 2pq\psi_1 + (1+q^2)\psi_1^2\right] = 1$$

А звідси:

$$\lambda_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{(1+p^2) + 2pq\psi_1 + (1+q^2)\psi_1^2}}$$

Аналогічно:

$$\lambda_2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{(1+p^2) + 2pq\psi_2 + (1+q^2)\psi_2^2}} \qquad (113)$$

Тому:

$$\mu_1 = \frac{\pm \psi_1}{\sqrt{(1+p^2) + 2pq\psi_1 + (1+q^2)\psi_1^2}}$$

$$\mu_2 = \frac{\pm \psi_2}{\sqrt{(1+p^2) + 2pq\psi_2 + (1+q^2)\psi_2^2}}$$

Знаки ± відповідають протилежним нап-

рямам від точки дотику вздовж однієї й тієї дотичної, а тому будемо далі брати лише +.

II) Упорядкуємо рівняння (γ) і (δ) і маємо:

$$\lambda[r - f(1+p^2)] + \mu(s - pqf) = 0$$

$$\lambda(s - pqf) + \mu[t - f(1+q^2)] = 0$$

Щоб вилучити λ і μ складаємо пропорції й порівнюючи їх маємо:

$$\frac{\lambda}{-\mu} = \frac{t - f(1+q^2)}{s - pqf} = \frac{s - pqf}{r - f(1+q^2)}$$

Звідци:

$$(s - pqf)^2 = [r - f(1+p^2)][t - f(1+q^2)]$$

або:

$$f^2[p^2q^2 - (1+p^2)(1+q^2)] + f[t(1+p^2) + r(1+q^2) - 2pqs] + (s^2 - rt) = 0$$

Отже:

$$-f^2(p^2+q^2+1) + f[t(1+p^2) + r(1+q^2) - 2pqs] - (rt - s^2) = 0$$

або:

$$f^2(p^2+q^2+1) - f[t(1+p^2) + r(1+q^2) - 2pqs] + (rt - s^2) = 0$$

Але:

$$R = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{f}$$

тому:

$$f = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{R}$$

а вставляючи цю вартість в наше рівняння, та зводячи його до спільного знаменателя одержимо:

$$(rt - s^2)R^2 - \sqrt{p^2+q^2+1}\,[t(1+p^2) + r(1+q^2) - 2pqs]R +$$
$$+ (p^2+q^2+1)^2 = 0 \quad \ldots\ldots (114)$$

Рівняння (114) дає два розвязки R_1, R_2 лучів кривини головних прямових перерізів.

§64. Обчислення головних кривин поверхні: Гаусса й Ейлера.

Коли ніяк вставим $f = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{R}$ ми не будемо вводити рівняння до спільного знаменника [це тепер, коли всі члени рівняння (114) поділимо на R^2] по порядку:

$$(p^2+q^2+1)\cdot\left(\frac{1}{R}\right)^2 - \sqrt{p^2+q^2+1}\left[t(1+p^2)-2(1+q^2)-2pqs\right]\frac{1}{R} + (rt-s^2) = 0$$

або:

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 - \frac{t(1+p^2)-2(1+q^2)-2pqs}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{R} + \frac{rt-s^2}{(p^2+q+1)^2} = 0.$$

З властивостей розв'язків квадратових рівнянь маємо:

1) Вираз Ейлерової кривини (нормальної):

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{t(1+p^2)+2(1+q^2)-2pqs}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots (115)$$

2) Вираз Гаусової кривини.

$$\mathcal{K} = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2} \quad \cdots (116)$$

Вірш (116) показує, що яку б систему координат ми не взяли б:

для еліптичної точки: $rt-s^2>0$ завжди: $\mathcal{K}>0$

" параболічної " : $rt-s^2=0$ " $\mathcal{K}=0$

" гіперболічної " : $rt-s^2<0$ " $\mathcal{K}<0$

§65. Кривизна лінії.

Збудуємо на даній поверхні з точкою її точці головні перерізи й виберемо з цих точок ті, що знаходяться геометричний осередок дотичних до всіх головних дотичних, проведених через ці точки.

Згадані точки утворять криву, що дотичні до неї в кожній її точці будуть головними дотичними до самої поверхні. Такі криві звуться <u>кривинними лініями</u>, або <u>лініями кривини поверхні</u>

Очевидно, що через кожну точку поверхні переходить по 2 кривинні лінії відповідно двом головним дотичним в цій точці. Коли знатимемо всі кривинні лінії, то знатимемо й всі головні прямові перерізи в кожній точці поверхні, а тим самим ми можемо цілком дослідити характер самої поверхні.

<u>Знайдемо рівняння кривинної лінії.</u> Очевидно, що першим рівнянням її буде рівняння поверхні, на якій ця лінія лежить, себто:

$$z = f(x, y) \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

З другого боку дотичні до цієї кривої є одночасно й головними дотичними у ріжних точках поверхні, а тому напрямні змінники їх мусять задовольняти рівнянню (112) попереднього §, а саме:

$$\psi^2\left[pqt-(1+q^2)s\right]+\psi\left[t(1+p^2)-r(1+q^2)\right]+\left[(1+p^2)s-pqz\right]=0$$

де $\mu = \lambda\psi$. Але напрямні змінники λ і μ, як дотичних до даної кривої висловлюються як:

$$\lambda = \frac{dx}{d\sigma} \; ; \quad \mu = \frac{dy}{d\sigma}$$

де $d\sigma$ є диференціал дуги кривої. А звідци:

$$\psi = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{dy}{dx}$$

Таким чином останнє рівняння матиме вигляд:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[pqt-(1+q^2)s\right]+\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\left[t(1+p^2)-r(1+q^2)\right]+\left[(1+p^2)s-pqr\right]=0 \quad \cdots (\beta)$$

Рівняння (α) і (β) визначають потрібну кривинну лінію. На жаль, ми не знаючи ще інтегрування диференційних рівнянь не зможемо оперувати рівняннями (α) і (β) в загальному вигляді й обмежимося лише окремими випадками.

Приклад. Знайти кривинні лінії поверхні оборотового тіла рівняння:

$$z=f(x^2+y^2) \quad \text{або} \quad z=f(R), \text{ бо } x^2+y^2=R^2$$

Складаємо рівняння (β) і для цього обчислюємо

$$1)\ p=\frac{\partial f}{\partial x}=f'\cdot 2x=2xf'; \quad 2)\ q=\frac{\partial f}{\partial y}=2yf'$$

$$3)\ r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2xf''+2f'=4x^2f''+2f'$$

$$4)\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4y^2f''+2f' \quad 5)\ s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xyf''$$

Тому:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\left[16xy^3f'^2f''+8xyf'^3-4xyf''-16xy^3f'^2f''\right]+$$

$$+\frac{\partial y}{\partial x}\left[4y^2f''+\cancel{2f'}+\cancel{16x^2y^2f'^2f''}+8x^2f'^3-4x^2f''-\cancel{2f'}-\cancel{16x^2y^2f'^2f''}-8y^2f'^3\right]+$$

$$+4xyf''+\cancel{16x^3yf'^3f''}-\cancel{16x^3yf'^2f''}-8xyf'^3\Big]=0$$

Звідци:

$$4xy(2f'^3-f'')\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left[8f'^3(x^2-y^2)-4f''(x^2-y^2\right]\frac{dy}{dx}-$$

$$-4xy\left[2f'^3-f''\right]=0 \quad \text{або:}$$

$$4xy(2f'^3-f'')\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4(x^2-y^2)(2f'^3-f'')\frac{dy}{dx}-4xy\left[2f'^3-f''\right]=0$$

Виносячи за дужки: $4(2f'^3-f'')$, маємо:

$$4(2f'^3-f'')\left[xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-xy\right]=0$$

А звідси:

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2-y^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

Або означивши $\frac{dy}{dx} = u$, маємо:

$$xyu^2 + x^2u - y^2u - xy = 0$$

звідси:

$$xu(yu+x) - y(yu+x) = 0 \quad \text{або:} \quad (yu+x)(xu-y) = 0$$

тому:

$$(yu+x) = 0 \; ; \qquad xu - y = 0$$

Себто:

$$\text{I)}\; y\frac{dy}{dx} + x = 0 \qquad \text{II)}\; x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

I) зводимо до спільного знаменника: $ydy + xdx = 0$ і інтегруємо: $\int ydy + \int xdx = c_1$ маємо $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c_1$ або $x^2+y^2 = 2c_1 = c^2$ (const).

Отже рівняння кривизної кривої будуть:

$$z = f(x^2+y^2) \; ; \quad x^2+y^2 = c^2 = R^2 = (\text{const}).$$

звідси:

$$z = f(c^2) = d(\text{const})$$

Себто всі кривизні лінії лежать в площині паралельній до осі z (рівнобіжній до площі xOy) бо d зі зміною інтегрування є довільним. Очевидно, що ці кривизні лінії є кругом, паралельні до осі z-ів (рівнобіжні, або концентр.)

II). $x\frac{dy}{dx} - y = 0$, або: $xdy - ydx = 0$

Ділимо всі члени на x^2, маємо:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

А звідси:

$$\int d\left(\frac{y}{x}\right) = C\,(\text{const}) \; ; \quad \frac{y}{x} = C \; ; \quad y = Cx.$$

Таким чином одержимо такі рівняння кривинної лінії:

$$1)\ z = f(x^2+y^2) \quad і \quad 2)\ y = Cx$$

Друге рівняння є рівняння сліду площі, що переходить через вісь z-ів. При змінності вартостей C, це буде рівнянням кожної площі з осевого жмутка площ, що має своєю віссю вісь z-ів. Таким чином для кожної точки поверхні кривинна лінія є перетином поверхні з цією площею (мередияни).

§ 66. Огортальні поверхні.

Візьмім рівняння поверхні:

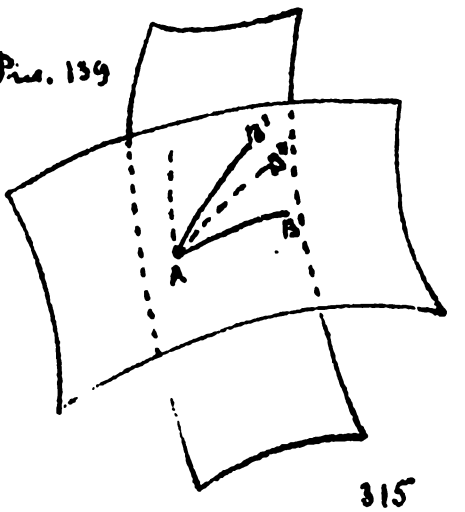
$$f(x, y, z, \alpha) = 0$$

де α є довільний змінник. Очевидно, що це буде загальним рівнянням родини поверхень. Кожний окремій вартості $\alpha = \alpha_0$ буде відповідати одна певна поверхня цілої родини. Для всіх точок такої поверхні змінник лишається сталим і змінюється лише при переході від однієї поверхні до другої.

Розглянемо дві досить близьких поверхні, що відріжняються змінниками: α і $\alpha + \Delta\alpha$, їх рівняння будуть:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha) &= 0 \\ f(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Рис. 139



Візьмемо $\Delta\alpha$ так малим, щоб ці поверхні могли перехрещуватися вздовж якоїсь кри-

вої AB' (рис. 139). Коли вартість $\Delta\alpha$ будемо змінювати, так щоб це $\Delta\alpha$ простувало до нуля, то разом з цим перехрестя цих площ AB' буде змінювати й своє положення й форму (AB'' і т. д.). Припустім, що межовій вартості $\Delta\alpha$ відповідатиме якась лінія перехрестя AB, що її будемо звати <u>прикметною кривою родини</u>.

Очевидно, що кожна лінія перехрестя двох поверхнь родини визначатиметься рівняннями (A), яко системою. Прикметна ж крива також визначатиметься тією ж системою при умові, що $\Delta\alpha \ldots 0$

Складаємо з рівнянь системи (A) нове рівняння, відлічуючи з 2го рівняння 1ше і ділючи вислід на $\Delta\alpha$, а саме:

$$\frac{f(x,y,z,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,y,z,\alpha)}{\Delta\alpha}=0$$

Це рівняння як вислідне з даних може заступити кожне із рівнянь системи (A), а тому ми створимо нову систему:

$$f(x,y,z,\alpha)=0$$

$$\frac{f(x,y,z,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,y,z,\alpha)}{\Delta\alpha}=0$$

що є еквівалентною з попередньою. Як ми вже зазначали, щоб одержати рівняння прикметної кривої, треба взяти випадок $\lim \Delta\alpha = 0$ й ми приходимо до системи:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z,\alpha)&=0 \quad (1)\\ f'_\alpha(x,y,z,\alpha)&=0 \quad (2)\end{aligned}\right\} \ldots (117)$$

Очевидно, що в залежности від вартости α, ця крива лежатиме кожний раз на певній поверхні, що складає дану родину. Отже таких кривих буде безліч і всі вони створюватимуть геометричний осередок, що має назву <u>огортальної поверхні даної родини поверхень.</u> Самі не окремі поверхні даної родини звуться огорненими.

Очевидно, що рівняння огортальної поверхні не залежатиме від окремих вартостей змінника α й тому одержиться шляхом виключення його з рівнянь (117). Це виключення можна зробити так: 1) виключимо α з рівняння [117,(2)] як якусь функцію від x, y, z і вставимо в рівняння [117,(1)], тоді одержимо нове рівняння:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \cdot\cdot (13)$$

що й є рівнянням огортальної поверхні. Цей спосіб дає право в деяких випадках вважати рівняння [117,(1)]:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0$$

за рівняння огортальної, при умові, що в цьому разі α – не є довільним змінником, а функцією: $\alpha = \varphi(x, y, z)$, визначеною з рівняння [117,(2)], себ-то $f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$. Це дає змогу й огортальну й огорнену поверхню визначити рівнянням цілої родини:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0$$

з тією ріжницею:

1) Коли $f(x, y, z, \alpha) = 0$ – є рівнянням самої роди-

ни, то α в ньому є довільний змінник, якому можна давати які бажано довільні вартости.

2) Коли $f(x, y, z, \alpha)=0$ є рівнянням одної з огорнених поверхень (одної поверхні з родини), то α є в ньому певною сталою величиною $\alpha = \alpha_0$.

3) Коли $f(x, y, z, \alpha)=0$ є рівнянням огортальної, то α в ньому є змінною функцією x, y, z, визначеною з допомогового рівняння $f'_\alpha(x, y, z, \alpha)=0$

Приклад. Знайти огортальну родини куль сталого луча r, центри яких посуваються здовж осі x-ів.

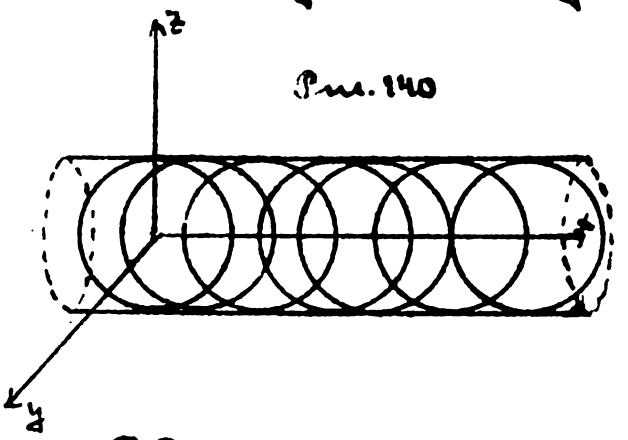


Рис. 140

Центр кулі посувається здовж осі x-ів тому значники його будуть $(\alpha, 0, 0)$, де α є довільно-змінним. Тому рівняння родини куль буде:

$$(x-\alpha)^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Допомогове рівняння: $f'_\alpha(x, y, z, \alpha)=0$ матиме вигляд:

$$-2(x-\alpha)=0. \text{ Отже } \alpha = x.$$

Через те рівняння огортальної буде:

$$y^2 + z^2 = r^2$$

Це рівняння прямого вальця, що має напрямний контур на площі yz і за вісь саму вісь x-ів (рис. 140). Загалом огортальні родин куль сталого луча творять так звані рурчасті поверхні

§ 67. Основна властивість огортальних поверхень.

Огортальна поверхня має спільну дотичну площу з кожною з огорнених поверхень у всіх точках, відповідної для цієї огорненої, прикметної кривої. (Инакше, огортальна доторкається кожної з огорнених поверхень у всіх точках її прикметної кривої).

Хай дана огорнена поверхня визначається вартістю параметра $\alpha=\alpha_0$, себто її рівняння буде:

$$f(x, y, z, \alpha_0)=0 \quad \cdots \quad (\alpha)$$

Рівняння же огортальної буде:

$$f(x, y, z, \alpha)=0 \quad \cdots \quad (\beta)$$

де α є функцією x, y, z, визначеною з рівняння

$$\frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha}=0 \quad \cdots \quad (\gamma)$$

Напишемо рівняння площі дотичної для кожної з цих поверхень в їх спільній точці $M(x, y, z)$. Ми знаємо, що рівняння дотичної площі до поверхні (α) буде:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0 \quad \cdots \quad (\delta)$$

бо $\alpha_0=\text{const}$. Рівняння же дотичної площі до огортальної поверхні (β) напишеться так:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f)(X-x)+\frac{\partial}{\partial y}(f)\cdot(Y-y)+\frac{\partial}{\partial z}(f)\cdot(Z-z)=0$$

де символами $\frac{\partial}{\partial x}(f)$ означили окрему похідну через x від $f(x, y, z, \alpha)$, де α є також функцією x і т. д.

Тому:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial y}(f) = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y};\ \frac{\partial}{\partial z}(f) = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

Отже рівняння дотичної до огинальної поверхні матиме вигляд:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right](X-x) + \left[\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right](Y-y) + \left[\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right](Z-z) = 0$$

Або:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)\right] +$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial \alpha}{\partial z}(Z-z)\right] = 0$$

Але після умові α вилучається з рівняння (8) себто з рівності $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, а тому другий доданок лівої частини рівняння є рівний з нулем. Отже рівняння площі дотичної в точці M до огинальної поверхні матиме вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z-z) = 0 \quad \ldots (\varepsilon)$$

Рівняння (ε) і (δ) умовам одночасові.

Ми брали точку M спільну й для огинальної й для огинаної поверхні, а ми знаємо з самого визначення прилеглої кривої, що для точки можна провести й на ній, себто задовольняти рівняння (117). Цілком тепер теорема є доведеною.

§68. Огинальні поверхні 2-го роду.

Припустимо, що ми маємо однопараметрову, що підлягає двоїстій неособливій залежності α і β. Рівняння такої системи буде:

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

Дамо тимчасом змінникові (β) певну вартість β_0 й візьмім дві яких будь поверхні з даної родини, що відповідають певним змінам вартости α, напр.

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

$$\text{і} \quad f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha, \beta) = 0$$

Дібраємо $\Delta\alpha$ так малим, щоб ці поверхні перетиналися, одевидно, вздовж якоїсь кривої ab. Коли $\Delta\alpha$ буде змінювати свою вартість, простуючи до нуля, то й крива ab буде змінювати свої положення й форму і у випадку $\lim \Delta\alpha = 0$ ця крива прийме якесь остаточне положення й форму. Цю криву будемо звати <u>прикметною кривою поверхні зглядно змінника α.</u>

Очевидно, що її рівняння одержимо міркуваннями попереднього § і вони матимуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0 \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Таксамо одержимо рівняння <u>прикметної кривої зглядно змінника β, а саме:</u>

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0 \\ f'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Змінюючи одночасно і α і β ми одержимо ряд поверхень, що матимуть загалом лише одну спільну точку [перетин прикметних кривих (A) і (B)]. Ця точка має назву прикметної точки системи поверхень. Ясна річ, що згадану прикметну точку можна визначити розвязавши систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0 \quad (1) \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0 \quad (2) \\ f'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0 \quad (3) \end{aligned}\right\} \ldots (118)$$

У висліді розвязання значники цієї точки визначаться як функції α і β, себто:

$$x = \varphi(\alpha, \beta); \quad y = \psi(\alpha, \beta) \text{ і } z = \chi(\alpha, \beta) \ldots (C)$$

Коли α і β матимуть певні вартости, що відповідають даній огорненій поверхні, то ми одержимо певну прикмету точку. Коли ж α і β будуть змінними то очевидно, ми матимемо справу з геометричним осередком прикметних точок, себто з поверхнею. Ця поверхня зветься огортальною поверхньою системи поверхень або <u>огортальною поверхнею 2го роду.</u>

Цю ж саму поверхню можна одержати, коли з рівнянь (2) і (3) системи (118) визначимо α і β як функції x, y, z і вставимо їх в рівняння (1) тієї ж системи (118). Таким чином рівняння (1) системи (118) можна розглядати:

1) Як рівняння родини поверхень, коли α і β є довільно-змінними величинами (змінниками)

2) Як рівняння окремої поверхні родини, коли α і β мають певні сталі вартости.

і 3) Як рівняння огортальної поверхні 2го роду коли α і β є змінні величини функції x, y і z, що визначаються з рівнянь (2) і (3) системи (118).

§ 69. <u>Основна властивість огортальної поверхні 2го роду.</u>

<u>Огортальна поверхня 2го роду має спільну</u>

дотичну площу з кожного огорненого поверхнего в її прикметній точці.

Дамо α і β певні вартости α_0, β_0. Тоді рівняння даної огорненої поверхні буде:

$$f(x, y, z, \alpha_0, \beta_0) = 0 \quad (a)$$

Візьмім прикметну точку $M(x, y, z)$ [що визначається рівняннями: $x = \varphi(\alpha_0, \beta_0)$; $y = \psi(\alpha_0, \beta_0)$ і $z = \chi(\alpha_0, \beta_0)$] і через неї поведемо площу дотичну до поверхні (a). Рівняння її буде:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0 \quad \cdots (б)$$

де α_0 і β_0 = const. Рівняння ж огортальної поверхні, як доведено, буде:

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \quad \cdots (в)$$

де α і β є певні функції x, y, z визначені з рівнянь (2) і (3) системи (118). Точка M, як прикметна лежить і на огортальній площі. Загальне рівняння дотичної площі, поведеної до огортальної поверхні через цю точку M, матиме вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f) \cdot (X - x) + \frac{\partial}{\partial y}(f) \cdot (Y - y) + \frac{\partial}{\partial z}(f)(Z - z) = 0$$

Але f є функція x, y, z безпосередньо й через α і β, а тому:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y}(f) = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

$$\text{і } \frac{\partial}{\partial z}(f) = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z}$$

Таким чином рівняння нашої дотичної площі матиме вигляд:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z)\right] + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial \alpha}{\partial z}(Z - z) + \right.$$

$$+\frac{\partial f}{\partial \beta}\left[\frac{\partial \beta}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial \beta}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial \beta}{\partial z}(Z-z)\right]=0$$

Ми знаємо, що α і β визначаються з рівнянь (2) і (3) системи (118), а саме з рівнянь:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial f}{\partial \beta}=0$$

Через це, вставляючи ці вартості в попередні рівняння ми одержимо остаточно рівняння площі дотичної до огортаючої поверхні в такому вигляді:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0 \cdots (9)$$

Порівнюючи рівняння (8) і (9) переконуємося в правдивості нашої теореми.

Приклад. Знайти огортаючу родини еліпсоїдів сталої величини осей, що своїм центром і довжиною з цих осей лежить на площі XY.

Хай осі еліпсоїди будуть: a, b і c, а координати центру $(\alpha, \beta, 0)$. Тоді рівняння еліпсоїди буде:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \cdots (1)$$

Беручи похідні цього рівняння через α і β й, прирівнюючи одержані нові рівняння до першого, матимемо систему:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=\alpha\\ y=\beta\end{array}\right\} \cdots (2)$$

бо: $-\frac{2(x-\alpha)}{a^2}=0$ і $-\frac{2(y-\beta)}{b^2}=0$. Вилучуючи з цієї системи змінних α і β шуканого рівнян-

на ортогональної поверхні, а саме:

$$z^2 = c^2 \; ; \quad z = \pm c \quad \ldots (3)$$

Рівняння (3) є системою двох площин рівновіддалених і віддалених від площі хоу на величину осі с.

§70 Рух повороту.

Хай родина поверхонь визначається рівнянням:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \quad \ldots (\alpha)$$

і залежить від одного змінника.

Візьмімо з досить близької поверхні з цієї родини таки, щоб вони відповідали вартостям змінника:

$$\alpha, \quad \alpha + \Delta\alpha, \quad \alpha + \Delta_1\alpha$$

Тепер добираємо вартості $\Delta\alpha$ і $\Delta_1\alpha$ таки, щоб ці поверхні перехрещувалися. Але кожні три поверхні перехрещуються в одній або в кількох точках і, щоб визначити значення цього перехрещення, треба розв'язати як систему рівнянь цих поверхонь, а саме:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha) &= 0 \\ f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) &= 0 \\ f(x, y, z, \alpha + \Delta_1\alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots (\beta)$$

Скасавши, як і в попередньому § рівняння:

$$1) \quad \frac{f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0$$

$$\frac{f(x, y, z, \alpha + \Delta_1\alpha) - f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha)}{\Delta_1\alpha - \Delta\alpha} = 0$$

Ці рівняння як вислідні з системи (β) можуть цілком заступити два останні її рівняння.

Коли $\Delta\alpha$ і $\Delta_1\alpha$ будуть простувати до нуля, то ми одержимо остаточне положення перехрестя поверхнь, що назвемо прикметною точкою (їх загалом буває одна, а може бути й декілько). Тоді значники цієї точки визначатимуться з системи:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha) &= 0 \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha) &= 0 \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\gamma)$$

У свою чергу ми можемо скласти нове вислідне рівняння:

$$\lim_{\Delta\alpha \ldots 0} \frac{f'_\alpha(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha) - f'_\alpha(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0$$

або:

$$f''_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$$

Це рівняння, як вислідне з двох останніх може заступити в системі перше рівняння, а тому остаточно маємо систему:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha) &= 0 \quad (1) \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha) &= 0 \quad (2) \\ f''_\alpha(x, y, z, \alpha) &= 0 \quad (3) \end{aligned}\right\} \ldots (119)$$

Ця система й дає визначити значники точки x, y, z, а саме:

$$x = \varphi(\alpha); \quad y = \psi(\alpha) \text{ і } z = \chi(\alpha) \ldots (120)$$

де α стала величина, що відповідає даній ок-

релій поверхні родини.

Коли ж ми α будемо давати все нові й нові вартости, то визначатимемо все нові й нові прикметні точки, що відповідатимуть кожний раз все новій поверхні з родини.

Нарешті, коли взяти α за змінну, то рівняння (120) будуть рівняннями геометричного осередку всіх прикметних точок. Цей геометричний осередок, як бачимо з форми рівнянь є крива й зветься <u>рубом повороту родини поверхень.</u>

З огляду на те, що в систему (119) входять перші два рівняння, що визначають відповідну прикметну криву, то кожна прикметна точка мусить лежати на відповідній прикметній кривій, а тому й геометричний осередок цих точок, себто руб повороту цілковито лежить на огортальній поверхні.

Вислід вилучення α зі всіх трьох рівнянь системи (119) дасть рівняння рубу повороту у вигляді:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$

як перехрестя двох поверхень. Це вилучення α можемо перевести так: вилучити α з рівняння (3) системи (119) як функцію x, y, z і знайдену вартість $\alpha = \psi(x, y, z)$ вставити а) в рівняння (1) і б) в рівняння (2) даної системи (119) Таким чином рівняння

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha) &= 0 \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (121)$$

[де $\alpha = \psi(x, y, z)$ визначене з рівняння (3) системи (119)] є системою рівнянь, що визначають рух повороту.

§71. Основна властивість руху повороту.

Рух повороту є доторкальною всіх приєднаних кривих рухів, себто рух повороту має спільну дотичну з відповідною приєднаною кривою, що переходить через точку дотику.

Коли точка дотику є спільна й для руху повороту й для приєднаної кривої, то для знаходження дотичних до обох даних кривих досить, щоб і напрями знайшли їх дотичних були однакові.

Рівняння косої дотичної до якої будь кривої має вигляд:

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz} \quad \ldots (\alpha)$$

Отже напрями знаходимо пропорційні похідні dx, dy і dz.

Ми знаємо, що косина приєднана крива визначається рівняннями:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0$$
$$f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$$

де α для косої огинної приєднаної кривої має певну сталу вартість α_0.

Щоб визначити dx, dy, dz треба буде продиференціювати ці рівняння й дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz &= 0 \\ \frac{\partial f'_\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial y}dy + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial z}dz &= 0 \end{aligned}\right\} \dots (\beta)$$

бо $\alpha = \text{const}$.

З другого боку вартости dx, dy і dz для рівняння дотичної до руху повороту ми визначимо продиференціювавши рівняння цього руху, а саме рівняння (121). Тоді ми

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha &= 0 \\ \frac{\partial f'_\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial y}dy + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial z}dz + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial \alpha}d\alpha &= 0 \end{aligned}\right\}$$

, де $\alpha = \Psi(x,y,z)$ визначене з рівняння (3)(б)

Але з рівнянь (2) і (3) системи (119) бачимо, що $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = f'_\alpha = 0$ і $\frac{\partial f'_\alpha}{\partial \alpha} = f''_\alpha = 0$. Тому для визначення вартостей dx, dy, dz для рівняння дотичної до руху повороту маємо систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz &= 0 \\ \frac{\partial f'_\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial y}dy + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial z}dz &= 0 \end{aligned}\right\} \dots (\gamma)$$

Порівнюючи системи (β) і (γ) і ми бачимо, що вони є однакові, а тому й їх розв'язки dx, dy і dz є однакові, а це доводить що дотичні до руху повороту й відповідної приєднаної кривої співпадають в одну.

Приклад. Знайти огортальну поверхню й рух повороту родини кіл даного сталого кута, що мають центри в одній площині й заслоняють від одного зіниця.

Центри кіл лежать в одній площині, якщо вісь

мело за площу xy. Тоді множина центру можемо описати:

$$x = \alpha; \quad y = \varphi(\alpha); \quad z = 0$$

Себто центри покувалося вздовж напрямної кривої рівняння $y = \varphi(x)$. Тому рівняння родини куль буде:

$$(x-\alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 = r^2 \quad \ldots (\alpha)$$

Щоб знайти огортальну поверхню берем похідну через α і маємо:

$$-2(x-\alpha) - 2[y - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) = 0$$

або: $$x - \alpha + [y - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) = 0 \quad \ldots\ldots (\beta)$$

Вилучивши α з рівнянь (α) і (β) матимемо огортальну поверхню даної родини куль. Щоб дослідити цю огортальну, ми звернемо увагу на те, що рівняння (β) є першого ступеня, себто є рівнянням площі. Площа перетинає кулю по кругах, а тому всі прилеглі криві поверхні є кругами.

Значення центру задовольняють рівняння (β), а тому прилеглі криві є великі кругами куль. Далі рівняння (β) показує, що площа (β) є площею паралельною до площі xy, а тому остання є площею симетрії огортальної поверхні.

Ці дослідження показують, що огортальна поверхня має форму труби й тому зветься трубчастою поверхнею.

Диференціюючи рівняння родини удруге через маємо:

$$[y-\varphi(\alpha)]\,\varphi''(\alpha) = 1+\varphi'^2(\alpha) \quad \ldots\ldots (\gamma)$$

Рівняння (α), (β) і (γ) після вилучення з них змінника α дають рівняння рубу повороту, або теж рівняння повороту одержуємо визначивши з рівнянь (α), (β) і (γ) вартости x, y, z, а саме:

$$x = \alpha - \frac{[1+\varphi'^2(\alpha)]\,\varphi'(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$$

$$y = \varphi(\alpha) + \frac{1+\varphi'^2(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$$

$$z = r^2 - \frac{[1+\varphi'^2(\alpha)]^3}{\varphi''^2(\alpha)}$$

§72. Поверхні розгортання.

Ми знаємо, що кожна поверхня є певного роду геометричний осередок точок, звязаних рівнянням вигляду $f(x, y, z) = 0$ Між цими поверхнями можуть бути й такі, що на них ні в якому напрямі й положенню не може пристати проста лінія, а будуть і такі, що на них може пристати ціла система простих. Тоді ці поверхні творяться рухом, згідно певного закона, простої. Напр. циліндрична поверхня або поверхня однопільної гиперболоїди і т. д. Такі поверхні звуться лінійними. Деякі з лінійних поверхень можемо розгорнути в площу, напр., циліндричну, або конічну, а деякі, напр. поверхню згаданого гиперболоїда або гиперболичного параболоїда розгорнути в площу не можна. Першого роду лінійні поверхні мають назву прямих

лінійних поверхень або поверхень розгортання, а другого роду носять назву <u>косих лінійних поверхень</u>

Завданням нашого § є дослідження прикмет і властивостей лінійних поверхень 1го роду, себто поверхень розгортання.

Візьмім родину площ, що залежала б від одного якого змінника t. Рівняння такої родини можна написати так:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

де сочинники A, B, C і D є функціями данного змінника t. Визначимо з цього рівняння z і матимемо

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

Нові сочинники $-\frac{A}{C}, -\frac{B}{C}, -\frac{D}{C}$ будуть також певними функціями t. Перетворимо ці функції так: візьмім за нового змінника $\alpha = -\frac{A}{C} = f(t)$ і визначимо з нього t. Коли ми тепер вставимо вартість t в функцію $-\frac{B}{C}$ і $-\frac{D}{C}$, то перетворимо їх також в певні функції від α, а саме:

$$-\frac{A}{C} = \alpha \; ; \; -\frac{B}{C} = \varphi(\alpha) \text{ і } -\frac{D}{C} = \psi(\alpha)$$

Таким чином рівняння родини матиме вигляд:

$$z = \alpha x + \varphi(\alpha) y + \psi(\alpha) \quad \ldots\ldots (122)$$

Рівняння (122) має окрему назву, а саме: рівняння <u>рухомої площі</u>, а змінник α зветься <u>керувальним змінником рухомої площі</u>, бо кожна

зміна вартости α, змінює вартість сочинників рівняння площі. З огляду на те, що напрямні змінники площі є пропорційні цим сочинникам, то кожна зміна вартости α викликає відповідну зміну положення рухомої площі.

Щоб визначити прикметну криву, ми мусимо прилучити до рівняння родини площ ще допомогове рівняння, утворене прирівнянням нулеві першої похідної через змінника α лівої частини рівняння родини. Отже рівняння прикметної кривої матимуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + \varphi(\alpha) y + \psi(\alpha) &= z \quad (1) \\ x + \varphi'(\alpha) y + \psi'(\alpha) &= 0 \quad (2) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (123)$$

Обидва ці рівняння містять змінні x, y і z в перших ступінях, а тому система (123) визначає <u>просту</u>. Таким чином прикметна крива родини площ (залежної від одного змінника) буде проста. Ця проста зветься <u>творчою</u> огортальної поверхні.

Сама ж огортальна поверхня одержиться з тієї самої системи (123) вилученням змінника α, себто огортальна поверхня матиме рівнянням:

$$\alpha x + \varphi(\alpha) y + \psi(\alpha) = z$$

де α є функція x і y визначена з рівняння (2) системи (123)

Ми знаємо, що огортальна поверхня буде

геометричним осередком усіх прикметних кривих, а ці прикметні криві є простолінійні творчі, а тому <u>огортальна родина площ залежних від одного змінника є лінійна поверхня.</u>

Щоб лінійна поверхня могла розгортатися, себто могла випростатися в площу, потрібно щоб всі, дотичні до поверхні, площі, поведені по черзі до однієї й тої самої творчої зливалися в одну, бо тоді при випростанні кожна творча прилягатиме всіма своїми точками до площі розгортання.

Отже, щоб наша лінійна поверхня, що її досліджуємо, була поверхньою розгортання, треба довести згадану властивість дотичних площ до неї.

Ми знаємо, що кожна з площ дотичних до огортальної якої-будь родини поверхень і поведених через яку-небудь точку прикметної кривої, є дотичною й до огорненої поверхні, що цій прикметній кривій відповідає (через цю прикметну криву переходить). Тому, коли на одній із творчих візьмемо точку й поведемо площу дотичну до огортальної лінійної поверхні, то вона буде дотичною й до відповідньої огорненої площі, а це значить буде зливатися з нею, а разом і відповідньою творчою, що лежить на ній.

Отже, кожна з площ даної родини, залеж-

ної від одного змінника α буде доторкатися своєї огортальної лінійної поверхні всіма точками відповідньої творчої. Тому дана огортальна лінійна поверхня є поверхнею розгортання. Таким чином всі дотичні площі до поверхні розгортання утворюють родину площ, залежних від одного якогось змінника α.

Покажем, що инші поверхні цієї властивости не мають.

Візьмім систему площ залежних від двох довільних змінників α і β. Рівняння такої родини (рухомої площі) буде:

$$f(\alpha,\beta)x + \varphi(\alpha,\beta)y + \psi(\alpha,\beta) = z \quad \ldots (124)$$

Щоб знайти прикметну точку ми мусимо додати 2 помічних рівняння й тоді матимемо систему:

$$\left.\begin{aligned} &f(\alpha,\beta)x + \varphi(\alpha,\beta)y + \psi(\alpha,\beta) = z \quad (1)\\ &f'_\alpha(\alpha,\beta)x + \varphi'_\alpha(\alpha,\beta)y + \psi'_\alpha(\alpha,\beta) = 0 \quad (2)\\ &f'_\beta(\alpha,\beta)x + \varphi'_\beta(\alpha,\beta)y + \psi'_\beta(\alpha,\beta) = 0 \quad (3)\end{aligned}\right\} \ldots (125)$$

Коли дамо змінникові β яку окрему вартість, то рівняння (1) і (2) системи (125) будуть рівняннями системи простих, що відповідають змінам α. Коли так сама даючи змінникові α яку окрему сталу вартість, то рівняння (1) і (3) системи (125) будуть рівняннями другої системи простих, залежних

від змін β.

Коли ці прості обох систем будуть реальні, то ми маємо справу з косою лінійною поверхньою, що має рівняння $\Phi(x, y, z)$ яке одержується з (125) вилученням обох змінників (напр. гиперболичного параболоїда.

Коли ж ці прості є уявні, то перетин їх дасть реальну точку, а геометричний осередок останніх дасть криволінійну поверхню з рівняння також $\Phi(x, y, z)$ (напр. куля), одержаним як і попереднє.

І нарешті коли один із змінників, напр. β, буде функцією другого, напр. (α), то тоді рівняння (2) і (3) системи (125) будуть вислідом один другого й рівняння (3) відпаде. Ми прийдемо до однієї системи простолінійних творчих, себто до поверхні розгортання, як огортальної родини площ залежних від одного змінника. Для вистарчальности наших тверджень ми доведемо зворотню теорему й покажемо, що кожну довільну поверхню можна розглядати як огортальну родини площ від 2^x змінників.

Справді, хай рівняння якої будь довільної поверхні є:

$$z = f(x, y) \quad \ldots \quad (\alpha)$$

Візьмім на ній точку, що має значники $[\alpha, \beta, f(\alpha, \beta)]$ і поведемо через него площу дотичну до цієї поверхні. Рівняння такої площі, як

нам відомо, буде:

$$z - f(\alpha,\beta) = p(x-\alpha) + q(y-\beta) \ldots (\beta)$$

Даючи значенням точки α і β різні довільні вартості, ми одержимо цілу систему дотичних площ і ці площі складуть родину, що визначається рівнянням (β). Це рівняння показує, що загалом площі дотичні до якої будь поверхні складають родину площ, залежну від 2^x довільних змінних. Дана поверхня буде доторкальною всіх площ даної системи, а тому буде їх огорткальною.

Хай рівняння (α) буде рівнянням якої лінійної поверхні. Візьмімо якусь точку поверхні, що лежить на творячій одній системи й буде перехрестям з творячою із другої системи. Дотична площа поведена до поверхні через цю точку буде дотичною й до тій площі з родини, що відповідає певним вартостям змінних α_0 і β_0, які визначатимуть і прилеглу точку, як перехрестя даних творячих. Очевидно, що ця дотична площа зіллється зі згаданою площею з родини.

Коли ж ми візьмемо другу точку на тій же творячій першої системи, то й відповідатиме вже інша творяча з другої системи (що відповідає якійсь вартості змінної β_1). А тому відповідна дотична площа до поверхні зіллється вже з другою площею родини, що відповідатиме новій змінній, а саме α_0 і β_1 і т. д.

Отже ці міркування показують, що для косої лінійної поверхні дотичні площі в кожній иншій точці однієї й тої ж творчої є різні.

Таким чином можна сказати, що ознакою того, що дана поверхня буде поверхнею розгортання є те, що дотичні до цієї поверхні творять родину площ залежних від одного змінника.

Коли б до системи (123) додати ще й рівняння створене прирівнянням до нуля другої похідної через змінника від лівої частини рівняння самої родини, то матимемо систему:

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + \varphi(\alpha) y + \psi(\alpha) &= z \\ x + \varphi''(\alpha) y + \psi'(\alpha) &= 0 \\ \varphi''(\alpha) y + \psi''(\alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (126)$$

що визначає, як уже нам відомо, руб повороту. З цієї системи можна визначити змінні x, y і z через α й ми одержимо рівняння рубу повороту в такім вигляді:

$$x = f(\alpha) \; ; \; y = f_1(\alpha) \text{ і } z = f_2(\alpha)$$

Як було доведено, руб повороту має властивість, що дотичні до нього в кожній точці є спільні з дотичними до прикметних кривих які через цю точку переходять. Але в даному разі ці прикметні криві є простолінійними творчими, а тому:

Всі творчі поверхні розгортання є дотичними до руба поворота її, себто поверхня

розгортання є геометричний осередок всіх дотичних до рубу повороту.

§73. Основна властивість поверхень розгортання.

Площі родини одного незалежника є площами кривини рубу повороту їх огортальної поверхні (розгортання).

Для доведення цієї теореми згадаємо, що коли через дану точку на кривій повести площу кривини й співпрямову, то остання буде прямою до першої. Ми знаємо, що руб повороту є геометричним осередком прикметних точок, що лежать на площах родини. Таким чином через кожну точку руба повороту неодмінно переходить якась із площ родини. Коли ж в кожній із таких точок ми збудуємо відповідну співпрямову до рубу повороту й зуміємо довести, що вона є прямою до певної площі родини, що через цю точку переходить, то наша теорема буде доведена

Ми одержали рівняння рубу повороту:

$$x = f(\alpha)\ ;\quad y = f_1(\alpha)\ \text{ і }\ z = f_2(\alpha) \quad \cdots (1)$$

за допомогою системи рівнянь (126):

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + \varphi y + \psi &= z \\ x + \varphi' y + \psi' &= 0 \\ \varphi'' y + \psi'' &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots (2)$$

де φ і ψ скорочене означення $\varphi(\alpha)$ і $\psi(\alpha)$. Кожній повній вартості α відповідає на рубі повороту окрема точка, що має значниками $(f(\alpha), f_1(\alpha), f_2(\alpha))$

а в той час цій точці відповідає й певна площа родини, що переходить через неї й визначається рівнянням $\alpha x + \varphi y + \psi = z$, де α має ту саму дану окрему вартість що й точка.

Як знаємо рівняння співпрямової до рубу в даній точці при даній вартости α, матиме вигляд:

$$\frac{x - f(\alpha)}{f_1' f_2'' - f_2' f_1''} = \frac{y - f_1(\alpha)}{f_2' f'' - f' f_2''} = \frac{z - f_2(\alpha)}{f' f_1'' - f_1' f''} \quad \ldots (3)$$

Коли вона є прямом до відповідної площі родини: $\alpha x + \varphi y + \psi = z$, що через цю точку переходить, то має задовольнятися умова прямовости, а саме пропорційність сочинників рівняння площі й кутових змінників співпрямової, себто:

$$\alpha : \varphi : -1 = (f_1' f_2'' - f_2' f_1'') : (f_2' f'' - f' f_2'') : (f' f_1'' - f_1' f'') \quad \ldots (4)$$

Щоб довести це, згадаємо що f, f_1 і f_2 одержані через визначення x, y, z з рівнянь (2); тому, коли ці вартости f вставити в згадані рівняння системи (2), то одержимо тотожности:

$$\left.\begin{aligned} \alpha f + \varphi f_1 + \psi &= f_2 \quad (1) \\ f + \varphi' f_1 + \psi' &= 0 \quad (2) \\ \varphi'' f_1 + \psi'' &= 0 \quad (3) \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

для даної вартости α. Коли ж ми будемо брати довільну точку на рубі повороту, то вартість α буде змінною й тому рівняння (5) дають нам функціональну залежність між сочинниками рівняння родини площ і вартостями значників точок на рубі. Продеференцуємо рівняння (1)

системи (5) через (α), тоді матимемо:

$$\alpha f' + \varphi f_1' - f_2' + \underbrace{f + \varphi' f_1 + \psi'} = 0 \; .$$

Але сума членів $\underline{\qquad}$ згідно рівняння (2) є рівне з нулем, а тому:

$$\alpha f' + \varphi f_1' - f_2' = 0 \; \ldots\ldots (6)$$

Диференцуючи також рівняння (2) тієї ж системи (5) маємо:

$$f' + \varphi' f_1' + \underbrace{\varphi'' f_1 + \psi''} = 0$$

Знова згідно рівняння (3) маємо:

$$f' + \varphi' f_1' = 0 \; \ldots\ldots (7)$$

і нарешті, диференцуючи, одержане нами рівняння (6), маємо:

$$\alpha f'' + \varphi f_1'' - f_2'' + \underbrace{f' + \varphi' f_1'} = 0$$

Але згідно рівняння (7) маємо:

$$\alpha f'' + \varphi f_1'' - f_2'' = 0 \; \ldots\ldots (8)$$

Тепер ми розвяжемо рівняння (6) і (8) яко систему щодо α і $\varphi(\alpha)$. Для цього:

1) 1ше й 2ге рівняння системи:

$$\left.\begin{aligned} \alpha f' + \varphi f_1' - f_2' = 0 \\ \alpha f'' + \varphi f_1'' - f_2'' = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (9)$$

множимо: перше на f_1'', а друге на f' і відлічуємо перше з другого. Тоді маємо:

$$\alpha(f_1' f'' - f' f_1'') = f_1' f_2'' - f_2' f_1''$$

або:

$$\alpha = \frac{f_1' f_2'' - f_2' f_1''}{f_1' f'' - f' f_1''}$$

2) Множучи 1-ше рівняння на f_1'' а 2-ге на f' і також відлічуючи 2-ге рівняння з 1-го маємо з вислідного рівняння вартість:

$$\varphi_{(\alpha)} = \frac{f_2' f'' - f' f_2''}{f_1' f'' - f' f_1''}$$

Сочинник же третьої змінної z рівняння: $\alpha x + \varphi y + \psi = z$ площі родини, як видно з самого рівняння є: -1. Складаючи відношення цих сочинників, матимемо:

$$\alpha : \varphi : (-1) = \frac{f_1' f_2'' - f_2' f_1''}{f_1' f'' - f' f_1''} : \frac{f_2' f'' - f' f_2''}{f_1' f'' - f' f_1''} : (-1)$$

або:

$$\alpha : \varphi : (-1) = (f_1' f_2'' - f_2' f_1'') : (f_2' f'' - f' f_2'') : (f' f_1'' - f_1' f'')$$

Що й є умовою (4). Таким чином теорема є доведеною.

<u>Приклад 1.</u> Дано родину площ, рівнобіжних до даної простої. Знайти їх огортальну.

Хай дана проста є вісь z-ів (рис. 141)

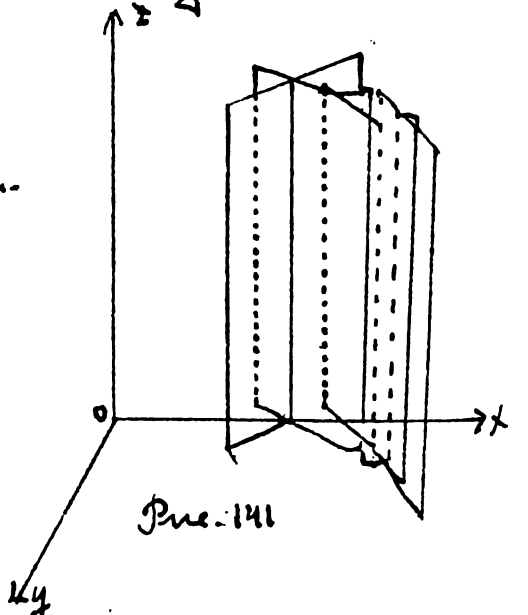


Рис. 141

Тоді рівняння рухомої площі рівнобіжної до вісі z-ів матиме вигляд [див (122)]:

$$\alpha x + \varphi(\alpha) y + \chi(\alpha) = 0 \quad \cdots (\alpha)$$

Допомогове рівняння вигляду $f_\alpha' = 0$ буде:

$$x + \varphi'(\alpha) y + \psi'(\alpha) = 0 \quad \cdots (\beta)$$

Рівняння (α) і (β) виконають просту (бо рівняння 1-го ступіня) й притому рівнобіжну до осі z-ів, бо обидва рівняння не містять змінної z. Отже творчі огортальної поверхні є рівнобіжні до осі z-ів

Таким чином огортальна поверхня є циліндричною. Вилучуючи з рівнянь (α) і (β) змінника (α) ми одержимо рівняння вигляду $f(x,y)=0$, що є рівнянням напрямного контуру, а разом і рівнянням самої циліндричної поверхні.

§ 73. Родина кривих.

Хай нам дано дві родини поверхень:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z,\alpha)=0 \\ \varphi(x,y,z,\alpha)=0 \end{aligned}\right\} \cdots (1)$$

залежних від спільного змінника α. Коли ми рівняння цих родин розглядатимемо яко систему, то кожній окремій вартості $\alpha=\alpha_0$ буде відповідати дві поверхні, одна з першої родини, а друга з другої. Перетин цих поверхень дасть нам певну криву, положення якої також залежатиме від даної вартости $\alpha=\alpha_0$. Справді, даючи змінникові α нову вартість $\alpha=\alpha_1$ ми одержимо нову пару поверхень і нову криву перетину їх. Нарешті, даючи α всі можливі вартости ми одержимо й безліч зазначеного вигляду кривих, положення яких залежить від зміни вартости α. Отже система рівнянь (1) визначає родину кривих, залежну від данного змінника α. Коли з системи (1) вилучимо цього змінника α, то одержимо якусь поверхню $F(x,y,z)=0$, що є геометричним осередком всіх кривих розгляненої родини. Такі поверхні звуться творчими поверхнями.

Узагальнемо це:

Хай нам дано родину кривих від n змінників, себто:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) = 0 \\ \varphi(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Очевидно, щоб задача була означеною, нам треба мати між цими змінниками ще $n-1$ залежність вигляду:

$$\psi_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) = 0, \ \psi_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) = 0 \ldots \psi_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) = 0 \ldots (4)$$

Коли сполучити рівняння (3) і (4) в систему, то матимемо $n+1$ рівняння, що дадуть можливість влучити n змінників $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ і одержати рівняння $\Phi(x, y, z) = 0$ творчої поверхні. Рівняння (4) очевидно є довільно-загаданими умовами, що усталюють залежність між даними змінниками. Отже зміна цих умов для одних і тих же рівнянь (3) родини кривих дасть все нові й нові творчі поверхні. Тому рівняння (4) мають назву напрямних.

Уявимо тепер геометрично, що визначатимуть з себе ці напрямні рівняння кожне зокрема. Візьмім $n-1$ яких будь наперед загаданих кривих у просторі й поставимо собі умовою, щоб кожна з кривих родини (3) перетинала ці $n-1$ загадану криву.

Візьмім одну з цих кривих L_k і хай вона визначається рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} F_k(x, y, z) = 0 \\ \text{і} \quad f_k(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

Щоб одержати точку перетину кривих родини (3) з кривою (5) ми мусимо розвязати їх рівняння яко систему. Ці рівняння (3) і (5) дають нам можливість вилучити змінні x, y і z і ми одержимо рівність:

$$\psi_k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

Отже навпаки, існування залежности між змінниками (6) є ознакою або умовою того, що криві нашої родини (3) перетинатимуть криву L_k. Очевидно, що коли ми загадаємо $n-1$ кривих $L_1, L_2 \ldots L_k \ldots L_{n-1}$, що їх перетинали б криві нашої родини, то існуватиме й $n-1$ умова вигляду (6). Всі ці умови складуть шерег залежностей між n змінниками загаданих рівняннями (4). Ці $(n-1)$ наперед загаданих кривих $L_1, L_2 \ldots L_{n-1}$ <u>звуться напрямними кривими або напрямними контурами.</u>

Таким чином, коли ми маємо родину кривих (3) залежну від довільних змінників, то загадавши собі $n-1$ напрямну криву, ми одержимо $n-1$ умову (4) перетину кривих з цими напрямними кривими, а вилучення з рівнянь (3) $(n-1)$-ої умови (4) n змінників, нам дасть рівняння творчої поверхні

§74. <u>Лінійні поверхні.</u>

Перейдім тепер до розгляду лінійних поверхень. Хай для цього нам дано всі можливі прості простору визначені рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x &= mz + n \\ y &= qz + r \end{aligned}\right\} \ldots (\alpha)$$

де m, n, q і r є довільно змінні величини, що характеризують ці прості, яко родину.

На підставі попереднього § ми можемо одержати цілком визначену творчу поверхню, коли введемо в розгляд 3 залежности між змінниками m, n, q і r. Тому згадаймо собі якісь три напрямні криві, що умови перетину родини даних простих з ними будуть:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(m, n, q, r) &= 0 \\ \varphi_2(m, n, q, r) &= 0 \\ \varphi_3(m, n, q, r) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\beta)$$

Із рівнянь (α) і (β) вилучимо змінників m, n, q і r і тоді матимемо якусь творчу поверхню $\Phi(x, y, z) = 0$. Ця творча поверхня буде геометричним осередком простих родини (α), а тому буде <u>лінійною.</u>

<u>Приклад 1.</u> Знайдемо творчу поверхню рівнобіжних між собою просторових простих, напрямна крива яких лежить в координатній площі xoy і визначається рівнянням

$$f(x, y) = 0 \; ; \quad z = 0 \; \ldots (a)$$

Очевидно, що рівняння родини матимуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} x &= mz + \alpha \\ y &= nz + \beta \end{aligned}\right\} \ldots (\delta)$$

де $m = \text{const}$ і $n = \text{const}$, α і β є довільні змінні. Виключаючи з рівнянь (а) і (б) змінні x, y, z, а саме:

1) вставляючи $z = 0$ в рівняння (б) і маємо $x = \alpha$; $y = \beta$;

2) знайдені вартості x і y вставляючи в перше рівняння (а) й одержуємо:

$$f(\alpha, \beta) = 0 \quad \cdots \quad (c)$$

Це є умова перетину простої прямої з напрямною кривою.

Коли тепер виключимо α і β з рівнянь прямих (б) і умови (с), то одержимо рівняння творної поверхні, а саме:

$$f(x - mz, y - nz) = 0$$

Це є відоме з аналітичної геометрії рівняння циліндричної поверхні з напрямною контурою на координатній площі xOy (див. рів. (74) §35 курсу аналіт. геометрії в просторі).

Приклад 2. Знайти творну поверхню, утворену рухомою простою, що переходить через закладену точку $M(a, b, c)$ і перетинається з даною напрямною кривою:

$$F(x, y, z) = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

Рівняння такої прямої будуть:

$$\left.\begin{aligned} x - a &= \alpha(z - c) \\ y - b &= \beta(z - c) \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

себто пряма проста залежить від двох

змінників α і β.

Коли з рівнянь (1) і (2) вилучимо змінні x, y і z то одержимо умову:

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0 \quad - - - \quad (3)$$

(Очевидно, що це є умова перетину кривими родини даної напрямної). Визначаючи з рівнянь (2) змінники α і β, а саме:

$$\alpha = \frac{x-a}{z-c}, \quad \beta = \frac{y-b}{z-c}$$

і вставляючи ці вартости в рівняння (3) одержимо рівняння творчої поверхні, а саме:

$$\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$$

Це є відоме рівняння конічної поверхні. (Аналітична геом. в просторі §§ 36,37)

§75. Оборотові поверхні.

Візьмім осі координат xyz і на площі xz якусь криву рівняння: $\varphi(x, z)$; $y = 0$ - - - (a) і будемо її обертати навколо осі z, то ми одержимо певну оборотову поверхню. Всі перерізи цієї поверхні площами, що переходять через вісь оборотового тіла (вісь z-ів) носять назву полуденників або мередіянів тіла, а перерізи прямові до осі (що є кругами) мають назву рівнобіжей (широта оборотового тіла).

Очевидно, що задану оборотову поверхню можна розглядати, як творчу родини кругів, що мають свої центри на осі тіла (осі z-ів) і переходять через відповідні точки даної

кривої (а), як напрямної.

Коли ми за вісь тіла взяли вісь z-ів, то кола заданої нами родини лежать площах рівнобіжних до координатної площі xoy. Тому рівняння родини матиме вигляд:

$$x^2+y^2=r^2; \quad z=d \quad \ldots (б)$$

Вилучаючи з рівнянь (а) і (б) змінні x, y і z ми одержимо умову перетину кол родини з напрямною кривою (а), а саме:

1) З рівняння (а) маємо $y=0$

2) З першого рівняння системи (б) вставкою вартости $y=0$, одержимо $x=\pm r$ і нарешті

3) $z=d$

Вставляючи ці вартости в перше рівняння системи (а), маємо:

$$\varphi(r, d)=0 \quad \ldots (в)$$

Коли ми тепер з рівнянь (б) і (в) вилучимо змінники r і d, ми одержимо рівняння творчої поверхні:

$$\varphi\left(z, \sqrt{x^2+y^2}\right)=0 \quad \ldots (127)$$

Це й є загальний вигляд оборотової поверхні. Йому можна дати ще такий вигляд, а саме:

$$\left.\begin{aligned} &f(x^2+y^2, z)=0 \\ \text{або:}\quad &z=\psi(x^2+y^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (128)$$

§76. Доторкальна, випростальна й бігунова поверхні просторової кривої.

Ми знаємо, що дотична, головна прямова й

співпрямова, поведені до кривої в даній точці M складають головний тристінний кут.

Припустім, що рівняння кривої буде:

$$x = f(s); \quad y = \varphi(s) \quad і \quad z = \psi(s)$$

і візьмім за початок осей точку M, для якої $s=0$. Тоді:

1) беручи $z=0$ ми одержимо площу кривини

2) беручи $y=0$ " " випростальну площу

і 3) беручи $x=0$ " " прямову площу

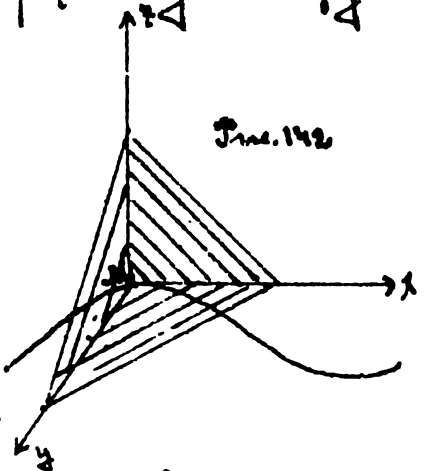


Рис. 142

Очевидно, що і в кожній точці даної кривої ми завжди зможемо збудувати головний тристінний кут, а разом з ним і три основні площі. Всі ці площі будуть відріжнятися від однойменних другого тристінного кута вартією змінника s, а тому ми для кожної кривої одержимо три родини площ, залежних від одного змінника s. Ми вже довели, що огортальні такого роду родини площ є поверхнями розгортання. Так:

1) Огортальна родина площ кривини, що зветься доторкальною поверхнею кривої буде геометричним осередком дотичних до даної кривої (а сама крива є рубом повороту цієї поверхні)

2) Огортальна родина прямових площ зветься бігуновою поверхнею кривої і

3) Огортальна родина випростальних площ

зветься <u>випростальною поверхнею</u> кривої.

I. Ми вже познайомилися з доторкальною поверхнею в §72, 73, а тому перейдемо до розгляду наступної, себто бігункової поверхні кривої.

Рівняння прямової площі (69) буде:

$$x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0 \quad \text{або:}$$

$$\frac{dx}{ds}(X-x) + \frac{dy}{ds}(Y-y) + \frac{dz}{ds}(Z-z) = 0$$

А звідци:

$$\lambda(X-x) + \mu(Y-y) + \nu(Z-z) = 0 \quad \cdots (\alpha)$$

Щоб знайти огортальну поверхню ми за §72 (взір 123) складаємо допомогове рівняння, диференцуючи дане рівняння (α) через змінника s. Тоді маємо:

$$\frac{d\lambda}{ds}(X-x) - \cancel{\lambda\frac{dx}{ds}}^{\lambda^2} + \frac{d\mu}{ds}(Y-y) - \mu^2 + \frac{d\nu}{ds}(Z-z) - \nu^2 = 0$$

або:

$$\frac{d\lambda}{ds}(X-x) + \frac{d\mu}{ds}(Y-y) + \frac{d\nu}{ds}(Z-z) = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

Скористувавшися 1-ою низкою взорів Френе [§54(93)], а саме:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\lambda_n}{\rho}; \quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{\mu_n}{\rho}; \quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{\nu_n}{\rho}$$

ми зможемо цьому рівнянню дати ще другий вигляд:

$$\frac{1}{\rho}\left[\lambda_n(X-x) + \mu_n(Y-y) + \nu_n(Z-z) = 1.\right.$$

або:

$$\lambda_n(X-x) + \mu_n(Y-y) + \nu_n(Z-z) = \rho \quad \cdots (\beta)$$

Ми знаємо, що рівняння (α) і (β), яко система, визначають творчу (прикметну криву) огортальної поверхні. Ця творча має назву бігункової.

Щоб вияснити її положення ми розглянемо рівняння (β). Це рівняння визначає площу рівнобіжну до випростальної. Бо справді: рівняння випростальної площі (86) буде:

$$\frac{d^2x}{ds^2}(X-x)+\frac{d^2y}{ds^2}(Y-y)+\frac{d^2z}{ds^2}(Z-z)=0$$

але беручи під увагу що $\frac{dx}{ds}=\lambda$; $\frac{dy}{ds}=\mu$ і $\frac{dz}{ds}=\nu$ за взорами Френе матимемо:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d\lambda}{ds}=\frac{\lambda_n}{\rho}\ ;\ \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\mu_n}{\rho}\ ;\ \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\nu_n}{\rho}$$

А тому рівнянню випростальної площі можна дати такий вигляд:

$$\lambda_n(X-x)+\mu_n(Y-y)+\nu_n(Z-z)=0 \quad \cdots \quad (\gamma)$$

Отже, одержане рівняння випростальної площі відріжняється від рівняння площі (β) на вільного члена, тому ці площі є рівнобіжні. Через те й бігунова проста що є перетином площ (α) і (β) буде рівнобіжна до перетину площ (α) і (γ), себто площ прямової й випростальної. Инакше кажучи <u>бігунова проста є рівнобіжною до співпрямової.</u>

Очевидно, що вона не зустрічає кривої, а лише перетинає її головну прямову. На рис. 143 бігунового є проста PK.

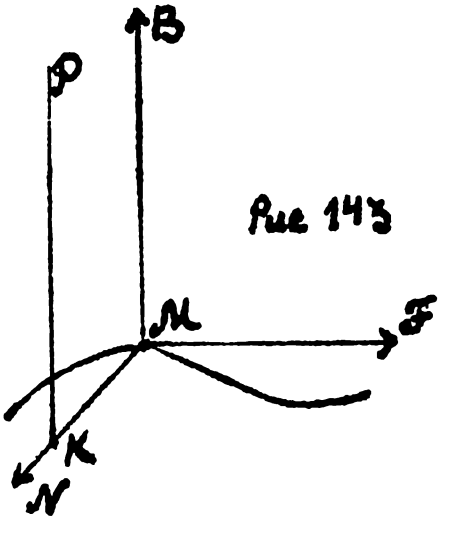


Рис 143

Візьміле тепер значники центру кривини кривої:

$$a=x+\lambda_n\rho\ ;\ b=y+\mu_n\rho\ ;\ c=z+\nu_n\rho \cdots (\delta)$$

і вставимо їх в рівняння (α) і (β)

1) Очевидно, що рівняння прямової площі мусить задоволь

нятися вартостями (δ) бо центр кривини лежить на головній прямовій, а тому й на прямовій площі [Таконе і безпосередня вставка цих вартостей у рівняння (α) дасть позитивний вислід, а саме: $\rho(\lambda\lambda_n + \mu\mu_n + \nu\nu_n) = 0$] 2) Вставка вартостей (δ) в рівняння (β) дає вислідн:

$$\rho\left(\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2\right) = \rho \text{ ; себто } \rho = \rho$$

Отже ці вислідн свідчать, що бігунова проста зливається з відповідною віссю кривини. А тому бігунова поверхня є геометричним осередком осей кривини даної кривої.

Висновок. З самого визначення поверхні, очевидно, що бігунова поверхня не містить в собі точок самої кривої. Ясна річ, що вилучаючи змінника s з рівнянь (α) і (β) ми одержимо рівняння самої бігунової поверхні.

II. Розглянемо, нарешті, рівняння випростальної поверхні.

Вона, як ми визначали є огортальною родини випростальних площ. Тому беремо рівняння цієї площі себто рівняння (γ) й складаємо до помогове рівняння, диференцуючи (γ) через s і користуючися взорами Френе. А саме:

$$\frac{d\lambda_n}{ds}(X-x) - \lambda_n\frac{dx}{ds} + \frac{d\mu_n}{ds}(Y-y) - \mu_n\frac{dy}{ds} + \frac{d\nu_n}{ds}(Z-z) - \nu_n\frac{dz}{ds} = 0$$

або:

$$\frac{d\lambda_n}{ds}(X-x) + \frac{d\mu_n}{ds}(Y-y) + \frac{d\nu_n}{ds}(Z-z) = \lambda_n\lambda + \mu_n\mu + \nu_n\nu = 0$$

А за 3-го низкого взорів Френе (96), матимемо:

$$-\left(\frac{\lambda}{\rho}+\frac{\lambda_b}{r}\right)(X-x)-\left(\frac{\mu}{\rho}+\frac{\mu_b}{r}\right)(Y-y)-\left(\frac{\nu}{\rho}+\frac{\nu_b}{r}\right)(Z-z)=0\text{, або:}$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)\right]+\frac{1}{r}\left[\lambda_b(X-x)+\mu_b(Y-y)+\nu_b(Z-z)\right]=0\ \cdots(\varepsilon)$$

Беручи рівняння (γ) і (ε) яко систему, ми матимемо рівняння творчої випростальної поверхні.

Щоб вияснити положення цієї творчої, розглянемо рівняння (2). Йому можна дати вигляд:

$$\overbrace{\left[\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)\right]}^{(1)}-K\overbrace{\left[\lambda_b(X-x)+\mu_b(Y-y)+\nu_b(Z-z)\right]}^{(2)}=0$$

де $K=-\frac{\rho}{r}$. Вираз (1) в дужках є лівою частиною рівняння прямової площі, а вираз (2) – є лівою частиною рівняння площі кривини (прямової до співпрямової). Тому рівняння (ε) при змінних r і ρ є рівнянням жмутка площ, що переходить через головну прямову як перетин площ (1) і (2). Для даної ж точки, коли ρ і r мають певні вартости, це є рівняння однієї з цих площ жмутка (рис. 144). Система ж рівнянь (γ) і (ε) визначає просту МК, перетину площі Р з випростальною площею ВГ. Очевидно, що творча МК переходить через точку М кривої, а тому й огортальна поверхня утворена цією творчою матиме на собі всі точки кривої. Іншими словами дана крива лежить на випростальній поверхні. Очевидно також, що творчі (напр. МК) випростальної поверхні є пряма-

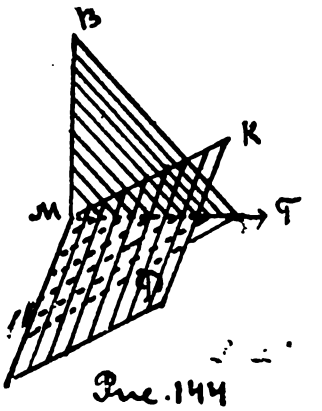


Рис. 144

ми до відповідних головних нормалей кривої. Разом з цим, випростальні площі, дотичні до випростальної поверхні, як площі даної родини будуть також завжди прямовими до головної нормалі. А тому головні прямові кривої є одночасно прямовими нашої випростальної поверхні.

Такі криві, що лежать на даній поверхні і мають за свої головні прямові, прямові самої поверхні звуться геодезичними. Таким чином кожна крива є геодезичною для своєї випростальної поверхні.

Розгорнемо нашу випростальну поверхню на площі, тоді її прямові стануть між собою рівнобіжні, а разом з ними будуть рівнобіжні й головні прямові даної кривої, себто крива випростається у просту. Тому то розглянені площа й поверхня мають назву випростальних.

§77. Еволюта просторової кривої.

Еволютою якої будь кривої будемо звати таку криву, що її дотичними є прямовими до даної кривої.

Хай дана крива L (рис. 145) має одну з прямових MN_1 в точці $M(x, y, z)$ і хай еволюта її L' дотикається цієї прямової MN_1 в точці $\Theta(X, Y, Z)$. Означимо відтинок ΘM через u

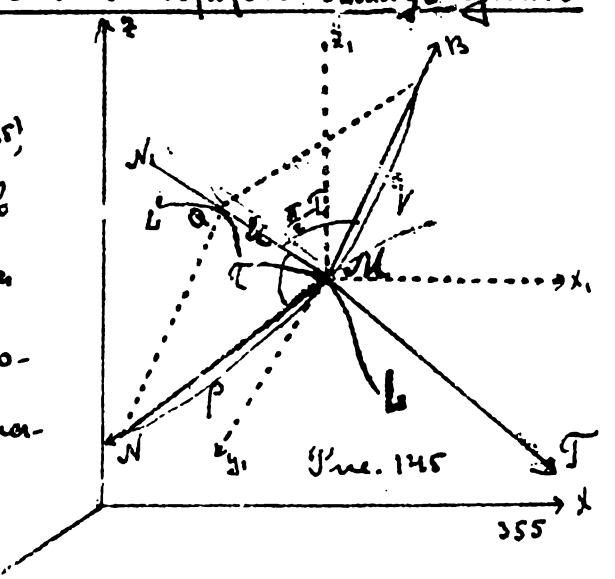


Рис. 145

тоді очевидно, що метьU на осі координат будуть:

$$X-x = u\,cs(u,X) = u\,cs\varphi;\quad Y-y = u\,cs(u,Y) = u\,cs\psi;\quad Z-z = u\,cs(u,Z) = u\,cs\chi \quad \ldots (a)$$

Обчислимо зазначені cos кутів даної прямової з осями й для цього, взявши за осі координат MT, MN і MB. Скористуємося відомим з аналітич. геометрії взором: $cs\varphi = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1$, де α, β і γ є cos. кутів одного з рамен даного куту з координатними осями, а α_1, β_1, γ_1 – cos. кутів другого рамена з тими же осями. Очевидно, що:

а) косинуси осі X-ів з новими осями будуть:

1) з дотичною MT ——— λ

2) з головною прямовою MN – λ_n

і 3) з співпрямовою MB – ——— λ_b

б) косинуси же прямової MN_1 з тими же осями будуть:

1) з дотичною MT – 0 (бо MN_1 лежить в площі NMB прямовій до MT)

2) з головною прямовою MN – $cs\tau$ (де через τ означили кут між даною прямовою до кривої й її головною прямовою)

і 3) із співпрямовою MB – $\sin\tau$ (бо $\angle N_1MB = \frac{\pi}{2} - \tau$)

Отже косинуси φ, ψ і χ кутів прямової з даними осями координат x, y, z будуть:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \cos\varphi = \lambda_n\cos\tau + \lambda_b\sin\tau \\ &\text{й аналогічно:} \\ &2)\ \cos\psi = \mu_n\cos\tau + \mu_b\sin\tau \\ &\text{і}\ \ 3)\ \cos\chi = \nu_n\cos\tau + \nu_b\sin\tau \end{aligned}\right\} \ldots (б)$$

Тепер умови рівності (a) матимуть вигляд:

$$X = x + u\lambda_n \cos\tau + u\lambda_\varepsilon \sin\tau$$
$$Y = y + u\mu_n \cos\tau + u\mu_\varepsilon \sin\tau$$
$$Z = z + u\nu_n \cos\tau + u\nu_\varepsilon \sin\tau$$

Спустимо тепер з точки Q пряму на MN і MB й одержимо дві відтинки u прямової: 1) $p = u\cos\tau$ – на головну прямову і 2) $q = u\sin\tau$ – на співпрямову. Тоді попередні рівняння перетворяться в:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + p\lambda_n + q\lambda_\varepsilon \\ Y &= y + p\mu_n + q\mu_\varepsilon \\ Z &= z + p\nu_n + q\nu_\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (b)$$

Це є знелінійні точки евольюти, а полудрівняння (b) можемо бути й рівняннями самої евольюти, коли б ми вилучили вартості p і q так, щоб вони задовольняли тій умові, що прямові даної кривої є дотичними до шуканої кривої (B).

Продиференціюємо через s рівняння (b) й матимемо:

$$\frac{dX}{ds} = \frac{d\lambda}{ds} + p\frac{d\lambda_n}{ds} + \lambda_n\frac{dp}{ds} + q\frac{d\lambda_\varepsilon}{ds} + \lambda_\varepsilon\frac{dq}{ds}$$

$$\frac{dY}{ds} = \mu + p\frac{d\mu_n}{ds} + \mu_n\frac{dp}{ds} + q\frac{d\mu_\varepsilon}{ds} + \mu_\varepsilon\frac{dq}{ds}$$

$$\frac{dZ}{ds} = \nu + p\frac{d\nu_n}{ds} + \nu_n\frac{dp}{ds} + q\frac{d\nu_\varepsilon}{ds} + \nu_\varepsilon\frac{dq}{ds}$$

Але самі вартості $\frac{d\lambda_n}{ds}$, $\frac{d\mu_n}{ds}$ і $\frac{d\nu_n}{ds}$; $\frac{d\lambda_\varepsilon}{ds}$, $\frac{d\mu_\varepsilon}{ds}$ і $\frac{d\nu_\varepsilon}{ds}$ за допомогою $3^{ої}$ пари (96) і $2^{ої}$ пари (95) взорів Френе, матимемо:

$$\frac{dX}{ds} = \lambda - \frac{p\lambda}{\rho} - \frac{p\lambda_b}{r} + \lambda_n \frac{dp}{ds} + \frac{q\lambda_n}{r} + \lambda_b \frac{dq}{ds}$$

$$\frac{dY}{ds} = \mu - \frac{p\mu}{\rho} - \frac{p\mu_b}{r} + \mu_n \frac{dp}{ds} + \frac{q\mu_n}{r} + \mu_b \frac{dq}{ds}$$

$$\frac{dZ}{ds} = \nu - \frac{p\nu}{\rho} - \frac{p\nu_b}{r} + \nu_n \frac{dp}{ds} + \frac{q\nu_n}{r} + \nu_b \frac{dq}{ds}$$

А звідци:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dX}{ds} &= \lambda\left(1-\frac{p}{\rho}\right) + \lambda_n\left(\frac{dp}{ds} + \frac{q}{r}\right) + \lambda_b\left(\frac{dq}{ds} - \frac{p}{r}\right) \\
\frac{dY}{ds} &= \mu\left(1-\frac{p}{\rho}\right) + \mu_n\left(\frac{dp}{ds} + \frac{q}{r}\right) + \mu_b\left(\frac{dq}{ds} - \frac{p}{r}\right) \\
\frac{dZ}{ds} &= \nu\left(1-\frac{p}{\rho}\right) + \nu_n\left(\frac{dp}{ds} + \frac{q}{r}\right) + \nu_b\left(\frac{dq}{ds} - \frac{p}{r}\right)
\end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

Вартости $\frac{dX}{ds}$, $\frac{dY}{ds}$ і $\frac{dZ}{ds}$ як нам відомо (§48 вгір 67) є кутові змінники дотичної до нашої еволюти. І тощі $Q(x, y, z)$. Але згідно визначення еволюти, ця дотична є прямовою MN, що через точку Q переходить, а тому дані кутові змінники мусять бути пропорційні напрямним змінникам заданої прямової MN_1, а саме:

$$\frac{dX}{ds} = m\cos\varphi\,; \quad \frac{dY}{ds} = m\cos\psi\,; \quad \frac{dZ}{ds} = m\cos\chi.$$

де m є сочинник пропорційности. Беручи $m = k.u$ за взором (б) матимемо:

$$\frac{dX}{ds} = ku\cos\varphi = k(u\lambda_n\cos\tau + u\lambda_b\sin\tau) = k(p\lambda_n + q\lambda_b)$$

і аналогічно:

$$\frac{dY}{ds} = k(p\mu_n + q\mu_b)$$

$$\text{і} \quad \frac{dZ}{ds} = k(p\nu_n + q\nu_b)$$

Таким чином з рівности (2) маємо:

$$\lambda\left(1-\frac{k}{\rho}\right)+\lambda_n\left(\frac{dp}{ds}+\frac{q}{r}\right)+\lambda_\theta\left(\frac{dq}{ds}-\frac{p}{r}\right)=\kappa\left(\lambda_n p+\lambda_\theta q\right)$$

$$\mu\left(1-\frac{k}{\rho}\right)+\mu_n\left(\frac{dp}{ds}+\frac{q}{r}\right)+\mu_\theta\left(\frac{dp}{ds}-\frac{p}{r}\right)=\kappa\left(\mu_n p+\mu_\theta q\right)$$

$$\text{i}\quad \nu\left(1-\frac{k}{\rho}\right)+\nu_n\left(\frac{dp}{ds}+\frac{q}{r}\right)+\nu_\theta\left(\frac{dp}{ds}-\frac{p}{r}\right)=\kappa\left(\nu_n p+\nu_\theta q\right)$$

Очевидно, що ці рівності можливі:

1) коли в лівій частині їх співпадає при λ, μ і ν є нулі, себто:

$$1-\frac{k}{\rho}=0 \qquad \text{а звідси:} \quad k=\rho$$

2) коли:

$$\frac{dp}{ds}+\frac{q}{r}=\kappa p \quad \text{і} \quad \frac{dq}{ds}-\frac{p}{r}=\kappa q$$

Себто коли:

$$\frac{\frac{dp}{ds}+\frac{q}{r}}{p}=\frac{\frac{dq}{ds}-\frac{p}{r}}{q}$$

Звідси:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{ds}-\frac{1}{q}\frac{dq}{ds}+\frac{1}{r}\left(\frac{q}{p}+\frac{p}{q}\right)=0$$

Ми знаємо, що $p=n\cos\tau$, а $q=n\sin\tau$, а тому $\frac{q}{p}=\operatorname{tg}\tau$. Отже беручи під увагу, що $\frac{d}{ds}(\lg p)=\frac{1}{p}\frac{dp}{ds}$ і $\frac{d}{ds}(\lg q)=\frac{1}{q}\frac{dq}{ds}$, а тому:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{ds}-\frac{1}{q}\frac{dq}{ds}=\frac{d(\lg p)}{ds}-\frac{d(\lg q)}{ds}=\frac{d}{ds}\left[\lg p-\lg q\right)=\frac{d}{ds}\left(\lg\frac{p}{q}\right)$$

можемо написати:

$$\frac{d}{ds}\left[\lg\operatorname{ctg}\tau\right]+\frac{1}{r}\left(\operatorname{tg}\tau+\operatorname{ctg}\tau\right)=0$$

А звідси переводячи диференціювання, одержимо:

$$-\operatorname{tg}\tau\cdot\frac{1}{\sin^2\tau}\cdot\frac{d\tau}{ds}+\frac{1}{r}\left(\frac{\sec^2\tau}{\operatorname{tg}\tau}\right)=0 \quad \text{або:}$$

$$-\frac{1}{\sin\tau\cdot\cos\tau}\cdot\frac{d\tau}{ds}+\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\tau\cdot\cos\tau}=0$$

Отже:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{r} \quad \text{або:} \quad d\tau = \frac{ds}{r}$$

Маємо також:

$$\tau = \int \frac{ds}{r} + c \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

і нарешті:

$$\varphi = \mu \operatorname{tg} \tau = \rho \operatorname{tg}\left[\int \frac{ds}{r} + c\right]$$

Тому рівняння евольвенти матиме вигляд:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \rho\left[\lambda_n + \lambda_\beta \operatorname{tg}\left(\int \frac{ds}{r} + c\right)\right] \\ Y &= y + \rho\left[\mu_n + \mu_\beta \operatorname{tg}\left(\int \frac{ds}{r} + c\right)\right] \\ Z &= z + \rho\left[\nu_n + \nu_\beta \operatorname{tg}\left(\int \frac{ds}{r} + c\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (129)$$

Як бачимо рівняння евольвенти залежить від довільного значення, а тому кожна крива має цілу родину евольвент.

Вставляючи ці вартості (129) в рівняння (α) і (β) §76 ми переконуємося, що рівняння бінормалі поверхні також задовольняється, а тому можемо твердити, що вся родина евольвент кривої лежить на бінормалі поверхні.

Для обчислення кутів прямової до даної кривої, що є дотичною до її евольвенти користуємося рівностями:

$$\cos\varphi = \lambda_n \cos\tau + \lambda_\beta \sin\tau$$

$$\cos\psi = \mu_n \cos\tau + \mu_\beta \sin\tau$$

$$\cos\chi = \nu_n \cos\tau + \nu_\beta \sin\tau$$

Вставляючи в них знайдену вартість τ, ми одержимо остаточно:

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \lambda_n \cos\left(\int\frac{ds}{r}+c\right)+\lambda_b \sin\left(\int\frac{ds}{r}+c\right)\\ \cos\psi &= \mu_n \cos\left(\int\frac{ds}{r}+c\right)+\mu_b \sin\left(\int\frac{ds}{r}+c\right)\\ \cos\chi &= \nu_n \cos\left(\int\frac{ds}{r}+c\right)+\nu_b \sin\left(\int\frac{ds}{r}+c\right)\end{aligned}\right\}\ldots(130)$$

Із взору (3), що визначає кут між прямовою дотичною до еволюти й головною прямовою до кривої випливає:

1) Що коли нам дано одну з еволют, то ми легко одержимо решту їх через поворот всіх прямових, що дотикаються до еволюти на певний сталий кут.

2) Що геометричний осередок центрів кривини даної кривої загалом не є її еволютою.

§78. Евольвента просторової кривої.

Евольвентою даної просторової кривої звуть криву, що її прямові є дотичними до даної кривої.

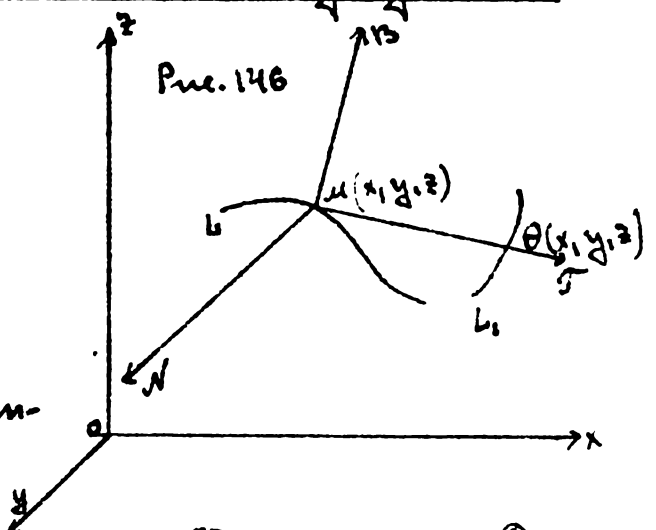


Рис. 146

Хай дана крива буде L (рис. 146). Візьмім на ній точку й поведемо дотичну MT. Припустім, що якась евольвента L_1 кривої переходить через точку $\theta(x,y,z)$ дотичної, так що MT є її прямовою. Означимо віддинок дотичної $M\theta$ через u. Тоді мети u на осях координат будуть:

$$X-x=u\lambda;\quad Y-y=u\mu \text{ і } Z-z=u\nu\ldots(\alpha)$$

де λ, μ і ν є косинуси кутів дотичної MT з коор-

динатними осями. А звідци:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + u\lambda \\ Y &= y + u\mu \\ Z &= z + uv \end{aligned}\right\} \cdots (\beta)$$

Коли вважатимемо X, Y і Z змінними, то очевидно, що рівности (β) можуть бути рівняннями евольвенти, коли ми визначимо u так, щоб задовольнялася умова, що дотична T є прямовою кривої L_1. Для цього продиференцуємо ці рівняння (β) через s і користуючися 1-ою низкою взорів Френе, матимемо:

$$\frac{dX}{ds} = \cancel{\frac{d\lambda}{ds}} + u\frac{d\lambda}{ds} + \lambda\frac{du}{ds} = \lambda\left(1+\frac{du}{ds}\right) + u\frac{\lambda_n}{\rho}$$

аналогічно:

$$\frac{dY}{ds} = \mu\left(1+\frac{du}{ds}\right) + u\frac{\mu_n}{\rho}$$

і

$$\frac{dZ}{ds} = \nu\left(1+\frac{du}{ds}\right) + u\frac{\nu_n}{\rho}$$

Ми одержали кутові змінники дотичної до кривої (β). Коли же ця крива (β) є евольвентою даної кривої, то дотична останньої мусить бути прямовою до згаданої кривої (β), себто мусить бути прямом до її дотичної. Отже треба, щоб виконувалася умова прямовости:

$$\frac{dX}{ds}\cdot\lambda + \frac{dY}{ds}\cdot\mu + \frac{dZ}{ds}\cdot\nu = 0$$

Вставляючи сюди вартости $\frac{dX}{ds}$, $\frac{dY}{ds}$ і $\frac{dZ}{ds}$ ми матимемо:

$$\lambda\left[\lambda\left(1+\frac{du}{ds}\right) + u\frac{\lambda_n}{\rho}\right] + \mu\left[\mu\left(1+\frac{du}{ds}\right) + u\frac{\mu_n}{\rho}\right] + \nu\left[\nu\left(1+\frac{du}{ds}\right) + u\frac{\nu_n}{\rho}\right] = 0$$

або:

$$\left(1+\frac{du}{ds}\right)\left(\overset{1}{\cancel{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}\right)+\frac{u}{\rho}\left(\overset{0}{\cancel{\lambda\lambda_n+\mu\mu_n+\nu\nu_n}}\right)=0$$

Отже:

$$1+\frac{du}{ds}=0 \quad \text{або:} \quad du=-ds$$

А інтегруючи цю рівність одержимо:

$$u=C-s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Таким чином рівняння евольвенти матимуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} X &= x+\lambda(C-s) \\ Y &= y+\mu(C-s) \\ Z &= z+\nu(C-s) \end{aligned}\right\} \ldots (131)$$

З огляду на те, геометричний осередок дотичних до кривої є доторкальна поверхня, то евольвента даної кривої лежать в цій поверхні й перетинають під прямим кутом її творчі.

Очевидно з рівнянь (131), що евольвент є також не одна, а ціла родина, що залежить від вартостей змінника C. Вартість віддалення точки перехрестя дотичної з евольвентою від даної точки кривої M, а саме:

$$u=C-s$$

показує, що маючи одну з евольвент, ми одержимо решту, збільшуючи згадане віддалення (відтинок дотичної) на довільну сталу величину.

§79. Геодезична або тангенціяльна кривина.

Хай на даній поверхні маємо криву L

(рис.147), що переходить через точку $M(x,y,z)$. Хай T - дотична, N_0 - головна нормаль її, $MN(L,M,N)$ - нормаль поверхні; K центр кривини кривої L, а ρ рад кривини. Означимо через Θ нормальний кут, через T_1 - дотичну до поверхні, нормаль до N і T

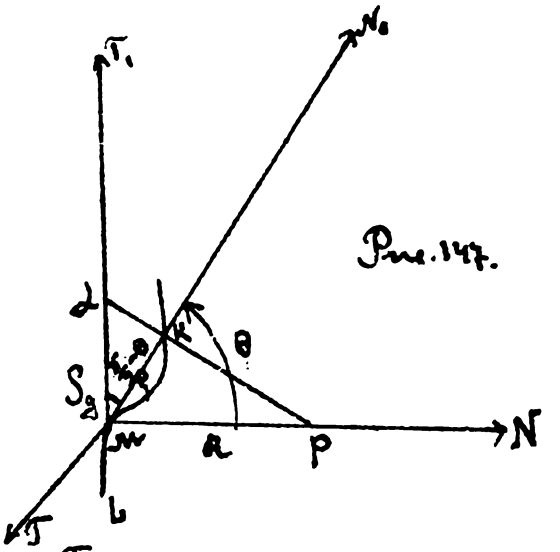


Рис.147.

Зметнемо криву L одночасно на дотичну площу TMT_1 і площу нормального перерізу. Кривину першого лету в точці M звуть геодезичною, або тангенціальною кривиною, кривину другого лету - кривиною нормального перерізу (нормальною кривиною. Центр кривини кривої K також досить лети L - центр геодезичної кривини і P - центр нормальної кривини. Всі три центри лежатимуть на осі кривини LP.

З ΔLKM маємо:

$$MK = \frac{MK}{\sin\Theta} \quad \text{або} \quad S_g = \frac{\rho}{\sin\Theta}$$

А звідси геодезична кривина буде:

$$\frac{1}{S_g} = \frac{\sin\Theta}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots (132)$$

А з ΔMKP маємо:

$$MP = \frac{MK}{\cos\Theta} \quad \text{або} \quad R = \frac{\rho}{\cos\Theta}$$

А звідси:

Нормальна кривина: $\frac{1}{R} = \frac{\cos\Theta}{\rho} \ldots\ldots (107)$

[Теорема Менье §59].

§80. Обчислення лука геодезичної кривини кручення.

Поведемо площу NMT через прямову поверхні N і дотичну T даної кривої. Це як нам відомо буде площею прямового перерізу. Рівняння цієї площі буде:

$$(Mz' - Ny')(X-x) + (Nx' - Lz')(Y-y) + (Ly' - Mx')(Z-z) = 0$$

де L, M і N є напрямні зчинники прямової до поверхні.

[Примітка. Це рівняння (Аналіт. геометрія в просторі §31) можна скласти дивлячись, що проходить через дві просторові перехресні прості T і N]

Дотичні T до поверхні, ми взяли прямово до заданої площі, а тому напрямні зчинники її будуть:

$$\lambda = Mz' - Ny' \;;\; \beta = Nx' - Lz' \text{ і } \gamma = Ly' - Mx' \quad \cdots (1)$$

де x', y', z' є кутові зчинники дотичної T, а тому рівні:

$$x' = \frac{dx}{ds} \;;\; y' = \frac{dy}{ds} \text{ і } z = \frac{dz}{ds}$$

З другого боку головна прямова N_0 має напрямні зчинники (ми криву беремо в функції дуги):

$$\lambda_n = \frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}} \;;\; \mu = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}} \text{ і } \nu_n = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}} \quad \cdots (81, §50)$$

або беручи на увагу, що $\rho = \frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}}$ (90) матимемо:

$$\lambda_n = \rho\frac{d^2x}{ds^2} \qquad \mu_n = \rho\frac{d^2y}{ds^2} \text{ і } \nu_n = \rho\frac{d^2z}{ds^2} \quad \cdots (2)$$

За правилом аналітичної геометрії косинус кута між двома простими є рівний сумі здобутків відповідних напрямних змінників його рамен, а тому:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta = \alpha\lambda_n + \beta\mu_n + \gamma\nu_n$$

Вставляючи ж знайдені вартости $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_n, \mu_n$ і ν_n матимемо:

$$\sin\theta = \rho\left[M\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} - N\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} + N\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} - L\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} + L\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2} - M\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\right]$$

або:

$$\sin\theta = \frac{\rho}{ds^3}\left[L\,dy\,d^2z + M\,dz\,d^2x + N\,dx\,d^2y - N\,dy\,d^2x - M\,dx\,d^2z - L\,dz\,d^2y\right]$$

Отже:

$$\sin\theta = \frac{\rho}{ds^3}\begin{vmatrix} L & dx & d^2x \\ M & dy & d^2y \\ N & dz & d^2z \end{vmatrix}$$

А звідци за взором (132) маємо:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\sin\theta}{\rho} = \frac{1}{ds^3}\begin{vmatrix} L & dx & d^2x \\ M & dy & d^2y \\ N & dz & d^2z \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots (133)$$

або:

$$\rho_g = \frac{ds^3}{\Delta} \quad \text{де } \Delta = \begin{vmatrix} L & dx & d^2x \\ M & dy & d^2y \\ N & dz & d^2z \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots (134)$$

Візьмім точку M_1 досить близьку M і збудуємо до даної поверхні прямову M_1N_1, що матиме напрямними змінниками:

$$L + dL;\ M + dM \ \text{ і } \ N + dN$$

Означимо кут відхилення її від площі MTN через ϑ. Тоді маємо:

$$\vartheta = \left(\widehat{M T_1, M_1 N_1}\right) - \frac{\pi}{2}$$

З аналітичної геометрії маємо:

$$\sin\vartheta = -\cos\left(\widehat{M T_1, M_1 N_1}\right) = -\left[\alpha(L+dL) + \beta(M+dM) + \gamma(N+dN)\right]$$ або:

$$\sin\vartheta = (Ny' - Mz')(L+dL) + (Lz' - Nx')(M+dM) + (Mx' - Ly')(N+dN)$$ або:

$$\sin\vartheta = \cancel{NLy'} - MLz' + LMz' - \cancel{MNx'} + \cancel{NMx'} - \cancel{LNy'} - M\,dL\,z' + N\,dL\,y' - N\,dM\,x' + L\,dM\,z' - L\,dN\,y' + M\,dN\,x'.$$

Отже внаслідок за формулою $\frac{1}{ds}$, маємо:

$$\sin\vartheta = \frac{1}{ds}\left[L\,dM\,dz + M\,dN\,dx + N\,dL\,dy - N\,dM\,dx - M\,dL\,dz - L\,dN\,dy\right]$$

або:

$$\sin\vartheta = \frac{1}{ds}\begin{vmatrix} L & dL & dx \\ M & dM & dy \\ N & dN & dz \end{vmatrix} = \frac{\Delta_1}{ds} \quad \ldots \quad (4)$$

Ми знаємо, що кривизною кривої є: $\lim_{\Delta\ldots 0}\frac{\vartheta}{\Delta S}$, оскільки $\lim_{\vartheta\ldots 0}\frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1$, а тому геодезичне кручення матиме вираження:

$$\frac{1}{r_g} = \lim_{\Delta s\ldots 0}\frac{\vartheta}{\Delta S} = \lim_{ds\to 0}\frac{\sin\vartheta}{ds} = \frac{\Delta_1}{ds^2}$$

або:

$$\frac{1}{r_g} = \frac{1}{ds^2}\begin{vmatrix} L & dL & dx \\ M & dM & dy \\ N & dN & dz \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (135)$$

А звідси:

$$r_g = \frac{ds^2}{\Delta_1} \text{ де } \Delta_1 = \begin{vmatrix} L & dL & dx \\ M & dM & dy \\ N & dN & dz \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (136)$$

Очевидно, що коли крива дотикається одній з головних дотичних ($\vartheta = 0$, або $\vartheta = \frac{\pi}{2}$), то геодезичне кручення є рівне з нулем.

Кінець.

§§	Зміст	Стор.
	Частина I. Розділ I	3
1	Диференцування фун-ій від кількох незалежн.	3
2	Цілий похід " " " "	4
3	Окремі похідні " "	8
4	Окремі похідні вищих порядків кількох незалежників	9
5	Незалежність вислідy від порядку диференц.	10
6	Походи вищих порядків від кількох незалеж.	14
7	" " "	19
8	" " "	20
9	Невизначені функції	20
10	Одновимірні функції.	24
11	Шерег Тайльора	27
12	Розгорнення $f(x)$ з $\sin x$ в шерег.	29
13	" в шерег $f(x) = \cos x$	31
14	" " $f(x) = e^x$	32
15	" " логарифмової функції	34
16	" " ступінів x функцій	38
17	Взори Ейлера для тригонометричних функцій	42
18	Розгорнення неозначенностей за допомогою розгорнення функцій в степенні шереги незалежника	43
19	Шерег Тейльора для функцій кількох незал.	44
20	Maximum і minimum невизначених функцій	47
21	" " визначених функцій від двох незалежників.	49
22	" " "	
23	Умовні maximum і minimum	64
	Розділ II. Диференціяльна геометрія	70
1	Аналітичне рівняння плоскої кривої	70
2	" " простої, кола, еліпси й гиперболи.	73

§3	Дотична до плоскої кривої	76
4	Кут спаду дотичної до кривої на осі координати.	78
5	Нормаль (пряма)	82
6	Кути прямої з осями	83
7	Обчислення величини дотичної кривої	85
8	Крива в бінульових координатах	91
9	Величини дотичностей кривої у бінульових координатах.	93
10	Циссоїда Діокля	95
11	Архімедова спіраль.	97
12	Гіперболічна і логарифмічна спіраль	100
13	Форма кривої (випуклість або вгнутість)	101
14	Дослідження точок перегину, коли рівняння кривої має неявну форму.	109
15	Дослідження форми кривої в бін. координат.	113
16	Загальне розуміння про кривину (луки) кривих	116
17	Кривина плоскої кривої	119
18	Основні прикмети обчислення кривини	123
19	Коло кривини й центр кривини	127
20	Вимірювання луки кривини в бінульових коорд.	129
21	Вимірювання луки кривини через відрізання відповідної дотичної від бінуля	131
22	Евольвента й евольвентна (інволюта)	132
23	Властивості евольвенти	138
24	Огортальні кривих	142
25	Основна властивість огортальних родин кривих	146
26	Інші трактування еволюти	149
27.	Родина кривих від кількох незалежних	150
28	Доторкання кривих	156
29	Геометричне трактування питання про доторканість кривих	158

30	Допарні криві.	165
31	Допарне коло	168
32	Асимптоти кривої	171
33	" " "	177
34	" " "	179
35	" " "	183
36	Асимптоти в бінарних координатах	186
37	Особливі точки	190
38	Вивчення дотичної до алгебричної кривої в даній особливій точці й дослідження останніх.	192
39	Спрощений спосіб аналізи особливих точок	199
40	Дослідження окремих випадків особлив. точок	209
41	Особливі точки трансцендентних кривих	212
42	Про точки перегину	216
43	Дослідження рівняння кривих	223
	Частина II. Розділ I	236
	Просторові криві	"
44	Вивчення кривої в просторі	"
45	Дотична до просторової кривої	237
46	Напрями зіткнення дотичної до просторової кривої (кривої подвійної кривини)	241
47	Прямова (нормальна) площа	243
48	Площа кривини (допарна площа)	244
49	Властивості площі кривини	251
50	Головна прямова (нормаль)	253
51	Спів прямова (бінормаль)	257
52	Кривина просторової кривої	259
53	Кручення кривої	264
54	Взори Френе (Серре)	268
	Розділ II. Поверхні	279
55	Загальні їх рівняння	"

56	Дотична проста й площа до поверхні	281
57	Прямова до поверхні	284
58	Напрямні змінники дотичної площі	285
59	Кривина ліній пристайних до поверхні або так званих поверхньових кривих	288
60	Будування кругів кривини для поверхньових кривих, що переходять через точку M поверхні й мають спільну дотичну	295
61	Кривина прямових перерізів	296
62	Індикатриста Дюпена	300
63	Обчислення головних лучів кривини	306
64	Обчислення головних кривин поверхні: Гаусай Ейлера	311
65	Кривинна лінія	"
66	Огортальні поверхні	315
67	Основна властивість огортальних поверхень	319
68	Огортальна поверхня 2го роду	320
69	Основна властивість огортальної поверхні 2го р.	322
70	Руб повороту	325
71	Основна властивість рубу повороту	328
72	Поверхні розгортання	331
73	Основна властивість поверхень розгортання	339
73a	Родина кривих	343
74	Лінійні поверхні	345
75	Оборотові поверхні	348
76	Доторкальна, випростальна й бігунова поверхні просторової кривої	349
77	Еволюта просторової кривої	355
78	Евольвента " "	361
79	Геодезична або тангенціяльна кривина	363
80	Обчислення луга геодезичної кривини кручення	365
	Зміст	368

Українське Видавниче Товариство

СІЯЧ

1. Проф. др. Я. Ярема. **Вступ до філософії.**
2. Лєкт. др. Гончарів-Гончаренко. **Загальна гігієна.**
3. Проф. С. Русова. **Теорія педаґоґіки на основі психолоґії.**
4. Проф Л. Білецький. **Українська народня поезія.**
5. Лєкт. Ф Гула. **Теорія векторів.**
6. Проф. Є. Іваненко. **Пропедевтика вищого рахунку.**
7. Проф. Є. Іваненко. **Аналітична ґеометрія у просторі.**
8. Лєкт. Д. Чижевський. **Логіка.**
9. Проф. др А. Старков. **Загальна біолоґія.**
10. Лєкт. В. Січинський. **Історія всесвітнього мистецтва.**
11. Лєкт. І. Кабачків. **Політична економія.**
12. Проф. Є. Іваненко. **Алґебрична аналіза.**
13. Проф Є. Іваненко. **Диференціяльне числення.**
14. Лєкт. Д. Чижевський. **Вибір із творів найвизначніщих філософів.**
15. Проф др. Сімович. **Староболгарська граматика.**
16. Проф др. Сімович. **Хрестоматія староболгарського й українського письменства.**
17. Лєкт. Гр. Омельченко. **Вступ до славянознавства.**
18. Проф. С Русова. **Дидактика.**
19. Проф М Лорченко. **Експериментальна фізика.**
20. Лєкт. А. Животко. **Дошкільне виховання.**
21. Лєкт. П Герасименко. **Основи термодинаміки.**
22. Лєкт. др. В Кушнір. **Підручник німецької мови.**
23. Проф. др. Я. Ярема. **Психографія в школі** (Зразок психографічної схеми з коментарем).

Адреса видавництва:
PRAHA-SMÍCHOV, MALATOVA ULICE ČIS. 19. / III.