Ч. 10.

На правах рукопису
[515(02)]

Е. О. Сокович

Інженер шляхів, Доцент Української Господарської Академії в Ч. С.

Нарисна геометрія

1923

м. Подебради
Видання „Видавничого Товариства при Укр. Госп. Академії в Ч. С. Р.“

№10.

На правах рукопису.

[515(02)].

Е. О. Сокович.

Інженер шляхів, Доцент Української Господ. Акад. в Ч. С. Р.

Нарисна геометрія.

Лекції, що викладалися на інжінерному Відділі У. Г. Я. 1922-23 академичного року.

1923.

Подебради
Видання „Вид. Т-ва при Укр. Госп. Ак."

Літографовано 200 примірників.

Зміст.

VI.

Передмова.

Могутній розвиток техніки на Заході викликав широкий розвиток Н. Г.

Нарисна Г. виникла з потреб життя. Конструкція великих будинків, малярство ще з старих часів дали де-які емпиричні правила. Довгий час Н. Г. вважалась галуззю прикладного знання й в університетах не викладалась. Тільки Монж та школа його учнів поставили Н. Г. на цілком науковий грунт і своїми працями значно поширили так зв. простірну Геометрію, або прямо — Нарисну Геометрію.

Що торкається до середніх та вищих шкіл технічних, то, природно, тут Н. Г. займає почесне місце.

Західно-Европейська литература має велику кількість дуже добрих підручників по Н. Г. Вони різняться між собою ни тільки по обєму й меті, але й по самому методу будівлі предмета.

Н. Г. вже давно виділилась в окрему самостійну дисципліну, але у нас в Академії вона мусить відогравати допоможу ролю, хоч немає, правда, майже ні однієї наукової дисципліни, котра нею не користувалась би.

Існує думка, що головне завдання Н. Г. — розвиток сили уявлення, розвиток здібности уявляти собі простірні тіла та конструкції з ними.

Абстрактні уявлння звичайно мають значіння, але це цілком не те, що в першу чергу потрібне техніку.

Н. Г., на мою думку, є той місток, що сполучає теорію з практикою.

Для техника мало абстрактних простих та поверхней, йому потрібні уяви тіл, взаємовідношення цілком означених форм. Він по нарису мусить вміти хутко та ясно уявити собі простірні форми. Напрямок викладів Н. Г. та вправ по ній мусить в першу чергу мати именно це завдання. При вправах, звичайно, бажано оперувати з такими прикладами, котрі потім могли б пригодиться.

За останні часи багато авторів в курсах Н. Г. вводять положення та користуються аналитичною геометрією, диференціалами, теорією функцій і т. д. Де-які автори надзвичайно широко ставлять відділ антиполярности, бо це вживається в Графичній Статиці. Більшість всього цього була уникнута за виключенням, звичайно, таких важних теорем, як Данделе, Польтке та инш.

Як що задаться думкою класифицирувати методи викладів Н. Г. то їх можливо було б поділити на такі головні групи:

1) будує весь предмет в двох проекціях (верт. та горізонтальний), третю вводить тільки в окремих випадках;

2) бажаючи показати широку можливість простірних будівль, не користуються віссю проекцій, а утворюють конструкції без неї;

3) в основу третьої системи кладеться теорія афін, користуються інволюціями, гармонічними відношеннями і инш.

Друга система, на мою думку, дуже цікава в науковому відношенню, особливого значіння не має. Конструкції її складні й в багатьох випадках, в скритий спосіб, приходиться вводити вісь проекцій; будучини вона не має, для техників при обмеженности часу - особливо.

Теорія афін дає надзвичайно прості, красиві рішення багатьох складних задач. Але для того, щоб положити її в основу курсу, потрібно знати добре простірну геометрію або прочитати доповнюючий курс її сторінок на двісті.

Залишається третя - стара Монжова система.

Проекції точки, простої, площі та рішення задач з ними були розрішені при допомозі двох проекцій. Третя проекція була введена тільки для представлення та означення більш зкомплікованих випадків.

Поняття двох площ для людини природне і всі задачі треба рішати, користуючись именно двома площами.

В курсі дається коротке поняття про афінність та показан спосіб будівлі еліпса (проекція кола) при допомозі афінної осі. Дається приклад рішення задачі без вісі проекцій (поворот точки навкруги простої) та инш.

Трасировка звичайних шляхів, залізниць, будівля каналів вимагає доброго розуміння т.з.

проекцій з котами. Уміння збудувати перетинення відкосів, будівля відкосних стіжків – необхідно кожному інженеру,– тому проекціям з котами було уділено окреме місце. Аксонометричним проекціям (як прямовісним, так і нахильним) дано багато місця та приведено багато прикладів, понеже рахую їх надзвичайно користними для щоденного вживання. Приведена теорема Польтке, бо вона дає блискучий приклад, яка безмежно велика кількість може бути утворена просторних конструкцій та які границі ставляться для них. Теорема Польтке має велике значіння для розвитку сили уявлення студента.

При викладах центральних проекцій (теорії перспективи) головною метою було дати найбільш наочно їх головні поняття. Можливість практичного вживання було досягнуто приведенням де-кількох прикладів та описом найкращих пристроїв для викреслення перспективи, коли даються ортогональні проекції.

Теорія тіней приведена в дуже обмежененому виді.

Що торкається до самого складення підручника, то його, на великій скаль, прийшлось вести в формі конспекта. Це, звичайно, утруднює користування ним, але й так він вийшов в розмірі майже 500 сторінок.

В курсі цілком немає нічого про стереографічні проекції. Між тим вони мають значіння при кресленні мап. Але студентам технологам та меліораторам вони не потрібні; для межовиків прийдеться, можливо, викласти доповнюючий курс.

Трудніще всього було з українською термінологією. Що термінів Н. Г. в чистій народній мові не має, це – природно. Виникає питання, як бути, чи переробляти всі терміни на вкраїнську мову, чи залишити їх міжнародними? На мою думку їх слід залишити такими, як вони існують на всіх мовах, бо українізація їх для студентів не користна.

Чому?

Можливість читати математичну книжку на чужій мові – не така вже велика трудність, дякуючи именно цілій низці міжнародних термінів, котрі студентові відомі.

Коли українізувати математичну термінологію, то цим значно утруднюється студентові користування чужоземними джерелами й може назавше прикувати його до професорських літографованих записок.

Рахую приємним обов'язком висловити свою щиру подяку панам студентам Глубковському та Лапчинському, котрі своєю працею значно допомогли виходу цього підручника.

Вступ.

Геометрія складається з планіметрії (геометрії на площі) та стереометрії - частини геометрії, що розгляда тіла в просторі.

Стереометрія займається прикметами та законами простірних складань з вимірами, підрахунками й конструкціями.

Виника питання, чи не можливо простірне тіло накреслити на папері так, щоб його дійсний образ був даний повністю?

Цілком просто цього зробити не можна, бо тіла в просторі мають три виміри, - на папері ж тільки два. От тому то стереометричні конструкції не можуть бути просто представлені на папері за допомогою циркуля та лінійки.

Нарисна геометрія научає як простірні тіла або конструкції в простірності так накреслити на площі /на папері/, щоб із цих нарисів можна було собі уявити як розміри, положення так само й взаємне відношення частин. Таким чином нарисна геометрія має значіння не тільки як допомогове знаряддя техники, але вона має велике значіння для студій простірної геометрії.

Нарисна геометрія має метою, головним чином, вирішення двох, у практиці найчастіших завдань:

1) накреслити технічні приладдя, та так їх представити, щоб з накреслення можна було собі уявити їх величину, вид як цілого так і окремих частин,

2) видуманий технічний прибор спроектувати та так його накреслити, щоб на підставі цього накресленого можливо було його здійснити на фабриці.

Таким чином завдання нарисної геометрії - показати, як предмети простору, по їх величині, образу та положенню представити на площі так вірно, щоб навпаки з цих накреслень можливо було вірно уявити собі первісне тіло, і як ріжні задачі про простірні тіла рішати з допомогою креслення на площі.

Треба сказати, що иноді, як, наприк., в картографії приходиться проектувати не на площу, а на стожкову, стовпову або кулясту поверхність.

Нарисна геометрія є необхідний грунт для багатьох галузів техніки та мистецтва, бо вона дає можливість з будинків, машин, картин, орнаментів, й т. и. робити вірні копії, - з другого боку - для запроектованих (це б-то тих, що ще мають бути здійснені) скласти пляни, на підставі котрих їх можливо виконати. Окрім того нарисна геометрія має значіння й чисто для виховання, бо допомагає розвиткові сили уявлення.

Народження думки про накреслення предметів відноситься ще до перших ступінів людськоі культури. Креслення на підставі геометричних положень ішло рівночасно з розвитком мистецтва та науки. Познаходжувані старі пляни єгипетських будівель, з часів за три тисячеліття до Р.Х, вказують на існування горизонтальних січень з масштабом та складенням прямовісних площин з картинними площинами. Чи при цьому було ясне представлення перпендикулярного нарису, чи це були чисто емпіричні твори — трудно сказати.

В архітектурних творах римського будівника Vitruvius Pollio (за 10 р. до Р.Х.) знаходимо в одному місці навіть призвища горизонтальної та вертикальної проекції, а саме: іконограф та ортограф.

Гіпарх рішає задачу зо сферичної астрономії з допомогою конструкції, де перпендикулярний (Normalis) нарис небесної кулі робиться на площину меридіану й далі складається з горизонтальною площиною.

Середні віки більш 1000 літ не дали майже нічого й тільки ренесанс приніс де-

-який розвиток. У рукописних творах італійського маляра Piero de Franscheschi представлена голова в горизонтальному, вертикальному та боковому виді (без осі проекцій).

Тільки в початку XVIII ст. появився твір Frezier: „La theorie et la pratique de la coup des pierres et des bois;" багато фигур у цім творі робили вказівки тільки на приблизні розуміння про нормальні січення.

За перший чисто науковий твір це треба вважати: Monge. „Géométrie descreptive". (1795 р.). Монж поставив і науково рішив два головних завдання нарисної геометрії; він ввів у науку представлення площини її слідами; він, рішаючи багато задач з віссю проекцій, показав можливість не користуватись нею. Він же ввів означення P_1, P_2, P_3.

Ще Монж називав креслення язиком техників. Як що утримуватися цієї думки, то нарисна геометрія науча як говорити технічно.

Монж дав закони технічного креслення, показав як їх вживати, як ними користуватися.

Із вивчення нарисної геометрії мусить виникнути побічно широкий розвиток сили уявлення. Тому при вивченні нарисної геометрії завше треба старатися представити собі фигури в просторі.

Нарисна геометрія виникла з чисто практичних потреб архітекторів, малярів, будівників. Монж придав їй форму цілком наукової дісціпліни. В її виводах та висновках він (Монж) цілком втручався в чисту геометрію й де-які частини її поширив.

Учні Монжа збудували т. з. „проективну геометрію," представлені котрої висновки знов збогатили цілу країну математики.

На цьому прикладі бачимо, як праця техників допомогла розвиткові чистої науки.

I

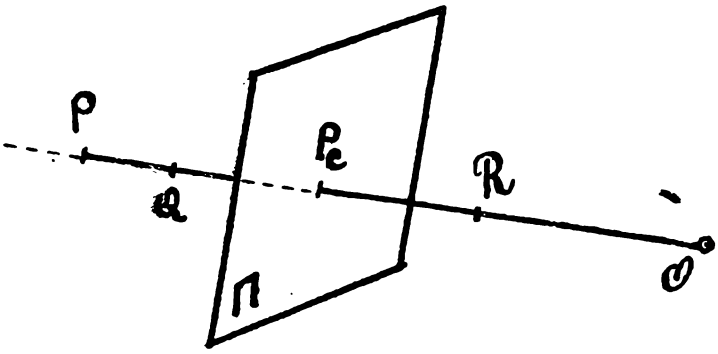
Проекції

Коли з якої-будь точки O, котру назвемо центром проекцій, проведемо проміні до всіх точок якогось тіла Д у просторі, то пересічення цього жмутка промінів з площиною Π (т. з. картинною) дасть фигуру подібну дійсній.

Пряма, протягнута з O до кожної точки тіла Д називається проекціонним промінем.

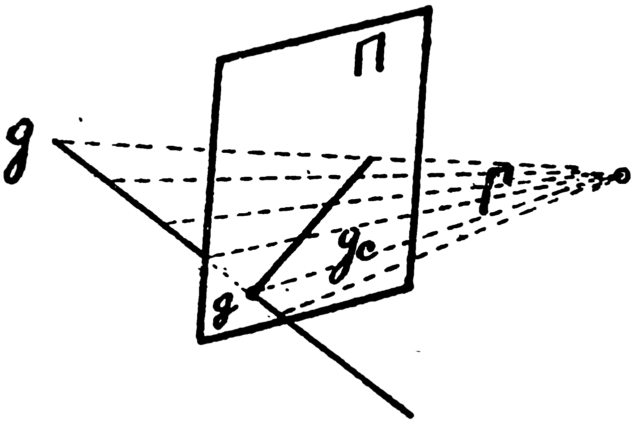
Коли дана якась точка P, то її проекція буде точка P_c - місце пересічення (або слід) проміня PO з площиною Π.

Як що замісць точки P візьмемо точку Q, або R, тієї ж самої прямої, то проекції їх на площінь П буде P_c. (фіг. 1.)



(ф. 1.)

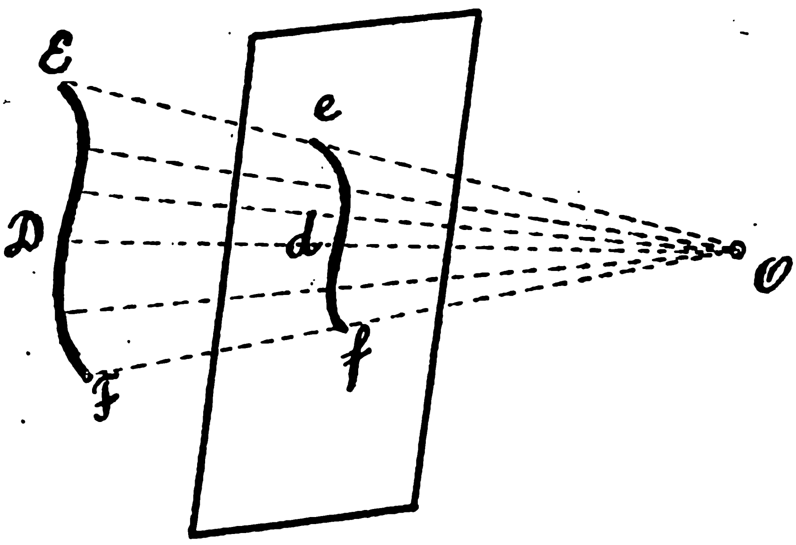
Коли дана пряма g, котра не проходить через центр проекції, - її проекція на площінь П буде пряма g_c - пряма пересічення площини П з площиною Г. Положення цієї площини Г означається самою лінією g та центром проекції O. (ф. 2.)



(ф. 2.)

Коли в просторі дана крива, то й на площині проекції вийде так само крива. (ф. 3).

Коли дано центр проекції O та площину проекції П, то цим самим означається проекція якоїсь фігури, або тіла g. Але, як вже зазначалося, при проекції точки - проекція P_c, власне кажучи, не уявляє собою проекції тільки якоїсь одної точки, а цілої низки, - так само як і при проекції всякої фігури на-рис на площі не є проекція тільки одної якоїсь фігури.



(ф. 3.)

Ріжні роди проекцій.

Центр проекцій може бути взятий у якій завгодно точці простору, тільки не на самій площині проекцій П. В залежности від того, де лежить центр проекцій чи на невеликім віддаленні від площі проекцій П, чи в безконечності, - відріжняють центральні проекції (перспективні), та рівнобіжні проекції /ортогональні/ ⊥, та нахильні /косі/.

Центральні проекції мають велике значіння для малярства, й розвиток їх мусить бути завдячений де-яким артистам епохи ренесансу.

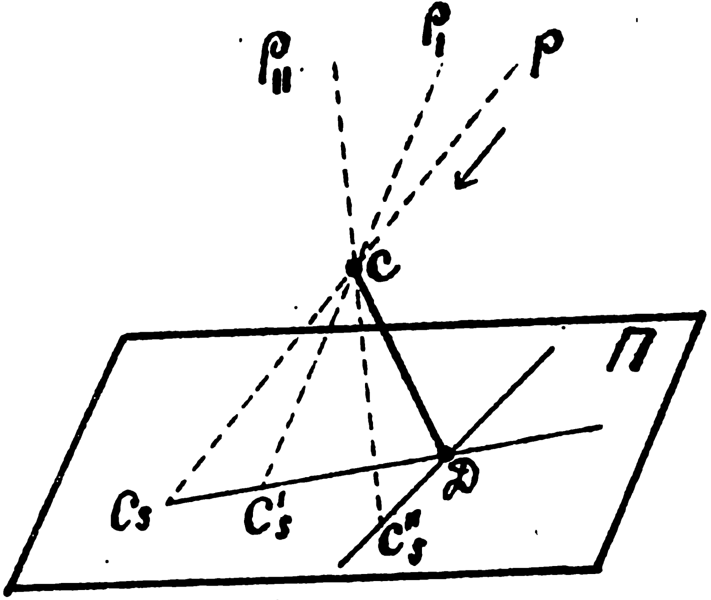
Рівнобіжні проекції, головним чином ортогональні проекції, надзвичайно важні для будівництва, та й взагалі для всеї техніки. Рівнобіжні проекції є частинний випадок центральних проекцій.

Є багато питань по землемiренню, картографії, військовій топографії, інженірному будівництву, геології, гірних розробітках - де мають дуже влучний приклад проекції з висотами окремих точок, та місцевостей. (Kotirende Darstelende Geometrie).

Цей метод давно вже вживавася французьким генеральним штабом, але держався в таємниці. Німці росповсюдили цей спосіб й дуже часто користуються ним:

Напрямок проекціонного проміня.

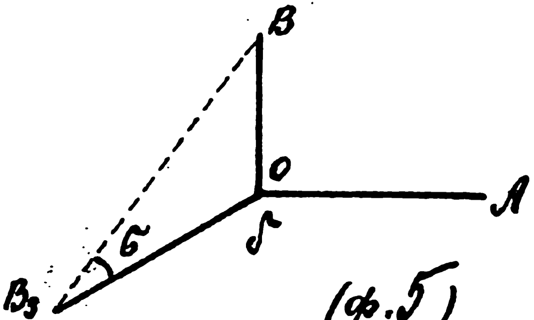
Нехай прямолінійний відрізок CD, котрий точкою D лежить на площі $П$, проектується цілою низкою промінів p, p_1.... (ф. 4.) Довжина та напрямок проекцій залежуть від напрямку проектуючого проміня й міняється зі зміною його. Доки промінь лежить у площі CDC_s проекції CS., CC_s; міняються тільки по своїй довжині, не виходячи з площі CDC_s.



(фіг, 4)

Але коли напрямок проектуючих промінів так зміняється, що проектуюча площа СД зміняє своє положення, ц. т. повернеться біля СД - то повернеться так само проекція СД на площі П навкруги Д. Таким чином, змінюючи напрямок проектуючих промінів, можливо змінять величину та положення проекцій.

Щоб встановити напрямок промінів проекції, та зміни довжини проекції, - вживають такого засобу: прямовісний до площі П відрізок ОВ,(ф.5.) має своєю проекцією OB_s. Тоді в прямокутнім трикутникові BOB_s --- $\frac{OB_s}{OB} = Ctg\sigma = v$.



(ф.5)

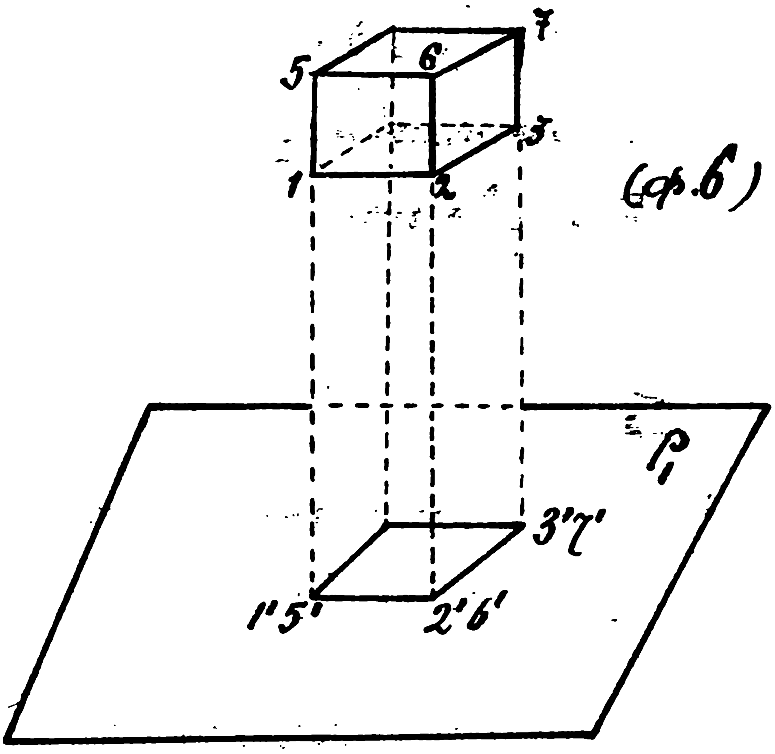
v -- проекційне поменшення, бо v завжди менше одиниці. Щоб напрямок ще легше встановити - проводять через точку О пряму ОА, котра лежить у площі П як основний напрямок та вимірять $\angle\delta$ між нею та OB_s.

Коли дано $\angle\delta$, та проекційне поменшення v, то напрямок проміня проекції цілком означено. Похилі проекції дуже доцільні для швидкого та наочного представлення комплікованих стереометричних фігур. Тому вони дуже часто прикладаються в кристалографії для нарису кристалів, при чім $v = 1/3$.

Ортогональні проекції.

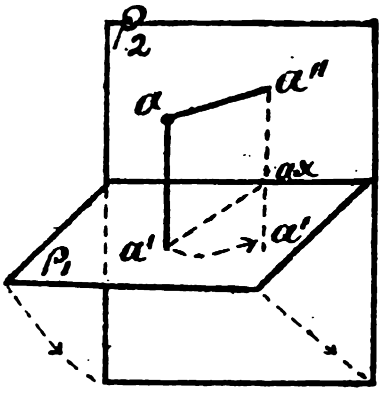
Коли з кожної точки якогось тіла спустити перпендікуляри на площу, то сполучивши відповідні точки в цій площі - одержимо представлене тіло. Але з одної цеї проекції неможливо навпаки одержати проміри та взаємовідношення між ріжними частинами тіла.

Квадрати, котрі рівнобіжні до площі проекції, проектуються на неї як прямокутники. Але такий прямокутник може представляти собою яку хочете кількість рівнобіжних квадратів. Така проекція може бути: проекцією куба з якою завгодно висотою. Таким чином потрібно, щоб виявити височину проектуємого тіла, спроектувати його ще на другу площу. Цю другу площу звичайно ставлять перпендикулярно до першої, і позаяк першу беруть горизонтальною — то друга буде вертикальна. Лінію пересічення між ними будемо називати віссю проекцій x. Горизонтальну проекцію означимо через P_1 вертикальну через P_2.

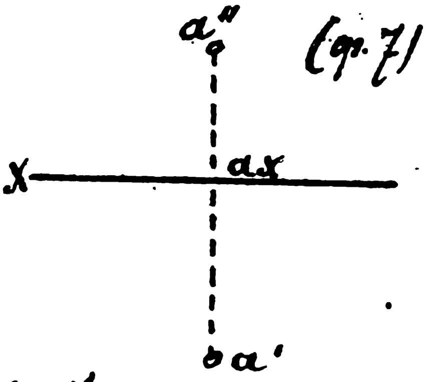


(ф.6)

Нехай дано якусь точку $\underline{a}$ в просторі, котру треба спроектувати на площину P_1 та P_2. Для цього спускаємо перпен



(ф.7.)

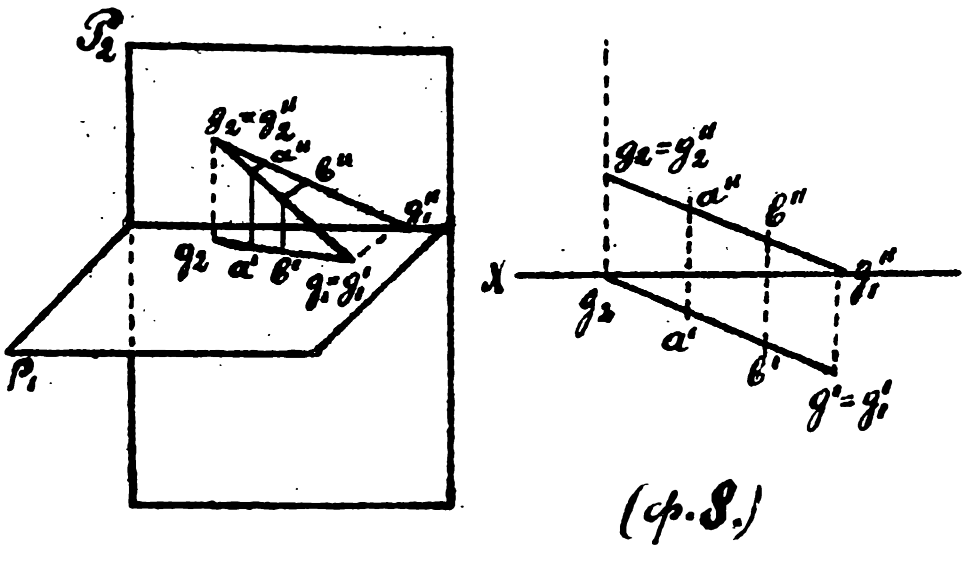


(ф.7)

дікуляри на горизонтальну (P_1) та вертикальну (P_2) площини. Площа $a''a\,a'$ буде перпендікулярна до горизонтальної (P_1) та вертикальної й значить $a''a_x$ та a, a_x будуть перпендікулярні до вісі X. Складаючи площу P_1 з P_2, в напрямку як показані стрілками, $a_x a'$ буде продовженням $a''a_x$, з цього виникає дуже важне положення: <u>горизонтальна та вертикальна проекції всякої точки лежать на простій, перпендікулярній до вісі проекцій X.</u>

Коли дано дві проекції якоїсь точки, то положення точки в просторі може бути означено так: Повертають площу P_1 в її первісне положення, з точки a' ставлять перпендікуляр до P_1 та роблять його рівним $a_x a''$ - тоді кінець цього перпендікуляру й буде точка <u>a</u>. Або з точки a'' становимо $\perp$ до P_2, - точка перехрещування дасть точку <u>a</u>.

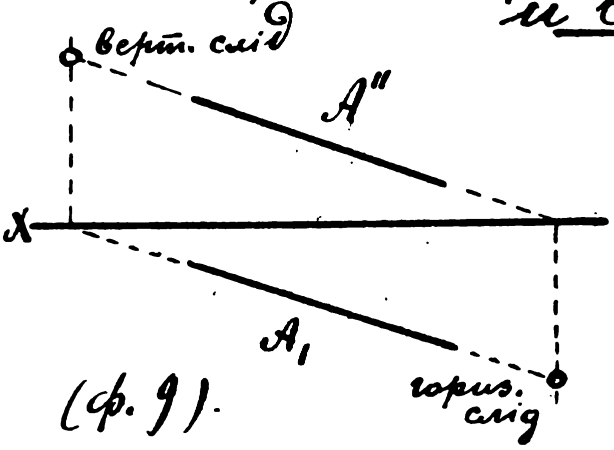
Представлення простої.



(ф.8.)

Проекція якоїсь лінії буде складатися з проекцій і окремих точок. Щоб збудувати їх треба робити так, як це робилося для окремої точки. Між усіма точколи найбільше значення мають т.з. „сліди“ (точка зустрічі лінії з площею) — вертикальні та горизонтальні. Горизонтальний слід знаходиться в точці пересічення даної простої з її горизонтальною проекцією. Вертикальний слід є точка пересічення вертикальної проекції з самою прямою.

Дано проекції простої, треба означити її сліди.

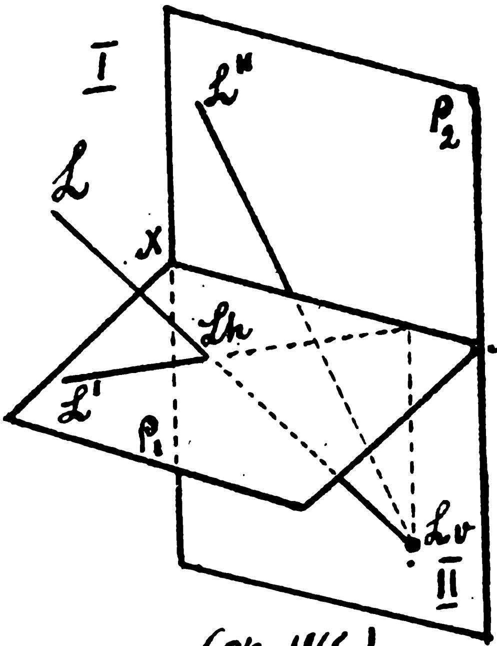


(ф. 9).

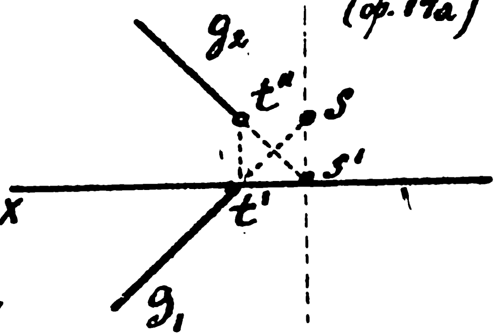
Горизонтальний слід (фіг. 9) лежить на горизонтальній проекції простої — вертикальна проекція цього сліда мусить лежати на вісі проекцій, раз точка лежить на горизонтальній площині проекцій. Звідси виника конструкція: продовжуємо вертикальну проекцію до перехрещення з віссю проекцій і з цієї точки ставимо перпендикуляр до вісі проекцій. Точка його перехрещення з горизонтальною проекцією дасть горизонтальний слід.

Щоб одержати вертикальний слід — продовжуємо горизонтальну проекцію аж доки вона не пересіче вісь проекції; з цієї точки ставимо ⊥ до перехрещення з вертикальною проекцією лінії; ця точка й буде вертикальною проекцією.

Коли проста рівнобіжна до горизонтальної площі, то горизонтальний її слід лежить десь у безмежності. (фіг. 10а,б). Теж до простої, рівнобіжної вертикальній площі, її вертикальний слід



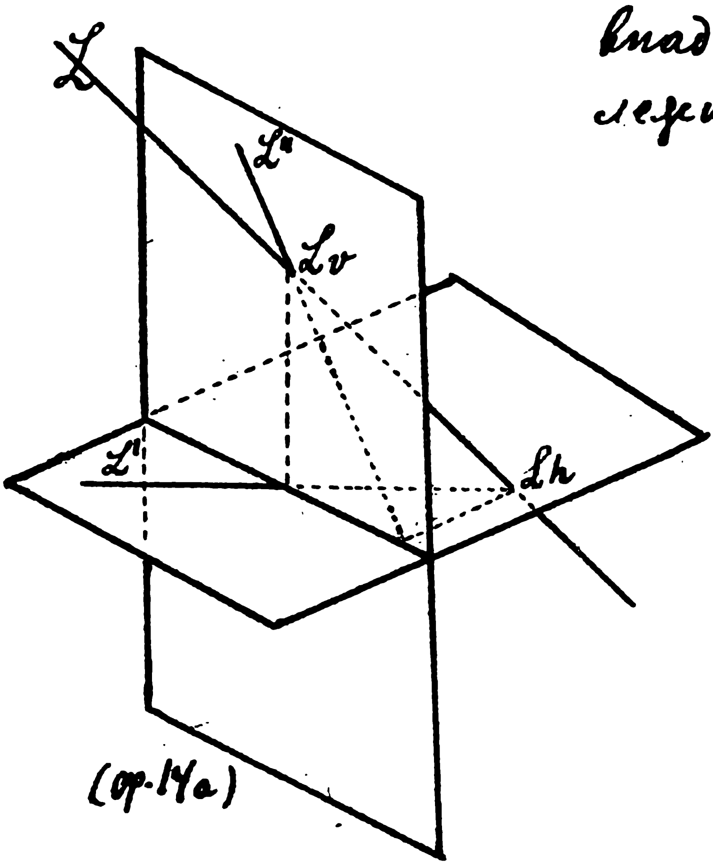
(ф. 14б.)



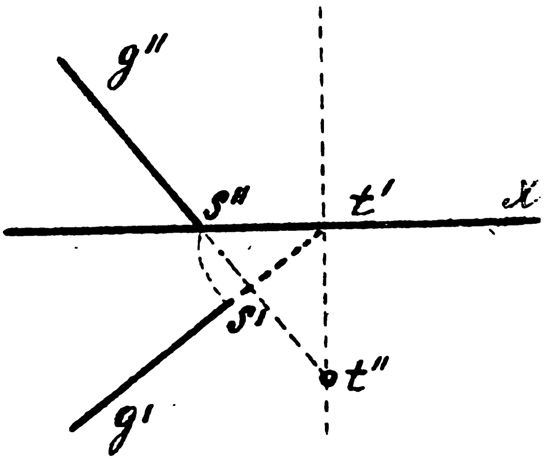
(ф.14а)

Десь у безконечності. Коли проста (фіг.11) лежить у одній або в другій площі проекцій, то пряма проектується на відповідну площу, а слід її лежить на осі проекцій.

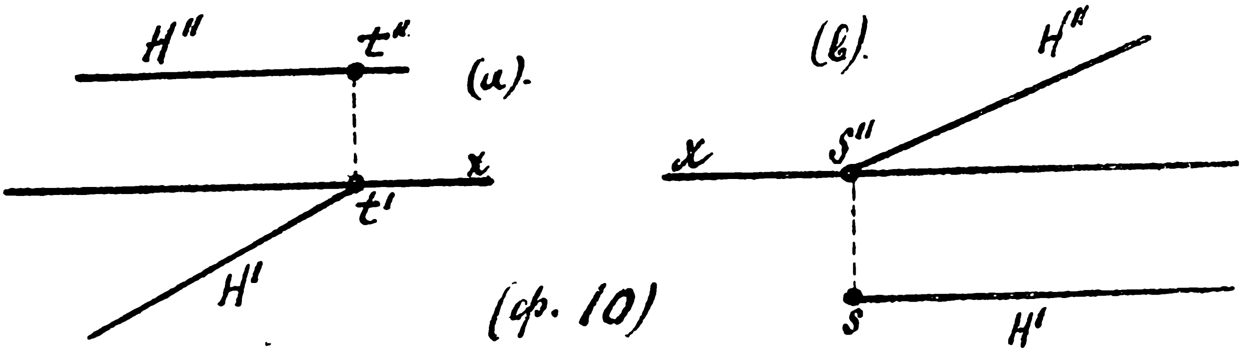
Коли пряма пересікає вісь проекцій, то сліди совпадають у одній точці, що лежить на вісі проекцій (фіг.12



(ф.14а)

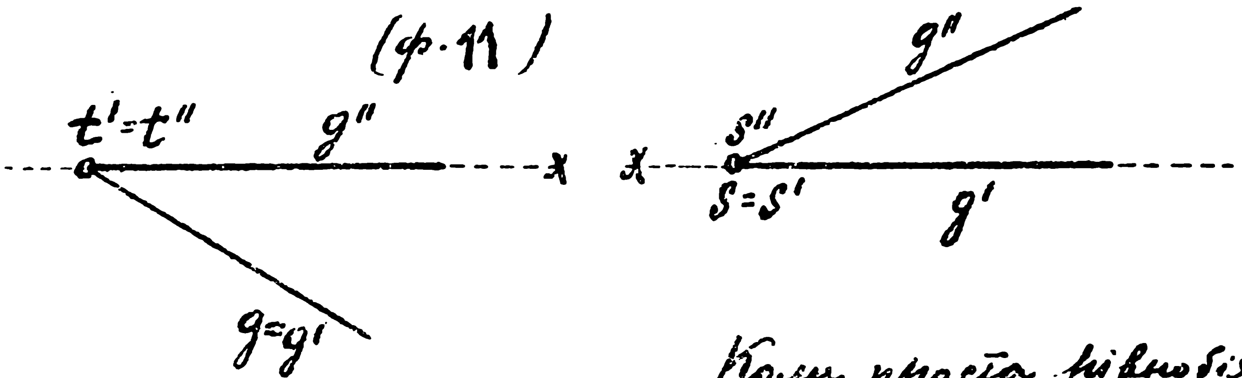


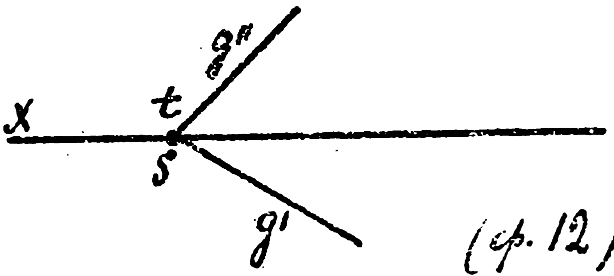
(фіг. 14в)



(ф. 10)

(ф.11)

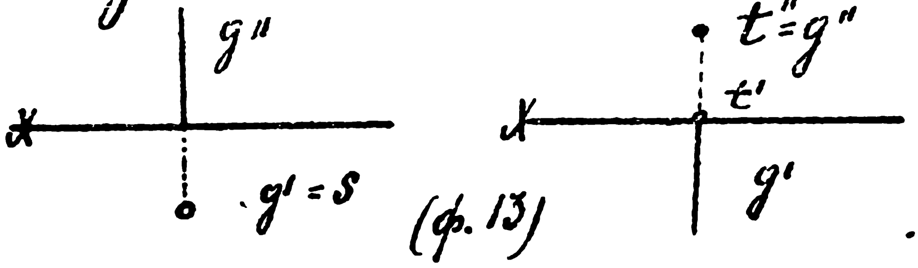




Коли проста рівнобіжна до вісі проекцій - слідів неможливо опреділити, бо вони лежать у безконечнім віддаленні.

(ф.12)

Коли пряма перпендикулярна до горизонтальної (фіг.13) (зглядно вертикальної, то її слід на горизонтальний (зглядно вертикальній) буде точка g' = S.

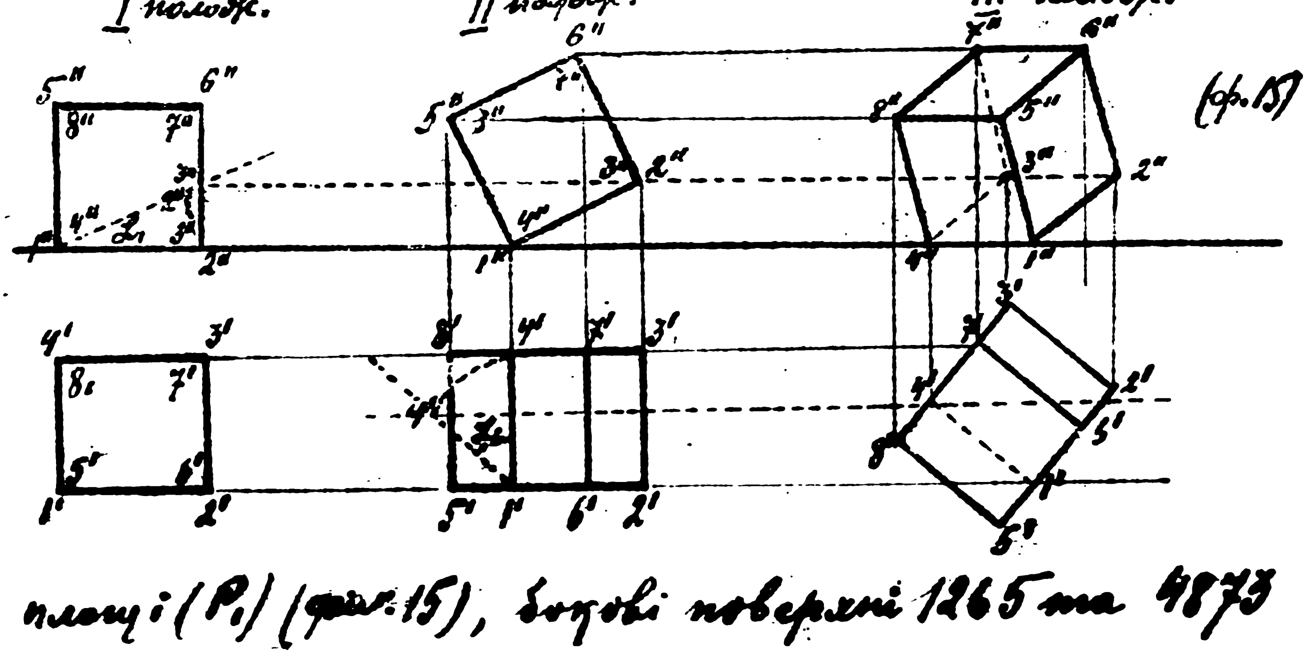


(ф.13)

Проекції простих фігур.

Сконструювати проекції куба в трьох ріжних положеннях відносно площин проекцій.

Нехай основа 1234 лежить у горизонтальній



площі (P₁) (фіг.15), бокові поверхні 1265 та 4873 рівнобіжні до вертикальної (P_2) площі. Тоді горизонтальна проекція (1) є квадрат, та вертикальна (друга) є так само квадрат.

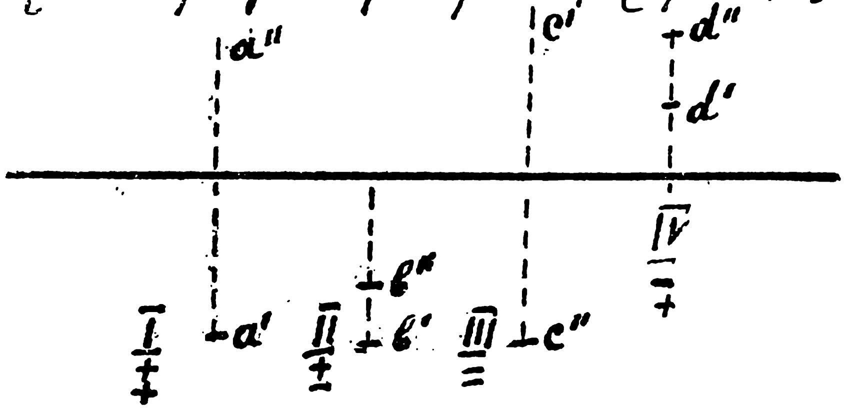
Повертаємо куб біля канта 14 так, що основа 1234 з горизонтальною площею проекцій (P_1) складе кут α_1; вертикальна проекція не зміниться в своєму образі - зміниться тільки її положення відносно осі, а саме 1''2'' складає з віссю $\angle \alpha_1$. З нового положення вертикальної проекції легко одержати горизонтальну. З цього положення біля кута 1' так повертаємо куб, щоб $\angle \alpha_1$ нахилу до площі P_1 залишався той самий, а кант 14 в площі P_1 двигався, доки зі старим положенням він зробить $\angle \alpha_2$. Горизонтальна проекція по суті не зміняється; вона змінить тільки своє положення відносно осі проекцій. Для одержання вертикальної проекції робимо так: опускаємо перпендикуляр на вісь проекцій, продовжуємо його й від осі відкладаємо віддалення точки 5'' з другого положення й т. д.

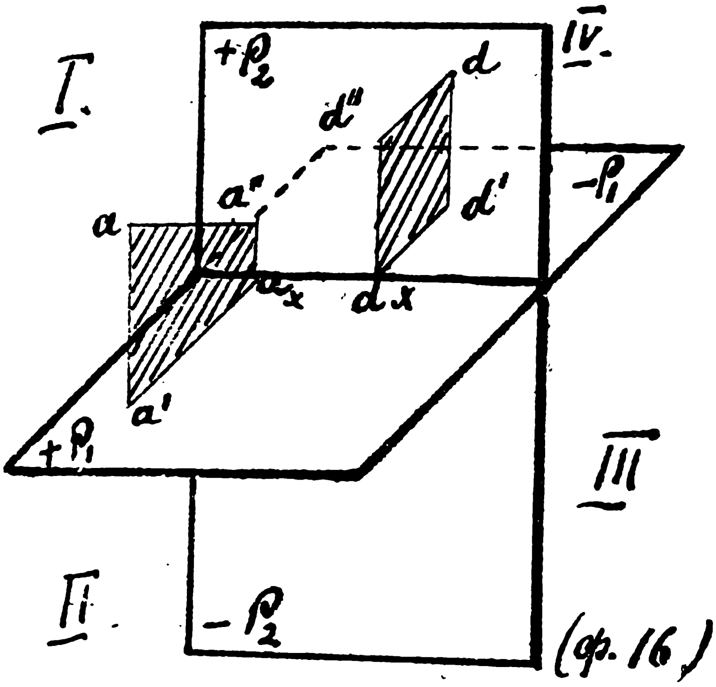
Положення точки в ріжних кутах площин проекцій.

Коли роздивлятися як проектується точка на горизонтальну (P_1) та вертикальну (P_2) площу проекцій, то розглядаємо для простоти один кут. Отже площі P_1 та P_2 можуть бути продовжені, й у просторі складеться чотири кути. В кожному з них може лежати точка. Щоб розібратися в якому саме куті лежить точка, умовимося передню частину площини

P_1 (котра лежить перед площею P_2) вважати за позитивну (+); задню частину - за негативну. Частину площі P_2, котра лежить над P_1, будемо вважати за позитивну; частину, що лежить під площею P_1 - за негативну. Самі кути означимо через I, II, III, IV. Порядок означення можна вибрати по своєму бажанню, але раз вибравши їх - треба й триматися їх.

Склавши площу P_1 з P_2, одержуємо проекції в різних кутах (фіг. 16).





(ф. 16)

Представлення площі.

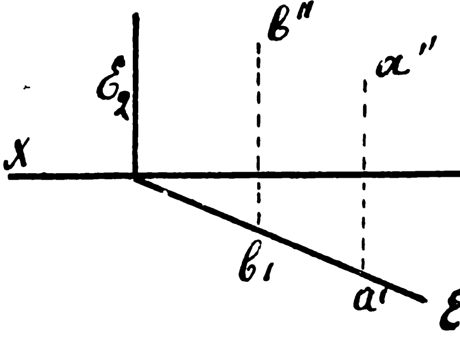
Положення площі опреділяється: 1) або двома простими, 2) або трьома точками, що не лежать на одній простій.

Звичайно положення площі уявляється пересіченням и з площами проекцій: цебто $E_1 = E \times P_1$; $E_2 = E \times P_2$. Цих два прямих сліди площі й перетинаються на вісі X. у точці e_x.

Особливі положення її відносно площ проекцій:

a) коли площа E рівнобіжна до P_1, то її вертикальна проекція рівнобіжна вісі X;

в) коли E перпендикулярна до P_1, то вертикальна проекція перпендікулярна до вісі X, і всі проекції точок, що лежать у площі, падають на E_1 (фіг.17);

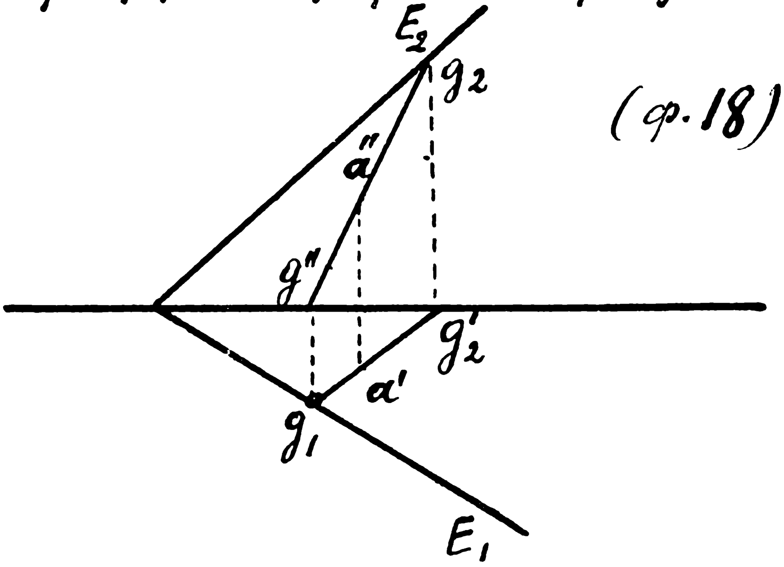


(ф.17)

c) коли площа E рівнобіжна до вісі X, то обидва її сліди рівнобіжні до вісі X.

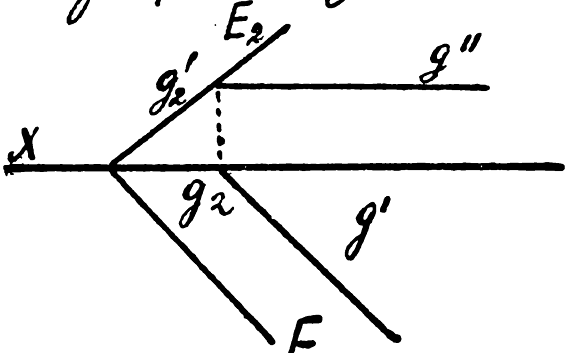
Коли якась точка лежить на простій то її проекції лежать на відповідних проекціях простої й навпаки.

Коли проекції якоїсь точки лежать на відповідних проекціях простої, то сама точка в просторі лежить на простій.



(ф.18)

Коли проста g лежить у площі E, то вона мусить пересікати сліди площі, й точки цих пересічень ($g_1 g_2$) одночасно є сліди простої; таким чином виника положення: коли проста лежить на площі, то сліди простої лежать на відповідних слідах площі.



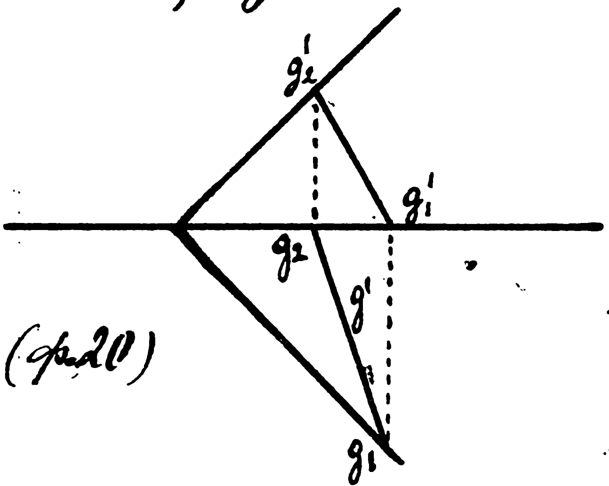
(ф. 19).

Як що проста g, котра лежить у площі E, рівнобіжна до P_1 (фіг.19), то її горизонтальна проекція рівнобіжна E, а вертикальна проекція рівнобіжна х. Така пряма має велике значіння при дальших викладах і наз. головною простою.

Задачі, що відносяться до простих на площі.

Дано горизонтальну проекцію простої g, що лежить у площі E; треба знайти її вертикальну проекцію (фіґ.20)

Горизонтальна проекція лінії пересікає горизонтальний слід площі E_1 в точці g_1 і вісь х у точці g_2. Слід g_1 лежить на горизонтальній площі й тому вертикальна проекція точки g_1 лежить на вісі х (g_1'). Продовжуючи g_1 до перехрещення з віссю проекцій х, одержуємо точку g_2 - горизонтальну проекцію вертикального сліду g_2'; поставивши перпендикуляр до вісі х, одержуємо вертикальну проекцію; сполучивши точку g_2' з g_1', одержуємо вертикальну проекцію лінії g.



(фіг.20)

Дано площу та горизонтальну проекцію a' точки, що лежать на ній. Знайти вертикальну проекцію a''.

Через a' проводимо горизонтальну проекцію g' якоїсь лінії, котра лежить у площі E й креслимо g''; проводимо перпендикуляр до вісі х з a' й таким чином на перехресті з g'' маємо a''.

Дано дві прості, що перетинаються; знайдемо сліди площі, в котрій вони лежать:

а) прості g й L лежать довільно.

Определяємо окремо горизонтальні сліди та окремо вертикальні сліди цих простих. Сполучення відповідних слідів дає відповідний слід площі.

в) Проста g рівнобіжна P$_1$; L перетина P$_1$ та P$_2$.

c) " " g " " " P$_1$; L рівнобіжна P$_2$

d) g || L || x.

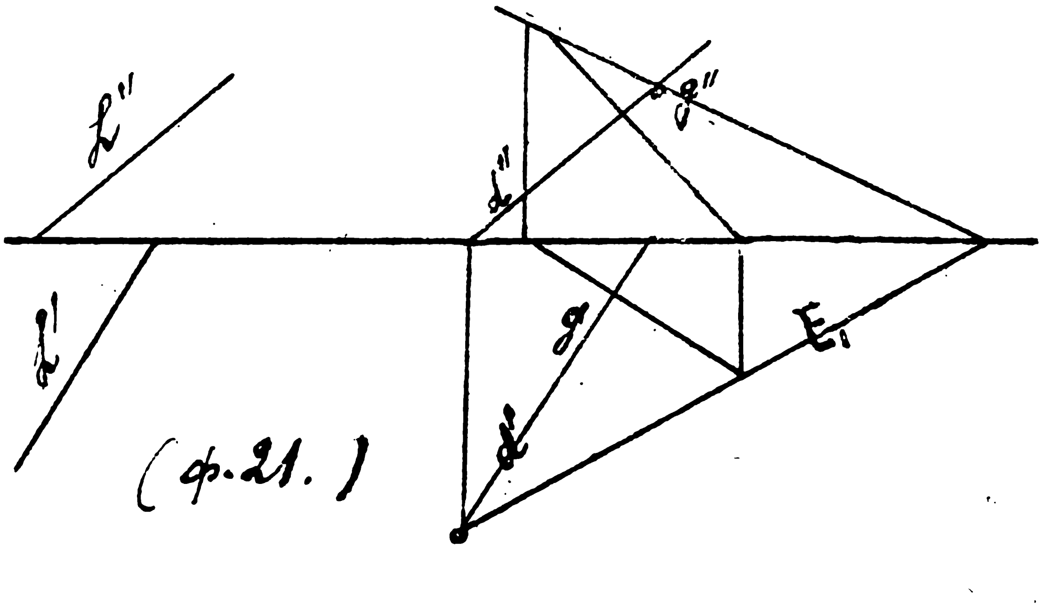
/ Як би при означенні слідів g та , виявилося, що їх сліди лежать за межами нариса, - їх підміняємо двома простими S та T, котрі давали б краще пересічення. Всі чотори прямих лежать у одній площі.

Через точку a провести площу, рівнобіжну двом простим g та L.

Проводимо через точку a прості рівнобіжні даним; через них проводимо площу, котра й буде потрібною.

Через просту g (фіг.21) провести площу, рівнобіжну до простої L.

Через якусь довільну точку, що лежить на простій g, проводимо рівнобіжно L просту D. Через просту D та g проводимо пло-

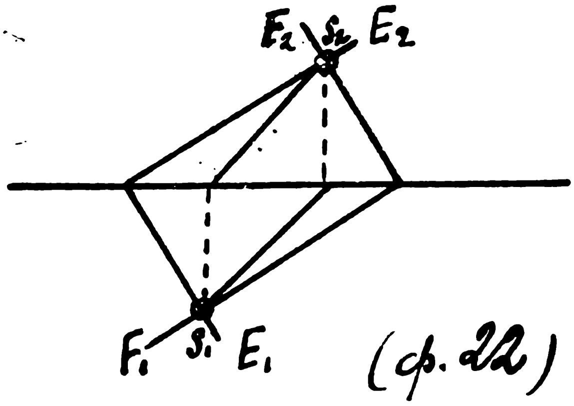


(ф.21.)

щу E, котра й буде відповідать вимогам.

Перетинання простих та площ.

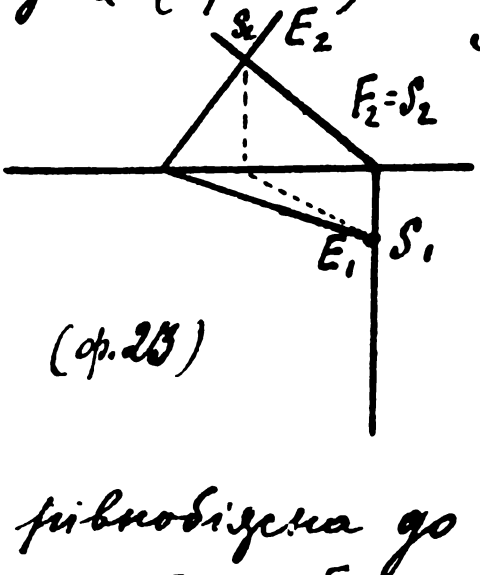
Знайти просту перетинання S ($S'S''$) площі E (E_1 E_2) та площі F (F_1 F_2). (фіг.22).



(ф. 22)

Дано дві площі, котрі довільно нахилені до площ проекцій. Позаяк лінія пересічення S лежить одночасно на обох площинах, то й вертикальний слід $S_2' = E_2 \times F_2$, а горизонт. $S_1 = E_1 \times F_1$; по цих слідах ставимо саме пересічення.

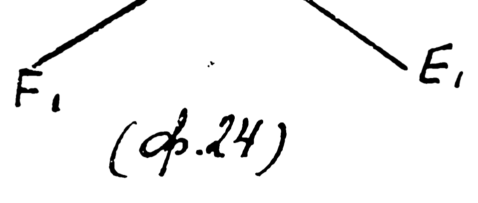
Коли одна з площ F_2 буде $\perp$ до P_2, то вертикальний слід перетинання (S'') совпаде з F_2 (фіг.23).



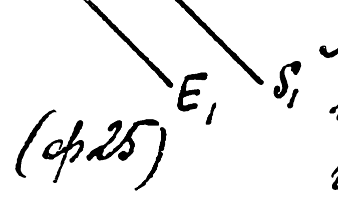
(ф.23)

Якщо обидві площі будуть перпендікулярні до P_1, то лінія їх перетинання буде так само перпендікулярною до площі P_1 (фіг. 24).

Коли площа F рівнобіжна до P_1, то проста січення рівнобіжна до P_1. (фіг.25).

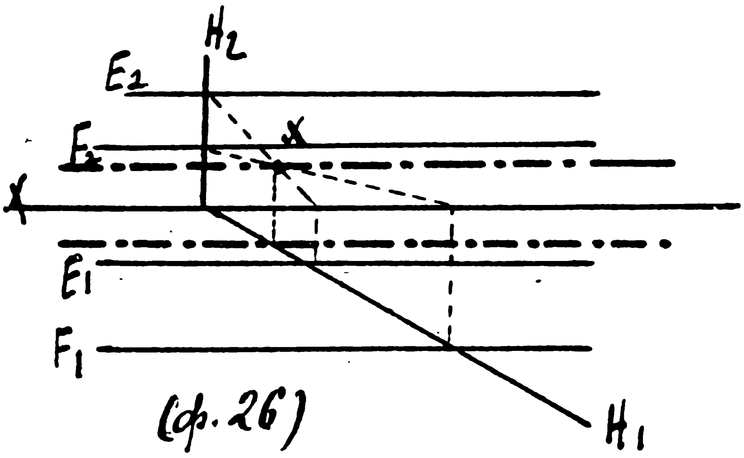


(ф.24)



(ф.25)

Коли обидві площі E та F рівнобіжні до X (фіг. 26), то й їх січення буде так само рівнобіжне до X; щоб означити його, треба взяти якусь помічну площу H, що перетинає обидві площі. Прості перетинання $H_x E$ та $H_x F$ лежать у площі H і мусять таким чином перетинатися. Точка їх перетинання лежить як у площі E так і в площі F.

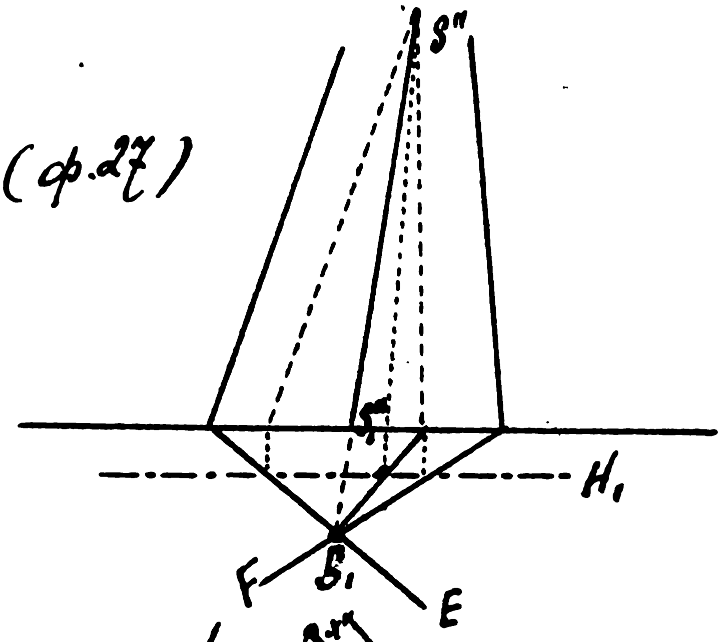


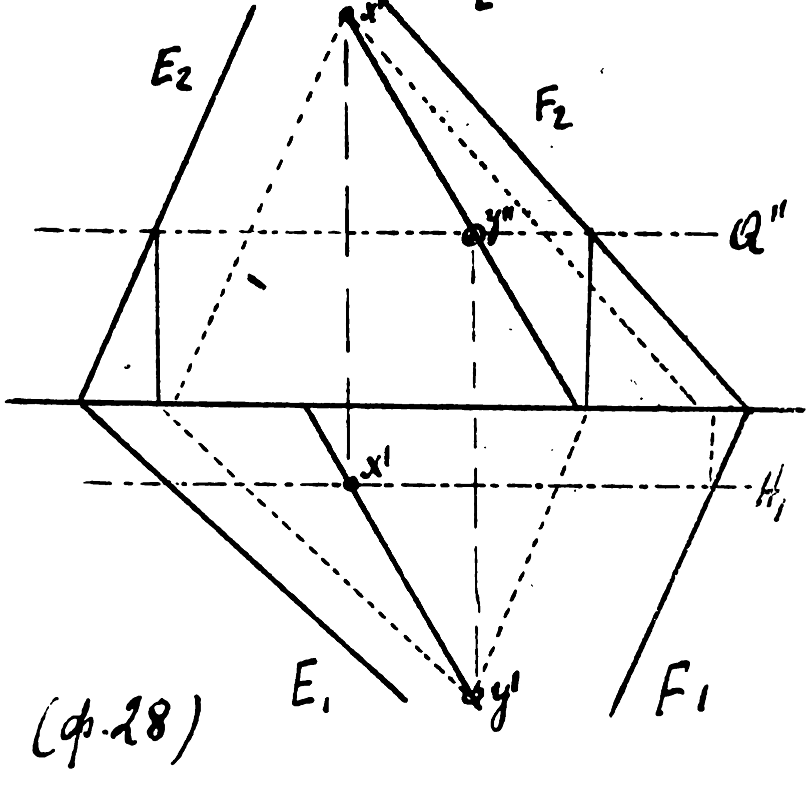
(ф.26)

Коли вертикальні сліди площ не перетинаються в межах нарису (фіг.27) й мається тільки точка перетинання горизонтальних слідів $S = E \times F (S_1)$, то, щоб одержати другу, вводять допоможну площу H, рівнобіжну до P_2.

Зрозуміло, що такий самий засіб вживають, коли в межах креслення нема ані одного сліду. Тоді тільки треба брати дві допоможні площі (фіг. 28)

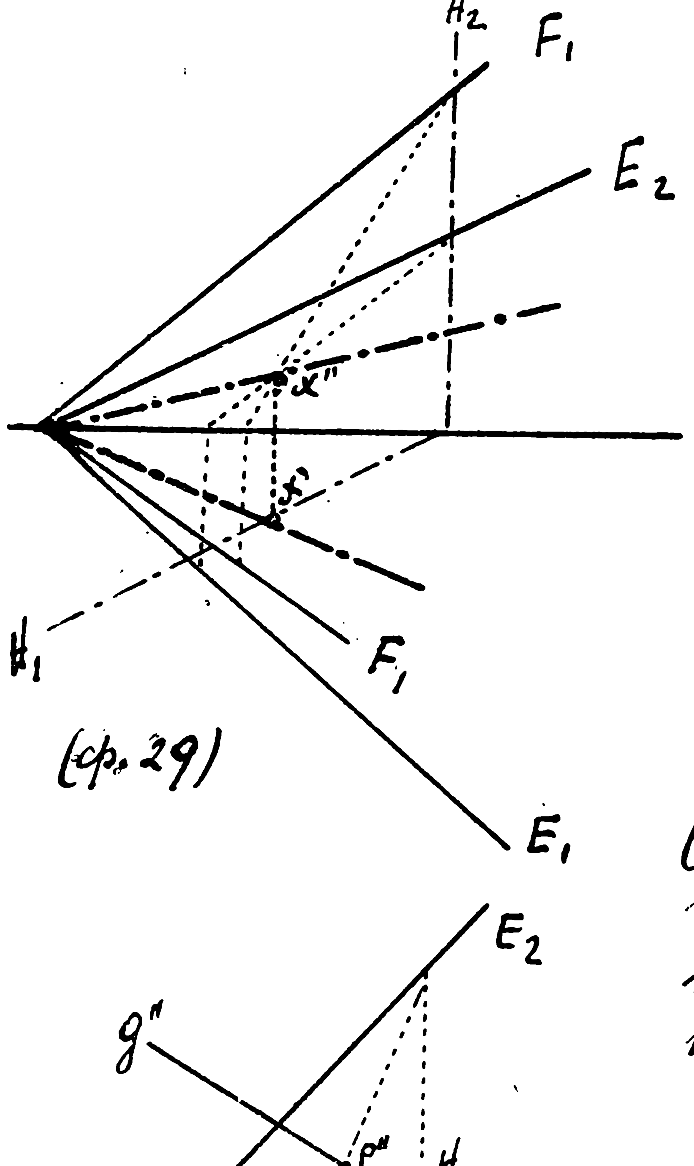
(ф.27)





(ф.28)

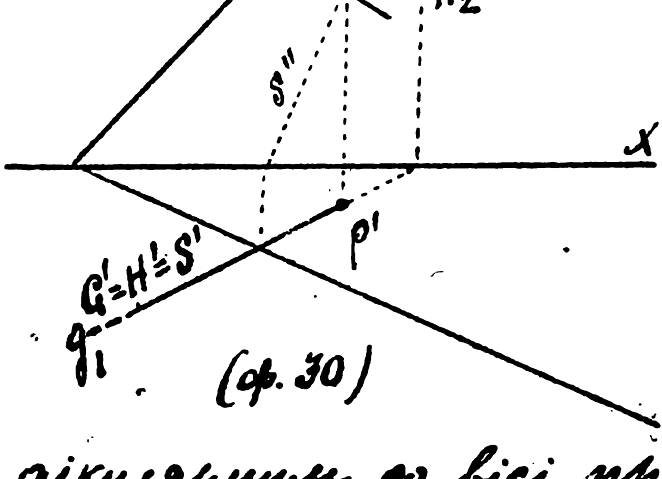
Коли обидві площі мають загальну точку на вісі (точку перетинання), то очевидно лінія перетинання проходить через цю точку. Треба ще означити другу. Для цього перетинаємо сліди цих площ площиною перпендікулярною до горизонтальної площі проекцій P_1 (фіг. 29). Означаємо прості перетинання з кожною з них. Точка перетинання цих простих буде другою точкою перетинання даних площ.



(ф. 29)

Означити точку перетинання простої g з площею E (E_1 E_2).

Потрібна точка p (p'p'') мусить лежати на простій перетинання площі E та допоміжної площі H, що має в собі лінію g (фіг. 30).

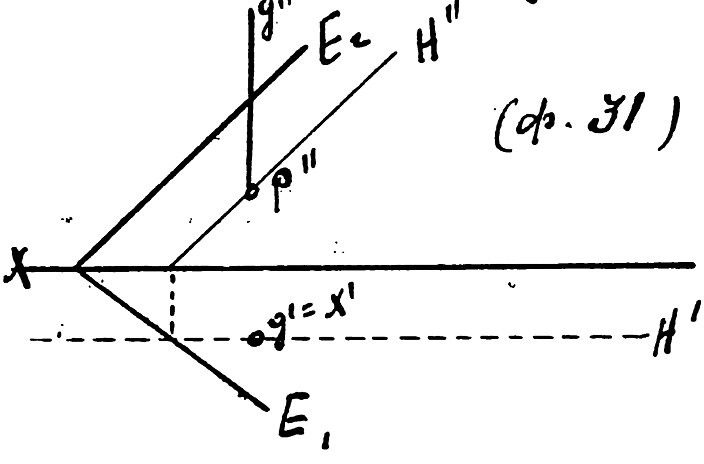


(ф. 30)

Для простоти конструкції через g проводимо площу H так, щоб вона була перпендікулярною до площі P_1. Тоді вертікальний слід буде перпендікулярним до вісі проекцій X, а горизонтальний пристає з g', з котрим пристає й s'

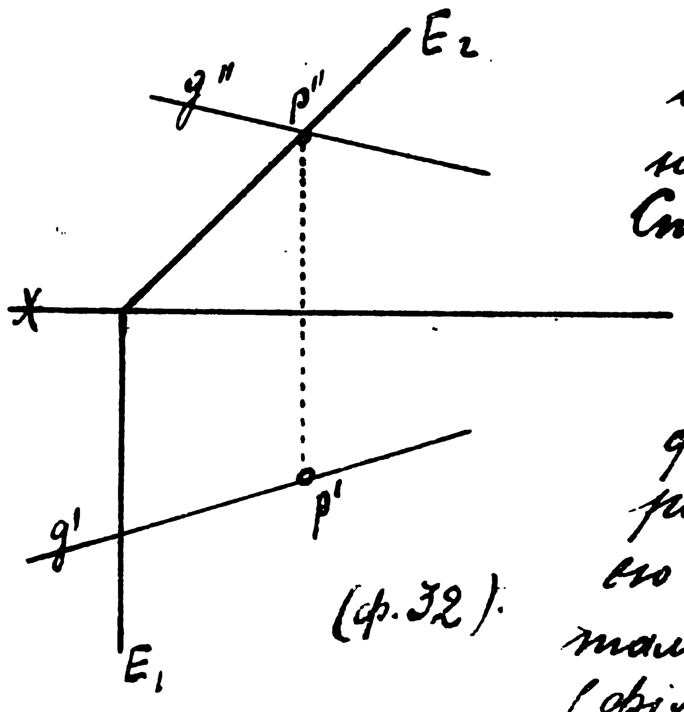
$(g' = H' = s')$. Точку перетинання горизонтальних слідів проектуємо на вісь X і, сполучивши її з точкою перетинання вертикальних слідів, одержуємо вертикальну проекцію простої перетинання цих двох площ. Точка перетинання вертикальної проекції простої g (g'') з вертикальною проекцією s'' дає вертикальну проекцію перетинання простої g з площею E. Щоб одержати горизонтальну проекцію, досить спустити перпендикуляр з неї на вісь X та продовжити його до перетинання з горизонтальною проекцією лінії g.

Коли проста g буде перпендикулярна до P_1, то беремо допоможну площу (фіг. 31.) рівнобіжну до P_2.



(ф. 31)

Коли сама площа E буде перпендикул. до P_2, то вертикальна проекція точки перетинання p' мусить бути на E_2 (фіг. 32), ц. т. на перетинанні $E_2 \times g_2 = X''$. Спустивши з неї на вісь X перпендикуляр, та продовживши його до перетинання з горизонтальною проекцією g' одержуємо горизонтальну проекцію точки p. (фіг. 32).



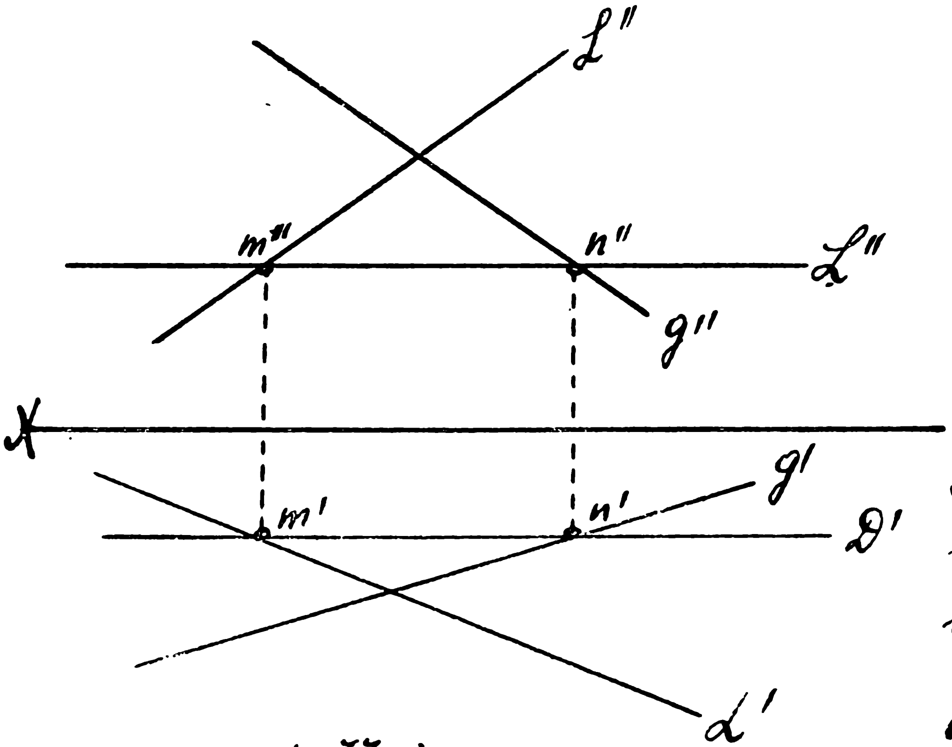
(ф. 32)

Представлення площі як обмеженої фігури.

Ті фігури, з котрими приходиться оперувати, по більшости обмежені або простими, або кривими лініями, ц. т. уявляють із себе такі фігури (трикутники, кола, многокутники, тощо) Коли площа дається двома перехрещеними лініями, то зараз же можемо определити її сліди. Але при рішенні багатьох задач цього можна уникнути.

Задачі.

Дано горизонтальну проекцію простої D (фіг. 33) що лежить у площі E (gL); треба означити її вертикальну проекцію.



(ф. 33)

Позаяк пряма D мусить пересікати обидві прості g та L, то $m' = (D'L')$; $n' = (D'g')$. Одночасно з цим вертикальні проекції цих точок мусять лежати на вертикальних проекціях відповідних простих. Ставимо перпендикуляри до вісі X з точок m' та n', продовжуємо їх до пересічення з відповідними вертикальними.

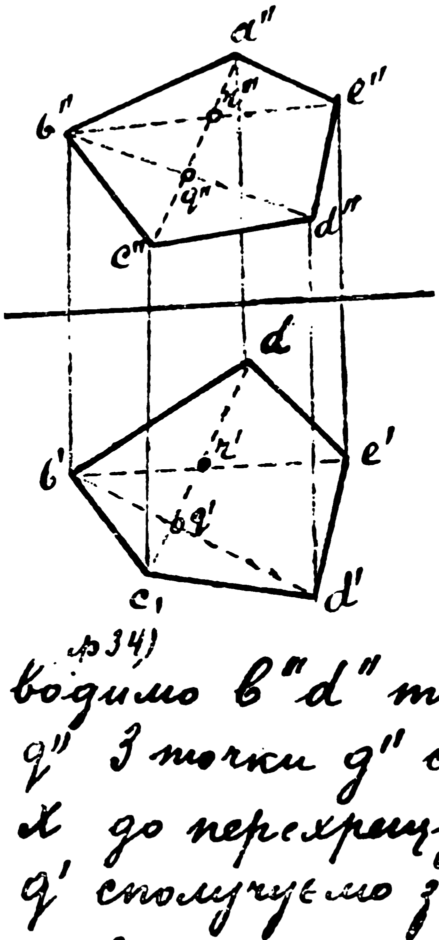
проекціями одержуємо точки m'' та n''. Сполучивши їх прямими, одержимо просту $m''n''$, котра буде вертикальною проекції D.

Дана якась точка, що лежить у площі E (Lg), своєю горизонтальною проекцією a' – треба означити її вертикальну проекцію.

Через горизонтальну проекцію a' проводимо просту D так, щоб вона лежала в площі E (Lg), а далі поступаємо як у попередній задачі.

Части проекції плаского п'ятикутника.

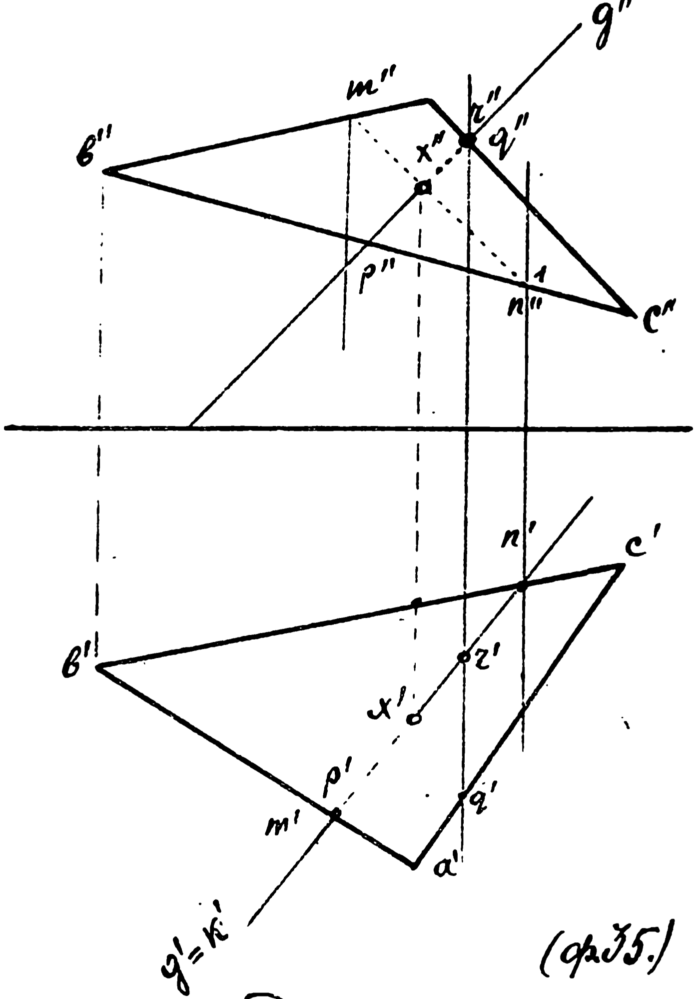
Зразу накреслити плоский п'ятикутник – неможливо. Три точки означають положення площі. Отже треба дві другі точки накреслити так, щоб вони з першими трьома точками лежали в одній площі (фіг. 34).



ф34)

Хай точки $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ будуть дані своїми проекціями. Тоді ще від 4-ї точки $\underline{d}$ можливо довільно задатися вертикальною проекцією d'', бо точка d є точка перехрещування з d'' поставленого перпендикуляра до P_2 з площею abc! У пласкій фігурі всі сторони та діагоналі мають взаємно перехрещуватися. Проводимо $b''d''$ та $a''c''$, які перетинаються в точці q''. З точки q'' спускаємо перпендикуляр на вісь X до перехрещування з $a'c'$. Одержану точку q' сполучуємо з b', та продовжуємо до перехрещування з перпендикуляром, спущеним з точки d'' на вісь X і одержуємо точку d'. Так само задаємося горизонтальною проекцією c' і побимо як у попереднім випадку.

Означити точку перехрещування 3-кутника ABC з простою g.



(ф.35.)

Уявимо собі допоможну площу, котра проходить через пряму g (фіг. 35) і буде перпендикулярною до P_1.

Її горизонтальний слід пристає з горизонтальною проекцією g', а вертикальний непотрібно означати. Ця допоможна площа H перетинає Δ по простій mn. Горизонтальна проекція $m'n'$ мається зразу, а вертикальну одержимо, проектуючи точки $m'n'$ на відповідні вертикальні проекції. Тоді точка перехрещування x (mn та g) дає точку зустрічі прямої g з mn. Її вертикальну проекцію x'' проектуємо на горизонтальну проекцію mn і одержуємо x'.

Площа трикутника може бути матеріальною, й тоді виникає питання, які частини будуть видимими? Звичайно, в різних проекціях можуть бути видимі різні частини. Що до видимости в P_1 — фігура показує, що точки $m'(p')$ уявляють горизонт. проекції точки m на ab та точки p на g. З вертикальної проекції бачимо, що m'' лежить вище (над)

p'', ч.т. для ⊥ P_1, дивлючись зверху, бік Δ-а ab над прямою д проходить — значить вона невидима до точки x.

Теж саме для вертикальної проекції д''ч'': є вертикальна проекція точки д, простої ae та точки ч прямої д. Горизонтальна проекція д' та ч' показують, що частина x''ч'' мусить бути означена пунктиром як невидима.

Плоскі січення многогранників, особливо призм і пірамид.

Під многогранником або поліедером розуміють тіло, яке з усіх боків обмежене пласкими многокутниками. Пласкі многокутники наз. боковими поверхнями, а їх бокові прості — кантами многогранника.

Між многогранниками головні: призми, піраміди, призматоїди, до котрих можливо віднести правильні поліедери.

Призма утворюється, коли проста пересовується по якомусь плоскому многокутникові завжди в однім напрямку.

Основний многокутник називається керуючою лінією, а та проста, що пересовується в кутах многокутника — кантом; у всякім иншім положенні — утворюючою або мантель лінією.

Взагалі призма зверху та знизу обмежується двома рівнобіжними площами а саме конгруентними*) многокутниками, котрі наз.

---

*) Від франц. слова Congruence — відповідність. У математиці означається знаком $\cong$. Конгруентні фігури при накладенні одна на одну — пристають.

основними площами.

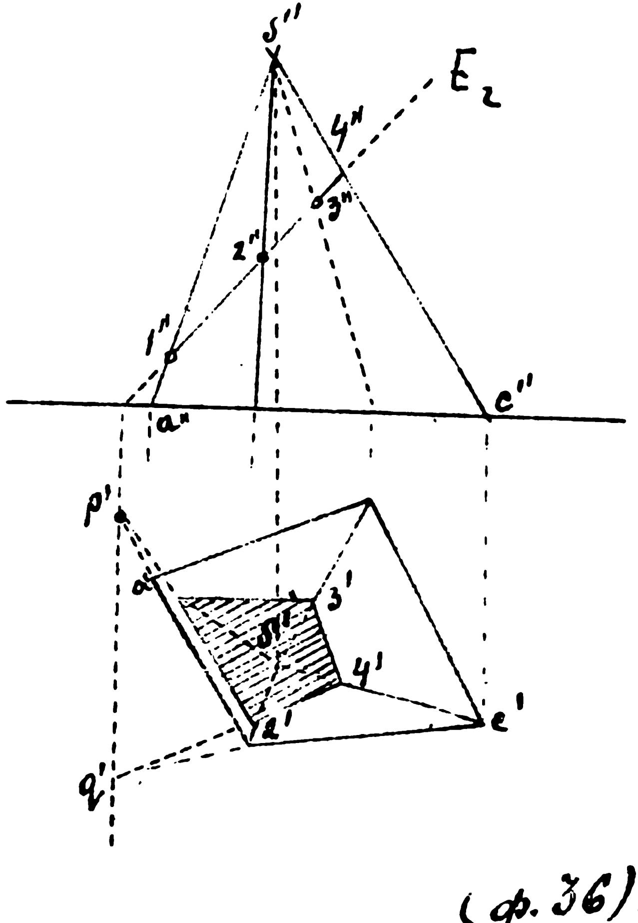
Коли бокові канти перпендікулярні до площі основи, то призма наз. прямою; при нахилених бокових кантах призма коса або похила.

Під пірамидою розуміємо тіло, котрого бокові канти перехрещуються в одній точці - шпилі.

Щоб означити фігуру січення площі з многокутником, знаходять лінії пересічення площі з поверхнями тіла - або означають точки перехрещування кантів многогранника з даною площею та сполучують відповідні точки лініями.

Задачі.

Означити перетинання піраміди S, що стоїть на горизонтальній площі з площею $E(E_1 E_2)$, що перпендікулярна до вертикальної площі. (фіг. 36).

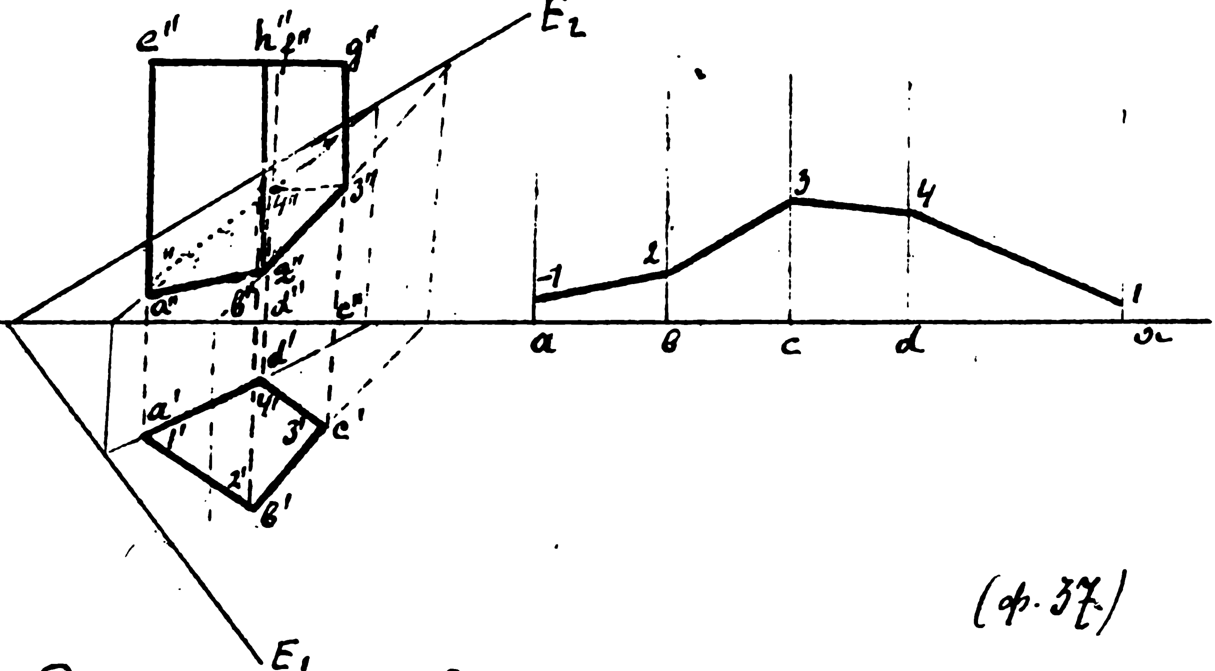


(ф. 36).

Вертикальна проекція перетинання пристає з вертикальним слідом площі E_2 $(1''2''3''4'')$ - горизонтальні сліди лежать на відповідних кантах; проста ab є горизонтальний слід площі asb; таким чином $P_1 = ab \times E_1$; горизонтальний слід лінії перетинання $12 = E \times$ $\times$ asb.

Три площі: abcd (у даному разі P_1), E та asb перетинаються між собою по трьох простих, що сходяться в точці P_1.

Пряма призма, що своєю основою (ґрунтом) abcd стоїть на горизонтальній площі (P_1) перетинається довільно площею E; треба знайти проекції фігури перетинання та розгорнути поверхню призми під перетинанням. Горизонтальна проекція перетинання пристане зі слідом abcd (фіг. 37).

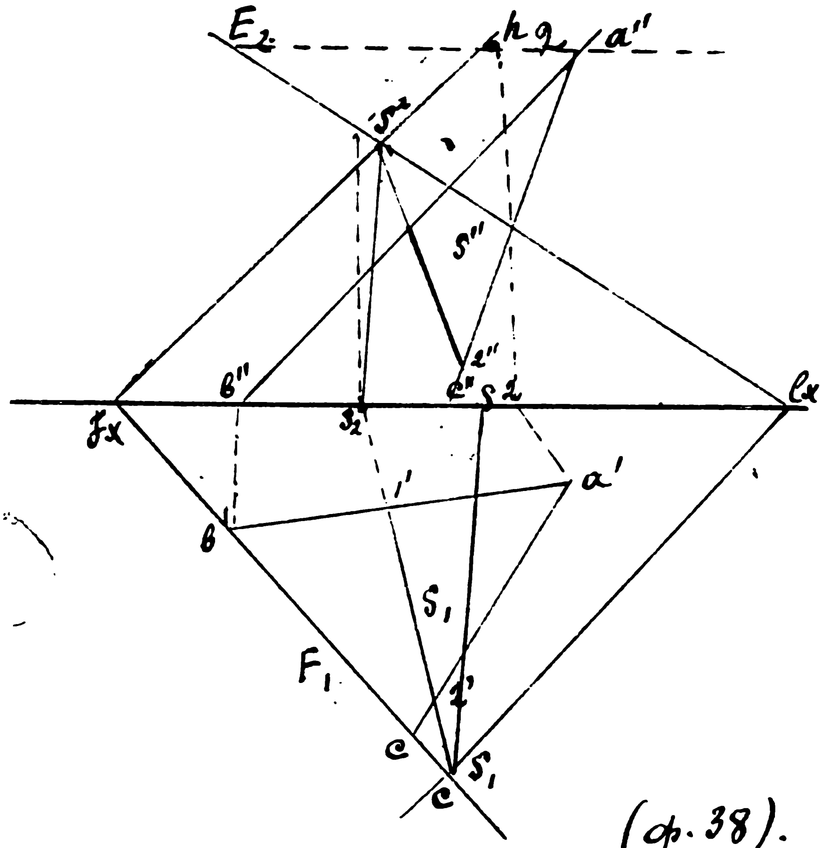


(ф. 37)

Для означення вертикальної проекції, користуємося загальним способом. Бокова поверхня bcgh перетинає площу E по простій 23 та дає на кантах bh та cg точки 2 та 3 бажаного перетинання. Поверхня призми під січенням складається з 4-х трапецій, боки яких ab = a'b', bc=b'c'..., і рівнобіжні сторони котрих ⊥ до основної сторони в віддаленнях a1 = a''1'', b2 = b''2''....

Зад. Трикутник abc стоїть стороною bc на площі P_1; треба знайти лінію перетинання S' площі E (E_1, E_2) з трикутником.

bc є (фіг. 38) горизонтальний слід F_1 площі Δ-a abc, ц.т. $S_1 = bc \times E_1$ - горизонтальний слід лінії перетинання S. Щоб одержати вертикальний слід поширеної площі abc, проводимо через точку a рівнобіжну до cb - ah_2, яка, звичайно,

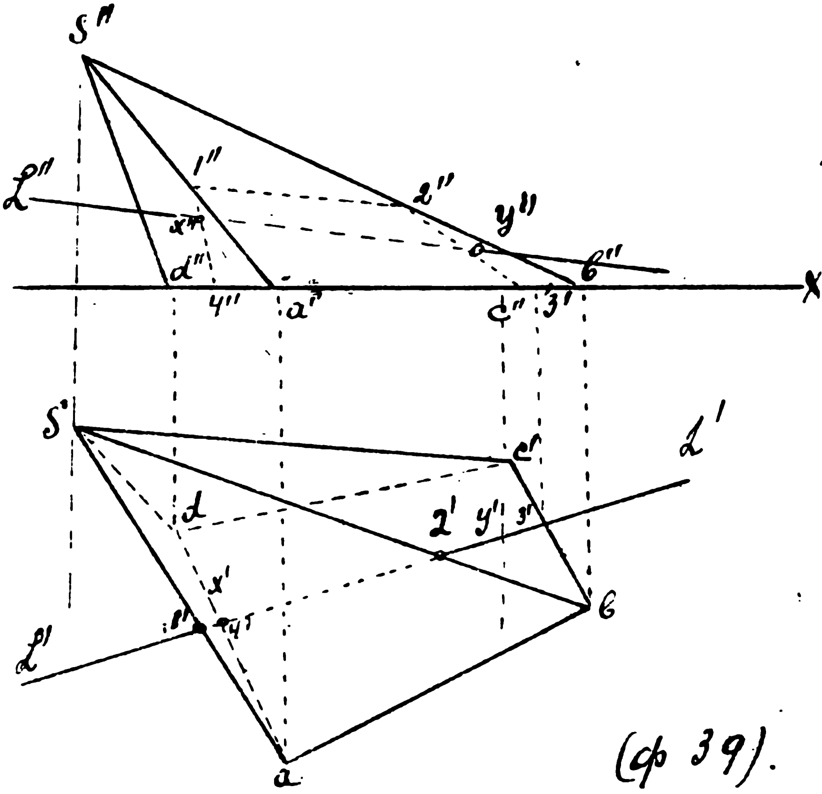


(ф. 38).

рівнобіжна до P_1 і в площі авс дає головну рівнобіжну. вс перетинає вісь у Fx, то Fx h_2 = E_2 є вертикальний слід поширеної площі авс. Площа S_1 Fx h_2 перетинає площу E по простій S_1S_2. Відповідні проекції — 1'2'' та 1''2''.

Протик простими многокутників.

Точку, в котрій проста протикає поверхню многоповерхня, знаходять так: через просту проводять площу; определяють перетинання цієї площі з тілом і тоді виявляють де проста зустрічає лінію перетинання. Таким чином означення цього пункту ґрунтується на росшукуванні пласких перетинань.



(ф 39).

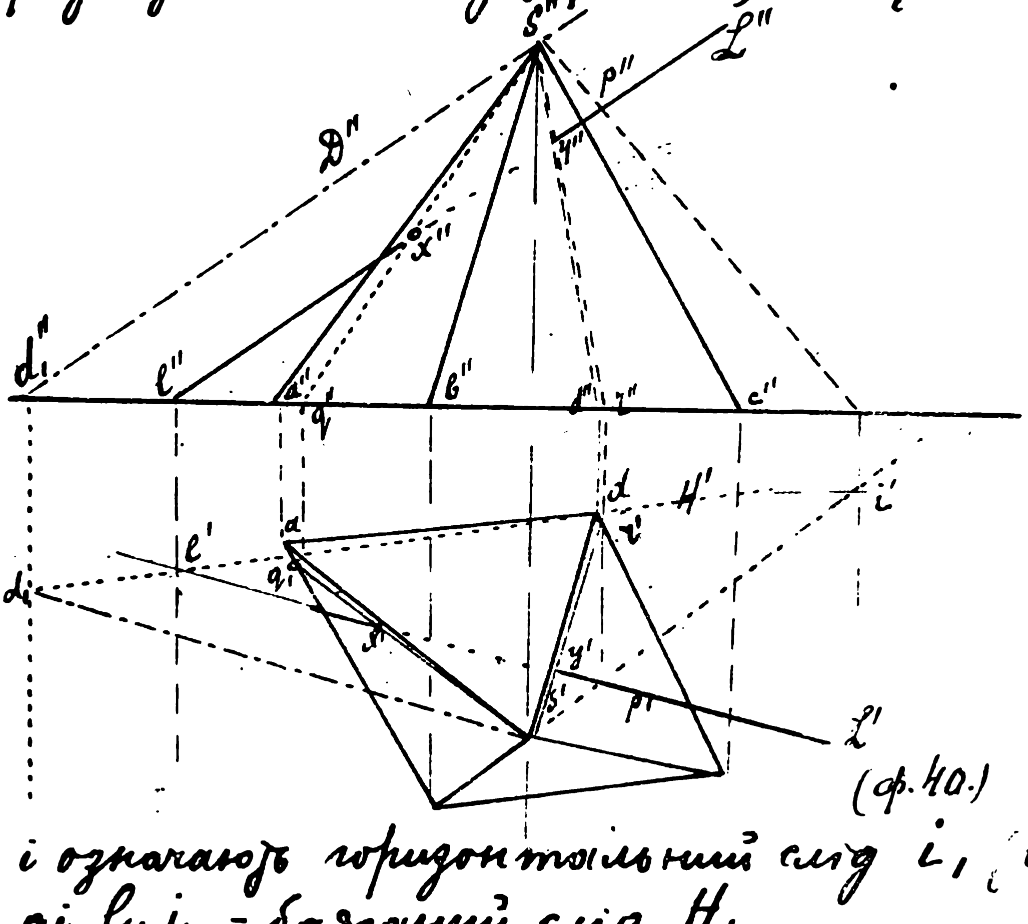
Задачі.

Треба знайти точку перетинання простої L з пірамідою.

Через просту L (фіг. 39) проводимо допоміжну площу H, перпендікулярну до P_1. Ця площа перетинає піраміду по многокутникові 1234, горизонтальна проекція котрого лежить на L'. Точки перетинання X та Y простої L з цим многокутником дають ті точки, яких шукаємо.

Цей загальний засіб дає рішення досить складне. Простіше взяти допоміжну площу так, щоб вона проходила через шпиль піраміди - тоді вона завжди буде перетинати піраміду по трикутникові.

Проводимо через S та L допоміжну площу H, від котрої, властиво кажучи, досить тільки мати горизонтальний слід. Щоб цей горизонтальний слід одержати - проводимо через S рівнобіжну до L і для цих двох ліній (D та L) знаходимо горизонтальний слід (фіг. 40) площі H. Коли горизонтальний слід цих прямих не вміщається в площі креслення, то сполучують вершок S з якою будь точкою p простої L і означають горизонтальний слід i, (від Sp), тоді $l_1 i_1$ - бажаний слід H_1.



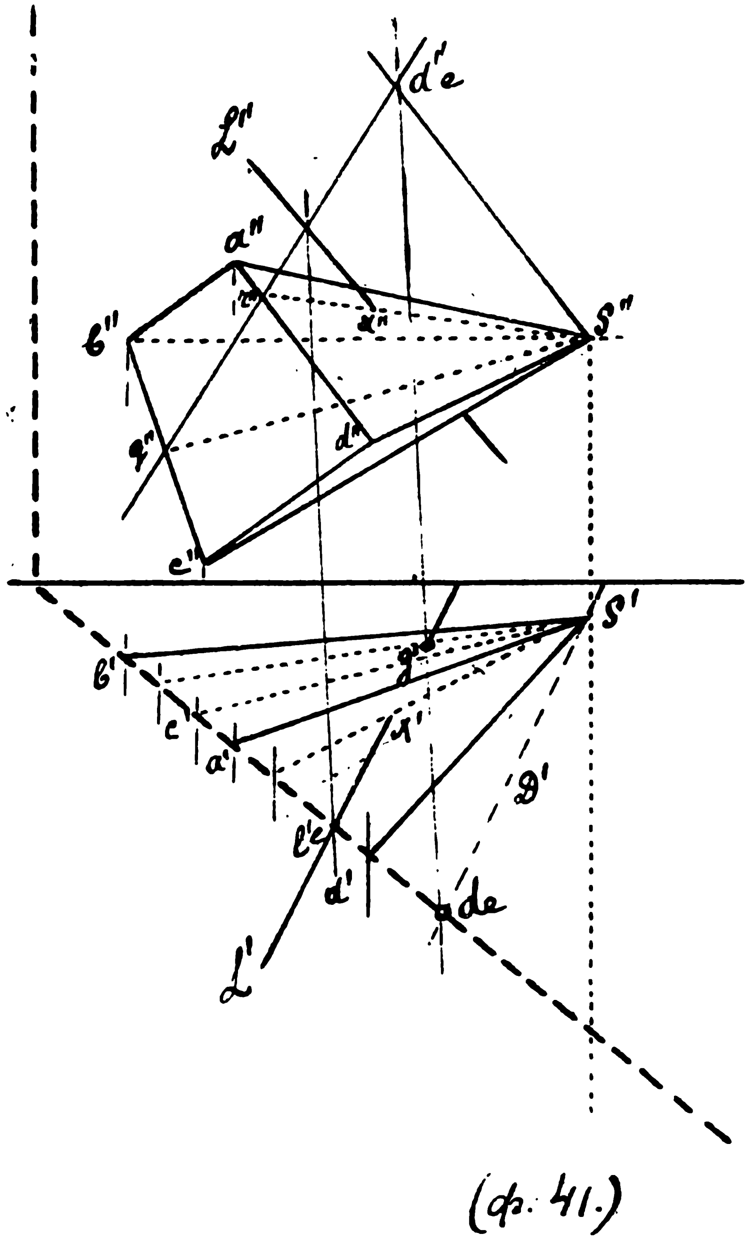
(ф.40.)

Слід H_1 перетинає горизонтальну проекцію сліду піраміди abcd у точках q та r. Площа

H з піраміди витинає трикутник q, s r,

Коли площа основи піраміди лежить у площі E (E_1, E_2), перпендікулярній до P_1, то можна так само примінити або перший або другий засіб.

При рішенні по другому засобу треба зауважити, що замість того, щоб горизонтальні сліди простих L, D та J означати як перетинання з P_1 – означається їх перетинання l_e, d_e, f_e на площі E (фіг. 41) бо тут ґрунт піраміди лежить у площі E. Вертикальна проекція $H_e'' = l_e'' d_e'' = l_e'' i_e''$ перетина ґрунт піраміди в точках q'' та r''. Допоміжна площа H виріза з піраміди трикутник qsr, що з простою L перетинається в точках x та g.

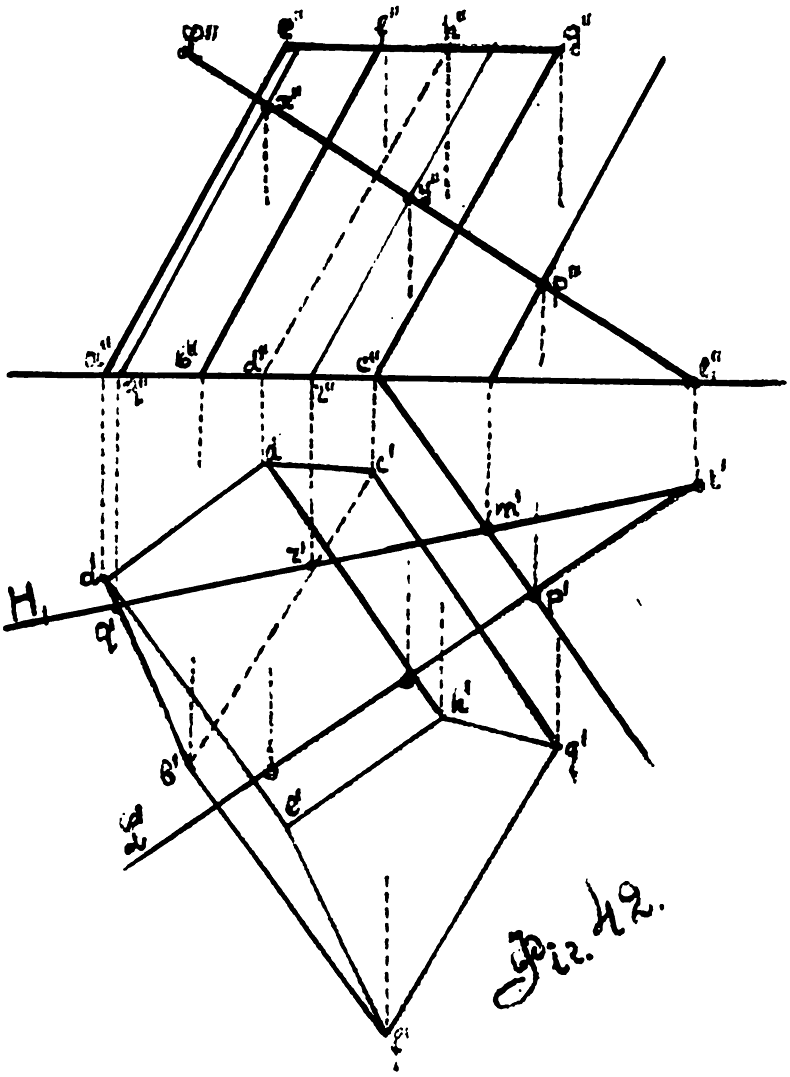


(ф. 41.)

Означити точки перетинання простої L з похилою призмою.

Можливо або через просту L провести допоміжну площу перпендікулярну до P_1 або до P_2 і далі конструкцію провадити по передньому.

Ще простіше рішення одержується коли через просту L провести площу H - рівнобіжну боковим кантам призми, бо ця площа завжди вирізує дві творячі лінії, котрі рівнобіжні до бокових кантів. У представленім нарисі горізонтальний слід $H_1 = \ell m_1$ перетинає горізонтальний слід призми abcd (фіг. 42) в точках q_1 та r_1. Допоможна площа H вирізає з призми творячі лінії (Kantellinien) $q_1 x$ та $r_1 q$, рівнобіжні до ae. Ці лінії в точках перетинення в простою L дають точки, що ми шукаємо.

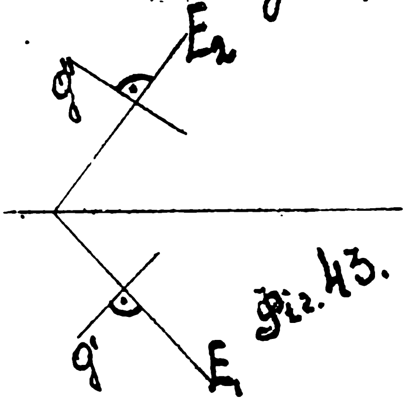


Фіг. 42.

Понеже всякий стіжок можна розглядати, як піраміду, грунт якої складається з необмеженої кількости безконечно малих сторінок, то зрозуміло, що вище наведена конструкція залишається и для стіжка. Так само, що й до стовпака. Його можна розглядати, як призму, основа котрої складається в безмежної кількости безконечно малих частин; спосіб залишається той, що й для піраміди.

Прості та площі в прямовіснім положенню.

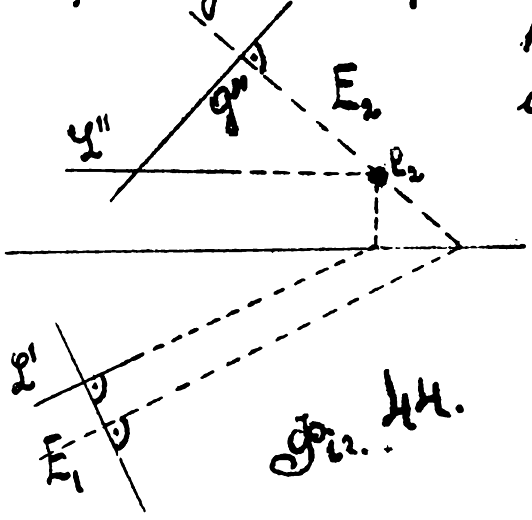
Коли проста прямовісна до якоїсь площі, то проекції простої прямовісні до відповідних слідів площі. Нехай проста g буде прямовісна до площі E. Треба довести, що проекції простої будуть прямовісні до відповідних слідів площі. Площа, проектуюча просту g на площу P_1 буде до неї прямовісна; одночасно вона прямовісна до E; значить її січення буде прямовісне до E_1 і тому $g_1 \perp E_1$ (фіг. 43). Дві взаємно прямовісні прості (чи ті, які перетинаються, чи косі) мають одна до одної прямовісні проекції, коли одна з них рівнобіжна до проектної площі (ф. 44)



Фіг. 43.

Дано, що $g \perp L$ та $L \parallel$ до P_1. Треба довести, що $g_1 \perp$ до L_1?

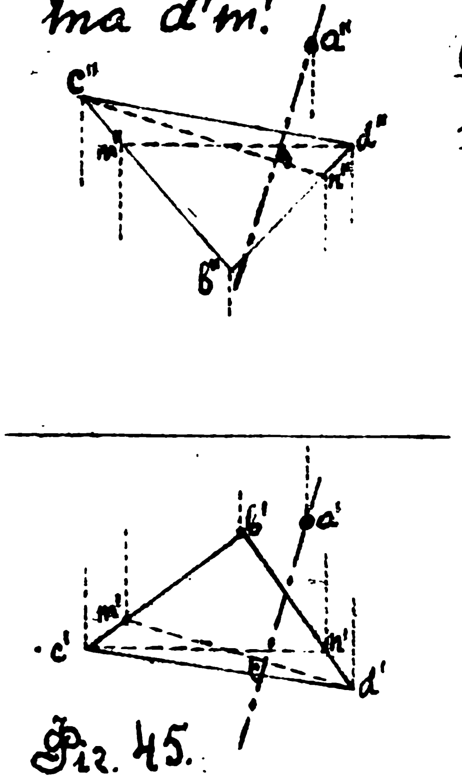
Проводимо через L площу E, прямовісну до g, тоді E_1 буде рівнобіжна до L_1, отже по попередньому положенню g_1 буде прямовісне до E_1, значить, тим самим g' буде прямовісне до L' (фіг. 44)



Фіг. 44.

<u>Спустити з точки a прямовісну L на площу E.</u> Коли площа E дана своїми слідами E_1 та E_2, то через точку a' та a'' треба провести L', прямовісно до E_1 та L'' прямовісно до E_2. Але площа може бути дана не слідами, а якоюсь фігурою, наприклад трикутником bcd. Треба спочатку знайти напрямки слідів площі цього трикутника. Проводимо прості, рівнобіжні до горизонтальної ($d'm'$ $d''m''$) та вертикальної ($c''n''$ $c'd'$). площі. Тоді (фіг. 45

проекції L' та L'' потрібного прямовіса, що проходить через точку a ($a''a'$) будуть прямовісні до $c''n''$ та $d'm'$.

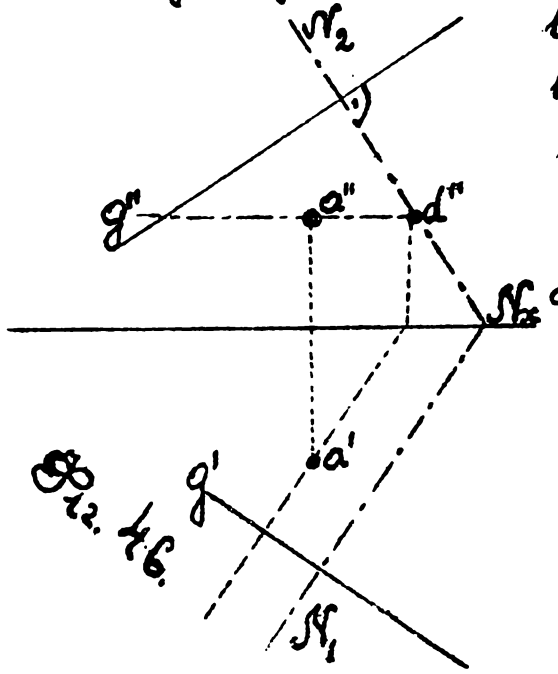


Фіг. 45.

Через дану точку a провести площу N, прямовісну до g.

Сліди відшукуємої площі (N, N_2) мусять бути прямовісні до g, g_2. Можливо накреслити обидва сліди, як буде відома хоч одна його точка. Її можна (фіг. 46) одержати, коли через точку a проведемо просту рівнобіжну до горізонтальної (або вертикальної) площі проекцій.

Одержавши точку d'', проводимо через неї вертикальний слід (N_2) прямовісний до g''. З точки перетинення з віссю проекцій N_x проводимо прямовісно (N_2) до горізонтальної проекції g'.



Фіг. 46

Дійна довжина простих.

Дійсна величина кутів та поверхнів.

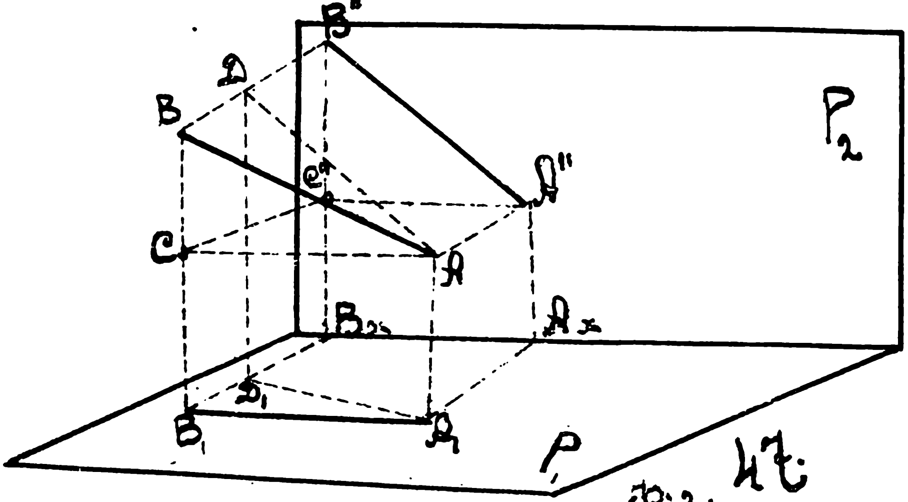
Коли площа фігури рівнобіжна до площі проекцій, то її проекція цілком конгруентна.

Коли площа проектуємої фігури похила до площі проекцій, то щоб одержати її дійсну величину, треба її повернути так, щоб вона стала рівнобіжною до неї або цілком пристала до неї.

Треба означити кут нахилу простої g з

площами проекцій.

В площі BAB_1A_1 проводимо просту, через точку A рівнобіжно до горізонтальної площі (P_1). Цілком природно її горізонтальна проекція пристає до A_1B_1 (фіг. 47).



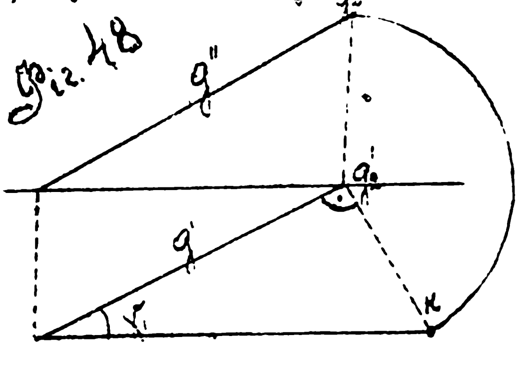
Фіг. 47.

Вертикальна проекція буде рівнобіжна до вісі x. ΔABC буде мати при точці C прямий кут. AB буде гіпотенуза.

$\measuredangle BAC$ буде γ_1 нахил простої g до горізонтальної площі проекцій. Катет $AC = A_1B_1$; $BC = B''C''$. Як у другій проектуючій площі $ABB''A''$ проведемо просту $AD \parallel P_2$ то в Δ-у ADB $\measuredangle BAD = \gamma_2$ буде нахилом простої до вертикальної площі проекцій. Катет $BD = B_1D_1$; $AD = A''B''$

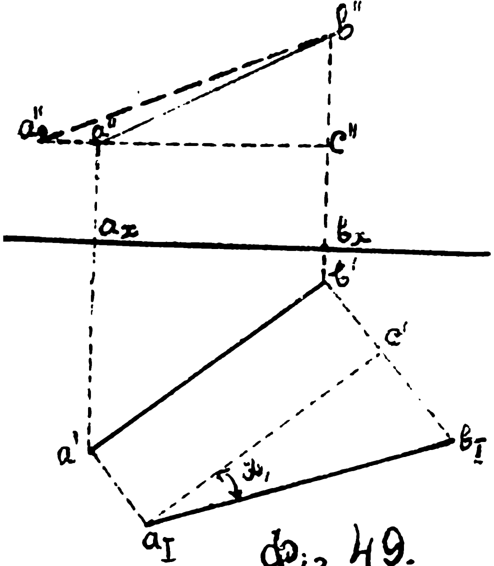
Звідсіля виникає конструкція: з точки g_2' (фігур. 48) як центру описуємо луку радіусом $g_2 g_2$ до перетинення в перпендикуляром, поставленим до g_1 в точці g_2'. Сполучивши g' з точкою K, одержимо $\Delta g_2' g_1 K$, в котрім $\measuredangle g_2' g' K = \gamma_1$ буде нахилом до горізонтальної проекції і $g'K$ - дійсна величина довжини простої g. Звичайно, подібну конструкцію треба зробити, щоб одержати γ_2.

Фіг. 48



Як що проста лежить у площі, прямовісній до осі x, то $\gamma_1+\gamma_2=90°$; це є таоітит.

<u>Означити дійсну довжину простої, що дана своїми проекціями (a'b'' a''b'').</u> Дійсна довжина ab (ф. 49) буде четвертою стороною трапеції, а саме: $a'b'$ само, $a'a_I = a_x a''$, $b'b_I = b_x b''$, $a_I b_I = ab$. Кут $c'a_I b_I = \alpha_I$ буде кутом нахилу простої до горізонтальної площі. Відношення $\frac{a'b'}{a_I b_I} = \cos\alpha$ наз. скороченням. Швидче робиться так: проводять просту $a''c''$, на ній від c'' відкладають довжину $a'b'$, точку a_0'' сполучають з b''; одержана проста $a_0''b''$ й буде дійсною величиною <u>ab</u>.

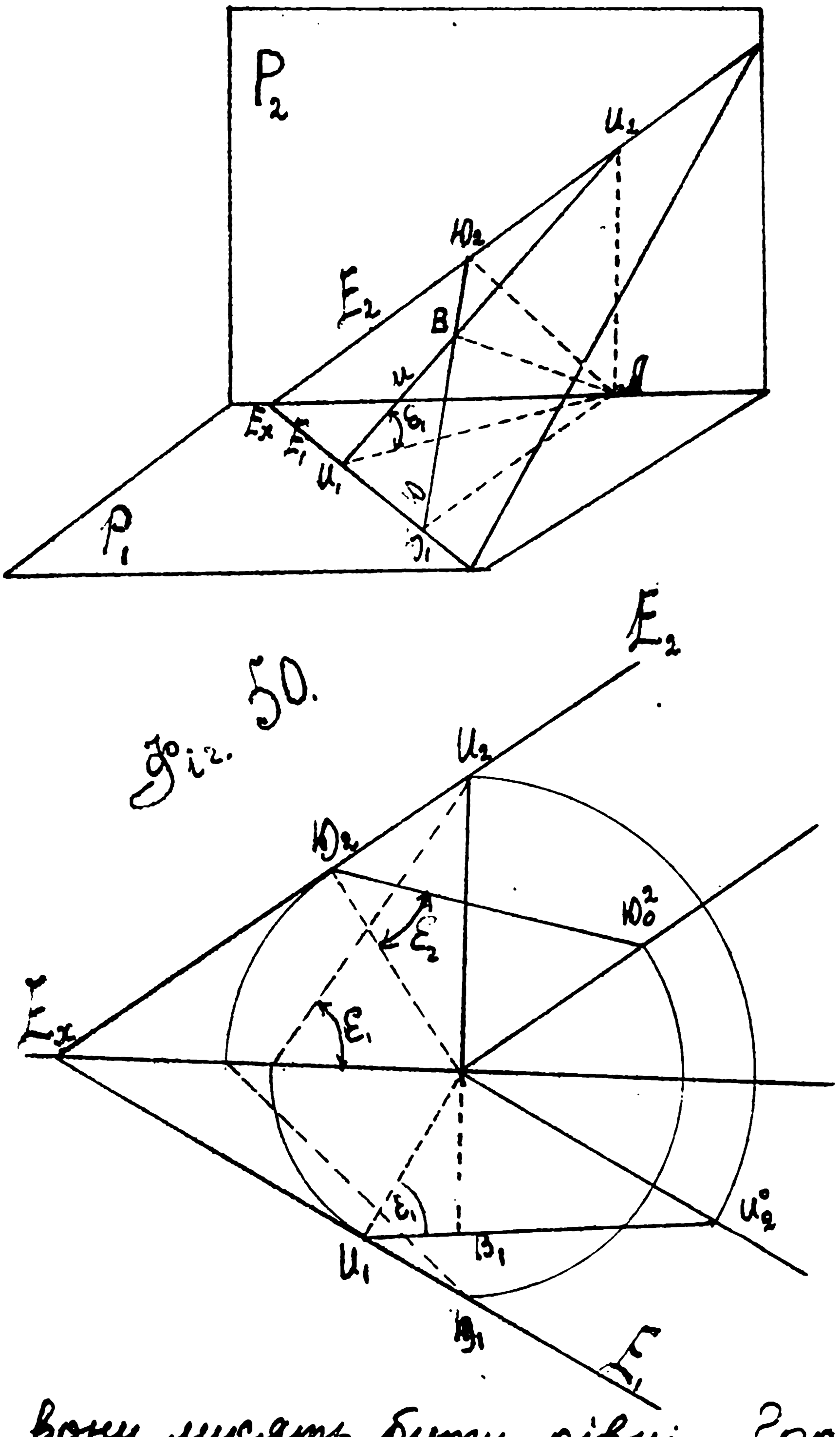


Фіг. 49.

Під кутом нахилу двох площ розуміють гострий кут між простими, котрі виникли від перетинення третею площею, яка є прямовісна до лінії перетинення. Кут нахилу площі E відносно одної площі проекцій виміряється відповідними лініями нахилу. Означимо кути нахилу площі E відносно горізонтальної та вертікальної площі через ε_1 та ε_2.

Треба означити обидва кути нахилу площі $E(e_1 e_2)$ відносно горізонтальної та вертикальної площ проекцій. Через точку A, що лежить на осі x проводимо площу прямовісну до e_1, вона перетинає E на першій простій нахилу u; горізонтальну площу (P_1) по ршій проекції u'; вертикальну площу (P_2) по Au_2 прямовісній до осі x.

Таким чином $\sphericalangle A u_1 u_2 = \varepsilon_1$. Щоб його одержати на нарисі, прямокутний $\triangle u_1 A u_2$ повертаємо біля катета $u_1 A$ аж доки він ляже на горізонтальну площу (P_1) (фіг. 50); трикутник прийме положення $u_1 A u_2^0$. Кут $A u_1 u_2^0$ буде ε_1. Так само одержимо ε_2, коли через A проведемо площу, прямовісну до e_2. Ця площа перетинає E по другій лінії нахилу $Ю$. $\sphericalangle A Ю_2 Ю_0 = \varepsilon_2$. Конече площі обох $\triangle$-ів $A u_1 u_2$ та $A Ю_1 Ю_2$ прямовісні до E_1 то й лінія їх перетинення AB буде прямовісною до E_1. AB є висота для обох трикутників. Спустивши з точки A прямовіси на обидві гіпотенузи – AB_0, маємо, що вони мусять бути рівні. Горізонтальна проекція AB падає в u_1 а вертикальна в v''; таким чином горізонтальний та вертикальний нахил простої AB буде:



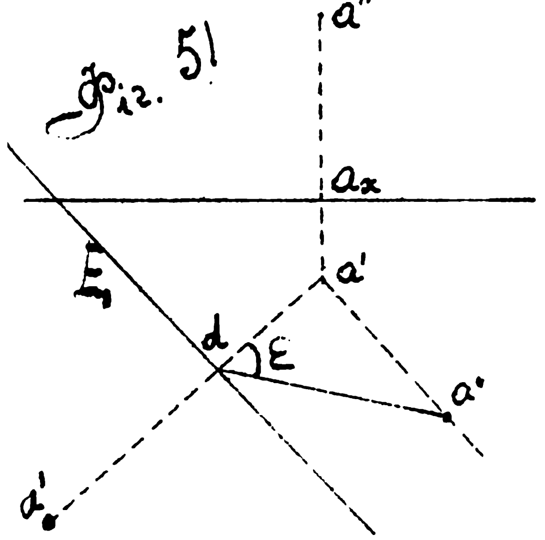
Фіг. 50.

$\gamma_1 = \sphericalangle BAU_1 = 90 - \varepsilon_1$ | $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 90°$

$\gamma_2 = \sphericalangle BAU_2 = 90 - \varepsilon_2$ | $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geq 90°$, ц. т. сума нахилів площі до площ проекцій minimum 90°

Цей випадок буває, коли площа рівнобіжна до однієї з площ проекцій.

Дається слід E_1 площі E і точка a, що лежить в ній; означити положення точки a', коли площа E складена з площею P_1. Коли площа E (фіг. 51) повертається, то точка a описує луку кола в площі, прямовісній до E_1 ada, й після закінчення повороту, падає на продовження прямовіса. Віддалення $da'' = da$ одержуємо, як гіпотенузу прямокутного трикутника з катетами da' та $a'a'' = a_x a''$.

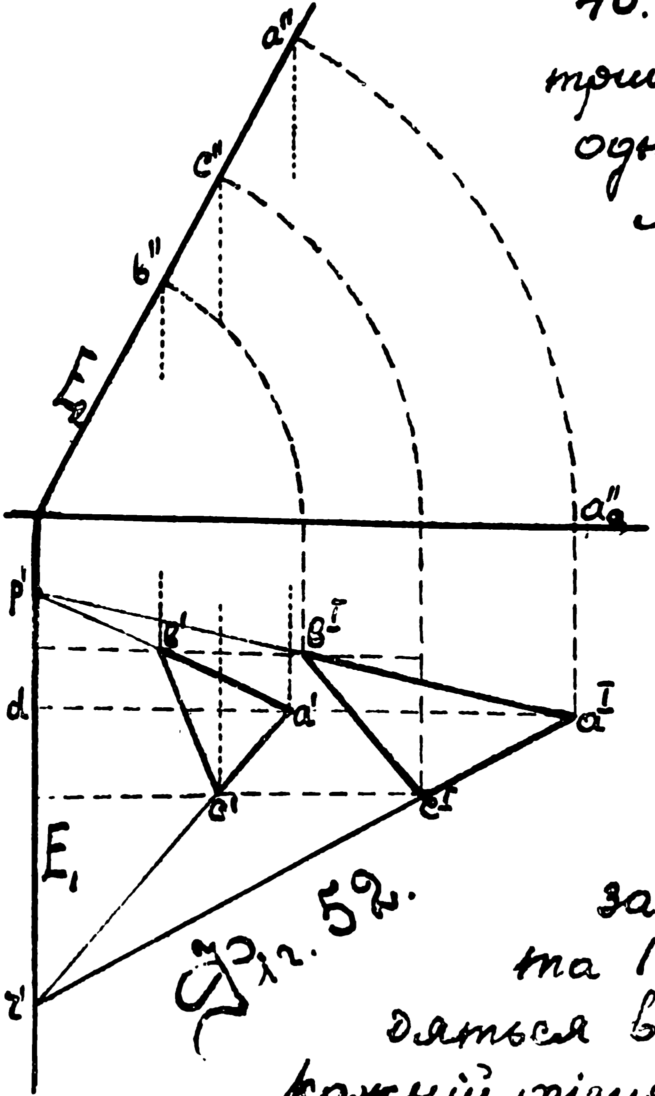

Фіг. 51

Коли площа E прямовісна до P_2 й якийсь трикутник лежить в ній, то при повороті її до складення з площею P_1 вертикальні проекції опишуть луку (фіг. 52) й $a''a_0''$ та $a'a^I$ будуть проекціями луки aa^I, котру описує при поверненні точка $\underline{a}$.

Теж саме відношення й до точок $\underline{b}$ та $\underline{c}$. Таким чином одержуємо трикутник $a^I b^I c^I$, кожна точка котрого лежить на перетиненні прямовіса $a_0''a^I$ та $a'd$. Подібного способу можна вжити, щоб одержати переложення трикутника на вертикальну площу проекцій.

Поняття про афінність.

Візьмемо дві площі E та ε та напрямок, ко-



Фіг. 52.

трій не рівнобіжний ані до одної ані другої площі.

Якийсь луч, котрий має вибраний напрямок, перетинає площі E та Ɛ в точках P та П. Можливо або П розглядати як проекцію від P, або навпаки в залежности від того, яку з площ E або Ɛ візьмемо за картинну. Точки П та P площ Ɛ та E знаходяться в такій залежності, що кожній фігурі одної площі відповідає друга фігура на другій площі — в залежності від того, яку в площ візьмемо за картинну.

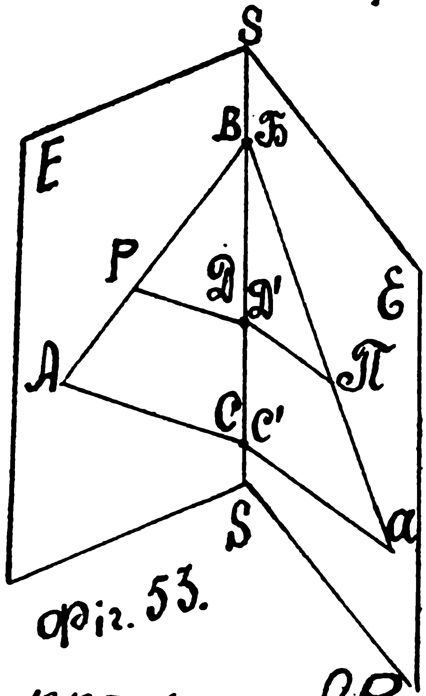
На підставі рівнобіжних проекцій можна висловити таких три закона:

1) точка пристає з відповідно залежним своїм пунктом тільки тоді, коли вона лежить на простій перетинення обох площ.

2) Коли одна з двох точок описує в своїй площі просту, то й залежна від неї точка в другій площі описує так само просту.

3) Рівнобіжні прості одної площі дають залежні рівнобіжні прості на другій площі.

Припустимо, що дано дві площі (E та Є), але не дано напрямка луча, як це було раніще зроблено. Покажемо, що і в цім найбільш загальному випадкові три закона справедливі.



фіг. 53.

Виберимо своєвільно дві точки A та a, цебто точці A на площі E мусить відповідати точка a на площі Є. Тоді можливо для якоїсь точки P площі E, на підставі вищенаведеніх трьох законів, взяти точку П на площі Є. Проводимо просту AP. Вона зустріча площу перетинання цих обох площ в точці B(Б). Друга проста, що виходе з A (площа E), перетинає просту SS в точці C і рівнобіжна до AC з точки P перетина в точці D.

По першому закону точкам B-D-C як точкам, що лежать на вісі - відповідають вони сами; означимо їх (для площі Є) через Б D' C'. По другому закону простій AB відповідає проста aБ і простій AC - проста aC'. На шті, по третьому закону рівнобіжним простим AC та PD відповідають знову такі рівнобіжні прості і понеже простій AC відповідає проста ac', то рівнобіжній PD мусить відповідати якась рівнобіжна до ac', проведена через точку D. - Таким чином, обом простим, що проходять через точку P (PB та PD) відповідають дві опреділенні прості, так що їх точка перетинання мусить бути залежною від P... точка П. Дійсно маємо точку П для площі Є, що відповідає точці P площі E.

На підставі положень елементарної геометрії пишемо:

BA: BP = BC: BD = БC': БD' = Бa : БП.

Звідсіля можна зробити висновок, що проста Aa в просторі рівнобіжна до PП. Цей розгляд доказує, що істнує взаємність межи точками двох площ, котра з'ясовується вищенаведенними трьома законами. Назовемо залежність цього роду афінітетом (від латинського слова affinitas, що означа „сродство"). Просту перетинення площ E та Є... SS назовемо віссю афін.

Під афінітетом між двома ріжними площами з безконечно віддаленною віссю афін - цебто між двома рівнобіжними площами - розуміємо конгруенцію.

Конгруенція, як окремий випадок афінности. Випадок, коли вісь афін SS лежить безконечно далеко, не є єдиний, коли появляється конгруентність. Коли вісь S лежить в конечному віддаленні може появитися конгруентність. Нехай P та П буде пара афінних точок і S' грунт (фуспункт) перпендикуляру з P на S; афінітет вимага, щоб відрізок PS' відповідав-ПS'. Конгруентність тільки тоді може наступити, коли PS' рівне ПS'. Далі PS' з S складає прямий кут і точка S' відповідає сама собі. Значить конгруентність вимага, щоб ПS' було рівновісно до S.

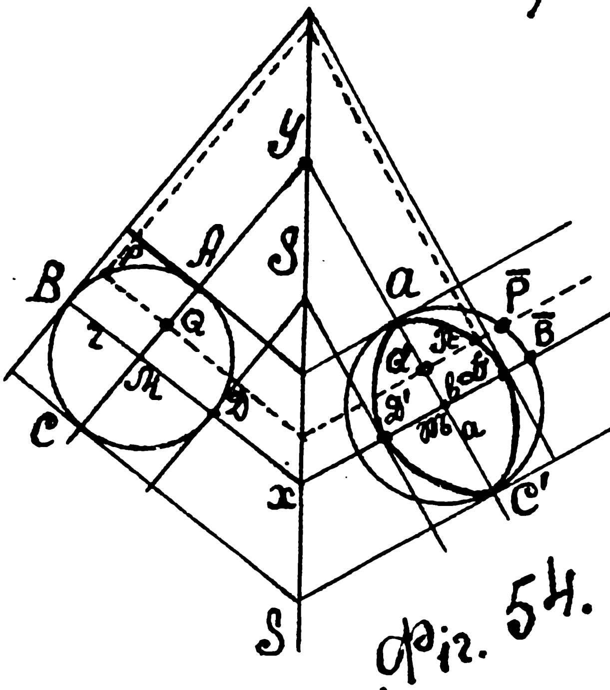
Афінітет між двома ріжними і нерівнобіжними площами E та Є переходить тільки тоді в конгруентність, коли напрямок ПP рівновісний до простої, що поділяє кут між ними на дві рівних частини.

Коли дві площі, що перетинаються по простій SS, афінні одна до одної, то ця залежність між ними залишається і в тому випадкові, коли одну з цих площ повертаємо біля афінної вісі.

Після повороту відповідні точки будуть всеж таки лежать на відповідних рівнобіжних простих, так що можна сказати: Коли якась фігура F площі E спооектована рівнобіжними проекціями на другу площу Є, як фігура Ф, то вона залишається картиною паралельних проекцій від F, коли яку-небудь з цих площ повернути біля простої перетинення їх. Поворот можна продовжувати, аж доки обидві площі складуться. Рівнобіжні відрізки плоскої фігури відносяться між собою, як відповідні їм афінні відрізки афінної фігури. Відношення двох рівнобіжних відрізків плоскої фігури залишається при афінности без зміни – це є інваріант афінітета. З якоїсь плоскої фігури виявляється афінна фігура, коли всі ординати фігури, виміряні в якомусь напрямку від якоїсь осі SS, зменшити або збільшити в якомусь відношенню.

Рівнобіжні проекції круга.

Яка крива одержиться з круга шляхом проектування його?



Фіг. 54.

Нехай буде (фіг. 54) афінна вісь S, центр круга M, - відповідний афінний пункт 𝔐. Прямокутній парі простих Mx, MY, що означаються точкою M, відповідає прямокутна пара 𝔐x та 𝔐Y

Рівнобіжним до Mx тангентам круга в точках A і C відповідають рівнобіжні до 𝔐x тангенти точок a та C' кривої, яку шукаємо. Тангентам круга рівнобіжним до MY в точках B та D відповідають рівнобіжні тангенти до $\mathfrak{M}Y$ в точках $\mathfrak{B}$ та $\mathfrak{D}'$. Нехай P буде якоюсь точко круга. Відповідний афінний пункт Π означається так: через точку P проводимо рівнобіжну до Mx та MY, означаємо афінні прості до них і одержуємо точку Π. Крім того рівнобіжна (через P) до Mx перетина MY в точці Q. Можливо означити афінний пункт Q'. Навкруги AC', як біля діаметру описуємо допоможний круг. Проста $Q'\Pi$ своїм продовженням перетина його в точці $\bar{P}$, а проста $\mathfrak{M}\mathfrak{D}$ в точці $\bar{B}$. Дякуючи незмінному відношенню рівнобіжних відрізків при афінітеті, маємо:

$$\frac{Q'\Pi}{\mathfrak{M}\mathfrak{B}} = \frac{QP}{MB} \qquad \frac{Q'\Pi}{b} = \frac{QP}{r} \qquad \frac{MQ}{MY} = \frac{\mathfrak{M}Q'}{\mathfrak{M}a}$$

$$\frac{Q'\bar{P}}{\mathfrak{M}B} = \frac{QP}{MB} \qquad \frac{Q'\bar{P}}{a} = \frac{QP}{r} \qquad \frac{Q'\Pi}{b} = \frac{Q'\bar{P}}{a}$$

$$Q'\Pi = \frac{b}{a} Q'\bar{P}$$

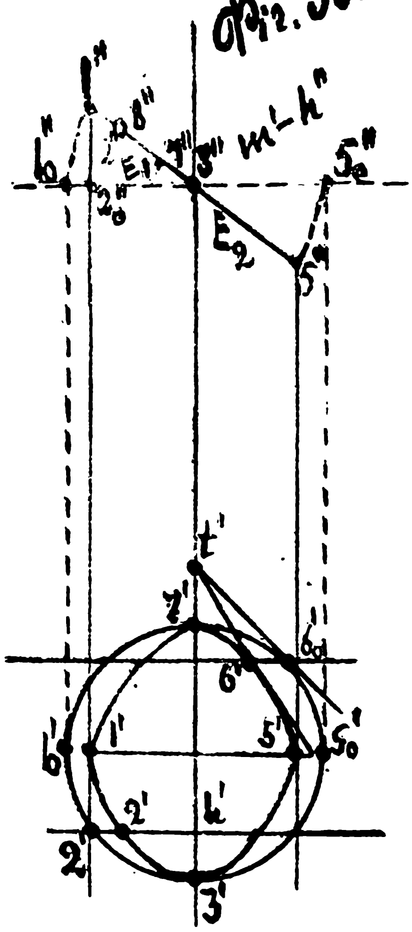
Афінна картина круга є еліпс: цебто всяка рівнобіжна проекція круга є еліпс.

Таким чином: всяке плоске січення кругового стовпака є еліпс.

Тінь, що падає від круга на площу при рівнобіжному освітленню – є еліпс.

Накреслити проекції круга, що лежи в площі E прямовісно до P_2 і складає з площею P_1 кут ε_1.

Фіг. 55.



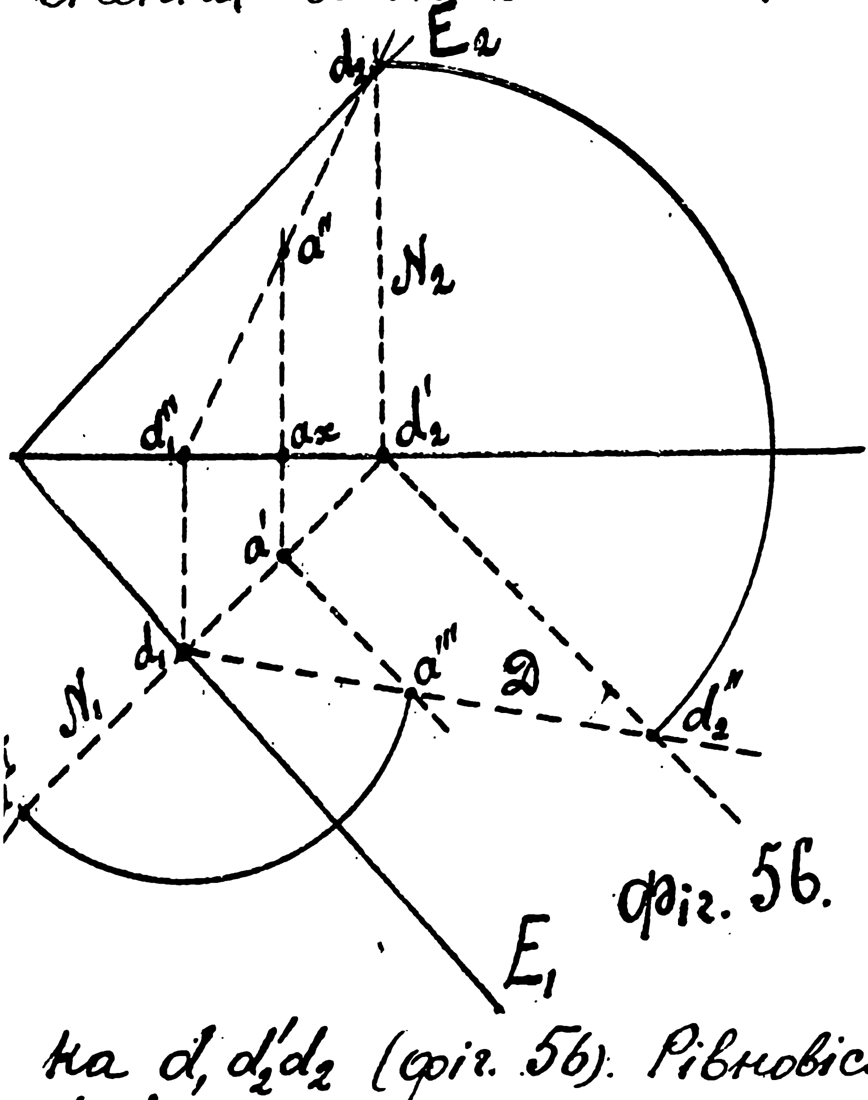
Вертікальна проекція круга лежить на сліду площі E_2 і означається лінією 1"5", що рівняється діаметрові. Щоб одержати горізонтальну проекцію, треба прикласти один з попередніх засобів, перевернувши його навпаки.

Повертаємо круг біля діаметру 37 аж поки він не буде рівнобіжний з P_1, тоді він проектується на P_1 (фіг. 55) як конгруентний круг $1_0''2_0''......8_0''$, а на площу P_2 як відрізок $1_0''\,5_0''$, рівнобіжно до осі x. Для якої-небудь точки 2 одержуємо з точки $2_0'$ спочатку $2_0''$ а далі через зворотний поворот 2" і 2'.

Горізонтальна проекція рівнобіжно до P_1 повернутого круга та горізонтальна проекція нахиленого круга суть афінні, при чім діаметр 3'7' є афінна вісь, так що тангента до круга в $6_0'$ і дотична до еліпса в 6' проходять через один і той же пункт t' (на продовжені 3'7').

Точка $\underline{a}$ лежить в площі E так, що після повороту її біля E, вона займає місце a^I. Означити її проекцію для попереднього положення площі.

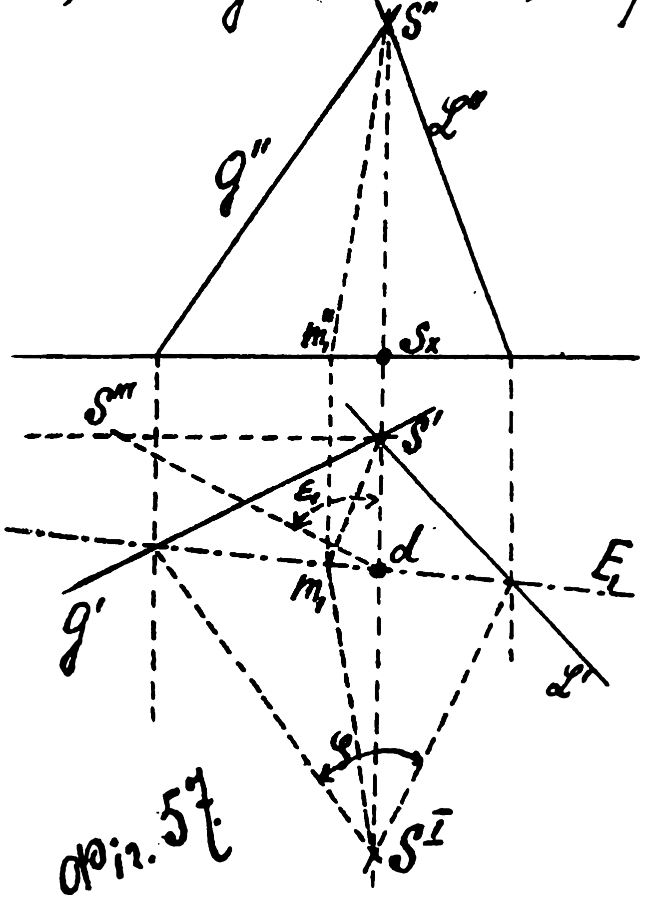
При зворотньому повороті площі E точка $\underline{a}$ пересовується в площі N, рівновісній до E, та описує луку навкруги d, і нарешті приходить на лінію $D(dd_1)$ пересічення між N та E. Повертаючи трикутник $d_1d_2'd_2$, який має D за гіпотенузу, навкруги d_1d_2' аж доки не впаде на площу P_1, та роблячи $d_1a'''= d_1a^I$ одержуємо положення a''', котре дає положення точки $\underline{a}$ в перекладеній площі трикутника $d_1d_2'd_2$ (фіг. 56). Рівновісник в a''' на d_1d_2' дає горізонтальну проекцію a' точки a. Відповідна вертікальна проекція a'' лежить на $d_1''d_2$ в віддаленні $a_xa''= a'a'''$



фіг. 56.

Дані дві прямі $Q(q'q'')$ та $L(L'L'')$, треба означити кут межи ними φ. (фіг. 57)

Нехай точка S' буде точкою перетину простих, та E-площа, в котрій лежать прості. Означаємо горізонтальні сліди g' та $\mathcal{L}'$; сполучивши їх, одержуємо слід E_1.



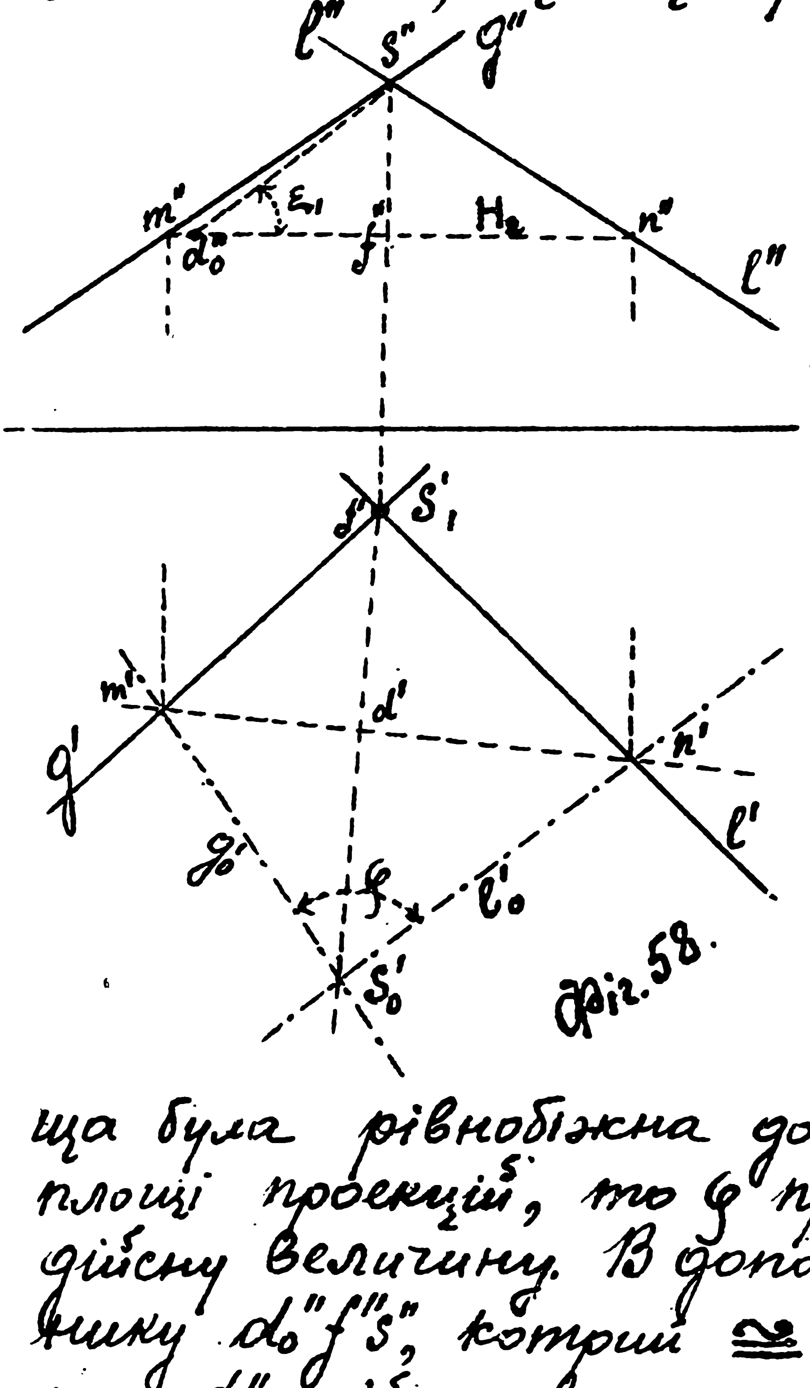
Фіг. 57

Повертаємо площу E біля E_1 до складення її з горізонтальною площею проекцій. Переміщена точка S находиться на рівновіснику, що опущений з S' на вісь повороту E_1.

Віддалення $ds^I = ds$ одержуємо як гіпотенузу прямокутного трикутника $ds's'''$ з катетами $s'd$ та $s'''s' = ss' = s''s_x$. Коли точку S^I найдено, то і найдено кут φ, що шукали.

В прямокутному трикутнику $ds's'''$ $\measuredangle s'ds''' = \varepsilon$ є кут нахилу площі E до горізонтальної площі.

Поділ кута φ на дві рівні частини, коли він є данний в натуральну величину, (попередня фіг.), робиться звичайно. Одержану пряму перекладаємо на горізонтальну та вертікальну площу (m_1s', $m_1''s''$) Коли сліди g' та ℓ' лежать поза межами площі креслення (паперу), то площу E, що содержить в собі прості, повертають відносно горізонтального сліду простої, рівнобіжної до горізонтальної площі, аж доки вона не стане рівнобіжною з P_1 (ф.58). Опускаємо з S на mn нормаль sd, та означимо точку пересічення SS' з горізонтальною площею H, котра проходе через mnf, то по попередньому fd рівновісна до mn та f'd' рівновісна до m'n'. Переклад верховини S в площу H дасть означення довжини sd, Щоб це зробити, складаємо прямокутний трикутник $d_0''f''s''$, конгруентний до Δ dfs, катет котрого $d_0''f'' = df = d'f'$. Продовжуючи fd на $ds_0 = d_0''s''$ отримуємо s_0', яке є складене положіння S в площі H. Кут $m's_0'n'$ дає горізонтальну проекцію кута φ, але понеже допоможна площа була рівнобіжна до горізонтальної площі проекцій, то φ проектується в дійсну величину. В допоможнім трикутнику $d_0''f''s''$, котрий ≅ Δ dfs, одержуємо при d_0'' дійсну величину кута нахилу ε_1 площі E до P_1.

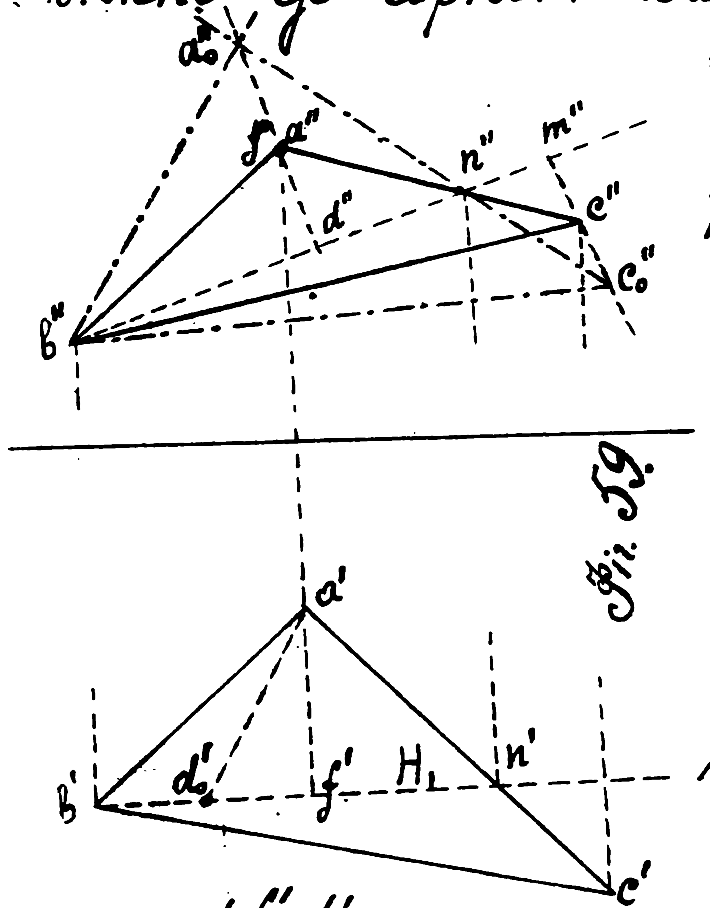


Фіг. 58.

На підставі вищенаведенного можливо означити кожду дійсну фігуру, котра дається своїми проекціями.

Коли, наприклад, дається проекція

трикутника abc (фіг. 59), то, проводячи в площі abc просту через точку b, рівнобіжно до горізонтальної площі, повертаємо ввесь трикутник біля bn так, щоб він став рівнобіжним до P_2. Вертікальна проекція повернутого трикутника ba_0c_0 дає його дійсну величину. При повороті вершина кута a описує луку в площі H навкруги d, радіус da буде гіпотенуза $d_0'a'$ прямокутного трикутника $a'f''d_0'$, яку знаходимо, маючи катети $a'f'$ та $f'd_0' = f''d''$. Так само вершина кута c описує луку навкруги m і після повороту лежить на a_0n.

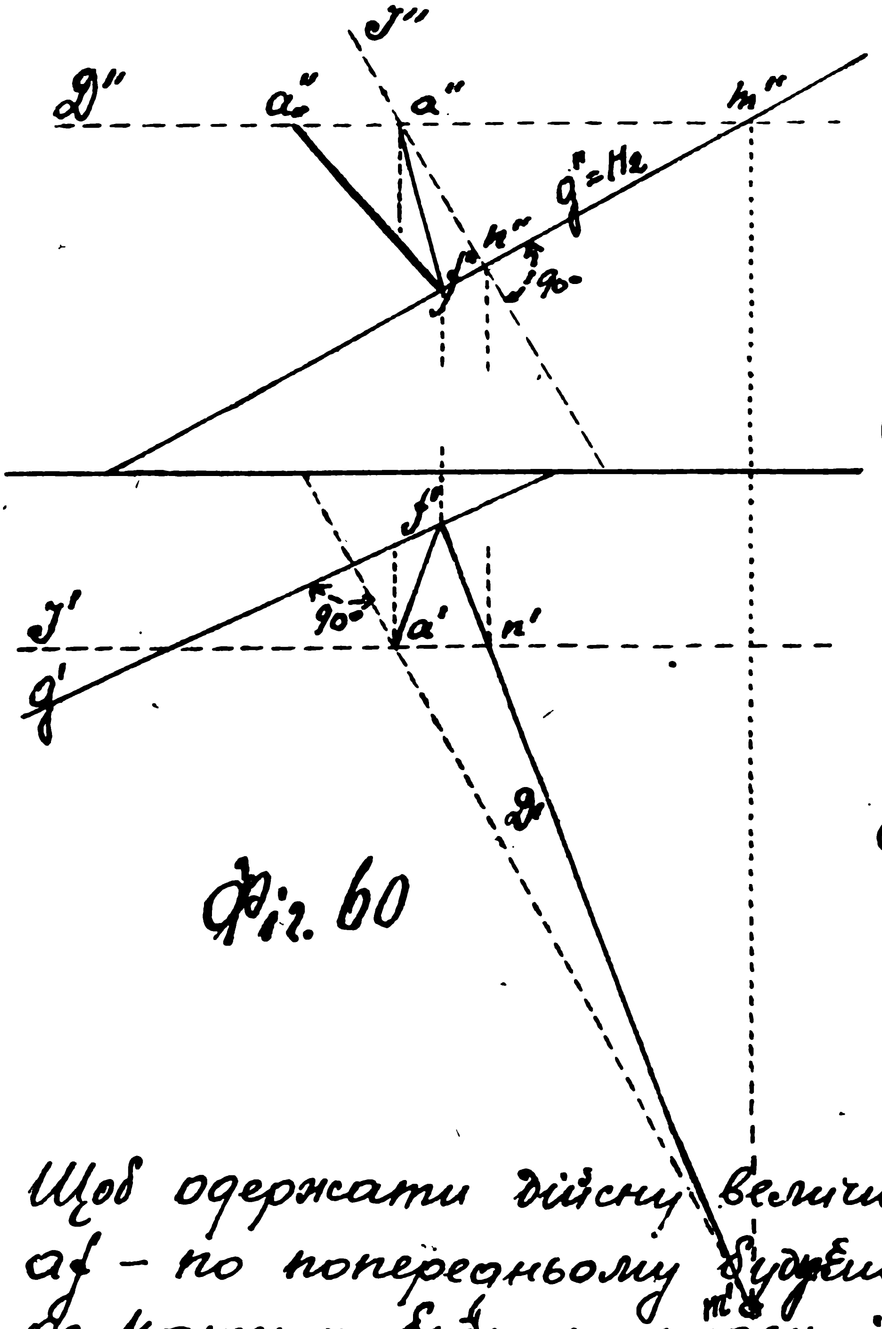


Фіг. 59.

Вимірити віддалення точки a від простої g (фіг. 60).

Для цього через точку a проводимо площу рівновісну до простої g. Означаємо пересічення простої g з цією площею; ця точка й буде грунтом рівновісу, що спущений з a на просту g.

Сама конструкція така: через точку a проводимо просту D, рівнобіжну до P_1, та просту J, рівнобіжну до P_2. Маючи ці дві прості, означаємо слід площі $N = (DJ)$,



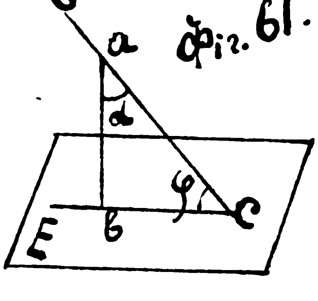
Фiг. 60

котра проходить через точку a і прямовісна до простої g. Щоб найти точку $f = g \times N$, проводимо через просту g допоміжну площу H, прямовісну до P_2. Точка перетинення з площею N буде грунтом прямовіса, що опущений з точки a на просту g.

Щоб одержати дійсну величину $a_0''f''$ простої af – по попередньому будуємо трикутник, де катети будуть – проекції, а гіпотенуза – дійсна величина довжини.

Означити кут нахилу простої до площі.

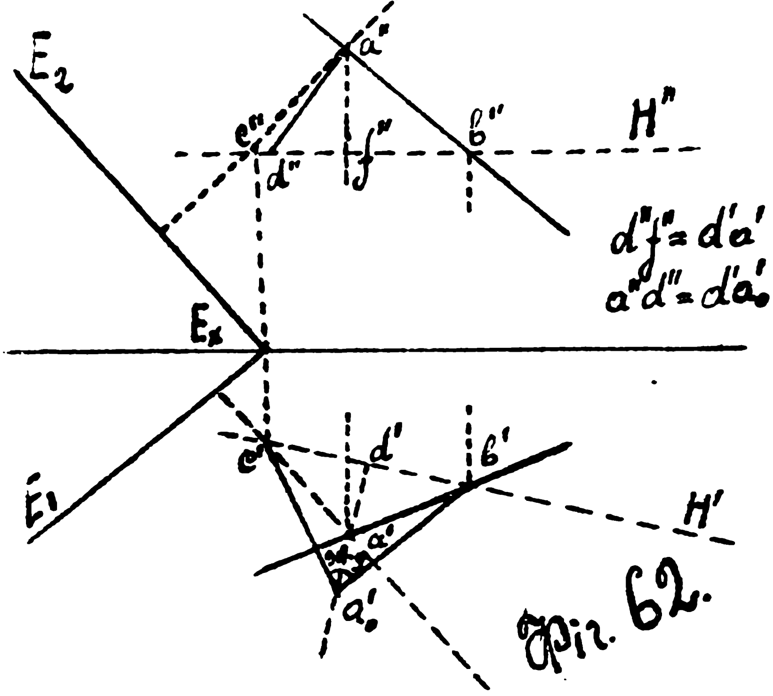
Під нахилом простої G до площі E розуміють гострий кут φ, котрий складає G зі своєю проекцією. Кут між рівновісом ав. та простою G є доповнення до нього.



Фiг. 61.

Коли спустимо, таким чином, з якоїсь точки простої рівновіс на площу, то означається кут між простою та рівновісом - цебто доповнення до кута нахилу, який шукаємо.

До данної площі $E(E_1E_2)$ з точки $a(a'a'')$, що лежить на простій $G'G''$ опускаємо рівновіс ac. Проводимо площу, рівнобіжну до горізонтальної площі проекцій і повертаємо трикутник $c'a'b'$ так, щоб він був рівнобіжним до P_1, тоді кут $c'a_0'b' =$ $= 90° - \varphi$.

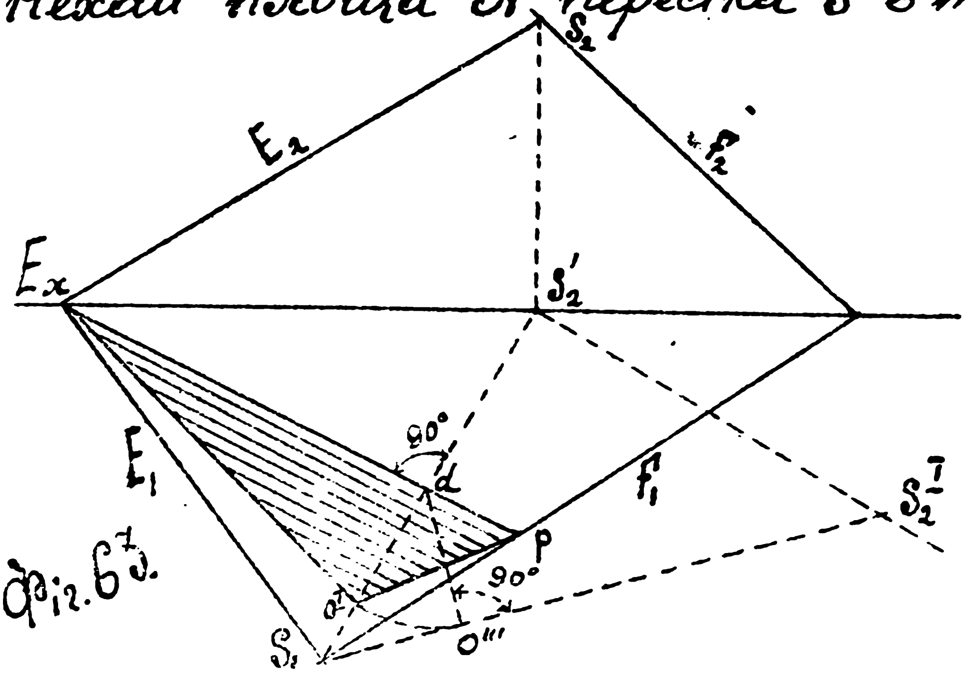


Фіг. 62.

Означити кут нахилу ε двох площ E та F (фіг. 63).

Означаємо просту пересічення $S = E \times F$ і проводимо до неї нормальну площу. Вона перетинає площі E та F по простим, які дають потрібний кут; дійсну величину його одержимо шляхом перекладення.

Нехай площа N пересіка S в точці O, слід F_1 в p та просту S_1S_2' в точці d, тоді трикутник $E_x op$ при O має кут ε. Перекладаючи $\Delta\, S_1S_2'S_2$

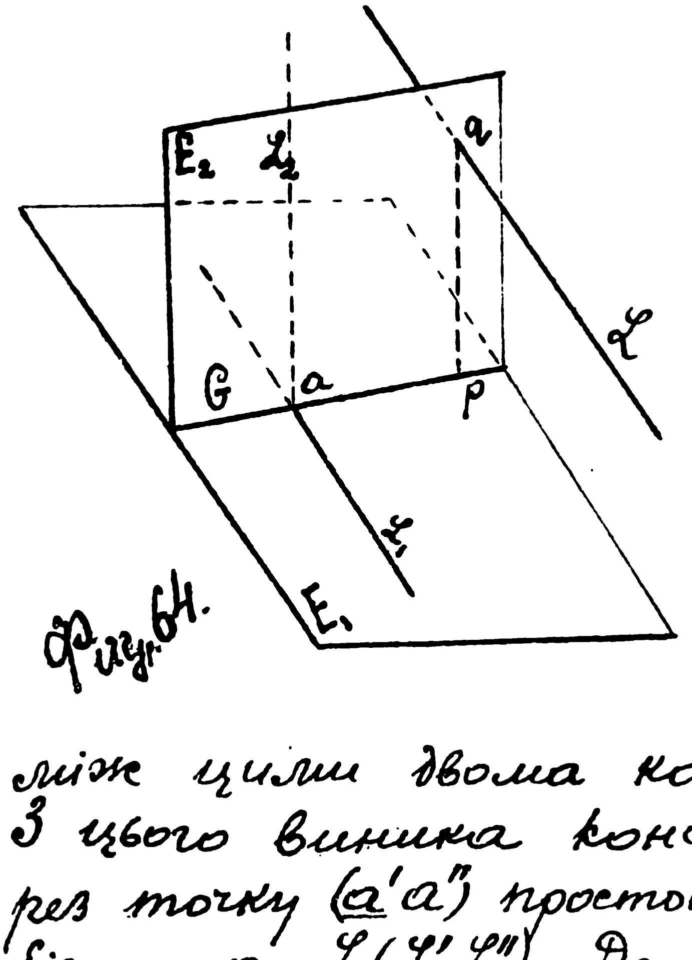


Фіг. 63.

в горізонтальну площу P_1, та проводячи do''' прямовісно до $S_1S_2^{I}$, отримаємо do'', яке й буде дійсною величиною $\underline{do}$. Робимо $do^{I} = do'''$ і одержуємо E_xO_1p — кут, що шукали.

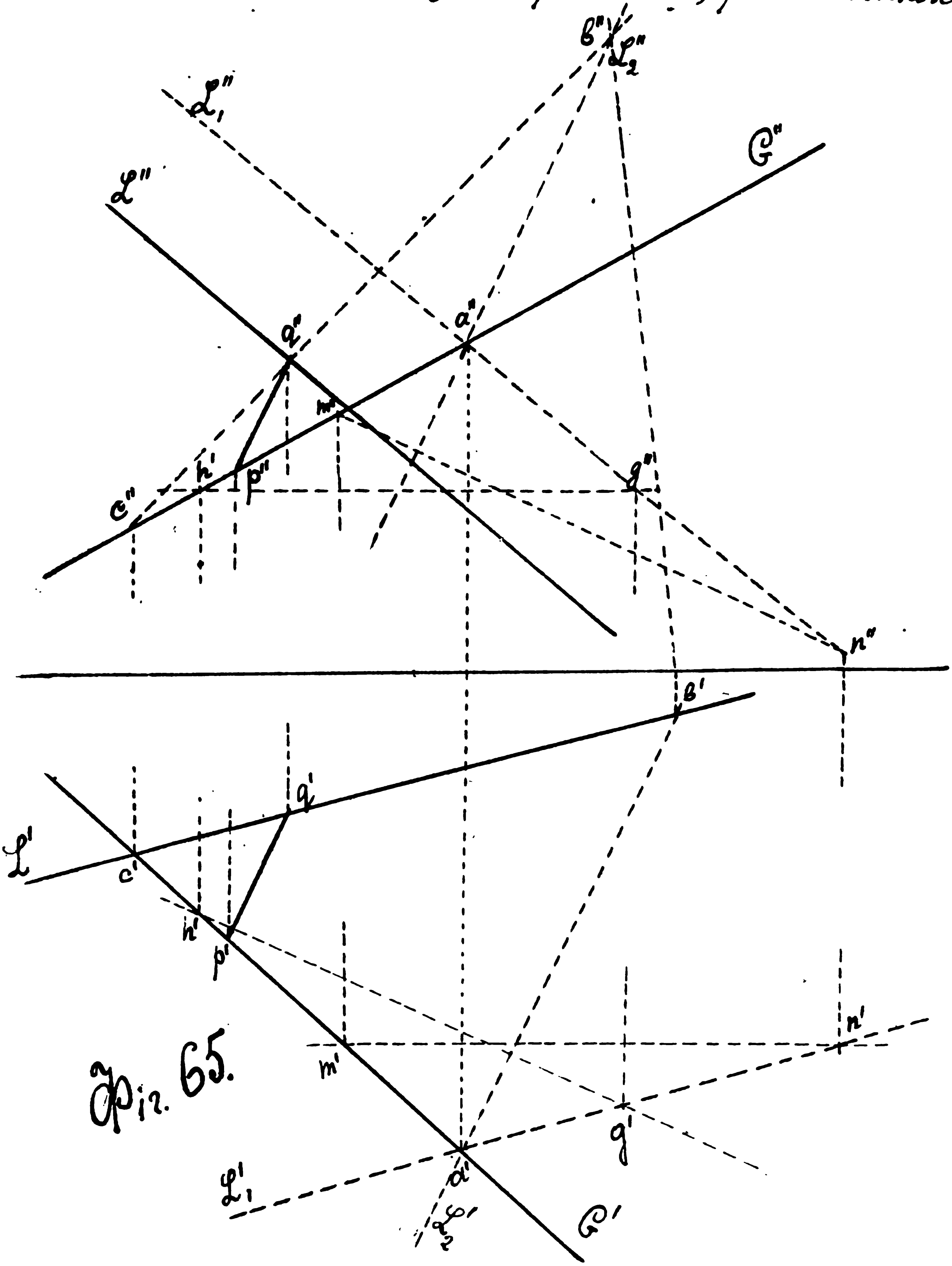
Означити найкоротче віддалення між двома косими простими G та L.

Через точку $\underline{a}$, яку візьмемо на простій G, проведемо просту, рівнобіжну до простої L. До цієї площі E_1 (GL_1) (фіг. 64 і 65) з тієї ж точки $\underline{a}$ поставимо рівновіс (L_1'). Прості G та L_1' означають площу E_2. Точка перетинення цієї площі E_2 з простою L дає точку q, з котрої опускаємо рівновіс на просту G, що дає нам саме коротке віддалення між цими двома косими простими.



Фиг. 64.

З цього виника конструкція (фіг. 65): через точку $(\underline{a}'a'')$ простої G проводимо рівнобіжну до $L(L'L'')$. До площі E_1 (зазначеної простими $G'L_1'$ та $G''L_1''$) проводимо рівновіс $L_2'L_2''$, як робили це раніш, цебто: задаємось якоюсь простою, (що лежить на простих GL_2') рівнобіжною до горізонтальної площі: з точки a' на її горізонтальну проекцію опускаємо рівновіс L_2'. Так само задаємось простою, що знову таки лежить в площі цих простих, рівнобіжною



Фіг. 65.

до вертікальної площі; на її вертікальну проекцію з вертікальної проекції a'' опускаємо рівновіс L''_2. Означаємо перетинання простої L з площею E_2 (GL_2), для чого через просту L

проводимо площу (простіще всього горозантально проектуючу через горізонтальну проекцію L') та знаходимо точку перетинення $c''b''$ з L'' – q'' (горізонтальна проекція b' і c' лежать на горізонтальній проекції L'). З точки ($q''q'$) проводимо рівнобіжну до $L_2''L_2'$. Відрізок ($p''q''$ $p'q'$) й буде потрібне найкоротче віддалення між двома косими простями B та L.

Скласти сітку похиленої призми грунт котрої abcd стоїть на горізонтальній площі проекцій. Понеже боки грунта

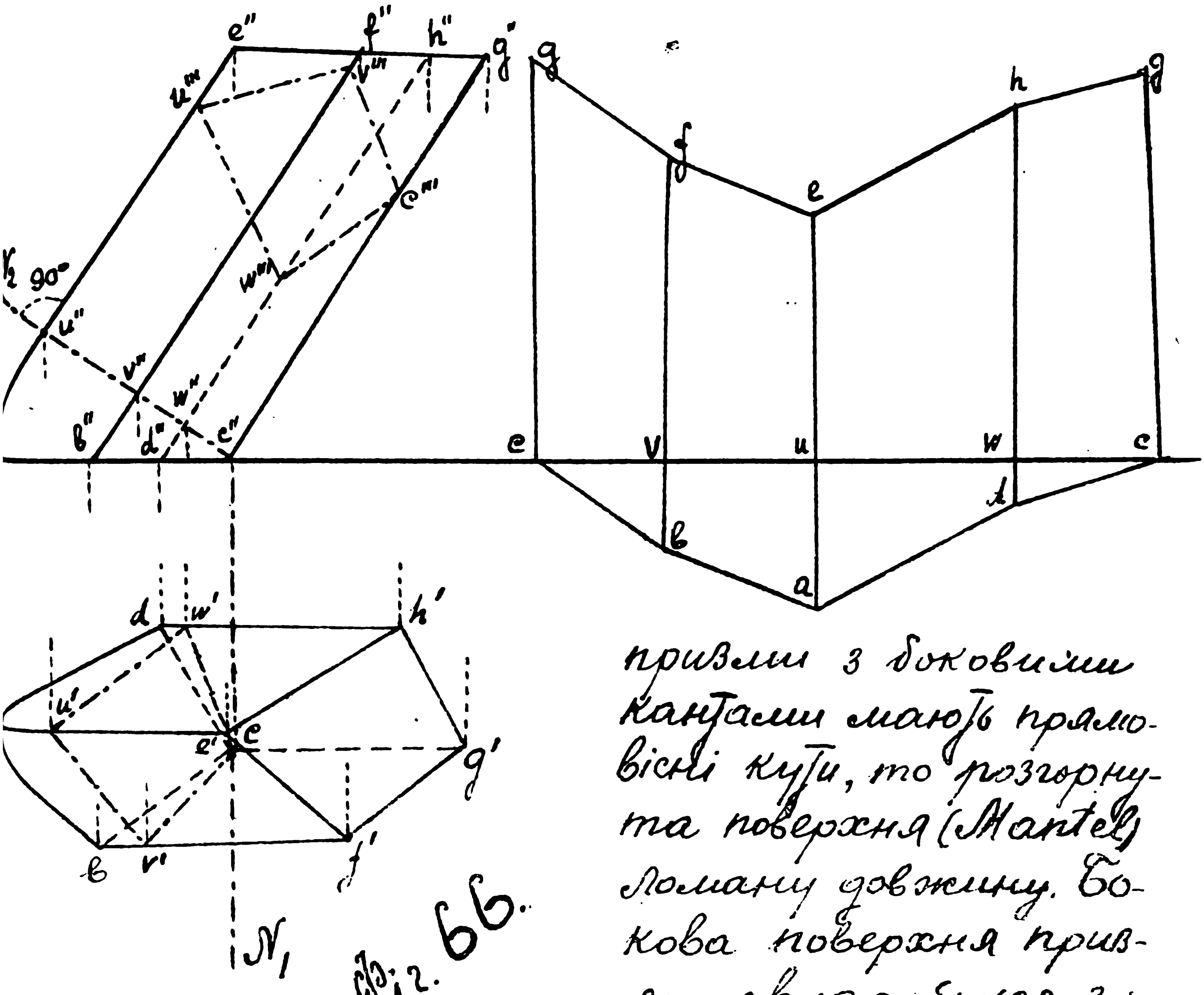


Fig. 66.

призми з боковими кантами мають прямовісні кути, то розгорнута поверхня (Mantel) ломану довжину. Бокова поверхня призми складається з паралелограмів, котрі викресляються. В дійсну величину, як тільки відомі два боки та діогональ.

Простішу конструкцію одержуємо при нормальнім січенню N, бо боки (Seiten) нормального січення рівновісні до бокових кантів і складають при розгортці частини прямовісніх простих. На фіг. 66 бокові канти рівнобіжні до площі P_2. Площа N рівновісна до P_2, цебто $N_1 \perp X$ а $N_2 \perp$ до $a''e''$. Вертікальна проекція нормального січення $c''e''$ і горізонтальна проекція – чотирекутник $u'v'c'w'$. Коли перекладемо площу N з чотирекутником $ucvw$ в вертікальну площу, то одержимо дійсну величину $u'''v'''c'''w'''$.

Щоб розгорнути призму, відкладаємо на якійсь простій cv, vu, uw та wc, які беремо з дійсної фігури січення. З цих точок ставимо рівновіси та відкладаємо на них вниз віддалення відповідних точок до вісі проекцій. Довжина канта залишаєтьса без зміни.

Відділ другий.

Торкання площ до стіжнів та стовпанів. Поверхня стіжна утворюєтьса, коли проста так рушитьса, що один її кінець завше знаходитьса в нерухомому пункті S (верхушці), а другий рушитьса по якійсь кривій C. Окремі положіння таких творящих цю поверхню простіх наз. мантель-ініями, або творящими.

Коли керуюча крива, по котрій рушитьса творяща, є круг- то стіжок наз. круговим стіжком і прямим круговим стіжком, коли вершина його лежить на рівновісі, що поставлений з середини круга.

При нахиленному стіжку вершина його може займати будь яке положіння.

Коли точка S віддалена в ∞, цебто творяща проста завше лишається рівнобіжною до самої себе, то стіжкова поверхня перетворюється в стовпакову. Ця поверхня є геометричне місце простих, котрі сковзять по керуючій кривій, лишаючись завше в одному й тому ж напрямку. Поверхня стіжка кожною площею, що проходить через її верховину перетинається на де-яке число творящих.

Коли дві таких вирізаних творящих складаються в одну, то площа торкається до стіжка по цій творящій. Кожна проста цієї площі торкається тоді до поверхні стіжка; така площа навивається площею торкання, або тангенціальною площею стіжка.

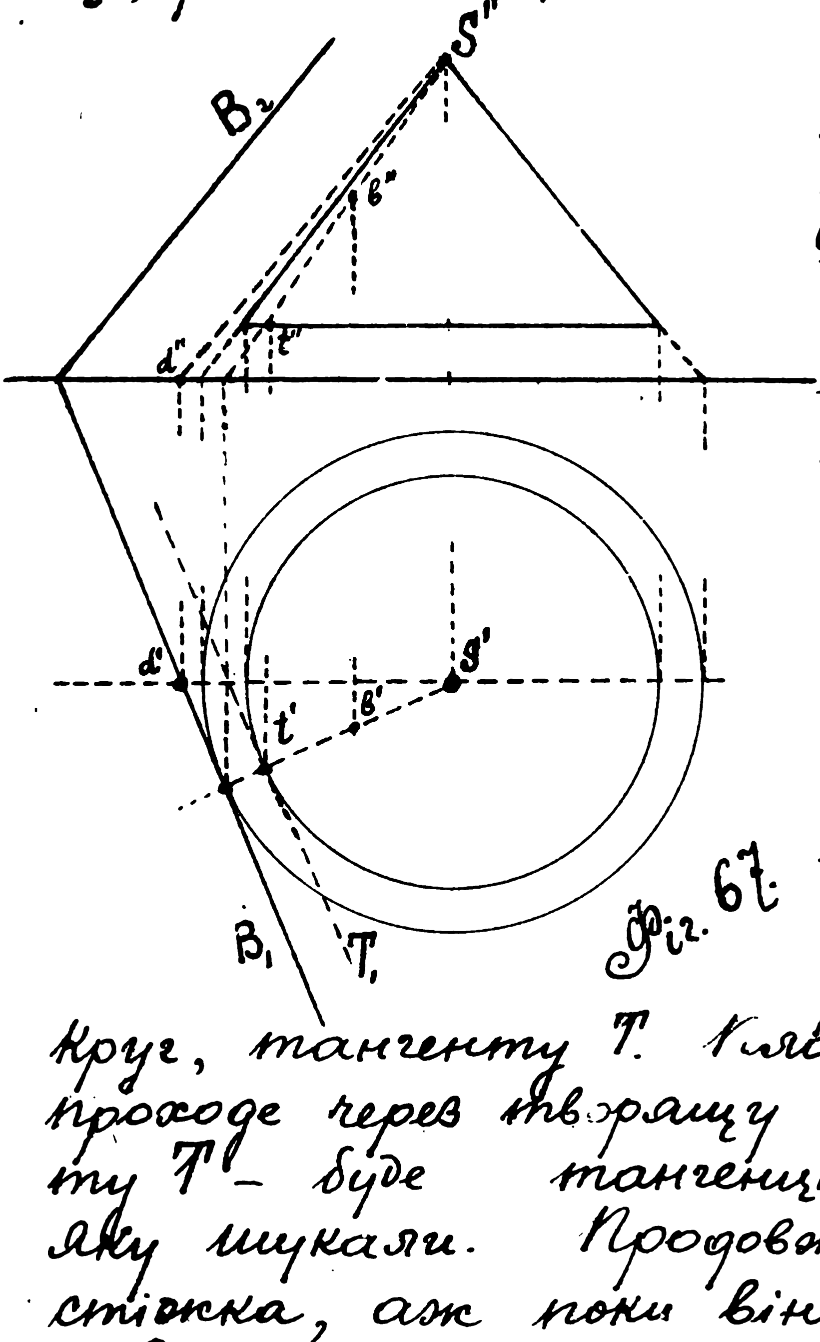
Для стовпака площа торкання проходе через безконечно віддалений пункт творящої простої, бо кожна площа торкання до стовпакової поверхні торкається до стовпака вздовж мантельлінії.

Коли стіжок перетяти якоюсь площею, то площа, що торкається до нього, дає просту пересічення $S = B \times E$, яка буде торкатися до кривої січення.

Це відноситься і до стовпака.

Через точку b, що лежить на стіжку, провести тангенціальну площу. (фіг. 67).

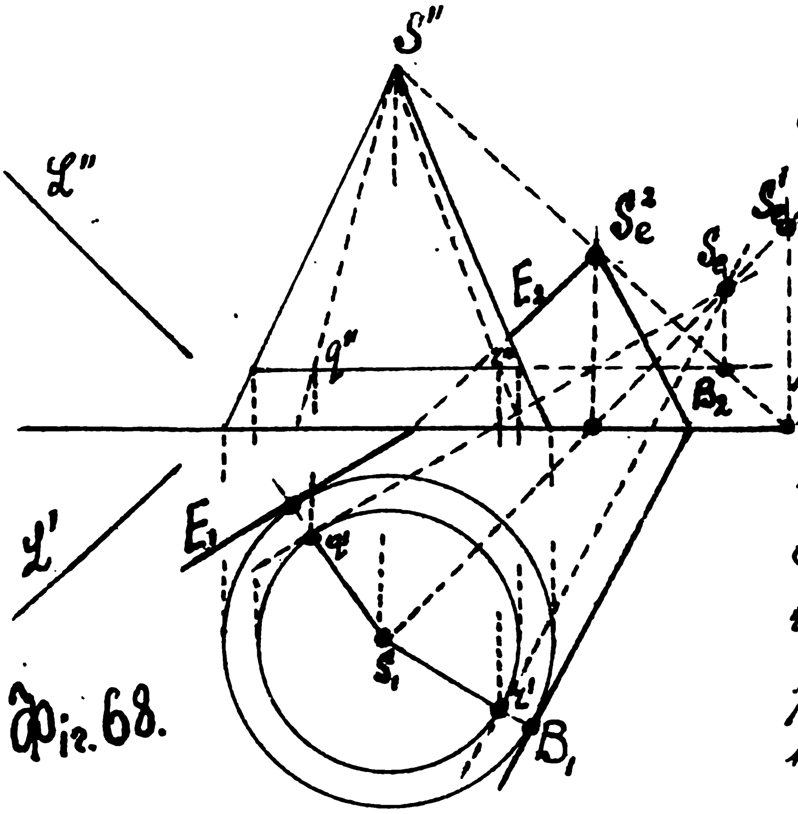
Нехай круг грунта стіжка лежить в площі, рівнобіжній до P_1. Потрібна площа B, що торкається стіжка, мусить проходити через творящу sbt (на котрій лежить данна точка b), та через просту торкання до керуючого круга в точці t – цими двома простими вона цілком означається. Проводимо через t, де творяща sb перетина керуючий круг, тангенту T. Площа $B(B_1, B_2)$, що проходе через творящу sbt та тангенту T – буде тангенціальна площа, яку шукали. Продовжуємо поверхню стіжка, аж поки він не перетнется з P_1. B_1 – буде горізонтальний слід площі, яку шукаємо, бо на ньому лежить горізонтальний слід творящої sbt і він торкається горізонтальної проекції керуючого круга. Щоб одержати вертікальний слід (B_2), проводимо через верховину стіжка просту, рівнобіжну вертікальній площі $s'd'$. Точка пе-



Фіг. 67.

ретинення її в B_1 — d, буде горізонтальним слідом тієї простої, що проходить через верховину і лежить в площі B. Проектуємо точку d' на вісь проекцій, d'' сполучаємо з S'' і отримуємо той напрямок, до котрого мусить бути рівнобіжний вертікальний слід B_2.

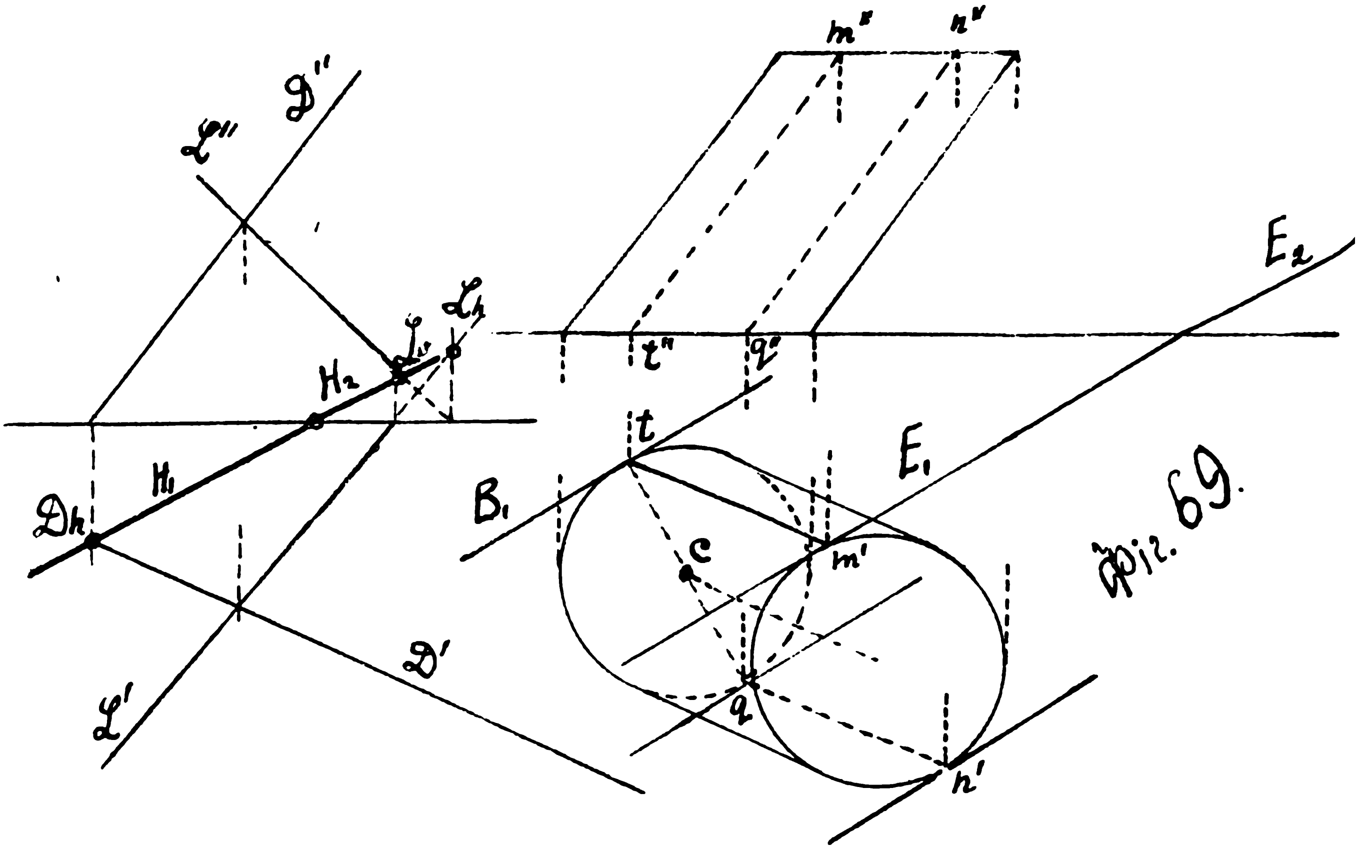
Даєтьса стіжок своєю верховиною та керуючою кривою; провести тангенціальну площу, рівнобіжну до данної простої (фіг. 68.) Площа, що торкаєтьса стіжка, мусить проходити через його шпиль. По вимозі задачі вона мусить бути рівнобіжною до данної простої. Значить проста, що проходить через шпиль стіжка, рівнобіжно до данної, мусить лежати в цій площі. Звідсіля конструкція: проводимо через шпиль S допоможну просту рівнобіжну L.



Фіг. 68.

Означаємо точку перетинення її S_e з площею керуючої кривої. З цієї точки S_e проводимо тангенти $S_e r$ та $S_e q$. Площа, яку проведемо через верховину S та одну з цих тангент, і буде тою площею, яку ми шукали. Як продовжити стіжок аж до перетину з P_1, то площі, що торкаються, будуть - $E(E_1 E_2)$ та $B[B_1 B_2]$.

Провести площу так, щоб вона торкалась стовпака й була рівнобіжною до простої L. Площа B, що торкається стовпака, має в собі його творящу. Та допоможна площа H, котру про-



Фіг. 69.

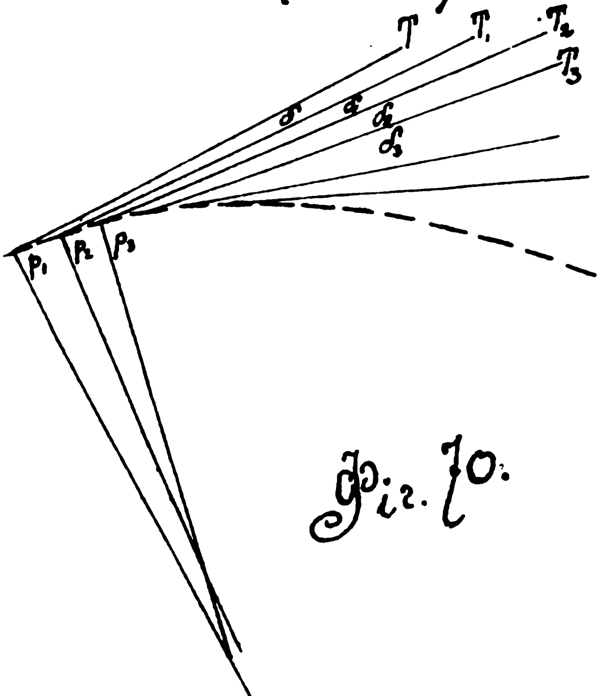
водимо рівнобіжно до творящих стовпака через данну просту L, наочно буде рівнобіжна до B. Коли площі H та B рівнобіжні, то прості їх перетинення з площею керуючої кривої мусять бути рівнобіжні між собою. Звідсіля конструкція: Через якусь точку L проводимо просту D рівнобіжну до творящих стовпака. Означаємо слід H_1 площі, що проходить через D та L і рівнобіжно до цього сліда H_1 проводимо торкаючуся до стовпака. Таким чином утворена тангента B, дає слід площі, що торкається керуючої кривої. В нашому прикладові сліди B_1 та E_1 — є горізонтальні сліди двох можливих площ торкання. Вертікальні сліди їх мусять бути рівнобіжні до H_2.

Дається верховина, та керуюча крива стіжка; через точку ℓ, що не лежить на стіжку, треба провести площу, щоб вона торкалась до стіжка. Сполучаємо точку ℓ з верховиною S простою S_1, означаємо точку пересічення S_e з площею керуючої кривої і з одержаної точки S_e проводимо всі можливі тангенти до керуючої кривої. Тоді проведена через S та одну з тангент площа й буде тою, яку шукаємо.

Про криві.

Криву лінію можливо вважати за шлях точки, яка завше міняє своє положіння. Як що точка не зміняє напрямку свого руху — одержуємо просту; коли точка за час свого руху в кожний маленький момент зміняє напрямок свого руху — одержуємо криву лінію.

Криві бувають плоскі, або з одним викрутом, коли всі точки її лежать в одній площі; коли вся крива не лежить в одній площі — вона наз. кривою подвійної кривизни або простірною кривою. Розглянемо плоскі криві, цебто ті, що лежать в одній площі. Не вважаючи на те, що не можна вибрати таку малу частину кривої, котру можна було б виміряти і котру можна було б рахувати за просту — можливо уявити собі криву, що складається з таких маленьких лук, що ріжниця між такою лукою та хордою (тетивою), що її стягає, вже непомітна. Така безмежно мала лука, цеб то менша від усякої данної величини, називається елементом кривої і такий елемент можливо приймати за просту. На фіг. 70 ми маємо низку таких елементів — pp_1, p_1p_2… Їх можливо розглядати, як безмежно малі віддалення між двома безпосередньо слідуючими положеннями точки, яка міняє своє місце. Наколи уявим собі таке віддалення pp_1 продовженим, то утворена проста (фіг. 70) T матиме з кривою один загальний елемент і пересіка криву в двох безмежно близьких точках; вона наз. торкаючоюся або тангентою кривої. Загальний елемент їх наз. пунктом торкання тангенти. Тангента дає напрямок руху точки в кожній кривій. Коли точка завше зміняє напрямок свого руху, то кожна тангента з наступною тангентою мусить складати кут. Чим більший кут δ між двома сусідніми тангентами T та T_1, тим біль



Фіг. 70.

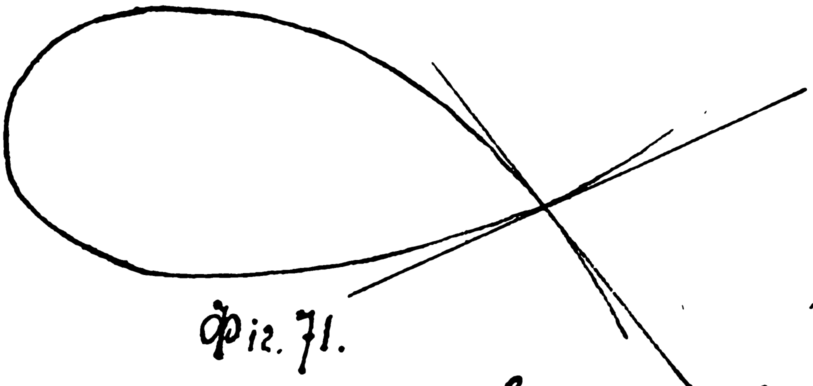
ме лука pp_1p_2 відхиляється від простої ав, тим більша кривизна кривої. Круг у всіх своїх точках має однакову кривизну, бо всі точки його відносяться до всіх тангент однаково. Таким чином, кривизну кривої в ріжних точках можна вимірати відповідними кругами.

Кривизна круга K тим більша, чим менший його радіус.

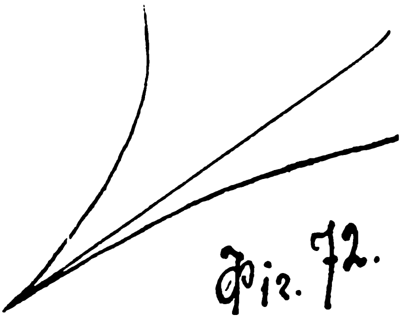
Проста, що пересіка криву рівновісно, цеб то рівновісно до тангенти, яка проходить через точку перетинання, наз. нормалли кривої. Нормалі двох сусідніх елементів перетинаються в точці, яка є центр круга, що проходе через точки цих елементів. Цей круг має з кривою два спільних споміжних елемента а значить і кут кривизни δ. Він має таку саму кривизну як і крива в цім елементі а тому й називається кругом кривизни. Його радіус наз. радіусом кривизни. Коли в якій-небудь точці кривої її радіус кривизни ρ, то кривизна кривої в цій точці $K = \frac{1}{\rho}$. Коли крива має верховину, то для неї круг кривизни має чотирі послідовних точки кривої відносно вісі, що проходить через верховину.

Коли від якоїсь кривої маємо цілу низку тангентів, котрі слідують одна за одною, то можливо прямо рукою накреслити криву, що сполучає всі точки торкання - така крива наз. обгортуючою кривою.

Окремими (Singuläre) точками наз. такі, котрі при порівнанню з другими мають якісь особливости. Наприклад, коли через якусь точку площі крива проходить двічи, получається подвійний пункт. В такому подвійному пункті крива має дві тангенти (ф.7

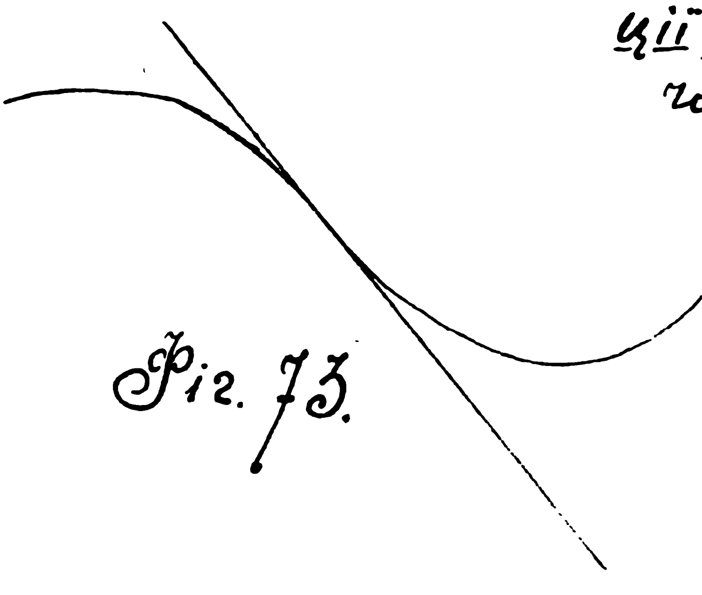


Фіг. 71.



Фіг. 72.

Коли точка, що творить своїм рухом якусь криву – зразу міняє напрямок свого руху на цілком протилежний – то маємо (ф. 72) точку повороту. Иноді на кривих бува така точка, що тангента, яка в ній проведена, поділяє криву як би на дві частини: одна частина лежить по один бік тангенти, друга – по другий бік (фіг. 73). Така точка називається точкою зміни, або точкою інфлекції, бо від цієї точки частина кривої, що була вгнута робиться вигнутою, або навпаки.

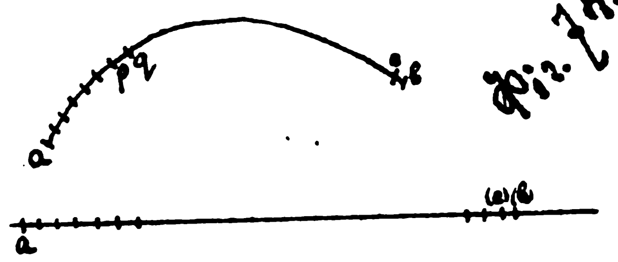


Фіг. 73.

Ректіфікація.

Якусь луку кривої ректіфікувати значить випрямити.

або взагалі найти таку просту такої саме довжини, як і лука кривої. Взагалі ректіфікація робиться так: на (фіг. 74) кривій вибираємо маленьку частинку pq, рахуючи її за шматочок простої і, починаючи з точки a, виміряємо, скільки равів вона укладеться. Нехай послідня точка буде c, так що cb<pq. Таким ж чином і стільки ж равів одкладаємо pq на простій від (a) до (c). Окрім цього залишається частинка cb=(c)(b), котру треба додати, щоб одержати випрямлену криву.

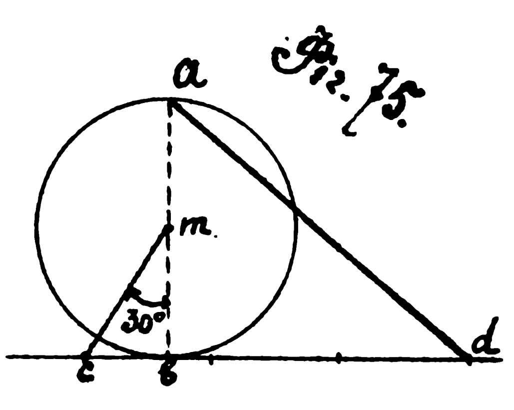


Фіг. 74.

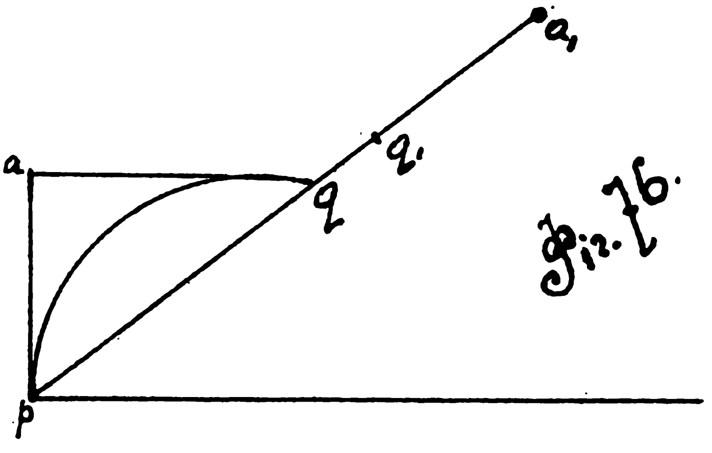
Ректіфікація круга (фіг. 75).

В точці b проводимо тангенту. В центрі при m відкладаємо кут 30° і проводимо радіус до пересічення в точці c тангенти. Починаючи від точки c відкладаємо 3 радіуси аж до точки d. $cb = \frac{1}{3} r\sqrt{3}$

$$ad = \sqrt{4r^2 + (3r - \tfrac{1}{3} r\sqrt{3})^2} = r\sqrt{13\tfrac{1}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3,14157r$$



Фіг. 75.



Фіг. 76.

Ректіорація якоїсь луки круга.

В кінцях луки (фіг. 76) проведемо тангенти; від точки q відкладаємо qa, тоді довжина луки буде приблизно $\frac{2}{3}$ pa, Довжину луки еліпса U можливо швидко підрахувати маючи піввісі $\underline{a}$ та $\underline{b}$ по дуж конвергированому безмежному ряду

$$U=\pi(a+b)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+\left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6+\dots\right]$$

Криві, що обгортують. Коли якась лінія пересовується згідно якомусь певному закону, як напр., центр круга однакового радіуса посовується по якійсь кривій, то можливо накреслити криву, яка б обгортувала всі його положення. Взагалі кожду криву можливо розглядати, як криву, що обгортає цілу низку своїх тангент.

Перетинення стіжка.

До плоских кривих, з якими найчастіще здибаємось і які мають особливе значіння для техніки, відносяться лінії січення стіжка: еліпс, парабола, гипербола. Вони утворюються, коли поверхню кругового стіжка уявимо собі продовженою по обох боках вершини і тоді перетнем його якоюсь площею.

Еліпс, як крива фокусів.

Еліпс є геометричне місце точок p, для котрих сума віддалень від двох постійних точок f_1 та f_2 завше є данна величина $2a$. (Фіг. 77). Криву цю легко викреслити. Нехай $\underline{kl}=2a$ данна сума віддалень. Поділимо $\underline{kl}$ на дві частини: $\underline{kn}$ та $\underline{nl}$. Описуємо з одного фокуса f_1 радіусом $\underline{kn}$ луку, а з другого f_2 радіусом $\underline{nl}$ другу луку. Одержуємо дві точки еліпса $(p_1 p_2)$. Мінаємо точки f_1 та f_2, одержуємо знову 2 точки

Шляхом зміни довжини kn та nl можливо одержати багато точок. Як поділити kl по половині, то одержимо точки c та d.

Точки f_1 та f_2 наз. фокусами або огнищами.

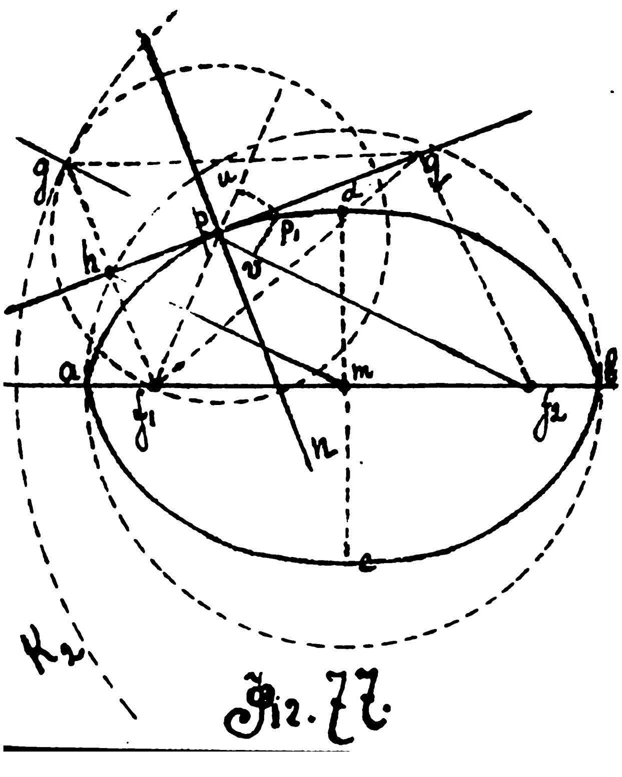
$ab = f_1b + f_2b = f_1a + f_2a = 2a$ – велика вісь еліпса.

$cd = 2b$ – мала вісь еліпса.

Щоб накреслити еліпс механично, закріпляємо в фокусах кінці нитки довжиною 2a, натягаємо оливцем і ведемо його по натягнутій нитці.

Тангента до еліпса.

Точка p кривої еліпса одержується, як пересічення двох допоможних кругів з центрами f_1 та f_2 та радіусами r_1, r_2, при чім $r_1 + r_2 = 2a$. Другий пункт еліпса p_1 отримується пересіченням двох кругів радіусів $f_1u = r_1 + d$ і $f_2v = r_2 - d$. Як взяти d безмежно малим, то точка p_1 (фіг. 77) безмежно наблизиться, хорда pp_1 перетвориться в тангенту в точці p і замісць луки up_1 або vp_1 можна брати два безмежно маленьких шматочки простої, які будуть рівновісні до f_1u та f_2v. Понеже для сусідньої точки p_1 трекутника $upp_1 \cong vpp_1$, то елемент кривої pp_1 (цеб то тангента в p) поділяє на дво сумежний до f_1pf_2 кут. Звідсіля положення: Тангенти у всякій точці еліпса поділяють на двое



Фіг. 77.

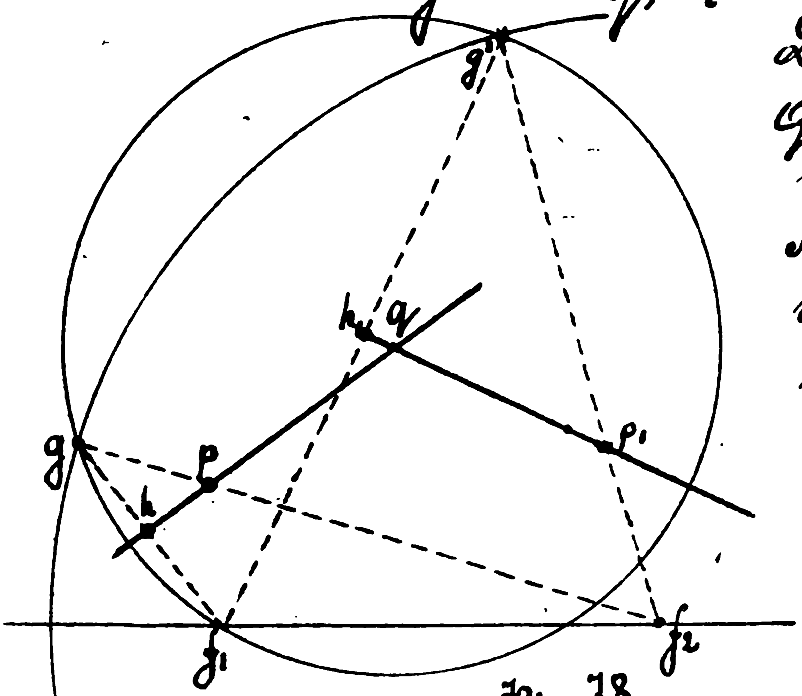
Кут суміжний до кута між фокусними лучами. Можна доказати, що всяка точка тангенти, за виключенням точки торкання, лежить по-за межами еліпса. Продовжуючи f_2p на $pq = pf_1$, маємо: $qf_2 = pf_1 + pf_2 = 2a$. Сполучивши якусь точку $\mathfrak{q}$ тангенти з f_1 та f_2, маємо: $\mathfrak{q}f_1 + \mathfrak{q}f_2 = \mathfrak{q}q + \mathfrak{q}f_2$ ...(1) В трикутнику $\mathfrak{q}qf_2$ $\mathfrak{q}q + \mathfrak{q}f_2 > qf_2$ ....(2) $\mathfrak{q}f_1 + \mathfrak{q}f_2 > qf_2 > 2a$ значить точка $\mathfrak{q}$ не лежить на еліпсі.

Нормаль pn поділяє на двоє кут межи двома лучами з фокусів. Як покладемо, що в точці f_1 поставлено якесь джерело світла, а еліпс є зеркальна поверхня, то всі проміні, що виходять з f_1 рефлектуються в другий фокус f_2.

Головний круг еліпса. З рівнобокого трикутника qpf_1 маємо, що f_1q рівновісно до hp і $hq = hf_1$. Пункт q лежить, таким чином, симетрично відносно f_1, відносно тангенти, і нав. протилежним до f_1 пунктом. Понеже $qf_2 = 2a$, то всі протилежні до f_1 пункти лежать на лузі круга, що описуємо з точки f_2 радіусом $2a$. Описаний з точки p круг радіусом pf_1 торкається круга K_2 в точці q. Протипункти другого фокуса лежать на другім великім крузі K_1 з центром в f_1. Таким чином еліпс є місце центрів всіх кругів, котрі торкаються данного круга і проходять через данний пункт всередині.

Проводимо mh рівнобіжно до qf_2; $mh = \frac{1}{2}qf_2 = a$. Звідсіля маємо правило: Ґрунти рівновісів, ~~ст~~ що спущені з фокусів на тангенти, лежать на великому крузі K_0, що описаний на великій вісі, як на діаметрові.

Тангента з точки q, що не лежить на еліпсі.



Фіг. 78.

Для данної точки q означаємо її протипункт. Описуємо з одного фокуса, напр. f_2 (фіг. 78) радіусом $2a$ круг K_2, а з точки q другий, котрий проходить через фокус f_1. Обидва круги пересікаються в точках g та g'. Як спустити рівновіси з точки q на f_1g та f_1g' то й одержимо тангенти. Точки їх торкання лежать на простих $f_2g - p$ та $f_2g' - p_1$. (периметр еліпса для конструкції не потрібний - він служить для контролю.)

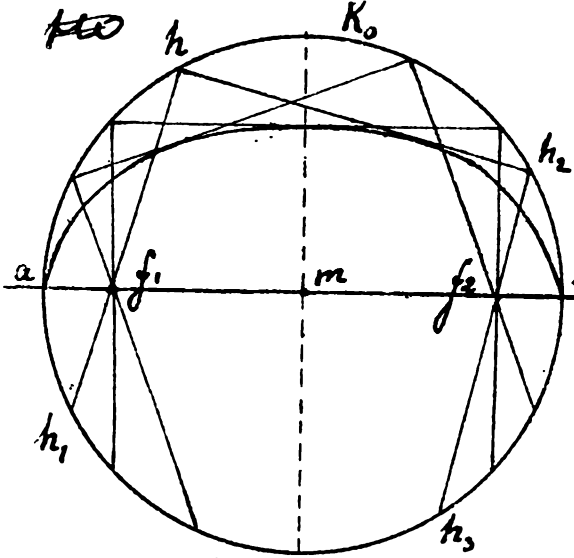
Тангента рівнобіжна до данної простої L.

Цю задачу можливо розглядати, як окремий випадок попередньої — коли точка q отсовується в безмежність. Круг з безмежно далекої точки q заміняється рівновісом з f_1 на L. Він перетинається кругом K_2, який описуємо з f_2 $(2a)$, в точках g та g'. Рівновіси до середини f_1g та f_2g' є бажані тангенти. Точки торкання лежать на простих f_2g та f_2g'.

Еліпс є крива обкруження. (фіг. 79)

Коли провести для круга K_0 через точки

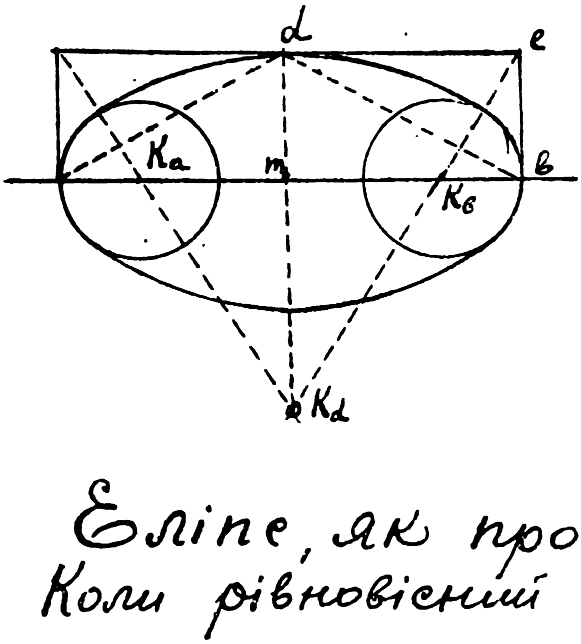
f_1 та f_2 дві рівнобіжніх хорди hh_1 та h_2h_3, то проста, що сполучує їх з одного боку великої вісі є тангента для еліпса. Коли через точки f_1 та f_2 провести довільно ~~но~~ велику кількість рівнобіжних хорд, то одержимо відповідно велику кількість тангент еліпса. З'єднавши точки торкання, одержуємо криву еліпса. Велика кількість тангент дає многокутник, боки котрого можна зробити такими малими, що вони майже не будуть відріжнятись від відповідних лук.



Фіг. 79.

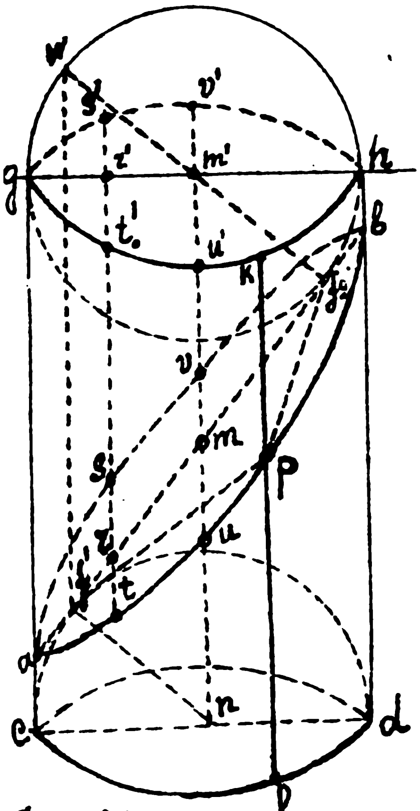
Круги кривизни в вершинах еліпса (фіг. 80).

При швидких конструкціях можливо вживати круги кривизни. Довжина $\frac{a^2}{b}$ та $\frac{b^2}{a}$ (вивід в Анал. Геом) дають можливість зробити таку просту конструкцію: доповняємо Δ bmd до прямокутника $mdeb$, та спускаємо з четвертого кута e прямовіс на bd. Він перетина вісі в точках K_b та K_d, котрі будуть центрами кругів. Таку ж конструкцію робимо і для точки K_a.



Еліпс, як проекція круга (фіг. 81).

Коли рівновісний стовпак перетинається якоюсь площею і в січенні бува замкнута крива, то ця крива є еліпс. На фіг. 81 маємо прямокутний стовпак з перетинаючою його площею ab. в нахильних рівнобіжних проекціях. Щоб вірно обслідувати фігуру січення, всовуємо в стовпак з обох боків кулі з радіусами = радіусу круга грунту стовпака. Ці обидві кулі торкаються стовпака по двом кругам cd та gh, площі котрих рівновісні до вісі стовпака і тому всюди мають однакове віддалення. Перша куля торкається площі $\underline{b}$ в точці f_1, друга куля — в точці f_2. Тоді pf_1 тангента до кулі n та pf_2 тангента до кулі m,. Проводимо через точку p творячу kl, тоді $pf_1 = pl$ та $pf_2 = pk$, бо тангенти, що проведені з одної точки до кулі мають однакову довжину $pf_1 + pf_2 = pl + pk = lk$. При пересуванні p по лінії січення міняються pf_1 та pf_2, але завше їх сума залишається постійною (Constante). Таким чином крива перетинення має прикмету еліпсу. З цього ж нарису можна одержати просту конструкцію для нахильних рівнобіжних проекцій кулі. Уявимо собі творящі стовпака, як проектуючі прості, навкруги gh та перетинаючу площу apb, як картанну площу, то еліпс apb буде нахильною рівнобіжною проекцією кру



Фіг. 81.

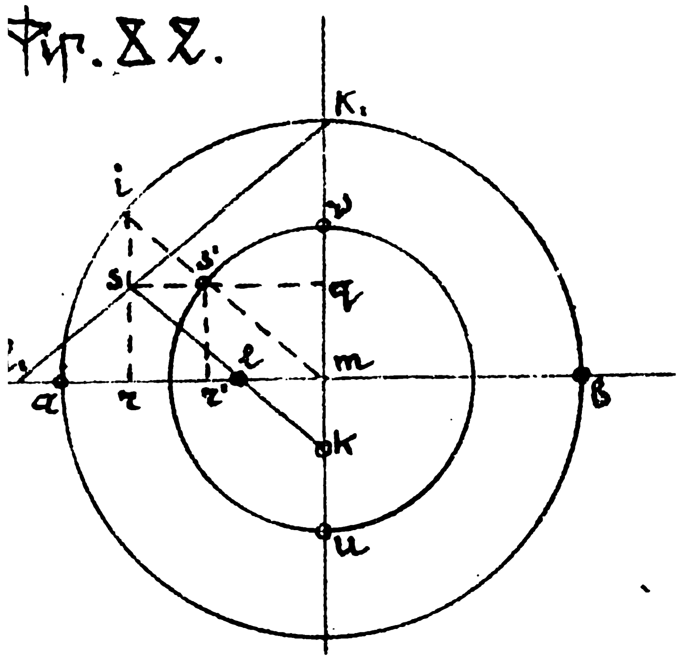
торкання gh. Діаметр gh спроектується, як велика вісь еліпса ab. Точка торкання кулі f_2 буде фокусом. Продовжуємо $f_2 m'$ до поверхні кулі, тоді wf_2 буде рівнобіжно $m'm$ цеб то: фокусні віддалення ~~відстань~~ ці проекції діаметру кулі wf_2, котрий є рівновісний до картинної площі. Рівновісний до gh діаметр $u'v'$, рівнобіжний до картинної площі, проектується в дійсну величину, як мала вісь еліпса. Звідсіля виника важне правило: Коли проектувати кулю нахильними рівнобіжними лучами на площу, то її картина буде — еліпс, фокуси котрого — проекції кінцевих пунктів діаметру, рівновісного до картинної площі. Це правило дійсне для кожної кулі хоч би вона і не торкалась картинної площі, бо картина не зміняється, коли пересунимо кулю в середині стовпака. Теж саме відноситься і до стіжка. Властне кажучи, це є так звана теорема Dandelin'a.

Прикмети еліпса, як проекції круга, та його конструкція. З попереднього маємо, що нахильна проекція круга guh (фіг. 81) на площу перетинення є еліпс з осями ab та uv. В цьому еліпсі всяку хорду, st, що рівновісна до вісі ab, можливо розглядати, як проекцію такої ж довжини хорди кругу s_1t_1, що рівновісна до gh. На підставі попереднього можна написати:

$mr : ma = m'r' : m'g$ або $mr : m'r' = ma : m'g$

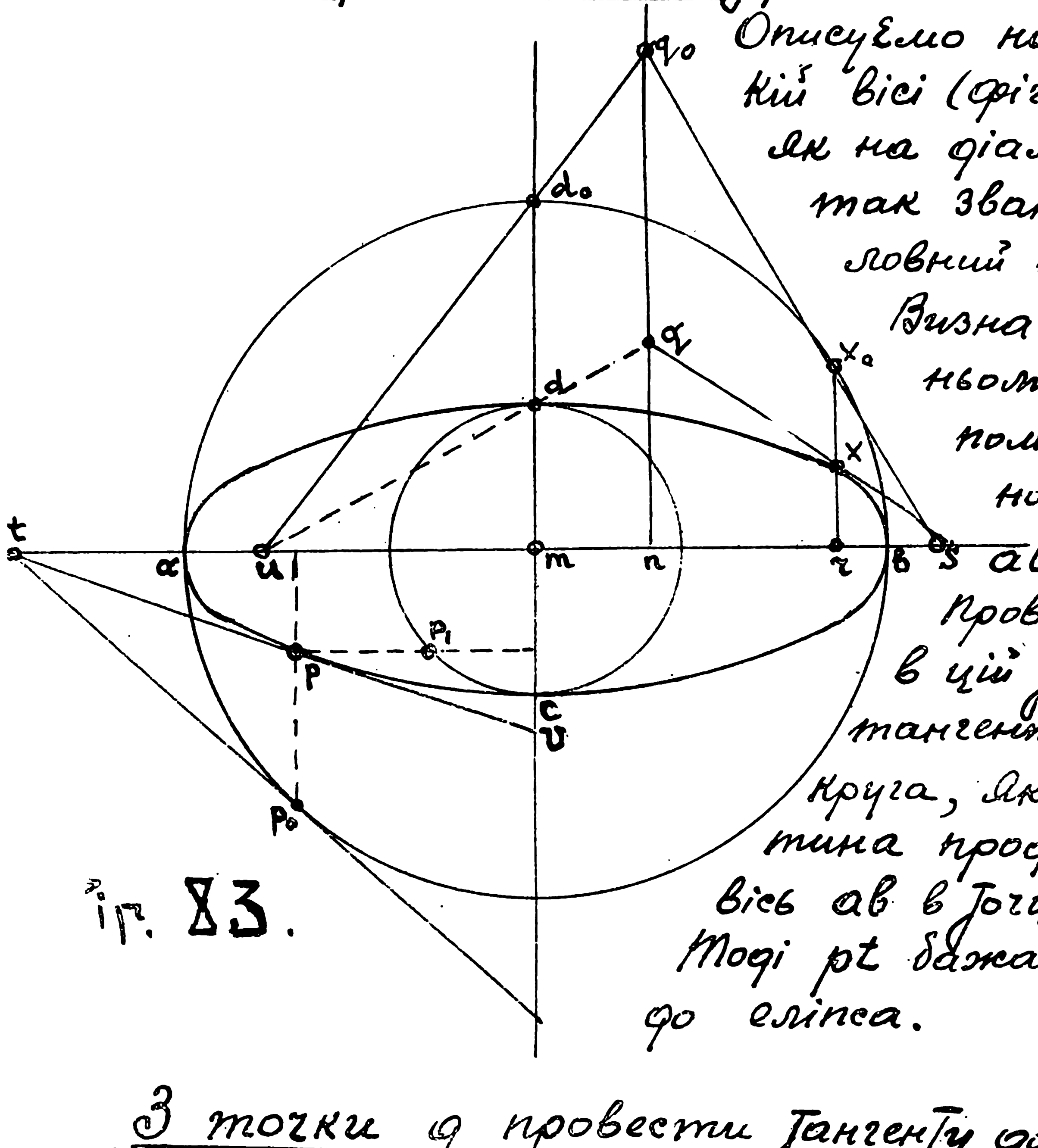
$mr : m'r' = a : b$. Звідсіля виника проста конструкція еліпса, коли відомі його піввісі. Нехай $\underline{a} = ma$ та $b = mr$, будуть піввісі еліпса. Описуємо біля ав та uv круги (фіг. 82). Центр m сполучаємо з якоюсь точкою i, та спускаємо рівновіс $ir \perp ав$ та $ss' \perp uv$, ці рівновіси перетинаються в точці еліпса бо: $mr : mr' = mi : ms' = a : в$; з трикутника rim маємо: $rs : ri = ms' : mi = в : a$; $rs = \frac{в}{a} ri$ Значить: еліпс можн одержати з круга, коли всі рівновісні до діаметра хорди поменшити в данному відношенню. Продовживши ss' до вісі uv, маємо: $qs : qs' = mr : mr' = a : в$ $qs = \frac{a}{в} qs'$ Можливо, значить, одержати еліпс шляхом побільшення в данному відношенню рівновісних до діаметру круга хорд. Як провести в попередній фігурі (82) sk рівнобіжно до im, то $sk = im = a$ та $sl = s'm = в$. Понеже це однаково для всіх точок еліпса, то можна сконструювати його з допомогою стрічки паперу. Відмічаємо на краю паперової стрічки довжину піввісі $ks = a$, робимо sl = малій піввісі в; кладемо паперову стрічку поперек через обидві вісі так, щоб пункт k був на uv, a пункт l на ав, тоді точка s відмітить точку еліпса.

Фіг. 82.



Відкладаємо на великій вісі $rl_1 = rl$, проводимо $l_1 s k_1$, то $sl_1 = sl = в$; $sk_1 = sk = a$ $l_1 k_1 = a + в$. Звідсіля положення: Сковзить лінія l,k, своїми кінцями по двох рівновісх простих, то пункт S, в якому вона діляється на частини a та $в$, описує іпс, що має піввісі a та $в$.

В точці p еліпса, що дається своїми ями, провести тангенту.



Описуємо на великій вісі (фіг. 80) $ав$, як на діаметрові, так званий головний круг. Визначаємо на ньому, з допомогою рівновісу до $ав$, точку p_0. Проводимо в цій точці p_0 тангенту до круга, яка перетина продовжену вісь $ав$ в точці t. Тоді pt бажана тан до еліпса.

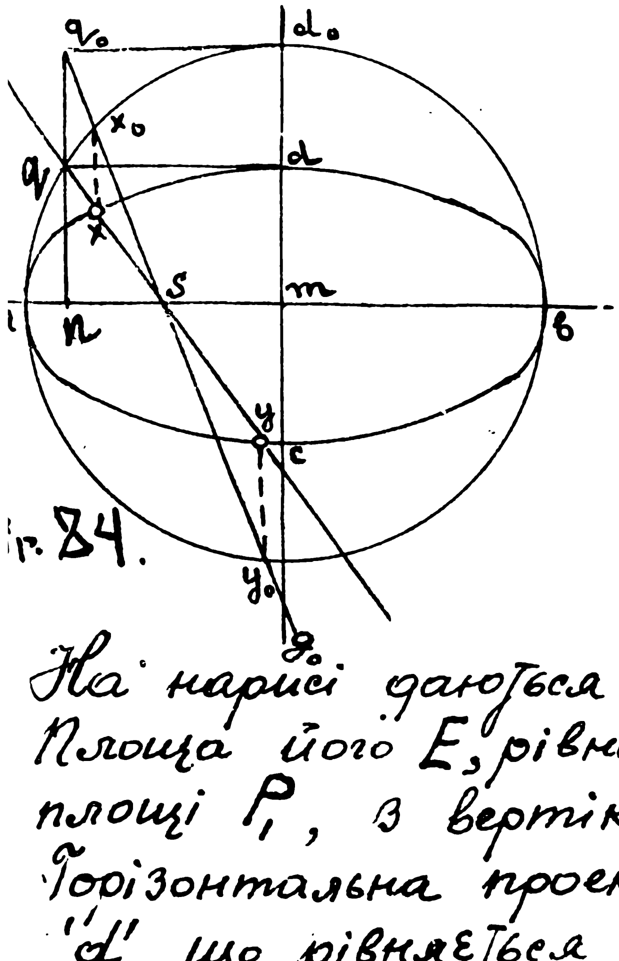
іг. 83.

З точки q провести тангенту до еліпса.

Кожній точці головного круга d_0 відповідає точка d на еліпсі. Пункт q_0, що відповідає точці q, можна опреділити з пропорції $nq : nq_0 = в : a$. Проводимо qd аж до пересічення з $ав$ в точці u, ud_0 продовжуємо до перетинання з nq, що рівновісна до $\underline{ab}$, в точці q_0. З точки q_0 проводимо тангенту до кола в точці x_0 і продовжуємо до пересічення з віссю $\underline{ab}$, сполучаємо S (точку зустрічі) з q, тоді Sq і буде одною з бажаних тангент, бо $rx : rx_0 = nq : nq_0 = b : a$, ц. т. $\underline{x}$ - є точка торкання на еліпсі

Означити точки перетинання простої Q з еліпсом, котрий дається своїми віссями

Беремо на простій Q (фіг. 84) якусь точку q і означаємо відповідний їй пункт q_0 з допомогою пропорції $nq : nq_0 = b : a$.

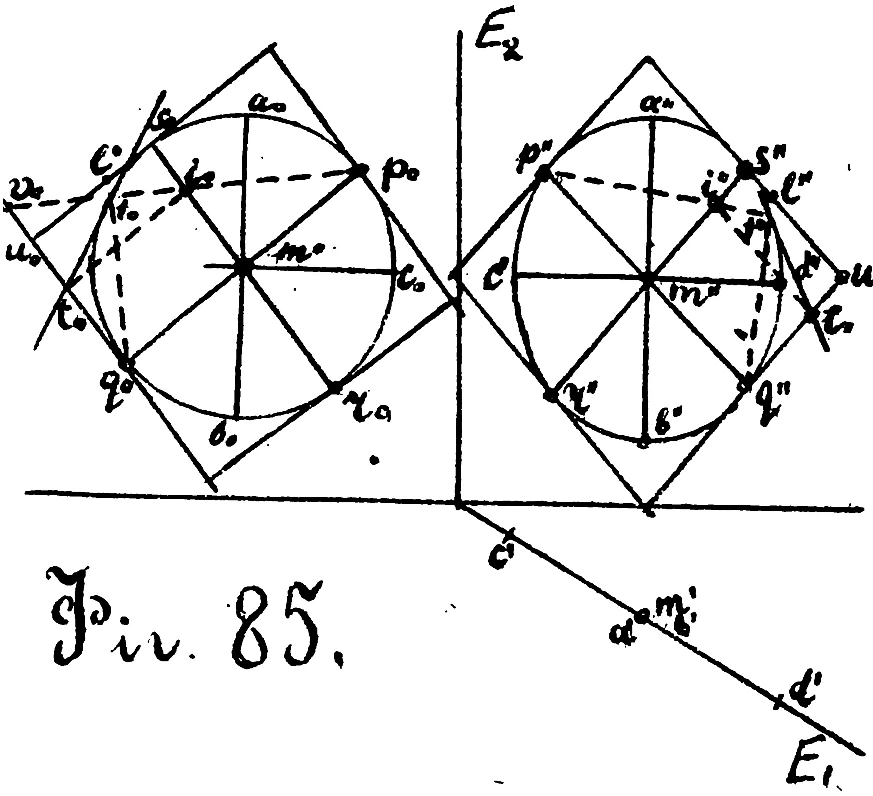


г. 84.

Простій Q відповідає тоді $Q_0 = Sq_0$. Вона перетинає головний круг в точках x_0 y_0, котрим відповідають точки x та y; вони й є бажані точки перетинення.

Кон'югиртні діаметри еліпса.

На нарисі даються проекції круга (фіг. 85) Площа його E, рівновісна до горізонтальної площі P_1, з вертікальною утворює кут ε_2. Горізонтальна проекція означається лінією 'd'', що рівняється діаметрові круга; вертікальна проекція — еліпсом з віссями $a''b''$ та $c''d''$. Як що цю вертікальну проекцію повернути біля E_2 так, щоб вона стала рівнобіжно до вертікальної площі, тоді вертікальна проекція еліпса буде кругом в натуральну величину. Як що провести в цьому повернутому крузі два взаємно рівновісних діаметри $p_0 q_0$ та $r_0 s_0$, то вони мають такі прикмети: 1) хорда рівнобіжна до одного діаметру поділяється другим на дві рівних частини; 2) тангенти, що проведені

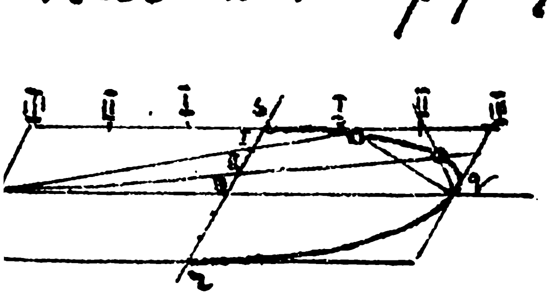


Фіг. 85.

в однім кінці діаметра - рівнобіжні до другого. Таким чином, чотирі тангенти складають біля круга квадрат. Вертікальні проекції діаметрів pq та rs суть два нахилених діаметри $p''q''$ та $r''s''$ еліпса, котрі мають такі же прикмети, як і діаметри круга з тією тільки ріжницею, що вищезгаданому квадратові відповідає паралелограм, що описаний біля еліпса. Еліп має безмежну кількість пар конюгиртних діаметрів, котрі взагалі складають гострі кути. Велика та мала вісь так само конюгиртні діаметри і именно одинокі, що взаємно рівновісні. В еліпсі, котрий є наслідок прямокутної проекції круга, велика вісь рівнобіжна, а мала - нормальна до сліду.

Щоб сконструірувати еліпс, маючи пару конюгартних діаметрів, починаємо з конструкції конюгартних діаметрів круга, котрі проектуванням не змінаються. Сполучаємо точку круга, напр. 1 з кінцями p та q діаметра, тоді вони ($1p$ та $1q$) відсікають на конюгартному до pq діаметрі $\underline{rs}$ та на рівнобіжній тангенті su однакові шматки $si = sl$ бо $\Delta imp \cong luq$. Коли si є n-та частина sm, то $sl = \frac{su}{n}$ і ми знаємо, що у еліпса таксамо $s''i'' = \frac{s''m''}{n}$ та $s''l'' = \frac{s''u''}{n}$. Дотична до круга в точці 1 проходить через точку $t = qu \times it \parallel pq$. При чім $p1$ перетинає qu в точці v, то $tv = t1 = tq$, звідсіля виника, що ti рівнобіжна до pq. Коли при цьому конюгартні діаметри $p''q''$ та $r''s''$, то точка еліпса $1''$ одержується так: поділяємо радіус $m''s''$ та рівнобіжну до $p''q''$ тангенту $s''u''$ на рівне число частин, сполучаємо p'' та q'' з s'' з близько лежачими частинами l'' та l'', тоді $1'' = p''i'' \times q''l''$. Проводимо нарешті ще $i''t''$ рівнобіжно до $p''q''$, тоді проста $t''1''$ в точці $1''$ торкається до еліпса.

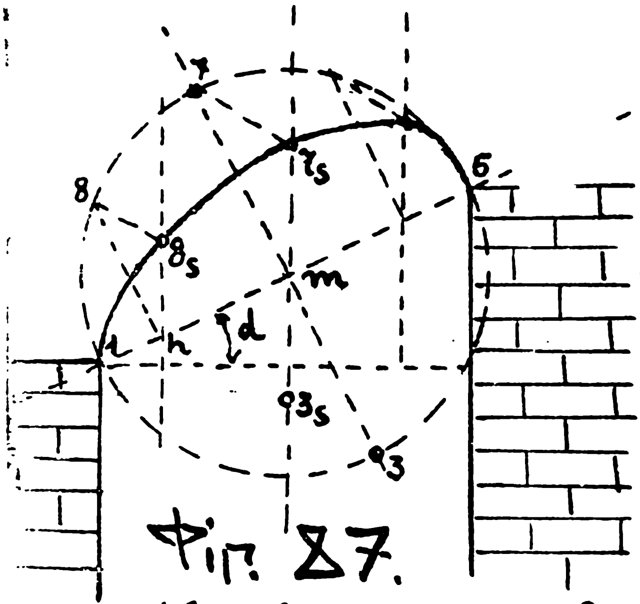
Вся конструкція провадиться так: півдіаметри $\underline{ms}$ та $\underline{mr}$ (фіг. 86) та кожну рівнобіжну до pq тангенту, поділяємо на три частини, та сполучаємо відповідні точки, як це видно з креслення.



іг. 86.

Сконструірувати сполучення для маршу сходів по еліпсу, коли дається віддалення між стінками та висота підняття.

Питання зводиться: сконструювати луку еліпса, коли відомі два кон'югиртних діаметри 15 та $3_s 7_s$ (фіг. 87). Бажану луку еліпса уявляємо собі як нахильну рівнобіжну проекцію круга, котрий має діаметром 15 або $7_s 3_s$, бо завше рівнобіжний до картинної площі діаметр проектується в дійсну величину.



Фіг. 87.

Описуємо біля діаметру 15 круг, та проводимо: m7 рівновісно до 15 та 77_s, таким же чином одержуємо точку 8_s. В Δ-ках $m77_s$ та $h88_s$ треті боки рівнобіжні.

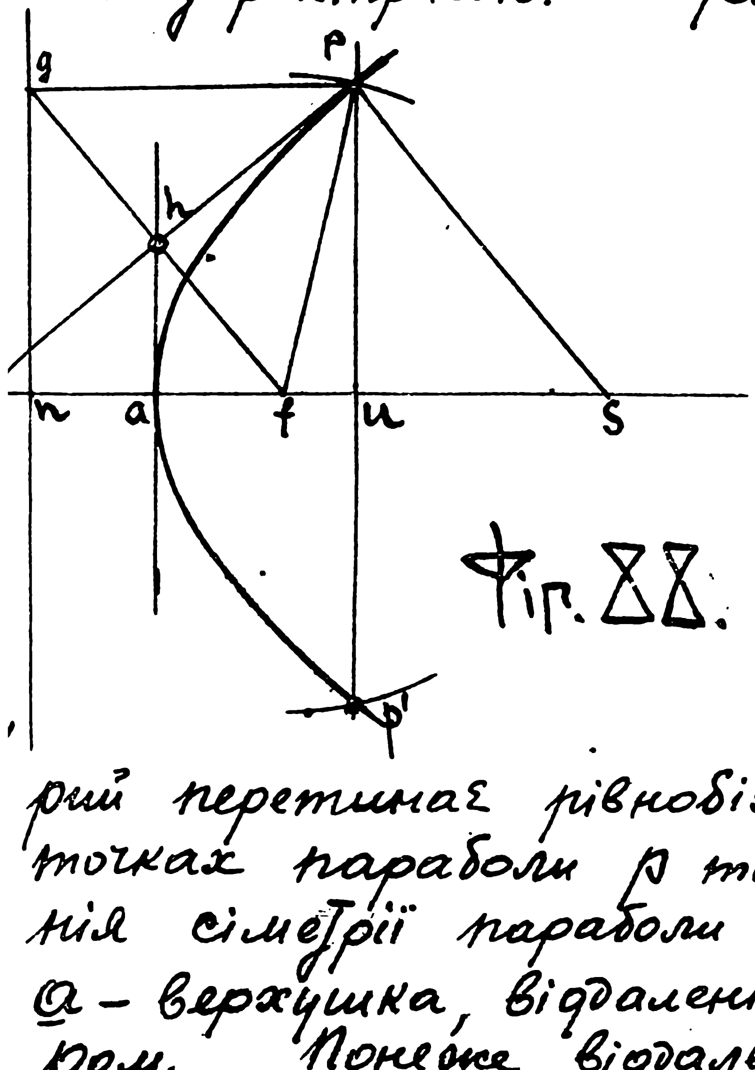
З допомогою кон'югиртних діаметрів можна рішати такі задачі:

а) для накресленного еліпса найти центр та його вісі. З допомогою рівнобіжних хорд знаходимо діаметр, поділ котрого дає центр. Описуємо з цього центру круг, котрий еліпс пересіка в чотирьох точках, тоді боки знайденого таким чином прямокутника рівнобіжні до осей.

б) В данній точці еліпса збудувати тангенту. Через данну точку проводимо відповідний діаметр. Поділяємо його та рівнобіжну до нього хорду на дві рівних частини. Проста, що сполучає середини, дає кон'югиртчий діаметр до першого діаметру, що й дає напрямок тангенти.

Парабола.

Парабола є геометричне місце точок p, котрі має однакове віддалення від постійної простої L, та данної точки f. Постійна точка f наз. фокусом, проста L – керуючою або директрисою. Спускаємо з точки f рівновіє на L і ділимо його на дві рівних частини. Точка a є верхушка параболи. Проводимо в якомусь віддаленню nu рівнобіжну до L, та описуємо з f, як з центру, круг радіусом nu, котрий перетинає рівнобіжну до L просту в точках параболи p та p'. Лінія nf є лінія сіметрії параболи і наз. віссю. Пункт a – верхушка, віддалення fn = p – параметром. Понеже віддалення nu можна взяти довільно великим, то значить, парабола поширюється в один бік до ∞.



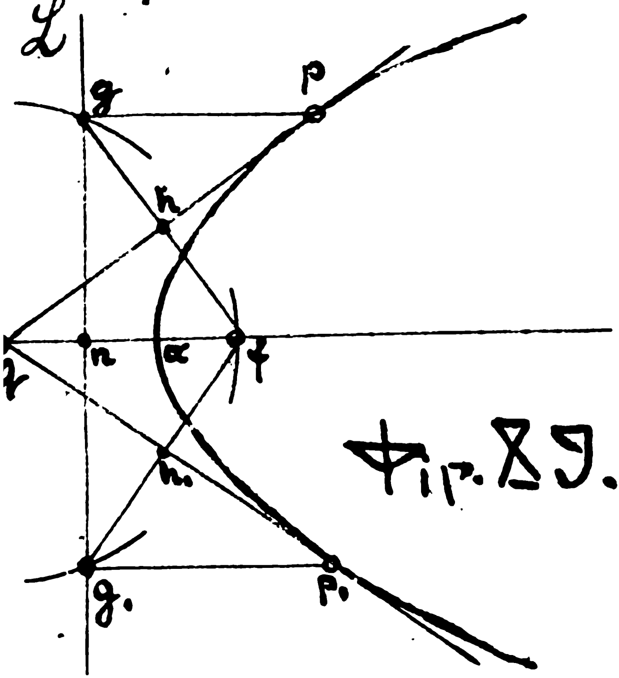
Фіг. 88.

Тангента в точці параболи (фіг. 88). Конструкція подібна тій, що робилась при еліпсі показує, що тангента параболи поділяє кут між утворюючими лучами на дві рівних частини. Тангента pt ділить кут

fpq, а нормаль ps - суміжний кут. Тангента в вершині рівновісна до вісі. Як проведемо fq, то маємо, що Δfpq рівнобокий, ц. т. $pt \perp qf$, та $hf = hq$. Пункт q назив. пунктом протилежним f відносно тангенти pt. Всі протилежні точки до f лежать на дірект-рісі ($\mathcal{L}$). Понеже h є середина fq, а a середина fn, то $ha \parallel \mathcal{L}$, ц. т. є тангента верхушки.

Теорема. Ґрунт рівновісів, що спущені з фокуса на тангенту, лежать на директрісі. Як з точки f провести до вертікальної тангенти луч fh, а з точки h поставити рівновіс, то це є тангента параболи. Коли одна сторона прямого кута проходить через постійну точку, то друга його сторона округляє параболу. $pu \parallel \mathcal{L}$ $ah = \frac{1}{2}up$. $th = hp$. Чотирі точки f, p, q та t складають ром. Довжина ut нав. підтангентою; вона поділяється на дві рівних частини вершиною параболи. Поставимо в p нормаль, яка пересіка вісь в точці S, uS нав. піднормаллю. Понеже $\Delta ups \cong nqf$, то $su = nf = p$. Піднормаль для всіх точок параболи однакова $= p$. Це дає можливість визначити Ka центр круга кривизни для вершини параболи, коли його розглядати, як перетинення вісі (нормалі в вершині) та безмежно близької нормалі. Радіус круга кривизни для вершини мусить бути $= p$. Ці прикмети підтангенти та піднормалі дають можливість легко сконструірувати нормаль та тангенту.

З точки q, що не лежить на параболі, треба провести тангенту (фіг. 89).



Фіг. 89.

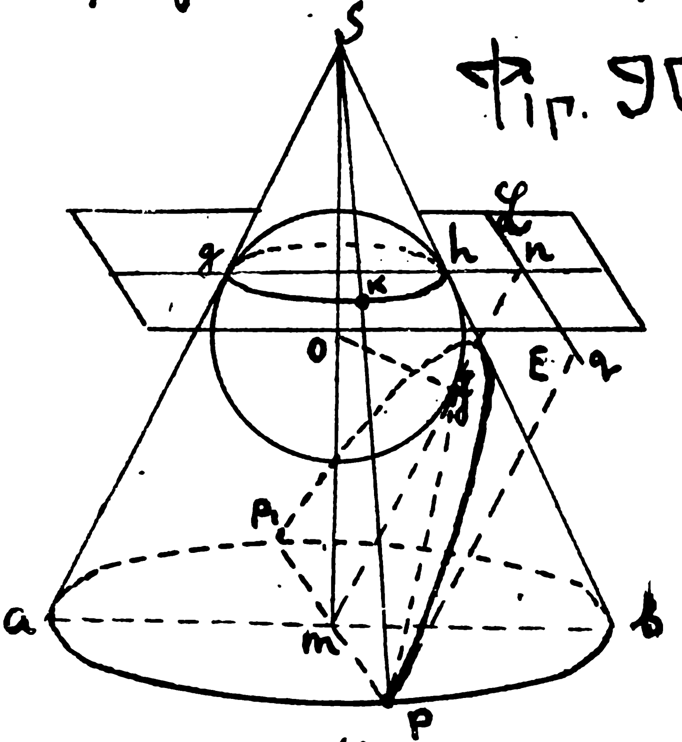
Описуємо з точки q круг через f, котрий L перетинає в точках q та q_1 та спускаємо рівновісні на середини fq та fq_1, котрі й будуть бажаними тангентами. Точки їх торкання лежать на рівнобіжних до вісі простих, що проводимо через точки q та q_1. Коли q відходить в безмежність, ц. т. дотична мусить бути рівнобіжною до якоїсь данної простої, (то коло описане з q та проста, що проходить через f, перетворюються в рівновіс, спущений з f на керуючу (директрису) L. В цьому випадкові маємо тільки одну дотичну.

Параболу одержуємо, як плоске січення прямого стіжка, коли сікуча площа E рівнобіжна до дотичної площі. (фіг. 90).

Нехай asb буде площа рівновісна до стіжка та E, - одночасно вона буде площею симетрії. Вона перетинає площу E по простій $\underline{mn}$, котра рівнобіжна до Sa.

Для кривої січення площі E з поверхнею стіжка дає вісь сіметрії.

Уявимо собі кулю, що торкається поверхні стіжка по кругу qkh, а площі E - в точці f. Площа дотичного круга qkh рівновісна до вісі стіжка, а значить і до площі asb і перетинає площу E по простій L, котра рівновісна до вісі mn.



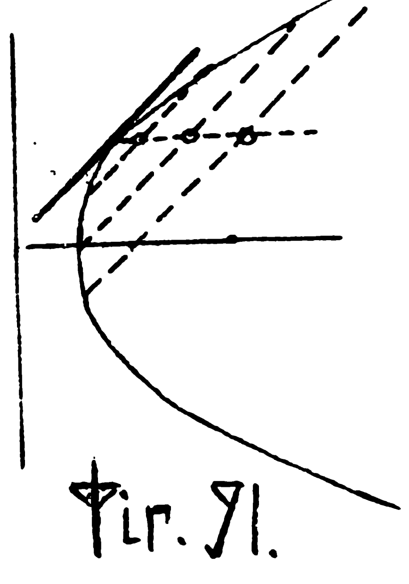
Фіг. 90.

Площі qkh та asb перетинаються по пр стій qhn. Точка f л жить в площі asb. Вісь fm є дотична д к [illegible]. Сполучивши якийсь довільний пунк p кривої січення з f та S - то вони, як шарові тангенти, мають однакову довжину. Проводимо через p рівновісну до вісі стіжка площу (січення стіжка apb), тоді ag = pq. Нарешті, проводимо pq ∥ mn, ц. рівновіс до L; тоді маємо таке рівнання:

$pf = pk = ag = mn = pq$. З рівнання: $pf = pq$ виявляється, що крива є парабола, фокус якої є f, а керуюча L.

Коли порівняти параболичне січення з елептичним, то виявляється, що параболу можна розглядати, як еліпс з безмежно далеким центром.

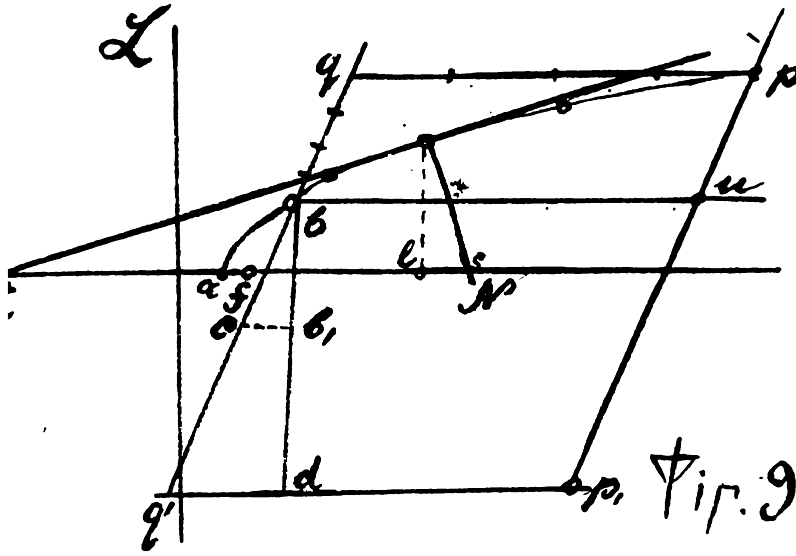
Проводимо в параболі дві рівнобіжних хорди, та сполучаємо середини (фіг. 91) Проста, що сполучає, проходить через безмежно віддалений пункт, ц.Т. вона рівнобіжна до вісі. Таку просту наз. диаметром



Фіг. 91.

параболи. Хорди, що поділяються нею, та дотична в кінці діаметра, - до диаметра кон'югиртні.

Параболу можна сконструірувати подібно еліпсу, коли дається якась її хорда pp_1 та кон'югиртний до неї диаметр ви (фіг. 92)

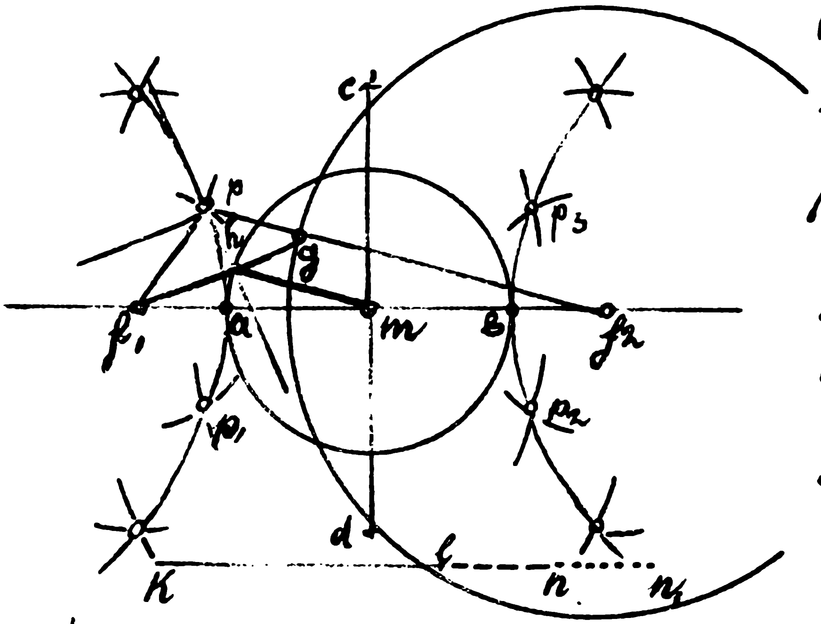


Фіг. 92

Проводимо pq||uв, поділяємо pq та вq на одне й теж число рівних частин. Щоб знайти вісь, проводимо $вв_1$ рівновісно до ви. Пропорція $\frac{вc}{вq_1} = \frac{в_1c}{q_1d}$ дає точку c. Вершину a та f одержуємо згідно з попереднім. (дотична поділяє кут між fp та pq на дві рівних частини, дивись ф. 89). Дотична в кінці діаметру рівнобіжна до хорд, що поділяються цим діаметром. Дотична в вершині рівновісна до вісі (ф. 92).

Гипербола.

Крива в прикметою, що кожна точка її має різницю віддалень до двох постійних точок f_1 та $f_2 = 2a$, називається гиперболою. Щоб знайти якусь точку p гиперболи, поділяємо довжину $2a = k$! якимсь пунктом, що лежить зовні, на два відрізки та описуємо одним відрізком kn біля f_2, та другим ln біля f_1 круги. Вони перетинаються в точках гіперболи, симетричних до f_1 f_2. Як перемінимо f_1 та f_2, то одержимо інші дві точки p_2 та p_3, котрі лежать на другій вітці гіперболи до перших симетрично відносно рівновісної вісі (cd) до $f_1 f_2$.



Фіг. 93.

Для вершини гіперболи $\underline{a}$ та $\underline{b}$ маємо: $af_2 - af_1 = af_2 - bf_2 = ab = kl$. Як брати точку $\underline{n}$ все більш та більш віддалену, то точки гіперболи все більш та більш віддаляються. Проста $\underline{ab}$, що проходе через фокуси, наз. дійсною або головною віссю, проста cd - уявляємою (imaginäre), або другорядною (Nebenaxe). Вона наз. уявляємою, бо вона дійсно не має точок гіперболи. Точка пересічення обох вісей $\underline{m}$ є центр гіперболи. Всі хорди, що йдуть через $\underline{m}$, наз. диаметрами. Віддалення фокусів від центру $mf_1 = mf_2 = e$ наз. лінейним ексцентрицітетом. Описуємо з $\underline{a}$ або $\underline{b}$ радіусом e круг, він перетина уявляєму вісь в точках $\underline{c}$ та $\underline{d}$. Довжина cd є довжина уявляємої вісі. Гіпербола утворюється, як крива перетинення площ рівновісного кругового стіжка, коли сікуча площа рівнобіжна до двох творячих (мантель лініям) стіжка. Доказ цього такий самий, як при еліптичному січенні, тільки в цім разі кулі лежать по обидва боки вершини стіжка.

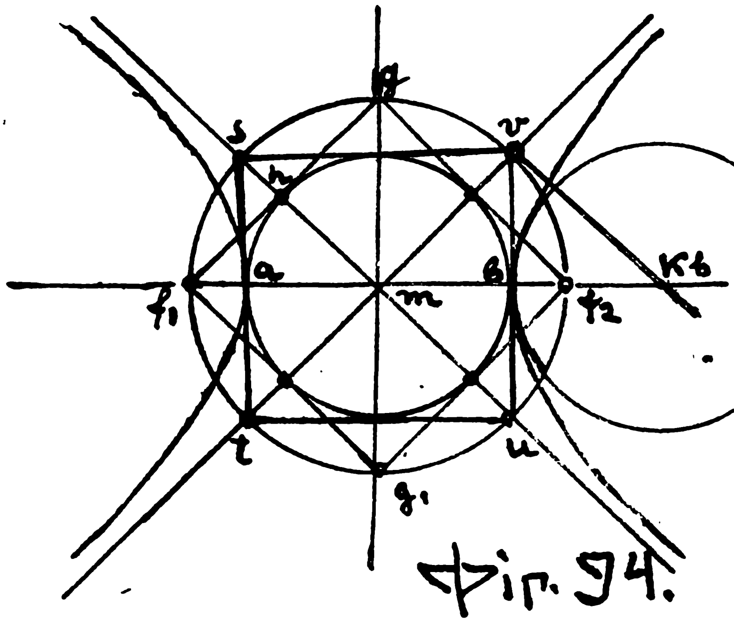
Дотична в точці гиперболи. Дотична до гиперболи поділяє кут між лучами, які проведені з фокусів, на дві рівних частини. Нормаль pn поділяє так само суміжний кут. Дійсна вісь є нормаль для обох вершин.

Головний круг гиперболи. Спускаємо рівновіс з f_1 на ph, тоді на простій pf_2 одержуємо протипункт q і так само, як при еліпсі, $qf_2 = 2a$. Відповідне відноситься і до f_2. Таким чином, геометричне місце проти-точок одного фокуса є круг радіуса $\underline{2a}$, що описаний з другого фокуса.

Сполучуємо $\underline{h}$ з $\underline{m}$; $hm = \frac{1}{2} f_2 q = a$, ц. т. грунти рівновісів, що спущені з фокуса на дотичну, лежать на крузі, що описаний біля головної вісі та називається головним кругом гиперболи.

Асимптоти гиперболи. Наколи точку дотику p гиперболи пересунемо в безмежність, то дотична переходить в асимптоту; кут f_1pq в вершині рівнобокого Δpf_1q зробиться нулем. В цьому граничному випадкові $\angle pf_1q = \angle pqf_1 = 90^\circ$ і $\angle f_1qf_2 = 90^\circ$. Точка q лежить на крузі, що описаний на f_1f_2, як на диаметрові.

Звідсіля виника конструкція: описуємо круг біля f_1f_2, як диаметру, який перетинається з кругом, що описаний з f_2 радіусом $2a$, в точках g та g_1 (ф. 94). Спускаємо на $f_1 g$ та $f_1 g_1$ рівновіси з центра $\underline{m}$, це й будуть бажані асимптоти.



Фіг. 94.

Конструкція показує, що гипербола має дві асимптоти, які проходять через $\underline{m}$ і лежать симетрично відносно обох осей.

Поставлені в точках $\underline{a}$ та $\underline{b}$ рівновіси перетинають асимптоти в точках s, t, v, u. Трикутники $mbv \cong mas \cong mf_1h$. Звідсіля маємо: $mv = ms = mf_1 = e$ та: $bv = as =$ половині уявляємої вісі — і що асимптоти є діоганалі прямокутника, боки якого є вісі. Гипербола наз. рівнобічною, коли її вісі однакові; тоді асимптоти взаємно рівновісні.

Щоб накреслити гиперболу вірно, крім асимптот, користуються ще й кругом кривизни в вершинах. Ставимо рівновіс vK_b до mv, тоді точка K_b є центр і $bK_b = \frac{b^2}{a}$ — радіус круга кривизни в вершині $\underline{b}$.

<u>Дотична до гиперболи з точки g.</u>

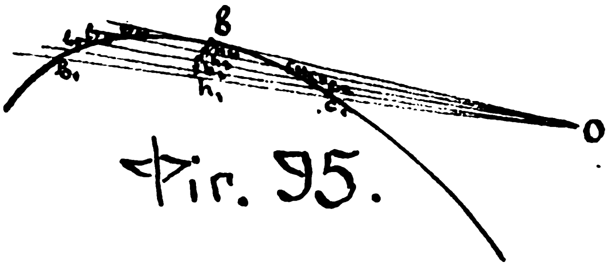
Конструкція цілком відповідає тій, яку ми робили для еліпса. Так само можна накреслити дотичну рівнобіжну до данної простої.

Приблизні конструкції дотичних та нормалей до всяких кривих. Помилкові криві.

З геометричних означень кривої можна в багатьох випадках вивести засіб конструкції дотичних та нормалей. /

Коли закон походження кривої, котра мається накресленою, невідомий, або пристосовання його непостійне, то для конструкції тангенти та нормалі користуємось таким методом.

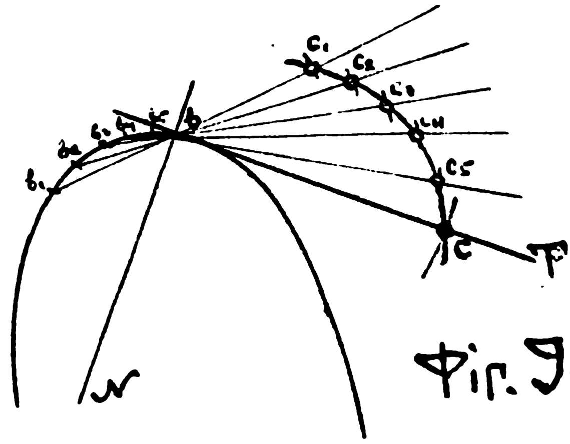
Накреслюємо приблизне положення тангенти ов простим прикладом до кривої лінейки (через точку О). Невірність буде тим більша, чим ~~пов~~ більше полога крива.



Фіг. 95.

Щоб одержати точку торкання в найвірніще, проводимо з данної точки О де-кілька перетинаючих простих (ф. 95) та поділяємо хорди b_1c_1, b_2c_2.... в точках h_1, h_2..... на дві рівних частини. Сполучаємо ці всі точки h, h_2.... кривою, котра наз. помилковою кривою; вона пересіче тоді криву C в точці в, це й є точка торкання. Коли точка О лежить десь в безмежності, ц. т. дотичні мусять бути рівнобіжними до якоїсь простої L, то по суті рішення від цього не зміняється.

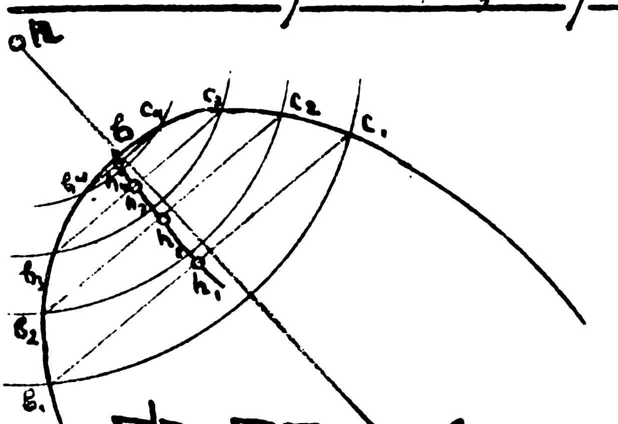
В точці в якоїсь кривої, котра накреслена, провести тангенту та нормаль. Для емпиричного проведення нормалі N (ф. 96) вживають дзеркальну лінійку Реуша. Площа дзеркала рівновісна до лінійки, що кладеться на папер. Коли рефлекс кривої в дзеркалі торкається накресленої кривої, то проста, що проведена до цієї точки торкання по краю лінійки дає нормаль. Тангента тоді – рівновсна до N. Щоб знайти тангенту безпосередньо в точці в, вживаємо допоможну криву. Беремо поблизу в низку точок $в_1$ $в_2$.... та проводимо перетинаючі $в_1 с_1$, $в_2 с_2$, $в_3 с_3$..... в один і той же бік та відкладаємо якусь однакову довжину. Одержуємо точки $с_1$ $с_2$ $с_3$..... З точки в описуємо круг радіусом $в_1 с_1$, тоді точка с належить до бажаної тангенти.



Фіг. 96.

З точки п, що не лежить на накресленій кривій, провести до неї нормаль.

Описуємо з п, як із центру, цілу низку допоможних кругів (ф. 97). Вони перетинають криву в точках $в_1$ $с_1$, $в_2 с_2$.... Середини їх h_1 h_2..... хорд дають помилкову криву, котра перетина криву с в точці в – ґрунті нормалі, яку шукаємо.



Фіг. 97.

Вальцові криві.

Походження кривих катання.

Нехай в площі нарису даються нерухома крива F та рухома крива W, - то кажемо: рухома крива котиться по нерухомій F, коли вона під час свого руху завжди торкається до неї - коли точка торкання (точка опіру) на обох кривих проходить однакові луки. Шлях точки p, котра нерухомо сполучена з кривою, що котиться, називається **вальцовою** (Rollkurven) кривою. (ф. 98).

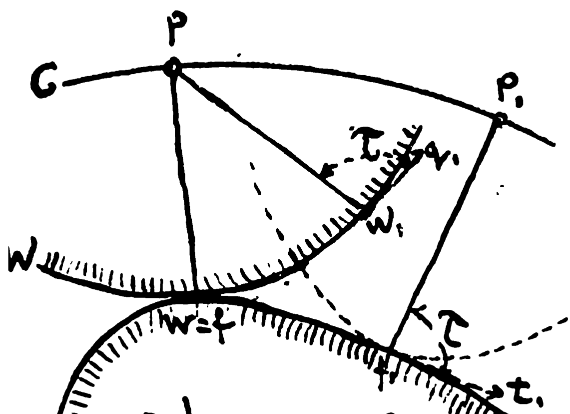
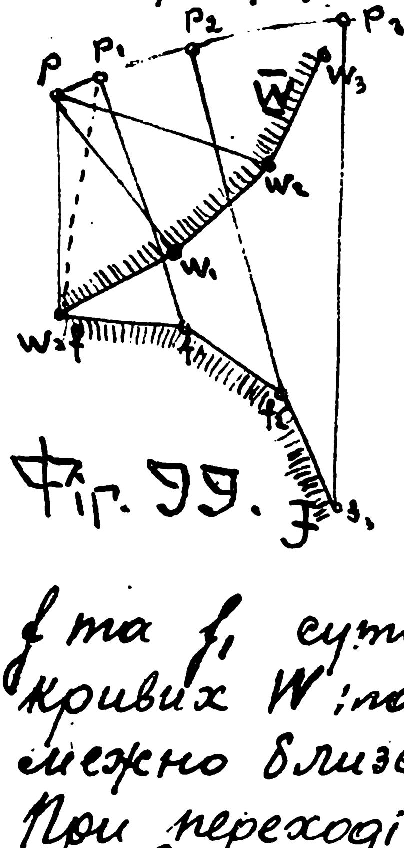


Fig. 98.

Криві W та F торкаються в данний мент в точці w=f; нове положення p_1 кривої катання C, що описує точка p, одержуємо, коли від f відкладемо однакові довжини лук $ff_1 = fw_1$ і коли тангенти в точках f_1 та w_1 дають однакові кути $p_1f_1t_1 = pw_1q_1 = \tau$

Нормаль та дотична в точці кривої катання. Щоб провести нормаль в точці p (ф. 99) уявимо собі безмежно близьку точку p_1. В цьому граничному випадкові переходу p в p_1 можемо розглядати, як оборот навкруги точки торкання f, котра складає моментальну точку обороту (центр моментального обороту, полюс) обіжного руху. Це можна легко бачити, коли замісць кривих W та F візьмемо два многокутника ww_1w_2.....

та ff_1f_2..з дуже малими боками $ww_1 = ff_1$, $w_1w_2 = f_1f_2$. Коли w та f лежать в одній точці, то многокутник ww_1w_2... повертається біля точки f аж поки його бік ww_1 не складеться з ff_1. Незмінно сполучена з $\overline{W}$ точка описує луку круга pp_1 з центром f та радіусом fp і $\angle pfp_1 = w_1ff_1$. Повертаймо ще раз многокутник навкруги точки f_1 так, що точка w_2 складається з f_2; тоді точка p_1 опише луку круга з радіусом f_1p_1 біля f_1. Продовжуючи таким чином далі, встановимо, що шлях точки p складається з низки лук, центри котрих лежать в кутах нерухомого многокутника. Уявимо собі, що боки многокутника безмежно малі, тоді многокутники переходять в криві W та F. w та w_1, f та f_1 суть дві безмежно близьких точки кривих W та F, одночасно p та p_1 дві безмежно близьких точки кривої катання. При переході W з одного положення в сусіднє, безмежно близьке, точка p описує безмежно малу луку pp_1, ц. т. напрямок моментального руху рівнобіжний до радіуса pf. Проста pf дає нормаль кривої катання C в точці p. Звідсіля положення: Нормалі кривої катання в точці p проходять через моментальну точку торкання f нерухомої кривої.



Фіг. 99.

Маючи це на увазі, можна висловити таке положення: Всяка крива катання може бути розглянута, як обгортуюча крива кругів, перемінних радіусів, центри котрих лежать на нерухомій кривій.

Циклічні криві.

Нехай якийсь круг W котиться по нерухомому крузі F, тоді точка w, що звязана з W, опише циклічну криву. До цього положення можна підвести випадок, коли один з кругів перетворюється в пряму лінію.

Циклічні криві складаються з конгруентних посовувань (Gängen), при чім кожний цікл утворюється при повному повороті круга, що котиться.

Як початкову точку, означаємо ту точку кривої, віддалення котрої від відповідної точки торкання найменше і рахуємо хід (або повне посовування) від одного утворення (Ursprung) до ближнього.

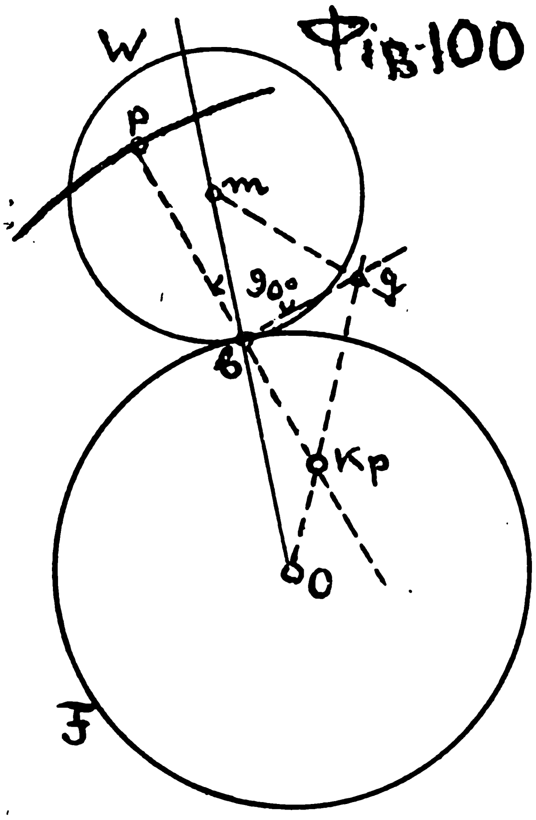
Циклічні криві вживаються в практиці при конструкції зубчатих колес.

Центр кривизни та радіус кривизни циклічних кривих.

(ф. 100). Щоб означити центр циклічної кривої в точці p - K_p, приймаємо положення Bobille: Нехай m та o будуть центри кругів W та F, котрі торкаються в точці b. Щоб одержати для точки p кривої C належний центр кривизни K_p, сполучаємо p та b та продовжуємо цю просту.

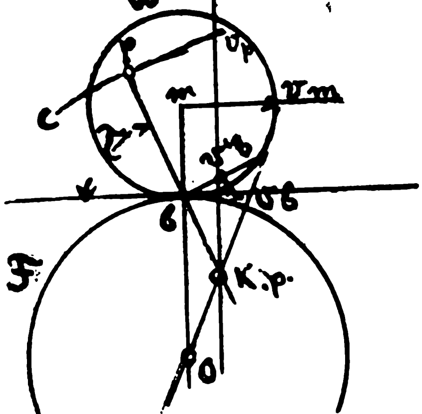
З точки б ставимо рівновіс до рв та продовжуємо його до пересічення з простою рт Точка перетинення простих од та рв дає точку Кр — центр кривизни кривої катання для точки р. Така конструкція не може бути зроблена, коли точка р складається з точкою m.

Фіг. 100.



В кінематиці виводиться положення, що скорости ріжних точок пропорціональні їх віддаленням від центру обігу (не вважаючи на те, чи вони будуть тимчасові чи постійні). Нехай точка m обігає біля центру о з якоюсь скорістю mv_m рівновісною до m_o, треба означити скорість точки опіру в по напрямку та велечині (ф. 101.)

Фіг. 101.

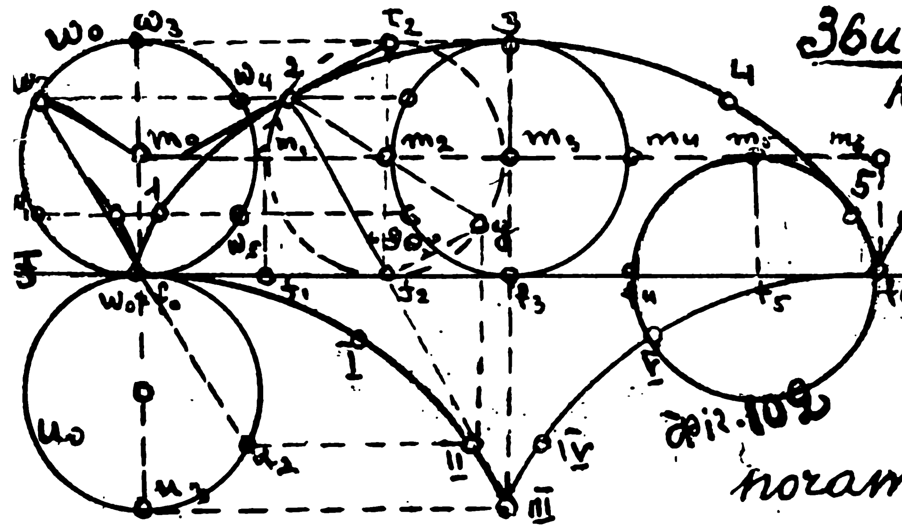


Вона мусить бути рівнобіжною до mv_m й її величина означається лучем $v_m o$. Повертаємо навкруги б, тоді одержимо скорість точки р... pv_p, котра рівновісна до рб з пропорції $\frac{pv_p}{pb} = \frac{mv_m}{mb}$.

Виберемо мірило скорости так, щоб $mv_m = mb$, то $pv_p = pb$. Сама точка опіру обертається в данний мент біля центру кривизни K_p зі скорістю $bv_b' = bv_b \sin\tau$ коли кут $K_p b v_b = \tau$. bv_b мусить бути рівновісно до вр та $v_e v_e'$ рівнобіжно вр чим і означається v_e'. Лучем $v_p v_e'$ означається на нормалі рв центр кривизни K_p.

Циклоїда.

Коли круг F безмежно великий, ц. Т. він переходить в просту, то звязана з кругом, що котиться, точка, описує циклоїду. В залежности від того, де лежить точка, в середині чи зовні круга (що котиться), циклоїда буде скручена (verschlungene), або розгорнута (geschweifelte). Коли точка лежить на лучі круга, то отримується звичайна циклоїда.



Фіг. 102

Звичайна циклоїда

Котиться коло W по простій F, то точка, що лежить на лучі кола, описує звичайну циклоїду. Нехай W_0 буде початкове положення, m_0 - центр та $W_0 = f_0$ точка торкання W_0 з F. Щоб сконструірувати циклоїду, що утворюється точкою W_0, уявимо собі рух W_0, складеним з двох рухів: одного - повертання біля m_0, при чім точка w_0 мусить перейти в W_2 і друге - рівнобіжне пересовування в напрямку простої F, довжина котрої дана відрізком $f_0 f_2 =$ лучі $W_0 W_2$. Щоб одержати конечне положення 2, що описує точка W_2, потрібно провести $f_2 2$ рівнобіжно до $W_0 W_2$

Конструкція кривої ще упроститься, як звернемо увагу, що центри всіх положень W лежать на простій $m_0 m_1 \ldots.$ рівнобіжній до F і саме рівновісно до відповідних точок опіру. Таким чином, напр., одержується точка 2 швидко і вірно, коли через W_2 проведемо рівнобіжну до F і з центра m_2 радіусом $m_0 f_0$ перетнимо її. При конструкції виходимо з середнього положення W_3 круга, що котиться і беремо на W_3 точку w так, щоб вона поділяла півкруг на рівні частини. Довжина $W_2 2$, рівнобіжної до Fи, $= f_0 f_2 =$ луці $W_0 W_2$. Звідсіля виника проста конструкція, як що треба означити окремі точки циклоїди.

Нехай f_0 буде початкова точка циклоїди. Ближнє нове начало має віддалення $f_0 f_6 =$ = довжині круга W. Понеже по суті однаково, чи поворот іде шляхом $f_0 12 \ldots f_6$ в напрямку від f_0 до f_6, чи в протилежному — хід мусить складатися з двох конгруентних половин. Вершина 3 лежить на вісі симетрії $3 f_3$. Коли перша половина циклоїди одержана — друга викреслюється, як симетрична частина.

Нормаль в точці 2 йде до точки торкання творящого круга в точці f_2 і тому вона рівнобіжна до $f_0 W_2$. Можливо розглядать циклоїду, як обгортуючу кругів біля $f_1 f_2 f_3 \ldots.$ радіусів $W_0 W_1$ $W_0 W_2$ $W_0 W_3 \ldots.$

Дотична $2 t_2$ рівновісна до $2 f_2$ і тому рівнобіжна до $W_2 W_3$.

Центр кривизни II для точки 2 означається згідно попередній конструкції.

Дуже просто можна означити безпосереднє місце центрів кривизни. Уявимо собі в загальних точках циклоіди f_0 3 f_6 = Z накреслені нормалі, то вони обгортують нову криву f_0 III f_6 = H, котру можна розглядати, як еволюту від Z, - крива Z наз. еволютою від H.

Понеже кожні дві сусідні нормалі до Z перетинаються в центрі кривизни, то еволюта H циклоіди Z складає місце центрів кривизни.

Точка обігу f_2 нормалі рухається тільки по F в кожну хвилю з однаковою скорістю, як точка t_2 дотичної $W_3$3. Таким чином закон руху для нормалі нічим не відріжняється від закону руху тангенти. Так що можливо належні обгортуючі криві не відріжняти, ц. то: еволюта загостренної циклоіди є конгруентна крива першої циклоіди.

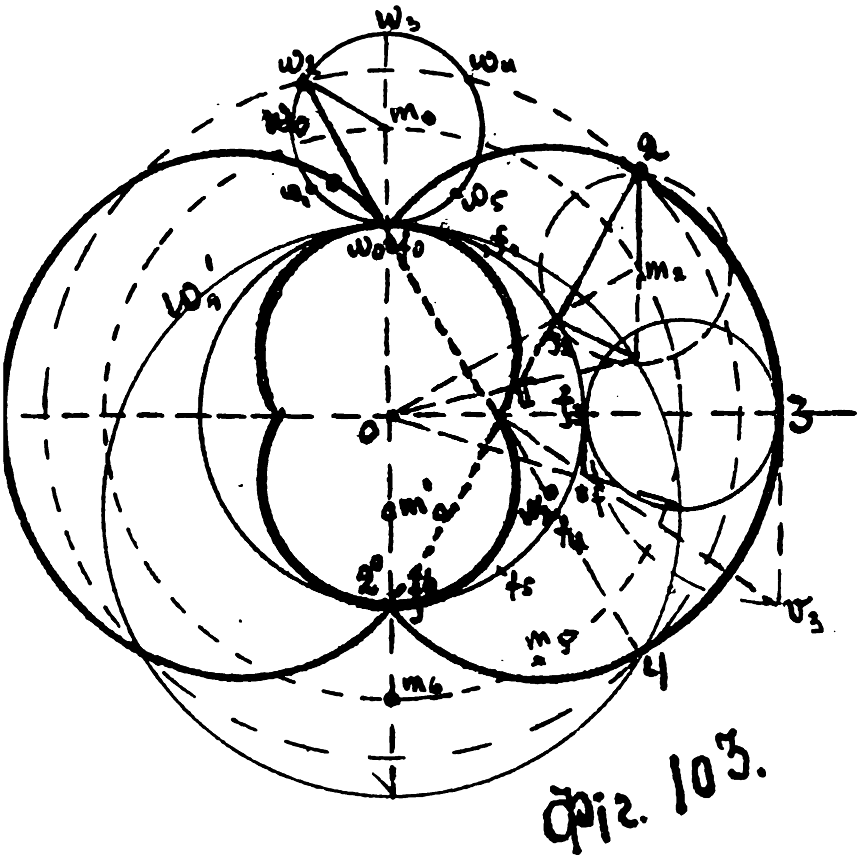
До цього ж результату можна дійти розмирковуючи в такий спосіб: круг $U_0 = W_0$ є так накреслений, що він до F торкається в f_0 з другого боку. Коли круг U_0 покотимо так, щоб він торкався рівнобіжної тангенти u_3 III, то f_0 описує половину розгортки f_0 I II III другої циклоіди, піврозгорнення якої $\cong$ піврозгортці 345f_6 $\cong$ 321f_0. Продовжуючи хорду $W_2 f_0$ до U_2 та закінчуючи паралелограм

$w_2u_2\overline{II}2$, то $u_2\overline{II} = w_22$ = луці f_0w_2, та $\overline{II}$ є точка другої циклоіди і $\overline{II}f_22$ – тангента в $\overline{II}$.

Одночасно друга циклоіда є еволюта першої, та точка $\overline{II}$ є центр кривизни для 2. Радіус кривизни $2\overline{II}$ = подвійній нормалі $2f_2$. Можливо накреслити циклоіду також з допомогою кругів кривизни.

Епіциклоіда.(фіг.103)

Коли якийсь круг W котиться по зовнішній стороні нерухомого круга F, то точка p його периферії описує епіциклоіду. Нехай точка W_0 лежить зовні F. Точка торкання $w_0 = f_0$ обох кол. Описуючий пункт f_0 буде вершиною епіциклоіди. Ближня вершина f_6 лежить на F і віддалена на луку $f_0f_1 \dots f_6$ = довжині кола W. Щоб одержати якусь точку кривої, напр. 2, уявимо собі спочатку, що W_0 обертається навкруги m_0 в тім же напрямку, як при катанні так, що W_0 проходить луку W_0W_2 і уявимо собі, що W твердо звязане з m_0O і вертиться навкруги O аж поки точка торкання не займе такого положення f_2, для котрого лука f_0f_2 = луці W_0W_2. При цьому одночасно W_2 переходить в точку 2. Щоб одержати 2, треба звернути увагу, що хорда f_22 = хорді W_0W_2. Коли проста W_2f_0 кола F вдруге попада в W_2° (W_2° на нарисі складається з f_4 згідно пропорції $W_0m_0 : W_0O = 1:2$), таким чином наносимо f_22° = луці $f_0W_2^\circ$, та на хорді $2^\circ f_2$ довжину $f_2 2$ = хорді $w_0 w_2$. Як захочемо накреслити всю епіциклоїду, описуємо з O через W_2 до F концентричне коло та перетинаємо його з m_2 через коло W_2 (що котиться) в точці 2. Ця конструкція для нашої фігури представлена аж до точки 6. Понеже принято $f_0 m_0 : f_0 O = 1:2$, то довжина W_0 = половині довжини F. Точка f_0 описує при цьому два конгруентних хода, та повертається в своє первісне положення. Взагалі, коли відношення радіусів W: F раціональне (m:n) де m та n цілі числа, що не мають загальних множників, то після n поворотів кола W своїм центром m скінчить оборот і прийде в первісне положення f_0.

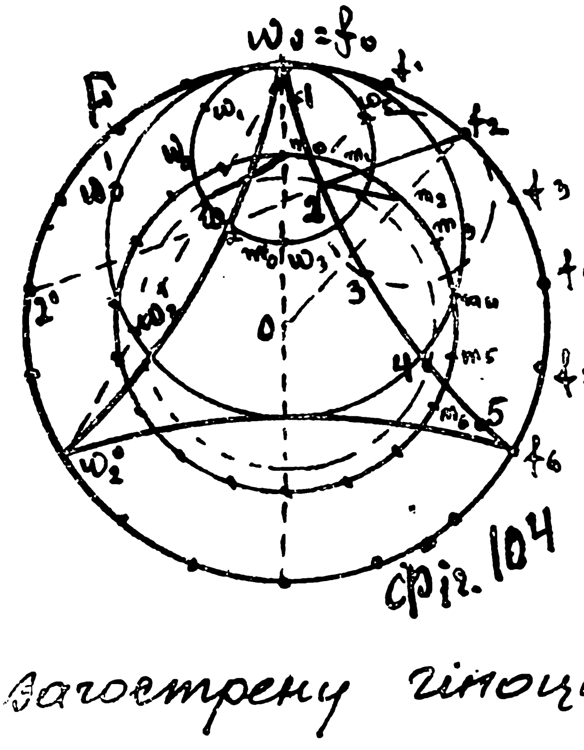


Фіг. 103.

Циклічна крива буде складатись з n конгруентних ходів і після кожних m оборотів замикається. Коли відношення іраціональне, то замикання циклічної кривої стане можливим тільки після безмежно багатьох оборотах. При рівних радіусах отримується крива, що складаїться тільки з одного ходу — вона нав. кардіадою. Коли потрібно конструірувати тільки де-які окремі точки луки епіциклоіди, то вживаємо для якої-небудь точки, напр. 2 рівність (Gleichheit) довжин $f_2 2 = W_0 W_4 = W_0 W_2$ та $f_0 2 = f_2 W_4$. Описуємо з f_2 луку кола $W_0 W_4$ та з f_0 таку ж $f_2 W_4$. Ці луки перерізаються в точці 2, котра відповідає повороту $\overline{W_0 W_4} = f_0 f_2$. Ці засоби завше вживаються при викресленню зубчатих колес. Центр кривизни II для точки кривої 2 одержуємо засобом, який вживали раніще.

Гіпоциклоіда.

Коли коло (фіг. 104) котиться в нерухомому крузі, то точка p, що твердо звязана з цим кругом W, описує гіпоциклоїду. Знову одрізняють: загострену, сплетену та розгорнуту гіпоциклоіду. Понеже гіпоциклоіда ріжниться від епіциклоіди тільки тим, що при цьому коло W лежить в середині кола F, то конструкція гіпоциклоіди робиться так само, як епіциклоіди. На нарисі маємо загострену гіпоциклоіду. Окремі елементи означені такими ж саме літерами, як на попередніх нарисах. Щоб загострену гіпоциклоіду одержати другим



фіг. 104

шляхом, покотимо коло W' в радіусом $m_0'f_0 = Of_0 - m_0f_0$. Така ж лука гіпоциклоіди одержиться через катання кол W та W_1 по F в протилежних напрямках. Торкається W_0' кола F в f_0, то кути в вершинах W_2^0, 2^0 та W_2' рівні. Далі:

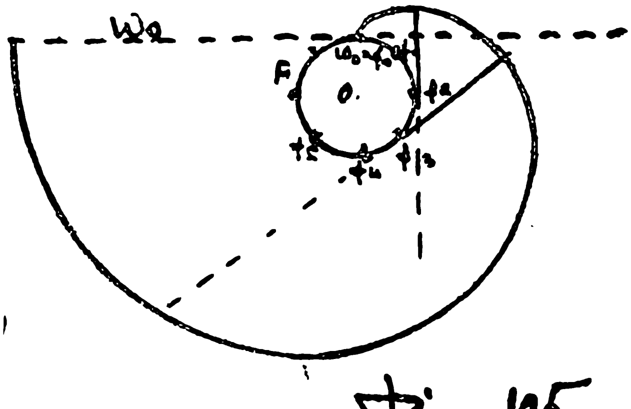
хорда $f_0 W_2' =$ хорді $f_0 W_2^0 -$ хорда $f_0 W_2 = 2^0 2$;
лука $f_0 W_2' =$ луці $f_0 W_2^0 - f_0 W_2 =$ луці $f_0 2^0$.

При катанні W' переходить W_2' в 2^0 і одночасно описуючий пункт f_0 .... 2. Звідсіля положення: Коли два кола W та W_1 котяться в середині нерухомого кола F та сума їх радіусів = радіусу F, то вони обидва описують загострену гіпоциклоіду. Зі зміною відношення $\frac{r}{r_1}$ ..... $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ - мінаються види гіпоциклоіди. Відношення $\frac{1}{2}$ має велике прикладення при будуванні простолінейних направляючих при конструкції машин.

Колова еволювента.

Коли коло W перетворюється в просту, яка як тангенціальна, переміщується навкруги нерухомого кола без сковзання, то всяка звязана з W точка описує колову еволювенту (фіг. 105).

Вона загострена, коли утворюючий пункт $e_0 = f_0$ лежить на рухомій простій; сплетена, коли e_0 з центром кола F.... O лежить з од-



Фіг. 105

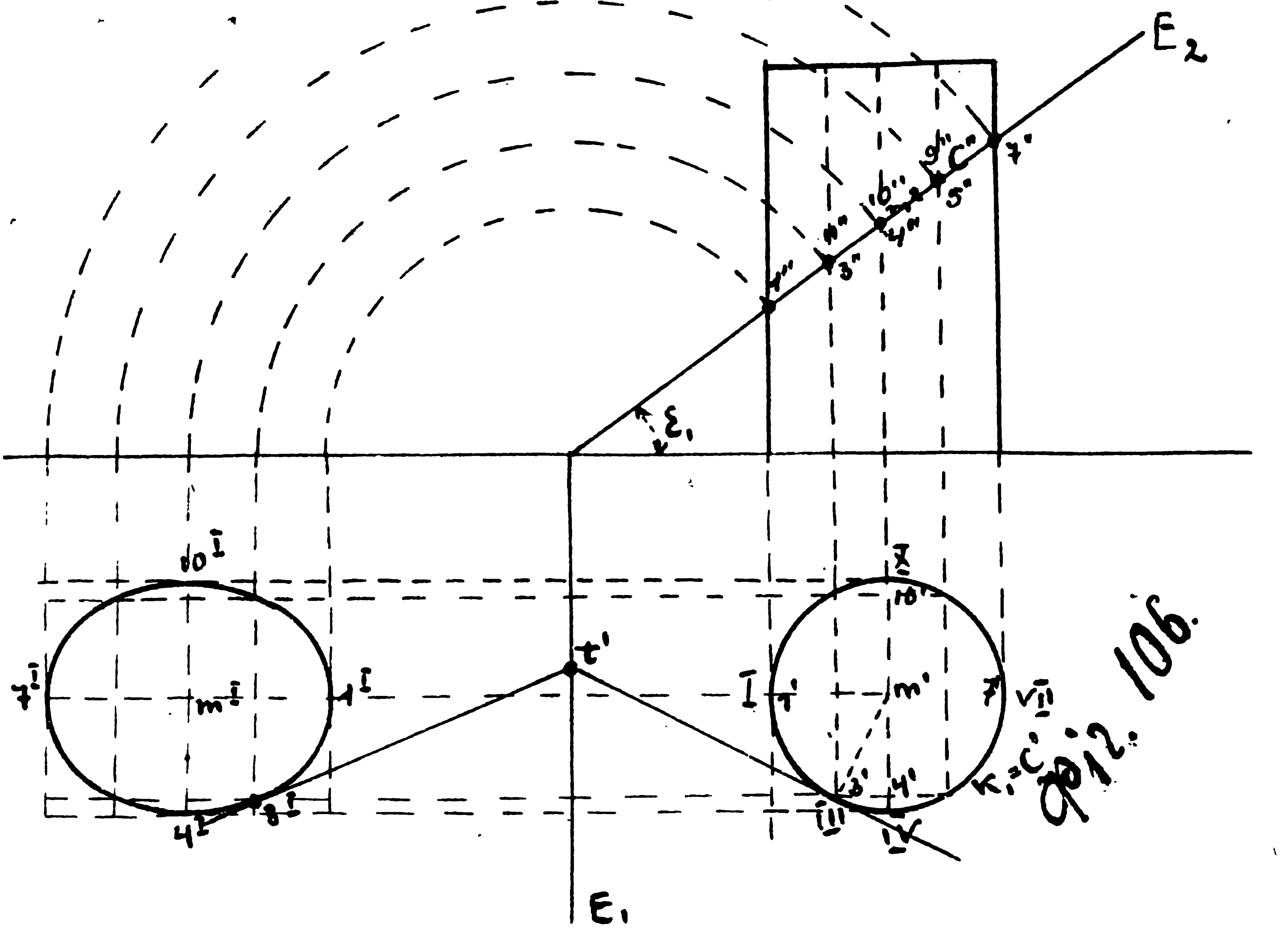
ного боку від W, та розгорнута, коли $\underline{e_0}$ та $\underline{O}$ лежать обабіч W.

Загострена колова еволювента. Нехай утворючий пункт простої W_0 буде лежати в точці торкання f_0 - то f_0 буде початок кривої. Щоб сконструірувати якусь точку 2, проводимо до кола в точці f_2 тангенту та відкладаємо довжину $f_2 2 =$ $= \smile f_2 f_0$. Уявимо собі криву від f_0, що описується вперед та назад, то вони в f_0 утворять вершину. Понеже можна собі уявити, що тангента може безліч раз обкрутитися навкруги кола, то і розгортка на обидва боки може розгорнутися до безмежності. Точки другого повороту одержуємо, коли периметр $\underline{U}$ кола F відкладемо по тангенті за першим торканням.

Прямий круговий стовпак та прямий круговий стіжок.

Означити перетинення прямого кругового стовпака, котрого коло грунту K, лежить на горізонтальній площі, з площею $E(E, E_2)$, рівновісною до P_2, та розгорнути його вкупі з фігурою січення на площі (фіг. 106).

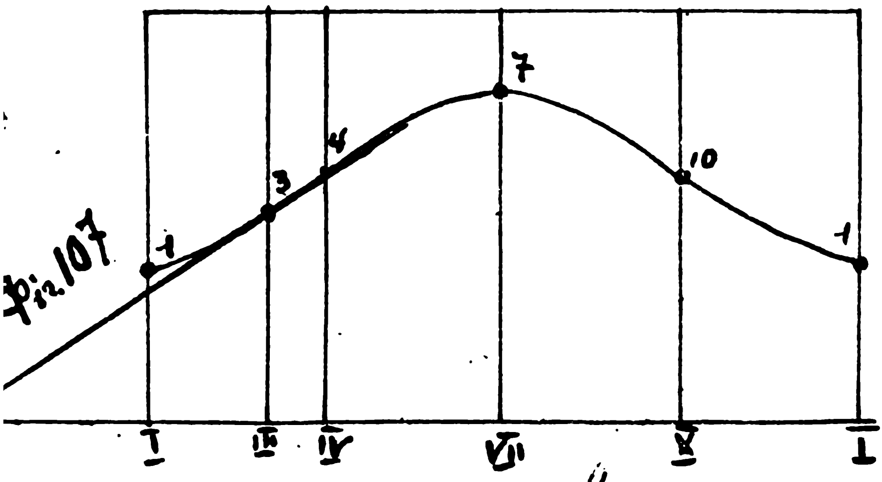
Фігура перетинення C є еліпс, горізонтальна проекція котрого складається з горізонтальною проекцією основного кола K, і вертікальна проекція котрого пада по сліду площі 1''7''. Повернемо площу E біля E, і складемо її з горізонтальною площею одержуємо дійсну величину еліпса, велика вісь котрого $1''7''$, а мала = діаметрові кола K_1. Дотична $3t_1$ до $\underline{C}$ в точці 3 є



Фіг. 106.

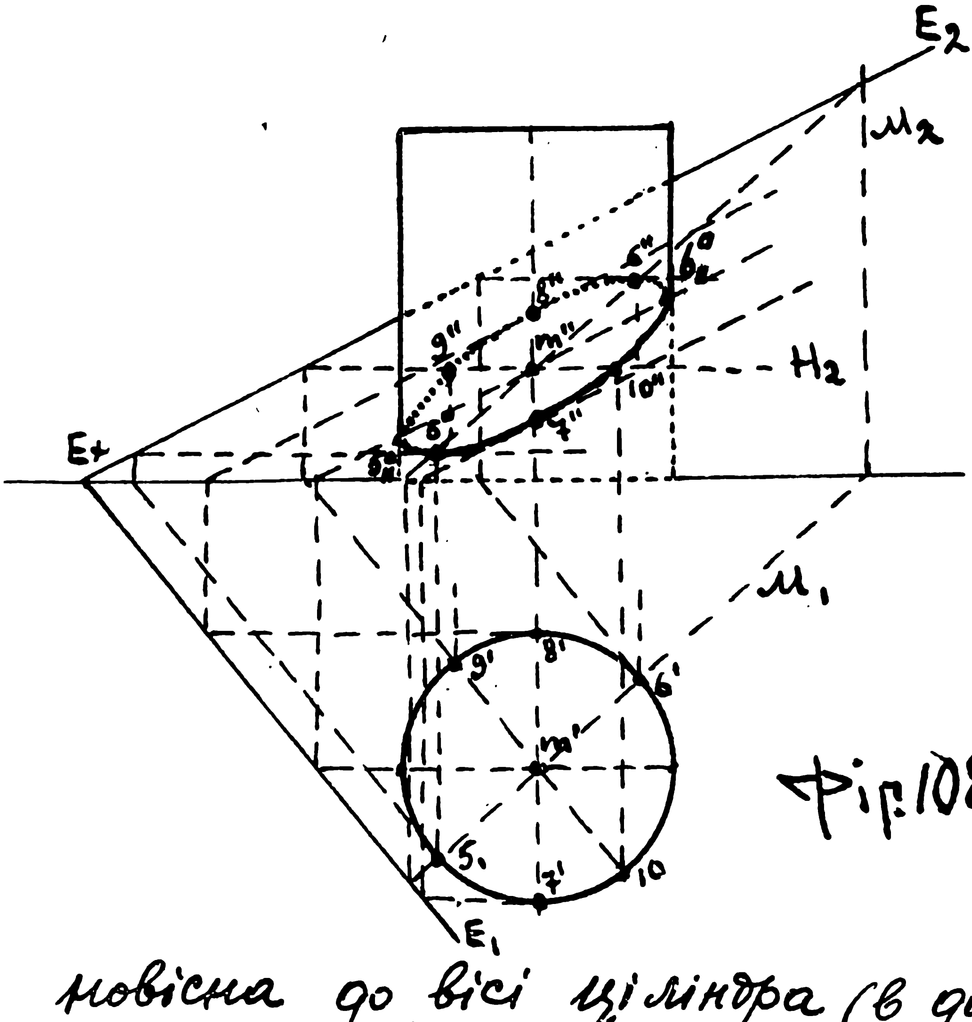
проста перетинення площі E з дотичною площею до стовпака в точці 3.
Розрізуємо поверхню стовпака по утворюючій $\underline{I}I$ та розгортаємо на площу нарису ab, то вона перетворюється в прямокутник, основна лінія котрого $\underline{I}\,\underline{I}$ = периферії K_1, ц. j. довжині кола і висота котрого = висоті стовпака. Еліпс січення C перетворюєтся при розгортці в криву, що складаєтьcя з чотирьох частин 14 47 710 та 101. Щоб накреслити цю розгортку фігури січення, поділяємо довжину основи $\underline{I}\,\underline{I}$ на таку ж кількість частин, як і коло K_1, та проводимо через точки

поділу рівновіси до II. На них лежать точки розгорнутого еліпса на такій висоті над II, як відповідні довжини на вертикальній проекції над віссю x. Тангенту в якійсь точці 3 розгорнутої кривої можна легко означити. Вона утворює з рівновісом III 3 такий самий кут, як тангента до еліпса з утворюючою лінією III-3, що можна побачить, коли поверхню стовпака розгорнути в площу торкання. Закріпивши прямокутний трикутник 3IIIt, на розгорнутій фігурі на рівновісі 3III, маємо, що гипотенуза 3t, дає дотичну до розгорнутої (кривої) фігура 107.



Фіг. 107

Понеже обидві частини кривої 14 та 47 конгруентні, то точка 4 є пунктом повороту так само, як 10. Вірність цього стверджується положенням з Аналитичної Геометрії: коли на поверхні, яку розгортуємо, лежить плоска крива C, то між радіусом кривизни ϱ в якім-небудь пункті B кривої C, та радіусом кривизни ϱ_0 в відповідній точці зміненої кривої C_0 мається таке просте відношення $\varrho_0 = \frac{\varrho}{\cos\alpha}$, де α означає кут, котрий площа торкання поверхні, що розгортується, в точці B утворює з площею кривої. Для $\alpha=90$ $\varrho=\infty$, ч.т. крива C_0 має в точці B точку повороту. Для цього особливого випадку можна висловити таке положення: Коли якась поверхня, що розгортується, перетинається площею, то ті точки кривої січення, площа торкання котрих рівновісна до перетинак цеї площі, — будуть точками зміни кривизни. На нашій фігурі точки 4 та 10 мают дотичні поверхні рівнобіжні до P_2, ц. т. рівновісні до E, значить точки 4 та 10 будуть точками повороту або зміни кривизни. Коли сікуча площа не рівновісна до P_2, а має якесь довільне положення відносно площ проекцій (фіг. 108), то горізонтальна проекція еліпса пересічення C падає знову на K_1. Щоб одержати вертикальну проекцію C'', користуємось допоміжною площею, січення котрої з стовпаковою поверхнею може бути зпроектовано безпосередньо. Допоміжна площа H рівновісна до вісі ціліндра (в данному випадкові рівнобіжна до горізонтальної площі) перетина стовпак по колу і площу E по



Фіг.108

сліду, що рівнобіжний до горізантального сліду E_1. Загальні для кола та рівнобіжного сліду точки лежать як на стовпаковій поверхні, так і на площі E, - вони належать також і кривій січення. На горізонтальній проекції (P_1) находимо проекції 9' та 10' безпосередньо; вертікальні проекції 9", 10" лежать на H_2. З допомогою других горізонтальних допоможних площ одержуємо другі загальні точки C''. Як відмінні точки січення, котрі мають особливе значіння, креслимо вищу та низчу, передню та задню точки. Проводимо через вісь стовпака площу, що рівнобіжна до P_2, то вона виріже з поверхні стовпака вертікальний обрис, а з площею E дасть лінію, що рівнобіжна до віси проекцій x. Вона дасть точки перетинення з горізонтальною проекцією K_1, котрі проектуємо на вертікальну площу і одержуємо точки, що шукали.

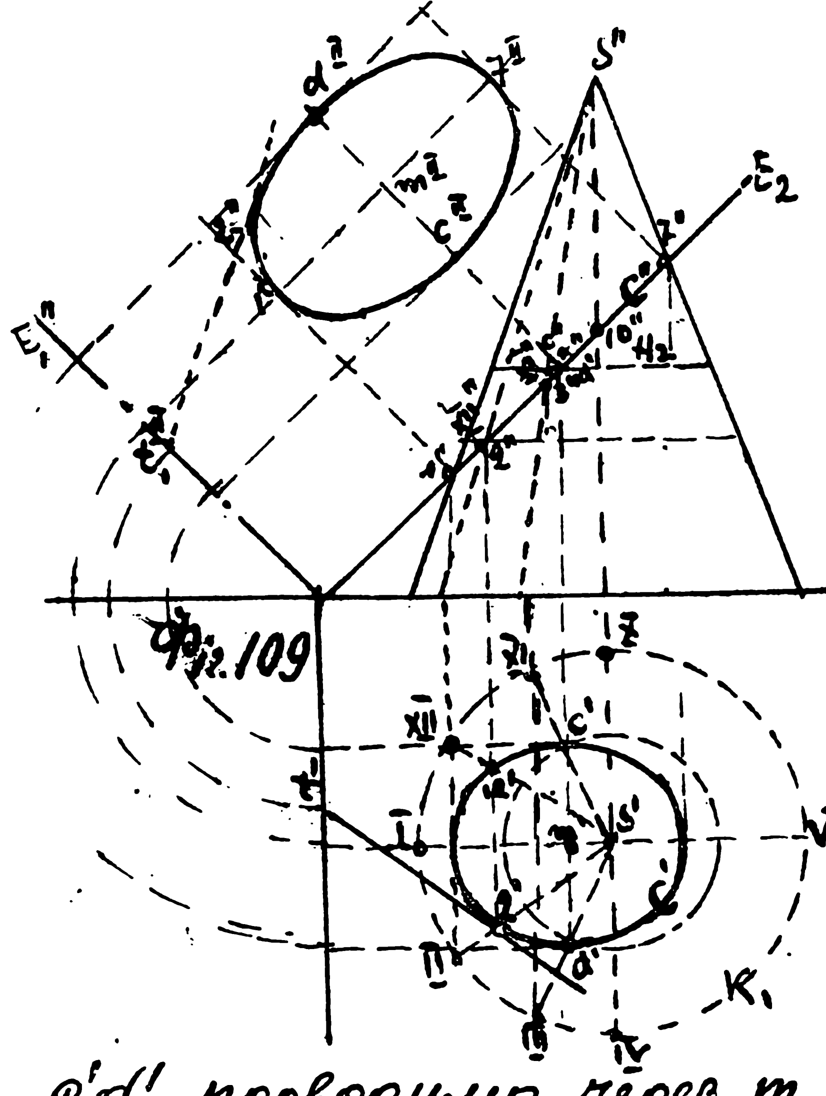
Уявимо собі в $\underline{3}$ дотичну площу, що проведена до стовпака; вона містить в собі дотичну до $\underline{C}$ в точці $\underline{3}$. Площа торкання в точці $\underline{3}$ рівновісна до P_2 (вертік. площі). Дотична до січення C проектується на вертікальну площу проекцій в точку $\underline{3}$ утворюючої лінії (Mantellinien), ц. т. торкається C'' в $3''$. Коли через вісь стовпака проведемо площу M, що рівновісна до E_1, то вона буде площею симетрії для стовпака, та для площі E

і для еліпса січення; ц. т. лінія перетинення $N = M \times E$ є вісь симетрії для еліпса C і одночасно – його велика вісь. Кінці 5 та 6, та довжина цієї вісі найкраще визначаться, як повернемо M навкруги вісі стовпака в положення M_0 рівнобіжне вертік. площі (P_2). $5_0'' = N_0'' \times v''$ та $6_0'' = N_0'' \times v''$ одержуємо дійсну величину $5_0''6_0''$ великої вісі. На N знаходяться вища та нижча точки еліпса C, – вони суть точки перетинення 6 та 5 N зі стовпаком. Дотичні до C в точках 5 та 6 рівнобіжні до E_1. Проводимо через вісь стовпака площу рівнобіжну E_1, то вона буде рівновісна до площі M і перетинається з площею E. по простій рівнобіжній до горізонтальної проекції E_1 в точках 9 10, котрі в вертікальній проекції дають 9'' 10'' дійсну величину малої вісі 9 10.

Передня точка 7 лежить на передній утворюючій. Площа, що торкається по передній утворюючій, рівнобіжна до вертікальної площі (P_2) та перетина E по рівнобіжному до вертікальної площі сліду, котра є дотичною до C в точці 7. Так само, що до заданої точки 8. Розгортка поверхні стовпака з еліпсом робиться так само, як і в попередньому випадкові.

Сконструірувати плоске січення, та розгорнути прямий круговий стіжок, основа котрого K_1 лежить в горізонтальній площі проекцій. Крива перетинення може бути – еліпс, парабола або гіпербола в залежности від того, чи перетинаюча площа нерівнобіжна, рівнобіжна до одної, або рівнобіжна до двох утворюючих. У всіх трьох випадках перетинаюча площа E мусить бути рівновісною до вертікальної площі (P_2).

Елиптичне січення.



Фіг. 109

Вертікальна проекція еліпса С, перетинення площі E стіжка, пада на довжину 1''7'', (вертік. проек. E_2), котра дає довжину великої вісі (фіг. 109)

Мала вісь cd проходить через m (середину 1-7) та рівновісно до верт. площі (P_2). Щоб одержати горізонтальну проекцію c'd' проводимо через m допоможну площу H рівнобіжну до горізонтальної площі (P_1). Вона пересікає стіжок по колу, котрий на горізонтальну площу проектується в натуральну величину, а з площею E перетинається по простій cd рівновісній до вертікальної площі (P_2). Горізонтальна проекція допоможного кола та допоможної простої перети—

наються в точках c' і d', що належать C'. Нехай r_1 та r_7 віддалення точок $1''$ та $7''$ від $S''S_x$ і r радіус кола, що вирізала площа H, то вертікальна проекція дає що $r = \frac{r_1 + r_7}{2}$. Отримуємо в горізонтальній площі:

$$S'C' = \frac{1'3' + S'7'}{2} = \frac{1'7'}{2},$$ ц. з. S' є фокус для C'.

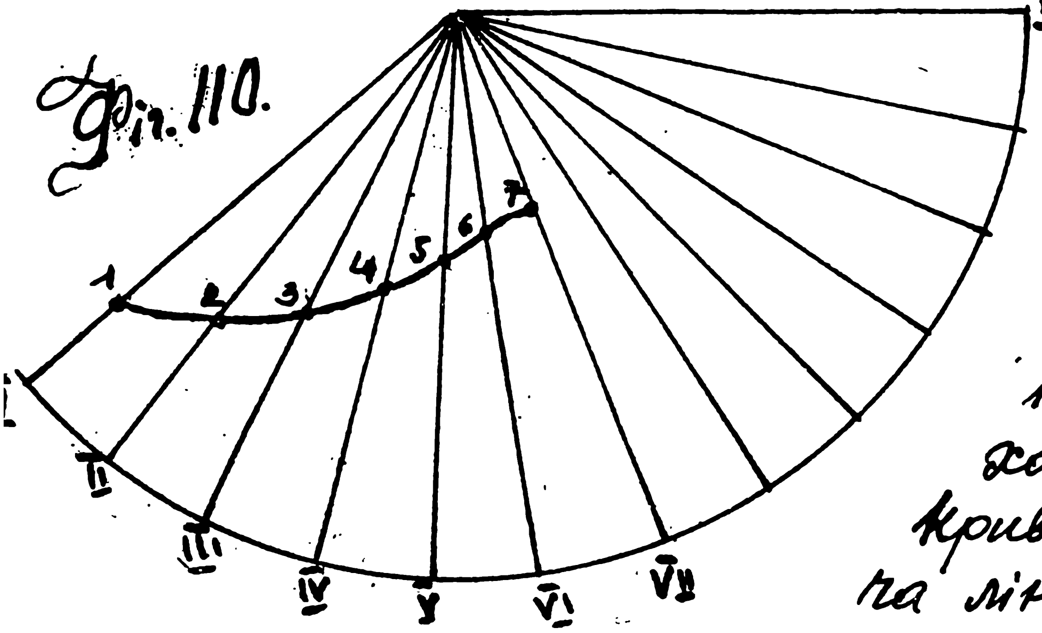
Горізонтальну проекцію якоїсь точки еліпса 2 можливо одержати двояким засобом: або викреслюємо проекцію творячої $S2\underline{II}$ та шукаємо на горізонтальній проекції $S'\underline{II}$ проекцію $2'$ рівнобіжну до $2''$, або краще користуємось допоможною площею, що проходить через $2''$ рівнобіжно до горізонтальної площі P_1, бо тоді точки отримуються точніще. Дійсну величину C одержуємо перекладенням в вертікальну площу еліпса C'' з віссю $1^{II}7^{II} = 1''7''$ та $c^{II}d^{II} = c'd'$.

Тангента в точці 2 одержується, як проста перетинення площі E з дотичною до стіжка площею в точці 2.

Горізонтальна проекція $t_1 2'$ торкається до C' в точці $2'$ і після перекладення $t_1^{II}2^{II}$ торкається до C'' в точці 2^{II}.

Розгортка поверхні стіжка є круговий сектор, котрий радіусом має творячу лінію $S\underline{I}$, та периметр K_1 за дугу. Ця лука може бути визначеною відкладенням маленьких частинок луки K_1. Щоб одержати на розгорнутій фігурі якусь точку 2, на попередньому нарисові проводимо творячу $S2\underline{II}$, та визначаємо на ній дійсну довожину $S''2_0''$ - довжину $S2$, котру можна безпосередньо взяти з $S''t'$. Дотична на розгортці в точці 2 одержуємо, коли з прямокутного трикутника $2\underline{II}t'$, котрого катет $\underline{II}t'$ в горізонтальній площі викреслюється в дійсну величину, прикладений до катету $\underline{II}2$ (фіг. 110]

Фіг. 110.



Розгортку поверхні стіжка вживають, щоб дві точки на поверхні стіжка найкоротчим шляхом сполучити кривою, Ця коротча лінія, геодезична лінія при розгортці мусить перейти в просту. Як геодезична лінія мусить сполучати дві точки на поверхні p та q, то знаходять відповідні точки на розгорнутій поверхні, сполучають їх простою pq і констріірують відповідаючу їм криву на поверхні стіжка. Так само розгортка стіжкових поверхней вживається при кресленню орнаментів. Для цього орнамент креслять в натуральну величину на розгорнутій стіжковій поверхні і після одержують проекції його.

Відділ III.

Поділ геометричних задач. Усі геометричні задачі можуть бути поділені на дві групи:

До першої групи належать задачі, де означаються взаємні відношення положень між точками, простими, поверхнями. До таких завдань відносяться: означення перетинення простої з площею, перетинення двох площ; означення простої, що проходить через дві точки і т. д. Задачі цієї групи називаємо задачами положення (Lagenaufgaben).

Всі другі задачі, де вимагається означити виміри або віддалення між точкою та простою, або дійсну величину кута нахилу якоїсь прямої до площі та т. и. — називаємо задачами виміру (Massaufgaben).

З попереднього курсу знаємо, що всі задачі положення рішаються на підставі чотирьох теорем:

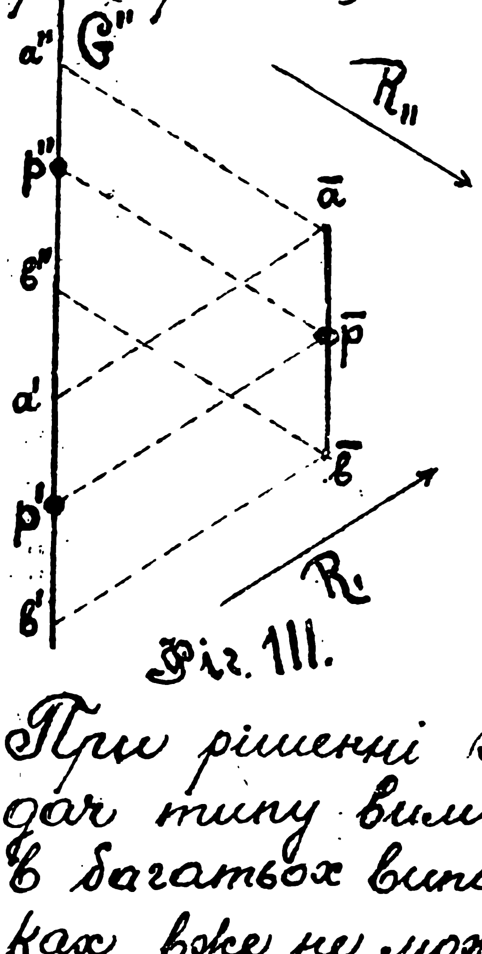
1° Всяка точка означається парою своїх проекцій, проста сполучень котрих рівнобіжна до якогось зазначенного напрямку картинної площі.

2° Кожна така пара проекцій означа точку в просторі.

3° Проекції p' p'' точки простої G утворюють проекції G' G'', коли точка p пересовується в просторі по G.

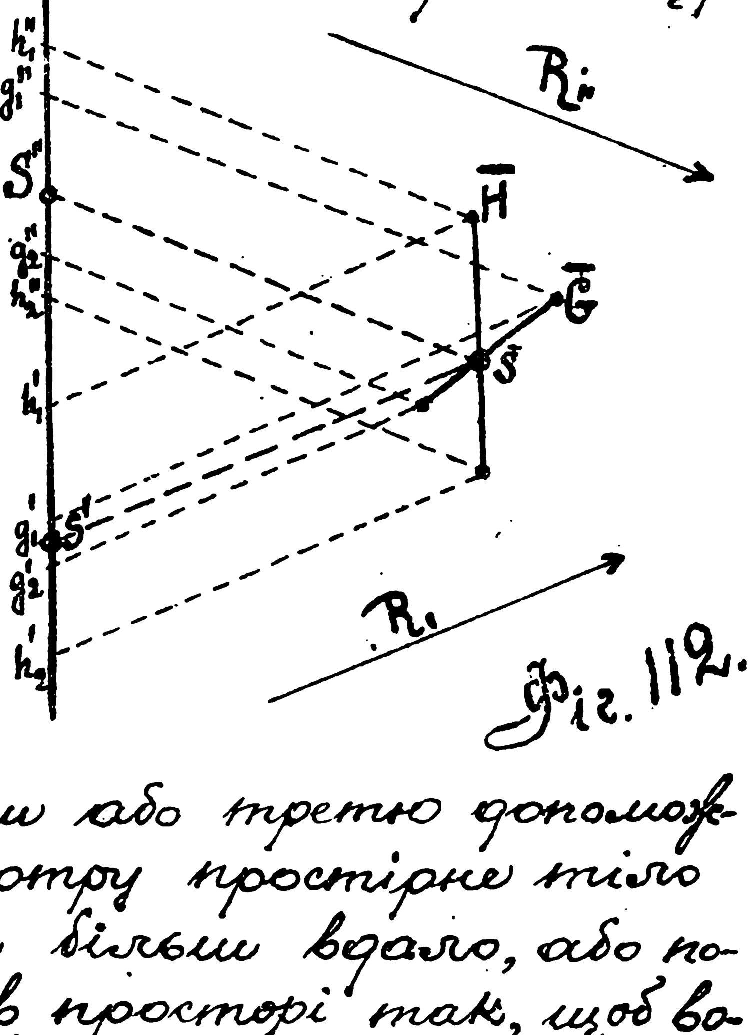
4° Кожна пара такої низки точок картинної площі означає положення простої в просторі.

На підставі цих чотирьох теорем можливо рішати завдання „положень" навіть в тих найбільш трудних випадках, коли істнує момент складення елементів. Нехай, наприклад, даються проекції простої G'G", що лежать на одному орднерові. На ньому ж даються проекції точок a'a", b'b" та горізонтальна проекція p'. Треба означити вертікальну проекцію p" (фіг. 111).



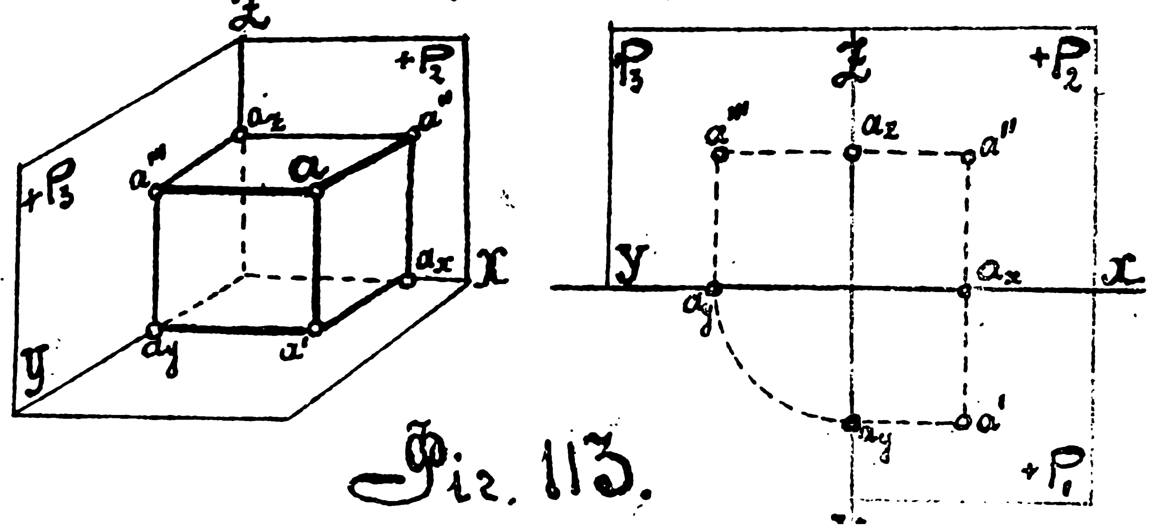
Фіг. 111.

Даються проекції G(g_1g_2) та H(h_1 h_2), що лежать на одному орднерові, треба означити точку перетинення простих (ф.11



Фіг. 112.

При рішенні задач типу виміру в багатьох випадках вже не можна обмежуватися цими засобами. Приходиться вводити або третю допоміжну площу, на котру простірне тіло проектувалось би більш вдало, або повертати тіло в просторі так, щоб воно стало рівнобіжно до одної з площ проекцій. Введення третьої площі проекцій є послідовний розвиток методів нарисної геометрії. Спочатку проектували на одну площу. З часом виявилась необхідність введення другої, вертікальної площі, але бувають випадки, коли двох площ проекцій не вистачає. Візьмемо хоч би такий простий приклад. Положення кожного місця на земній кулі звичайно означається географічною довжиною та широтою. Але це не дає повної картини, бо немає ще третього елементу — положення точки відносно рівня моря. Природно виника питання про необхідність введення третьої площі. Взагалі, коли якась фігура лежить в рівновновісній до вісі x площі, то горізонтальна та вертікальна проекція вже не означає положення тіла. Щоб уявити собі в цьому випадкові вид, величину та положення тіла в просторі, візьмемо третю площу проекцій P_3, котра до P_1 та P_2, а значить і до вісі x, буде рівновісна (фіг. 113).



Фіг. 113.

На P_3 представлена третя проекція, що називається боковою, або профілем (Seitenanriss, Proffil).

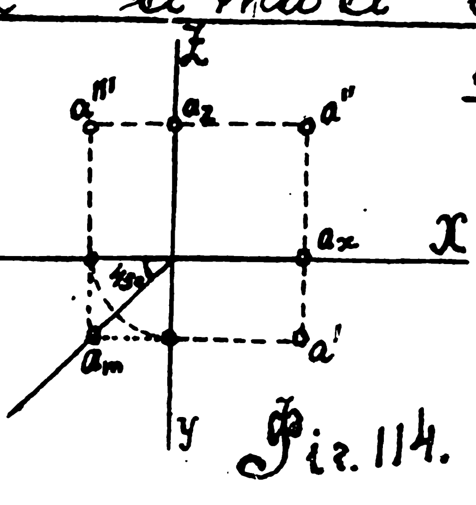
Утворюються дві нових осі проекцій $Y = P_1 \times P_3$ та $Z = P_2 \times P_3$, обидві в точці O рівновісні до X. Від початку координат O кожна вісь по своїй довжині в один бік — позитивна, в другий — негативна, а саме: X — вправо, Y — вперед, Z — вгору позитивні.

Нехай a''' — третя проекція точки a, то рівновіси, що спущені з a' та a''', мають одну й туж основу a_y. Так само сходяться рівновіси з a'' та a''' в точці a_z, та, як уже кільки разів згадувалось раніше, a'' та a' — в точці a_x.

З нарису (113) бачимо, що віддалення точки <u>a</u> від P_3 $aa''' = a'a_y = Oa_x = a''a_z$.

Щоб представити три проекції в одній площі креслення, площу P_3 складаємо з площею P_2 і іменно так, щоб передня частина P_3 склалась з лівою частиною P_2.

По двох данних проекціях точки a a' та a'' означити третю проекцію a''' (фіг. 114).

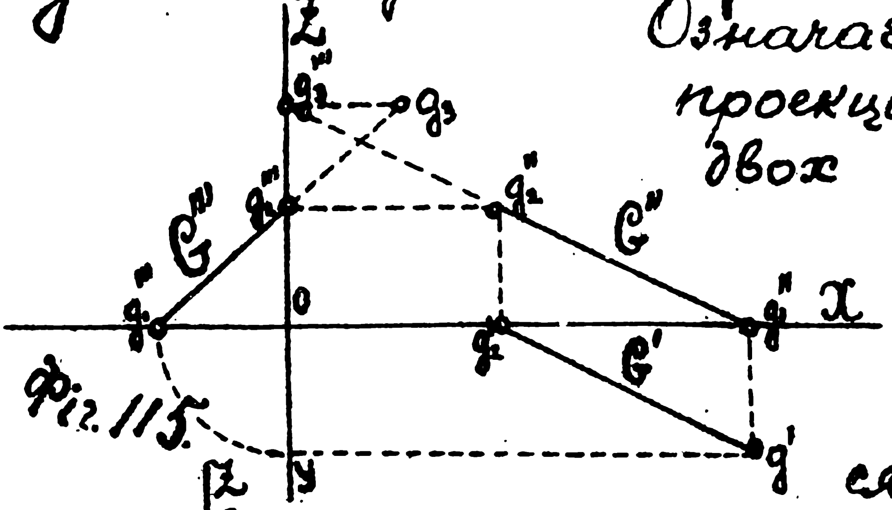


Фіг. 114.

Проводимо $a''a_z$ рівновісно до осі Z, та на цьому рівновісі відкладаємо $a_z a''' = a'a_x$, або описуємо луку з точки <u>O</u> лучем Oa_y, ставимо рівновіс до ОУ.... $a_y a'''$. Коли продовжимо $a'a_y$ та $a'''a_y$ до перетинення в точці a_m і сполучимо її з О, то одержимо просту, яка з віссю У утворює кут 45°

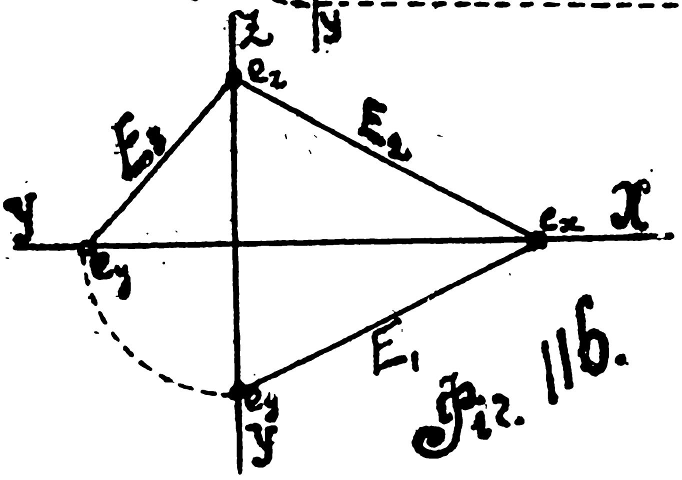
Означити третю проекцію простої g, коли даються дві перші (фіг. 115).

Означаємо треті проекції яких-небудь двох точок простої і сполучаємо їх. Найпростіше, коли означаються сліди простої.



Фіг. 115.

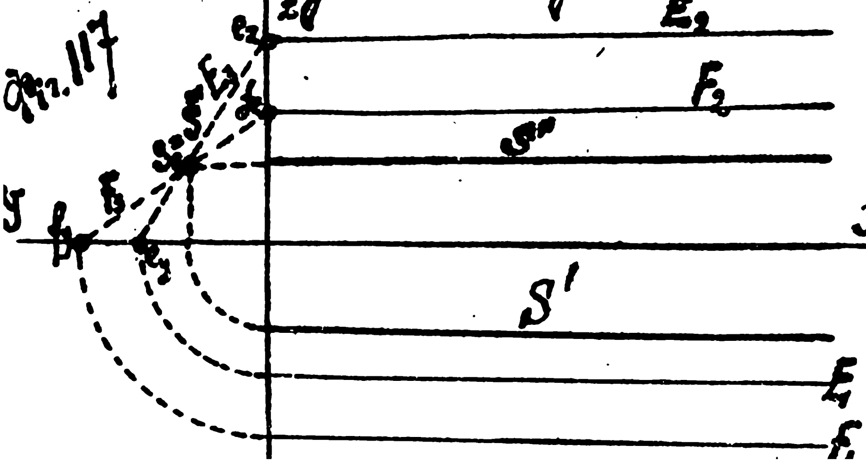
Відносно трьох слідів площі E (фіг. 116) треба зауважити, що E_1 та E_2 перетинаються на осі X, E_2 та E_3 на осі Z, а E_3 та E_1 в відповідній точці Y.



Фіг. 116.

Означити просту перетинення S двох площ E та F, що рівнобіжні до осі та кут між ними (фіг. 117).

Вводимо третю площу P_3, що рівновісна до X і визначаємо сліди E_3 та F_3, тоді $S_3 = E_3 \times F_3$ — третій слід про-

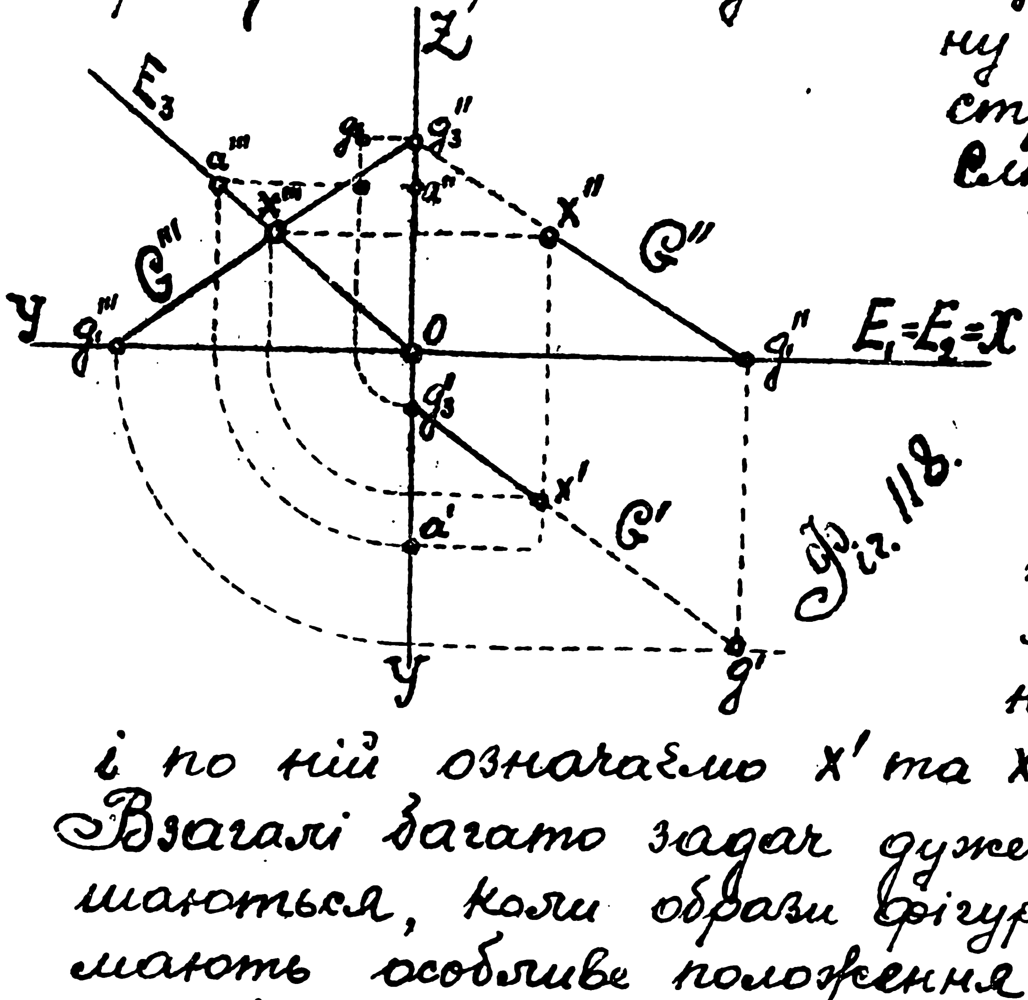


Фіг. 117

стої перетинення, що шукаємо. Понеже вона мусить бути рівнобіжною до x, то S'' та S' легко викреслюються. Кут $f_z S_3 e_z$ дає нахил між E та F.

Означити точку перетинення X простої G в площею E, котра проходить через вісь x та точку $\underline{a}$ (фіг. 118).

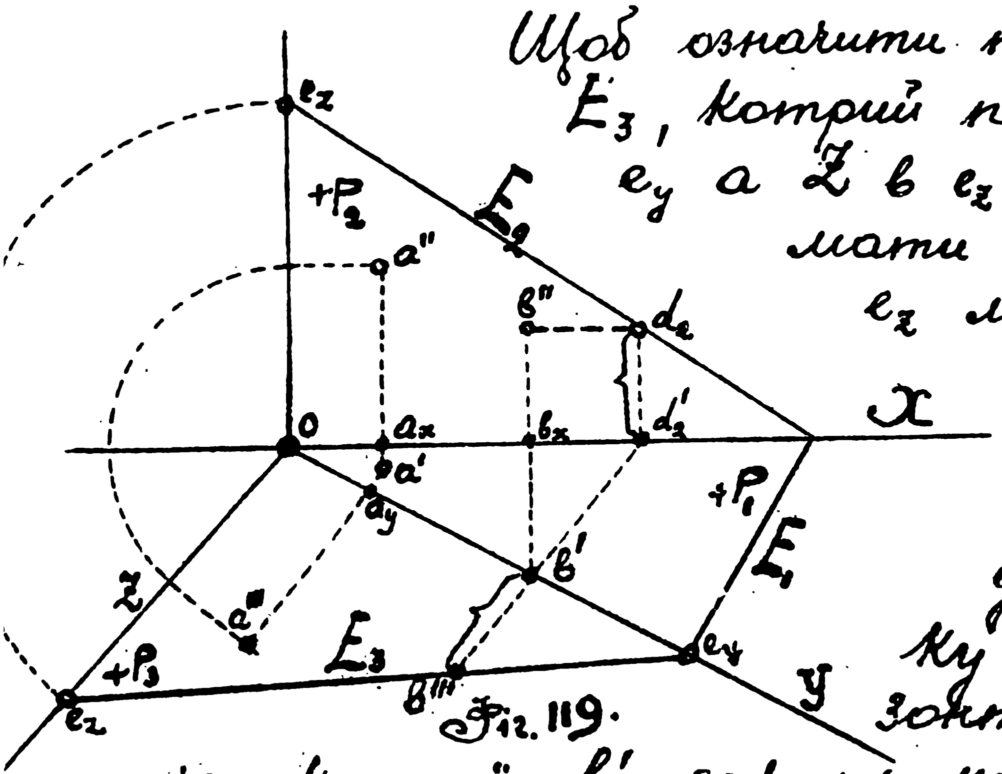
Проводимо через точку $\underline{a}$ площу P_3, рівновісну до x та конструуємо g_3. Слід площі E_3 означається точками $\underline{O}$ та a'''. Точка x''' находиться, як перетинення: $x''' = G''' \times E_3$



Фіг. 118.

і по ній означаємо x' та x''.

Взагалі багато задач дуже легко рішаються, коли образи фігур простору мають особливе положення — рівнобіжне або рівновісне до одної з площ проекцій. Це дуже легко осягається з допомогою введення нової площі проекцій. Нехай, наприклад, P_3 буде рівновісна до P_1 та Y - проста перетинення $P_3 \times P_1$. Повертаємо P_3 біля Y аж доки вона ляже на P_1, тоді ордината $a'a'''$ якоїсь точки $\underline{a}$ буде рівновісна до Y (фіг. 119) і віддалення $a'a''' = a''a_x$.



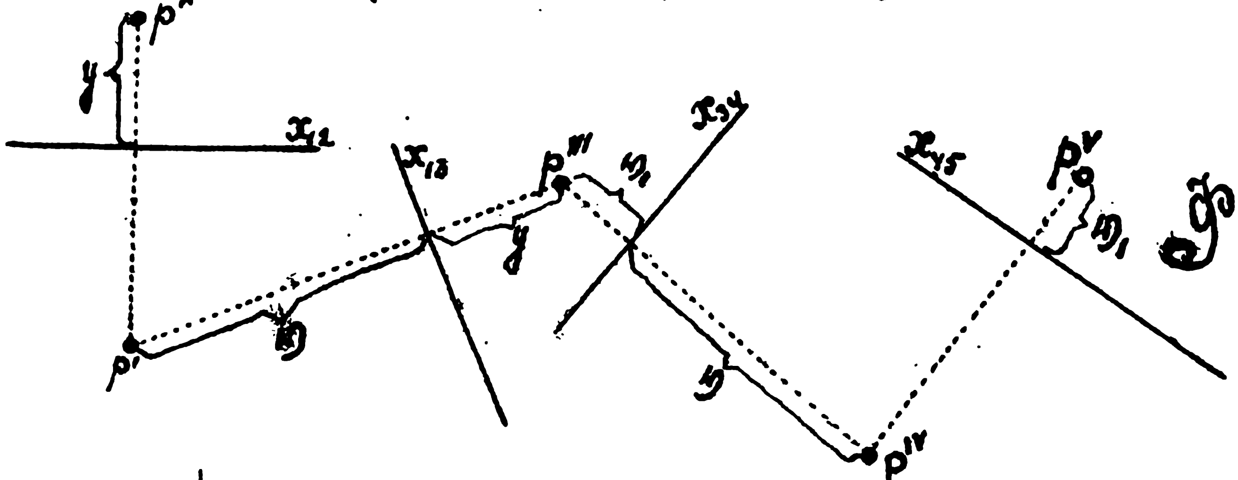
Фіг. 119.

Щоб означити третій слід E_3, котрий перетинає Y в e_y а Z в e_z, треба ще мати на увазі, що e_z може лежати по-за межами нарису. Беремо тоді якусь точку b (=b''') горізонтальна проекція котрої - b' лежить на Y. Проводимо в площі E через точку b рівнобіжну до горізонтальної площі bd_2, то всі точки її мають віддалення від P_1.... d_2d_2'. Відкладаємо $b'b''' = d_2d_2'$, тоді e_yb''' є слід E_3.

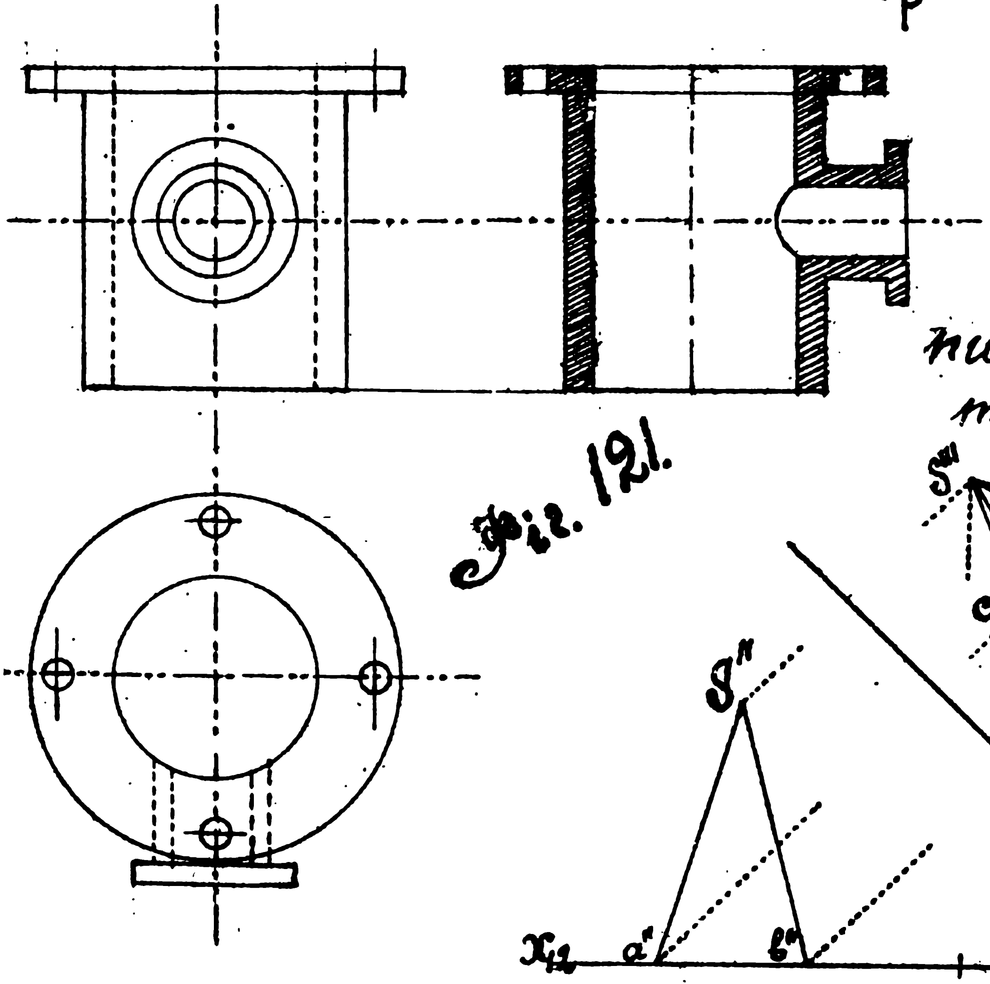
Вже казалось, що площі, котрі рівнобісні до однієї з площ проекцій, дають можливість провадить конструкцію в надзвичайно простих формах. Коли дана якась площа E, то вибіраємо площу P_3 так, аби вона була рівнобісна до P_1 та E_1, ц. т. до їх простої перетинення $E \times P_1 = \perp E_1$, а тому і Y мусить бути рівнобісний до E

Иноді бува потрібно ввести дві або три площі поки одержимо вдале положення. Робиться це — як наочно показано на фіг. 120.

Загально можна висловитися так: віддалення нової проекції якоїсь точки до нової вісі рівняється віддаленню залишиної проекції (Wegfallenden Rissen) до старої вісі.

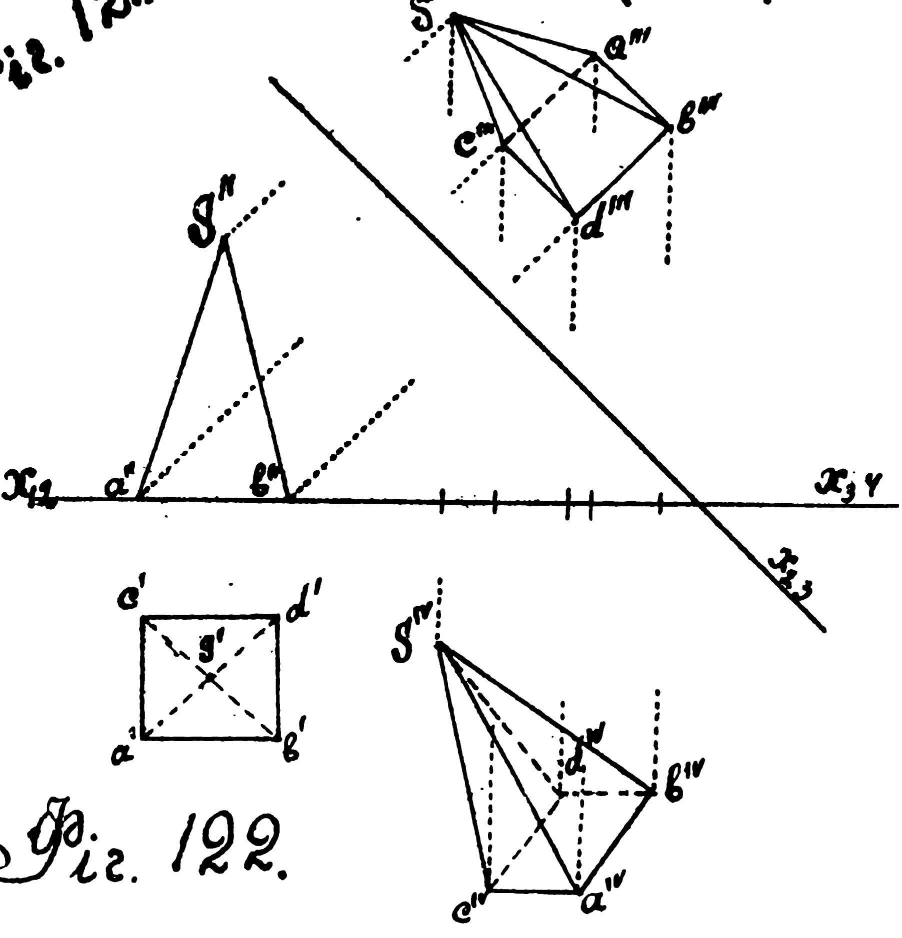


Фіг. 120.



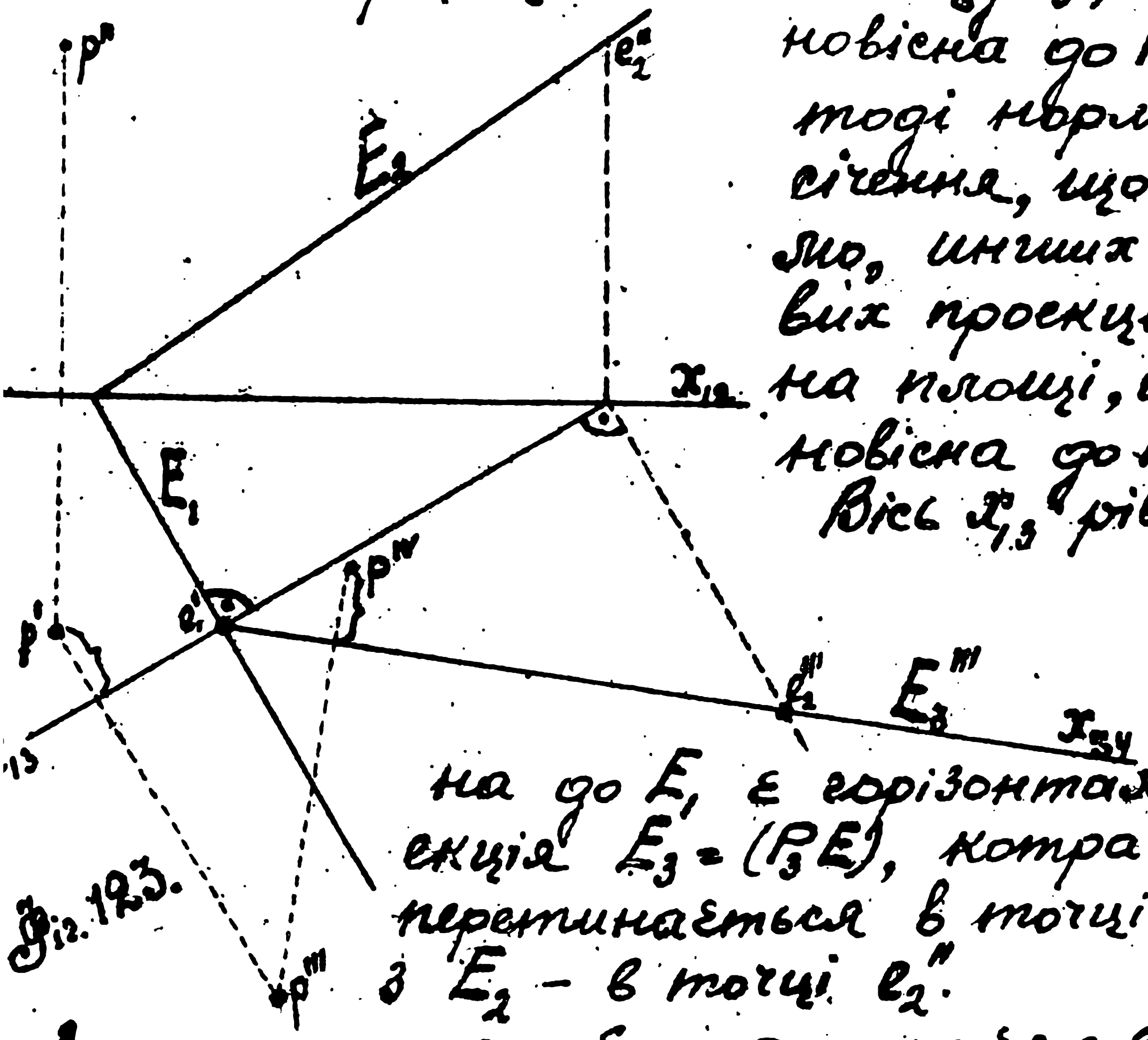
Фіг. 121.

Як приклад, збудуємо проекції чотирьохгранної піраміди (ф.122) та труби (ф.121).



Фіг. 122.

Приклад бокового виду (Seitenrissen) - як загальний метод конструкції. Вже пояснялося, що при допомозі бокової (третьої) площі можна одержати нормальне січення на довільній площі. Нехай треба означити нормальне січення якоїсь фігури, до котрої належить пункт $p(p'p'')$, на площу, що дається своїми слідами E_1 (P_1E) та E_2 (P_2E) (фіг. 123). По-перше, означимо проекцію на площу P_3, що рівновісна до P_1 та E_1, тоді нормальне січення, що шукаємо, инших бокових проекцій буде на площі, що рівновісна до P_3. Вісь $x_{1.3}$ рівновісна до E_1 є горізонтальна проекція $E_3 = (P_3E)$, котра з E_1 перетинається в точці e_1', а з E_2 - в точці e_2''.



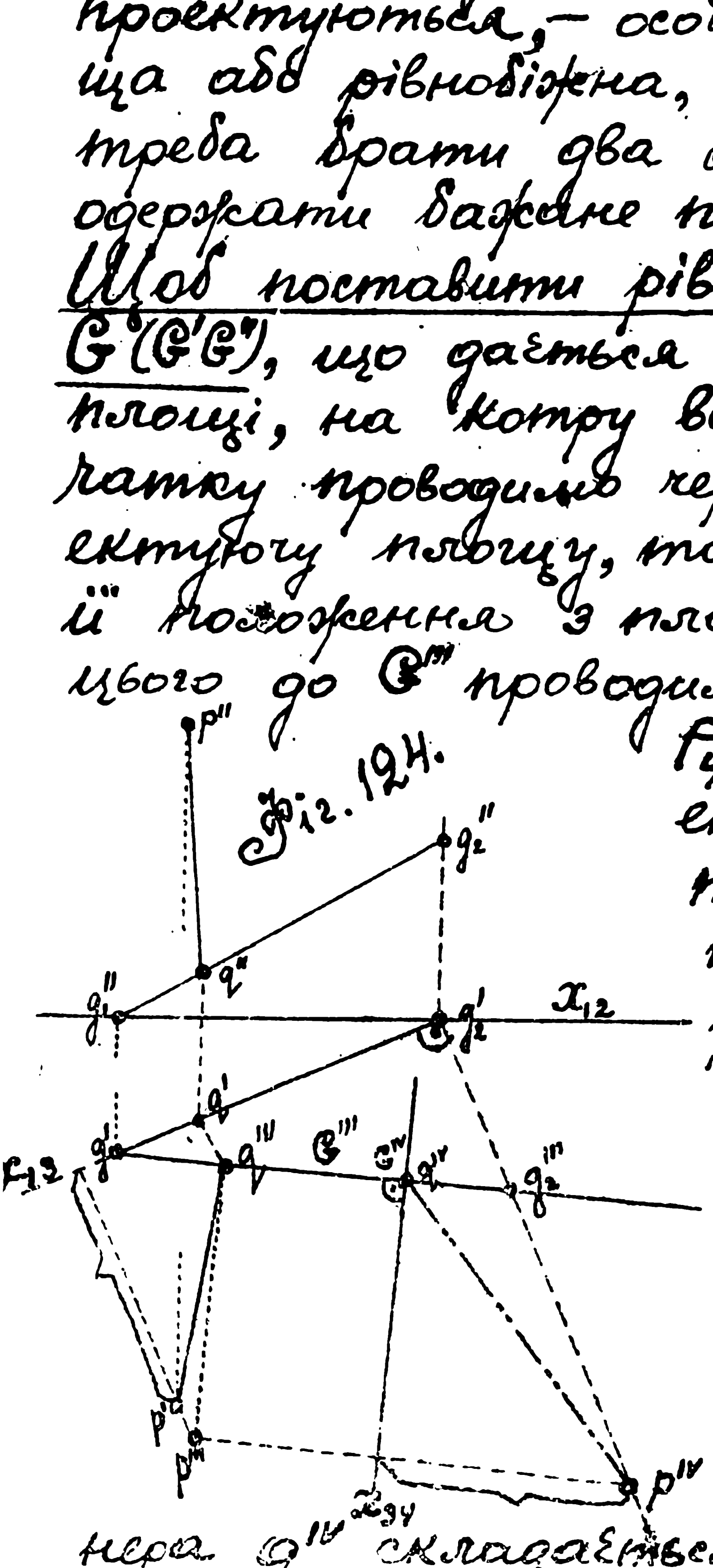
Фіг. 123.

Загальним засобом одержуємо e_2''' та p'''. Тоді $e_1'e_2'''$ є E_3''' (x_{34}), відносно котрої находимо точку p^{IV}, ц. т. нормальне положення точки p відносно площі E.

Цей метод важливий тим, що його

можна вживати, як загальний метод Нарисної Геометрії. Багато задач можуть бути розрішені значно легче, або зведені до більш елементарніх, коли тіла простору поставлені в відповідні положення відносно площ, на котрі вони проектуються, — особливо зручно, коли площа або рівнобіжна, або рівновісна. Иноді треба брати два або три переходи, щоб одержати бажане положення.

Щоб поставити рівновісно якусь просту G (G'G"), що дається своїми проекціями, до площі, на котру вона проектується, спочатку проводимо через G горізонтально проектуючу площу, та означаємо складене її положення з площею P_1 (фіг. 124). Після цього до G''' проводимо рівновісну площу P_4. Тоді проста G''' спроектується на неї однією точкою G^{IV}, що лежить на вісі x_{34}. Одночасно рішається задача, як з данної точки (p'p") спустити ордер на просту G (G'G") та найти його довжину. Коли означені p''' та p^{IV} то, маючи на увазі, що основа ордера q^{IV} складається з G^{IV} в одну точку, сполучаємо p^{IV} з q^{IV} і таким чином одержуємо дійсну величину (довжину) віда—

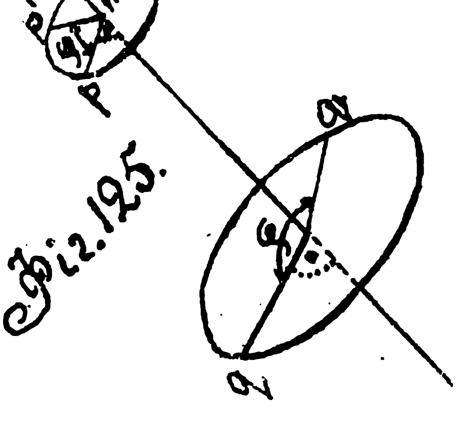

Фіг. 124.

лення точки p від простої G. Щоб одержати першу та другу проекцію цього віддалення, переносимо точку q''' в точки q'' та q'' та сполучаємо їх з відповідними проекціями точки p.

Поворот біля вісі, що рівновісна до площі проекцій.

Введення бокових проекцій має на меті представити просторні тіла в найбільш наочних формах шляхом іншого поставлення тіла відносно нових площ проекцій. Того ж результату можна досягнути при початкових площах проекцій шляхом повороту фігури. Всякий рух жорсткої незмінної (starren) фігури можна уявити собі, як складений з рівнобіжного пересовування та повороту біля вісі. При пересовуванні всі точки фігури проходять однакові довжини, рівнобіжні та однакового напрямку шляхи. Ці шляхи означаються у всяких рівнобіжних проекціях, як однакові рівнобіжні та однакового напрямку відрізки; таким чином, усяке пересовування фігури в просторі відповідає в нормальних проекціях пересовуванню всього нарису.

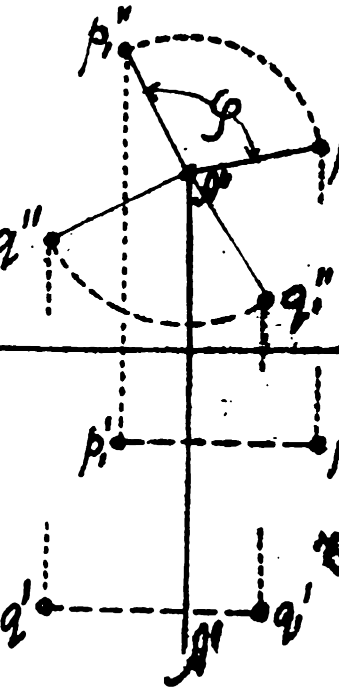
Що торкається до повороту, то кожна точка фігури p описує коло, площа котрого рівновісна до вісі обороту A (фіг. 125).



Фіг. 125.

Радіус повороту всіх пунктів (як mp або nq) описують кути одного напрямку pmp_1, qnq_1. Представлення повороту в двох проекціях значно упрощується, коли вісь обігу A рівновісна до одної з площ проекцій, бо тоді луки кола проектуються на ній в дійсну величину.

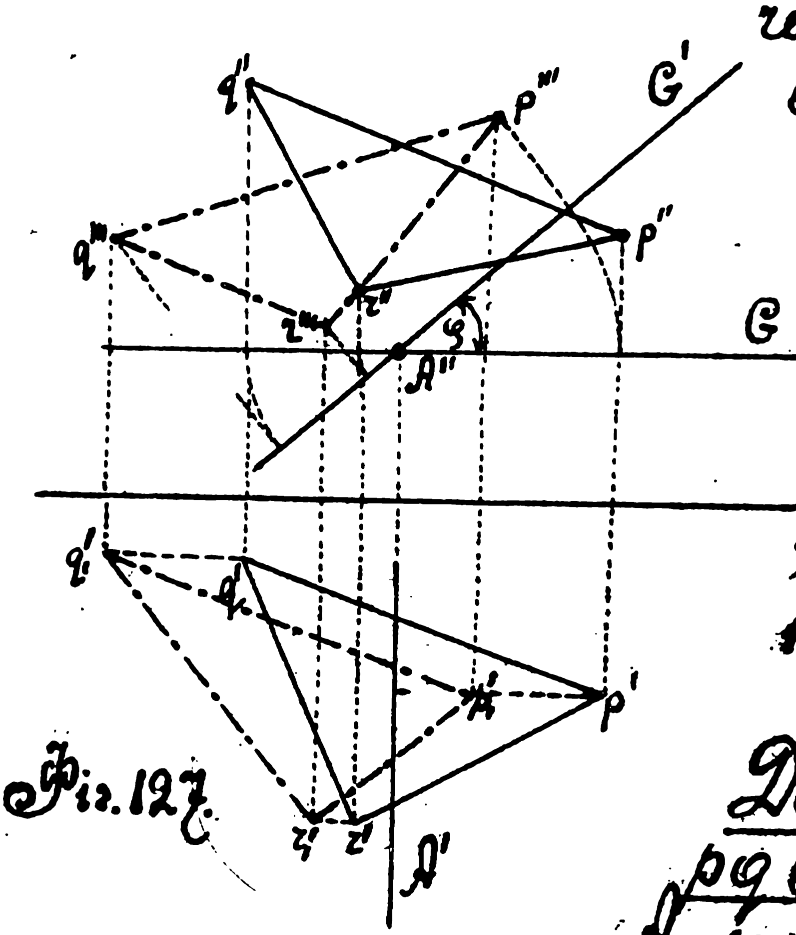
Нехай A (фіг. 126) буде рівновісна до P_2 та φ кут обороту, на котрий точка p повертається. Після повороту p'' переходе в p_1'', описавши луку $p''p_1''$ (дійсної величини).



Фіг. 126

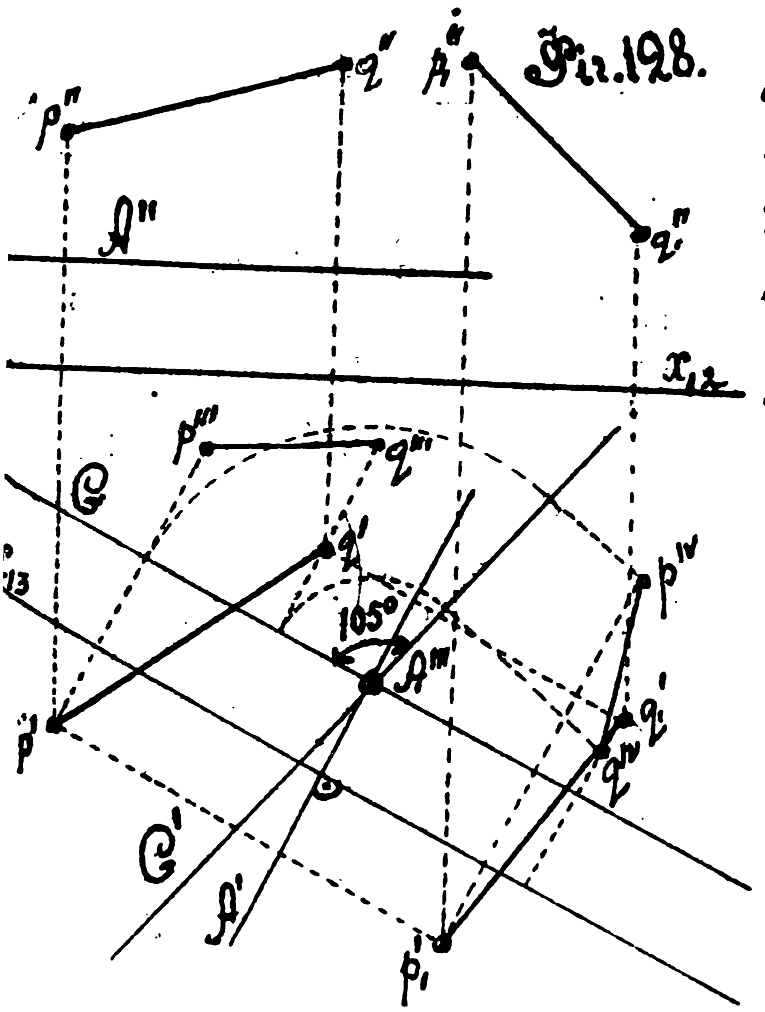
Горізонтальна проекція при цьому пересовується тільки в напрямку, що рівнобіжний до вісі x_{12}. Коли дається окрім цього ще якась точка ($q''q'$), то після цього ж самого повороту (φ) вона перейде в точку (q_1' q_1''). Звідціля виника положення: Коли тіло (або жорстка фігура) повертається біля вісі, що рівновісна до P_2, то його вертікальна проекція повертається навкруги вісі на той же самий кут. Точки його горізонтальної проекції утримують своє віддалення від осі.

Повернуте положення вертікальної проекції якогось тіла, коли воно складається з цілої низки точок, найлегче одержувати так: вибіраємо добре росположену просту, спускаємо на неї з точок фігури орднери та разом з цими орднерами повертаємо її на потрібний кут (фіг. 127).



Фіг.127.

Дається відрізок pq (p'q' p''q'') та вісь A, що рівнобіжна до горізонтальної площі, – треба означити положення pq, коли його повернемо на 105°.

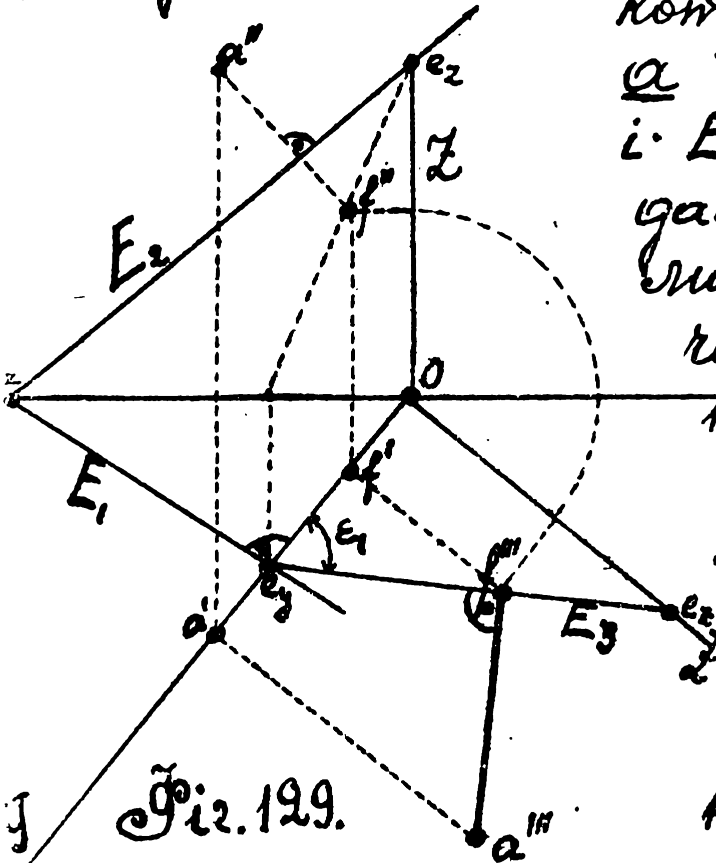


Фіг.128.

Проводимо площу P_3 (фіг. 128) рівнобіжну до A та звичайним шляхом означаємо точки p''' q''' A'''. Через точку A''' проводимо просту G і, як в попередньому випадкові, повертаємо її на 105°.

Означити віддалення точки a від площі E.

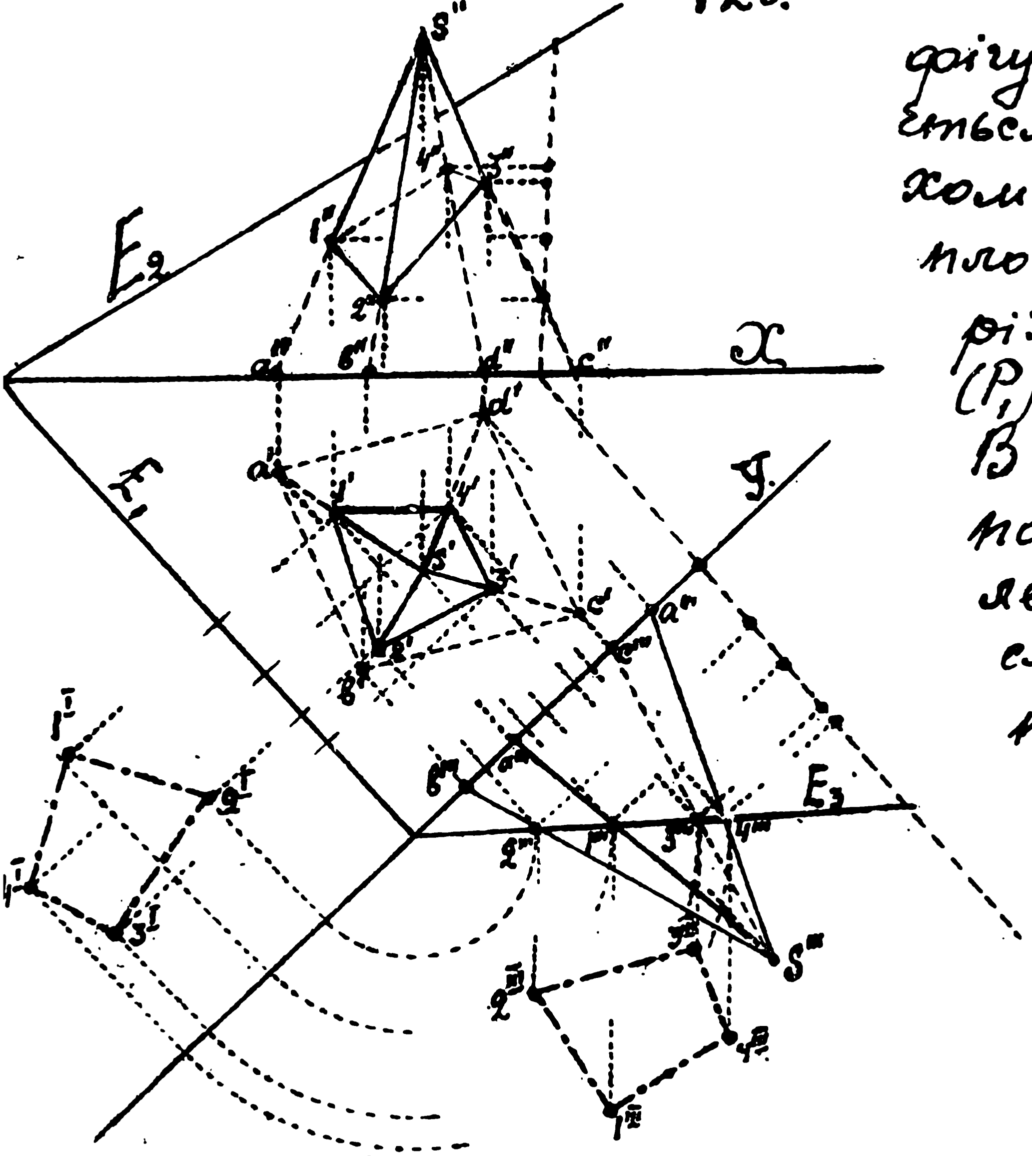
Проводимо (фіг. 129) нову площу проекції, котра проходить через a та рівновіена до P_1 і E. Нехай площа E дається своїми слідами E_1 та E_2. Складаючи P_3 з площею P_1, означаємо a''' та E_3. Спускаємо з a''' на E_3 рівновіс $a'''f'''$, він і дає довжину віддалення, що шукаємо. Поворотом назад $a'''f'''$ одержуємо проекції $a'f'$ та $a''f''$. Тут треба звернути увагу на те, що $a''f''$ буде рівновісна до E_2.



Фіг. 129.

Сконструірувати перетинення площі $E(E_1E_2)$ з пірамидою та накреслити дійсну фігуру перетинення. (фіг. 130).

Візьмімо площу P_3 рівновісно до P_1 та E. Означимо новий слід площі та проекцію піраміди. Нехай така нова проекція буде $s'''a'''b'''c'''d'''$ та E_3 - третій слід площі. P_3 проводимо так, що $E \perp P_3$, значить третя проекція січення пада в E_3. З третьої проекції $1'''2'''3'''4'''$ можливо означити другі проекції, понеже проекції нутних точок лежать на проекціях кантів пірамиди. Дійсна величина січення фігури одержується легко шляхом складення площі E в горізонтальну (P_1) або P_3. В цьому випадкові це легко робиться, понеже площа E рівновісна до P_3.



Фіг. 130.

Прямокутний коловий стовпак, вісь котрого рівнобіжна до вертікальної площі та нахилена до горізонтальної площі, — перетинається простою G; означити точку виходу та входу простої.

Понеже вісь стовпака рівнобіжна до вертікальної площі (фіг. 131), то площа кругів основ рівновісна до неї. Вертікальна проекція буде — прямокутник, два рівнобіжні боки якого представляють проекції кол в той час, коли обидві довгі боки — проекції верхньої та нижньої утворючої лінії. Горізонтальна проекція скл

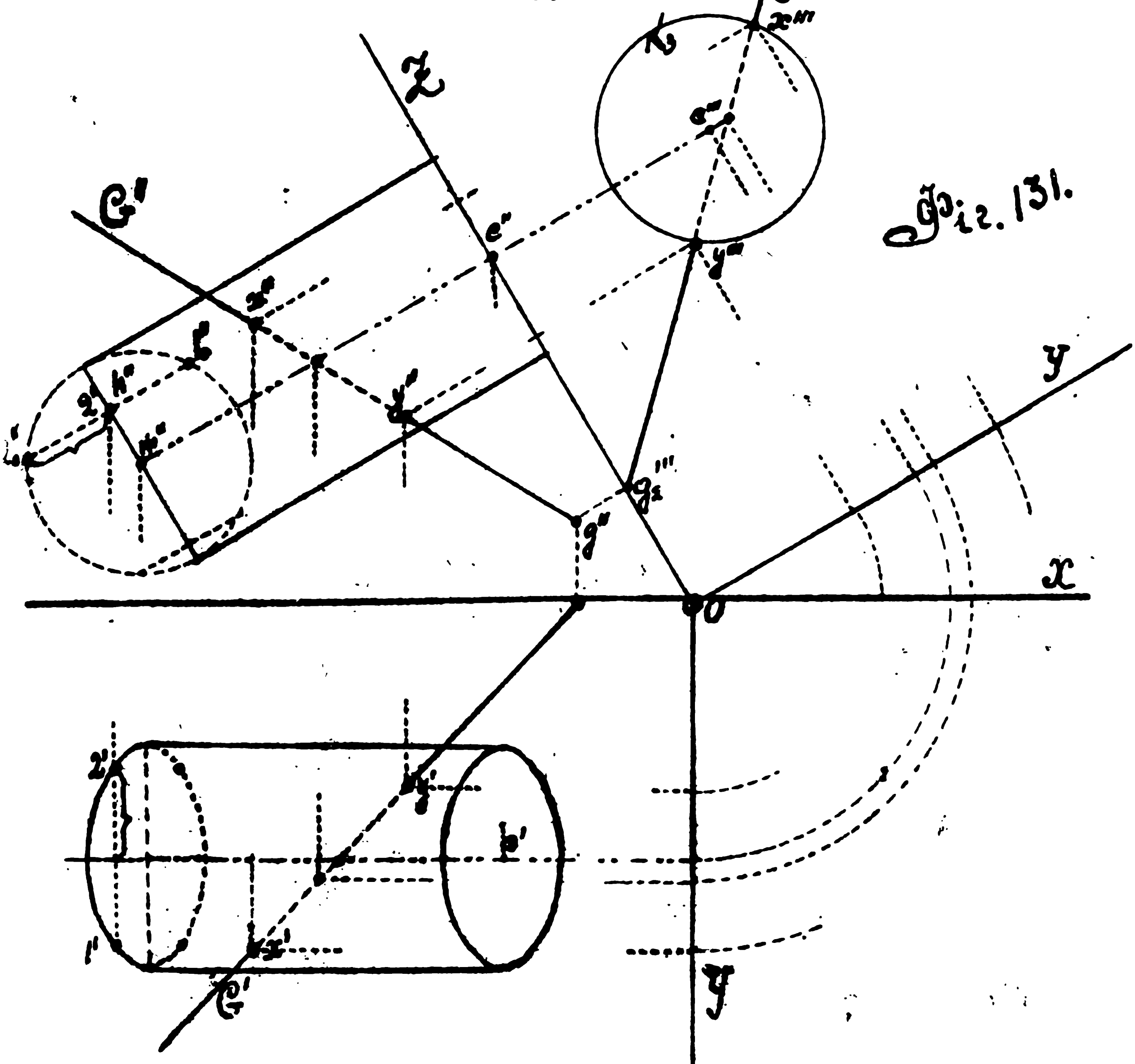


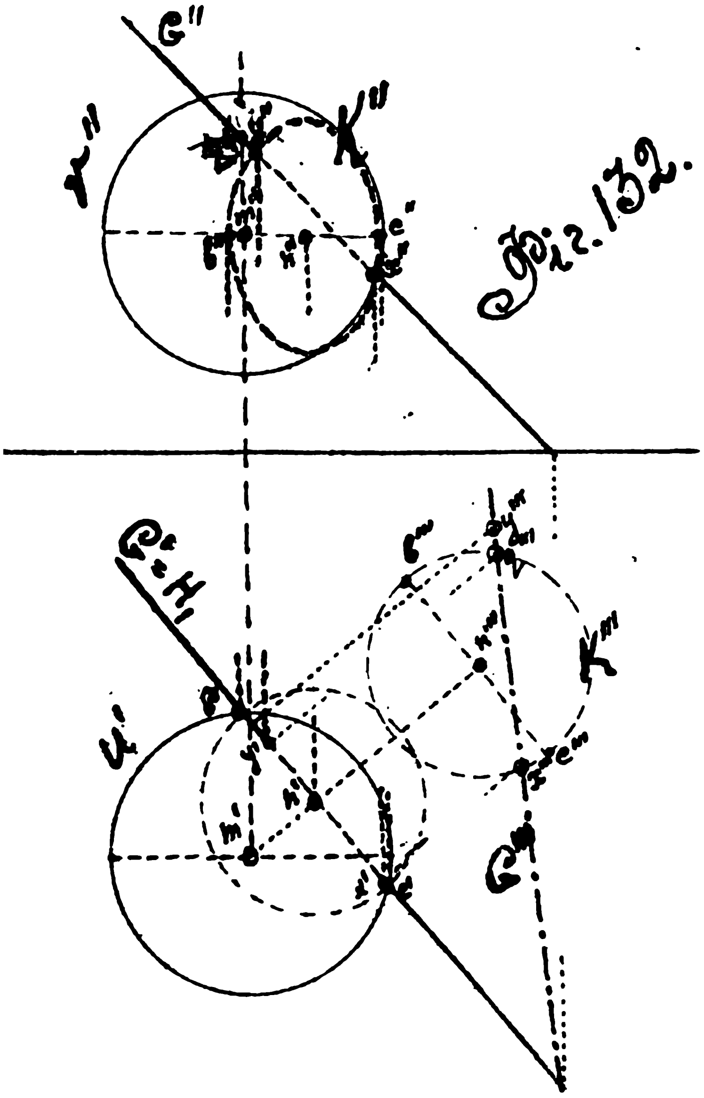
Fig. 131.

дається з передньої та задньої утворюючих ліній та з елиптичних проекцій обох основних кол, котрі означаються по попередньому.

Щоб означити точку, де проста протика поверхню стовпака, користуємось площею нормального січення, напр.- основного кола C, як третьою площею проекцій P_3. Загальні точки площі стовпака проектуються на P_3 по сліду K_3 стовпака. Складаючи P_3 на вертікальну площу та викреслюючи третю проекцію стовпака, як і третю проекцію C_3

тоді точки перетинення x''' та y''' G''' з K_3 — треті проекції входу та виходу простої, які ми шукали. Конструїруючи зворотно x''' та y''', одержуємо проекції x'' та y'', x' та y', при цьому слід запримітить, що вертікальні віддалення xx'' та yy'' на кожну до вертікальної площі рівновісну площу, ц. т. P_1 та P_3 проектуються в однаковій довжині.

Означити точки перетинення простої з кулею (фіг. 132).


Фіг. 132.

Дійсний горізонтальний нарис кулі, ц. т. геометричне місце тих точок поверхні, по котрим лучі, що проектують на горізонтальну площу, торкаються до кулі — є горізонтальне коло u' з центром m'.

Аналогічно маємо вертікальний очерк v''. Щоб одержати точки входу та виходу простої в кулі (де вона протика кулю) — перетинаємо кулю. Горізонтально проектуюча площа H, що проходить через просту G, перетина кулю по колу K

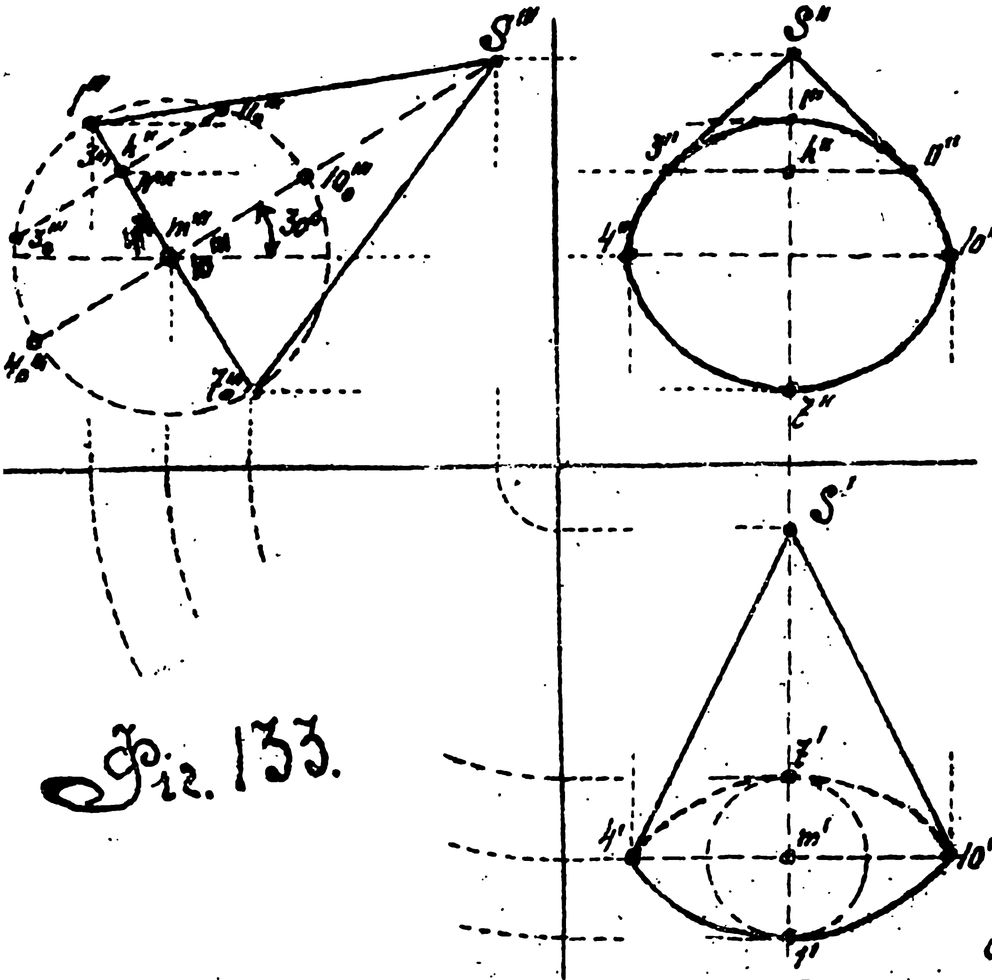
з центром $\underline{n}$ та радіусом $n'в'=n'c'$. Проста G зустріча січення K в точках x та y, що шукаємо. Конструкцію фактично можливо провести різними засобами. Або можливо використати еліпс K'', знаходячи точки перетинення G'' з K'' $(x''y'')$ (з допомогою площі рівнобіжної до P_1 або P_2). Швидче матимемо наслідки, коли площу H вкупі з G та колом K покладемо на горізонтальну площу. При цьому G складеться в G''', а K...... K'''. В точках перетинення G''' з K''' одержуємо точки x''' y''', котрі після проектуємо на G' та G'' (точки x' та y').

Сконструірувати проекції прямовісного колового стіжка, вісі котрого складають з P_1 та P_2 кути в 30° та 60°.

Вісь стіжка sm (фіг. 135) лежить в площі рівновісній до X. Проводимо P_3 рівновісно до X. Основа стіжка — коло рівновісне до sm. Воно проектується на площу P_3 як проста $1'''m'''7'''$, що рівновісна до $s'''m'''$ і служить диаметром. Диаметр кола 4-10 рівновісний до P_3 і на площах P_1 та P_2 проектується в дійсну величину та дає великі вісі колових проекцій. Диаметр 17 проектується на площу P_1 та P_2 в скороченному виді та дає малу вісь.

Щоб одержати проекцію якоїсь точки,

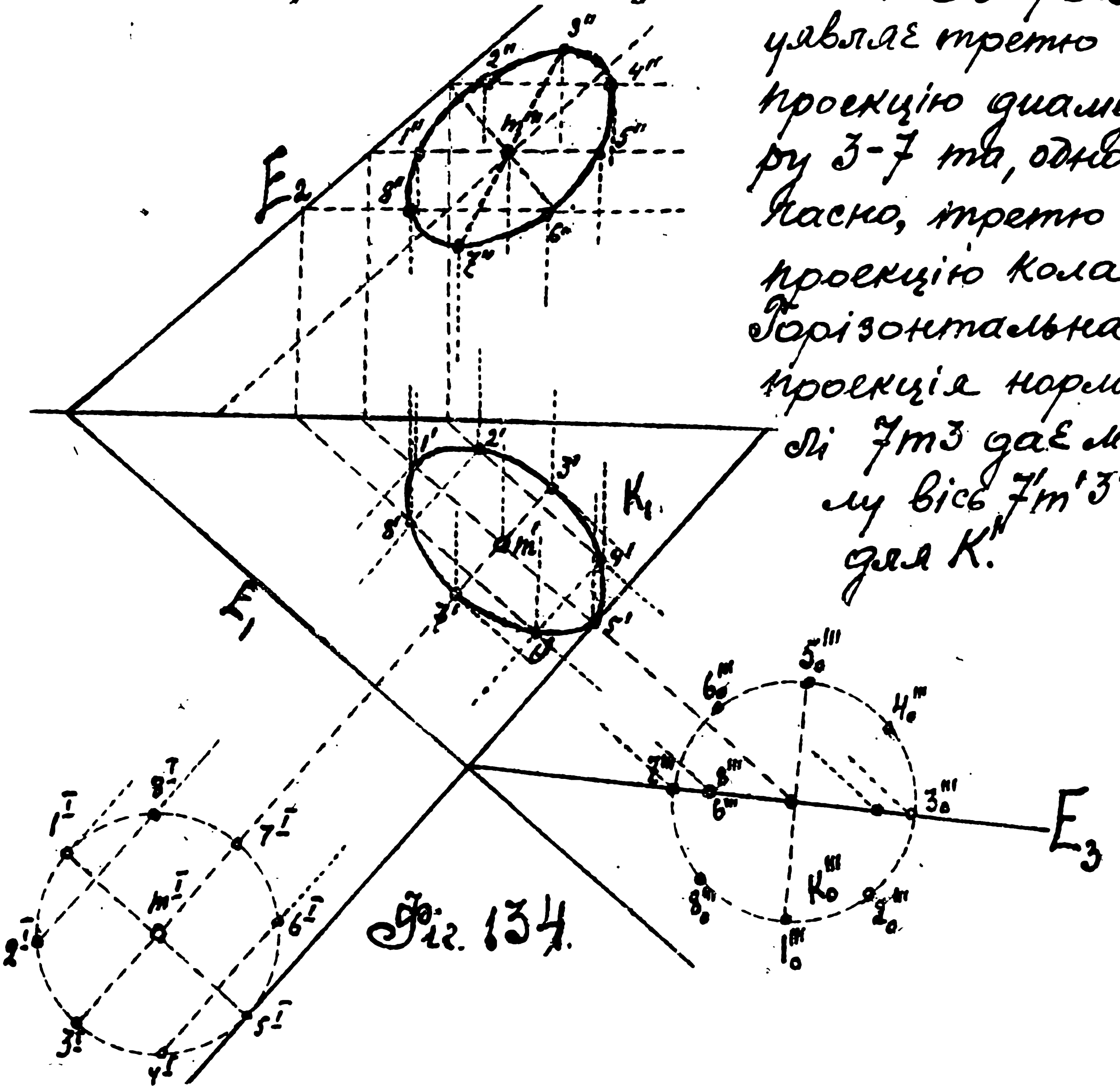
проводимо тятиву напр. 3-11 рівнобіжно до діаметру 4-10, ц.т. рівнобіжно до X. Така тятива проектується на площу P_1 та P_2 в дійсну величину, а на площу P_3, як точка. Її довжину одержимо, коли коло основи повернемо біля діаметру 1-7 аж доки він стане рівнобіжно до P_3. При такому рівнобіжному положенню всі тятиви, що рівнобіжні до діаметру 4-10, проектуються на площу P_3 в дійсну величину. Нарешті проектуємо вершину стіжка на площі P_1 та P_2 та проводимо з S' та S'' дотичні до кола основи.



Фіг. 133.

В площі E лежить коло з осередком m та лучем r. Треба означити його проекції (фіг. 134)

Проекції кола K' та K'' будуть еліпси, великі вісі котрих лежать на простих, що рівнобіжні до слідів площі, малі вісі — рівновісні до них. Вводимо третю площу проекцій P_3, котра до P_1 та E буде рівнобіжна; тоді третя проекція кола складається з E_3. Довжина $3'''7'''=2r$ уявляє третю проекцію діаметру 3-7 та, одночасно, третю проекцію кола. Горізонтальна проекція нормалі $7m3$ дає малу вісь $7'm'3'$ для K'.



Фіг. 134.

Таким чином можливо викреслити K', маючи $1'5'$, що рівнобіжна до $E_1 = 2r$ та малу вісь $3'7'(= 2r\cos\varepsilon_1)$, котра знаходиться з допомогою третьої проекції ($3'''7'''=2r$). Аналогічним засобом можна сконструірувати K''.

На нарисові (фіг. 134) викреслено положіння K^I перекладеного кола та показано, як з його допомогою можна визначити цілу низку точок. Треба зауважити, що: перекладене коло та його горізонтальна проекція афінні та E_1 - вісь афінітету.

Швидче досягнемо цілі, коли коло повернимо біля диаметру 3-7, щоб воно стало рівнобіжно до P_3 і тоді викреслимо його третю проекцію.

Довільна тятива 86, що рівнобіжна до горізонтальної площі, проектується в дійсну величину. Половину тятива 6'8' можна мати з відповідної довжини $6_0'''8_0'''$, де вона спроектована в дійсну величину.

З третьої та горізонтальної проекції кола одержуємо вертікальну проекцію. Таким чином можна найти проекції всякої фігури, що лежить в даній площі.

Треба розгорнути нахильний стовпак.

(фіг. 135).

Щоб розгорнути поверхню стовпака, роблять, як при означенні нормального січення косої призми. Нормальна площа перетинає стовпак по еліпсу C, котрий при розгортці переходить в просту. Проекції C' та C'' одержуємо найскоріше при допомозі третьої площі проекцій P_3, котра рівновісна до горізонтальної площі та рівнобіжна до творящих ліній стовпака. Проекції C' та C'' для розгор-

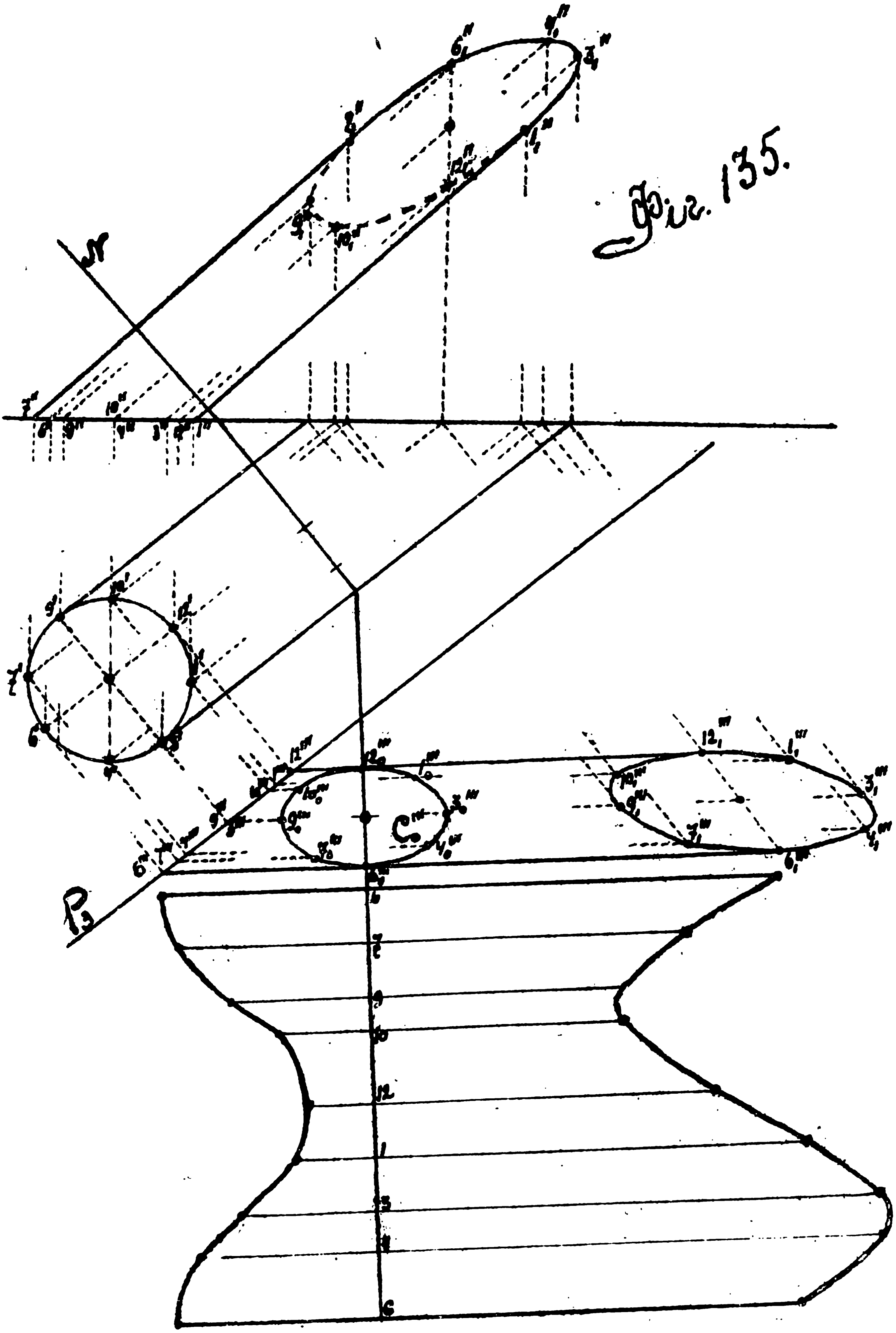


Fig. 135.

тки поверхні стовпака, власне кажучи, непотрібно. Нарис показує, що при допомозі P_3 дійсна величина C_0''' від С може бути сконструірувана безпосередньо (без одержання С' та С''. Крім того, введення площі P_3 дає той гарний наслідок, що в площі P_3 можна мати дійсну величину творящих.

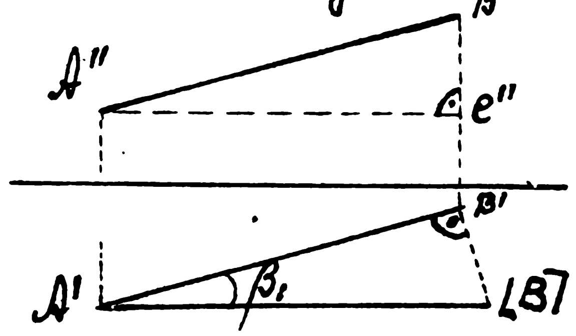
При розгортці стовпака еліпс перетинення С перетворюється в просту 6-12-6, котра по довжині відповідає ректіфіцірованому еліпсові C_0'''. Відкладаємо довжину 6-7 = луці еліпса $6_0''' 7_0'''$ і т.д. і через точки 6, 7, 8...... проводимо рівновіски до простої 6-12-6 та по обидва боки її відкладаємо відповідні частини утворюючих і одержуємо точки перекладених слідів стовпака (горізонтального та вертікального). Таким чином одержуємо розгортку частини стовпака між площами P_1 та P_2. Коли потрібно накреслити в розгортці тангенту, то робиться це так, як робилося раніще.

Площею нормального січення нахильний стовпак поділяється на два рівновісних стовпака, загальний грунт котрих є еліпс перетинення.

Усунення вісі проекцій.

Нехай буде дана горізонтальна та вертікальна проекції: А'В' та А"В" і їх вісь проекцій X (фіг. 136).

Щоб одержати дійсну величину довжини АВ, складаємо площу, що проектує просту на горізонтальну площу з цією останньою так, щоб точка А залишилась на місці. Вісь повороту є проста перетинення цих обох площ, - ц. т. проста АС. Складенне положення [В] точки В' лежить на рівновісі до А'В' на віддаленні рівнім диференції положення А" та В", ц. т. В"С". Тоді А'[В] є складена дійсна величина АВ. Повернутий диферентний трикутник АСВ в горізонтальній площі представляється в дійсній величині та формі й при точці А' має дійсну величину кута β_1 = нахилові відрізку АВ до горізонтальної площі. Подібним засобом можна означити кут нахилу відрізку до вертікальної площі - β_2.



Бачимо, що при цих конструкціях вісь проекцій не грає жадної ролі. Всю конструкцію можна було б перевести, коли б на нарисові не було вісі проекцій. Все залежить від ріжниці висот обох точок (Kotendifferenzen); на них пересовування вісі проекцій зробити вплива не може. Нерухоме положення вісі проекцій тільки тоді потрібне, коли треба знати висоту якоїсь точки, а не взаємну ріжницю висот, ц. ј. віддаленн. окремих точок від площі проекцій.

При всіх технічних конструктивних задачах треба мати тільки проекції просторного образу, взаємне положення окремих точок і віддалення від вісі проекцій цілком непотрібне.

В технічному кресленні вісь проекцій цілком усовується і тільки означається напрямок ліній $A'A''$ $B'B''$.

На простому прикладі покажемо, як вживаються елементарні методи нарисної геометрії при відсутности вісі проекцій. При цьому виявляється, що конструктивне проведення рішень в просторі має велику свободу і незалежність від незручних положінь.

Як приклад, візьмемо обіг точки навкруги якоїсь вісі (фіг. 137).

Нехай S — вісь повороту та точка A, що дається своїми проекціями, лежить зовні вісі S. Проводимо через точку A нормальну до вісі S площу. Точка її перетинення M з віссю повороту S є центр кола, котре точка мусить описати при повороті. Для

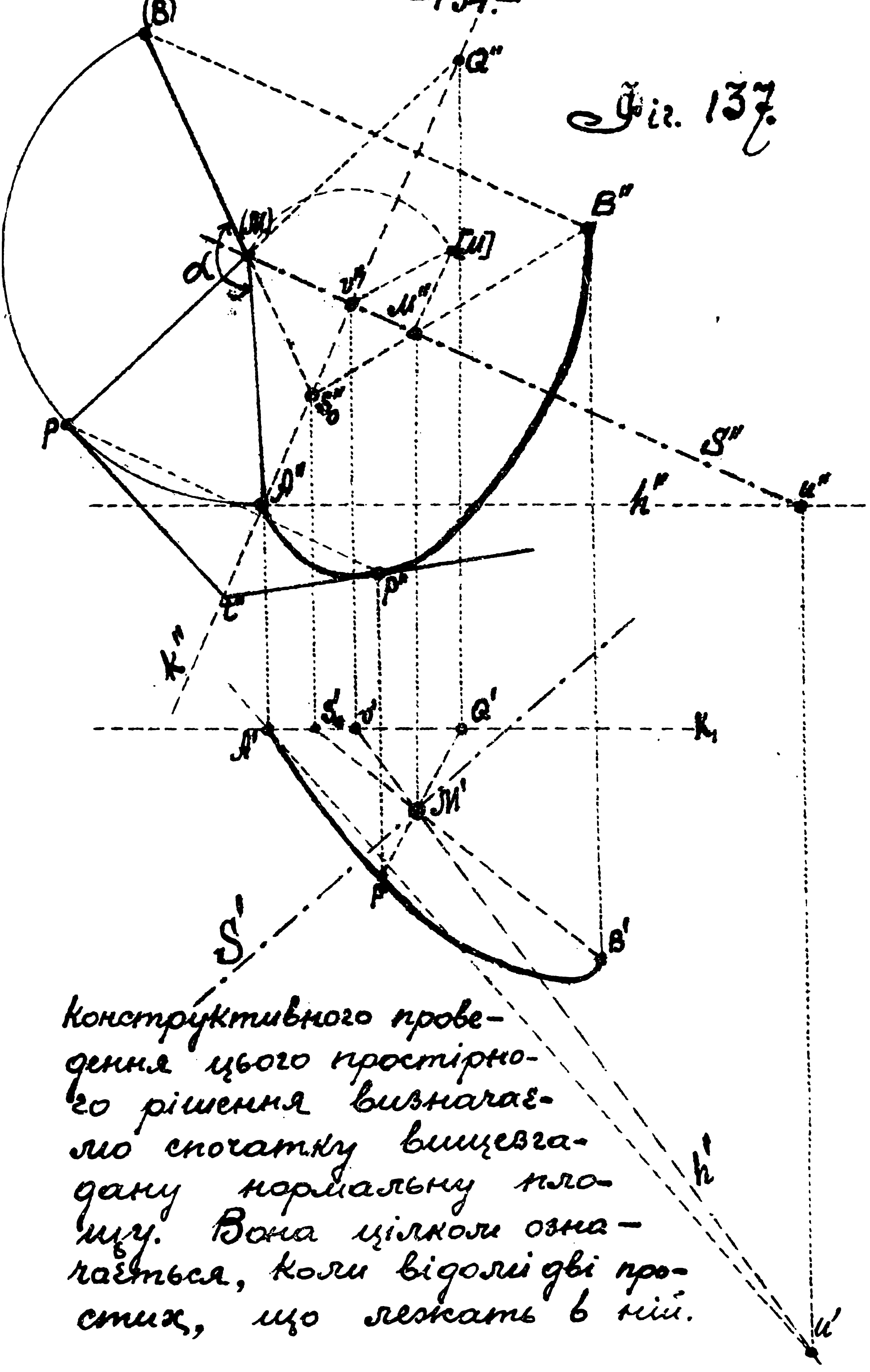


Fig. 137.

конструктивного проведення цього простірного рішення визначаємо спочатку вищезгадану нормальну площу. Вона цілком означається, коли відомі дві простих, що лежать в ній.

Понеже площа, яку означаємо, мусить бути рівновісною до простої S, то горізонтальна проекція одної з простих h' мусить бути рівновісною до S' а вертікальна h'' рівнобіжною до горізонтальної площі. Відповідно означаються проекції другої простої K.

Щоб означити точку перетину площі (h,k) з віссю обороту S, користуємось допоможною площею, яку проводимо через цю просту, напр., вертікально проектуючою площею. Вона перетинає прості k та h в точках u та v, вертікальні проекції котрих u'' та v'' одержуємо безпосередньо; горізонтальні проекції u' та v' означають горізонтальну проекцію w' перетинення допоможної площі з площею, що проходить через прості h та K. Звідсіля маємо точку M' перетинення S' з w'. Проектуємо M' на S'' і одержуємо M''.

Коли площу $(h\,k)$ повернемо так, щоб вона була рівнобіжною до одної з площ проекцій, то буде можливо означити проекції луки повороту. Як що повернемо площу так, щоб вона була рівнобіжною до вертікальної площі проекцій, то вісь повороту буде K''. Точка M при цьому повороті описує луку кола, площа повороту складається з вертікальною площею простої S і центр перетинення є V(з K)

Диферентний трикутник відрізку vM дає його дійсну величину й при обороті M'' ляже на нормалі до $K''-M''v''$. Понеже точка A'' лежить на вісі повороту, то вона залишається на місці та $A''(A)$ є радіус обороту. Нехай $\angle$ буде кут, на котрий треба повернути та B нехай буде конечним положенням; точку (B) треба повернути назад для означення проекцій. Луч $(B)(M)$ перетина вісь повороту K'' в точці S''_0, ця точка при повороті площі залишається на місці, так що S''_0M'' буде вертікальною проекцією луча та вертікальна проекція B'' знаходиться на нормалі з (B) до K''. Горізонтальна проекція B' одержується на горізонтальній проекції радіуса BM'_1 котрий сполучає центр M'_1 з горізонтальною проекцією S'_0 (на K')

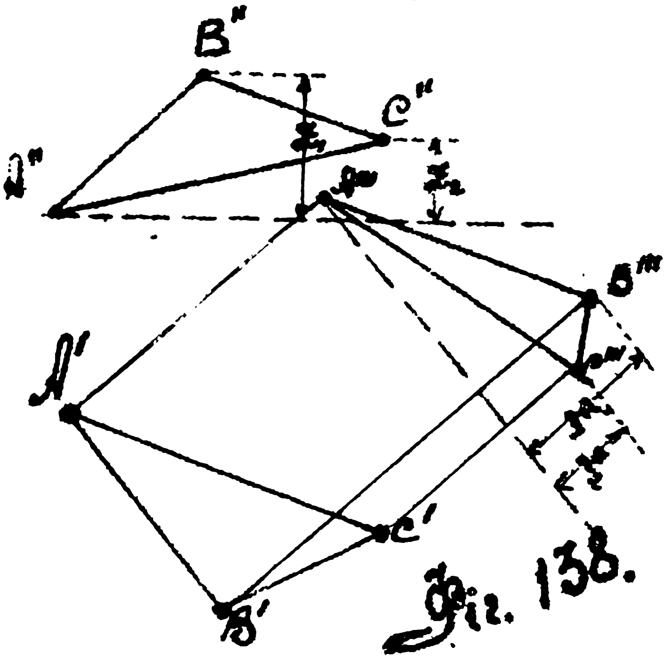
При цих конструкціях вертікальних проекцій поворотів користуємось теорією афінітету, котрий мається між повернутими та нормальними проекціями плоскої фігури. Відповідні прості $(B)(M)$ та $B''M''$ перетинаються на вісі афінітету (вісі повороту K'') і відповідні точки (B) та B'' лежать на нормалі до афінітетної вісі. Це геометричне споріднення між обома фігурами дає можливість сконструірувати точки та тангенти еліпса, котрий є вертікальною проекцією кола, що описує точка A при обороті, напр.,

p'' та t'' в (p) та (t). Горізонтальна проекція p' одержується так, як й було одержано для B.

Трансформація системи проекцій.

Коли простірні геометричні конфігурації даються своїми горізонтальними та вертікальними проекціями — часто вимагається ввести нові нормальні проекції тіла, ц. т. трансформувати.

Покажимо, як таку трансформацію можна зробити, коли вісь проекцій усунута. На фіг. 138 даються горізонтальна та вертікальна проекції трикутника ABC.



Фіг. 138.

Одержуємо нову, третю проекцію трикутника, котра являється на місце напр. другої, коли через горізонтальні проекції точок проведемо нові лінії, котрі мусять сполучати з третіми проекціями. Змінюємо положення вертікальних проекцій — горізонтальні залишаються без зміни. Таким чином ріжниця висот (диференція) двох точок відносно того, що залишається положення горізонтальних проекцій — не змінюється. Коли виберемо довільно третю проекцію якоїсь точки, напр. A''', то цим саяким означаємо треті проекції решти точок.

Трансформація таким чином підлягає такому правилу: змінюється положення одної з двох площ проекцій, то різниця висот яких будь двох точок відносно другої площі не змінюється.

Треті проекції часто називаються боковим видом. Положення цього бокового виду так вибирається, щоб одержане бокове виображення давало найясніще уявлення тіла. Але треба звернути увагу, що проекція бокового виду можлива тільки на площу, що рівновісна до положення незміненої площі, ц. т. і в новій системі обидві площі проекцій мусять бути взаємно рівновісні. Або инакше: перепроектировка на нові площі проекцій може дати добрі наслідки тільки тоді, коли нова площа проекцій рівнобіжна до однієї з первісних площ. В иншому випадкові треба робити перепроектировки двоїні.

Боковий вид з успіхом тоді прикладається, коли уявляємому образові бажано дати найпростіщий вид, щоб упростити конструкцію.

Коли третя площа проекцій рівновісна до перших двох, то вона нав. площею поперечного січення (або розрізу).

Задачі нарисної геометрії иноді дуже легко рішаються, коли образи шляхом трансформацій в новій системі проекцій вибрані вдало.

Поверхні обігу.

а) Утворення. Уявимо собі просту або криву лінію С, що сполучена накріпко з нерухомою простою Д та обертається навкруги Д, як вісі. В такому випадкові лінія С описує поверхню, котру нав. поверхнею обігу або ротаціонною поверхнею. Лінія С нав. утворюючою, нерухома проста Д — віссю обігу. Кожна точка лінії С при обігу описує коло, центр котрого лежить на вісі Д і площа котрого — рівновісна до Д. Всі площі, що рівновісні до вісі, перетинають поверхню обігу по колам, котрі нав. рівнобіжними колами. Коли таке рівнобіжне коло поділяє поверхню на дві конгруентні фігури, то його нав. екватором або рівником. Екватор є найбільше або найменше рівнобіжне коло. Площа, що проходить через вісь (меридіанальна площа) перетина кожне рівнобіжне коло в двох симетричних до вісі точках.

Усі криві меридіанів одного й того ж тіла обігу (Ratationekörper) конгруентні. Вид тіла обігу означається формою меридіанної кривої. Коли береться меридіанна крива — коло, або еліпс, або парабола, або гипербола, то обігом цієї лінії одержується куля, або еліпсоїда, або параболоїда, або гиперболоїда, коли вісь складається з головним диаметром кривої.

Наколи утворююча C є рівнобіжна до вісі проста, то утворюється рівновісний коловий стовпак; коли утворююча проста перетинає вісь обігу в одній точці — одержуємо коловий стіжок. Усі ці поверхні нав. поверхнями другого порядку, бо вони всякою простою, котра не зовсім лежить в цій площі, перетинаються найбільше, як в двох точках. Криву поверхню нав. n-го порядку, коли вона всякою простою, що не зовсім лежить в ній, перетинається в n точках (дійсних або уявляємих).

в) Графичне представлення. Графичне представлення робиться з допомогою рівнобіжних кол та мерідіанів. Таким чином, найкраще брати вісь обігу рівновісно до одної з площ проекцій, бо тоді рівнобіжні кола та мерідіани викреслюються найпростіще.

Будемо завше брати вісь обігу рівновісною до горізонтальної площі проекцій, тоді всі рівнобіжні кола будуть проектуватися колами з лучем r та центром D'. Під дійсним обрисом кривої поверхні розуміють геометричне місце тих точок, проектуючі проміння котрих торкаються поверхні — природно, горізонтальна проекція найбільшого горізонтального кола проектується в дійсну величину. Так само й найменший (шийка тіла) проектується в дійсну величину. Горізонтальні проекції меридіанів - прості, що проходять через Д'. Той з меридіанів, що рівнобіжний до вертікальної площі проекцій, проектується на неї в дійсну величину й означає, таким чином, дійсний обрис головного меридіану.

Нехай поверхня обігу має Д за вісь, а $\underline{I}\ \underline{II}\ \underline{III} \ldots \underline{V}$ - за утворюючу; треба:

а) по данній горізонтальній проекції а' означити а'',

в) означити проекції меридіану, що проходить через цю точку,

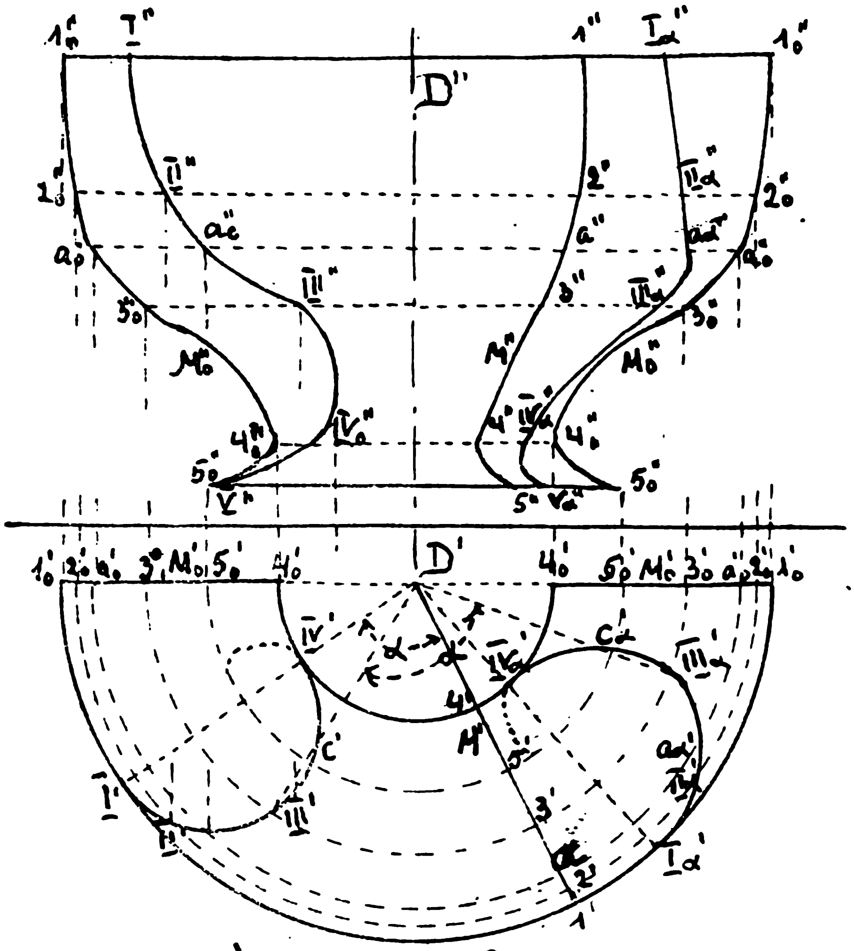
с) викреслити головний меридіан M_0,

d) означити положення утворюючої, що проходить через точку поверхні $\underline{III}\alpha$ $\underline{III}\alpha$

а) На нарисові дається крива С, як утворююча поверхню. Горізонтальна проекція рівнобіжного кола описується радіусом Д'а'; вертікальна його проекція буде простою рівнобіжною до вісі х. Вертікальна проекція означається просто з допомогою рівновісу а'а''. (фіг. 139).

в) Проста Д'а' є горізонтальна проекція меридіану, що шукаємо. Означаючи ріжні точки 1'2'3' (від М') на вертікальній проекції та сполучаючи їх, одержуємо М'.

с) це завдання є тільки окремий випадок попереднього. Горізонтальна проекція M_0' (головного меридіану рівнобіжна до Х.



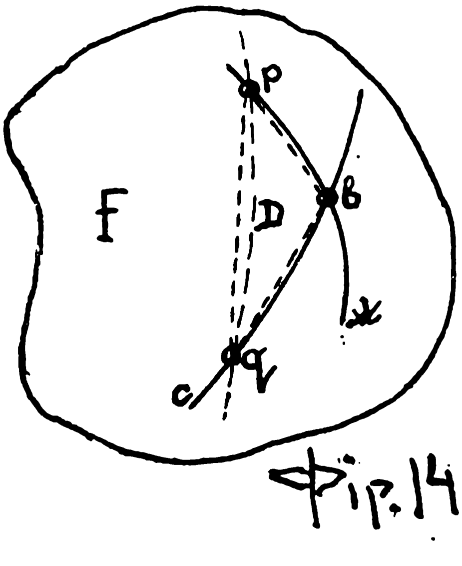
Фіг. 139.

d) Описуємо навкруги Д' коло радіусом Д'$\underline{III}'_\alpha$, котрий перетинає C' в $\underline{III}'$, $\underline{III}'\underline{III}'_\alpha$ є величина луки, котру точка $\underline{III}$ утворюючої мусить пробігти, щоб прийти в положення $\underline{III}_\alpha$. Проводимо проміння Д'$\underline{III}'_\alpha$ та Д'$\underline{III}'$, що складають кут α.

Такий самий кут α звичайно мусять утворювати два других відповідних проміні, напр. Д'$\underline{I}'$ та Д'$\underline{I}'_\alpha$. В такий спосіб одержуємо низку точок C'_α. Вертікальна проекція одержується, коли означимо вертікальні проекції точок $\underline{I}'_\alpha$, $\underline{II}'_\alpha$ ......

Площі торкання до поверхней, особливо до поверхней обігу (фіг. 140).

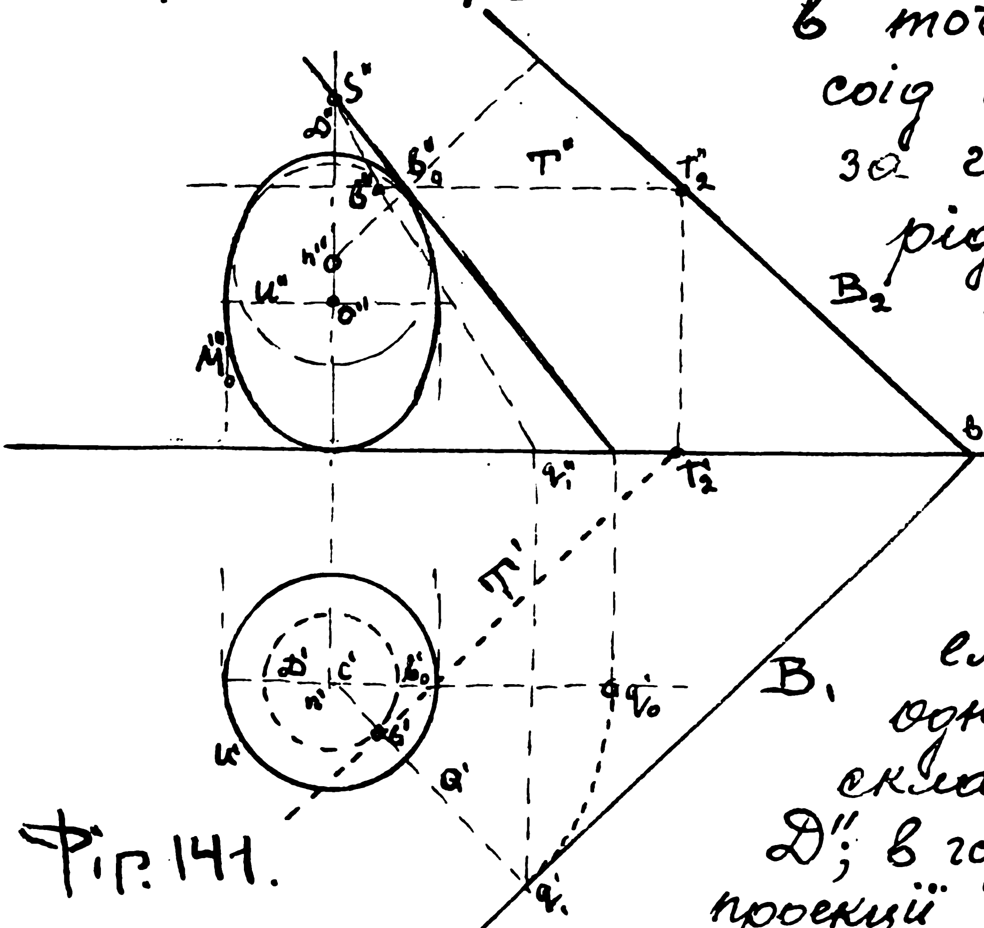
Через точку $\underline{b}$ якоїсь кривої поверхні можна провести безліч кривих. Всяка тангента до якоїсь кривої в точці $\underline{b}$ є одночасово тангентою до кривої поверхні в точці в. Наколи точка в є звичайна точка на кривій поверхні, а не особлива, — наприклад, вершина стіжка або подвійна точка кривої, — то можна висловити таке положення: всі тангенти в звичайній точці кривої поверхні лежать в одній площі — в тангенціальній площі, що торкається поверхні в данній точці. Висловлене положення можна так з'ясувати: Через яку-будь точку поверхні — в (фіг. 140) проведені дві кривих А та С. Якась третя крива Д перетина обидві другі криві в точках p та q. Три точки p, q та в і три секанти pq, вq та вq лежать в одній площі. Пересовуємо криву Д на поверхні так, щоб вона пройшла через в, тоді три секанти переходять в тангенти до кривих А, С та Д і в межі складають площу, що торкається поверхні в точці в. Проводимо до двох кривих А та С через точку в тангенти, — вони означають площу, котра має в собі третю тангенту в точці в. Конструкція площі торкання завше можлива, коли через точку в проведемо дві криві та до них тангенти.



Фіг. 140.

В точці b поверхні обігу B провести тангенціальну площу.

Через всяку точку b поверхні обігу (фіг. 141) проходить рівнобіжне коло та мерідіан. Ці дві криві служать, як допоможні криві при конструкції тангенціальної площі в точці b. Еліпсоід обігу має за головний мерідіан M_0. В вертікальній проекції він представляється як еліпс M_0'', одна вісь його складається з D''; в горізонтальній проекції U' є коло, що описане з D' другою віссю, як радіусом. Тангенціальна площа в b має в собі тангенту до рівнобіжного кола — T та тангенту до мерідіану Q. Тангента T рівнобіжна до горізонтальної площі й має вертікальний слід в t_2. Щоб одержати тангенту Q, повертаємо мерідіальний еліпс, що проходить через точку b, навкруги D аж доки він складеться з M_0. При цьому b переходить в b_0 і відповідна



Фіг. 141.

меріdіальна тангента переходить в положення Q_0, в котрому вона перетинає D в S та P_1 в q_{01}. При зворотному повороті одержуємо горізонтальний слід q_1 тангенти до меріdіану в <u>b</u>. Горізонтальний слід B_1 проходить рівнобіжно до T' через q_1, а значить, рівновісно до $D'q_1$. Вертікальна проекція проходить через b_x та t_2.

Нормальні поверхні. Поверхні обігу, як обгортуючі безліч куль.

Тангента T рівновісна до меріdіальної площі, що проведена через точку торкання <u>b</u>, одночасно площа торкання, що має в собі T, рівновісна до меріdіальної площі, ц.т. площа торкання до поверхні тіла обігу рівновісна до меріdіальної площі точки торкання. Нормаль <u>bn</u>, що спущена на площу торкання B, лежить в меріdіальній площі. Це відноситься до всякої нормалі. З допомогою нормалі до поверхні в точці <u>b</u> можна накреслити слід B_2 без означення b_x. Проводимо $b_0''n''$ $\perp$ $b_0''s'$ до перетинення з D'', тоді $n''b''$ буде вертікальною проекцією нормалі в <u>b</u>, ц.т. B_2 мусить бути рівновісною до $n''b''$. Описуємо навкруги $n = bn \times D$ коло радіусом <u>nb</u>, та повертаємо всю фігуру навкруги D, тангента до меріdіальної площі — sb утворює коловий стіжок, а коло навкруги <u>n</u> радіусу nb — кулю. Три поверхні, а саме: поверхня обігу, стіжок та куля вздовж одного ~~кола~~ рівнобіжного кола мають одні й тіж площі торкання.

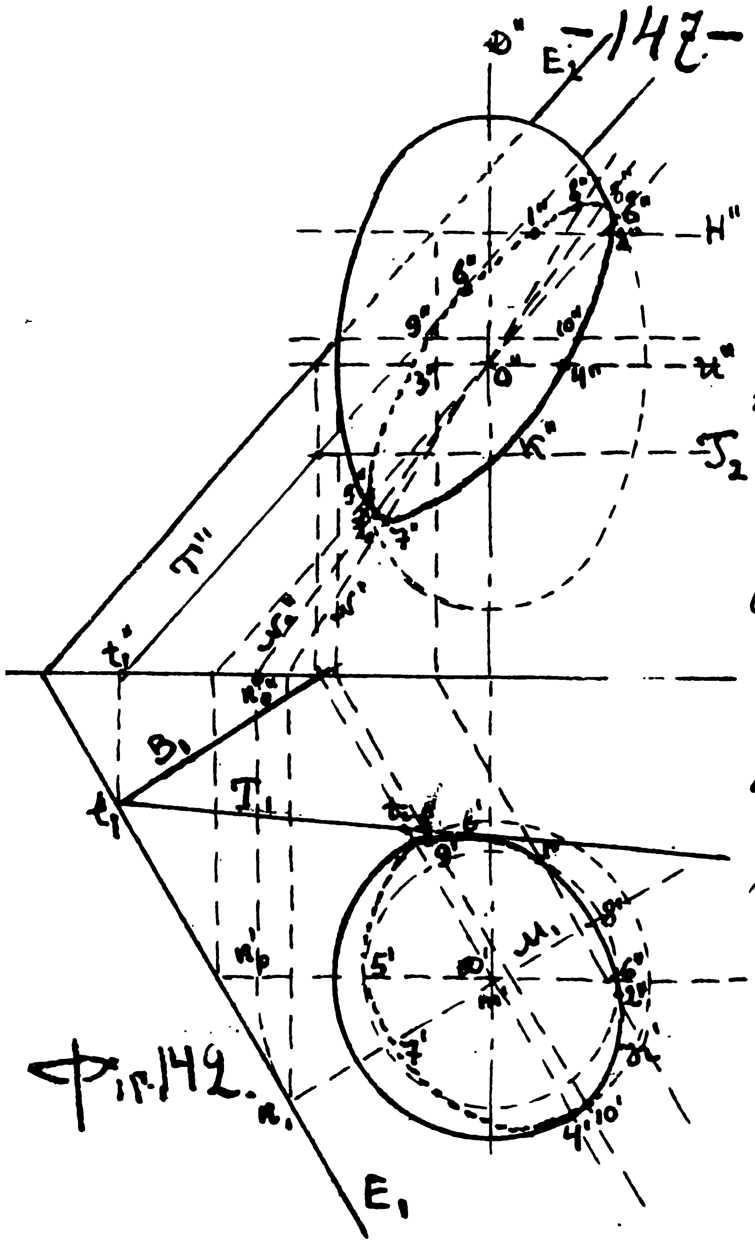
Звідсіля положення: кожна поверхня обігу вздовж рівнобіжного кола торкається стіжком обігу та кулею, центр котрої лежить на вісі обороту. Таким чином всяку поверхню обігу можна розглядати, як обгортуючу поверхню кулі, центр котрої пересовується по вісі обігу та радіус котрого завше нормальний до періметру меріdіана.

Перетинення площею поверхней обігу.

Сконструіровати перетинення еліпсоіда обігу з площею E (E_1, E_2). Вісь еліпсоіда рівновісна до горізонтальної площі (фіг 142).

Щоби означити точки кривої перетинення K, вводимо допоможну площу, рівновісну до D. Така площа H перетинає поверхню по рівнобіжному колові, площу E в горізонтальній проекції по рівнобіжному напрямку до її горізонтального сліду, котра перетинає коло в двох точках 1 та 2 (від K). Горізонтальні проекції знаходимо безпосередньо, вертікальні лежать на H ($1''$-$2''$).

Особливі точки K — самі вищі та низчі. Горізонтальні проекції ($3'$-$4'$) лежать на проекції U' великого рівнобіжного



Фіг.142.

кола та означаються як і всі інші. Вертікальні проекції (5"-6") находяться на вертікальній проекції головного мерідіану й означається простою перетинення головного мерідіану в площею E. Еліпс K' торкається кола U' в точках 3', 4'. Так само в вертікальній проекції еліпс K" торкається в точках 5" 6". Найвища та найнизча точки K лежать в рівновісній до E мерідіальній площі M. Вона є площею сіметрії для поверхні обігу a, значить, і кривої перетинення K, ц.т. проста перетинення N = M × E є віссю сіметрії для K. Горізонтальна проекція K' так само сіметрична відносно N_1. На нормалі N знаходяться найвища та найнизча точки кривої K – це точки перетинення 7 та 8 нормалі N з кривою мерідіану (M). Щоб одержати 7 та 8, повертаємо площу M навкруги D аж доки вона стане рівнобіжною до вертікальної площі. При цьому N переходить в N_0

а $\underline{n}_1$ пересовується в $\underline{n}_{01}$, точка $O = D \times E$ залишається на місці. В цьому рівнобіжному положенню N_0 перетинає головний меридіан в точках 7_0 та 8_0. Поворот площі меридіану в старе положення (M) дає точки 7 та 8, що шукали.

c) Для еліпсоіда обігу крива перетинення K є еліпс, лінія симетрії котрого 7-8 є вісь. Поділяємо вісь 7-8 в $\underline{m}$ на дві рівних частини та проводимо через $\underline{m}$ просту 9-10, що рівнобіжна до E_1, — вона буде другою віссю еліпса; кінцеві точки 9-10 знаходяться на рівнобіжному колові, котрий вирізується в поверхні горізонтальною допомоговою площею.

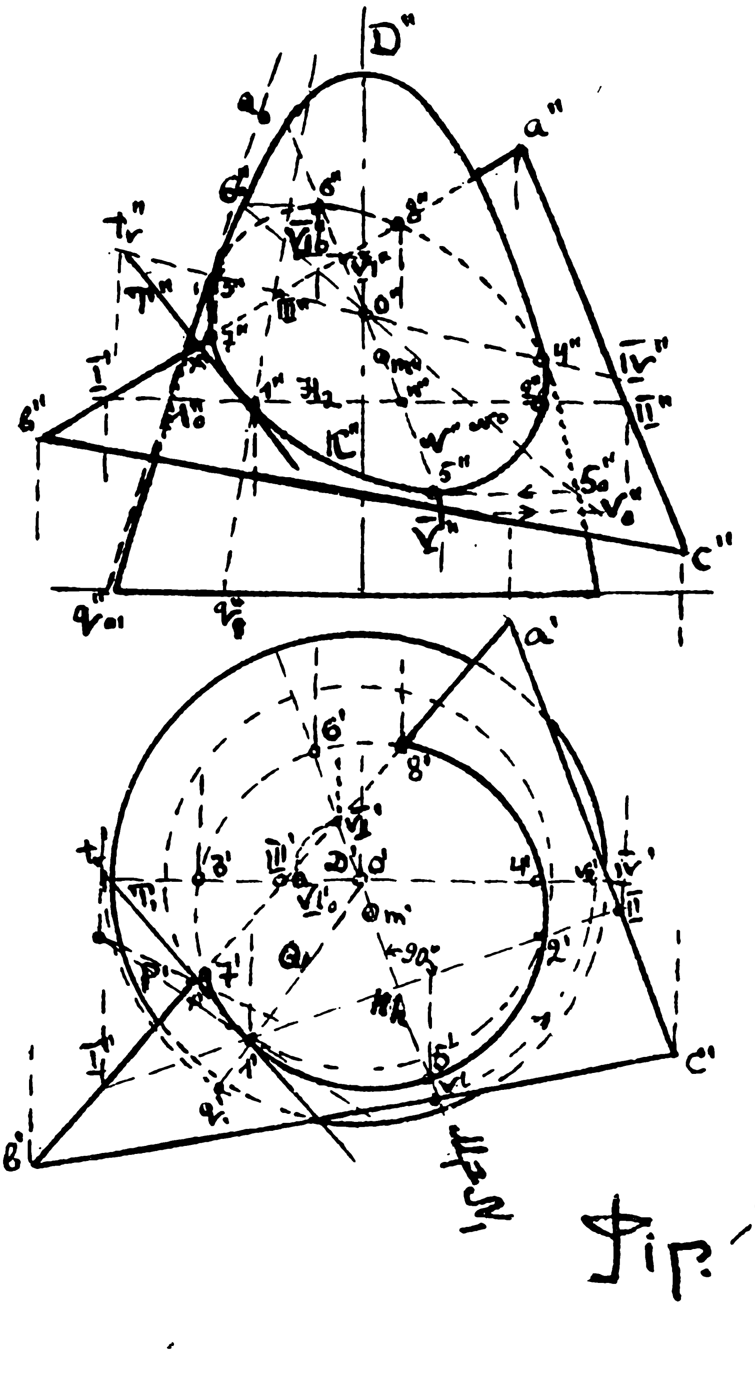
d) Тангента до K в точці $\underline{b}$ є проста перетинення E з площею торкання в $\underline{b}$. Вистачить, коли від цієї площі торкання відома горізонтальна проекція B_1. Щоб легче одержати точки, вживають замісць горізонтальних слідів відповідну площу рівнобіжного кола. На нарисові (фіг. 142), напр., замісць сліда t_1 беремо точку t_i, в котрій тангента T зустріча площу J.

e) дійсна величина K одержується шляхом складення площі E з горізонтальною площею. В данному випадкові — еліпс перетинення означається вісями. Відрізок $7_0''8_0''$ дає довжину великої вісі а $9''10''$ — малої. Треба ще пам'ятати, що всі рівнобіжні плоскі січення якогось еліпсоїда обігу — подібні еліпси, всі центри котрих лежать на диаметрові поверхні.

Означити перетинення площі з поверхнею обігу (фіг. 143.)

Нехай дається нам параболоїд обігу й треба означити його січення K з трикутником авс. Допоможна площа H рівновісна до D : перетинає параболоїд по рівнобіжному колові й трикутник по горізонтальному сліду $\underline{I\;II}$. Цей слід перетинає рівнобіжне коло в точках 1 та 2 кривої K. Точки 3, 4 та вища й низча точка знаходяться, як в попередньому випадку. Треба тільки звернути увагу, що нахильна лінія $N = M \times авс$ в точці n_h рівновісна до горізонтального сліду $\underline{I\;II}$ і що одночасно N' рівновісна до $\underline{I'II''}$. Крива перетинення K простою $\underline{ав}$ обмежується в точках 7 та 8. Ці точки можна прямо сконструірувати, як точки перетинення ав — параболоїда. Тангента T до кривої K в точці 1 є лінія перетинення трикутника авс з тангенціальною площею до параболоїда в 1. Для цього досить означити якийсь другий пункт T. Тангенціальна площа в точці 1 означається тангентою до рівнобіжного кола в точці P та тангентою до меридіану Q. На нарису $x = ab^{x}$ площею (PQ) є друга точка тангенти. Для контролю показана точка перетинення t_0 (T) з площею головного меридіану.

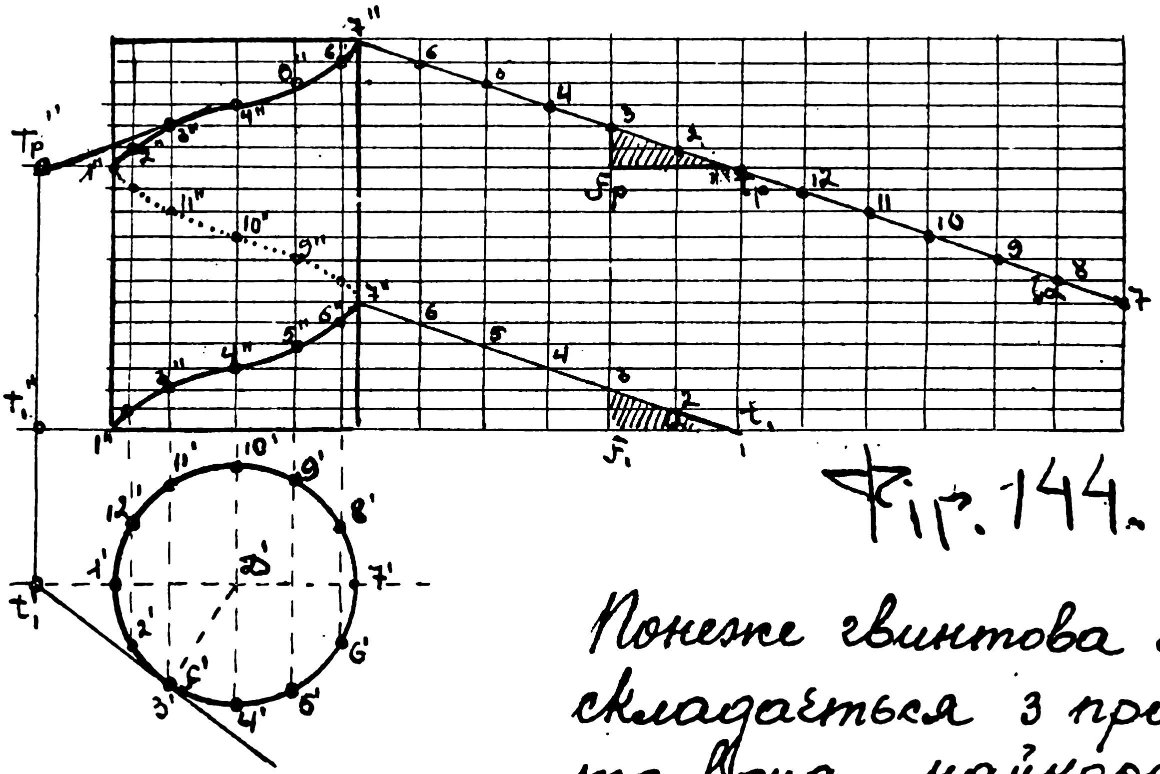
Лінія перетинення буде лукою еліпса, котра на горізонтальну площу проектується, як лука кола з центром m'.



Фіг. 143.

Гвинтові лінії та гвинтові поверхні.

Уявимо собі, що площа прямокутного трикутника (фіг. 144) $7''7'7''$ в кутом α так обгортується навкруги стовпака (з радіусом r), що катет складається з рівнобіжними колом стовпака, тоді накручена гіпотенуза дасть гвинтову лінію. В залежности від напрямку обгортання — розріжняють право та ліво йдучі гвінтові лінії. Права гвинтова лінія для обсерватора уявляється як лінія, що піднімається зліва направо. Ліва — навпаки. Як що горізонтальний катет $7''7$, накрученого на стовпак прямокутного трикутника, має довжину $2r\pi$, то відповідна гіпотенуза робить цілий гвинтовий оборот. Уявимо собі боки кута α необмежено довгі, то природно, що ~~гв~~ гвинтова лінія зробить безліч оборотів. Рівнобіжні віддалення до вісі стовпака $11 = 22 = 33$ дають віддалення двох гвинтових оборотів і наз. висотою ходу. Як що означимо її через h, то $h = 2r\pi \operatorname{tg}\alpha$, ц. т. Constant для всіх утворюючих. Кут α називається кутом під'єму. Кожні дві рівних довжини гвинтової лінії конгруентні, ц. т. гвинтова лінія ніби то сама пересовується. Цю прикмету крім її має ще тільки проста та коло.



Фіґ. 144.

Понеже гвинтова лінія складається з простих, то вона найкоротча лінія, котру можна провести між двома точками на стовпаковій поверхні, ц. т. вона є геодезична лінія на стовпаковій поверхні. Вона дає зразок натягнутої на стовпаковій поверхні нитки.

Проводимо в прямокутному трикутнику 7"77," котрий беремо, як утворюючий гвинтову лінію, рівнобіжні до прямовісного катету, то рівнобіжні відносяться до відповідних віддалень від точки 7, як $h : 2\pi r$.

Понеже ці шматки не змінають своєї довжини, коли їх гнути, то завше горізонтальне віддалення такої точки гвинтової лінії відноситься до відповідної луки горізонтального кола, як $h : 2\pi r$. Це дає можливість накреслити вертікальну проєкцію гвинтової лінії.

Коли дається радіус r горізонтального кола та висота ходу h, то описуємо в горіз. проекцію коло та ділимо його на довільне число рівних частин (12). На таку ж кількість частин поділяємо висоту ходу h. Нехай 1 буде горізонтальним слідом гвинтової лінії; віддалення цього пункту $= 0$; перше віддалення точк 2, котра проектується в $2' = \frac{1}{12}h$; горізонт. віддалення наступної точки 3 є $\frac{2}{12}h$ і т. д. Коли одержимо один гвинтовий хід, наступні обороти одержуємо від h, $2h$, $3h$ і т.д. для всіх точок стовпакової поверхні. Щоб означити тангенту гвинтової лінії в точці 3, уявимо, що кривоповерхневий трикутник $133'$ розгорнуто в площу, аж доки він пройде через творячу стовпака $33'$. Така площа мусить, звичайно, торкатися стовпака по лінії $33'$; проста $3't_1$, в котру перетворюється лука $3'1'$ є тангента для горізонтального кола в точці $3'$. Гіпотенуза $3t_1$ плоского трикутника $33't_1$ дає тангенту гвинтової лінії в точці 3 і t_1 — горізонтальний слід цієї тангенти.

Таким чином робимо на тангенті горізонт. в точці $3'$ шматок $3't_1' =$ луці кола $3'1'$, то t_1' є горізонтальний слід тангенти в точці кривої 3 та $t_1''3''$ — вертікальна проекція тангенти.

Для точок 1 та 7 вертікальні проекції тангенти складаються в горізонтальною проекцією відповідної творячої. Вертікальна проекція першого гвинтового обороту складається в чотирьох конгруентніх четвертинок. Точки 4" та 10" будуть точками повороту.

Примітка. Вертікальна проекція гвинтової лінії є сінусоїда. Беремо Д" за вісь X, точку кривої 4" за початок координат та вісь Y рівновісну до вісі X, то для якої-небудь точки 5" $y = r \sin \varphi$, коли кут $4'Д'5' = \varphi$. $\varphi : 2\pi = x : h$; $y = r \sin \frac{2\pi x}{h}$ — що є рівнання сінусоїди.

Гвинтова поверхня.

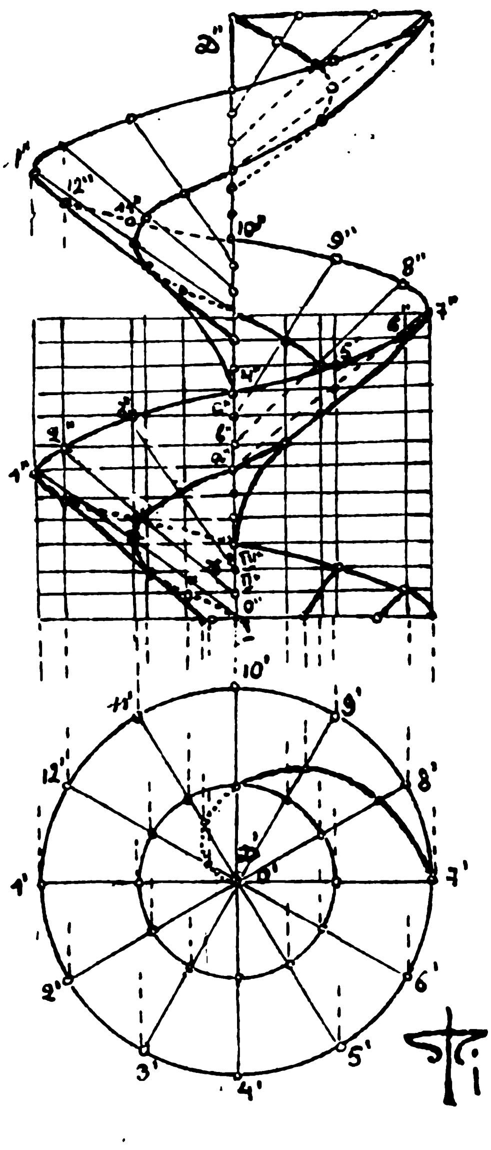
Коса гвинтова поверхня описується простою, що посовується та що лежить на гвинтовій лінії й одночасно перетинає вісь цієї гвинтової лінії під данним кутом γ (фіг. 145)

Вісь для гвинтової лінії є одночасно віссю для поверхні. Рівнобіжна до X проста 1'Д' є горізонтальна проекція утворюючої $1\underline{I}$, рівнобіжної до вертікальної площі, вертікальна проекція котрої означається $(1''\underline{I}'')$, коли накреслимо $\sphericalangle 1''\underline{I}''a'' = \gamma$. Спускаємо з точки 1 прямовіс 1a на вісь Д, одержуємо прямокутний трикутник $1a\underline{I}$, що означається через $1a = r$ і кутом γ, що для всіх положень утворюючої constant.

Відрізки, що обмежені гвинтовою лінією

та гвинтовою віссю, 1I = 2II = 3III і т. д. утворюючих в кожному положенню однакової довжини. Так само й катети Ia = IIb = IIIc..... незмінняємої величини.

Нехай через Д' проведена проста Д'3', як горізонтальна проекція утворюючої, то належну її вертікальну проекцію находимо таким чином. Шукаємо вертікальну проекцію точки 3, в котрій утворююча зустріча гвинтову лінію; спускаємо 3"с" рівнобіє до Д', робимо с"III" = 1"а" та проводимо 3"III" На нарису кут γ є так вибраний, що а" припада в шосту поділку h, чим значно упрощується креслення. Вертікальні проекції утворюючих в горізонтальній та вертікальній проекціях обгортують V".



Фіг. 145.

V" торкається Д" в точках IV" та X". З засобу утворення гвинтової поверхні виходить, що кожний пункт утворюючої гвинтової лінії описує навкр ги вісі Д гвинтову лінію та що всі ці гвинтові лінії мають однакову висоту ходу h. На нарису, крім первісної гвинтової лінії, накреслена ще друга. Вертікальні проекції гвинтових ліній, що лежать на гвинтовій поверхні, торкаються периметру V." Особливий випадок косих гвинтових поверхней одержуємо, коли $\gamma=90°$. Поверхня називається тоді прямою гвинтовою поверхнею або - улитко-образна поверхнь. При цих гвинтових (улиткообразних) драбинах коса поверхня тільки приблизно відповідає названій поверхні; бо утворююча, замісць того, щоб перетинати вісь, торкається стовпакової поверхні невеликого диаметру.

Коли в вертікальній проекції утворююча замісць того, щоб перетинати вісь, пересовується, як тангента до гвинтової лінії, то утворюється так звана розкручуюча гвинтова поверхня.

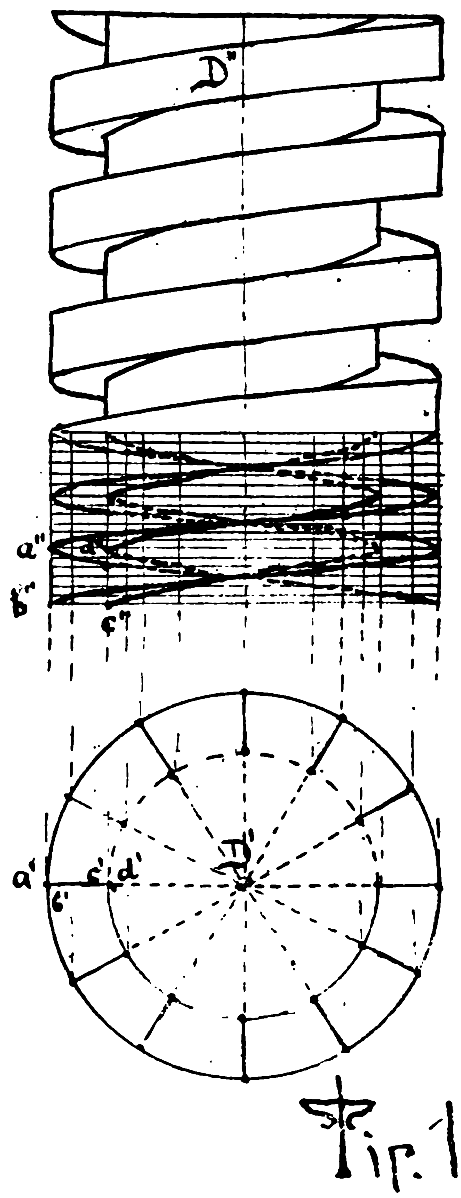
Беремо вновy вісь гвинтової лінії рівновісною до горізонтальної площі, тоді горізонтальні сліди всіх тангент лежать на евольвенті горізонтального кола; ця евольвента є, таким чином, горізонтальний слід F_1 поверхні. Всяка рівнобіжна площа до F_1 перетинає поверхню конгруентної кривої до F_1.

Можна уявити утворення поверхні гвинтовим рухом коловoї евольвенти F_1.

Поверхня буде обмежена на відаленні h від горізонтальної площі рівнобіжною площею P_3.
Коли взагалі вживають слова-гвинтова поверхня, без більш докладного з'ясовання, то під цим слід розуміти косу гвинтову поверхню.

Гвинти.

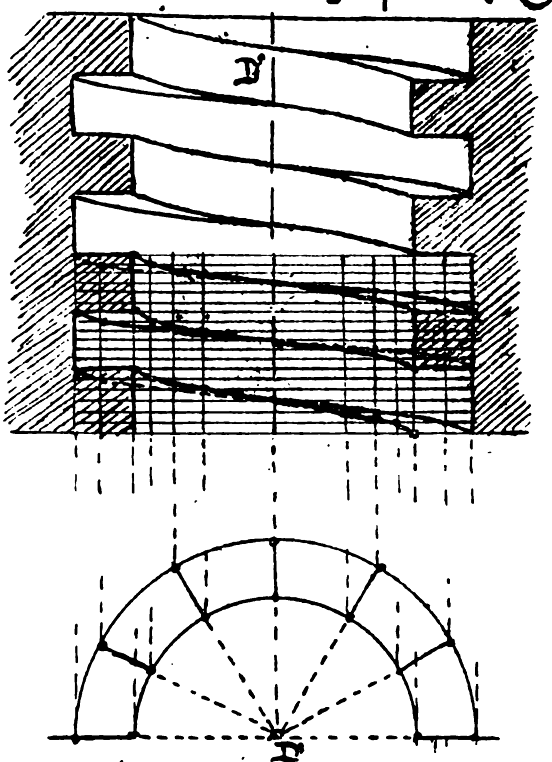
Між ріжними тілами, котрі обмежені гвинтовими поверхнями, найбільш відомі й найбільш важні-гвинти.
Гвинты з плоскою нарізкою. Плоска нарізка гвинта може бути уявлена (фіг. 146) як гвинтовий рух прямокутника (квадрата) abcd навкруги прямого стовпака, котрий називаєтьcя зерном. Поширина поверхня прямокутника проходить через вісь стовпака D, при чім бік cd прилягає до поверхні стовпака та пересовуєтьcя між двома на нім сконструірованими рівнобіжними гвинтовими лі-



Фіг. 146.

ніями, висота ходу котрих = 2cd. Точки кутів a та b описують на великому стовпаку обігу дві рівнобіжні гвинтові лінії однакової величини ходу (на одній й тій же вісі), а прості боки bc та ad дві гвинтові поверхні. Всі чотирі гвинтові лінії легко проектуються безпосередньо, коли маємо горізонтальну проекцію та висоту ходу гвинта. До кожного гвинта належить гайка (Schraubenmutter). На ній нарізана гвинтова лінія по внутрішній частині. На нарису (фіг. 147) маємо гайку в горізонтальній та вертікальній проекції. Диаметр стовпака та висота ходу звичайно мусять бути однаковими.

Fig: 147.



Гвинти з гострою нарізкою. Уявимо собі замісць прямокутника рівнобокий трикутник bac, що обертається навкруги стовпака так, що його основна лінія bc посовується між двома рівнобіжними гвинтовими лініями, висота ходу котрих = 2bc. Площа цього трикутника завше проходить через вісь стовпака D. Тоді обидва боки ab та ac утворюють гостру гвинтову нарізку. Вершина трикутника — a описує гвинтову лінію однакової висоти $2bc$ і однієї вісі D. При викресленню цих загострених гвинтів треба звернути увагу на вертікальну проекцію. Вона складається з частин кривої. Понеже кривизна їх буде тим меншою, чим далі вони від D, то на великому віддаленні на нарису вона майже непомітна. Це дає можливість на вертікальній проекції нарізки викреслювати простими лініями без наочних помилок, ц.т. дотичними до обох сінусоїд, що представляють канти нарізки. Це не може бути зроблено тільки в такому випадку, коли диаметр зернового стовпака малий в порівнанню з зовнішнею стовпаковою нарізкою.

Гвинтові поверхні труб.

a) Коли центр кола пересовується по якійсь гвинтовій лінії, а саме коло залишається рівновісним до L, то периметр кола утворює гвинтообразну криву. Вона називається змієвою трубою або Архимедовою улиткою (вживають для піднімання води)

Істнують також поверхні для обгортуючих поверхней всіх куль, котрі мають однаковий радіус з колом, що посовується й центр котрих лежить на гвинтовій лінії L, бо два безмежно близьких положення $\underline{o}$ та $\underline{p}$ кулі, що передвигається, перетинаються один з другим по тому головному колу, по котрому обгортуючі поверхні куль торкаються в точках $\underline{o}$ та $\underline{p}$. Площа цього головного кола стоїть рівнобіжно до простої, що сполучає центри $\underline{o}$ та $\underline{p}$, ц.т, на елементі L. Це головне коло називають характеристикою обгортуючої поверхні. Легко видно, що обгортуюча поверхня утворюється посовуванням цієї характеристики.

Проекції гвинтової трубчатої поверхні одержуються легко, як її розглядати як обгортуючу поверхню кулі, що загвинчується.

Радіус кулі $\underline{r}$ та віддалення центру від гвинтової віci $d>r$.

Нарис горізонтальної проекції поверхні складається з двох кол T' та K', котрі описані навкруги D' радіусами $(d+r)$ та $(d-r)$. Відповідні дійсні нариси T та K — гвинтові лінії. Нарис вертікальної проекції обгортує поверхню куль і складається з двох рівнобіжних кривих V'' та W'' сінусоїди L'', котру одержуємо по точках, коли від L'' по обидва боки відкладаємо по нормалях довжини r.

У всіх розмірах обидві конгруентні криві V" та W" мають взаємно зворотні точки (Rückkehrpunkte). На нарису (фіґ. 148) сконстуірувана крива перетинення C обгортуючої поверхні з площею E, що рівнові снаю до D. Площа E перетинає кулеву поверхню по колу, котра кривою січення C торкається в тих двох точках, в котрих площа E перетенає відповідне положення характеристики. Накресливши низку таких колових січень в горізонтальній площі, одержуємо горізонтальну проекцію C' як обгортуючу криву цих кол. Для допоможної кулі (2) коло перетинення з площею E.... тп. Точки торкання цього кола до обгортуючої кривої C означаються легко; можливо криву C' як обгортуючу криву великої низки січень кол так само й добре сконструірува-

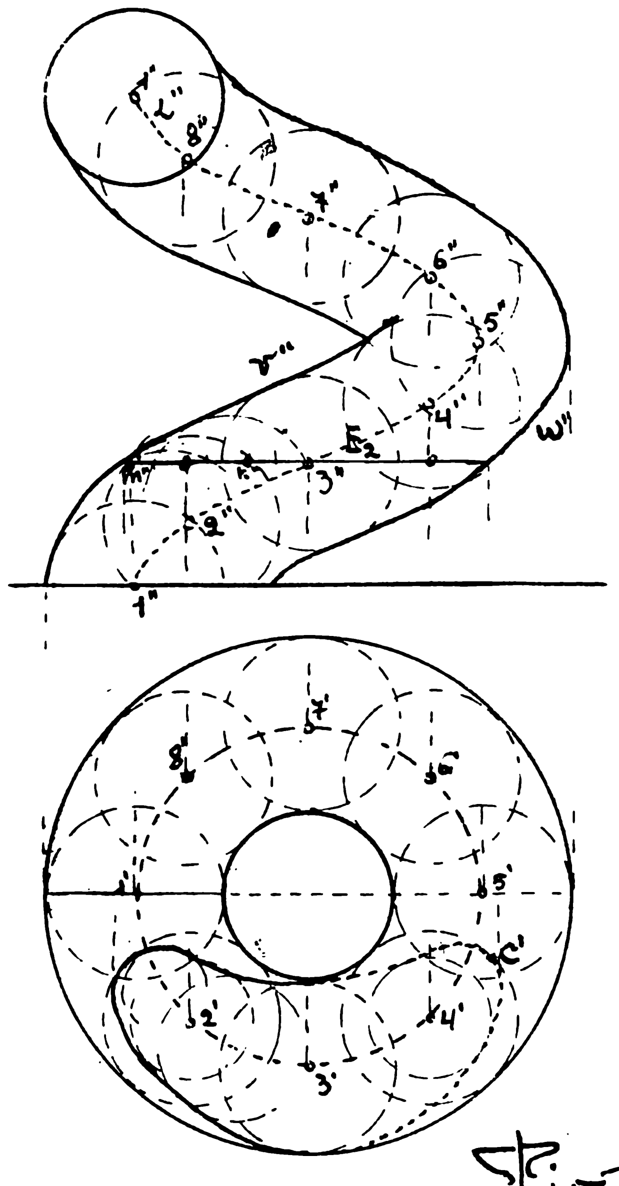


Fig.148.

ти, як і шляхом проектіровки окремих точок. Таким чином можливо найти верхню обмежуючу криву, котра вирізується площею F, що рівнобіжна до вертікальної площі.

Перетинення двох многостінників.

При перетиненні двох многостінників можуть бути два випадки:

а) перший цілком перетинається другим,
в) другий вирізує тільки якусь бокову частину першого.

В першому випадку мається повне перетинення (Durchbohrung). Фігура перетинення складається з багатьох частин. В другому випадку говориться про врізування одного тіла в друге; фігура перетинення складається з одного многокутника.

Щоб сконструірувати фігури повного перетинення, означаємо точки перетинення кантів першого многостінника з боковими поверхнями другого й так само точки перетинення кантів другого многостінника з боковими поверхнями першого — звідкіля отримуються кути фігур перетинення. Тоді ці кути мусять бути сполучені в вірному порядку.

Правило: два кути можуть бути тільки тоді сполучені, коли вони належать боковій поверхні одного многостінника і одночасно одній і тій же боковій поверхні другого многостінника - во шматки лінії перетинення обох поверхней, котрі лежать в межах одної та другої площі, сполучують відповідні кути фігури kanten перетинення. Цей засіб (Kantenverfahren) вживається взагалі. В окремих випадках означають сторони перетинаючої фігури безпосередньо, коли площа одного многостінника перетинається з площею другого (Flächenverfahren).

Сторона фігури перетинення тільки тоді видима, коли обидві поверхні, що перетинаються по цій простій, видимі; у всіх других випадках вона невидима.

Сконструірувати перетинення квадера (прямого четирьохстінника) в рівновісною трьохстінною призмою (фіг. 149).

Квадер стоїть на горізонтальній площі, а канти призми рівнобіжні до вертікальної площі, так що площа efg рівновісна до P_2. Щоб вірно сполучити кути перетинення - до якого канта один, до якої площі другого тіла кожний кут належить, будемо означати кожну поверхню якимсь числом, котре надписуємо на горізонтальному канті відповідних поверхней. При конструкції добре вести вірну лічбу, щоб

Знати, до яких кантів та поверхней який кут належить. Така невеличка табличка вміщена на нарису. Допомож-

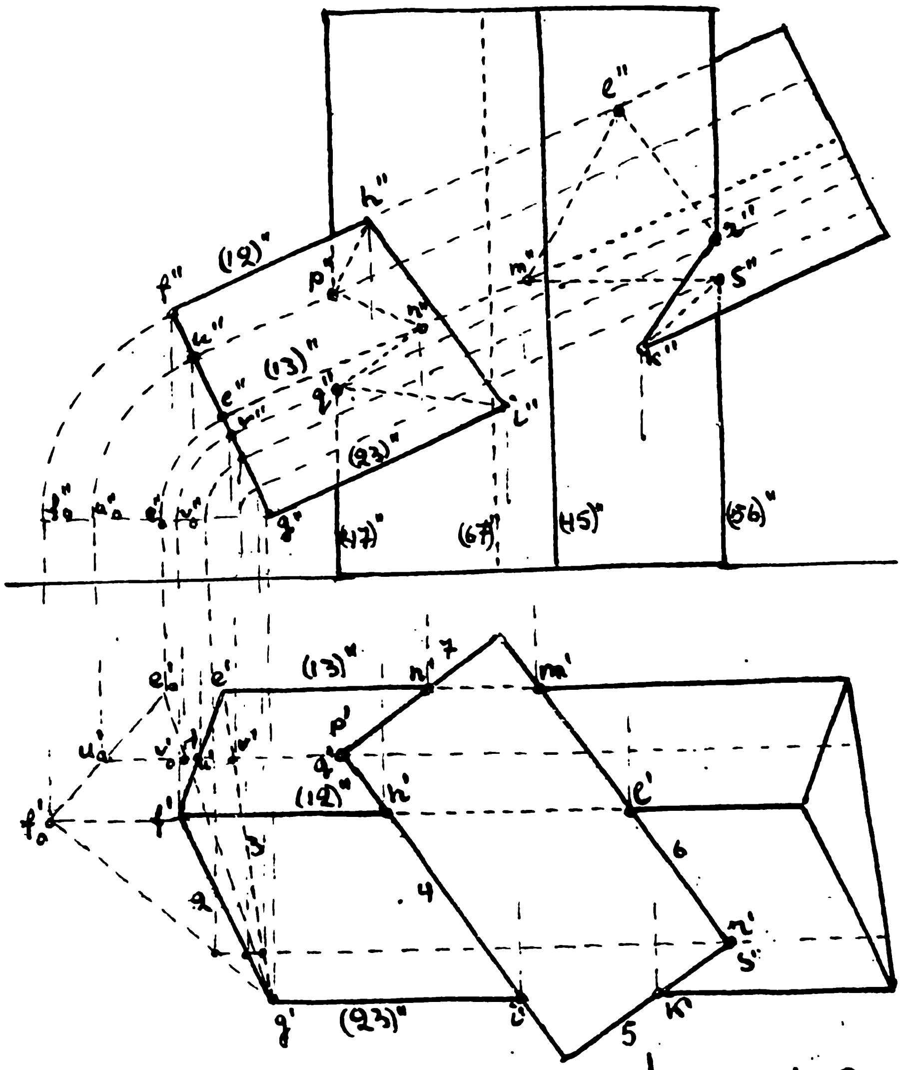


Fig.149.

h = (12)x4
l = (12)x6
i = (23)x4
k = (23)x5
m = (13)x6
n = (13)x7
p = (47)x1
q = (47) = 3
r = (56) = 2
s = (56) = 3
hi = 4x2
iq = 3x4
qn = 7x3
np = 1x7
ph = 4x1
lr = 6x2
rk = 5x2
ks = 5x3
sm = 6x3
ml = 1x6.

на площа, що проходить через кант(47) перетинає призму по двом творячим, а саме в точках p та q, в котрих кант (47) поверхні призми (1) та (3) перетинає. Такий засіб повторюємо для канта (56), що в поверхнями (2) та (3) перетинається в точках r та s, при чім канти (45) та (67) призми не перетинаються, як це видно в горізонтальної проекції. Коли потрібна дійсна величина Δ efg.

повертаємо площу efg навкруги осі gg'' аж доки вона буде рівнобіжною до горізонтальної площі проекції. В цьому рівнобіжному положенню Δefg проектується на горізонтальну площу в дійсну величину. Означивши точки перетинення u_0 та v_0 в рівнобіжному до горізонтальної площі положенню трикутника, одержуємо точки $\underline{u}''$ та V'' цілком вірно, коли знову повернемо Δefg в первісне положення.

Вірний порядок сполучення кутів протикаючої фігури в цім простім прикладі ясно видимий. В компліковаьних випадках таблиця дає вірні пояснення. Починають з якого-небудь кута, напр. $\underline{p}$. Він лежить і в площі 1 призми і в площах 4 та 7 квадера. З таблички видно, які знаходяться кутові точки площі 1 та одночасно площі 4 або площі 7 — одержуємо точку h (відпов. n). Прості ph та pn - боки полігону перетинення й саме, лінії перетинення площі 1 з площами 4 відпов. 7. Переходимо від точки h в площу 4, далі шукаємо кутові точки, котрі лежать в площі 4 і крім того, в площі 1 або площі 2, - знаходимо крім $\underline{p}$, кут $\underline{i}$. Проста hi є сторона фігури січення - вона є лінія перетинення площі 4 та 2. Продовжуючи таким чином далі, одержуємо в данному випадку повне пересічення з двома окремими фігурами прорізів hiqnp та kšmlr.

Видіма частина фігури перетинення обмежена лініями нарисів обох многостінників. Кожна фігура, котра з поверхні одного многостінника переходить на другий, змінює свою видимість, коли вона зустрічає якийсь кант, котрий в цім місці видимий. Вона по обох боках цього кута переходу невидима, коли обмежуючі лінії тут самі заслонені другими поверхнями і значить невидимі.

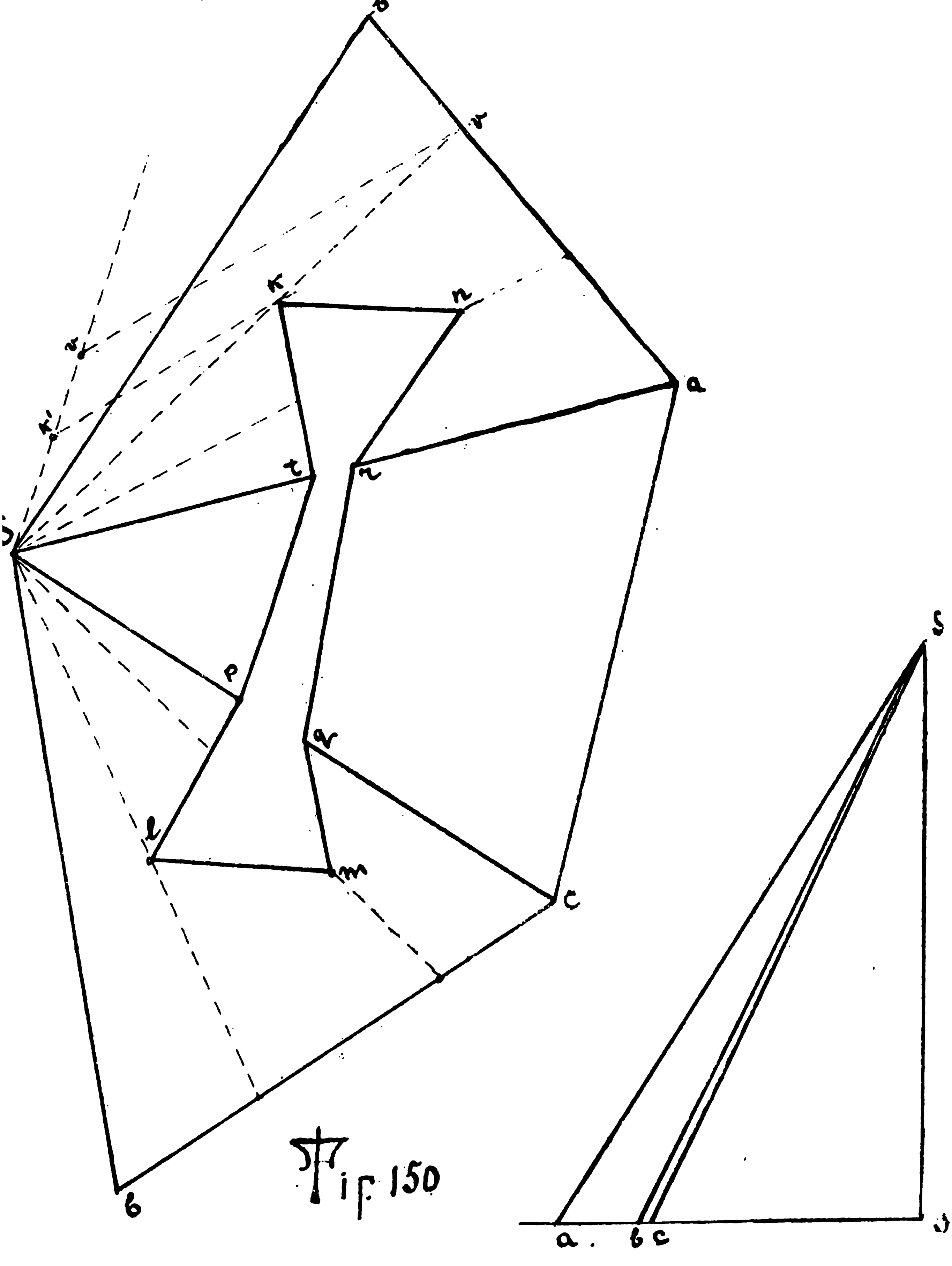
Повірка: Площа якогось тіла перетинає дві площі через кант по двом простим другого тіла, котрі зустрічаються в одній точці на канті.

Перетинення піраміди з призмою та розгортка поверхні піраміди з фігурою січення (фіг. 150)

Перетинення кривої поверхні з кривою поверхнею або кривою лінією.

Дві кривих поверхні A та B при перетиненні утворюють взагалі сплошну криву C, котра може бути або замкнута, або поширюється в безмежність; иноді складається з кількох окремих

Загальні засоби означень конструкцій ліній перетинення кривих поверхней ґрунтується на попередніх засобах перетинення кривих поверхней з площинами.



Фіг. 150

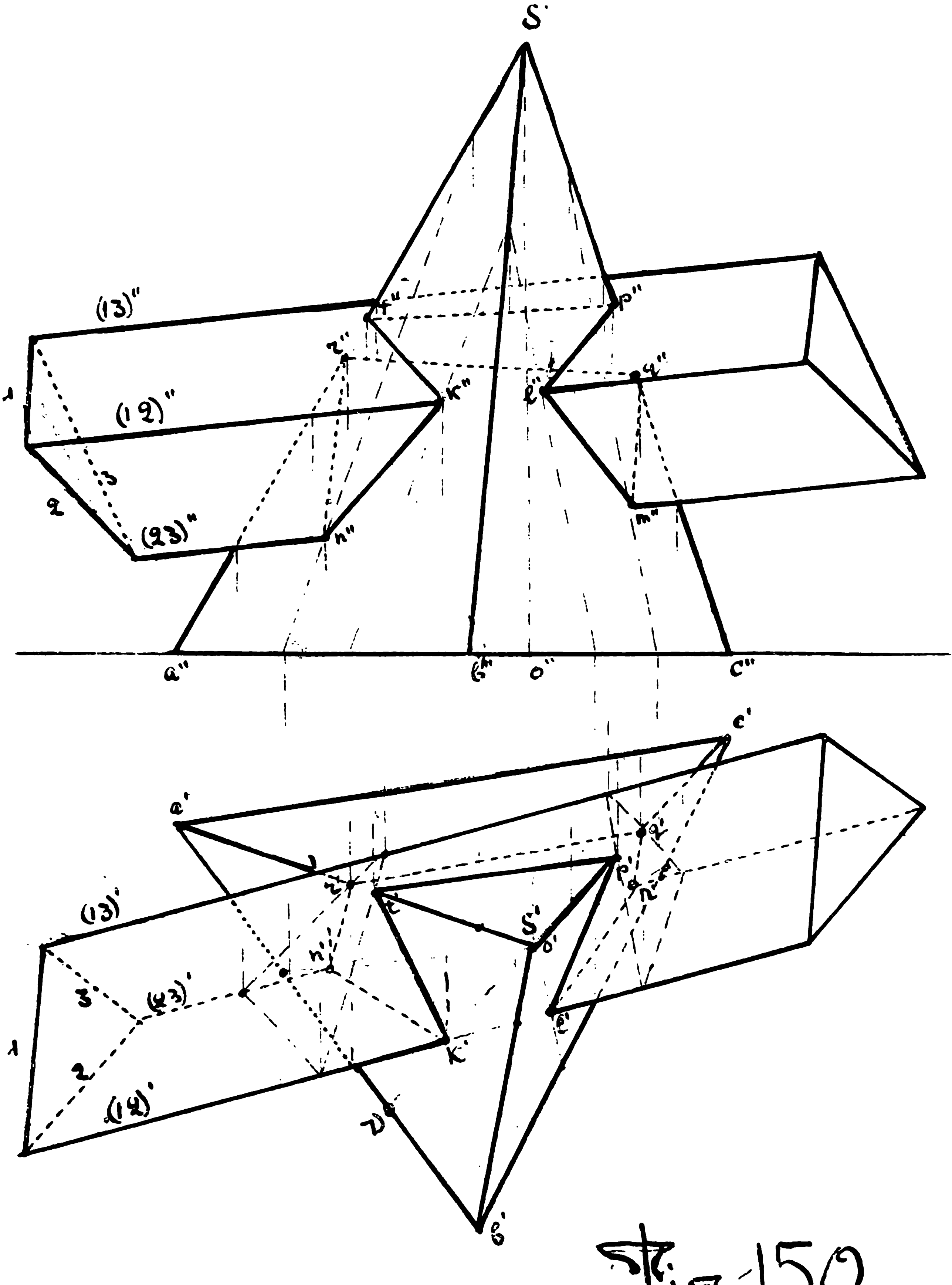


Fig. 150.

Звичайно користуються цілою низкою допоміжних площ, котрі відносно данніх площ А та В вибіраються в такім положенні, що крива перетинення їх з А та В одержується в найбільш простих та легко конструіруіруємих видах. Нехай Н буде допоміжною площею, що перетинає площі А та В по лініях R та S, то загальні пункти R та S лежать на кривій С, що шукамо. Такими повторними засобами одержуємо низку точок кривої, котрі й сполучаємо.

Тангента в якійсь точці кривої січення є лінія січення дотичної площі обох поверхней в данній точці.

Перетинення кривої лінії з кривою поверхнею одержуємо, коли через криву лінію проведемо допоміжну площу й вона перетинається з цією площею. Точки, в котрих крива перетинення зустрічається з данною кривою й будуть точками, що шукаємо.

Перетинення прямого стовпака з кулею.

Означити перетинення кулі з стовпаком, вісь котрого рівновісна до площі P, (ф. 151)

а) Загальні точки кривої перетинення.

Допоміжна площа H рівновісна до вісі стовпака (ц. т. рівнобіжна до горізонтал-ної площі) перетинає й стовпак і кулю по колу. Загальні точки 1 та 2 цього кола є точки фігури перетинення С. На горізонтальній площі точки 1' та 2' находимо безпосередньо; відповідні вертікальні проекції лежать на H_2. Проводячи другі горізонтальні допоміжні площі, одержуємо низку точок кривої С.

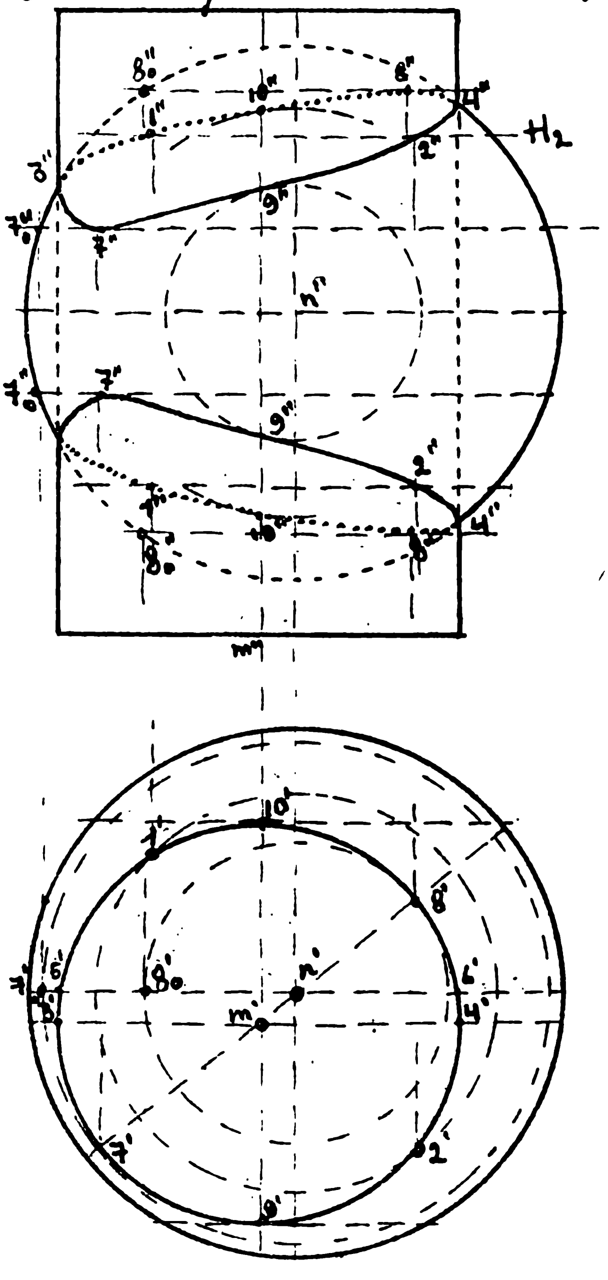
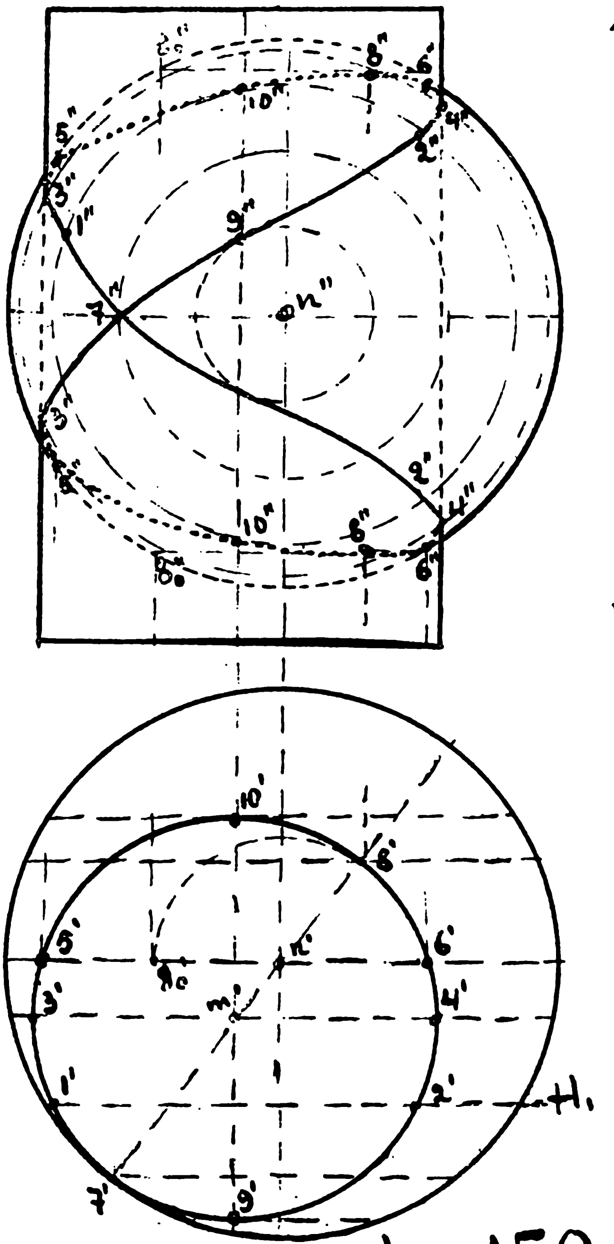


Fig. 151.

б) <u>особливі точки кривої перетинення</u>. Як провести через вісь стовпака площу, рівнобіжну до вертікальної площі (P_2), то вона вирізує з поверхні стовпака його очертання (периметр) а з кулі — коло. Це очертання (периметр) та коло січення перетинаються в точках 3 та 4, ц. т., крива С зустріча вертікальну проекцію очертання стовпака в точках 3 та 4. Користуючись допоміжною площею, котра перетинає вертікальну проекцію кулі, одержуємо точки 5 та 6 на вертікальній проекції кулі. Вертікальна проекція фігури січення C торкається до вертікального очертання стовпака та кулі. Центр кулі n та вісь стовпака означають площу, котра є площею симетрії для стовпака та кулі а значить і для кривої січення C; на ній лежить сама висока та сама низька точка (7-8). Їх одержуємо, коли площу симетрії повертаємо навкруги діаметру кулі аж доки вона стане рівнобіжною до вертікальної площі. Нарешті ще треба означити передню та задню точки (9-10), в котрих поверхня стовпака має площі торкання рівнобіжні до вертікальної площі. Така тангенціальна площа B перетинає стовпак по двом безмежно близьким творячим. Вони перетинають коло, що вирізане цією ж площею B з кулі, в двох безмежно близьких точках, через котрі мусить проходити крива січення C; вона торкається до цього кола січення. На нарису C" торкається до обох кол в точках 9" та 10".

Коли стовпак та куля торкаються в точці 7 горізонтальних проекцій, ц. т. в точці 7 (фіг. 152) мається загальна тангенціальна площа, то обидві вітки кривих перетинаються в точці 7. Ця точка буде подвійною точкою кривої січення, бо площа, що проходить через неї, перетинає стовпак та кулю по двом кривим, котрі торкаються в точці 7; в кожній такій площі точка 7 відноситься до двох кривих перетинення. Щоб одержати криву перетинення С, вживаємо низку допоміжних площ, що рівнобіжні до P_2. Допоміжна площа $H \| P_2$ вирізує зі стовпака дві творячі та з кулі – коло. Загальні точки (1 та 2) творячих в колом – є точки фігури січення. Особливі точки означаються, як в попередньому випадку.

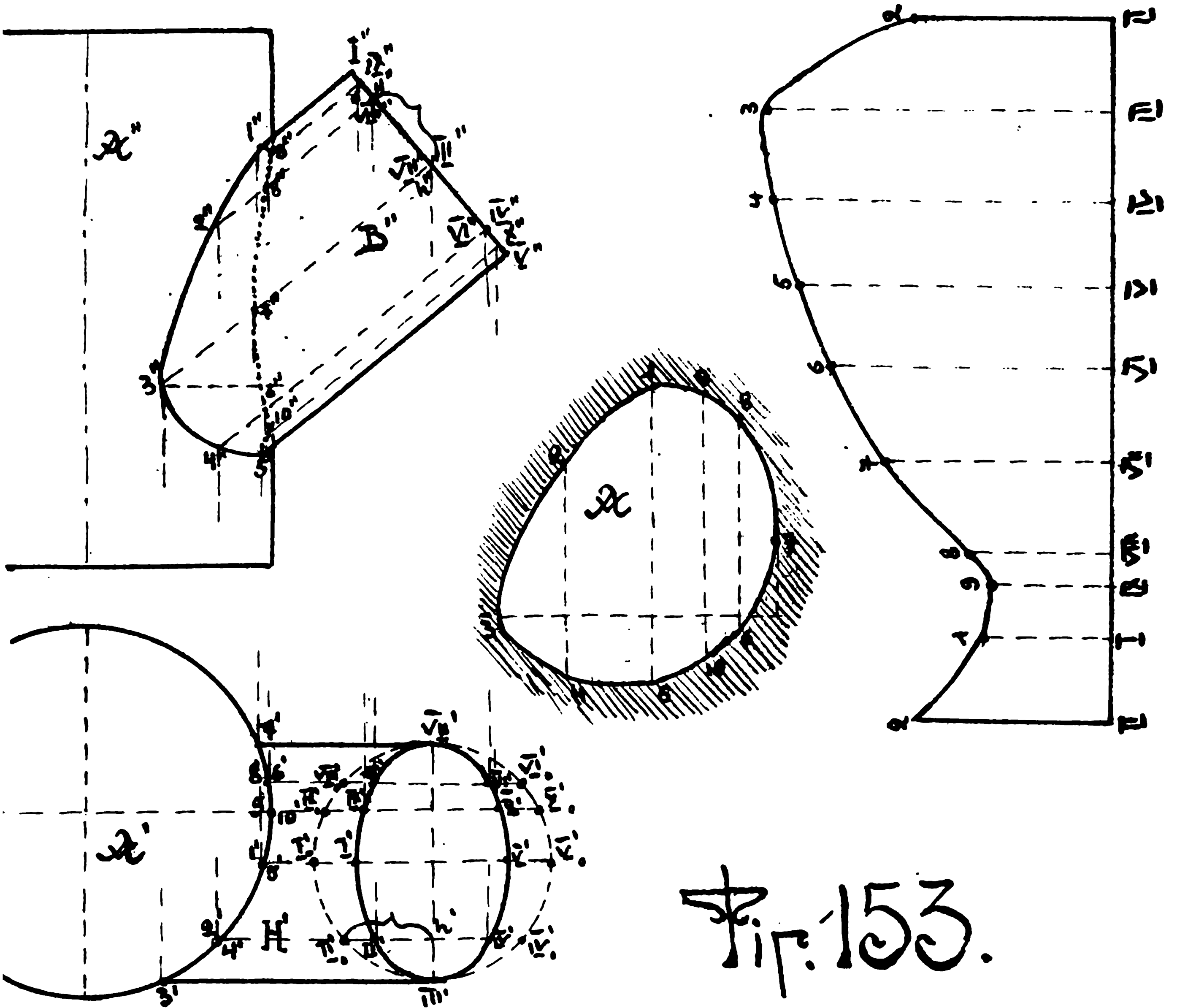


Фіг. 152

Перетинення двох стовпакових поверхней.

Означити перетинення двох стовпаків, вісі котрих не перетинаються (фіг. 153).

Щоб означити перетинення двох стовпакових поверхней, вживаємо, як і при призмах, допоміжних площ, що рівнобіжні до кермуючих ліній стовпакових поверхней. Такі площі перетинають кожну з обох поверхней по творячим і протилежні точки перетинення цієї простої лежать на кривій перетинення, що шукаємо.



Фіг. 153.

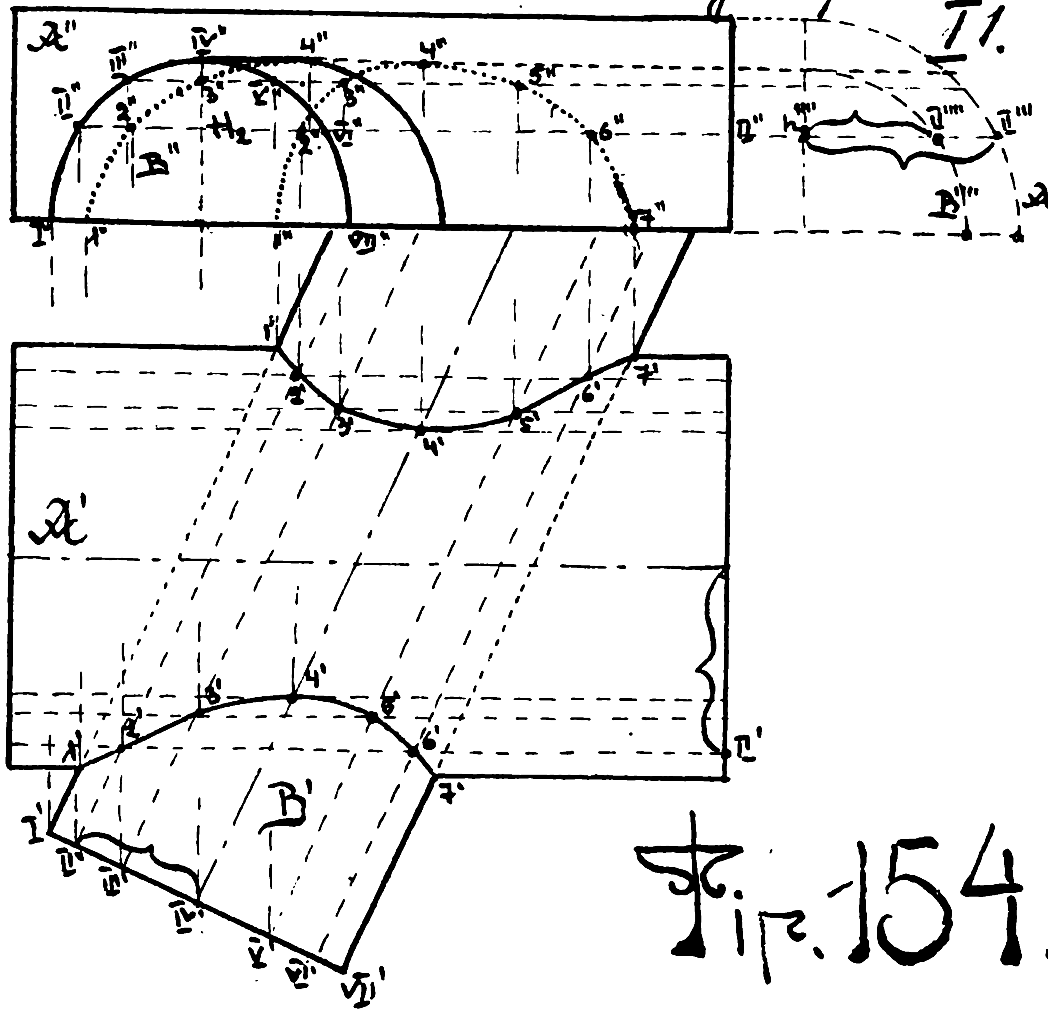
На нашому прикладі (фіг. 153) візьмемо, що вісь великого стовпака A рівновісна до горізонтальної площі, а вісь стовпака B рівнобіжна до вертікальної площі (P_2) а відносно горізонтальної нахильна. Якась допоможна площа H, рівнобіжна до вертікальної площі (P_2) виріза в поверхні B дві творячих, а з правої частини A — одну. Ця остання перетинає дві попередніх в точках 2 та 4, котрі належать до кривої перетинення, що шукаємо. Точки 9 та 10 одержуються на вертікальній проекції A з допомогою площі, котра проходить через вісь A та рівнобіжна до вертікальної площі.

Горізонтальна проекція нормального січення B та проекція кривої січення одержуються одночасно. Допоможна площа H, що рівнобіжна до P_2, вирізає з нормального січення хорду $\underline{II}\,\underline{IV}$, котра рівнобіжна до вертікальної площі та, значить, проектується на неї в дійсну величину. Повернемо нормальне січення біля діаметра $\underline{III}\,\underline{VII}$ в положення рівнобіжне до горізонтальної площі, то горізонтальна проекція $\underline{II}_0\,\underline{IV}_0$ зміняється в довжини $\underline{II}''\,\underline{IV}''$, котра в h'' поділяється пополам. Горізонтальні проекції $\underline{II}'$ та $\underline{IV}'$ на рівновісі під $\underline{II}''$ та $\underline{IV}''$ на H_1. Означивши точки $\underline{II}$ та $\underline{IV}$, одержуємо відповідні творячі.

На нарису розгорнута поверхня стовпака B. Довжини творячих беруться безпосередньо з вертікальної проекції.

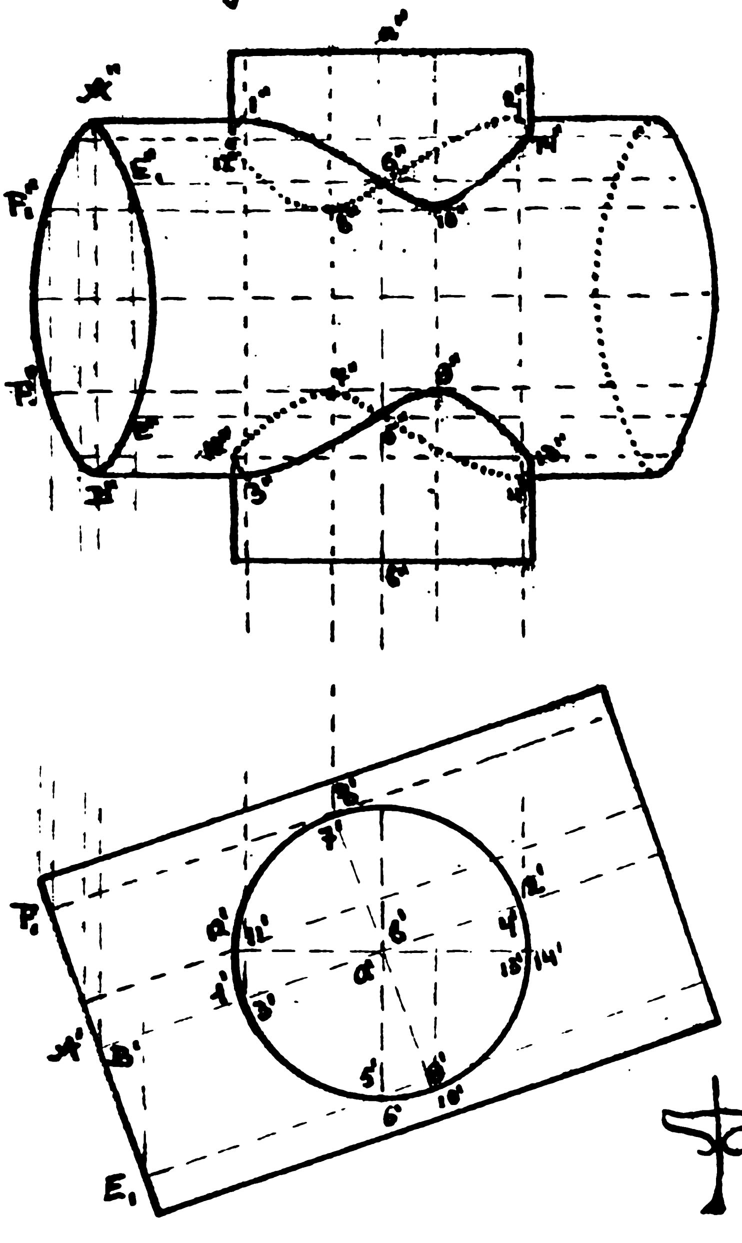
Половини двох стовпаків в ріжними диаметрами своїми площами січень лежать на горізонтальній площі. Треба знайти криву їх перетинення. (фіг. 154)

Вісь стовпака A рівнобіжна до X, а стовпак B нахилений відносно вертікальної площі. Беремо допоможну площу рівнобіжну до P_1 (горіз. площі). Якась площа H рівнобіжна до горізонтальної площі, перетинає нормальне січення B по хорді $\underline{II}\,\underline{VI}$, рівнобіжній до горізонтальної площі, котра проектується в дійсну величину. Половина довжини $h'\underline{II}' = h'\underline{VI}' = h_0'''\,\underline{II}'''$, яку беремо з вертікальної проекції. Творячі $\underline{II}2$ та $\underline{VI}6$ проходять через точки $\underline{II}$ та $\underline{VI}$ і обидві рівнобіжні $\underline{T1}$.



Фіг. 154.

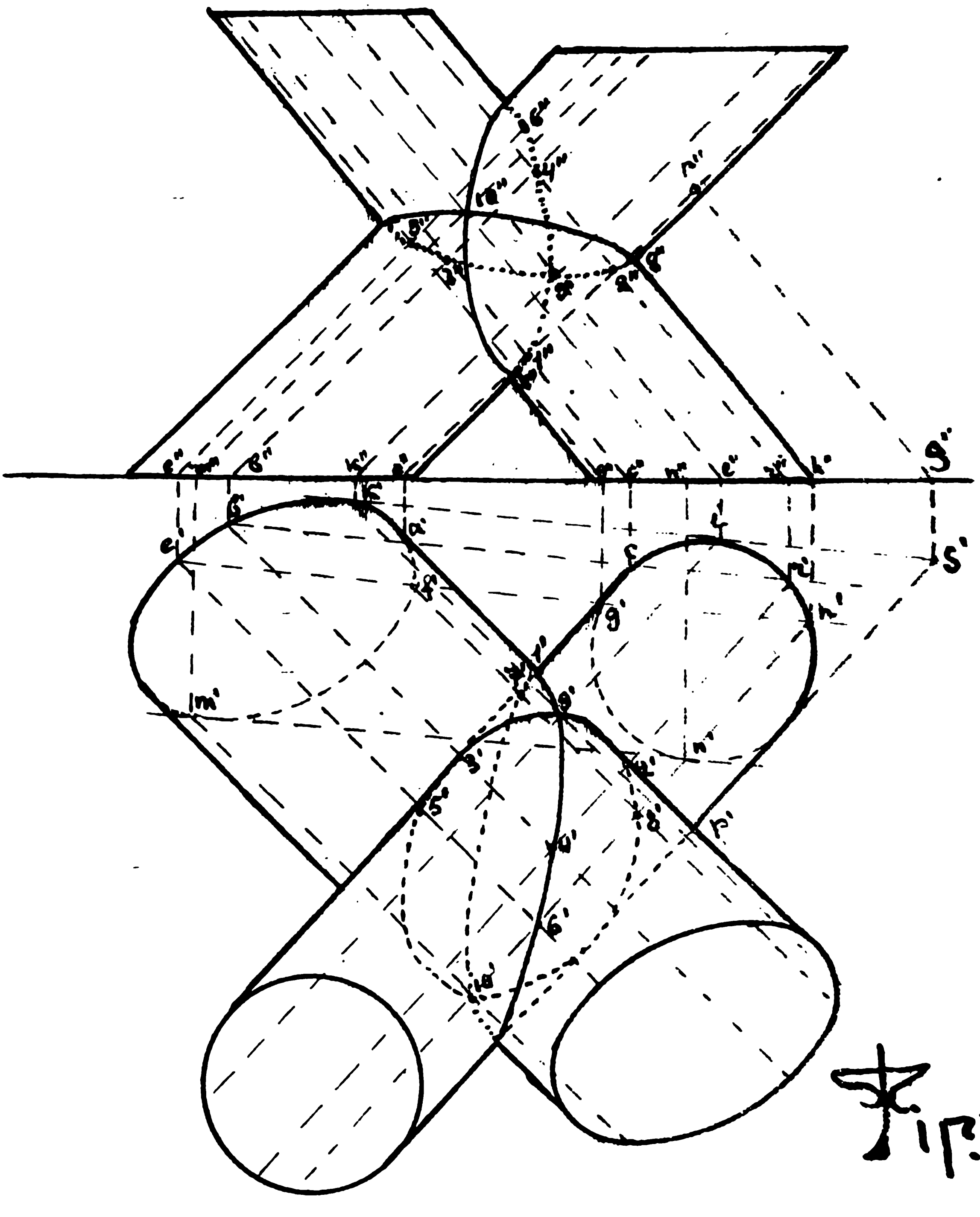
Так само одержуємо обидві творячі, котрі площа H вирізує зі стовпака A. Два однакових стовпака так перетинаються, що вісі їх роблять простий кут; означити фігуру перетинення. (фіг. 155) Нехай вісь одного стовпака рівновісна до горізонтальної площі а друга-рівнобіжна до (горізонтальн. площі проекції. ~~Вв~~ Допоміжна площа, рівнобіжна до вертікальної площі, перетинає обидва стовпака по творящих, котріх вертікальна проекція вустрічається в точках, які мусять лежать на двох простих, що перетинаються



Фіг. 155.

Перетинення двох стовпаків, котрі стоять на горізонтальній площі та вісі котрих довільно нахилені одна до одної (ф. 156)

Означаємо слід площі, що проходить через дві простих, рівнобіжних до творячих данних стовпаків. Після цього проводимо (в горізонтальних проекціях) цілу низку рівнобіжних до неї площ. Кожна така площа, як з одного, так і з дру-



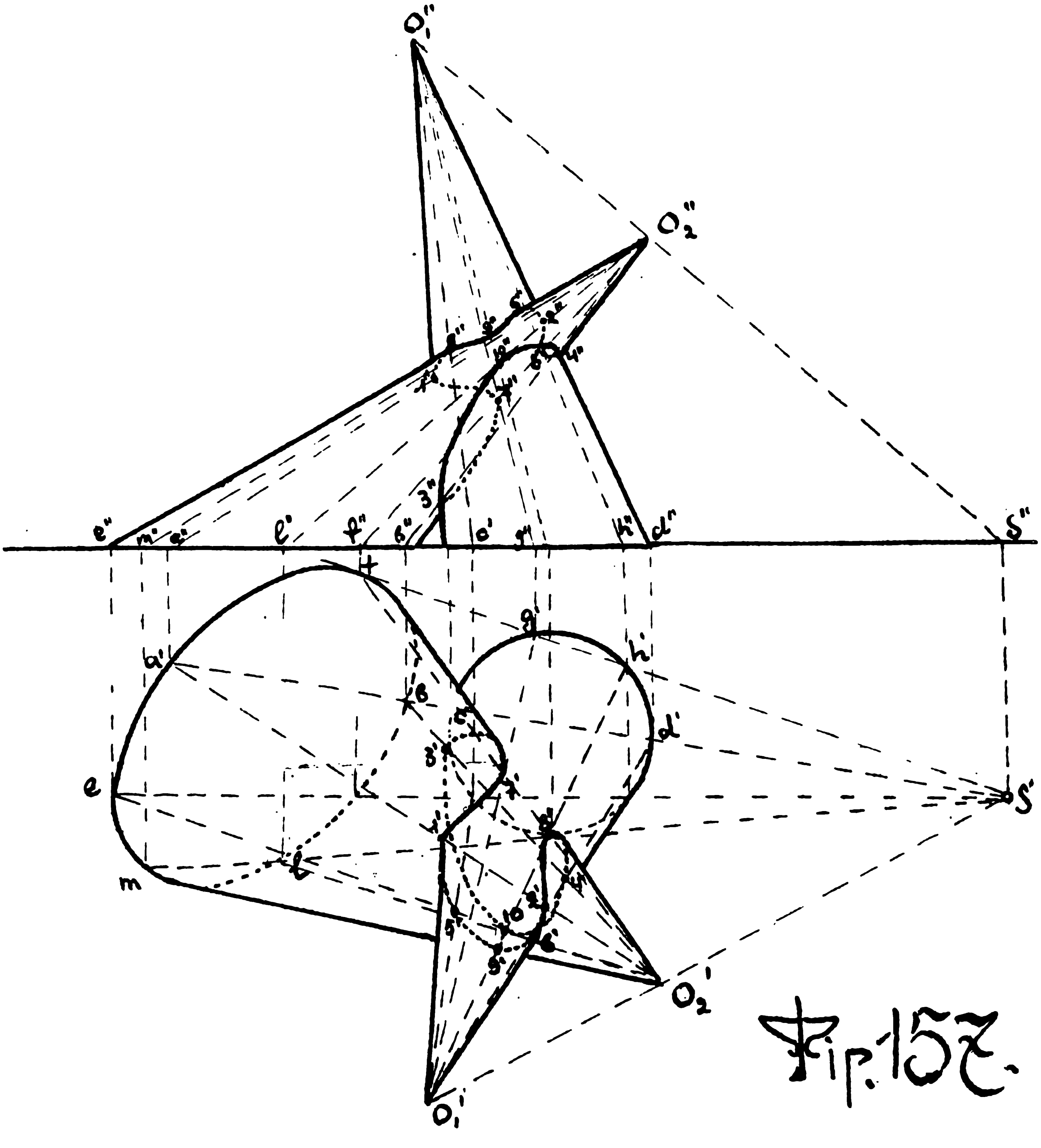
Фіг. 156.

гого стовпака виріза творячі. Точки перетинення цих творячих дають горізонтальні проекції точок кривих перетинення. Щоб одержати відповідну вертікальну проекцію, необхідно провести відповідну вертікальну проекцію творячої й на неї звичайним засобом перенести горізонтальну проекції точок січення.

Перетинення двох стіжків, котрі стоять на горізонтальній площі та вісі котрих довільна нахилені (фіг. 157)

В цьому випадку допоможні площі мусять проходити через просту, що сполучає вершини стіжків.

Спочатку означаємо горізонтальний слід простої, що сполучає вершини стіжків. Через цей горізонтальний слід проводимо цілу низку площ, що перетинають горізонтальні проекції основ стіжків. Творячі, що проведені через ці точки перетинення сліда площі в горізонтальними проекціями основ стіжків при своєму перетиненню дають точки, що належать до точок кривих перетинення ціх стіжків. Щоб одержати відповідні вертікальні проекції ціх точок перетинення, перш за все треба означити вертікальну проекцію відповідної творячої й



Фіг. 157.

на неї звичайним засобом перенести горізонтальні проекції.

Проріз двох стіжкових поверхней.

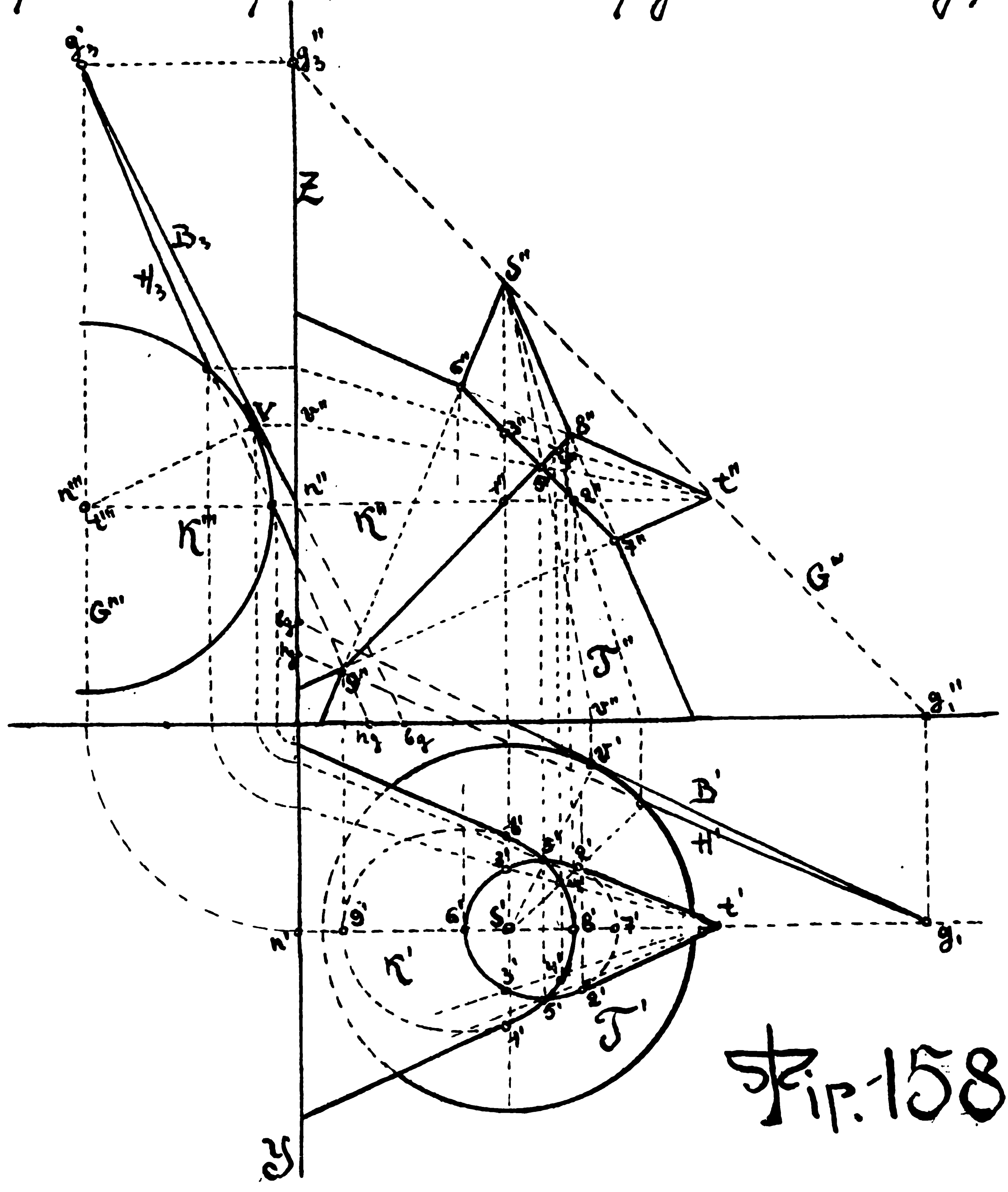
Означити проріз двох стіжків, котрих вісі перетинаються під простим кутом. (фіг. 158).

а) Щоб викреслити проріз двох стіжків, вживаємо загальний метод допоміжних площ, котрі проходять через шпилі S та t обох поверхней та содержать просту st. Такі площі перетинають кожну стіжкову поверхню по творящих. Перетинення цих поверхней дає потрібні точки проріза.

Вибіраємо положення площі вісі так, щоб вона була рівнобіжною до вертікальної площі, котра буде площею симетрії для обох поверхней а значить і для кривої їх перетинення C. Горізонтальна проекція C' симетрична відносно s't' і кожний пункт C''(вертик. проекції) об'єднує дві точки C.

На нарису (фіг 158) взяті дві стіжкових поверхні Г та K, котрі мають дві загальні дотичні площі. Сполучуюча проста st перетинає основи обох стіжків в точках d_1 та d_3. Проведена тангента B_1 з точки d_1 до кола основи Г — уявляє горізонтальний слід загальної площі торкання; відповідний третій слід мусить проходить d_3 і означається точками b_3 та d_3. Основне коло стіжка K є коло описане біля n''', до котрого торкається B_3.

Тангенціальні творячі sv та tv обох стіжкових поверхней зустрічаються в точці 5, яка є подвійна точка кривої перетинення. Другі точки одер-



Фіг. 158.

жуємо з допомогою нових площ, що йдуть через st. Проведена через обидві вісі стіжків площа перетинає стіжок в двох точках на вертікалі, котрі дають чотирі загальних пункта (6, 7, 8 і 9).

Примітка: Дві поверхні другого порядку перетинаються по простірній кривій четвертого порядку. Площа перетинає кожну з обох поверхней по кривій другого порядку. Вони мають 4 загальних точки, котрі одночасно належать і обом кривим і площі.

2° Коли дві поверхні другого порядку мають загальний стіжковий перетин, то вони мають ще й другий загальний стіжковий перетин.

3° Коли дві поверхні другого порядку мають тангенціальну площу для кожного з двох загальних пунктів, то їх криві січення четвертого порядку роспадаються на дві кривих другого порядку, котрі в цьому пункті поділяються.

Коли звернемось до нашої фігури, то бачимо, що криві січення роспадаються на два стіжкових січення, котрі зустрічаються в точці 5.

Вертікальна проекція складається з двох простих 6"7" та 8"9", а горізонтальна — з двох еліпсів, котрі точку 5' мають, як загальний фокус. Ці еліпси дуже просто накреслити, бо знаємо, що вони вирізуються площею, що рівнобісна до P_2 (вертік. площі).

Перетинення поверхней стіжкових ві стовпановими.

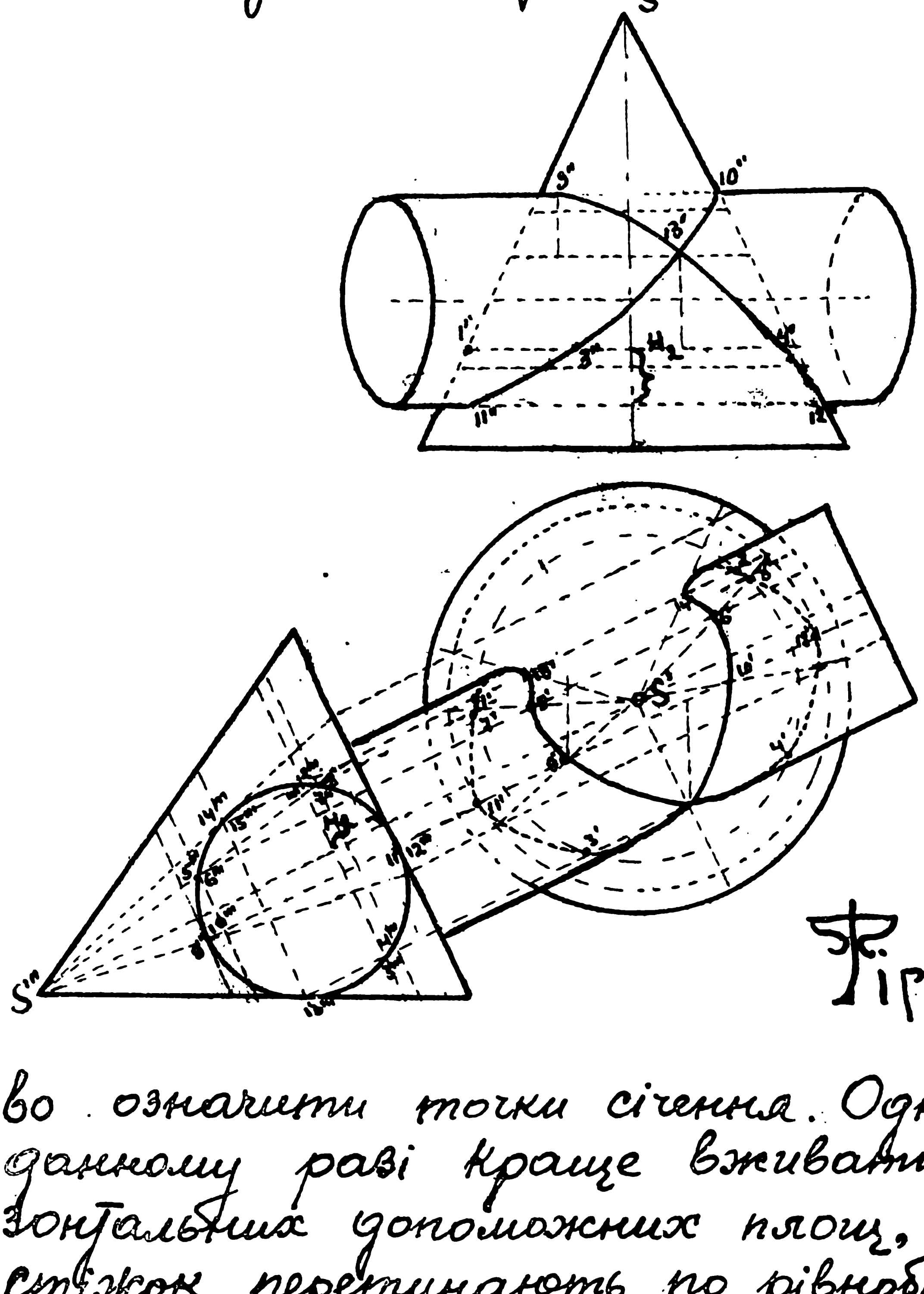
Означити перетинення стіжків в стовпаком, коли вісі їх рівновісні (фіг. 159).

Щоб одержати перетинення поверхні стіжка в поверхнею стовпака, вживають загального засобу допоможних площ, котрі проходять через шпиль стіжка та рівнобіжні до творачих стовпака. Такі площі перетинатимуть, як стовпак так і стіжок по творячим.

В нашому прикладі основа стіжка лежить в горізонтальній площі P, а вісь стовпака рівнобіжна до горізонтальної площі, так що кола основи рівновісні до горізонтальної площі. Використаємо одну з таких площ як третю площу проекцій та викреслимо третю проекцію стіжка та стовпака (від стіжка на P_3 проектується тільки те, що обмежується нижньою горізонт. дотичною площею стовпака).

З цієї P_3 зараз же бачимо яким чином складається перетинення. При данному положенню стовпак торкається до стіжка в точці 13, так що пункт 13 є подвійний для кривої перетинення.

Вищезгадані допоможні площі рівновісні до P_3; їх треті сліди проходять через точку S''' з допомогою їх можли-



Фіг. 159.

во означити точки січення. Одначе в данному разі краще вживати горізонтальних допоможних площ, котрі стіжок перетинають по рівнобіжним колам, а стовпак - по творячим.

Означити перетинення стовпака зі стіжком коли вісі їх утворюють тупий кут (фіг. 160).

I випадок. Вісь стовпака рівновісна до горізонт. площі (P_1), вісь стіжка рівнобіжна до вертікальної площі (P_2), до горізонтальної ж площі P_1 нахильна, так що площа обох осей, котра для обох поверхней є площа симетрії, рівнобіжна до вертікальної площі (P_2).

Вертікальна проекція лінії січення C буде лінія стіжкового січення, в пунктах котрого вертікальна проекція кожних двох точок C сполучен.

Що торкається до представлення нахильно поставленого стіжка – то довільна площа рівнобіжного кола рівновісна до P_2. На нарису горізонтальна проекція кола, що описане біля діаметра I–V, котрий дає наочний вид, всеж таки для конструкції не вживається. Так само точки торкання VI' творячої периметра можуть бути означені без вживання еліпса.

Дякуючи рівновісному напрямку вісі стовпака, C'*) пада на коло основи стовпака. Для якоїсь точки 2' кривої C' находимо відповідну вертікальну проекцію 2" на відповідній проекції творячої стіжка SII2. Крайня точка 6, в котрій крива січення торкається творячої стовпака, потрібна не тільки для кривої C", але й для розгортки обох поверхней. Проста s'6' перетинає основне коло стовпака ще

---

*) горізонтальна проекція січення

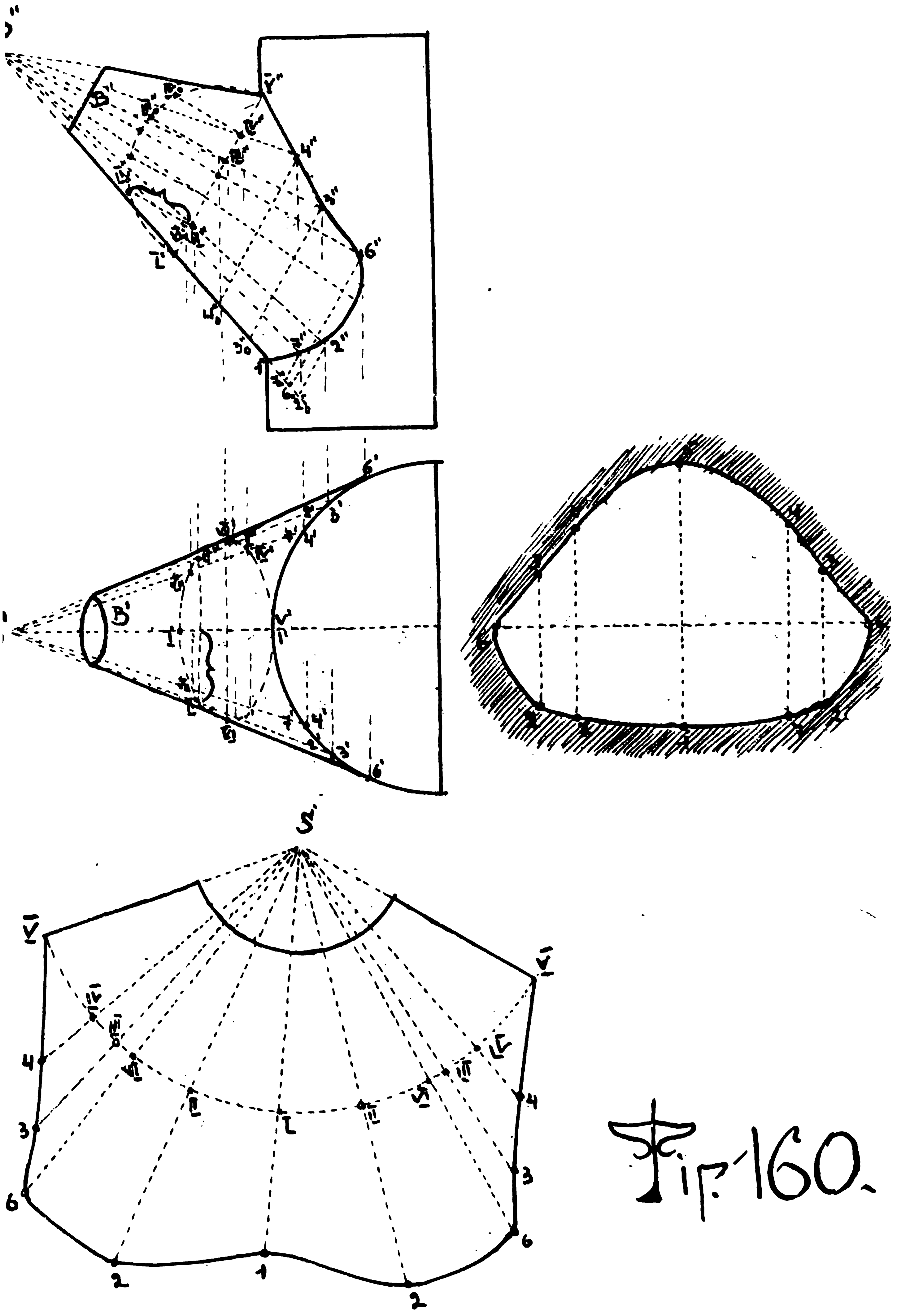


Fig. 160.

в другій точці. Найдена крива перетинення є частина від цілої кривої перетинення. На фіг. 160 накреслена розгортка зрізаного стіжка. Коловий сектор $SV\overline{V}$ має радіус = $S''I''$ та периметр рівнобіжного кола — за луку. Щоб одержати дійсну величину творячих, уявимо їх повернутими навкруги вісі стіжка до рівнобіжного положення з P_2, при чім точки $4''3''$... переходять в $4_0''$ $3_0''$....

Вісь стіжка рівновісна до горізонтальної площі, вісь стовпака рівнобіжна до вертікальної площі, але нахилена відносно горізонтальної площі. Площа, що содержить в собі вісі, буде знову площею симетрії для обох поверхней та рівнобіжна до вертікальної площі (фіг. 161.).

Шляхом введення нової площі P_3, рівновісної до вісі стовпака, ця задача зводиться до попередньої задачі. Ті засоби, що там вживались, доцільні і в випадку, коли вісі не перетинаються.

Понеже маємо дві поверхні обігу з осями, що перетинаються, то фігуру їх перетинення C одержуємо швидче та вірніще вживанням допоможної кулі з центром O в точці перетинення осей. Описана навкруги $\underline{O}$ куля H вирізує з стіжка та стовпака по два рівнобіжних кола, котрі на вертікальну площу проектуются простими m"n" та p"q" - відповідно a"b"... e"d". Точки перетинення 1" 2" 3" від простих одержуємо на вертикальній проекції як дійсні (reellen Kurvenpunkten) точки; точка ж 4" — вертикальна проекція від двох імажінерних точок кривої. Точка 4" дає дійсний пункт вертикальної проекції продовженої кривої C" за межі поверхні. Крива C" є гіпербола. Користуючись допоможною кулею, котра торкається до стіжка, одержуємо точки 5" та 6" з відповідними тангентами. Вони конюгірні до дотичної хорди 5"6", котра одночасно служать диаметром гиперболи. Центр гиперболи лежить в h - середині відрізка 5"6". Для асимптот недостає

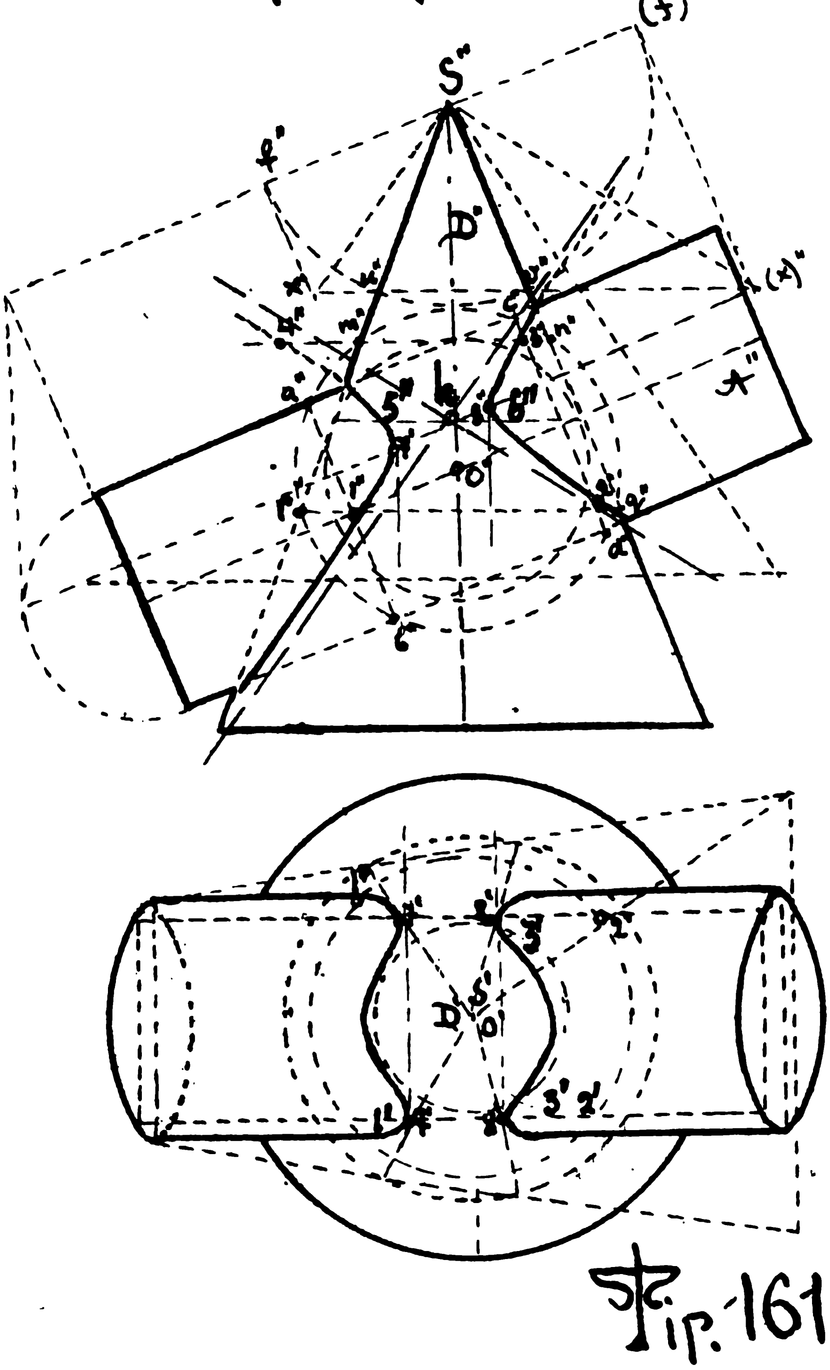


Fig. 161.

тільки напрямку. Щоб одержати, пересунемо стовпак рівнобіжно самому собі аж поки його вісь пройде через S і в цьому новому положенню зробимо конструкцію. Треба зауважити, що для положення безмежно далеких точок кривої січення нормальне січення стовпака не береться на увагу.

Навкруги S безмежно великим радіусом описуємо кулю, то коло перетинення з стовпаком (котрого радіус r) надзвичайно малий відносно безмежно великого кола січення з стовпаком (в перетиненні з площею вісь) бо $\frac{2r}{\infty} = 0$.

Описуємо з S'' коло $f''u''v''$, його тангента в точці перетинення f''

пересікається хордою $u''v''$, котра утворюється від пересічення площі вісі стіжка

Тільки таким чином одержуємо відношення хорд $\frac{0}{u''v''}$ = знову нуль.

Проста, що сполучає точки перетинення x'' з S'' дає напрямок асимптоти.

Напрямок другої асимптоти – $S''(x)''$.

Асимптоти самі рівнобіжні до $S''x''$ проходять через $\underline{h}$.

Точки 7 та 8 на внутрішній творячій стіжка одержуємо тією допоможною площею, котра проходить через шпиль стіжка та торкається стовпака.

Перетинення двох поверхней обігу.

Означити перетинення двох поверхней обігу, вісі котрих Д та А зустрічаються

Нехай вісь Д (фіг. 162) буде рівновісна до горізонтальної площі, а вісь А - рівнобіжна до P_2. Нехай одна поверхня буде - ростягнутий а друга - стиснутий еліпсоід обертання (обігу). Головні меридіани обох поверхней будуть еліпси V та Q.

Відносно горізонтальної площі (P_1) перший еліпсоід має обрис U' екваторного кола, другий еліпсоід - еліпс P', котрих вертікальні проекції напрямку $e''c'$ відповідного диаметру $c''d''$ від Q''.

З $c''d''$ одержуємо малу вісь $c'd'$ еліпси P', велика вісь = великій вісі Q.

Для конструкції лінії перетинення e не вживаємо, як завше площі, але - допоможну кулю, щоб одержати точку перетинення $O = Д \times А$, бо вона утворює в обох еліпсоідах найпростіші січення, а саме - рівнобіжні кола. Довільна допоможна куля перетинає обидві поверхні по рівнобіжним колам <u>mn</u> та <u>lk</u>, котрі в двох точках 1 та 2 (e) зустрічаються. Одержуємо $1'' = 2'' = l''k'' \times m''n''$, а звідціля знаходимо $1'$ та $2'$ на горізонтальній проекції рівнобіжного кола <u>mn</u>. Таким чином знаходимо нив-

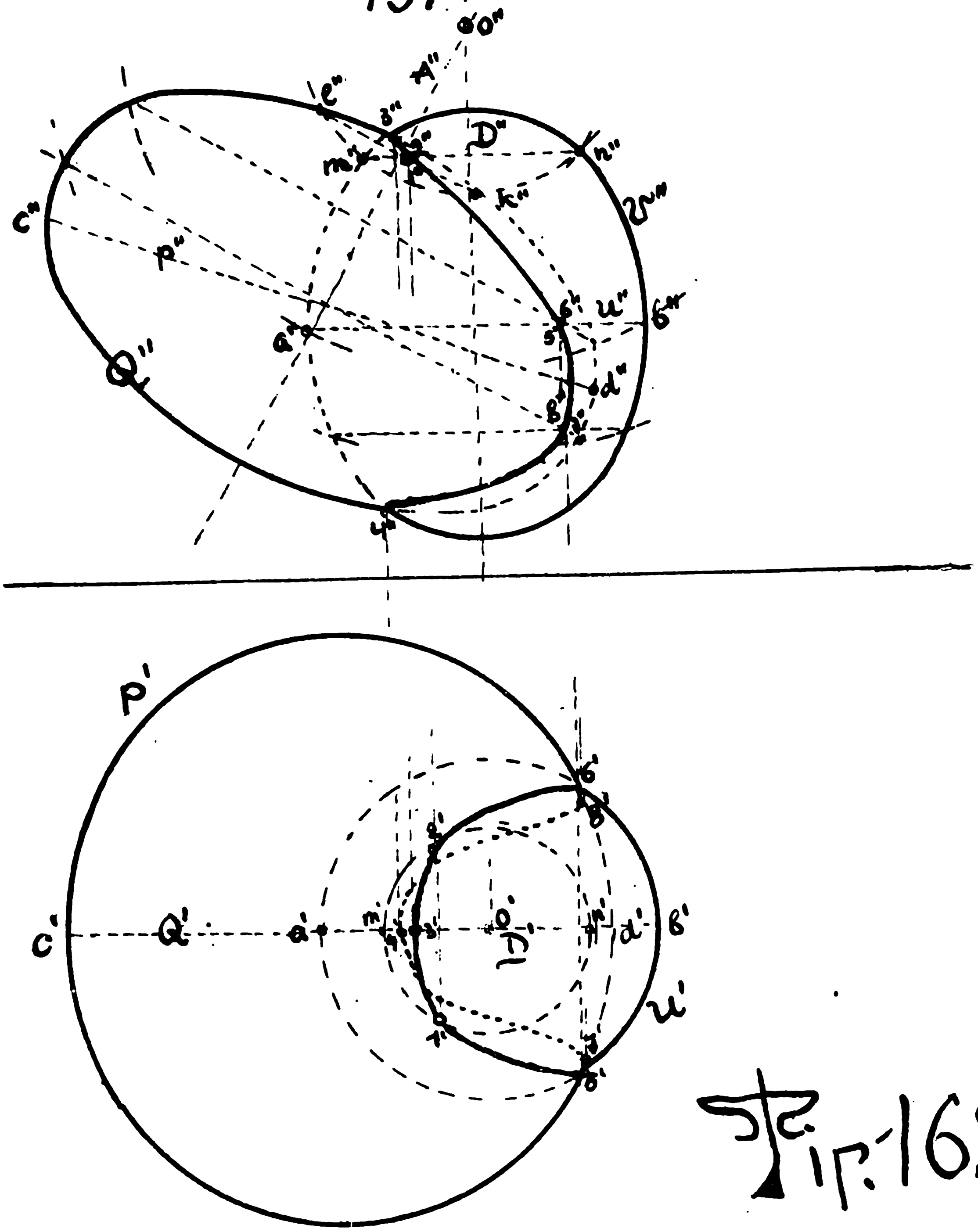


Fig. 162.

ну точок C, особливо ті, що лежать на П. Точки 7 та 8 на горізонтальному нарису P другого еліпсоїда дають той еліпс, котрий вирізується площею з першого еліпсоїда.

C симетрична відносно площі (DA); C'' є, таким чином крива другого порядку. C' має дві подвійних точки. Такий подвійний пункт виника завше в картині простірної кривої, коли проектуючий промінь двічі зустріча початкову криву; він тоді називається як здающийся подвійний пункт простірної кривої. Щоб одержати в нашому прикладі обидва подвійних пункти, треба взяти на увагу, що середини всіх рівновісних до P_1 хорд першої поверхні лежать в рівновісній до P_2 площі (проходять через <u>ab</u>), в той час, як рівновісна до P_2 площа (проходить через <u>cd</u>) буде серединою хорд, що рівновісні до другої поверхні. Оці площі, що рівновісні до P_2, перетинаються по простій S, горізонтальна проекція котрої содержить в собі здающийся подвійний пункт.

Щоб її просто одержати, треба обидві поверхні. перетяти горізонтально проектуючою площею, що проходить через S і зазначити загальні точки еліпсів перетинення.

Відділ IV.

Проекції з котами.

При багатьох інженерних роботах потрібно знати тільки висоту даної точки над площею, що приймаємо за горизонтальну. Висоти (коти) над цією площею рахуємо додатними (позитивними), висоти під нею — від'ємними (негативними). При кресленню цю, мовляв, основну площу рахуємо за площу, на котру проектуємо потрібні точки.

Площі рівнобіжні до цієї основної площі називаємо слоєвими (Schichtenebenen), горізонтальними, або ніво (Niveau) площами. Називають також такі поверхні графичними, поверхнями терену або топографичними.

Звичайно ці площі проводять на віддаленнях в 0,25м., 0,50м., 1м, 5м, 10м...... 100 метрів.

Треба зауважити, що закон складення кривих поверхней Землі взагалі невідомий. Нарисна геометрія та інженерні науки можуть робить конструкції тільки тоді, коли хоч де-які точки означені та підлягають якимсь постійним змінам.

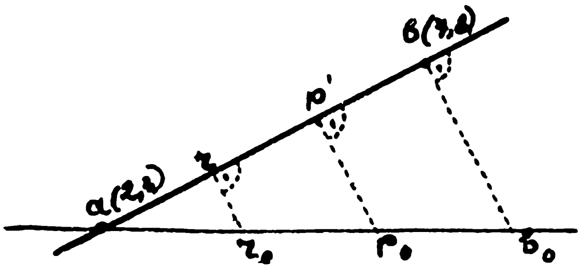
Січення терену цілою низкою горізонтальних площ, що мають однакові висоти (коли вони позитивні, то наз. ізогипсами, а коли негативні — ізобатами) дають підстави (можливість) провадити ріжні конструкції. При звичайних роботах ріжниця робиться від одного до пяти метрів, при меліоративних — треба брати не більше 0,25 метр..

Природно, що й між цими двома площами можуть бути значні зміни та хитання в обрисі поверхні землі, але роблять припущення, що значних змін не мається, ц. т.: проста, що перетинає нормально одну горізонтальну поверхню — перетинає й близчу низчу майже нормально й між цими поверхнями тільки незначна ріжниця між нею та дійсним обрисом терену.

Кожна горізонтальна площа означається своєю котою.

При конструкціях вибіраємо площу, котру називаємо головною й відносно неї означаємо всі инші.

Представлення простої. Нехай нам дається точка $a(2,3)$ та $b(7,8)$. Ці дві точки, звичайно, означають просту ab (G') (фіг. 163). Коли треба шляхом креслення оз-

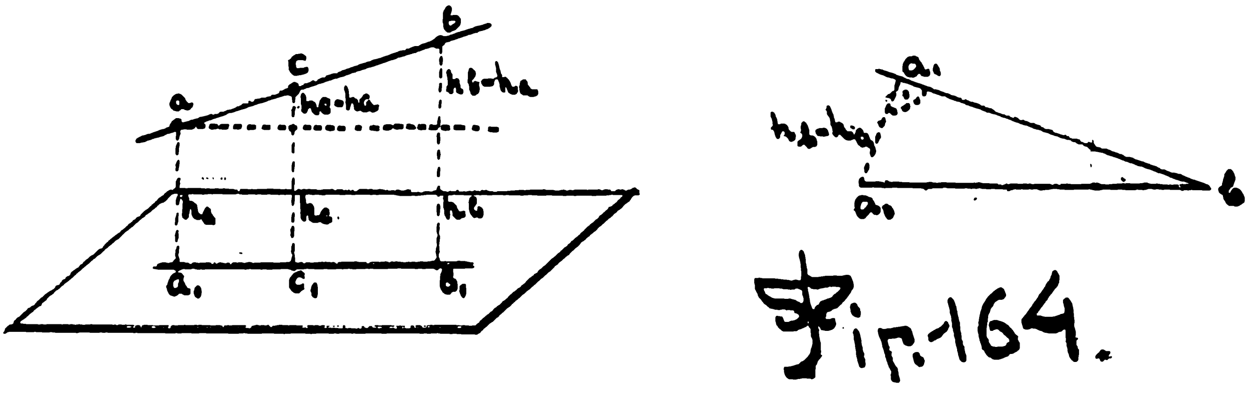


Фіг.163.

начити коту якоїсь точки p' (простої C'), то ставимо проектуючу площу простої C в горізонтальну площу однієї з данних точок, ц.т. розглядаємо цю площу, як горізонтальну площу проекцій. Проста ab прийме положення ab₀. Виміряємо довжину p'p₀, що по маштабу дасть 3,6 метр., значить дійсна кота її буде $h_p = 2,3 + 3,6 = 5,9$ метр.

Навпаки, коли дана кота $h_ч = 4,1$, то для означення положення цієї точки від $4,1 - 2,3 = 1,8$ по маштабу наносимо ординату 1,8, що й означає положення точки ч. Користуючись цим нарисом можливо означити й довжину ab₀ та кут нахилу $bab_0 = \gamma$

Означення точок може бути зроблено й таким шляхом: нехай даються точки a b c зі своїми котами h_a h_b h_c. Істнує пропорція:

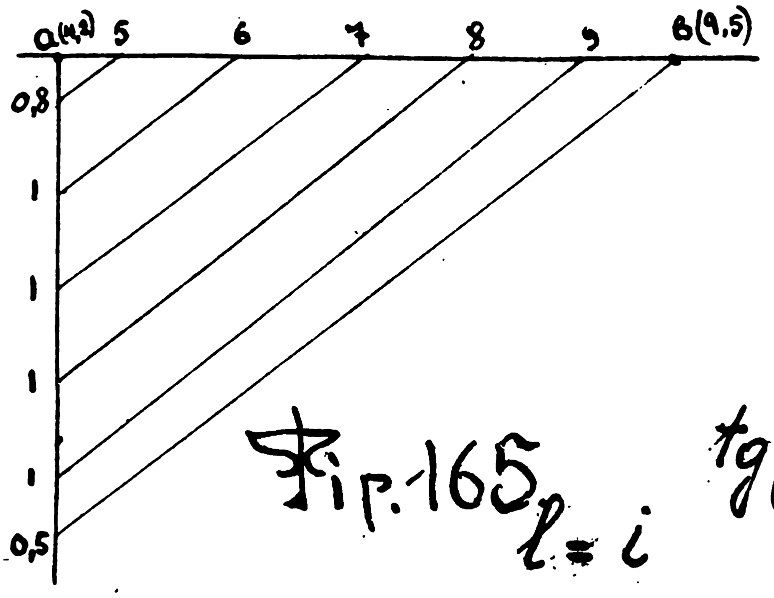


Фіг.164.

$a'c' : a'b' = (h_c - h_a) : (h_b - h_a)$. Перекладаючи відрізок a_1b_1 (фіг. 164) біля b_1 та по нормалі a_1a_0 відрізок $h_b - h_a$ одержуємо точку a_0. Означення точок на простій з відповідними котами називаємо „градуірованням". Звичайно цю градуіровку роблять так, щоб на простій були точки з цілими відмітками. Градуіровку простої називають також маштабом нахилу або маштабом відкосів

Одиницю довжини відкосу в даннім маштабі називаємо інтервалом i простої. Таким чином інтервалом простої наз. віддалення двох точок, ріжниця висот котрих = одиниці, або положення точок в одна за одніею слідуючих горізонтальних площах з ріжницею в один метр. Чим більший горізонтальний нахил простої, тим менший її інтервал. Для ордінера $i = 0$ для горізонтальної простої $= \infty$, для простої з кутом нахилу 45° $i = 1$. Прості з однаковими горізонтальними нахилами мають однакові інтервали. Нахил простої до горізонту називають її спаданням або її відкосом, або инакше: відкос простої є відношення ріжниці висот двох точок, при горізонтальному їх віддален-

ню рівному одиниці.
Нахил дається в відсотках або відтисячних; напр.: спадання річки 0.4 %оо, ц.т. на 1000 метрів довжини річка спада на 0,4 метра.



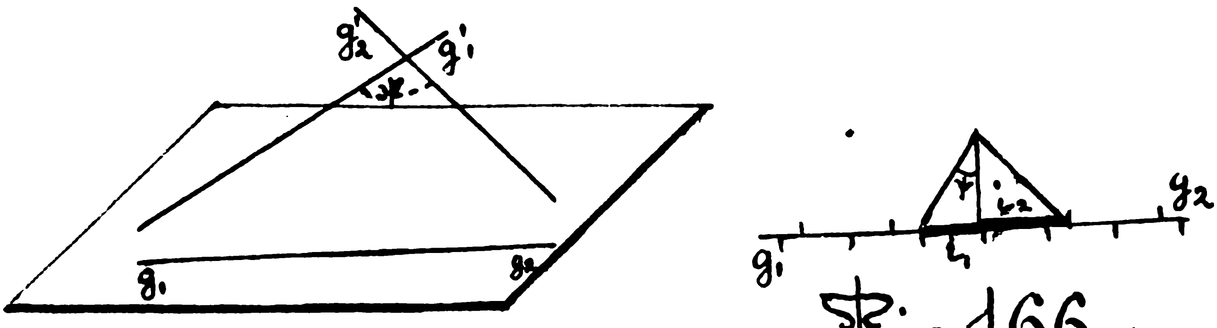
Фір.165 $l = i$

$tg\gamma = \frac{h}{l}$, як $h = 1$ $tg\gamma = \frac{1}{i}$

Нахил та інтервал простої - числа взаємно реціпрокні. Проста цілком означена, коли відомі її горізонтальна проекція, напрямок нахилу, інтервал і кóта якоїсь її точки, бо цим дається її градуірованння. Викреслити просту в проекціях в кóтами значить викреслити її маштаб відносів. Коли i є інтервал та h - висота між горізонтальними площами, то точки перетинення простої з одна за одніею слідуючими горізонтальними площами мають постійне віддалення $h \times i$.

Прості, що перетинаються, рівнобіжні та рівновісні.

Дві прості g_1' g_2' (фіг. 166) перетинаються в просторі, коли їх проекції перетинаються та загальна точка їх має однакову Кòту (фіг. 166).

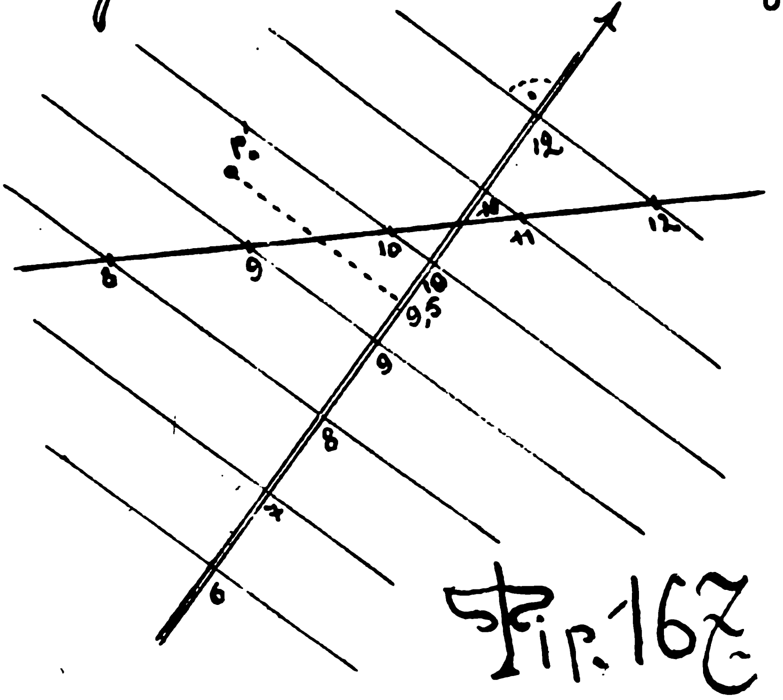


Фіг. 166.

Рівнобіжні прості мають рівнобіжні проекції однакові та однакового напрямку маштаби нахилу, ц. т. маштаб нахилу одної переходить в маштаб нахилу другої при пересовуванні. Дві простих з рівнобіжними проекціями тільки тоді рівновісні, коли інтервали їх реціпрокні та градуіровка направлена в ріжні сторони.

Представлення площі.

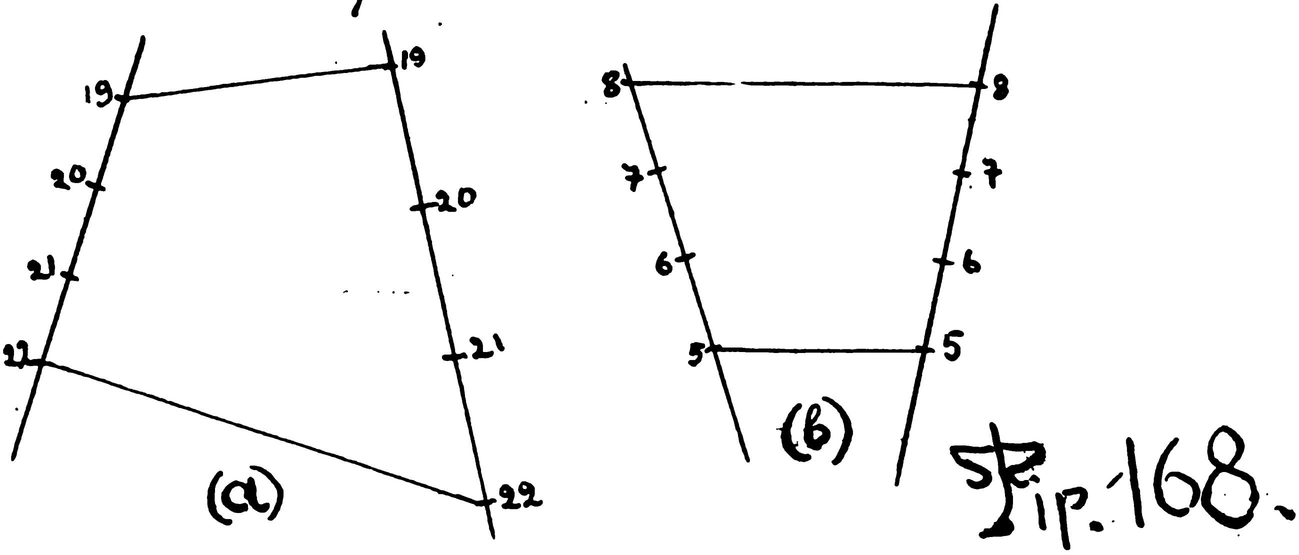
Перші головні лінії якоїсь площі це - лінії перетинення з горізонтальними площами - називаємо слоєвими лініями. Площа визначається двома слоєвими лініями. Для представлення площі Є вживають звичайно слоєвих ліній з цілими Котами. Понеже в горізонтальних проекціях слоєві лінії рівновісні до лінії нахилу площі, то для означення площі вистачає градуірованої лінії нахилу, так. зван. маштабу нахилу або відкосного маштабу. (Böschungsmaßstab). Такі градуіровані лінії нахилу означаються подвійними лініями. Кут нахилу β площі Ɛ до горізонту ідентичний з нахилом до горізонту лінії нахилу F цієї площі; tg β називаємо відкосом площі. Щоб означити коту точки p, що лежить на площі Ɛ, з даної горізонтальної проекції p' проводимо слоєву лінію та означаємо коту перетинення цієї лінії в маштабом відносу.



Фіг. 167.

Коли проста G (фіг. 167) належить до цієї площі, то точки перетинення її в проекціями головних слоєвих ліній вже дають її градуіровку. Як, навпаки, треба через дану просту G провести площу, то проводимо через точки поділу її маштаба відкаса в якомусь напрямку рівнобіжні прості та розглядаємо їх як головні слоєві лінії площі.

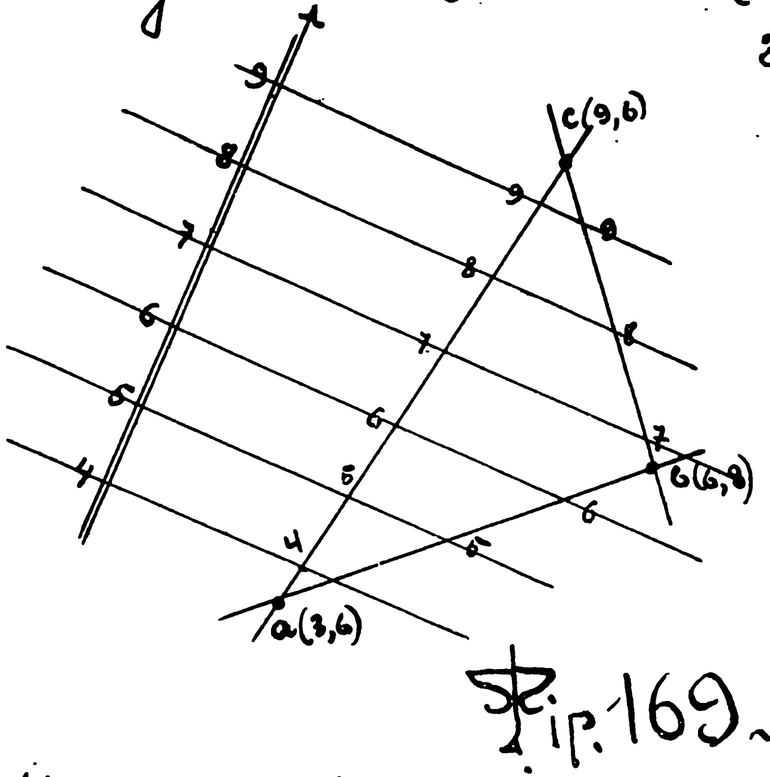
Дві простих, що даються своїми маштабами відкосів, перетинаються (в конечному або безмежному віддаленю) тільки тоді, коли прості, що сполучають дві пари точок з однаковими котами, рівнобіжні між собою. З нарисів (фіг. 168) видно, що в випадку в вони перетинаються.



Фіг. 168.

Даються три точки а(3,6), в(6,8) та с(9,6), треба через них провести площу.

Сполучаємо ці точки (фіг. 169) простими, градуюємо їх; через точки з однаковими котами проводимо прості, котрі й будуть слоєвими лініями площі. Рівновісна до них проста буде маштабом нахилу площі.



Фіг. 169.

Перетинення двох площ та точка перетинення простої з площею.

Коли

прості нахилу площ складають гострий кут між собою, то точки перетинення ліній однакових кот дають точки перетинення площ (фігура 170).
Коли площі

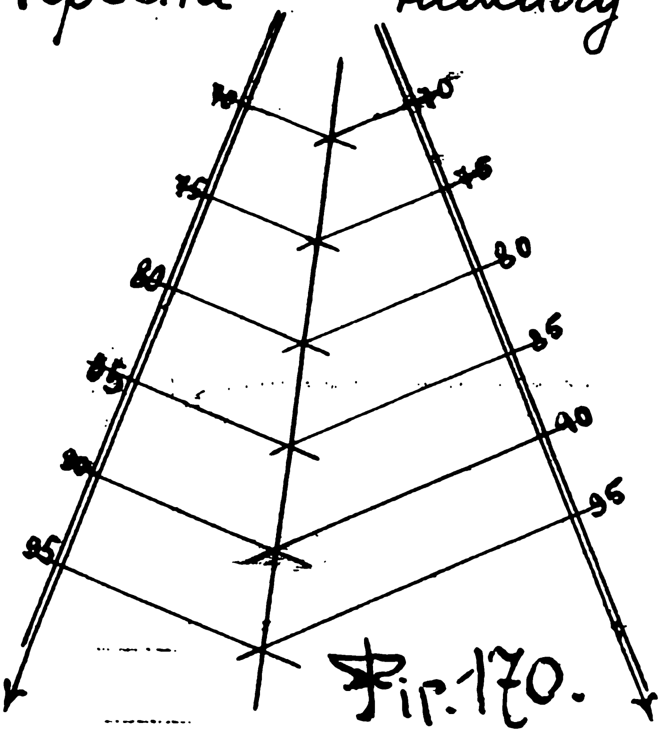


Fig. 170.

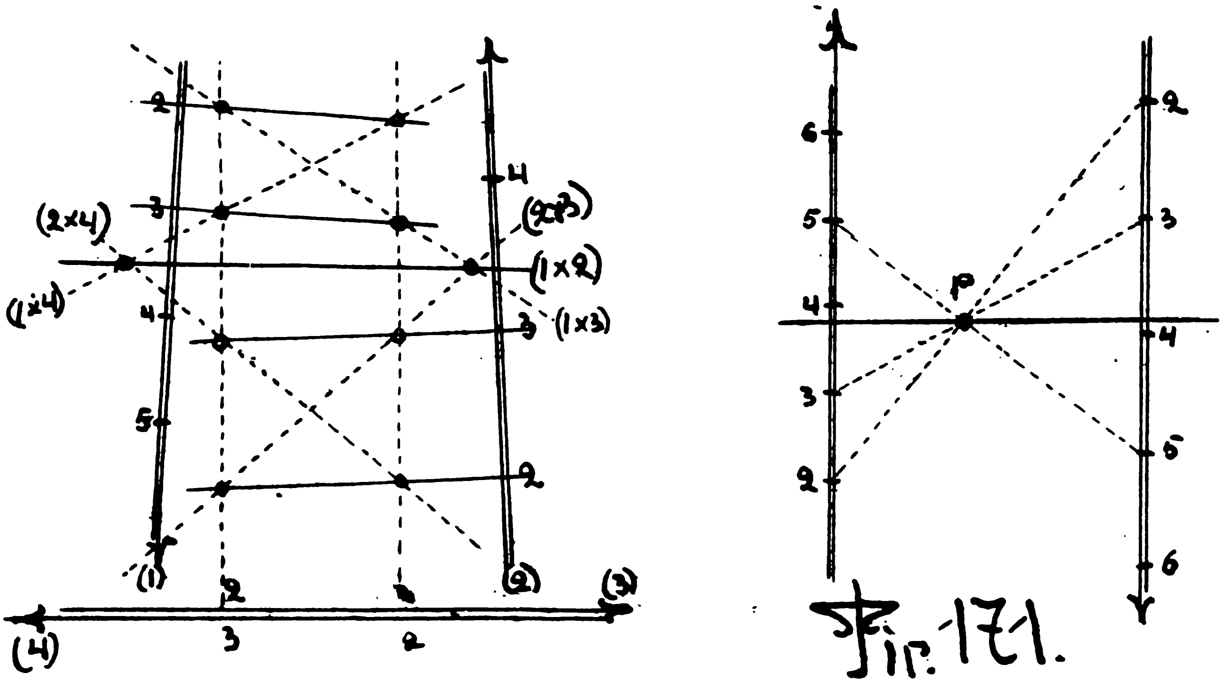


Fig. 171.

майже рівнобіжні (фіг. 171) приходиться вживати инші методи.

Щоб означити точку перетинення простої з площею (фігур. 172), проводимо допоміжну площу через просту та оз-

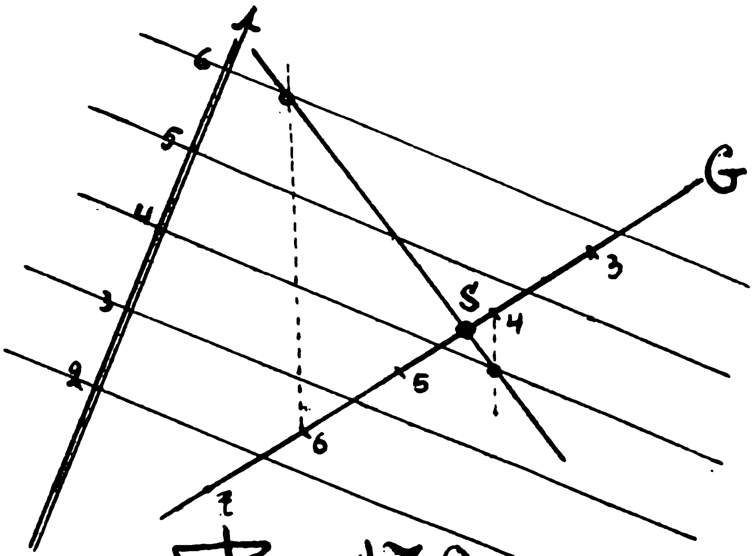


Fig.-172

начаємо лінію перетинання цих двох площ. Точка перетинення цієї лінії з данною буде точка, що шукаємо.

Дається площа Е з маштабом нахилу F_1, треба означити в ній напрямки простих, що мають нахил відкоса $2/3$ (фіг. 173).

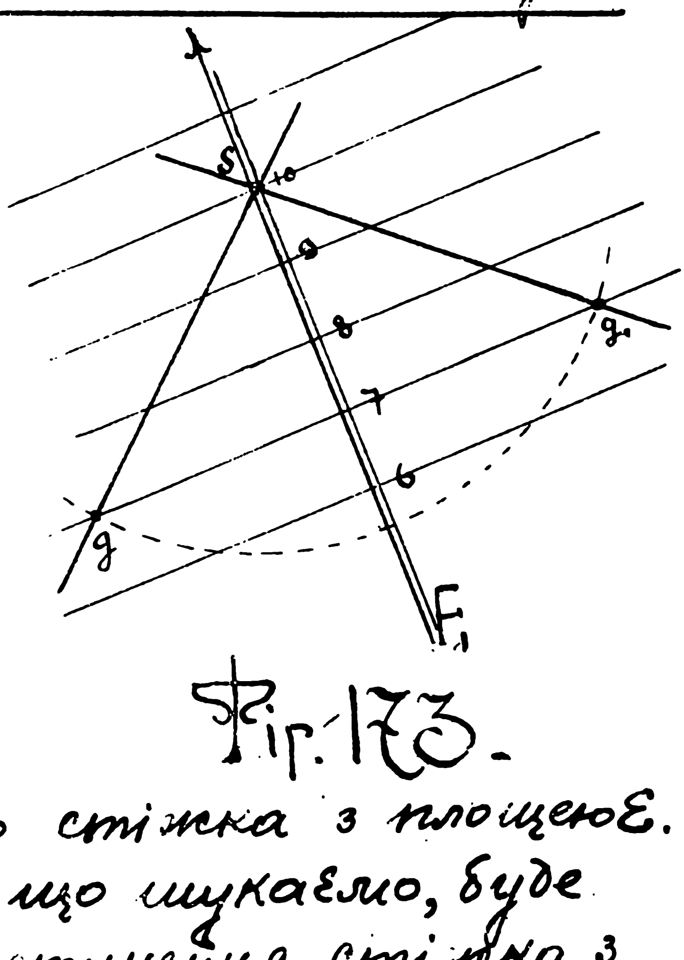
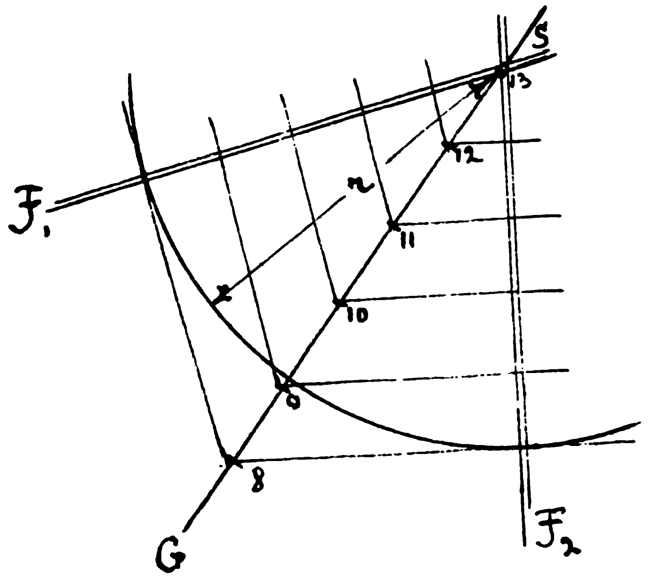


Fig. 173.

Прості з відкосом $2/3$, що проходять через якусь точку S маштаба F_1 лежать на стіжку з рівновісною віссю (відкосний стіжок Böschungskegel), треба означити прості перетинення цього стіжка з площею Е. Інтервал простої, що шукаємо, буде $i = \frac{3}{2}$, Коло перетинення стіжка з якоюсь, скажемо 7 слоєвою простою, буде мати радіусом $r = si = 3.{}^3/_2 = {}^9/_2$. Точки перетинення цього кола з паралелю семою дадуть точки g та g', котрі сполучаємо з точкою S і одержуємо прості, що мають даний нахил.

Через данну просту G треба провести площі з нахилом до горізонту β. (фіг. 174). Через довільний пункт S простої G(13) площі, що йдуть з горізонтальним нахилом β, обкружують стіжок в відвісною віссю. До цього стіжка, через G треба провести тангенціальні площі. Для цієї мети викреслюємо коло перетинення стіжка



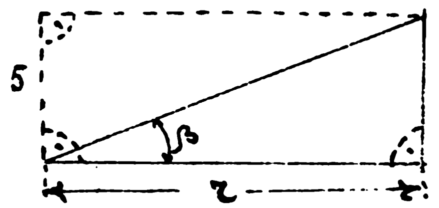
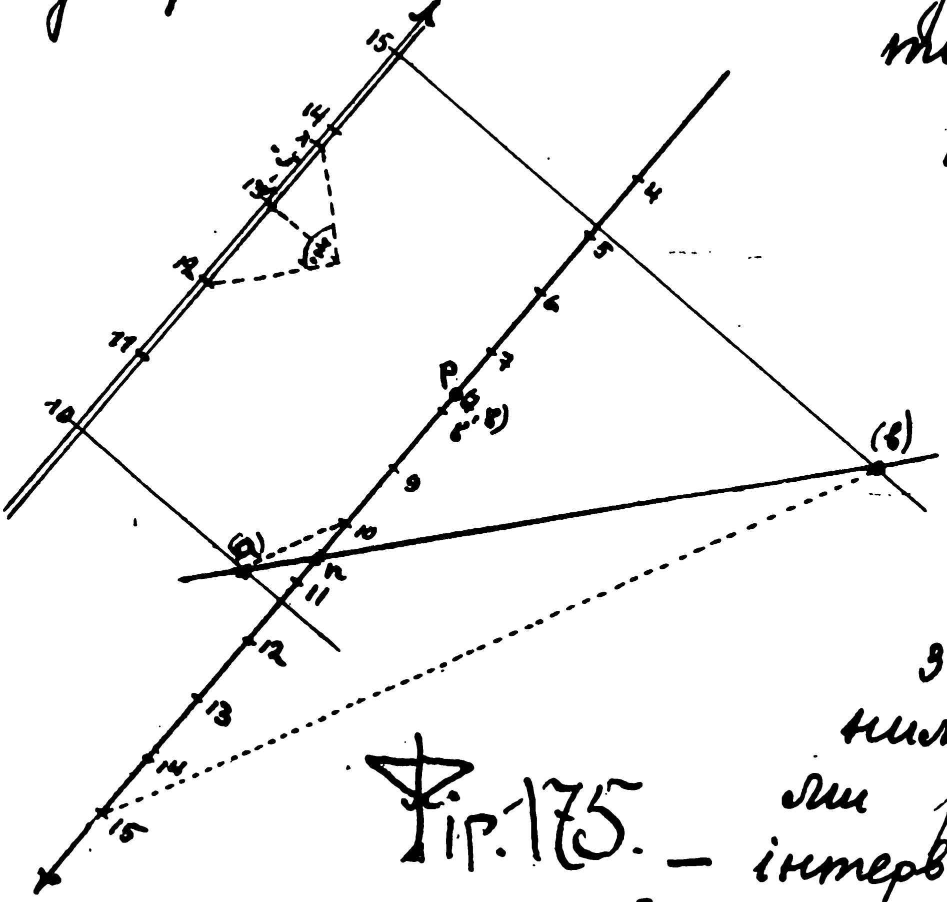


Fig. 174.

з площею, що не проходить через горізонталь 13 а, наприклад, в площею 8. Його радіус r буде другим катетом прямокутного трикутника, в котрому один катет = = 13 − 8 = 5, а протилежний кут β. Тангенти до кола (Sr), що проведені з точки 8 до простої G, означають площі, що шукаємо, що дають лінію перетинення 8. Маштаби їх означаються через F_1 та F_2.

Означення ордінера до площі (фіг. 175).

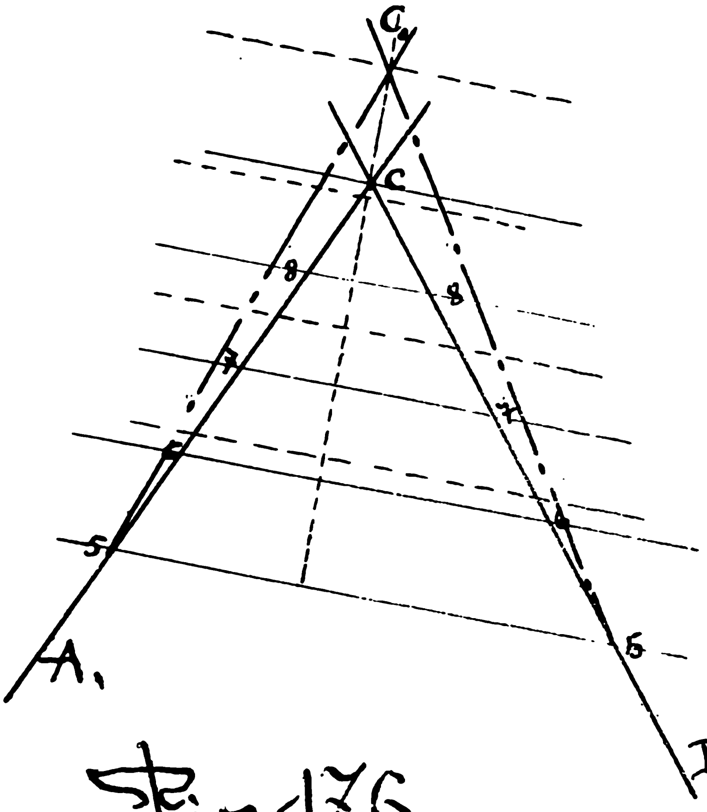
Горізонтальна проекція простої N, що рівновісна до площі E з маштабом нахилу F_1, буде рівновісна до слоєвих ліній E, ц. т. вона буде рівнобіжна до F_1. Понеже N та F мусять бути взаємно рівновісні, то по попередньому маємо випадок, коли дві простих з рівнобіжними проекціями рівновісні — інтервал N може бути означений з інтервалу F_1. Після цього на N_1 наносимо його фактично, та будуємо перетинення 15 та 10 a та b. Проста, що сполучає ці точки з N_1, дає точку <u>n</u> перетинення простої, що проходить рівновісно до площі E через точку <u>p</u>.



Фіг. 175.

Рівнобіжне пересунення площі (ф. 176).

Щоб ясно означити образи фігур, що належать до площі E або провести якусь конструкцію з масовими відношеннями, повертаємо площу E в рівнобіжне до основної горізонтальної площі П положення (рівнобіжно до головних слоєвих ліній). Коли дані дві простих A та B, що перетинаються і треба визначити кут між ними, то повертаємо їх біля якоїсь слоєвої лінії, напр. 5-5 так, щоб вони стали рівнобіжними до горізонтальної площі. При цьому всяка слоєва лінія (а значить і точка C) пересунеться.



Фіг. 176.

Віддалення між двома слоєвими простими стане рівним гіпотенузі прямокутного трикутника, один катет котрого - данний інтервал і другий одиниця. Точка C пересунеться по рівновісу й займе місце C_0; сполучаємо її з точками A_1 і B_1 й одержуємо дійсну величину кута між двома простими.

Конструкція прямокутної горізонтальної платформи на плоскому скісу. (фіг. 177).

Нехай площа Є покатого терену дана в маштабі 1:200 своїм маштабом нахилу F. Треба зробити горізонтальну платформу з очерком a'b'c'd' та котою 19,2. Понеже горізонталь 19,2 місцевости перетинає периметр прямокутника в точках e' та f', то потрібно частину платформи ebf'd насипати а частину ebcf - зрізати.

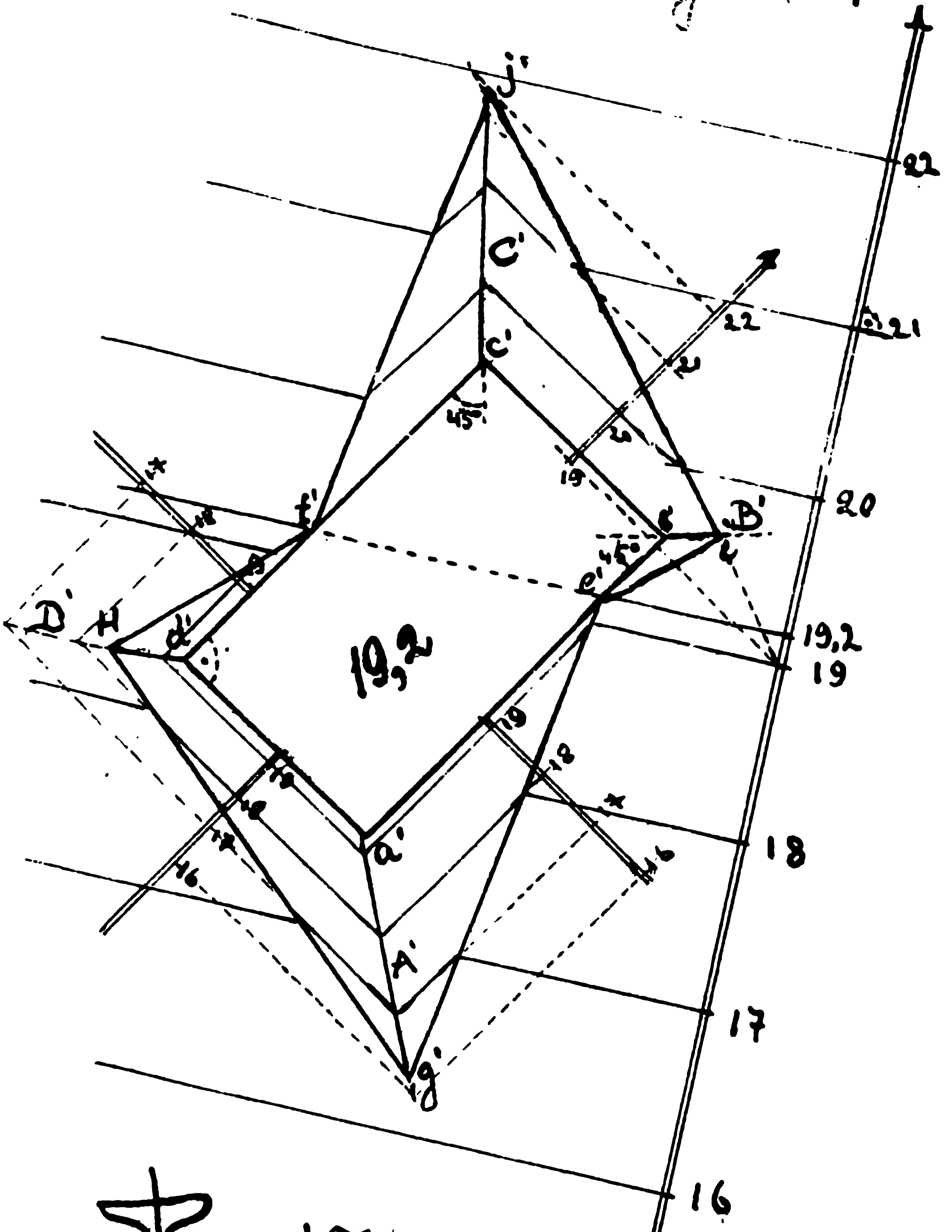


Fig. 177.

Через кожну сторону цих частин, за виключенням ef, проходить площа, що обмежує земляну масу (площа відкосу). Площі через ea, ad, df поширюються вниз, площі eb, bc, cf - до гори. Найкрутіщий відкос, що може бути даний цій площі, залежить від сорту землі (звичайні грунти $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$). Візьмемо, що площа, яка проходить через ad має відкос 1, решта - 2:3. Тоді

Задача зводиться до означення перетинення площі, що йде через данну просту, з площею g (терен) та з сусідньою.

Маштаб відкосів кожної з шости площ є напрямок рівновісний до відповідної сторони прямокутника, точка 19,2 та інтервал (1 та 2/3) данні. Можна по цим данним викреслити маштаб відкосів. Перетинення відповідних площ знаходимо, як в попередніх випадках. Лінія перетинення A площі через ae та ad йде через a та точку перетинення горізонталі 16. Аналогічно находимо лінію перетинення D площі, що йде через ad та de. З горізонтальних проекцій b та c виходять лінії B та C, що поділяють нарівно прямі кути.

Щоб означити перетинення площі ea з тереном, находимо відповідні точки перетинення горізонталей терену з горізонталями маштабу відкоса простої a'b'. Сполучаємо ці точки, це й буде межа откоса простої a'e' по терену. Далі сполучаємо g з точками перетинення терену з горізонталями маштабу відкоса a'd' та продовжуємо аж до точки h', hf є перетинення площі терену в площею відкоса. В допомогою горізонталей 19 та 22 нарситі означаються прості перетинення площі, що йде через <u>bc</u>. Сполучаємо точки i' та j', маємо межу відкоса виріза.

<u>Конструкція роз'їзда на вулиці (фіг. 178).</u> Маємо горізонтальні проекції точок a'b'c'..... h', що обмежують роз'їзд вулиці. Нехай ширина вулиці 3 метра, роз'їзда - 6 метрів. Нахил від g до h 1:20. Місцевість - нахилена площа з маштабом нахилу F. Відкоси роз'їзда мусять бути в насипу 2:3, вирізу 4:5. Треба сконструірувати перетинення цих площ відкосів між собою та з тереном. Поперед усього креслимо головні горізонталі вуличного терену (ц. т. площі вулиці з наміченим відповідним роз'їздом). Понеже af або hg прості одного нахилу, то потрібно тільки реціпрочне значіння нахилу вулиці, ц. т. 20 метр, які відкладати починаючи від точки <u>b</u> та через одержані точки провести нормально слоєві лінії. Горізонталь 12 лежить вже по-за межами нарису, то для конструкції користуємось горізонталлю 10,5

Означимо просту перетинення A поверхні вулиці з тереном місцевости

— так звану нульову лінію — для цього сполучаємо точки перетинення горізонталей 10 та 11, а саме, точки i та j. Вліво від ij планум вищий, вправо — нижче від терену, ц. т. на одному боці буде насип, на другому — виріз. Потрібно через окремі обмежуючі лінії планума прокласти площі відкосів та означити їх перетинення з тереном. Вздовж gh насип іде аж до j. Через hg мусимо провести площу з відкосом 2:3. Для цього вибіраємо на цій простій пункт K з котою 11, як вершину колового стіжка з відкосом 2:3, викреслюємо його коло січення (K, 1,5) з горізонталлю 10. З точки l, що належить до цієї площі, проводимо тангенти до кола стіжка. Тангента, як видно з нарису, лежить по-за межами планума. H є слоєва лінія 10 відкосної площі. Понеже точка перетинення H зі слоєвою лінією терену лежить дуже близько до j, то означаємо другу точку перетинення, напр. m (лінії 9). Проста jm означає перетинення між площею відкоса та терену*) Починаючи від точки j проста gh входить в виріз. Значить через цю частину простої треба прокладати площу з відкосом 4:5. Аналогічно викреслюємо коло

---

*) є межа насипу

(K', 1,25) в площі десятої горізонталі та проводимо з l тангенти, котрі лежать всередені планума; n точка перетинення H, з горізонталлю 10 сполучена з j; ця лінія сполучення своїм продовженням дає перетинення з тереном відносної площі.

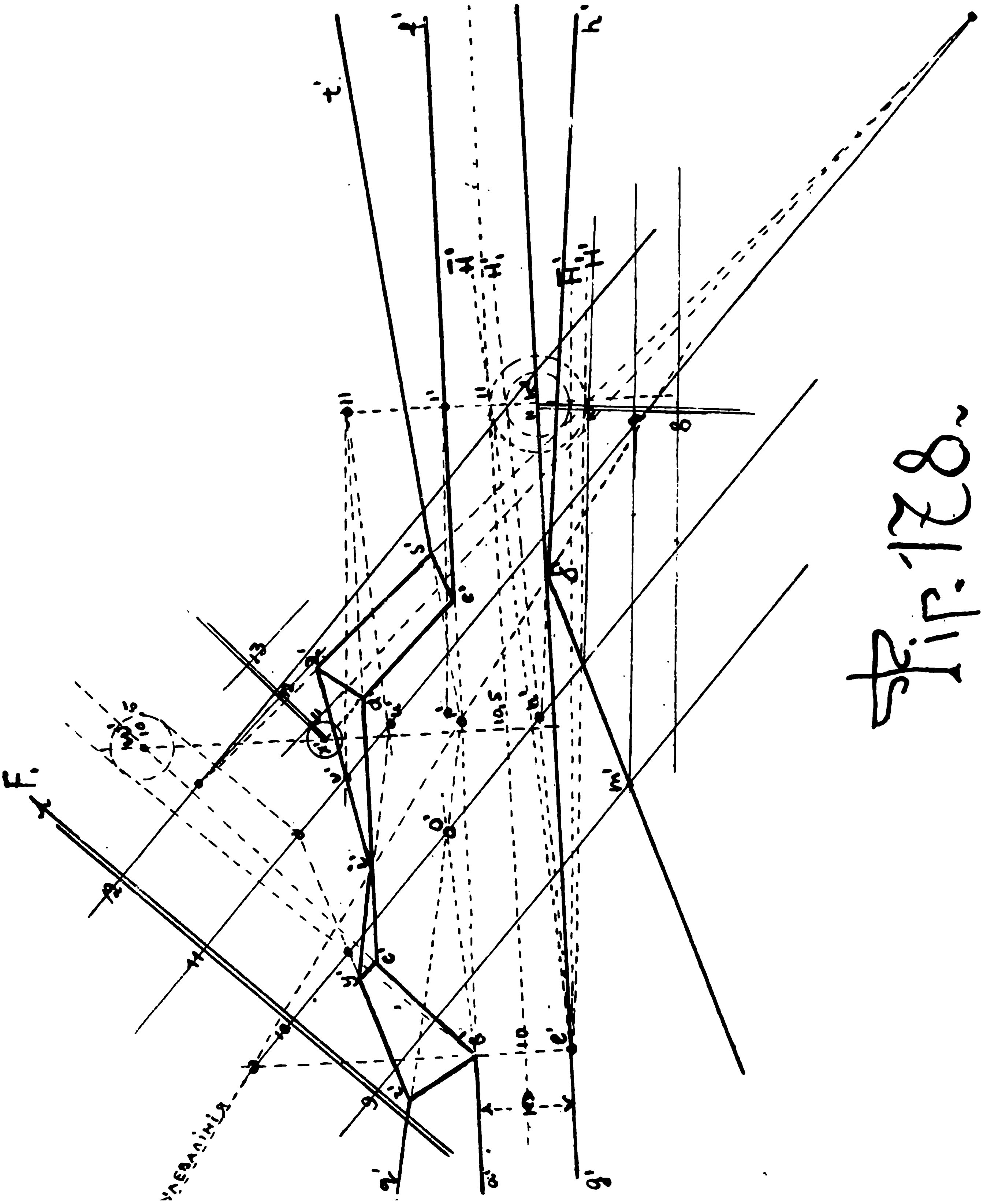


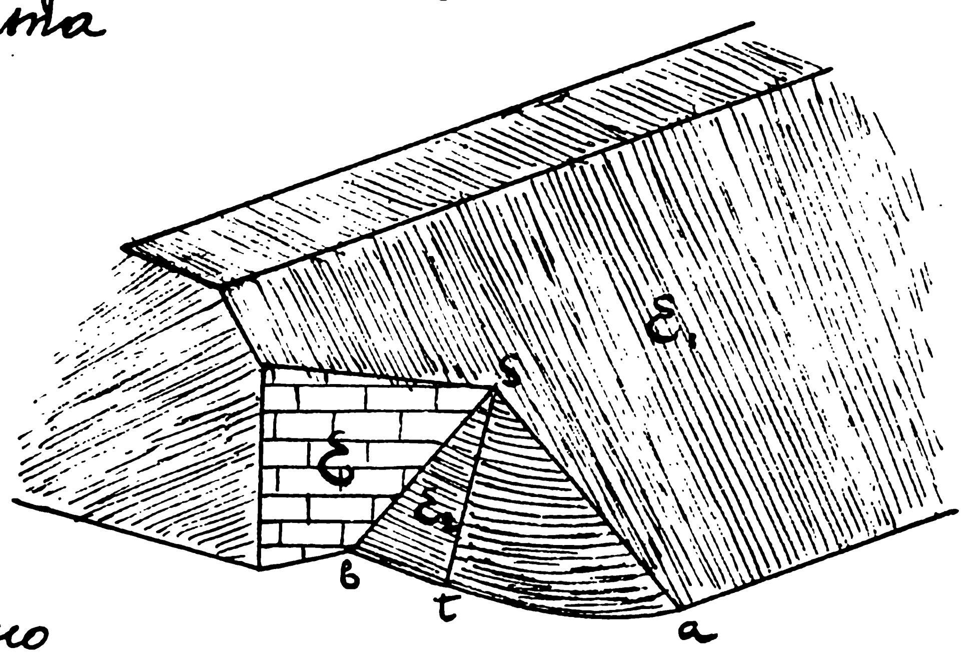
Рис. 128.

Таким саме чином можливо зробити відносно кантів ab, bc, ci, id, de та ef. Але можуть бути вжиті значні конструктивні полегчення дякуючі паралелізму (af), (cd) та (gh) а саме: для перших двох простих можна використати вищезгаданий стіжок точки K'. Проводимо з l' тангенти до кол (K'1,5)(K'1,25) з другого боку то цим самим одержуємо напрямок горізонталей відкосних площ, що йдуть через (af) та (cd), для насипу та вирізу. $[b' \| \overline{H}']$ є горізонт. проекція горізонталі 10 площі відкоса, що іде через лінію (a'b'). Перетинення горіз. терену 10 з цим напрямком дає точку o. Сполучаємо точку p з o, продовження її дає межу відкоса q, r, (терену з площею відкоса через ab). Через точку простої e'f' проводимо рівнобіжну до $\overline{H}'_1$; точку перетинення її з 11 горізонталлю терену сполучаємо з p та продовжуємо – маємо напрямок відкоса вирізу для частини e'f'(st). Щоб одержати перетинення терену з площами відкосів для частин (ci) та (id), з точки 11 простої cd проводимо прості рівнобіжно до $\overline{H}'$ та H'_1. Одержавши таким чином точки u' та v' (перетинення з 11 горізонталлю терену), сполучаємо їх з i та продовжуємо, що й дасть напрямок межі відкоса для

для відрізків ci та id. Щоб нарешті означити перетинення площі відкоса в тереном для частини (ве) та (de), продовжуємо їх аж поки вони перетнуть горізонт. пленума 10,5 в точках W та x. На цих точках будуємо стіжки з відкосом (2:3) та (4:5). Креслимо кола (W' 0,75) та (x' 0,625), проводимо з точки в та || від (de) відповідні тангенти до кола, вони - слоєві лінії 10 та 11 площі відкосів, що проходять через (ве) та (de). З допомогою другої горізонталі цієї площі (або користуючись точками перетинення (вс) та (de) в A) одержуємо (ry) та (zs). Одночасно одержуємо точки перетинення r, y, z, s.

Конструкція прилягаючої стіжка (ср. 179).

В залізничному насипу дуже часто приходиться сполучати передню (лобову) площу з відкосом насипу стінкою та стіжком. Цей стіжок одночасно торкається і площі ε_1 (відкоса насипу) і одночасно й площі ε_2



Фіг 179

З відкосом 1. Стіжок відносно цієї лобової стінки стоїть або рівновісно, або складає з нею тупий кут. Вершина цього стіжка мусить бути на перетиненні площ ε_1 ε_2 та ε. Його основа має елиптичну направляючу, над серединою котрої лежить рівновісно точка S. Треба викреслити проекції такого стіжка в загальному випадку: ц.т. вісь вулиці (або річки) не робить прямого кута.

Нехай в горізонтальних проекціях дані: до вісі вулиці (або річки) рівновісно та до вертікальної площі - рівнобіжно поставлена площа ε; належна до площі ε_1 горізонтальна лінія E_1 (має відкос 2:3) та належна до планума горізонталь E_2 (площі ε_2).

Щоб одержати просту перетинення площ ε_1 та ε_2, проводимо в цих площах (фіг. 180) дві однакової висоти горізонталі H_1 та H_2. Сполучивши точки перетинення p_1 та q_1, продовжуємо аж до перетинення в точці S' (проекції вершини стіжка). Прості що йдуть через S (площа ε_1) — утворюючі стіжка. Як що a - точка перетинення з E_1, то $S'a'$ - велика піввісь основного еліпса K стіжка. Понеже E_2 тангента цього еліпса, то можемо легко знай-

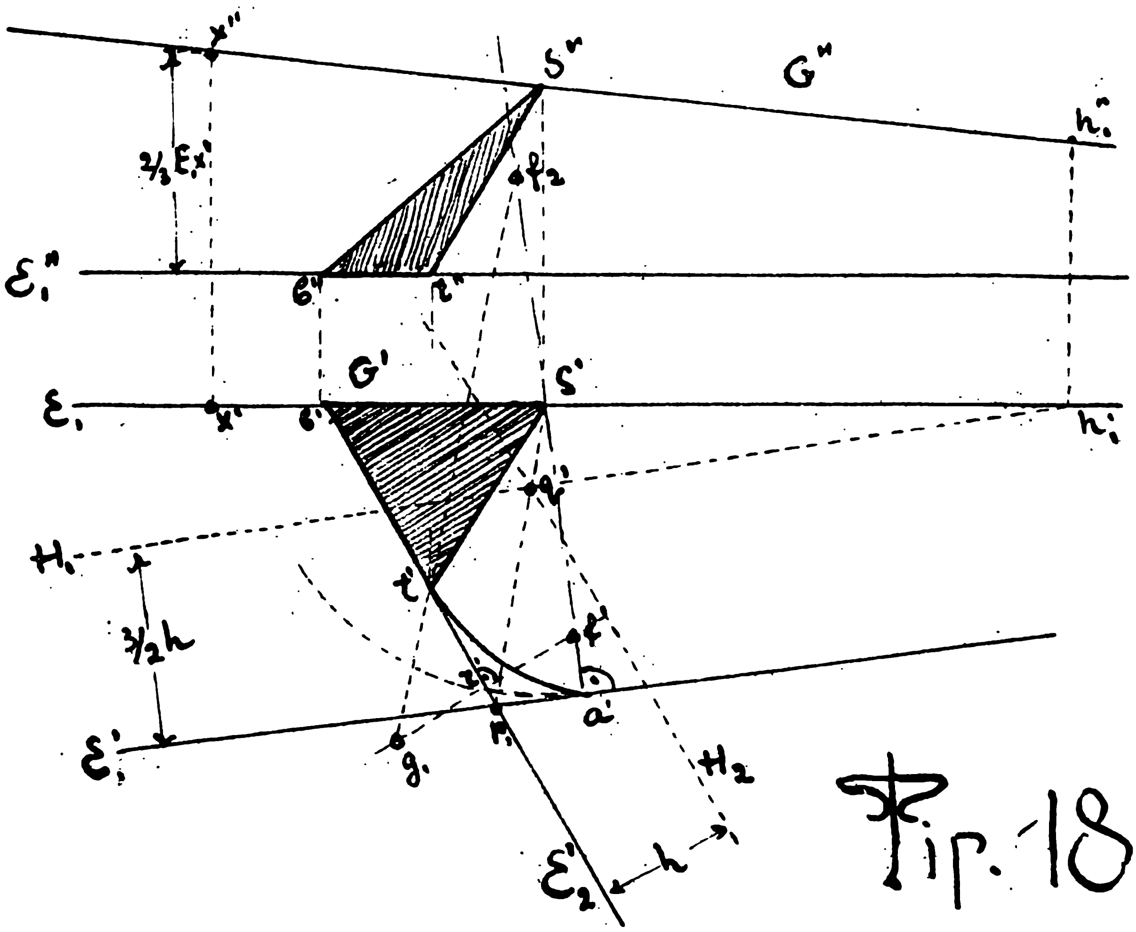


Fig. 180.

ти фокуси та точку торкання t з E_2. Коло (радіуса $S'n'$) перетинає тангенту E_2 в $\underline{r}'$. Маючи $\underline{r}'$, означаємо f_1 та протилежний пункт q_1; звідціля може бути означена точка t_1. Щоб одержати вертікальну проекцію, досить викреслити дві точки, що належать до простої G. Одна нехай буде h_1'...$(H_1 \times E_1)$, точка h_1'' лежить над горізонтом вище на h_0. Треба зазначити ще якусь другу точку. Для цього на G' беремо якусь точку x' й уявляємо, що через неї проходить відкосна лінія з нахилом 2:3, котра в горізонтальній проекції уявляється рівновісом, спущеним з x' на E_1'. Маючи на увазі нахил відкоса, точка x'' мусить лежать над E_1'' в віддаленні $2/3\,E_1'x'$. Таким чином одержуємо G_1'', на ній лежить S''.

Криві терену. Терен обмежується кривими, що звичайно не підлягають якимсь сталим законам походження. Вони означаються горізонтальними проекціями та котами своїх точок. Коли крива не лежить в проектуючій площі, то означають площу, в котрій вона лежить. Коли походження кривої відомо, то дають тільки елементи, що її означають.

Крива K постійного горізонтального нахилу α, ц. т. постійних відкосів, котрі, по аналогії з відкосами площ, будемо називать лініями відкосів, означається проекцією K' та котами точок $\underline{a}$ та $\underline{b}$ $(b>a)$. Коли ds є елемент K, ds_1 – його проекція, dh-ріжниця висот кінцевих точок, то $\frac{ds_1}{ds}=\cos\alpha$ $\frac{dh}{ds_1}=tg\alpha$ мають для всієї кривої постійне відношення а тому, переходячи до конечних величин, можна написати:

$$\frac{S'}{S}=\cos\alpha\,;\quad \frac{h}{S'}=tg\alpha.$$

Означивши $\overline{a'b'}$ - довжину луки K' між a' та b', маємо: $(b-a):\overline{a'b'}=tg\alpha$... відкіс K. Для якоїсь точки p від K, горізонтальні проекції котрих p' та K'

довільно вибрані, одержуємо коту p з рівнання $p-a=\overset{\frown}{a'p'}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, ц.т. відкісну криву лінії K можна так само градуіровати, як і просту.

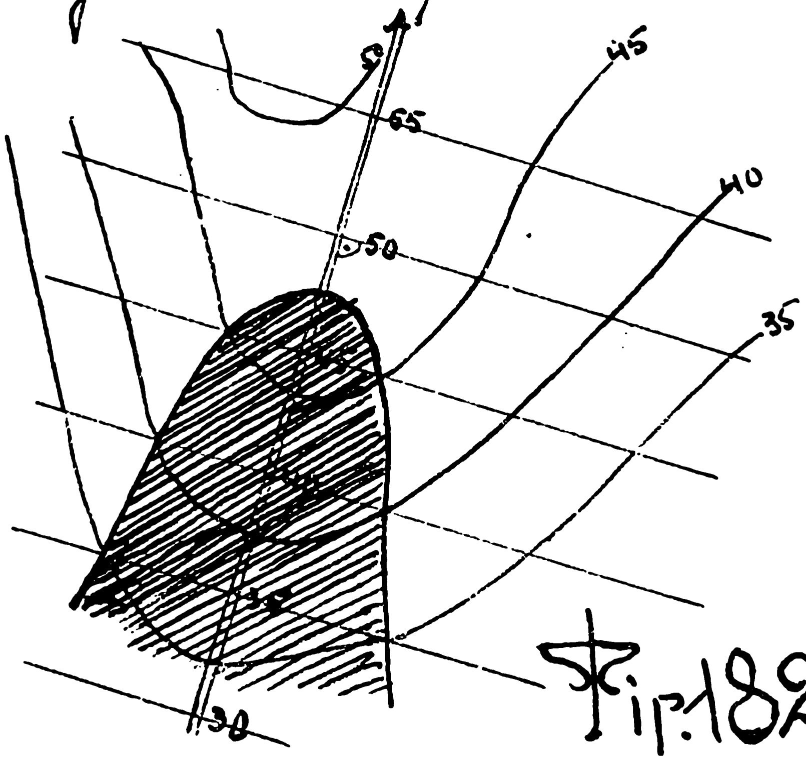
Коли треба на якійсь довільній, тільки великою кількостю точок везначеній кривій K, означити відмітку (коту) якоїсь точки p, проекція котрої p' дана, то для приблизного рішення можна зробити так: нехай (фіг. 181) дві близчих точки a та b обмежують відрізок кривої, де лежить точка p. Припустимо, що на цьому протязі нахил кривої постійний. Цей шматок кривої заміняємо шматком відкоса між a та b, горізонтальна проекція котрого складається з K' і одержуємо шляхом градуіровки коту p'. Більш просте, але менш вірне рішення одержимо, коли криву замінимо простою. Цілком вірне рішення одержимо, коли проектуючу стовпакову поверхню, що проходить через K, розгорнимо, та точки кривої після розгортки сполучимо кривою. Така розгорнута поверхня, коли вона відноситься до якоїсь

Фіг. 181.

місцевости, називається подовжним профілем. Ці подовжні профілі мають важливе значіння при будівлі залізниць, каналів, звичайних шляхів.

Перетинення площ та простих в тереном. Введення нових (допоміжних) горізонталей. (фіг. 182).

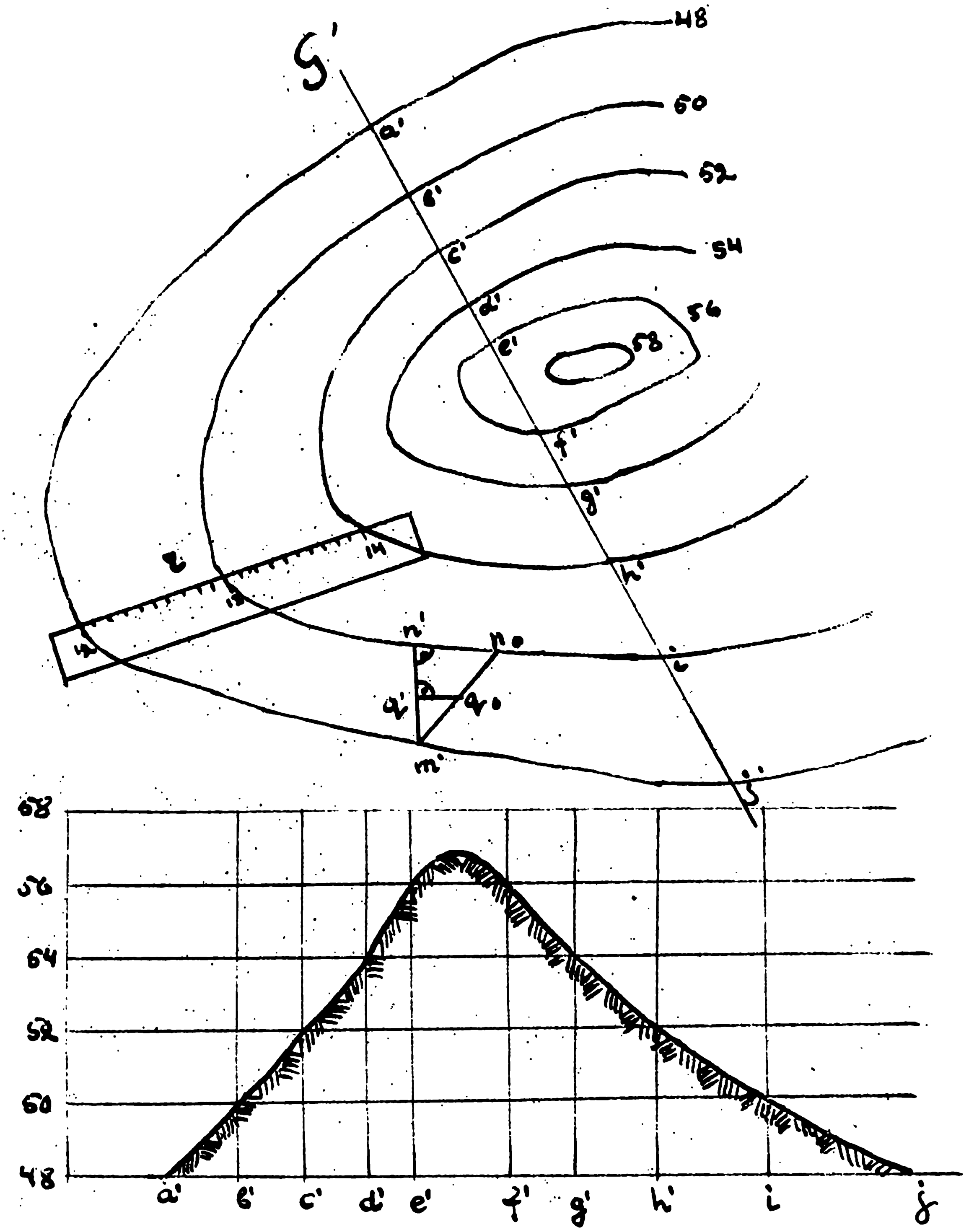
Коли терен та площа дані своїми горізонталями, то точки перетинення однозначних горізонталей належать до лінії перетинення. З прикладеного нарису бачимо, що горізонталь 50 не перетинається з площею. Дійсну фігуру можна одержати рівнобіжним повертанням до порівнюючої площі.



Фіг. 182

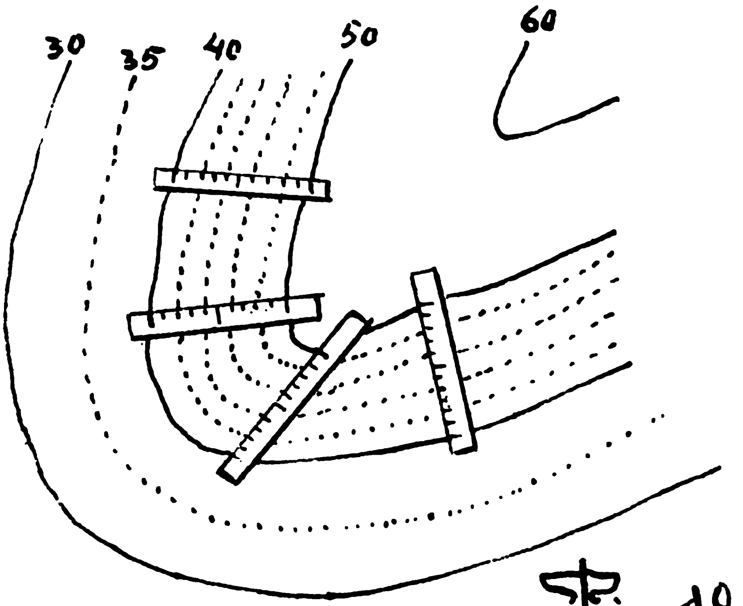
Перетинення терену з одвісною площею називаємо профілем.

На прикладеному нарису (фіг. 183) дається терен з низкою горізонталей та рівновісною площею Q, котра представляється простою. Щоб одержати профіль січення, досить скла-



Фіг.183.

сти площу g в низчу, напр. горізонт. 48. Для цього в точках перетинення g' з ріжними горізонталями ставимо рівновіси та відкладаємо відповідні висоти. Одержану низку точок сполучаємо кривою,- це й буде профілем місцевости перетятої площею Q. Цей профіль можна викреслити на окремому місці, щоб не скупчувати на одному нарису. Маштаби-горізонтальний та вертікальний- при цьому кресленню беруть ріжні, щоб було більш наочно, а саме: вертікальний побільшують в 5,10 разів. Відрізки між горізонталями майже прості й тільки вершина має різку закругленність. Профіль буде йти тим більше рівно, чим частіще взяті горізонталі. Означимо віддалення двох горізонталей через $\underline{i}$, а постійну ріжницю висот через $\underline{h}$. $\frac{h}{i}$ буде відкіс профіля в даннім місці. Треба означити коту точки p, що дається своєю горізонтальною проекцією p' на терені. Для цієї мети проводимо через p профіль, викреслюємо його та означаємо на ньому точку p. По маштабу виміряємо висоту. Прибавимо до цього ще висоту площі, відносно котрої викреслений профіль - одержуємо висоту (коту) точки p. В багатьох випадках для означення коти якоїсь точка q вистачає провести між горізонталями рівновісний профіль $m'n'$ через неї та перекласти в горізонталь 50, ц.т. зробить $n'n_0 = 2$ метр., тоді по маштабу q, q_0 (рівновісно до $m'n'$) дасть висоту q' (треба ще прибавити грунтову висоту 48). Вживають також лінійку з поділками. Її кладуть так, щоб цілі числа припадали на горізонталі. Нехай точка ч складається з 12,7 маштаба. Тоді 0,7 × 2 = 1,4 та прибавимо ще основну коту 48 і кота точки q = = 49,4. Коли дана низка горізонталей з ріжницею 10 метрів (фіг. 183а) і треба вставити нову горізонталь 35, означають, як раніще, низку точок з котою 35 та сполучають їх. Коли горізонталі недуже скручені, то накладають маштаб з поділками так, щоб цілі поділки припадали на 40 та 50. Відмічають точками поділ и та пересовують маштаб в друге місце,– роблять те ж саме. Маючи низку точок, сполучають їх сплошними лініями.



Fiг.183а

Інтерполірування має часті приклади, бо горізонталі терену побільшости не вистачають при початку будівельних робот.

Точки перетинення якоїсь градуірованої

простої C в тереном можуть бути означені як профіль, що проходить через C. Одначе взагалі легче через C провести якусь довільну площу E, напрямки слоєвих ліній котрої довільні. Точки перетинення C з цією кривою дадуть точки, що шукаємо.

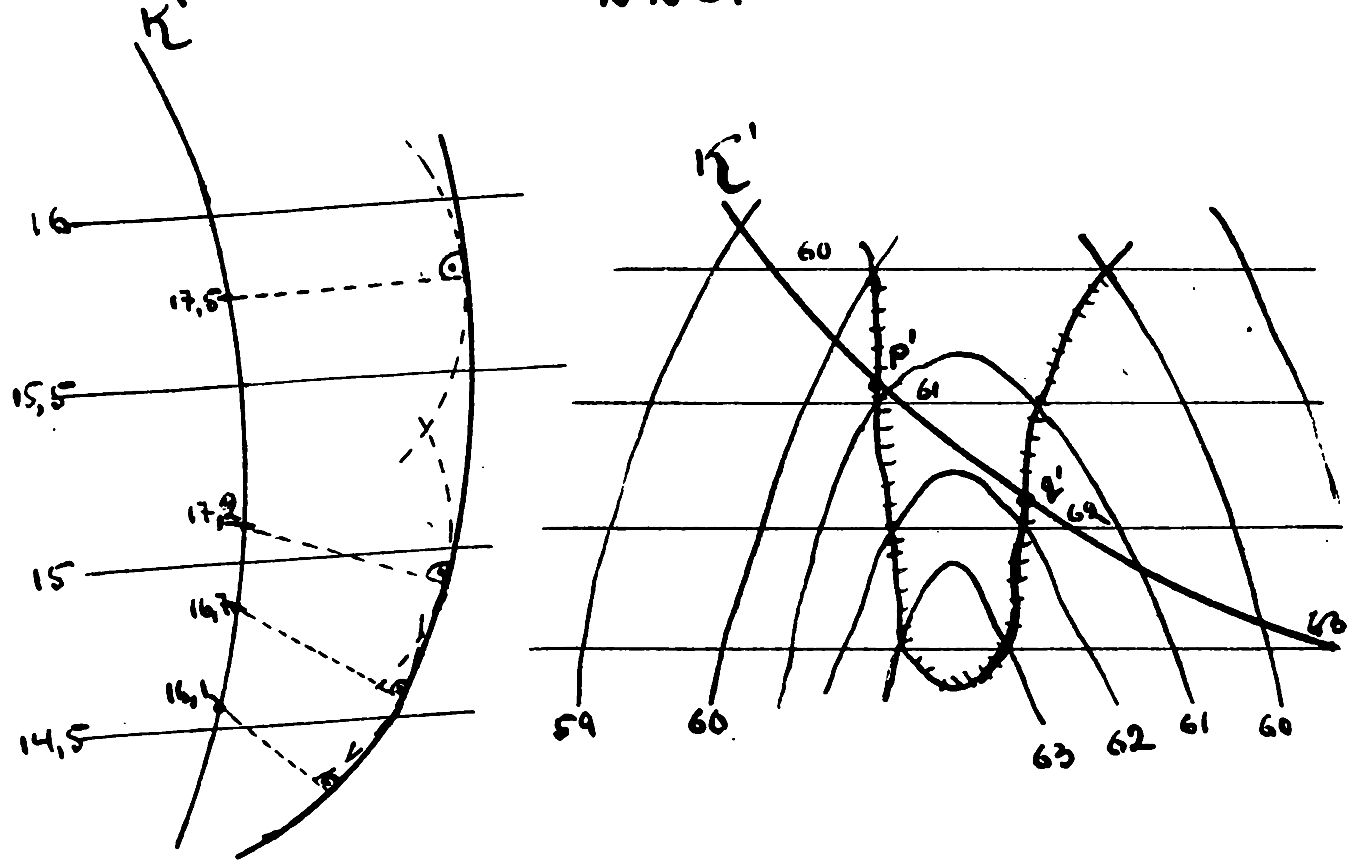
Під відкосом терену в точці $\underline{e}$ розуміють відкос (нахил) й тангенціальної площі E в цьому пункті, ц. т. нахил лінії спаду. Між всіма тангентами, що проходять через точку E терену, мається одна котра має найбільший нахил. Понеже вона низчу горізонталь перетинає так, що в горізонтальній проекції нормальна до H, (дотичної в $\underline{e}$), то нахил відкоса терену слідує тим більше, чим близче між собою горізонталі. Коли йти від одного пункта терену до другого в напрямку цієї найбіль нахильної тангенти спаду, то одержимо на терені лінію найбільшого спаду або просто лінію спаду (ligne de plus grande pente, Fallinie). По цій лінії спаду на місцевості завше стекає вода. Можна висловити положення: лінії найбільшого нахилу терену перетинають горізонталі місцевости, як в просторі, так і в проекціях під прямим кутом.

Перетинення кривих поверхней та ліній^5 з тереном. Точки перетинення поверхні терену в якоюсь кривою площею Ф одержуємо, як взагалі, ц. т. шляхом означення точок перетинення одно високих горізонталей. Коли, як це часто може трапиться, тільки невелика кількість горізонталей терену перетинається з горізонталями відкосної площі, то конструкція буде вірніща, коли взяти якусь утворюючу цієї поверхні та з допомогою профіля означити точки перетинення з тереном.

Можна сконструіровати перетинення відкосної площі, що проходить через простірну криву К, з тереном з допомогою горізонталей. Нехай К дана своєю проекцією K_1, котари де-яких своїх точок та через неї прокладено відкосну поверхню Ф (відкос 2:3) (фіг. 184). Поверхню Ф можна розглядати, як обгортуючу поверхней стіжків, що описані з точок кривої К. Викресливши головне коло стіжка — кожна обгортуюча крива однозначних кол буде головна горізонталь Ф. Нехай з точок кривої К 16,1, 16,7, 17,2, 17,5 описані стіжки по горізонталі 14. Радіуси їх будуть:

(16,1 − 14) х 1,5 = 3,15 метр.. (17,2 − 14) х 1,5 = 4,80 метр.
(16,7 − 14) х 1,5 = 4,05 метр.. (17,5 − 14) х 1,5 = 5,25 метр.

Описуємо в цих точок відповідними радіусами кола та проводимо за—



Фіг. 184.

гальну обгортуючу з котою 14. Аналогічно можемо одержати й другі слогові лінії.

Точки перетинення кривої K з тереном одержуємо, коли через K проводимо відповідно вибрану допоможну площу Q та найдемо криву перетинення S з тереном, де K та S зустрічаються, там будуть точки, що шукаємо.

Як допоможну площу слушно взяти горізонтальний стовпак, для котрого треба вибрати напрямок утворюючих.

Конструкція ліній перетинення відкосної площі прямої вулиці з тереном місцевости, користуючись горізонталями (фіг. 185).

На плані горізонталей (1:500) (ріжниця горізонталей 1 метр.) даної місцевости треба прокласти пряму вулицю шириною 8 метр. та 5% нахилу. Нехай C' буде горізонтальна проекція вісі її (середини) та кота точки d.... 63. Треба означити перетинення відкоса вулиці з тереном маючи на увазі, що відкос насипу 1:2 а вирізу 2:3.

Перш за все викреслюємо маштаб нахилу плянума вулиці. Понеже нахил C 1:20 та інтервал буде 20 метрів. Відкладаємо від точки d' по 20 метр. по обидва боки, одержуємо дві горізонталі з котами 64 та 62. Проводимо прості на віддаленні 4 метр. від вісі й одержуємо межі вулиці. Частина вулиці лежить на насипу, частина в вирізі. Для насипу треба провести відкос з нахилом 1:2. Виберемо дві точки a та b з котами 64 як верховинки відкосного стіжка. Викреслюємо його коло з котою 62. Тангенти, що проводимо з p' та q' (кота 62) до стіжка, дають горізонталь площі відкосу з котою 62. Коли означити перетинення горізонталей цієї площі з відповідними горізонталями місцевости, то одержимо криві D_1 та D_2 перетинення відкосу з тереном.

G'

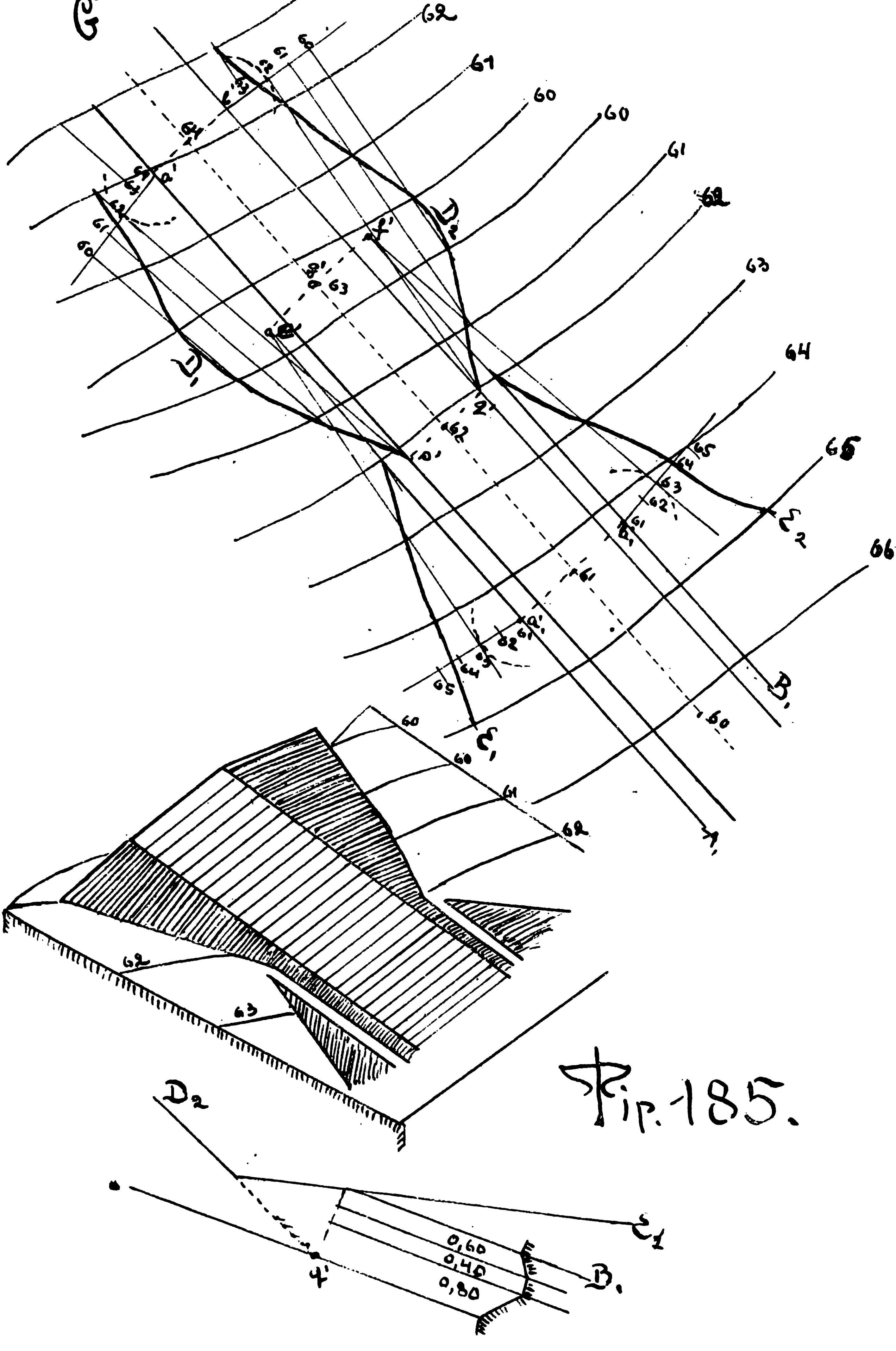

63
62
61
60
60
61
62
63
64
65
66
D2
D1
E2
E1
B1
A1
x'
a'
60
61
62
62
63
D2
E1
B1
4'
0,60
0,40
0,80

Fig. 185.

В точках p та q маємо перехід від насипу до вирізу. Звідціля вулиця входить в виріз. Щоб забезпечити вулицю від розмива водою, треба зробити кювети, котрі відводили б воду від вулиці (ширина його поверху 1,8 метр.). Щоб означити криву перетинення відкоса вирізу з тереном, вибіраємо точки a' та b' з котою 61, будуємо стіжок з котою основного кола 63, проводимо танґенти з точок e' та f' (горізонталь 63 в віддаленні 1,8 метр. від краю вулиці). Криві, що обмежують відкоси (перетинення з тереном) — $\mathcal{E}_1$ та $\mathcal{E}_2$.

Конструкція лінії перетинення відкосу прямої вулиці разом з під'їздом до неї — з тереном з допомогою поперечних профілей.

Місцевість (маштаб 1:250, ріжниця між горізонталями 1 метр) дана планом з горізонталями. Вулиця має ширину 5 метр. (на висоті 234 метр.) (фіг. 186) і вкупі з роз'їздом дана горізонтальною проекцією a'b'c'....h'. Під'їзд шириною 2,5 метр. з 5‰ під'йомом при di підходить до вулиці. Насип має відкос 2:3, виріз 4:5. Вулиця лежить на висоті 234 горізонталі. Точки перетинення межі вулиці з 234 горізонталею терену означають нульові точки (p' та q') планума. Частина вулиці ле-

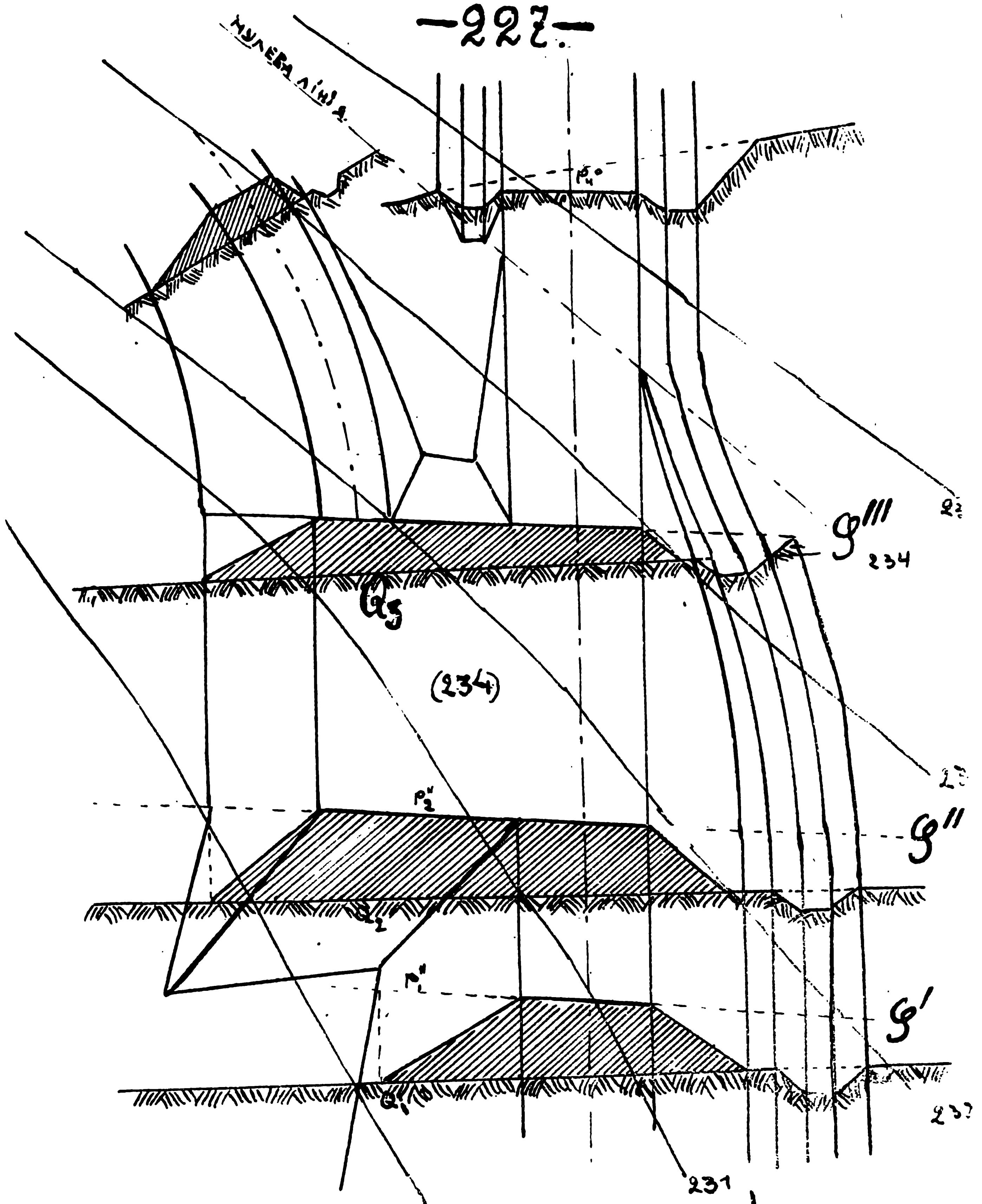


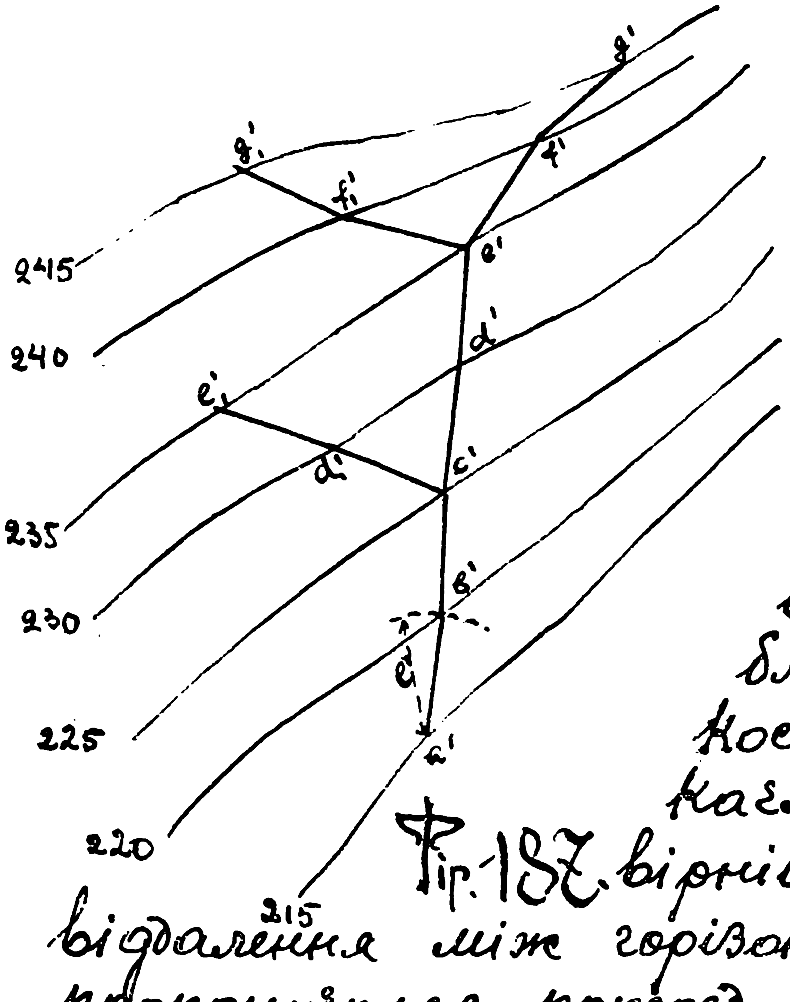
Fig. 186.

жить на насипу, частина в вирізі. Між тілом вулиці та під'їзду потрібно зробити так звану берму. Точки перетинення насипу та вирізу в тереном зробимо з допомогою поперечних профілей. Прокладаємо нормально до вісі вулиці пло—

ці профілей q_1 q_2 q_3 q_4.... Шукаємо їх перетинення Q_1 Q_2 Q_3 Q_4... з тереном і складаємо їх в площу 234 (висота, на котрій проходить вулиця). В цьому складенному положенні викреслюємо, як це показано на нарисові, профіль терену та насипу, або прорізу з кюветами та бермами, де це потрібно. Точки перетинення відкосів з тереном дають потрібні точки перетинення. Звичайно, треба звернути увагу на берми та кювети, де вони є. В технічних нарисах профіля насипу зафарбовуються червоним, прорізів — жовтим. Основу (терен) насипу — зеленоватим, відкоси прорізу — тер-де-сієною.

Креслення відкосної (нахильної) лінії на терені місцевости.

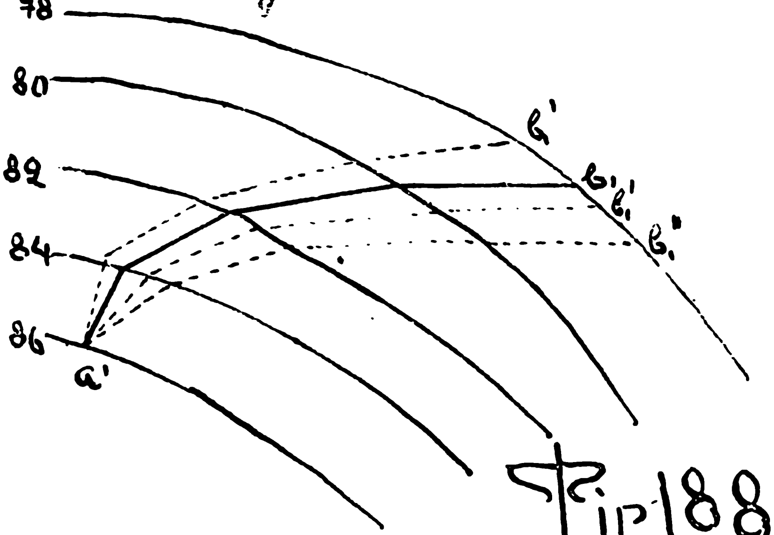
Шляхи, залізниці, канали прокладаються так, що по можливости на великих віддаленнях мають постійний нахил. Середина вулиці або шляху в такім разі утворює лінію постійного горізонтального нахилу або відкосну лінію. Інженеру часто приходиться рішати задачу, як укласти на данному терені лінію постійного нахилу. Приблизно цю задачу можна рішати так: Коли між двома сусідніми горізонтальними поверхнями (горізонталями) лежить шматок відкосної лінії з горізонтальним нахилом γ як проста, то її горізонтальна проекція має постійну (konstante) довжину $l' = hi$, де h - висота між слоями а i - відповідаючий даному під'йому відкоса інтервал. Щоб на даному нарису горізонталей (1:4000, ріжниця висот 5 метр.) в точки $\underline{a}$ (фіг. 187)(215) накреслити відкосну лінію в відкосам 1:10, беремо циркулем довжину $l' = 5 \times 10$m., ставимо одну ножку в $\underline{a}'$ та засікаємо ближню горізонталь (220) в точці $\underline{b}'$; знову ставимо ножку циркуля в точку b' та засікаємо ближню горізонталь (225) в c' і т.д. Сполучаємо лінією точки $a'b'c'$... і одержуємо приблизну проекцію відкосної лінії, що шукаємо. Вона буде тим вірнішою, чим менші віддалення між горізонталями й тому пропонується поперед всього ввести доповнюючі горізонталі, як що вони рідкі. Звичайно від кожної точки поверхні, наприкл., c' або e' можуть піти дві лінії данного нахилу. Тільки в тім випадку коли описана лука кола торкається або



Фіг. 187.

перетинає сусідню горізонталю, можливо вести лінію данного нахилу. Коли терен має дуже малий нахил, можливо, що не буде перетинення й значить, таким засобом не можна буде провести лінію данного нахилу.

Коли маємо на місцевості дві точки а та в, що дані своїми горізонтальними проекціями, буває потрібним означити довжину l, що сполучає їх відкосною лінією. Перше прибливзне грубе значіння одержимо, коли горізонтальне віддалення а'в' данних точок поділимо на різницю їх висот. Нехай а'в' буде 186 метр. l_1 = 25 метр. (фіг. 188). Конструюємо лінію відкоса, то, звичайно, прийдемо не в в а в якусь другу точку $в_1$. Міняючи l_1 (побільшуючи або поменшуючи) можна нарешті одержати напрямок відкоса, що виходить з $а_1$ та проходить до $в_1$.



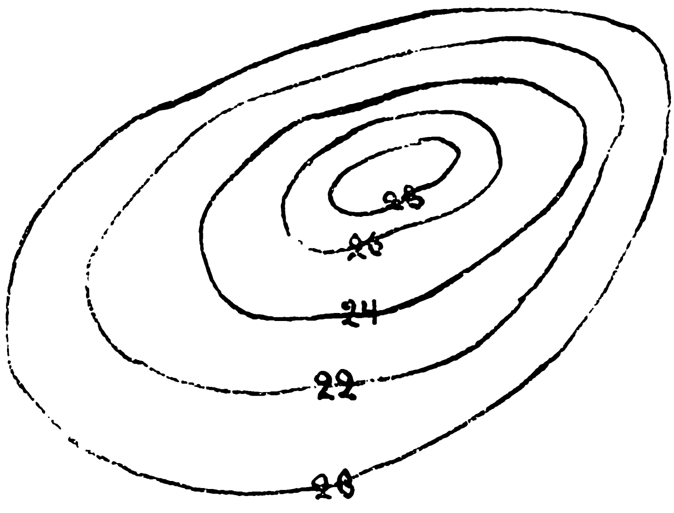
Фіг. 188.

Особливі точки на лінії терену землі; напрямок горізонталей та лінії спаду.

Понеже терен земної поверхні дають обмеженим, то відрізняють в кожній частині й внутрішню або зовнішню сторону.

Про криву, що проходить по терену, кажуть, що вона в якомусь пункті р конвексна або конкавна в залежности від того, як лежить тангента цієї точки поблизу, всередині або зовні данної частини терену. Коли тангента з одного боку всередині а з другого – зовні, то тангента проведена в точці повороту кривої. Ці положення вірні для горізонталей та ліній спаду. Лінія спаду в якійсь точці р вгнута або вигнута в залежности від того, чи горізонтальний нахил кривої побільшується чи поменшується. Коли (фіг. 189) маємо низку замкнутих горізонталей, що підіймаються до середини нарису, то найвища частина наз. верховиною (Gipfelpunkt, Sommet), колиж до середини місцевість понижається, то найнизча частина наз. котловиною (Muldenpunkt, fond).

В верхушки вода стіка по так званім лініям найбільшого скату. Ці лінії нарешті входять в долини. Між двома долинами по обох боках кряжу маємться так зване сідло.



Фіг. 189.

Відділ V.

Конструкція тіней

Вступ. Тіні власні та падаючі.

Накреслений, по правилах Нарисної Геометрії образ тіла ще сам по собі взагалі не дає вірного представлення прикмет його поверхні. Щоб допомогти цьому в техниці звичайно вводять вплив світа та тіні. Образ, вид меж тіні дає можливість зробити висновок про форму оттіненої поверхні та й про саму частину, що відкидає тінь. Для швидкого та легкого находження грані між світлом та тінню беремо на увагу тільки найсильніще джерело світла — сонце. Лучі його, дякуючи великій віддаленності, приймаються як рівнобіжні. В практиці встановився цілком постійний напрямок для наведення тіней в техничному кресленню й саме: рівнобіжно діоганалі куба, котрий знаходиться в звичайному положенню відносно горізонтальної площі — так щь світ пада через ліве плече людини на предмет. Проекції луча світла L роблять в горізонтальній та вертікальній площі кут 45° з горізонтальною проекцією L' (фіг.190) зліва спереду направо вниз; L'' зліва зверху направо вниз; так само й бокова проекція

L''' склада такі самі кути в площами проекцій. Нахил луча світла до кожної зі своїх площ проекцій визначається: $tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$ $\varphi \approx 35° 16'$. Такий вибір напрямку луча світла зроблено на тій підставі, що з допомогою роздільного трикутника лучі світла можуть бути швидко та вірно проведені, так що, вживаючи їх, одержуємо ясні картини в досить простими конструкціями. Коли якийсь луч світла

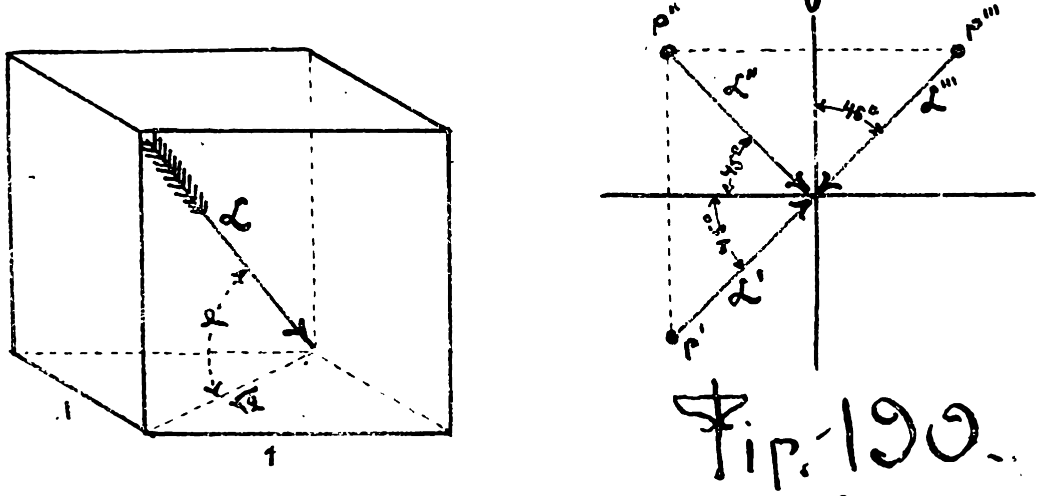


Fig. 190.

L пада на точку p, то він нею затримується й ті точки, що лежать за точкою p на продовженні луча L не будуть освітлені. Точка P_s, в котрій луч зустрічає площу, що стоїть йому поперек дороги, не одержує світла — знаходиться в тіні й таким чином є тінь, котру точка p кида на площу.

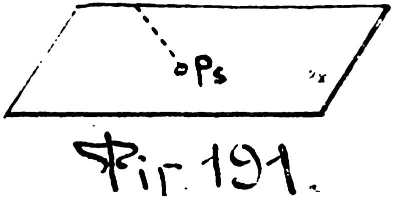
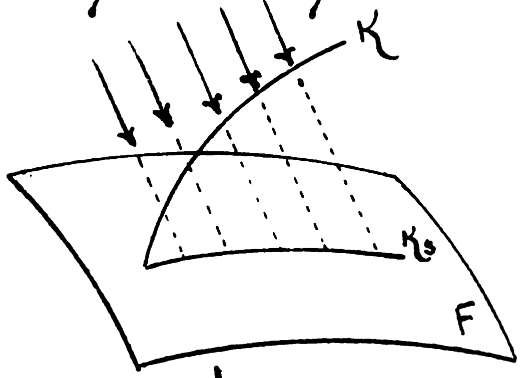


Fig. 191.

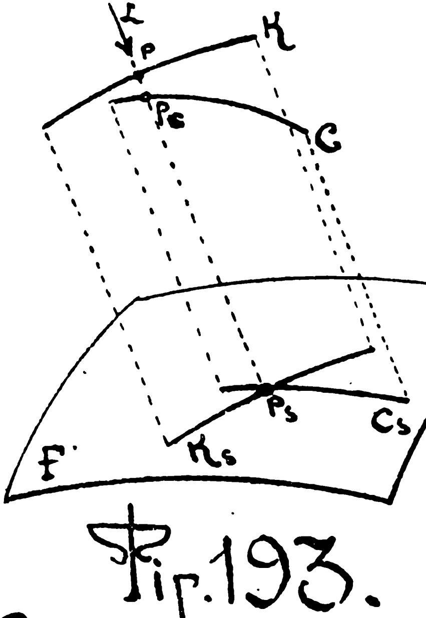
Тінь точки є перетинення її світового луча з поверхнею, або рівнобіжна проекція точки на поверхню від напрямка луча, як напрямка проекцій. Тінь K_s, котру кида лінія K на поверхню, одержуємо сполученням окремих точок. Через K та напрямок світла L визначається світляний стовпак K, котрий перетинає поверхню по тіневій простій K_s (фіг. 192).



Фіг.-192-

Зустрічає K поверхню в якомусь освітленному пункті, то звідціля й починається тінь. Коли лінія, що кидає тінь, є проста, то нею визначається площа світла, по котрій перетинається площа, що дає тіневу лінію.

Світляний стовпак, що належить двом лініям K та C (фіг. 193) має одну загальну утворюючу, котра проходить через точку перетинення P_s слідів K_s та C_s з якоюсь поверхнею F. Ця утворююча перетинає криві K в точці p та C в точці p_c. Як її розглядати, як



Фіг.193.

луч світла, то побачимо, що він затримується точкою p і до лінії e вже не доходить, ц.т. точка p_e буде тінню від точки p кривої K. Таким чином тінь однієї лінії на другу може бути виражена так: коли одпадається тінь лінії на якусь площу, то луч, котрий мусить пройти через перетинення тіней, не доходить до кривої, що лежить низче.

Тінь дотичної до кривої мусить бути тангентою до тіні кривої. Всяке тіло освітлене на тій своїй частині, котра повернута до джерела світла, протилежна частина знаходиться в тіні. Світла частина тіла безпосередньо зустрічається лучами світла, до темних лучі могли б дійти, як би вони могли пройти через тіло. Такі тіні називаються „власними", а лінія поділу між світлом та тінню наз. лінією межі власної тіні. У тіл (ф.194) що обмежені площами, власна межа тіні складається один з другим слідуючими кантами, вздовж котрих світлі та темні бокові поверхні сходяться — світ вздовж них сковзит. Вони складають простірний многокутник, котрий називається полігоном очертання тіла. У тіл з кривими поверхнями границею тіні є дотична крива К стовпака, що описан рівнобіжно в напрямком світа. На поверхні стовпака або стіжка границя поділу знаходиться на тій утворюючій, по котрій дотична площа рівнобіжна до напрямку світла — торкається до неї. Так само при цих складаннях можна говорити про полігонні обриси поскільки границя власної тіні складається в обрисів та тих частин граневих ліній основної поверхні, вздовж котрої граничать світлі та темні частини. В цьому випадку полігон обрису помішан. Полігон обрису та лінія поділу — не що инше, як периметр образу, коли напрямок світла брать за напрямок рівнобіжних проекцій. Коли за тілом знаходиться стіна, то на неї проявляється тінь від тіла, бо воно

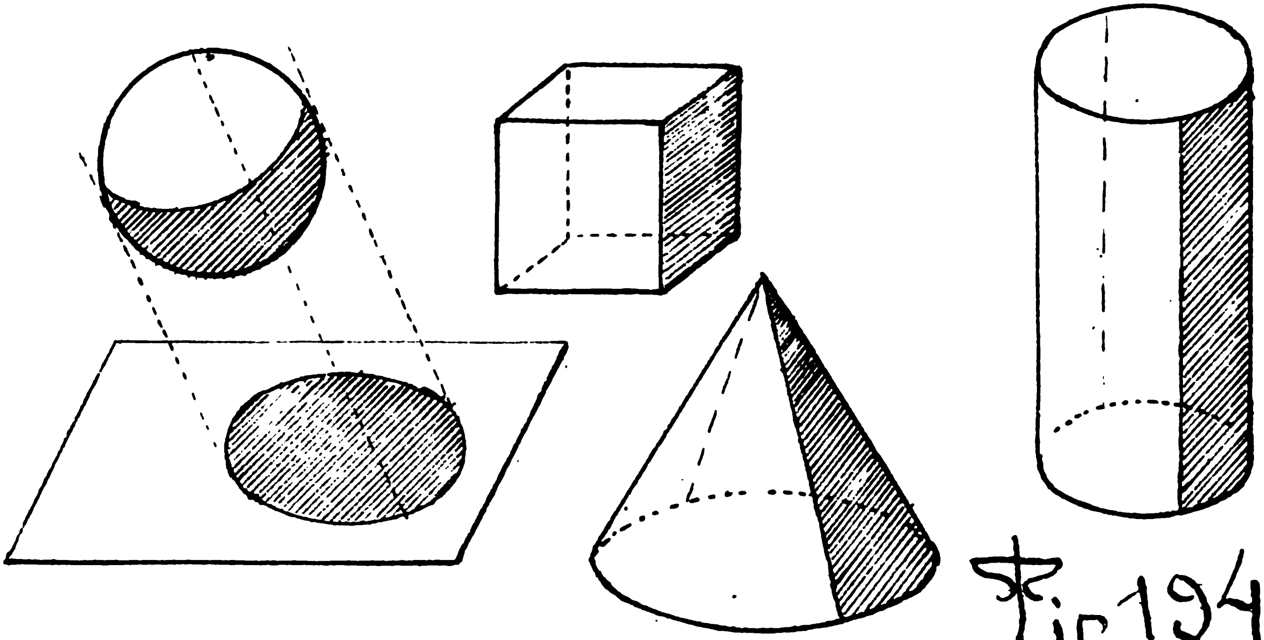


Fig. 194.

затримує зі стовпакового (або призматичного) світляного пучка частину лучів, перешкоджуючи їм дійти до стіни.

Такий рід тіней, котрі утворюються від того, що на шляху ходу лучів знаходиться тіло, котре затримує проміння, називаються падаючими тінями й та лінія, що обмежує падаючу тінь, наз. межею падаючої тіні. Вона є січення кидаючого тінь тіла (стовпакового або призматичного жлутка) з площею, на котру тінь пада, вона є проекція власної тіневої межі від світляних напрямків на площу.

Таким чином в той час, коли тіні на тілі бувають на частинах протилежних до світла — на площі тінь буває именно в частинах, котрі звернуті до світла.

Понеже є єдине джерело світла, то звідсіля виника, що там, де є власна тінь, не може бути падаючої тіні, так що границя падаючої тіні, коли вона доходить до границі власної тіні — тут кінчається.

Освітляна частина стіни, на котрій проявляються падаючі тіні, відбивають частину падаючого на неї світла назад (рефлекс). Відкинуті назад про-тіні падають на частину тіла, що знаходяться у власній тіні, дякуючи тому вона слабо освітлюється! Частина тіла, що знаходиться в тіні, не може рефлектувати знову лучі -, так що частина площі, на котру пада тінь, не може поменшити її. З цього можна зробити висновок, що власна тінь не буде такою темною, як тінь падаюча. В залежности від величини кута, під котрим світло (світові лучі) падають на площу, вона має більшу або меншу степень освітлення. Але при простих засобах відтінення, що вживають при технічному кресленню, на це не звертають уваги. Освітлені частини поверхні тіла розглядають, як однаково світлі, а частини поверхні в тіні, незалежно чи то власна, чи падаюча, однаково темними.

Конструкція тіней є власно вживання Нарисної Геометрії до задач перетинення та торкання простих та поверхней.

Положення про здаючіся обриси та проекції плоских кривих мають тільки значення припущення.

Треба твердо встановити: тінь кривої, що знаходиться на площі, котра перетинає границю власної тіні площі, торкається падаючої тіні площі в точці перетинення кривої та границі власної тіні.

На підставі цього можна границю падаючої тіні означити, як обгортаючу криву. Коли границя падаючої тіні на площі доходить до границі власної тіні, то перша (границя падаючої тіні) в точці зустрічі рівнобіжна до напрямку світла.

Тінь, що падає від точки на горізонтальну площу.

Луч світла L точки p мусить перетинатися з площею проекцій. Та площа, що перша зустрінеться, приймає тінь. Як горізонтальне віддалення менше вертікального, то при II вживанню напрямків світла, тінь проявиться на P_1; як навпаки, p близче до вертікальної площі, то вона проявиться на вертікальн. площі (P_2) Коли p має рівне віддалення, то тінь падає на горізонтальну площу (фіг. 195)

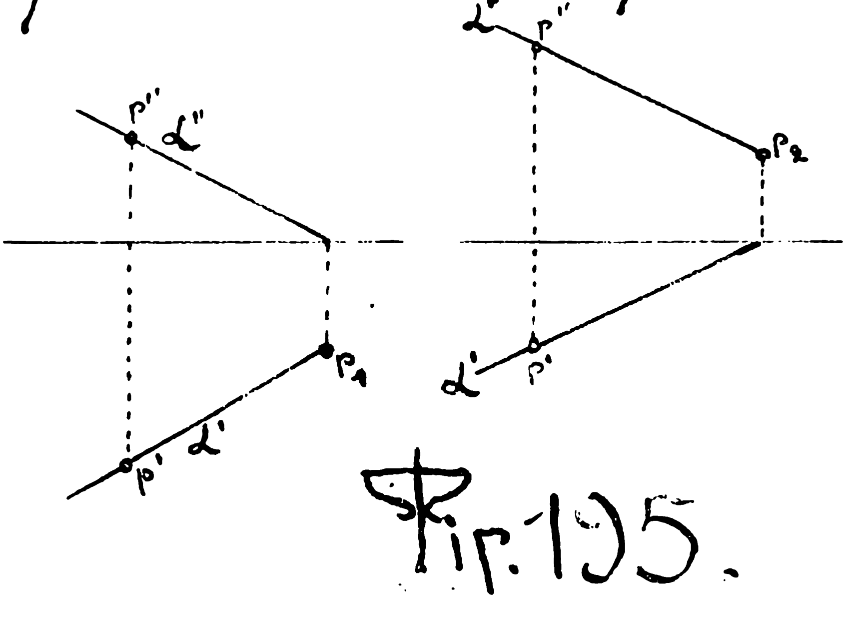
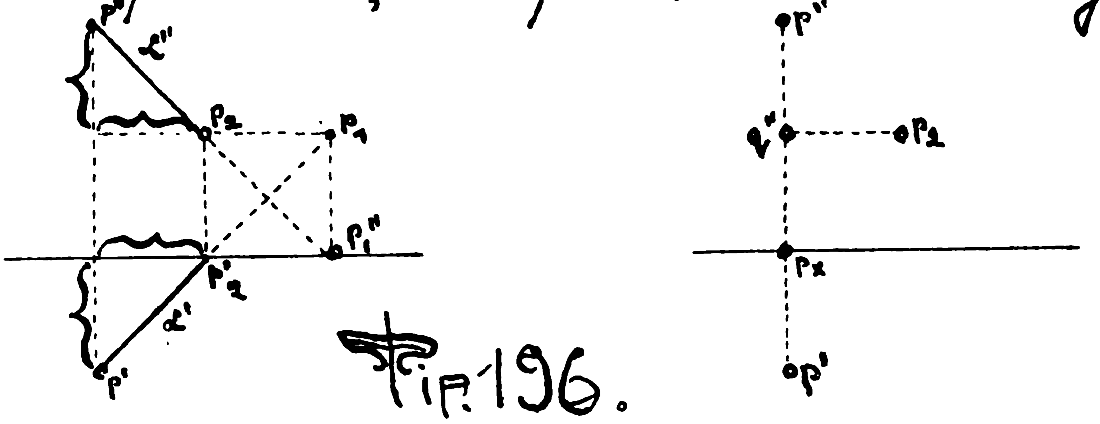


Fig. 195.

Тінь точки на горізонтальну площу проекцій P_1. Проводимо L' через p' та L'' через p'' (кожну під кутом 45° до X). L'' перетинає вісь X; ставимо в точці пересічення рівновіс, та означаємо на L' точку тіні p'.

Тінь точки на вертікальну площу проекцій. В точки січення L' з віссю X ставимо рівновіс, котрий на L'' означає точку тіні p_2.

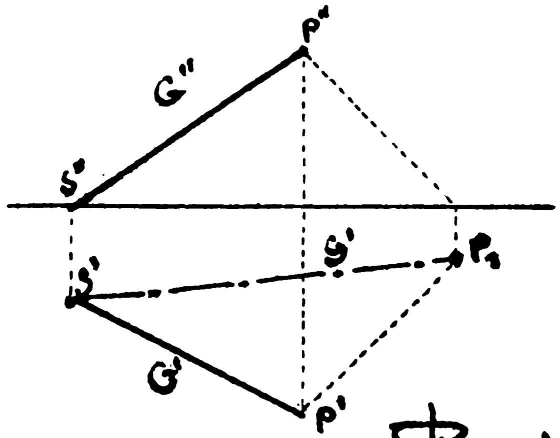


Фіг.196.

На нарису (фіг. 196) дані обидві тіневі точки p_1 та p_2, причім точка p_1 — як тільки уявляєма. На відрізку p_2' p_1'' стоять два конгруентних рівнобоких прямокутних трикутника. Точки p_2 та p_1 лежать на рівнобіжній до вісі X. Як видно з накресленого, напрямки L' та L'' однакові. Це дає можливість, маючи проекції точок p' та p'', визначити тінь на вертікальну площу без викреслення проекцій світляного луча. Наносимо на основному рівновісі $p'p''$ від p'' — $p'p_x$, одержуємо q''; проводимо через q'' горізонтальну лінію та наносимо від неї праворуч однакову довжину $p_1 p_x$ – одержуємо точку тіні p_2.

Падаюча тінь від лінії на площі проекцій.

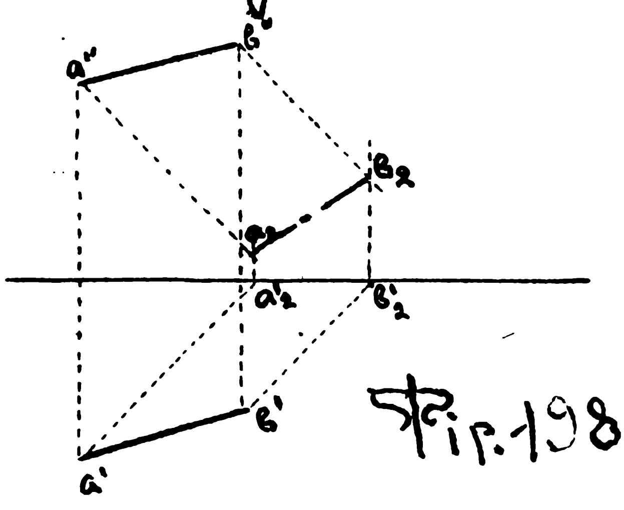
Означити тінь лінії G, що торкається до P_1



Фіг. 197.

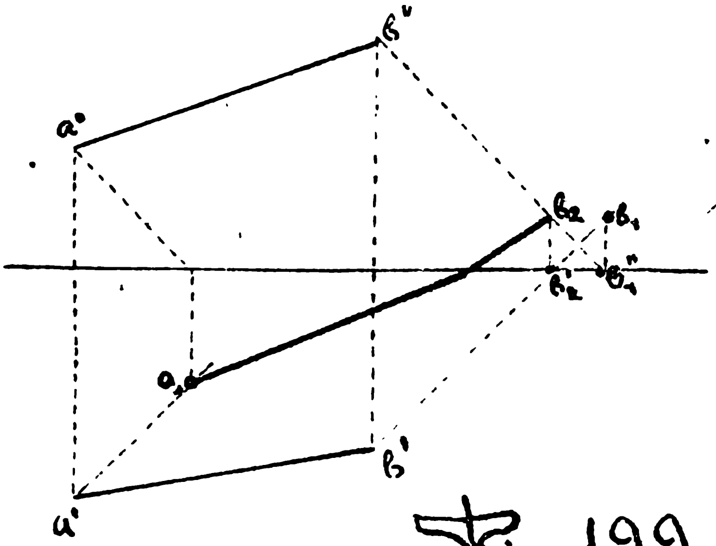
Тінь G' (фіг. 197) на горізонтальну площу мусить починатися від горізонтального сліда S і звідсіля йти до кінця р.

Тінь від довжини ав (фіг. 198) є проста, що сполучає тіні конечних точок даного відрізка.



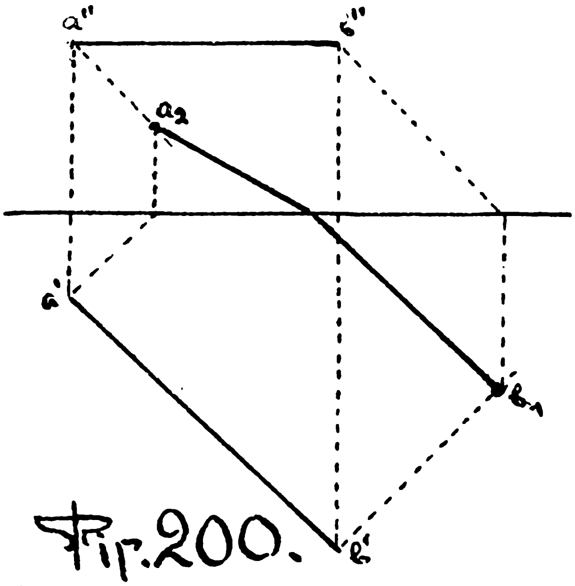
Фіг. 198.

На нарисі (ф. 199) тінь від точки a пада на горізонт. площу (P_1), а від точки в на вертікальну площу (P_2). Таким чином тінь росположиться на двох площах.



Фіг. 199.

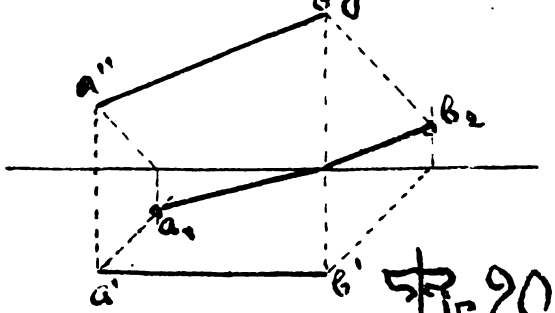
Коли відрізок горізонтальний, то (фіг. 200) проекція тіні на горізонтальній площі буде рівнобіжна до горізонтальної проекції. Проводимо через в' рівнобіжну до в'а' аж до перетинення з віссю та сполучаємо цю точку з точкою a_2.



Фіг.200.

Тінь відрізка рівнобіжного до вертікальної площі (фіг. 201)

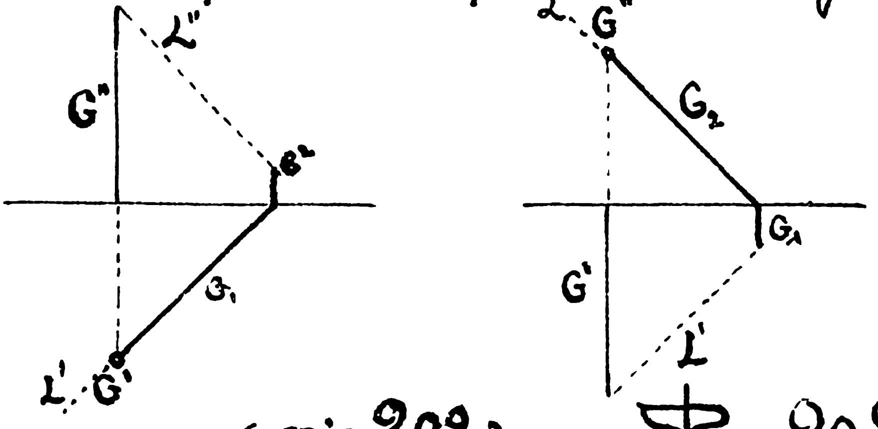
Конструкція аналогічна попередньому випадку.



Фіг.201.

Тінь простої, що рівнобіжна до вісі x, буде рівнобіжна до обох площ.

Коли проста рівновісна до однієї з площ проекцій, то тінь конструюється, як показано на нарису (фіг.202)



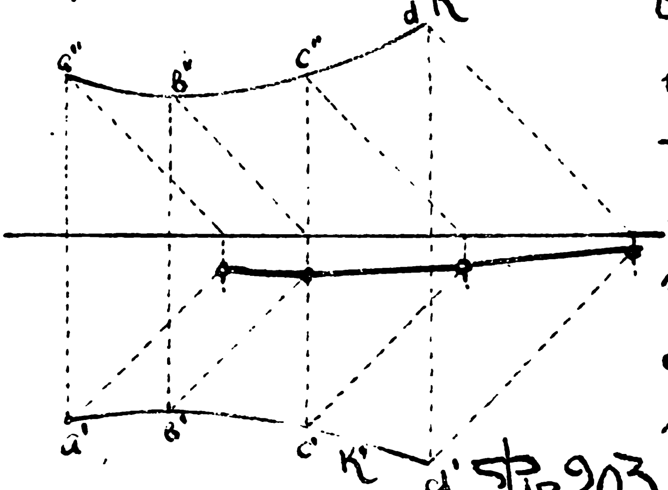
Фіг.202.

Тінь кривої на площу (фіг. 203).

Вона означається, коли буде означена ціла низка тіней окремих точок, які сполучуються.

Тіні плоских фігур.

Прямолінійно обмежену фігуру означає світова призма, криволінійно обмежену — світовий стовпак; перетинення тако жмутка з приймаючою тінь площею є падаюча від фігури тінь.



Фіг.203.

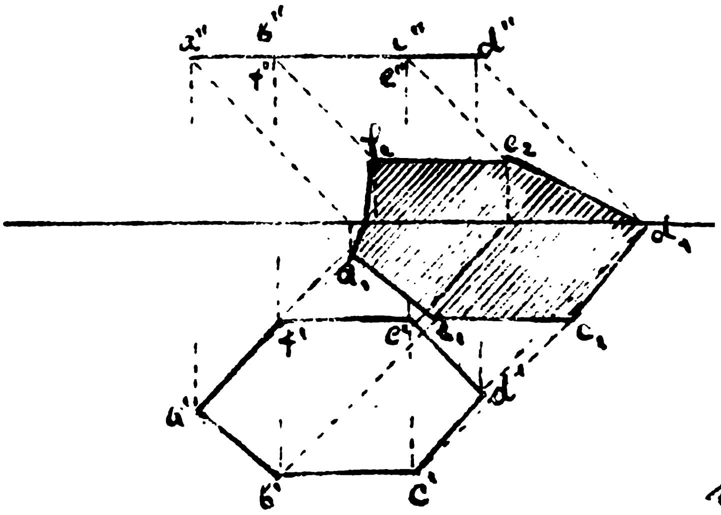
Тінь від многокутника обмежується тінню його боків. Щоб для якоїсь фігури, що знаходиться в якійсь площі означити чи затінені чи світлі боки на її періметрі беремо якусь точку, проведемо її світляний луч і подивимось, як він лежить відносно площі. Як він знаходиться нивче фігури або цілком по-за фігурою.

Як фігура не перешкоджає його ходу — в відповідному місці площа освітлена.

Коли площа фігури рівновісна до одної з площ проекцій, то на простолінійному обрису пізнаємо зразу, чи на другому світлі чи темні боки видні.

Означити тінь правильного шестикутника, що лежить в горізон-

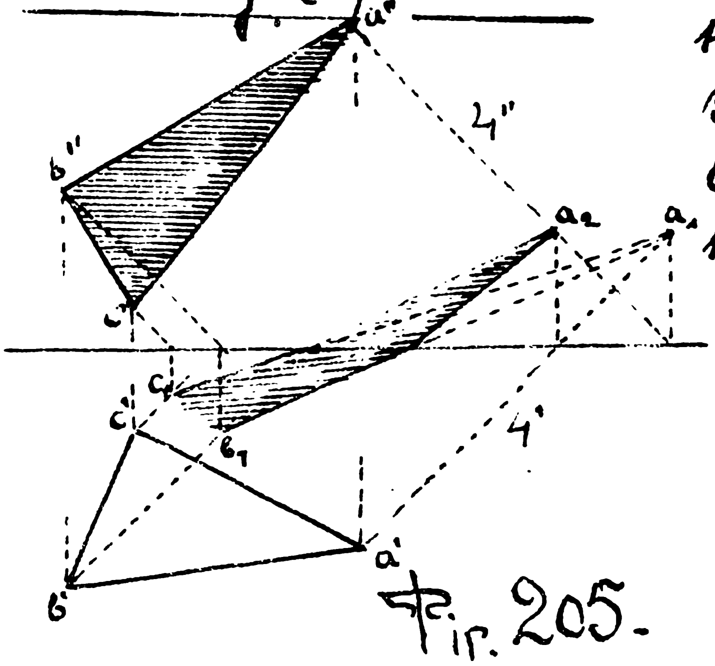
тальній площі, на площі проекцій. (фіг. 204). Означаючи звичайним засобом тіні від окремих кутів, треба взяти на увагу, що a_1b_1 рівнобіжна до $a'b'$, $b'c'$ рівноб. до b_1c_1. Малюнок повної тіні показує перехід її з однієї площі на другу.



Фіг. 204.

Тінь трикутника на горізонтальну площу (фіг. 205).

Рівновіс через перетинення лучів світла з b'… $a'c'$ показує в вертікальній площі проекцій, що ac лежить вище, ніж луч світла, що проходить через b, ц. т. в горізонтальній площі бачимо освітлену сторону. Рівновіс через січення луча світла b'' з $a''c''$ дає можливість в горізонтальній площі бачить, що промінь з b лежить перед ac, так що в вертікальній площі до обсерватора повернута тіне-

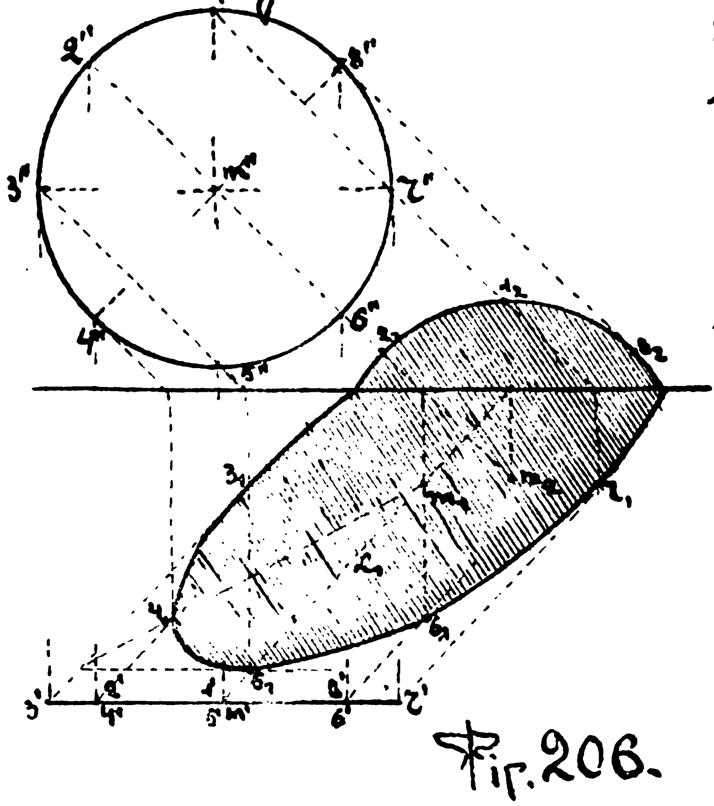


Фіг. 205.

ва сторона. Падаюча тінь на горізонтальну площу означається тінями, падаючими від кутів.

Означити тінь кола на горізонтальній площі, коли воно лежить в площі, що рівнобіжна до вертікальної (фіг. 206)

Поверхня кола в вертікальній площі буде освітлена. Світляний стовпак, що означається цим колом, вертікальною площею P_2 перетинається по конгруентному колу, котрого центр m_2 буде центром тіні $\underline{m}$ на площу P_2. Тільки лука, котра лежить над горізонтальною площею, цього тіневого кола на площі P_2 може бути взята на увагу. Тінь на горізонтальну площу обмежується еліпсом. Цілком досить, коли означимо тільки деякі окремі точки — прямовісного та горізонтального диаметра.



Фіг. 206.

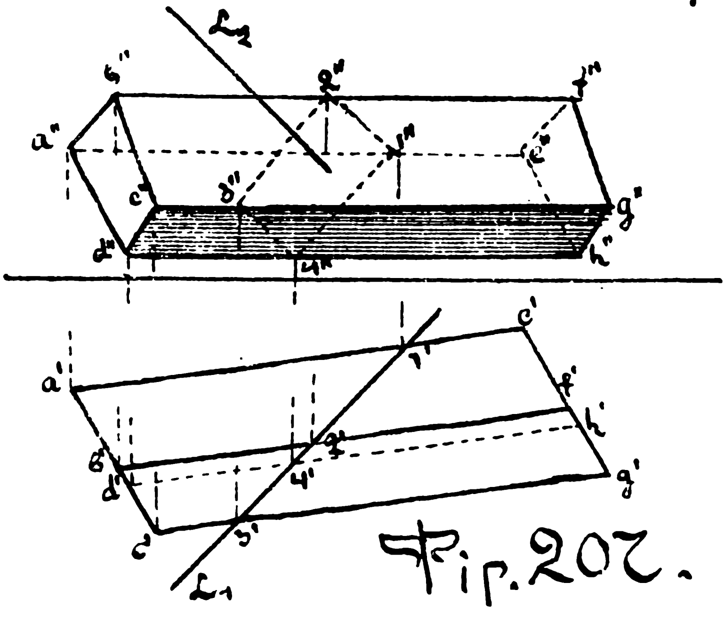
Тінь горізонтального диаметра 37 лежить на горізонталі, що проведена через m_1 і $3_1 7_1 = 37 = 3'7'$. Дотична в $\underline{3}$ та $\underline{7}$ рівновісна до P_1, її тінь проходить рівнобіжно до L', так що 3'3 та 7'7' грання тіні в 3, та 7, буде торкатися. Точка 5 має горізонтальну дотичну, ц. т. 5,.

Означення полігону тіні на многограннику.

Фігура січення, яку творить світляна площа (рівнобіжна до напрямку луча світла L) наз. світляним січенням. Ті боки світляного січення, на котрі світло падає зовні, очевидно будуть освітлені. Ті кути світляного січення, до котрих світло торкається, знаходяться на кантах торкання (межа між світляною та тіневою частиною) Звичайно вживають світляну площу як проектуючу.

Означення розділу світла від тіні.

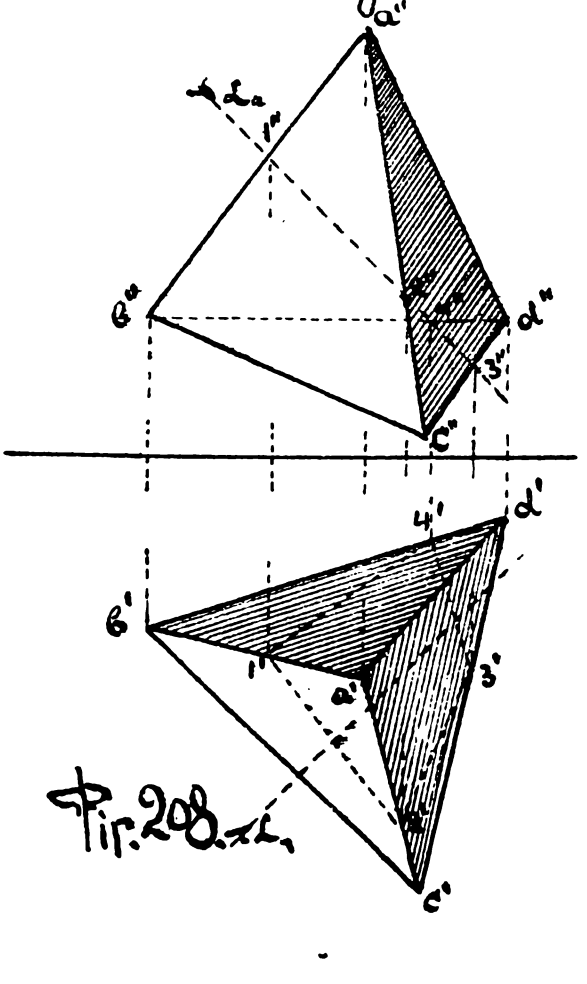
Призма з горізонтальними кантами. Основна площа abcd (фіг. 207), що лежить в горізонтально проектуючій площі — освітлена; площа efgh — в тіні.



Фіг. 207.

Перетнимо призму горізонтально проектуючою площею, що проходить через якийсь світляний луч. Точки перетинення 1'2'3'4' від L' з боковими кантали переносимо на вертікальну площу, одержуємо 1"2"3"4". Сторони 1"2" та 2"3" будуть рівнобіжні до луча L" (бокові поверхні aefв та всдf. будуть освітлені) Світ торкається кута 1" та 3" так що канти ae та cд, до котрих ці точки належать, будуть кантами торкання (Streifkanten кантом поділу між світлом та тінню). Простірний многокутник adcдfea є полігон обрису; падаюча від нього тінь буде призма.

Означення лінії поділу світла та тіні на тетраедрі. (фіг. 208). Вживаємо вертікально проектуючої площі. L" означає точки 1"2"3"4". Переносимо їх на горізонтальну площу, одержуємо точки січення 1'2'3'4'. Тільки на бік 2'1' безпосередньо падає світ, так що тільки площа авс освітлена. Значить цей трикутник буде полігоном обрису.



Фіг.208.-L.

При складних фігурах може трапиться, що однієї світляної проектуючої площі мало — приходиться вживати де-скількох.

Тінь, що падає від многогранника на площі проекцій.

Тінь, що падає від многогранника є властиво тінь від його лінії поділу світла від тіні.

Часто легче сконструювати тінь, що падає й після по ній накреслити лінію поділу. Коли означена падаюча тінь від кантів многогранника, та після треба брати на увагу тільки ті канти, котрих тінь обмежує падаючу тінь многогранника.

Тінь, що падає від тетраедра.

Перш за все означаєтьса на горізонтальній площі тіні a'b'c'd' усіх кутів (фіг. 209) незалежно від того, чи вони будуть існувати чи ні. Обрис (Umris) a'b'c'd' тіні складаєтьса з тіней кантів ab cd bc da, котрі дають цілий полігон. Поверхні abc та acd, котрі лежать перед цим полігоном — будуть освітлені. Поза горізонтальним січенням обмежена частина (чотирьохкутником a,b,c,d,) є тінь на P_1 (гор.пл.)

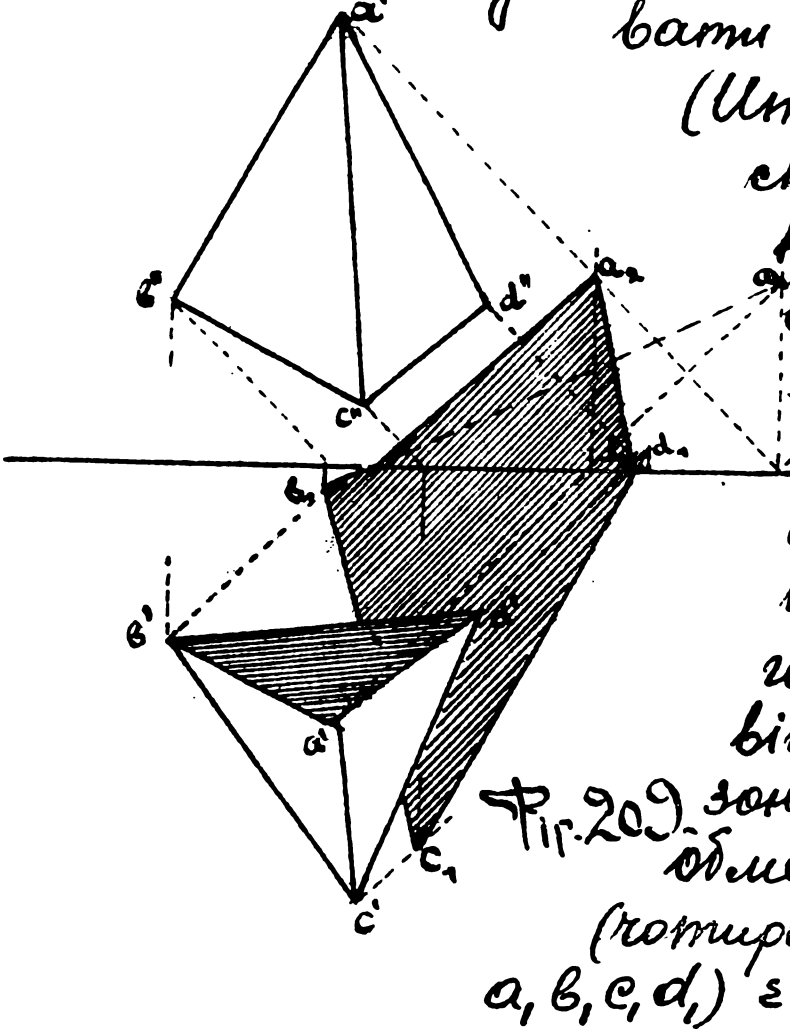
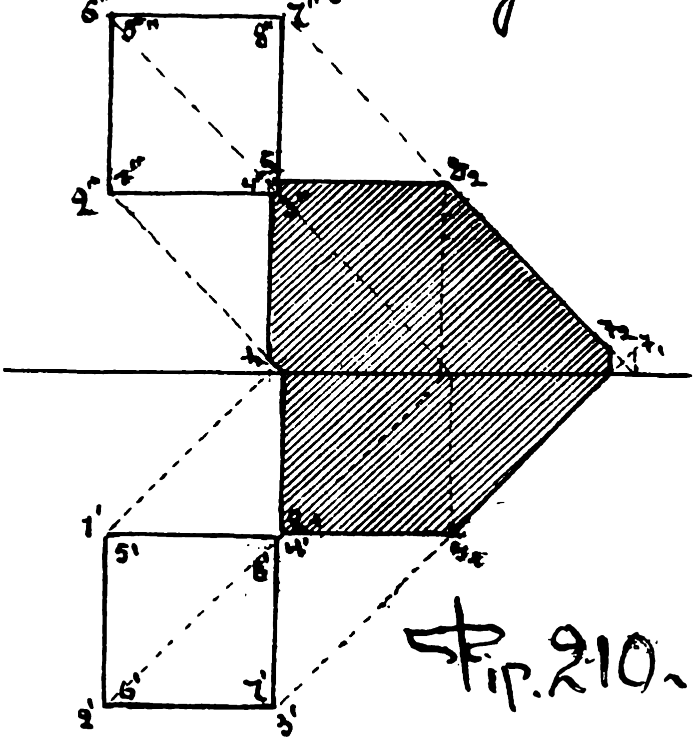


Fig. 209.

вона піднімається (в залежности від положення самого тетраедра) на P_2 до точок a_2 та d_2.

Тінь, що падає від куба (фіг. 210).

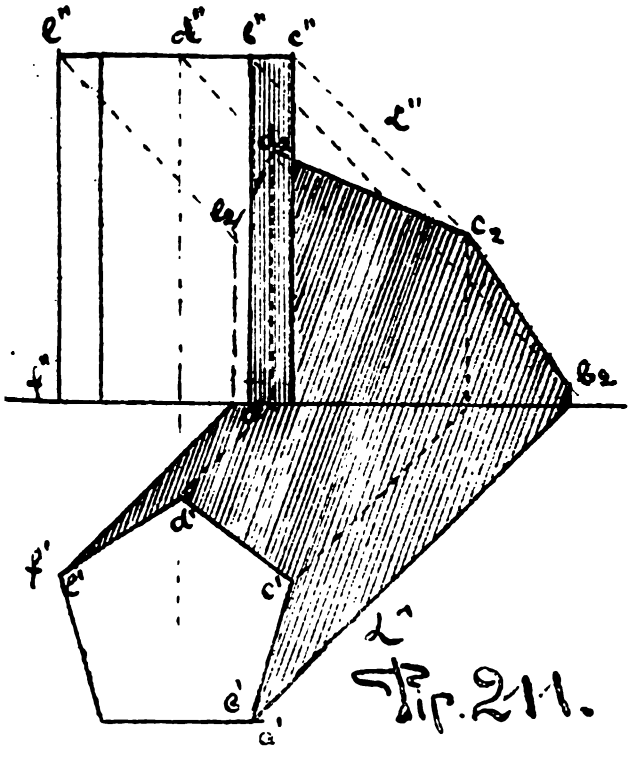


Фіг. 210.

По горізонтальній проекції видно, що бокова поверхня 1265 та фронтова-2376 будуть освітлені. Освітлена буде так само й верхня частина 5678. Полігон торкання буде 1237851, тінь котрого, звичайним порядком і треба означити.

Тінь прямої призми, що стоїть на горізонтальній площі.

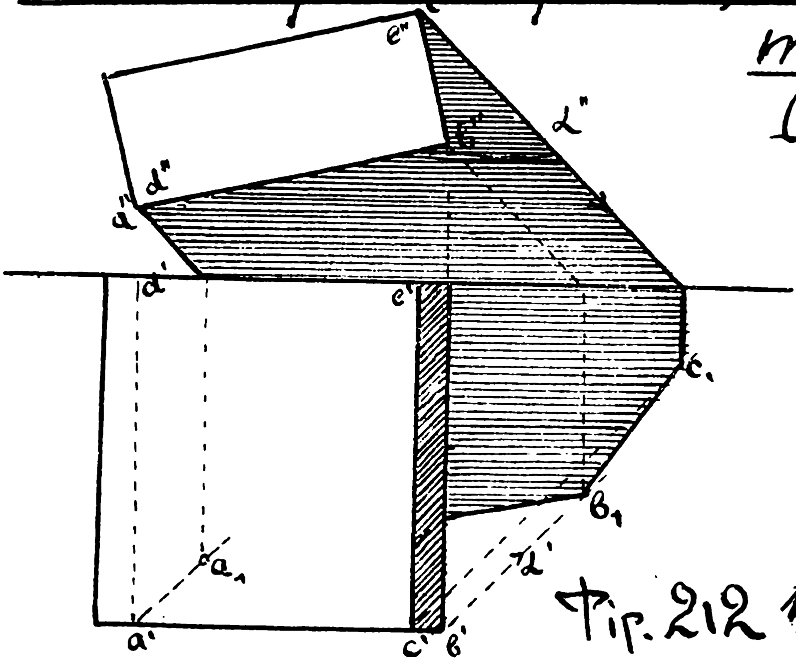
Горізонтальний слід призми (фіг. 211) є одночасно горізонтальний слід всіх пересічень світляних лучів, котрі проходять через вертікально проектуючу світляну площу. Ті світляні лучі, що в ній лежать та торкаються до <u>a</u> та <u>f</u> означають



Фіг. 211.

прямовісні канти торкання ab та fe й мають падаючу тінь.

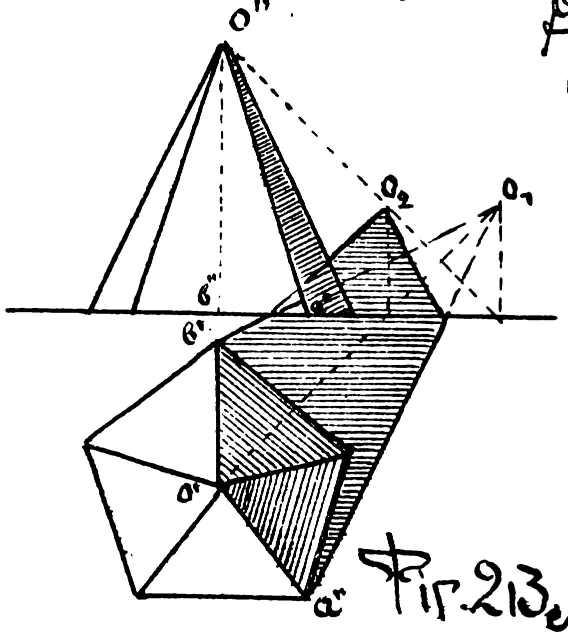
Тінь прямої призми, що стоїть на вертікальній площі (фіг. 212).



Рівнобіжні (в вертікальній площі до проекції луча дають канти торкання ad та ee.

Фіг. 212

Тінь від піраміди, що стоїть на горізонтальній площі.

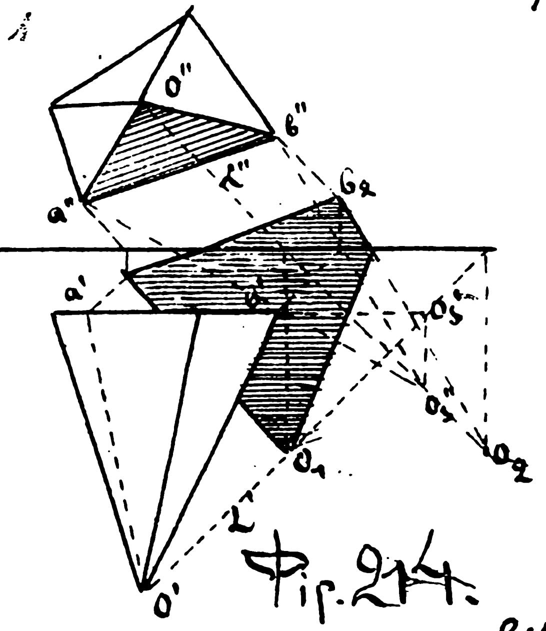


(фіг. 213). Тінь, що падає вздовж якогось канта починається на P1 слідом цього канта та поширюється в напрямку тіні від вершини. Таким чином одержуємо цю лінію торкання з її тінню, коли з O1 проведемо лучі, котрі обмежать основу піраміди.

Фіг. 213

Падаюча тінь від піраміди, основа котрої рівнобіжна до верті-

кальної площі (фіг. 214). Канти торкання можливо одержати або як в попередньому випадкові, або означивши точку перетинення луча, що проходить через вершину піраміди, з площею основи в O'_S та з точки O''_S провівши до вертікальної проекції основи піраміди дотичні лучі.

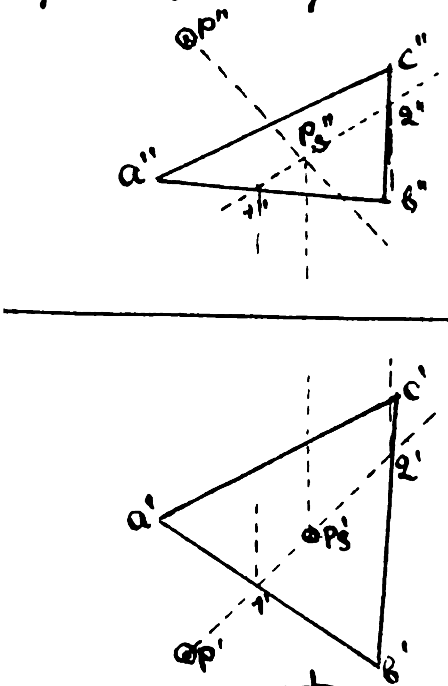


Фіг. 214.

Тінь від точки на площу.

Треба означити тінь від точки p на площу трикутника авс. (фіг. 215).

Через світляний луч L, що проходить через p, проведемо горізонтально проектуючу площу; точки перетинення її з горізонтальною проекцією 1' та 2' переносимо на вертікальну проекцію. Точка перетинення вертікальної проекції луча, що проходить через вертікальну проекцію точки p'' з простою 1''2'' дає точку тіні від точки p на площу авс.



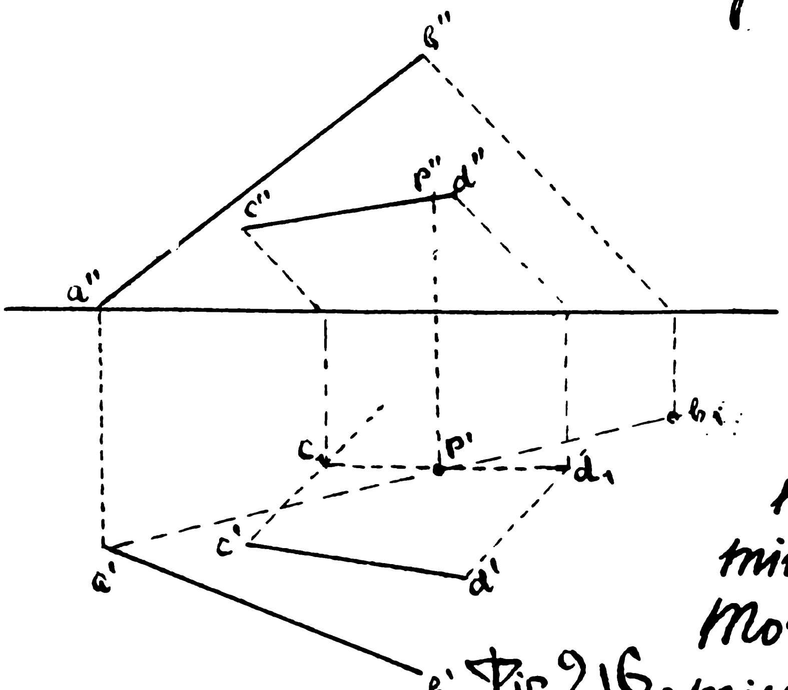
Фіг. 215.

Тінь від однієї лінії на другу та

від однієї фігури на другу.

Означення падаючої тіні від однієї лінії на другу робиться, як це було показано раніще.

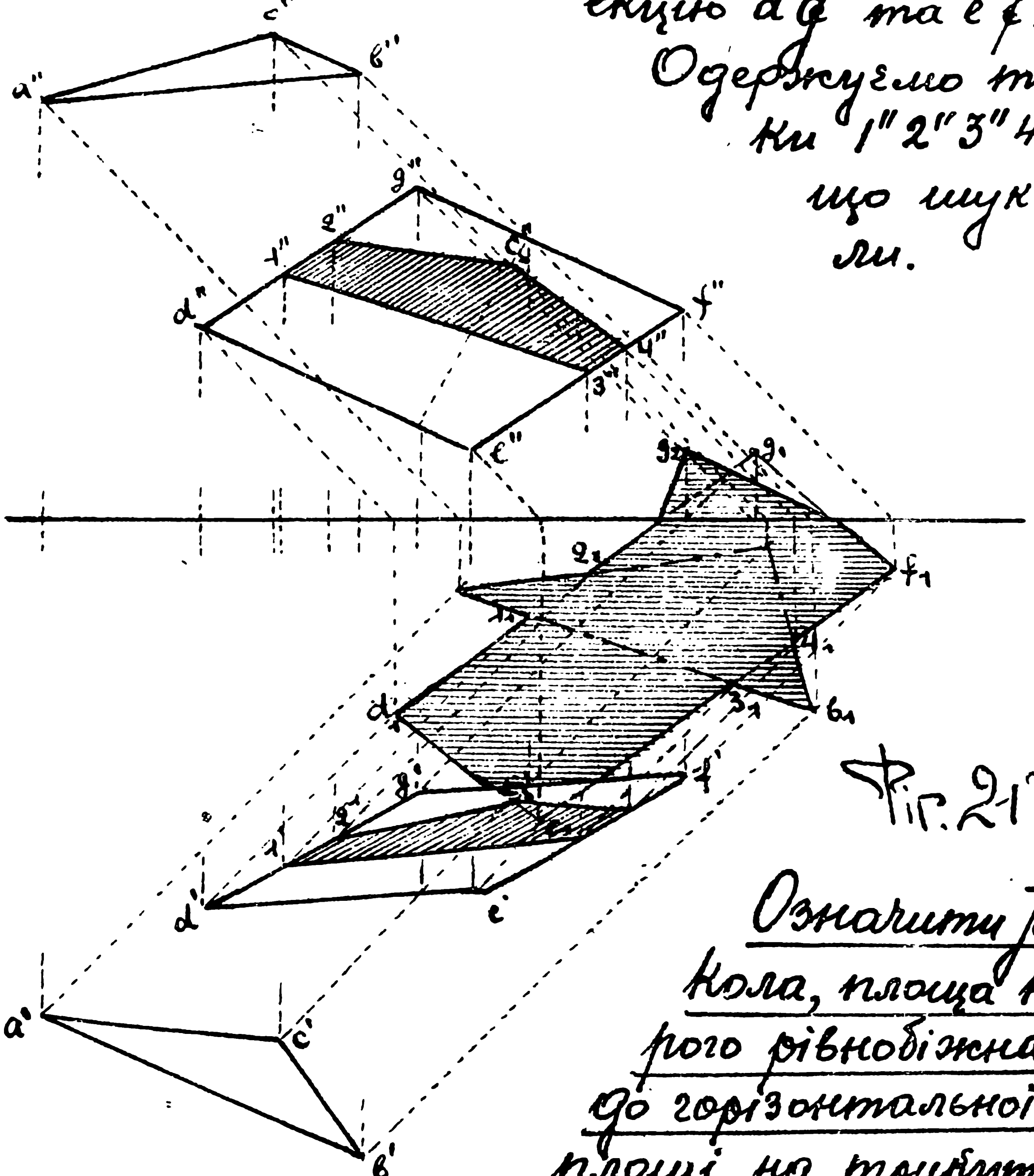
Означити тінь довжини ав на довжину cd (ф.216)



Власна тінь ав, та c,d, на P, означається, як звичайно. Вони перетинаються в точці p', котру переносимо на вертікальну проекцію. Точка (p'p'') й буде тінню, що шукаємо.

Фіг.216

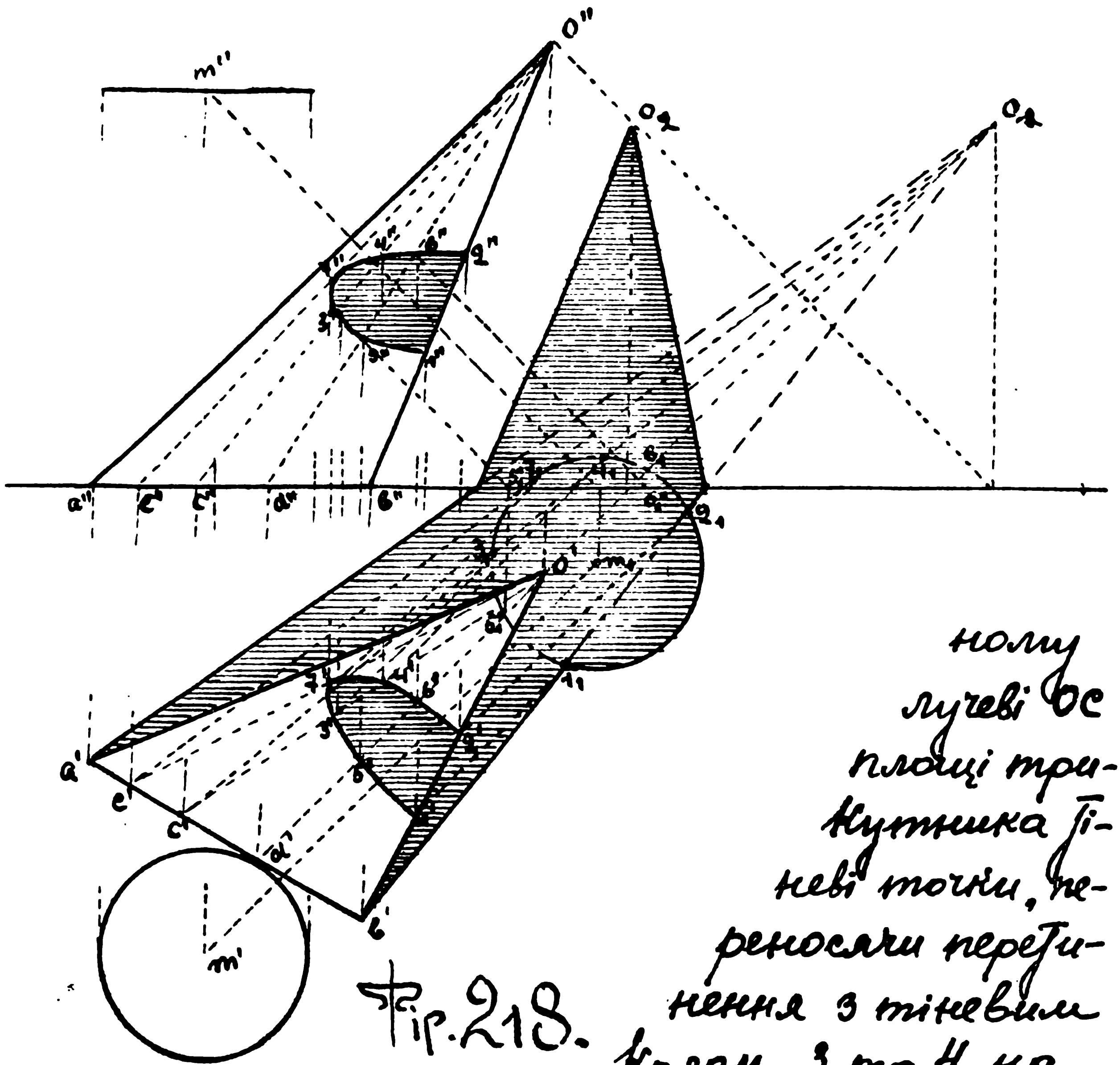
Тінь Δ авс на паралелограм defg та обох фігур на горізонтальну площу. (фіг. 217). Падаючі тіні фігур на площі проекцій означаються, як раніще. Тінь C, від C лежить в тіні паралелограма і мусить пересікати площу паралелограма. Тінь C_s від C одержуємо з допомогою горізонтально проектуючої площі відповідного луча. Точки, в котрих тінь, що падає на паралелограм (на його периметр) одержуємо, коли точки пересічень падаючих тіней 1, 2, 3, 4, перенесемо на d'g' та e'f' в напрямку протилежному до L'. Одержані точки переносимо на вертікальну проекцію d''a'' та e''f''. Одержуємо точки 1''2''3''4'', що шукали.



Фіг.217.

<u>Означити тінь кола, площа котрого рівнобіжна до горізонтальної площі на трикутну площу, що одним своїм боком (ав) стоїть на горізонтальній площі, а також і тіні обох фігур на горізонтальну площу (ф.218)</u>

Тінь кола на горізонтальну площу - коло. Його центр тінь т, центра кола з радіусом, рівним радіусу кола. Точки перетинення 1, та 2, тіневого кола з а,в з допомогою світляних лучів перепроектіруються зворотно на а'в (точки 1' та 2'). Відповідним засобом знаходимо на довіль-

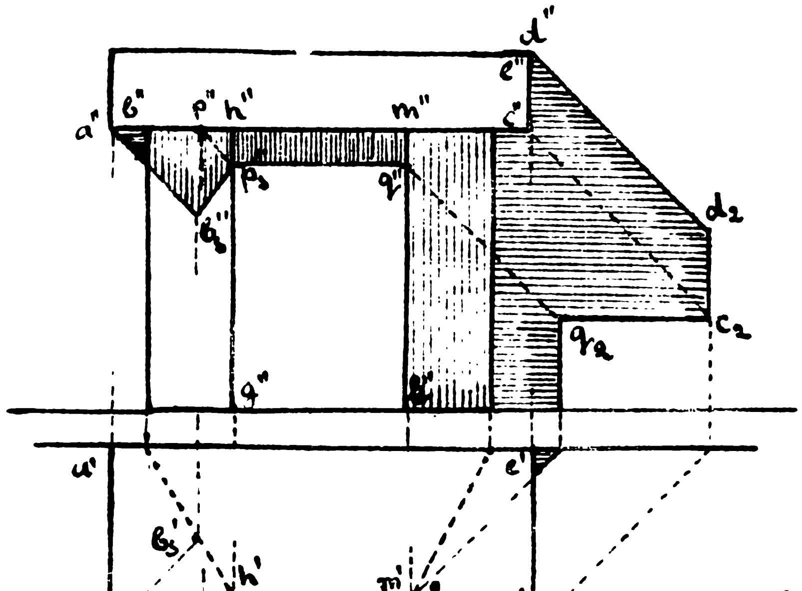


Фіг. 218.

колу лучеві Ос площі трикутника тіневі точки, переносячи перетинення з тіневим колом 3, та 4, на О,с. Після переносимо їх на О"с" – одержуємо 3" та 4". Для допоможної лінії Od, горізонтальна проекція котрої рівнобіжна до напрямку луча L', треба точки її перетинення 5, та 6, перенести на вісь проекцій. Провести через них рівнобіжні до напрямку L" та означити їх перетинення з лучем трикутної площі О"d" в точках 5" 6". Ці точки переносимо на горізонтальну проекцію, одержуємо 5' та 6'. Танґента з О, до тіневого-го кола в точці 7 перетинає ав в точці е. Проводимо ое і на неї напрямком луча переносимо точку 7, одержуємо її горізонтальну проекцію 7'. Цю точку (7') переносимо на відповідну вертікальну - одержуємо 7''.

I. Тіні на призматичні поверхні.

Коло стінки стоїть шестикутна колона, на котрій лежить прямокутна плита. Означити тіні, що падають на колону та на стінку (фіг. 219). Межу вт власної тіні означаємо так, як це робили раніще.

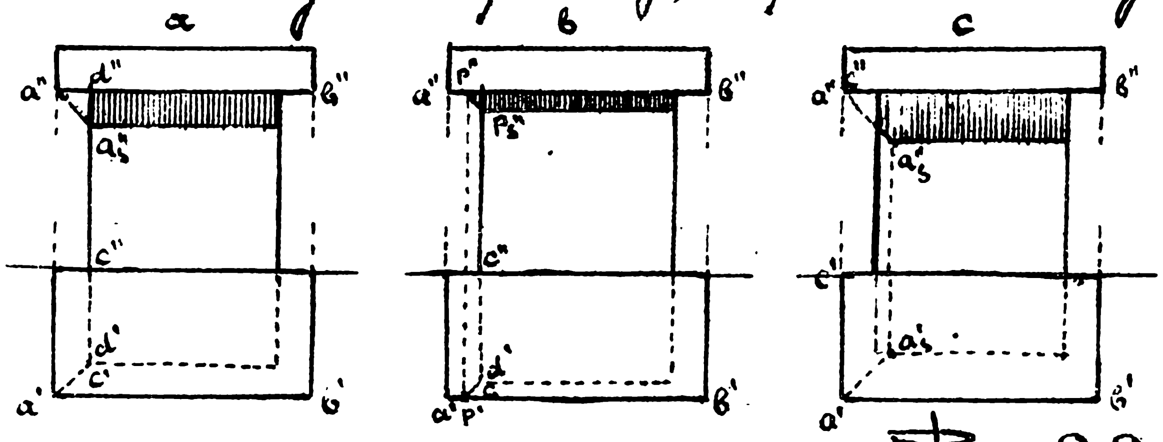


Фіг. 219.

Падаючу тінь від плити одержуємо по канталі торкання ав та вс. Понеже ав рівнобіжно до P_2 (вертік. площі), то її тінь на вертікальній площі по всякій поверхні йде рівнобіжно до $\overset{ql''}{\mathcal{L}}$; ця параллель обмежена напрямком луча світла, що виходить з в, перетинення котрого в горізонтальній площі (b_5') переносимо на вертікальну в b_5''. Тіневу точку на канті gh одержуємо, коли з (g=h') проведемо просту, рівнобіжну до луча світла, одержуємо точку p'. З точки p'' означаємо звичайним шляхом p_s''. Тінь горізонтального канта ав на поверхню фронту колони — горізонтальна. Віддалення між $в''c''$ та $p_s''q''$ мусить бути таке ж, як між $в'c'$ та qe. Точка q'' мусить з q_2, точкою перетинення тіней від вс та lm на P_2, лежати на одному світляному лучу.

Означити тінь від прямокутної плити, що лежить на колоні (фіг. 220).

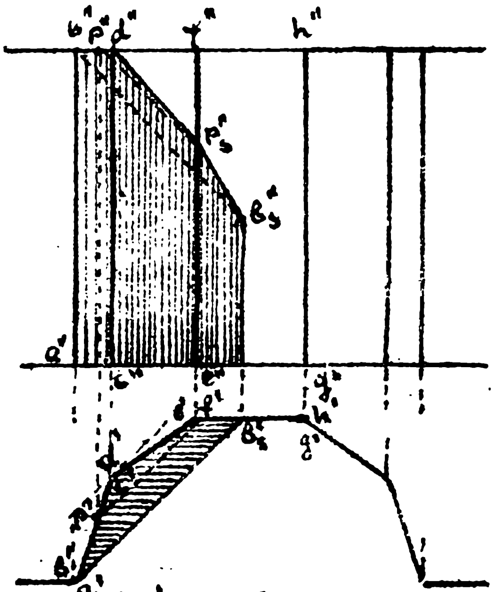
Коли плита рівномірно видається по-за колону, то світляний луч кута а, при звичайному напрямку, перетинає кант cd.



Фіг. 220.

Тінь цього кута падає на ліву бокову поверхню колони, як що передній виступ плити менший, ніж боковий. Коли передній виступ більший ніж задній, то на поверхні фронта колони прявиться ще шматок тіні від ас. В цьому фронтовому положенню віддалення горізонтальної межі тіні від $a''в''$ рівне віддаленню $a'в'$ від фронтової поверхні.

В вертікальній стіні находиться призматична відкрита зверху ніша, котрої грунт є половина правильного десятикутника. Треба означити падаючі тіні (фіг. 221)

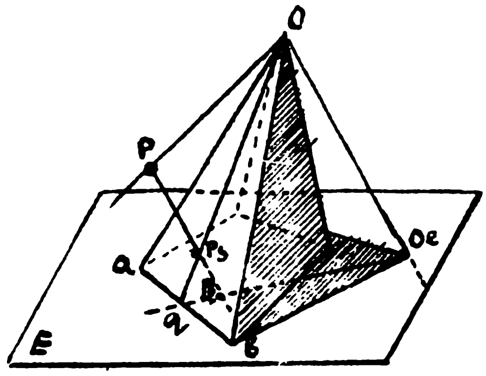


Фіг. 221.

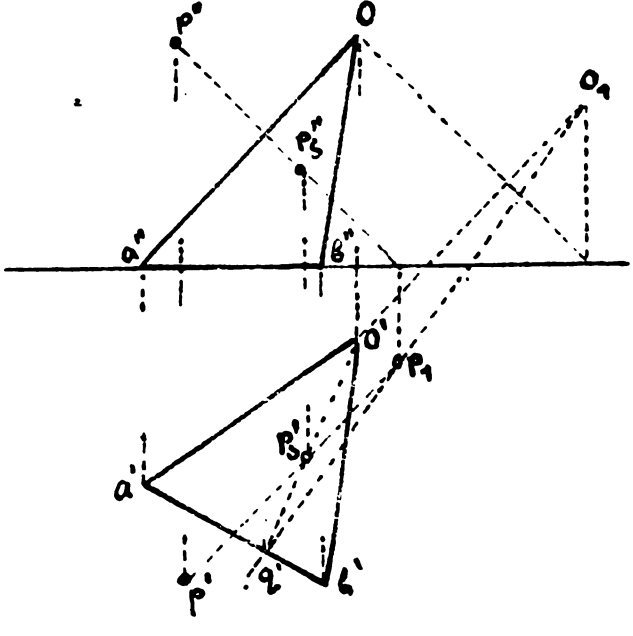
З горізонтальної поверхні бачимо, що світло сковзить по кантам ab та cd, при чім бокова поверхня acdb находиться у власній тіні. Як кидаючі тінь канти будуть ab та bd. Тінь від bd мусить починатися в d. Горізонтальна проекція p' точки p, тінь котрої падає на ef, означається лучем, що в горізонт. проекції виходить з e = f'.

Тінь на пираміду.

Для означення тіні, що кидає якась точка на поверхню пираміди, можна вжити загального метода перетинення. Часто вживають такого засоба. Сполучають вершину пираміди з точкою, що кидає тінь op (фіг. 222). Світляна площа, що проходить через неї, дає в площі основи слід $o_e p_e$, котрий означається напрямком світляного луча, та простою op. Вона перетинає зазіс (основу) в точці q. Oq є тінь допоміжної лінії Op і перетинає світляний луч pp_e в точці p_s, котра й є тінь, що шукали.



Фіг. 222.

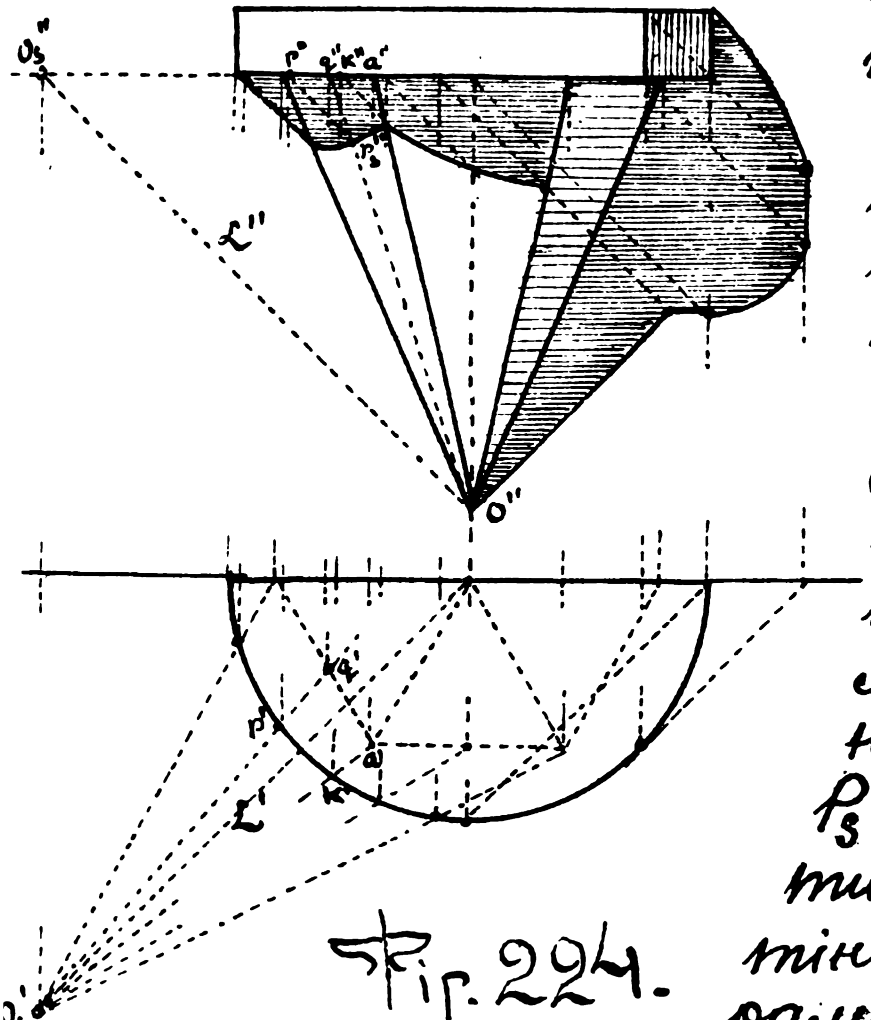


Фіг. 223.

Нехай (фіг. 223) aOb буде бокова поверхня піраміди, що стоїть на горізонтальній площі; конструкція означення тіні від точки p така: проектуємо вершину O та точку p по напрямку світляного луча на горізонт. площу в точки p_1 та O_1. Проста O_1p_1 перетинає ab в точці q. Проводимо O'q та з точки p_1 просту рівнобіжну до напрямку світляного луча; точка перетинення p_s' є горізонтальна проекція тіні точки p.

Тінь половини стовпакової плити на пірамідальну підставку (фіг. 224).

Творячу розділу світла від тіні на стовпаковій плиті одержуємо як на прямій прізмі, коли на горізонтальній проекції проведемо тангенту рівнобіжно до L'. Лінію розділу світла від тіні на піраміді означаємо, як раніше. Точка $(p'p'')$ луки, що дає тінь, лежить в площі основи — точка є власна проекція. Продовження $O_3 p'$ дає точку q. Понеже на горізонтальній площі тіні немає, то переносимо точку q, в q'', сполучаємо з O'' $(O''q'')$ і на ній простою, що має напрямок світляного луча означаємо точку P_s''. Щоб одержати якусь точку тіні на канті піраміди, наприкл. Oa, проводимо $O_s'a'$, точку перетинення K' проектуємо в K''. З K''' проводимо просту на-мпрямка луча (світляного), котра й перетинає $O''a''$ в точці тіні, що шукаємо.

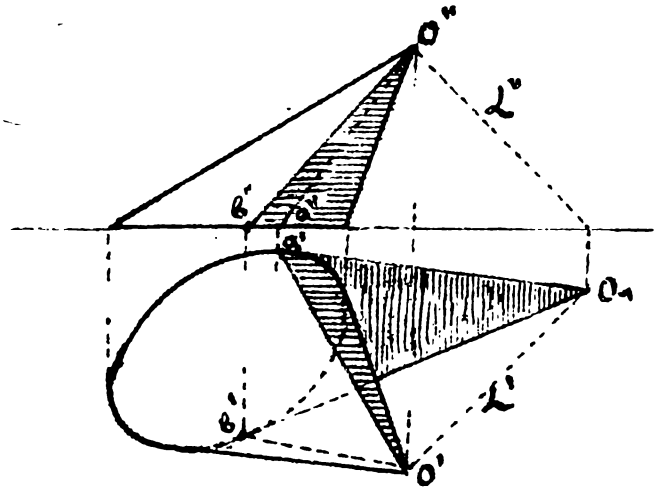


Fiг. 224.

Власна та падаюча тінь від стіжка.

Понеже стіжок можна розглядати, як межу піраміди, то конструкції, що прикладались до піраміди, можуть бути прикладені й до стіжка, при чім лінія, що обмежує на ґрунті, переходить в тангенту.

Означити тінь від косого стіжка, що стоїть на горізонтальній площі.(ф.225).

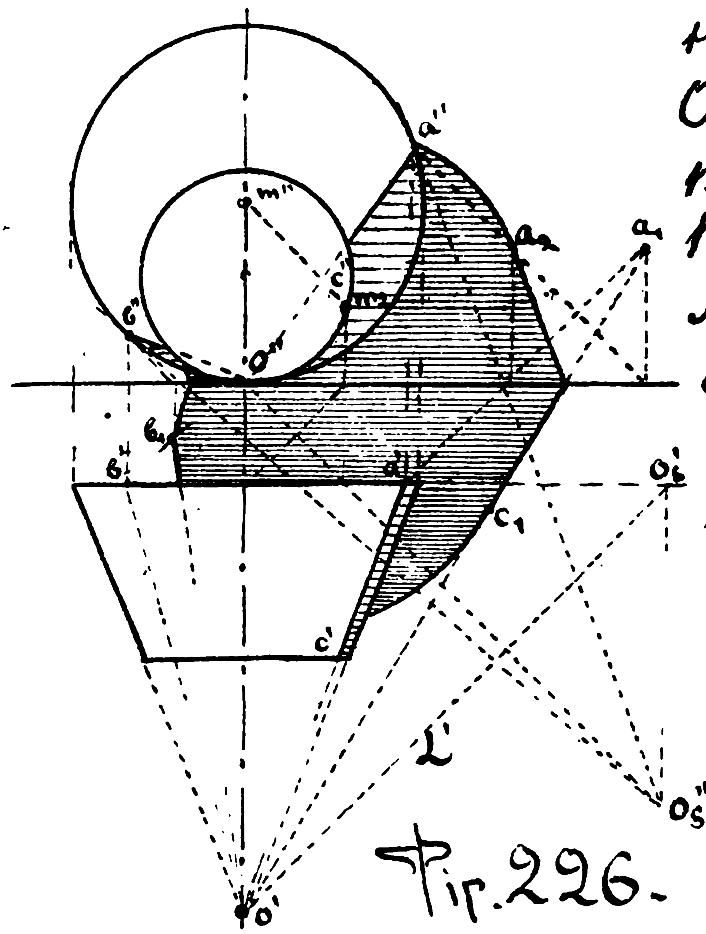


Фіг. 225.

Проектуємо вершину O світляним лучем на P_1, одержуємо O_1. З точки O_1 проводимо тангенти до основи та означаємо їх точки торкання а та в утворюючих ліній оа та ов, по котрим обмежується тінь, що падає на горізонтальну площу P_1. Коли точка O_1 лежить всередині основи стіжка, то розуміється, тангент провести не можна, значить увесь стіжок освітлений.

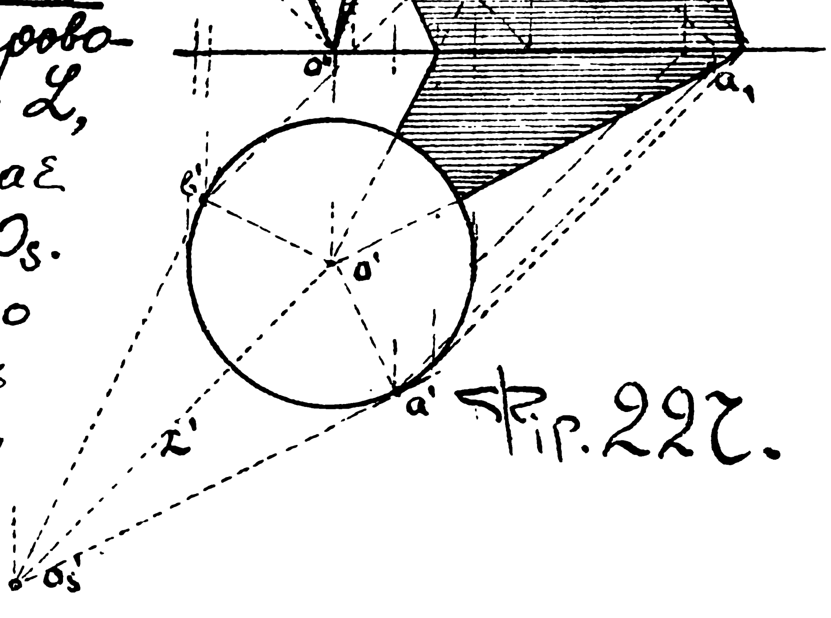
Означити тінь стіжка, що лежить на горізонтальній площі та зрізаний площею, що рівнобіжна до вертікальної площі (фіг. 226).

Світляний луч, що проведений через вершину ($O = O', O''$) дає точки O_s' O_s'' в площі великого кола. Тангенти з O_s'' до вертікальної проекції означають точки а'' та в'', котрих горізонтальні проекції а' та в' лежать



Фіг. 226.

на утворюючих Оа та Ов по котрім торкаються світляні лучі. Тінь від великого кола на P_2 (вертік. площ) є так само велике коло з центром m_2; утворююча лінія Оа проходить торкаючись до цього кола в a_2, далі від цієї точки по напрямку рівнобіжному до $a''O_s''$. На горізонтальній площі йде вона по напрямку oa_1. Для означиння тіні, що падає на горізонтальну площу, служить лука, що йде від точки в. Вона має торкання в точці c_1 та $в_1$.



Фіг. 227.

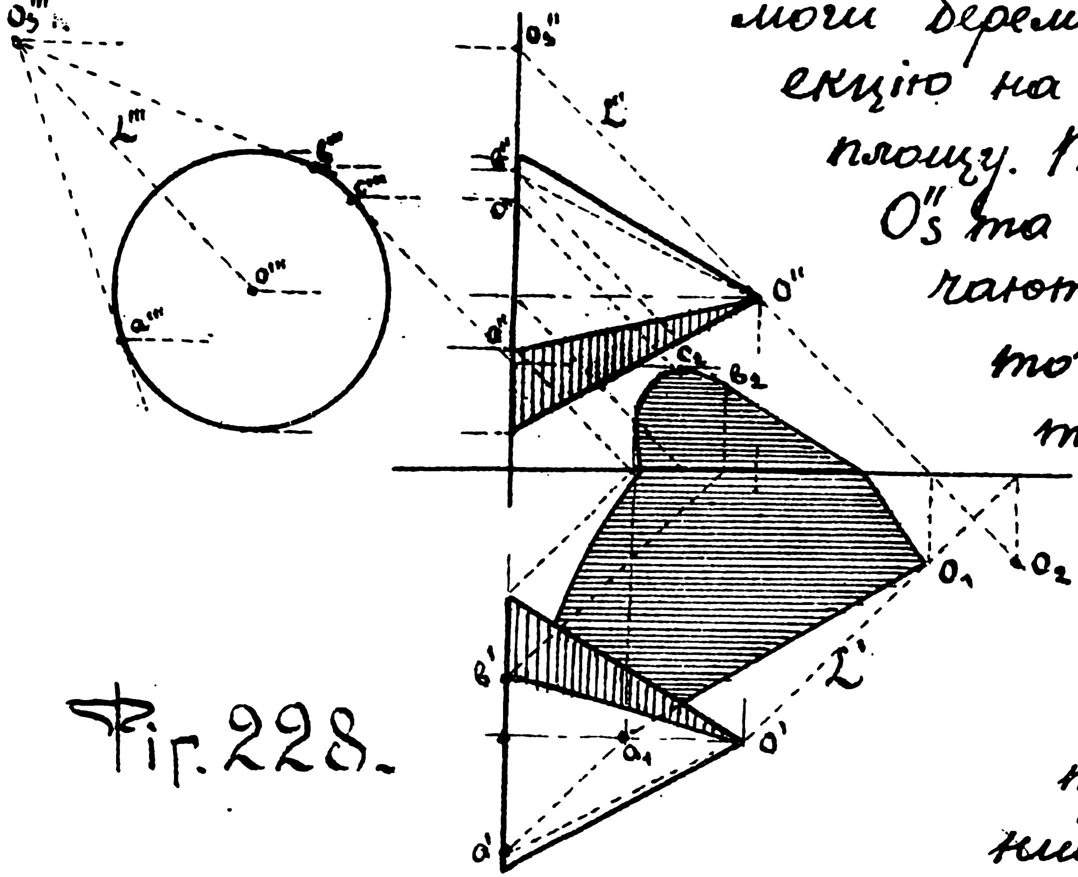
Означити тінь стіжка, що стоїть вершиною на P_1 (фіг. 227)

Через вершину проводимо луч світла L, котрий перетинає основу в точці O_s. Тангенти з O_s' до кола означають утворюючі поділу світла та тіні.

Тінь на горізонтальну площу починаєть-ся від $O = O'$ та іде рівнобіжно до $O_s a'$ та $O_s в'$!

Тінь від прямого колового стіжка з горізонтальною віссю (фіг. 228).

Для допомоги беремо проекцію на третю площу. Точки O_s'' та O_s''' означаються, як точки перетинення світляного луча L, що проведений через вершину O, з площею основи. Тангенти з O_s''' дають точки a''' та $в'''$, з них одержуємо a'' та $в''$ й a' та $в'$. Утворюючі Oa та $Ов$ є лінії поділу світла від тіні. Вони вкупі з лукою $\underline{ав}$ дають грань для падаючої тіні від стіжка.

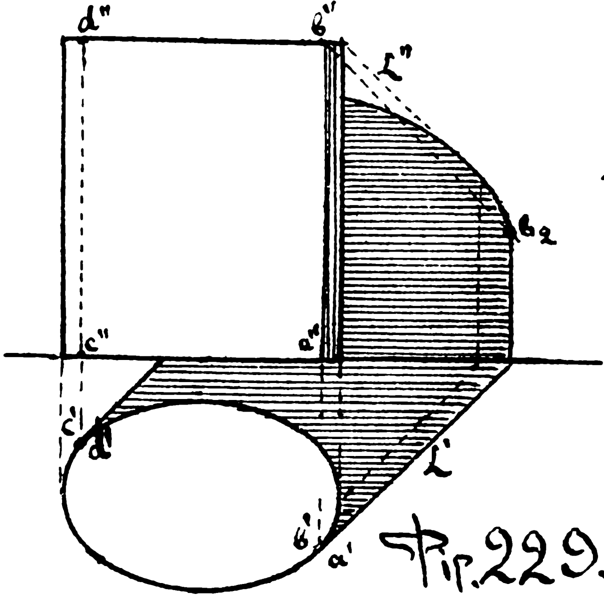


Фіг. 228.

Власна та падаюча тінь стовпака.

Ті засоби, котрі прикладалися до призми, прикладаються й до стовпака, бо його можна розглядати, як межу прізми. Лінії, що обмежують на грунті призму, дають тангенти до стовпака.

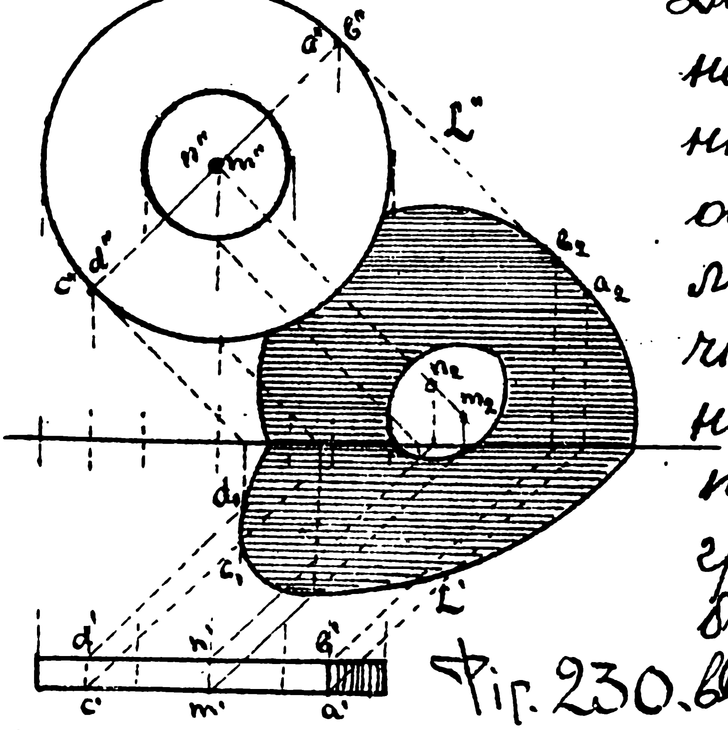
Тінь прямого стовпака, що стоїть на горізонтальній площі (фіг. 229).



Фіг. 229.

Тангенти до сліда стовпака від напрямку світового луча L' означаються точками торкання a та c. Утворюючі лінії ab та ac обмежують падаючу тінь стовпака на P_1. Частина луки bd так само кидає тінь, точки котрої можуть бути означені звичайним шляхом.

Тінь від стовпакової пластинки з коаксильною діркою (фіг. 230)

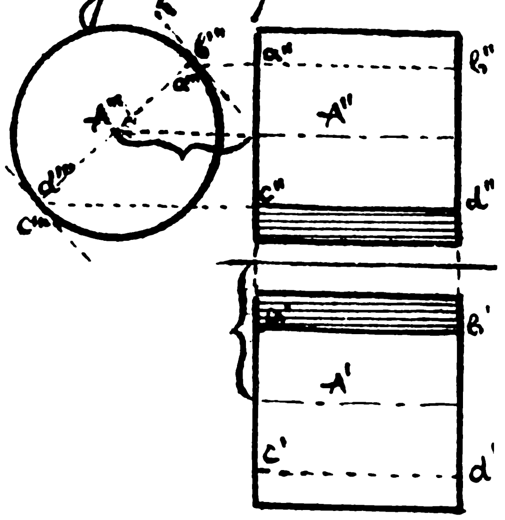


Фіг. 230.

Дотичні до вертікальної проекції рівнобіжні до L'' дають по обом утворюючим лініях поділу, при чім [illegible] видно тільки на горізонтальній проекції. Зовнішня грань падаючої тіні буде обмежена правою частиною луки ac, лівою частиною луки bd та обома тангентами ab та cd, котрі дають зовнішні частини тіневого кола. На внутрішній поверхні умови освітлення відворотні тім, що на зовнішній; світло торкається спереду зліва між утворючими торкання півкола.

Власна тінь на стовпаку з горізонтальною віссю (фіг. 231)

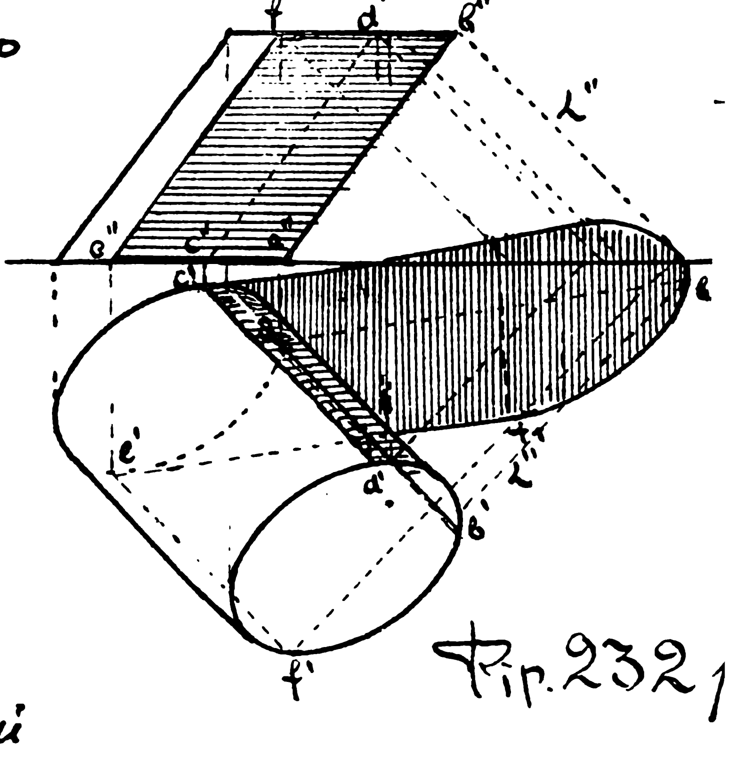
В третій проекції проводимо тангенти рівнобіжні до L'''. Точки торкання означають творячі поділу світла від тіні.



Фіг. 231.

Тінь від нахильного стовпака, що стоїть на горізонтальній площі (фіг. 232).

Означимо на горізонт. площі тінь ав, якоїсь утворюючої ав. Проводимо рівнобіжно до ав, тангенти до сліда стовпака; в точках торкання с та е проводимо утворюючі, котрі й будуть лініями розділу світла від тіні.

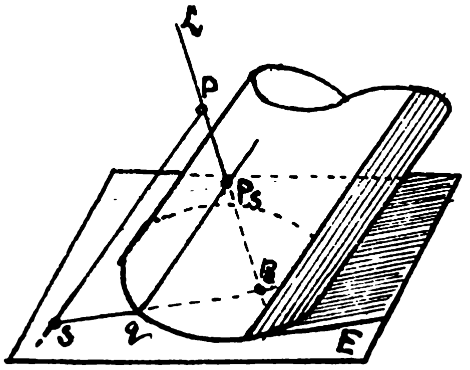


Фіг. 232.

Тінь луки fbd торкається в точках f_1 та d_2.

Падаючі тіні на стовпакові поверхні фіг 233).

Коли річ іде про стовпакову проектуючу поверхню, то точки перетинення її з світляними лучами одержуються безпосередньо. Коли ж напрямок утворюючих довільний, то можна вжити рівнобіжної ps, що проведена через точку p, котра кидає тінь. Через слід її s в площі основи та через проекцію p_e в напрямку світляного луча означається напрямок тіні для площі E. Тангента іде рівнобіжно до sp_e. Тінь sp_e від sp піднімається з точки q, де зустрічає основу стовпака по утворюючій стовпака аж до зустрічі з напрямком світляного луча, що йде через точку p. Точка p_s і є тінь на стовпаковій поверхні від точки p.



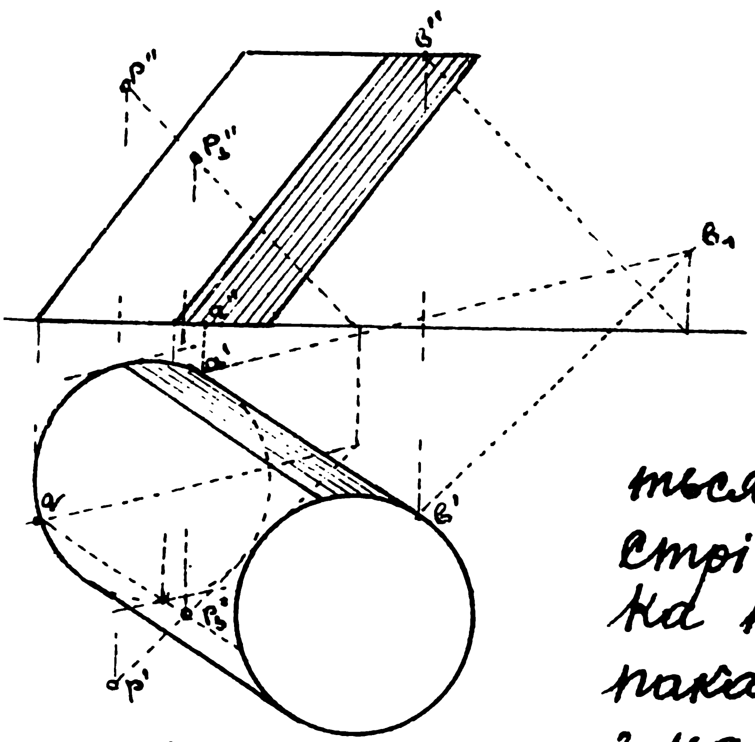
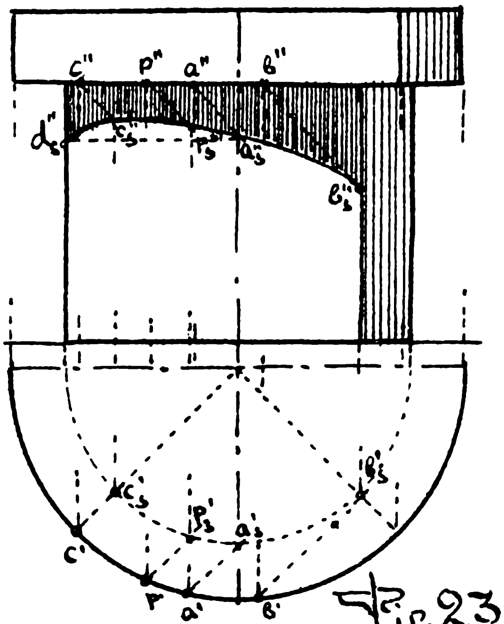


Fig. 233-

Оттінення стовпакової колони від круглої плити, що лежить на ній.

Обидва стовпака мають одну й ту ж вісь (фіг. 234). Ліва частина, що лежить під краєм плити, утворює тінь. Беремо на ній якусь точку ($p'p''$). Горізонтальна проекція луча перетинає колону в p'_s. Орднер поставлений з неї в перетиненні з світляним лучем вертікальній проекції (p'') дає p''_s.



Фіг. 234.

Світляна площа, що проходить через вісь стовпака мусить бути площею симетрії до межі падаючої тіні. Точки, котрі в горізонтальній площі лежать симетрично відносно світляного радіуса мусять в вертікальній площі знаходиться на горізонталі. Це відноситься особливо до точок a''_s та d''_s, що лежать посередині між нею та лівою утворюючою. Найвища точка C_s тіні лежить в світляній площі, що проходить через вісь. Світляний радіус на горізонтальній площі дає C' та C'_s, з котрих одержуємо C'' та C''_s. В точці b_s на утворюючій колони світляний луч торкається грані падаючої тіні.

Тінь що падає на стіжкову поверхню.

Конструкція для одержання тіні на піраміді цілком може бути прикладена і для одержання тіні на стіжку. Находимо точку перетинення світляного луча, що іде через вершину, з площею основи. Коли проведемо через цю точку тангенти до основи, то одержуємо в точках торкання ті утворюючі, що означають тіні. Світляний луч через $(p'p'')$ перетинає площу основи в точці $(q'q'')$; $O''q''$ на вертікальній проекції дає точку r'' і $r''O''$ дає точку p''_s горізонтальна проекція котрої лежить на $q'p'$.

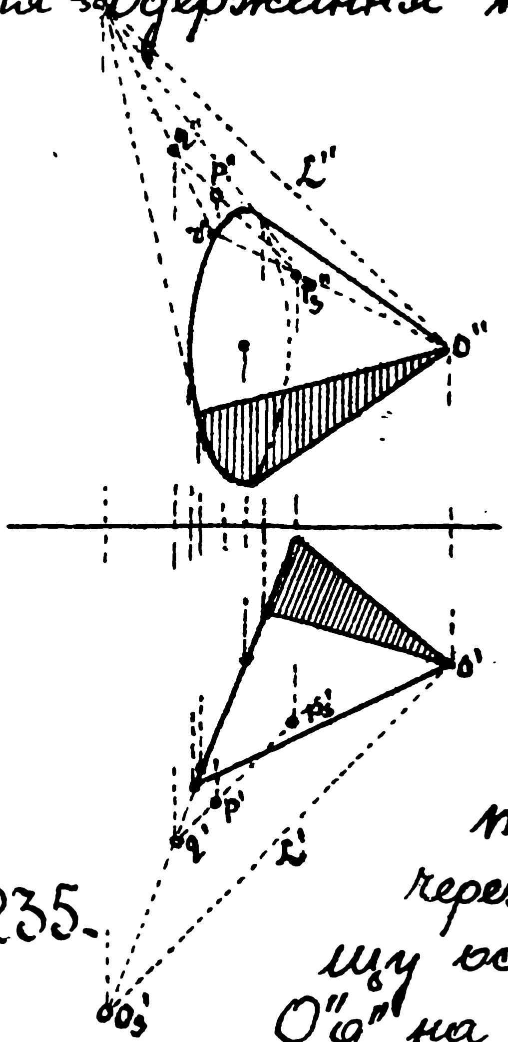


Fig. 235.

Коло стінки стоїть стіжок вершиною вниз; на ньому лежить горізонтально шестикутна пластинка. Треба означити тіні як власну, так і падаючу.

O'_s та O''_s будуть проекції вершини на площу основи по напрямку світляного луча (фіг. 236). Тангенти з O'_s до основи означають $o'd'$ напрямок творячої поділу тіні. На горізонтальній проекції вона дає точку e_1. Тінь від якоїсь довільної точки $(p'p'')$ находимо так: продовження простої $O'_s p'$ перетинає основу в точці q'. Сполучаємо q' з O' і на ньому лучем з p' означаємо точку p_s'. Орднер з p_s' дає p_s'' на світляному лучі з точки p'' (котра ь точка p_s'' мусить лежати на утворюючій $O''q''$). Для утворюючої лінії, котра має своєю горізонтальною проекцією $O_s'O'$ раніще всього находимо вертікальну проекцію e_s'', після чого переносимо на горізонтальну проекцію. Таким саме чином можемо одержати й решту точок. Падаюча тінь одержується, як завше.

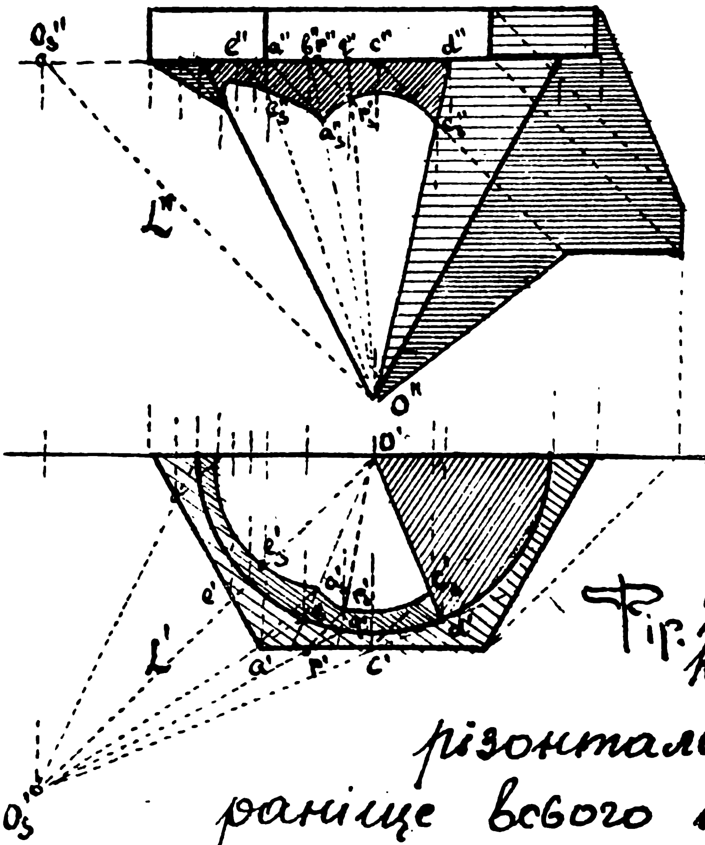
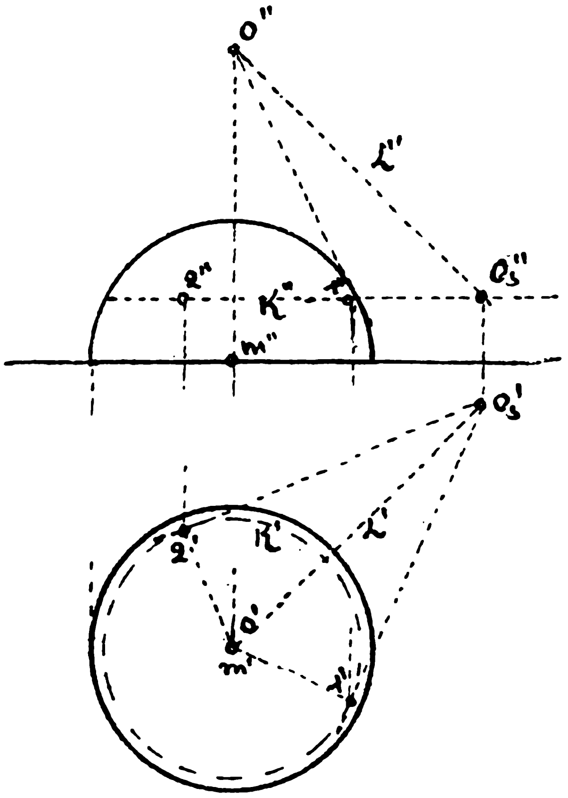


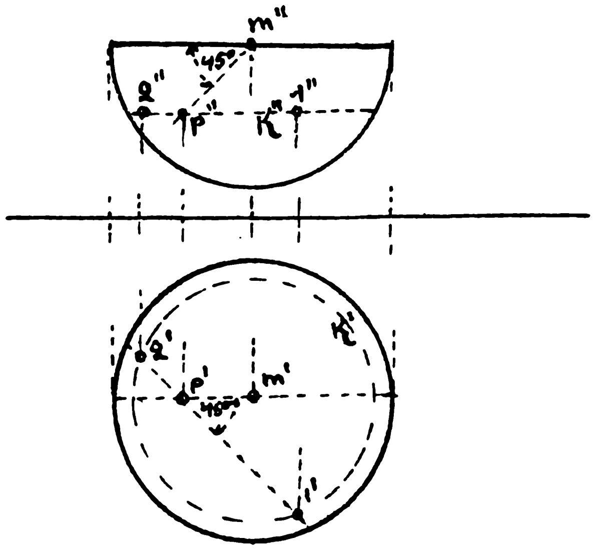
Fig. 236.

Тінь кулі.

Стіжкова метода (фіг. 237). На кулі вибіраємо якесь рівнобіжне коло $K'K''$. Тангента в конечному пункті K'' на вертікальній проекції кулі означає на прямовісній осі точку $(O'O'')$ вершину стіжка торкання. Проектуючи її з допомогою світляного луча на площу рівнобіжного кола, що вибрали, одержуємо точки O_s' O_s''. Проводимо з O_s' тангенти до K', одержуємо точки торкання 1' та 2', котрі з допомогою ордне-



Фіг. 237.

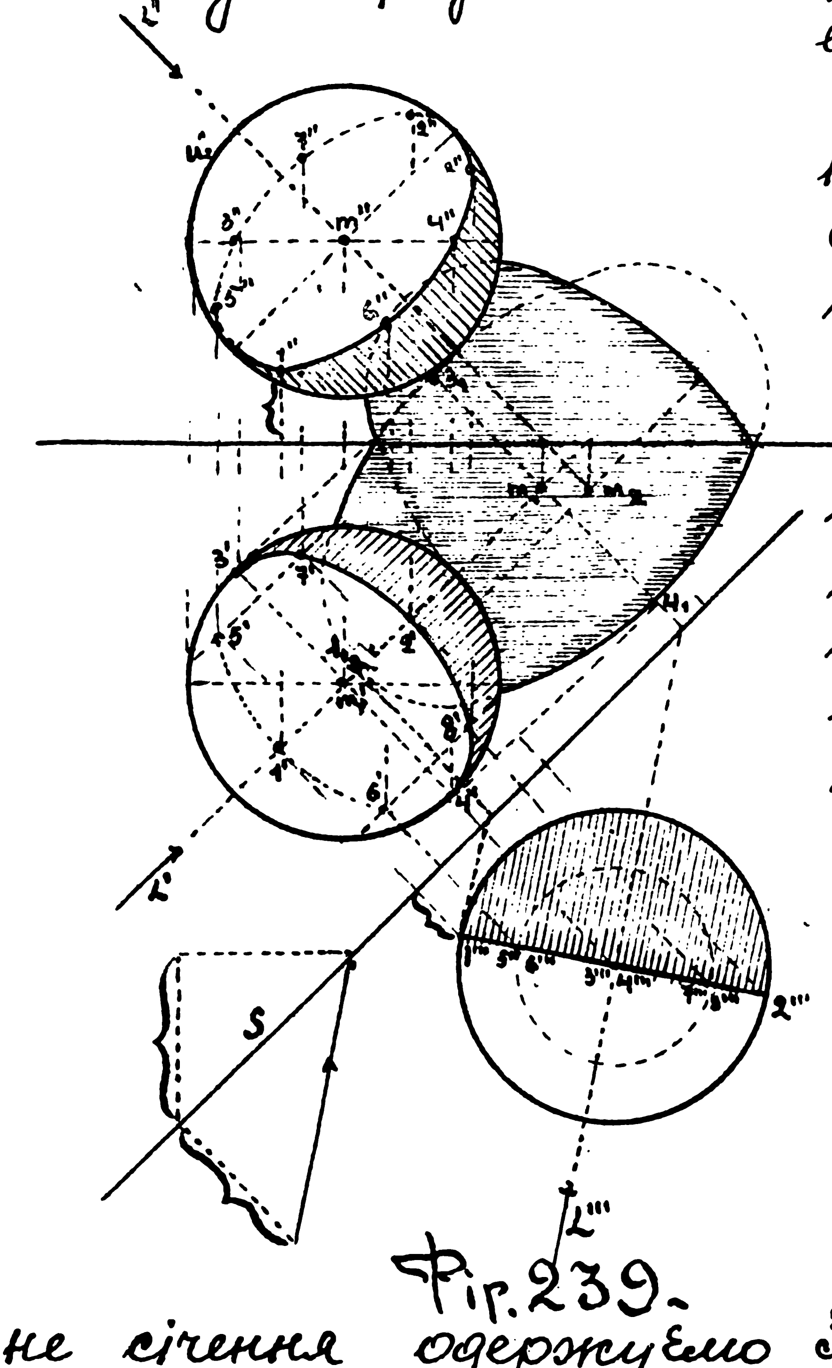


Фіг. 238.

рів можуть бути перенесені в точки 1" та 2". Цей й будуть точки, від котрих буде починатися тінь.

Чисто кулева метода (фіг. 238). Проводимо через m" рівновіс до L"; таким чином означається на K" пункт p", котрого горізонтальна проекція p'—на горізонтальному диаметру, що проходить через m'. Проводимо через p' рівновісну до L', то вона перетинає горізонтальну проекцію в точках 1' та 2'. Вжитий напрямок L встановлює, що m'p' = віддаленню центра кулі від рівнобіжної площі. Таким чином p' можливо одержати, відкладаючи віддалення, що беруться з вертикальної проекції.

Введення допоможної проекційної площі рівнобіжно до світляного луча L. Вибіраємо нове січення (фіг. 239) рівнобіжно до L'. Лінія поділу в третьому січенні 1 це диаметр рівновісний до L'''. Його концеві точки дають точки 1 та 2 на світляному меридіані. На вертікальній проекції це буде найвища та найнизча точка. Конструкцію точок будь якої площі, що проведена рівнобіжно до напрямку світляного луча означається легко, як це видно на нарису (ф.239) Диаметр рівновісний до напрямку луча L'' дає точки 3' та 4', шляхом проектіровки на екваторіальне січення одержуємо 3'' та 4''. Понеже лучі світла однаково нахилені до обох площ проекцій, то горізонт. та вертік. проекції поділу світла від тіні будуть конгруентними еліпсами. Світляні поверхні, що обгортують кулю, будуть коловими стовпаковими поверхнями, утво-

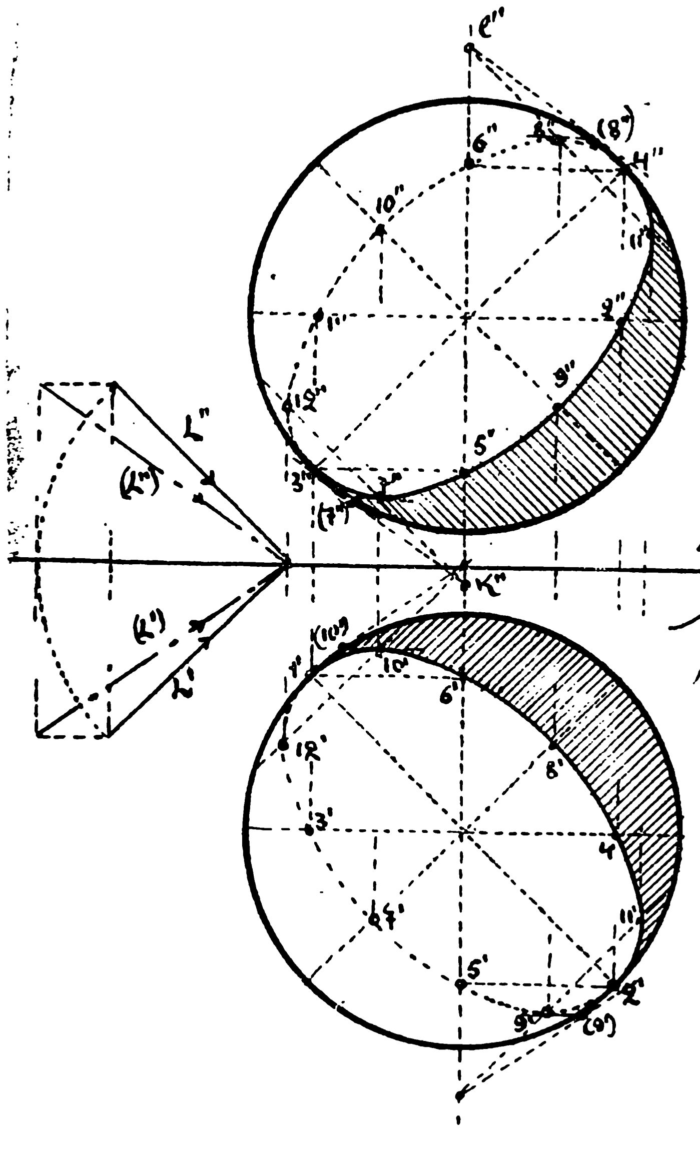


Фіг.239.

рюючі котрих відносно P_1 та P_2 мають однаковий нахил, а тому падаючі тіні на площі проекцій мусять так само бути конгруентними еліпсами.

Дванадцять найбільш примітних точок поділу світла від тіні.

На горізонтальній проекції означаються точки 1' та 2', як кінці диаметра рівновісного до напрямку світляного луча. На вертікальній проекції рівновісний до L''(фіг. 240) своїми кінцевими пунктами дає точки 3'' та 4'', горізонтальна проекція котрих лежать на екваторіальній площі. Точки 1' 1'' 3' 3'' та 2' 2'' 4' 4'' мусять лежати на одному рівновісі. Дякуючи симетрії, що дають диаметри рівновісні та рівнобіжні до напрямку світла — відомі точки перетинення нарису з диаметром рівновісним до x. Точки 2'-5' 1' 6' 3'' та 5'' так само, як 4'' та 6'' мусять лежати на одній горізонталі. Для означення вищої та низчої точки повертаємо світляний мередиан навкруги рівновісного диаметра в положення рівнобіжне до P_2. Тангенти до вертікальної проекції рівнобіжно до повернутого світляного луча (L'') дають точку торкання (7'') та (8''). Напрямок світляного луча, що проведемо з точок перетинення (K'', l'') з горізонтальн. простили з точок (7") та (8") дають положення точок 7" та 8". Проектуванням переносимо їх на горізонталну проекцію 7' і 8'.

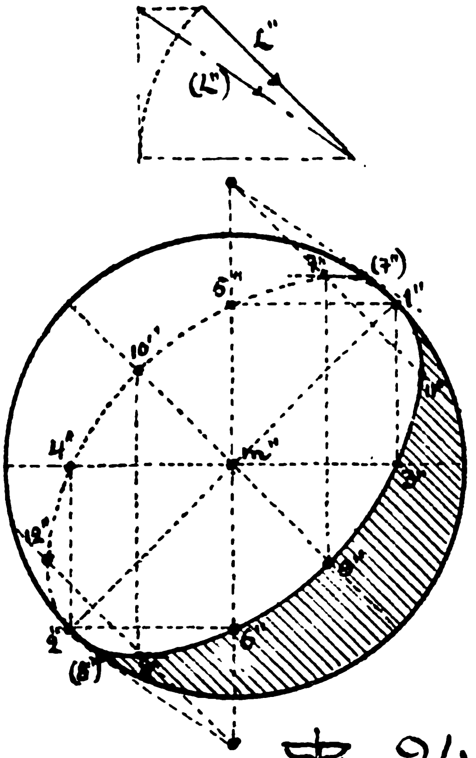


Фіг. 240.

Так само одержуються точки 9–10. Понеже кулю можна розглядати, як тіло обігу з віссю, рівновісною до P_2, то точки 9' та 10' можуть бути означені на горізонтальних дотичних. Вертикальні проекції їх 9" та 10" лежать на диаметрі, рівнобіжному до світляного луча, і обмежують собою малу вісь еліпса. Точки 7'7" 10'10" та 8'8" 9'9" лежать на одному ординеру. На горізонтальній проекції симетрично відносно вісі 1'2' лежать точки 10'-12' 9'-11'.

Конструкція особливих точок на одній проекції (фіг. 241).

На нарисі показана конструкція. Диаметр рівновісний до напрямку світляного луча L" дає точки 1" та 2". Рівновіси з цих



Фіг. 241.

точок на горізонтальний диаметр дають точки 3" та 4". Горізонталі на вертикальний диаметр дають точки 5" та 6". З допомогою повороту світляного луча в площу рівнобіжну P_2 одержуємо низчу та вищу точки 7" та 8". Рівновіси з цих точок дають 9" та 10". Як точки симетрії можемо одержати точки 11" та 12".

Означення ліній поділу світла від тіні на тілах обігу, власні та падаючі тіні. Для означення поділу світла від тіні на тілах обігу, крім загальних засобів, можна вживати: 1) прикладу стіжків, 2) куль та 3) особливих точок.

1) **Приклад стіжків.** Раніще з'ясовувалась метода прикладу тангенціального стіжка по колу, що вибране нами.

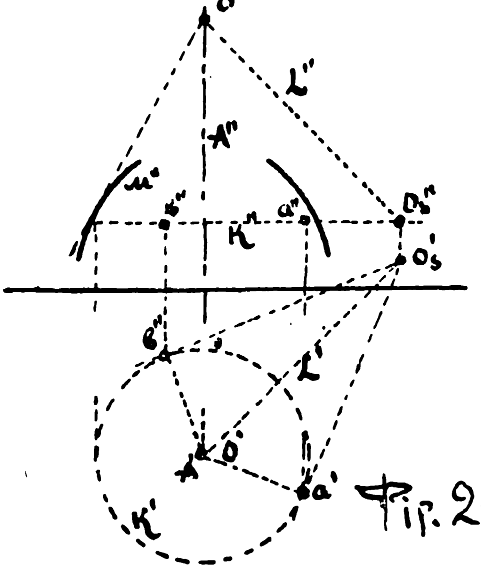
На нарисах показано означення точок в трьох випадках:

a) коли вісь обігу рівновісна до P_1 (фіг. 242),

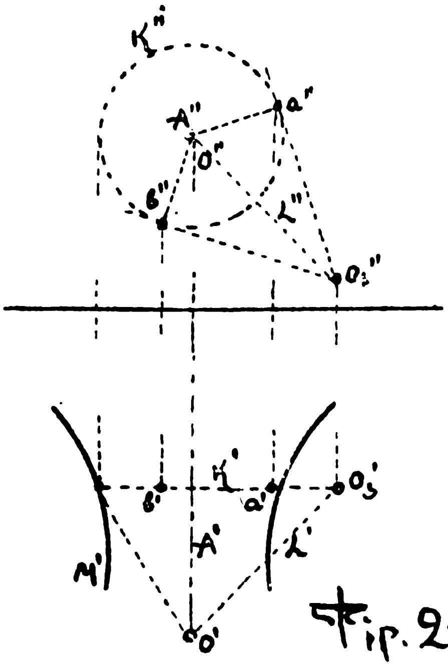
b) коли вісь рівновісна до P_2 (фіг. 243),

c) коли вісь горізонтальна (фіг. 244).

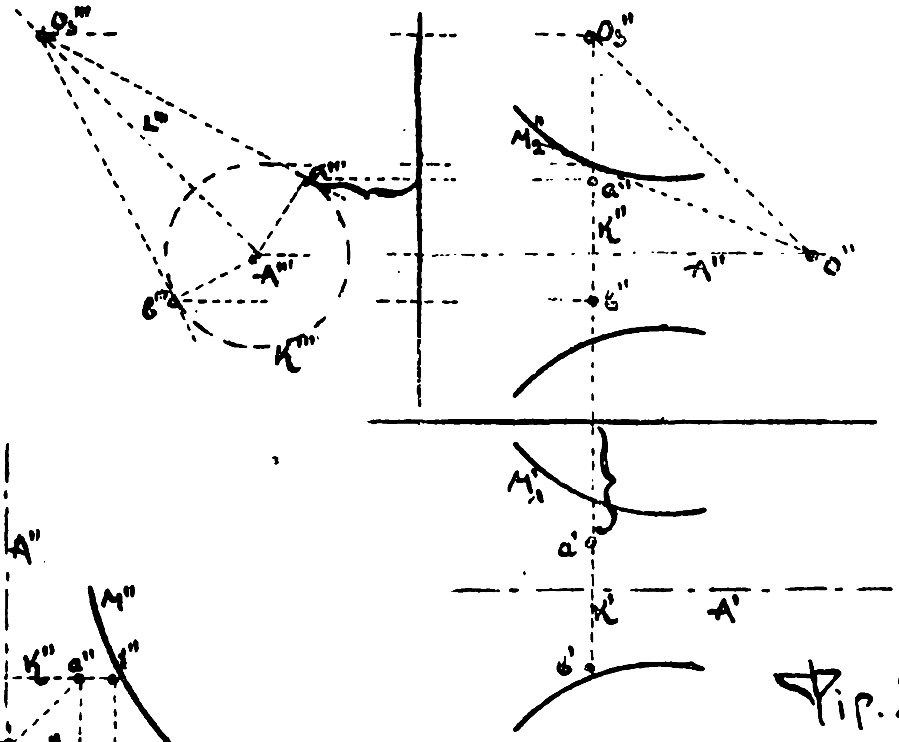
Конструкція їх остільки проста, що особливих пояснень не вимагає.



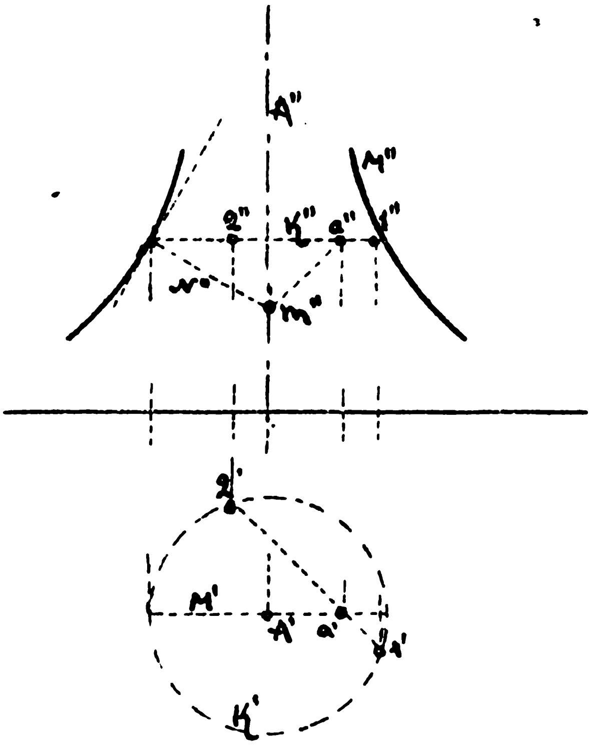
Фиг. 242.



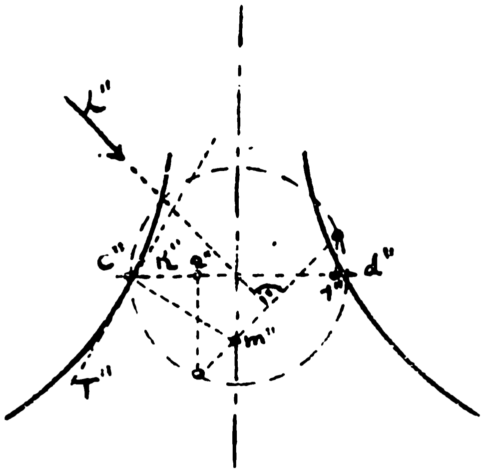
Фиг. 243



Фиг. 24

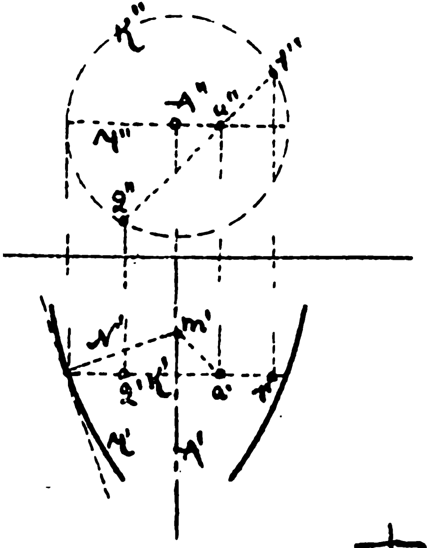


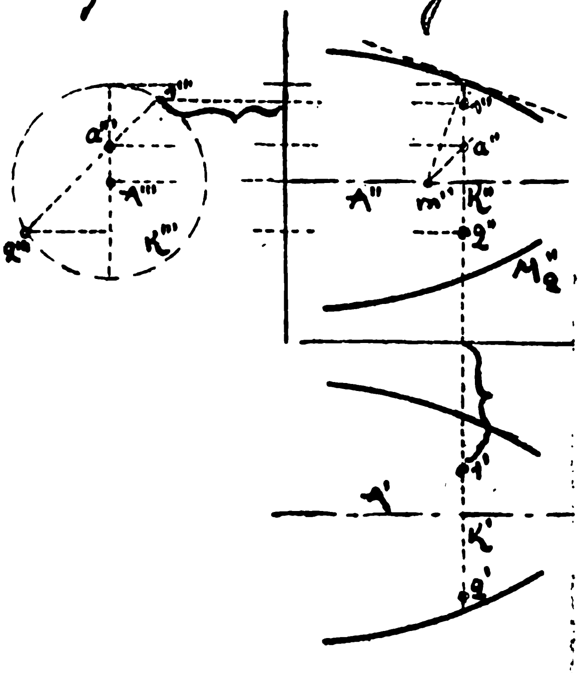
Фиг. 245.



Фиг. 240.

<u>Приклад кулі.</u> Метода куль доповнює методу стіжків і навпаки (коли точка $\underline{m}$ або $\underline{O}$ знаходяться по за межами нарису). Нариси показують, що віддалення (в трьох ріжних положеннях) $A'a'$ $A''a''$ та $A'''a'''$ рівні віддаленню, що беремо з другої проекції, центра дотичної кулі до площі рівнобіжного кола. Уявимо собі, що горізонтальна проекція (фіг. 245) пересунута в рівновісному напрямку аж поки a' складеться з a''. Понеже існує симетрія $1'2'$ та $m''a''$ відносно горізонталей $M' = K''$, то робимо конструкцію, як показано на фіг. 246. Нормаль N'' до головного мередіана в точці c'' (K'') перетинає вісь в m''; ордінер з m'' до L'' перетинає коло диаметра K'' в точках, котрі одержуються спущенням рівновісів на K''' і дають точки $1''$ та $2''$.

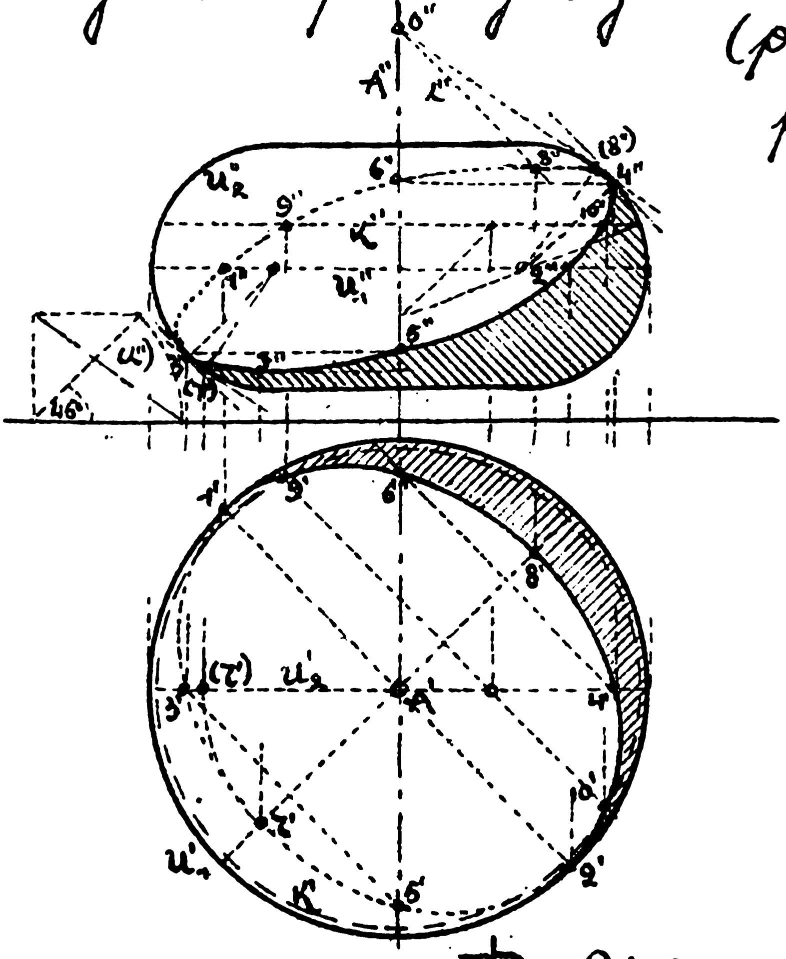




Фіг.247.

<u>Особливі точки лінії поділу.</u> Точки $1'$ та $2'$

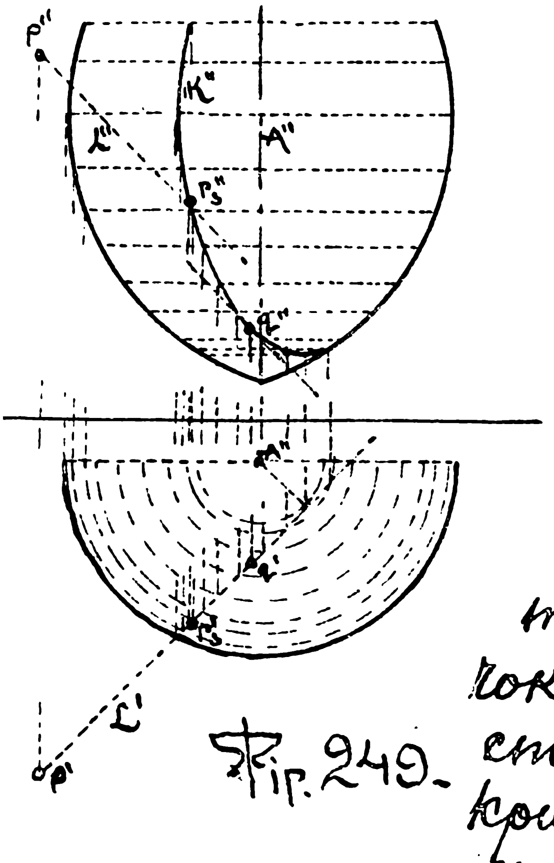
лежать (фіг 248) на нарисі U_1' на диаметрі рівновісному до напрямку світляного луча. Точки поділу 1' та 2' на обрисі U_1 на кінцях диаметра рівновісного до напрямку луча світла. Тангенти (рівнобіжні L") до нарису U_2'' вертікальн проекції головного меридіану в точках торкання дають 3" та 4". Проектуємо на горізонтал. проекцію диаметри рівнобіжн. вісі, одержуємо їх горізонтальні проекції 3' та 4'. Вони мають симетричні точки 5' та 6' (відносно світляного меридіану). Вертікальні проекції 5" та 6" одержуються проведенням горізонталей з точок 3"-4" аж до перетинення з відвісною віссю. Найвища та найнизча точка буде найдена з допомогою світляного меридіану, коли його поставимо в положення рівнобіжне до P_2. Тангенти до U_2'' рівнобіжні до (L") дають точки торкання (7") та (8"). Вони дають точки 7" та 8".



Фіг.248.

Падаючі тіні на поверхню обігу.

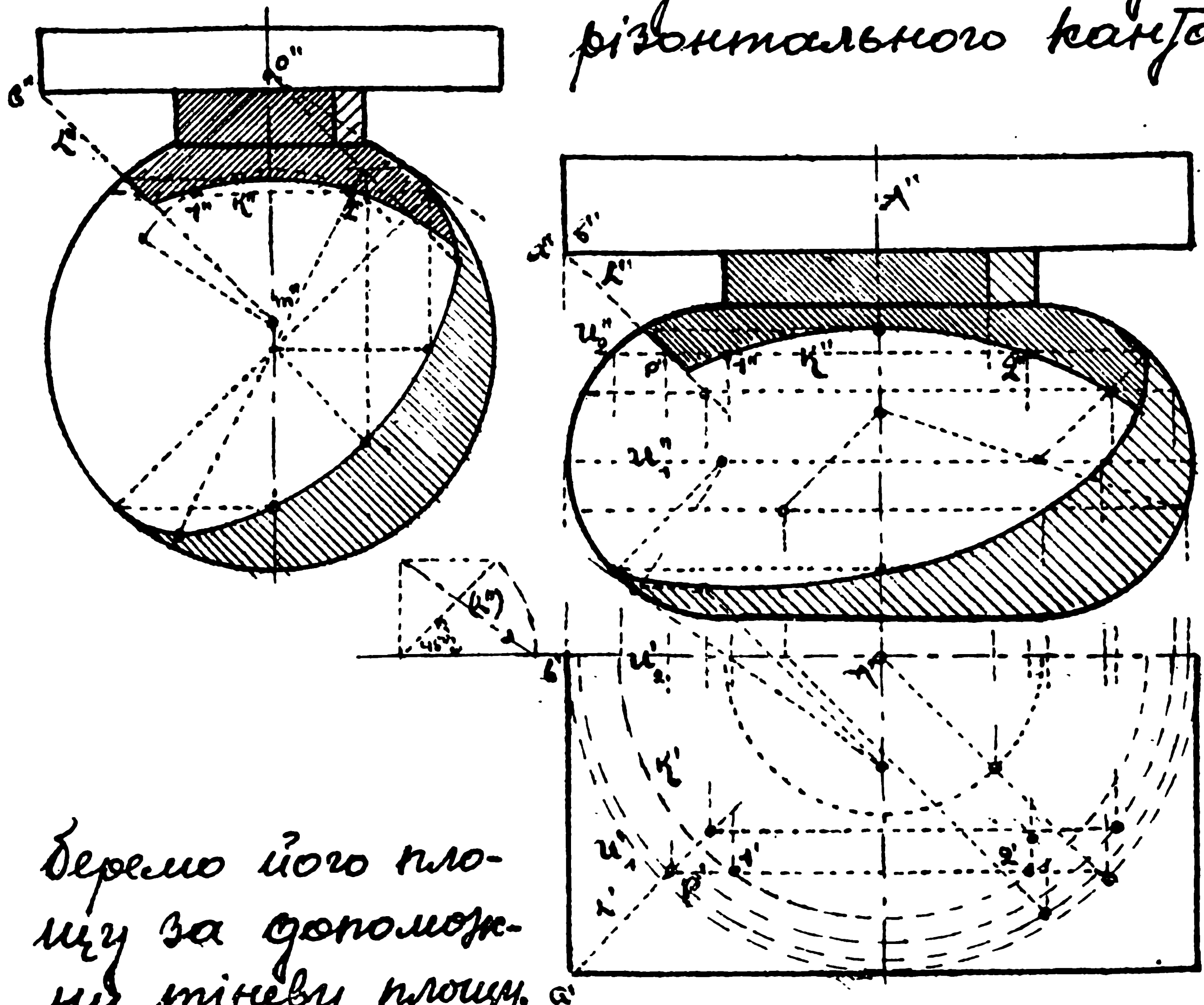
Щоб означити падаючу тінь точки p на тіло обігу, треба найти пересічення луча світла, що проходить через цю точку, з поверхнею обігу. Як звичайно для цього вживають проектуючої площі. Вертікальна проекція K'' кривої перетинення з напрямком світляного луча дає точку p_s''. Горізонтальна проекція її лежить на L'. Точка торкання q тангенти рівнобіжної L до K є точка розділу світла від тіні. Коли треба означити тінь кривої лінії на поверхні, то означивши де-кілька точок вищенаведеним засобом сполучаємо їх на око. Тінь кривої лінії на поверхню є перетинення світляного стовпака з поверхнею. Для цієї конструкції означаємо тіні окремих точок, коли крива плоска.



Фіг. 249.

Тінь квадратної пластинки на поверхню обігу. (Фіг. 250).

Означення падаючих тіней є конструкція лінії поділу світла від тіні на поверхні обігу та на стовпаку. Грані тіней видні тільки в вертікальній проекції. Тінь канта ab, рівновісного до P_2 має напрямок $\mathcal{L}''$ і перетинається горізонтальним кантом, що кінчається в a. Щоб на якомусь рівнобіжному колі K одержати точку тіні, що падає на нього від горізонтального канта,



Фіг. 250.

беремо його площу за допоміжну тіньову площу. Означаємо в ній тінь горізонтального канта, то точка перетинення з K і дасть точку тіні, що шукаємо. Світляний луч, що йде через a, перетинає площу K в $(p'p''')$; горізонталь через p' дає на K' точки $1'$ та $2'$, котрі переносимо на K'' в точки $1''$ та $2''$.

Пересунемо конструкцію в горізонтальних проекціях так, щоб $1'2'$ склалося з $1''2''$, тоді дякуючи вибраному напрямку світла пересунута точка a' лежить симетрично a" відносно 1"2", як вісі симетрії. Центр кола, котрий означає точки тіней, лежить в віддаленні від пересунутої горізонталі — рівному віддаленню канта, що кидає тінь — до вісі повороту. Центр кола симетричного до 1"2", котрий проходить через точки 1" та 2", має в вертікальній проекції до канта, що кидає тінь, теж саме віддалення. На нарисі показана конструкція на вертікальній проекції — тінь на кулю від квадратної плитки Будуємо положення точки m", як віддалення кидаючого тінь канта до вісі A" (проводимо луч через точку b"). Вибіраємо коло K", його радіусом описуємо з m" коло, котре перетинає коло K" в точках 1" та 2". Світляні площі, що кидаються кантами, симетричні й тому фігури тіні конгруентні, що упрощує конструкцію.

Відділ VI.

Аксонометричні проекції

Представлення якогось технічного приладдя в трьох одна до одної взаємно рівновісних напрямках - горізонтальному, вертікальному та боковому - особливо корисно, коли три його головних напрямки поставлені рівнобіжно до трьо осей проекцій. При цьому дві проекції, наприклад, якогось канта, рівні його дійсній величині, а третя перетворяється в точку. Одержується простий, але мало наочний образ предмета, бо в третій проекції лінії перетворяються в точки, а поверхні в лінії.

Коли вимагається мати цілком наочний образ простірного предмета, то йог проектують нормально або нахильно н нову проектну площу, котра нахилен до всіх трьох проектних осей так, що всі головні канти та поверхні виявляються, хоч і не в дійсній величині.

Таким чином, коли бажають мати картину простірного предмета, котра утворювала б враження дійсного предмета, то потрібно простірне тіло розглядати з цілком означеної точки простору, з так званої точки положення ока (точка бачення Augenpunkt), або розглядати його з безмежно віддаленної точки, так що всі лучі бачіння рахуються, як рівнобіжні. Утворення картини предмета в першому випадку, ц. т. коли око займає якусь зазначену точку відносно картинної площі, є справа центральних проекцій або теорії перспективи. При технічному кресленню (напр., машин) бажають утримати положення взаємне ріжних кантів, напр, дуже неохоче зміняють при кресленню рівнобіжність частин (що при центральних проекціях навпаки, як покажемо, робиться дуже часто). Тому при кресленні невеликих частин не вживають метода центральних проекцій. Звичайно вибіраємо ту систему проекцій, при котрій проектуючі лучі рівновісні до картинної площі. Якось це природньо виходить, що, коли розглядаємо якийсь малюнок або що, то ставимо його в таке положення, що дивимось на нього не зкоса, а рівновісно, таким чином, рівновісні проекції найбільш натуральні. При технічному кресленню вживають майже завше три взаємнорівновісних площі, а саме, горізонтальну, вертикальну та так звану бокову, або фронтову. Особливо зручно креслити, коли одну площу предмета ставимо горізонтально, а другу — рівнобіжно до вертикальної площі. Коли, наприклад, при такому положенню треба викреслити куб, то проекції його будуть квадрати. Ця простота негативно одначе впливає на наочність. Таким чином прийшли до думки при технічному кресленні вживати ортогональних проекцій на площу, котра мала б цілком довільне положення відносно простірного предмета. Цей засіб перший раз почав прикладати професор Кембріджського Університету Фаріш. Він ставив площу так, що від координатних осей вона відтинає рівні частини. Такі проекції називаю ізометричними. Коли ж площа відсікає від двох осей рівні частини а від третьої більшу або меншу, то такі проекції наз. діметричними. Нарешті, коли площа відтинає різні частини, то мається випадок тріметричних проекцій. Аксонометричні проекції вживаються не тільки ортогональні, але й нахильні. Нахильні дають велику вільність великі можливості при представлені аксонометричних образів.

Складення аксонометричних образів по ортогональних проекціях чи в прямовісних, чи в нахильних аксонометричних проекціях, користуючись проекціями точок простірного тіла — це тільки одна частина задачі аксонометрії. Друга — це безпосереднье (direct) рішення задач Нарисної Геометрії без переходу через ортогональні проекції.

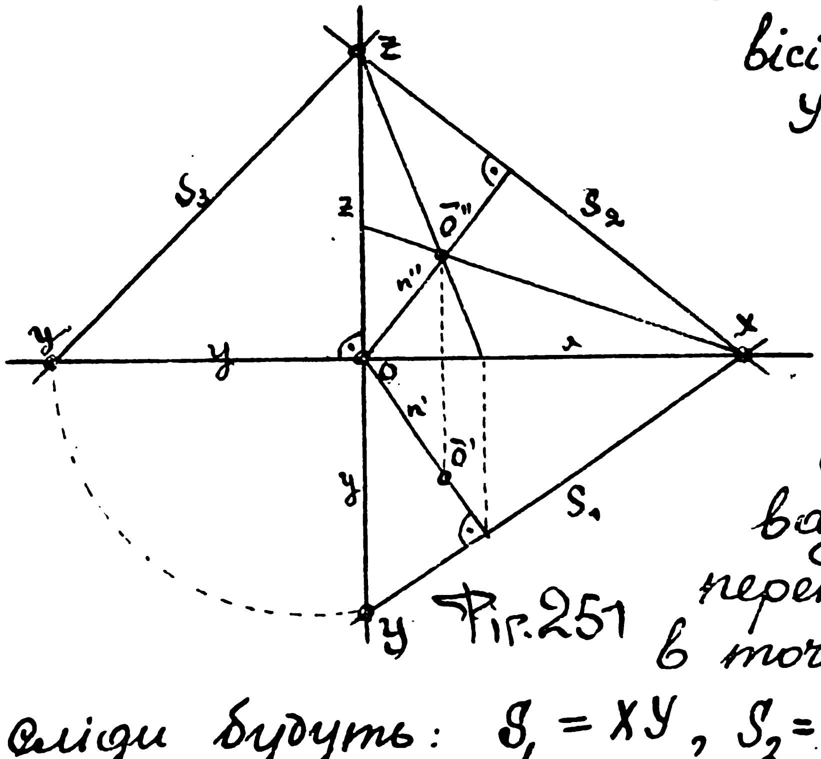
Аксонометрія цілком відповідає потребам креслення та наочности предметів не дуже великих розмірів і тому головним чином вживаються інженерами механіками для креслення ріжних частин машин. Аксонометричні образи великих просторових тіл недоцільні, бо при конструкціях їх не приймається на увагу закони перспективи. При кресленні великих об'єктів (мостів, будинків) для наочности вживають методи центральних проекцій, ц.т. прикладають закони перспекиви. Цими методами користуються архітектори, інженери будівники і т.и.

Прямокутний вісевий хрест. Довжину, ширину та висоту звичайно виміряють по трьом взаємно рівновісним напрямкам. В просторі ці виміри відносяться до прямокутного вісевого хреста з осями X Y Z, котрі виходять з якогось початкового пункта O (origo = початок). Коли беремо якусь нову площу, на котру проектуємо нам предмет, то ця площа перетинає вісі в точках X Y Z. Можна доказати, що так утворений трикутник є гострокутний (коли ця картинна площа нахилена до осей проекцій). І, навпаки, коли є якийсь трикутник, то можна уявити собі віcі, що проходять через його вершини і складають таким чино координатний хрест.

Умови, щоб утворити ортогональні проекції вісевого хреста: ні одна вісь не може бути рівнобіжною до площі трикутника; дві віcі не мусять утворювати прямого кута і кожда третя проходить через тупий кут, що складають дві других.

Аксонометричний образ вісевого хреста.

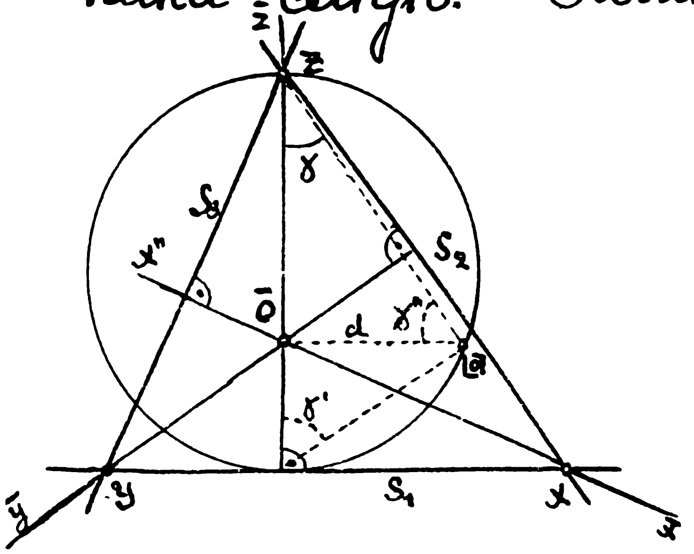
Нехай (фіг.251) три нормальних площі проекцій зазначені через Π_1, Π_2, Π_3. Лінії їх перетинення віcі проекцій $x = \Pi_1 \Pi_2$ $y = \Pi_1 \Pi_3$, $z = \Pi_2 \Pi_3$. Четверта площа — картина площа Π, на котру предмет мусить проектуватись нормально перетинає віcі X, Y, Z в точках X, Y, Z, ц. т. сліди будуть: $S_1 = XY$, $S_2 = XZ$, $S_3 = YZ$. Цей трикутник слідів буде гострокутним бо його площа нахилена до всіх трьох осей. Знаходимо аксонометричну картину $\bar{O}$ початку координат O, як грунтову точку нормалі n,



Фіг.251

спущеної з початку координат $\underline{\underline{O}}$ на картинну площу. Коли сполучимо $\overline{O}$ з точками перетинення слідів XYZ, то одержимо аксонометричні проекції цих осей $\overline{X}\ \overline{Y}\ \overline{Z}$. Представлення в горізонтальних та вертикальних проекціях аксонометр. проекцій ще, власно кажучи, нічого не дає, треба викреслити їх в картинній площі. З цього нарису беремо дійсні довжини сторін трикутника XYZ і викреслюємо окремий нарис.

Аксонометрична картина початкового пункту є точка перетинення висот трикутника слідів. Коли дається трикутник слідів, то початок може бути безпосередньо означено. Коли відоме положення аксонометричного хреста, то можемо означити його положення відносно картинної площі.

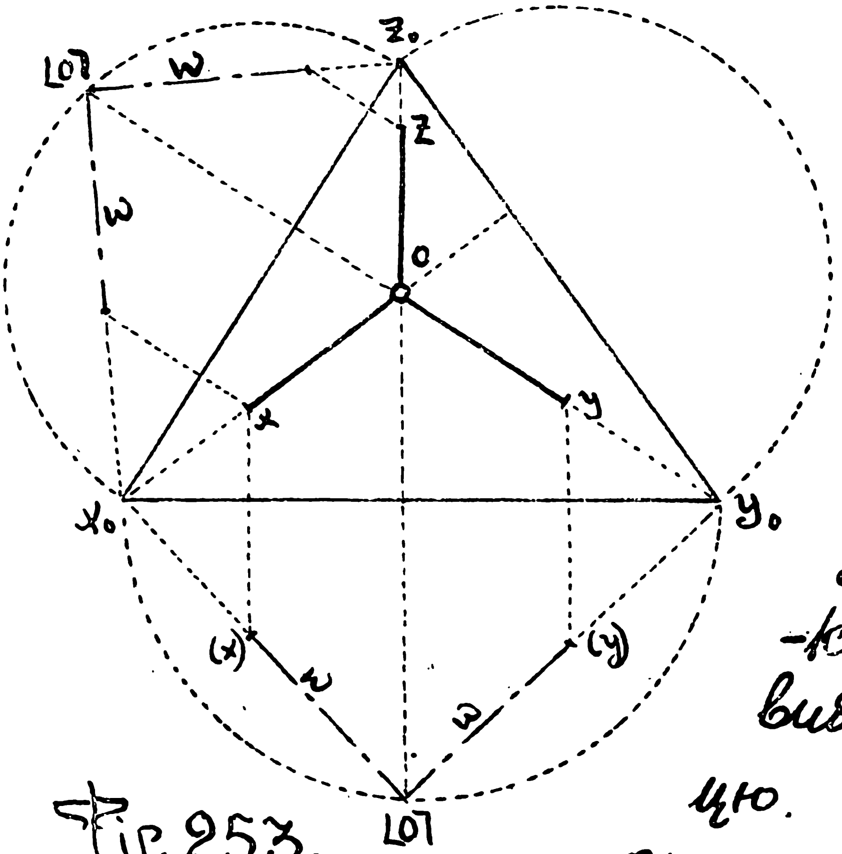


Фіг. 252.

Щоб на данному нарисі означити віддалення точки $\overline{O}$ від картинної площі, складаємо проектуючу площу Z вісі навкруги ZZ" в картинну площу. Перекладена точка $[O]$ падає на нормаль з $\overline{O}$ до вісі повороту і именно на луку кола, що описаний біля ZZ" як диаметра. Віддалення $\overline{O}[O] = d$ рівне віддаленню початку координат до картинної площі. $[O]Z$ є перекладена вісь Z; $\bar{O}Z[O]=\gamma$ кут нахилу вісі Z відносно картинної площі.

Прямокутний вісевий хрест в вісями однакової довжини (фіг.253).

Довжина W нанесена на три вісі прямокутних координат, починаючи від точки O - початку координат. Одержуємо три точки X, Y, Z (в ріжницю від $X_0\ Y_0\ Z_0$) слідів трикутника. Ці кінцеві точки наз. одинокими точками осей -коли довжину W вибіраємо за одиницю. Щоб одержати ортогональні проекції прямокутного вісевого хреста, коли дається довільно гострокутний трикутник, роблять так: поперед усього означають початок координат O, як точку перетинення висот трьох сторін трикутника. Після трикутники Y_0OZ_0, Y_0OX_0 Z_0OX_0 повертаємо біля гіпотенуз до складення в площею проекцій, при чім O

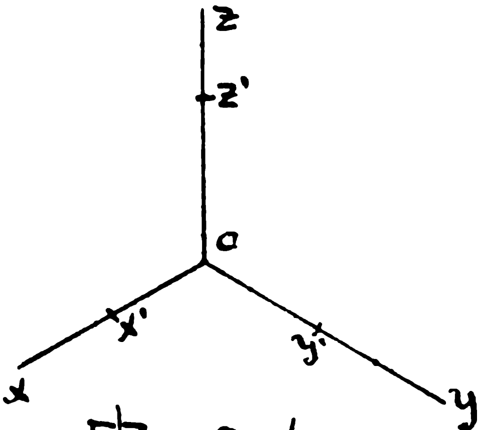


Фіг. 253.

займе три положення [O]. Від кожної точки [O] наносимо W в обидва боки та ставимо складену площу в початкове положення. Таким чином одержуємо довжину осей.

Взаємна залежність скорочених осей.

Нехай OX'Y'Z' будуть прямовісні проекції прямокутного осевого хреста з однаковою довжиною осей OX, OY, OZ — початкової довжини W, то відрізки $l = O'X'$, $m = O'Y'$ $n = O'Z'$ називаємо скороченими довжинами осей. Коли α, β, γ — гострі кути, кот-котрі утворюють осі OX OZ, OY з картинною площею, то $l = W\cos\alpha$, $m = W\cos\beta$ $n = W\cos\gamma$, а $l^2+m^2+n^2 = 2W^2$ Вже ця формула показує, що цілком довільно довжина осей не може бути вибраною, що між ними існує взаємна залежність.



Фіг. 254.

По умові $l \leq W$, $m \leq W$, $n \leq W$, права частина формули $l^2+m^2+n^2 = 2W^2$ буде зменшена, коли замість W поставимо n, m або l, ц.т:

$$l^2+m^2+n^2 \geq 2l^2 \qquad n^2 \geq l^2 - m^2$$
$$l^2+m^2+n^2 \geq 2m^2 \qquad h^2 \geq n^2 - l^2$$
$$l^2+m^2+n^2 \geq 2n^2 \qquad h^2 \leq l^2 + m^2$$

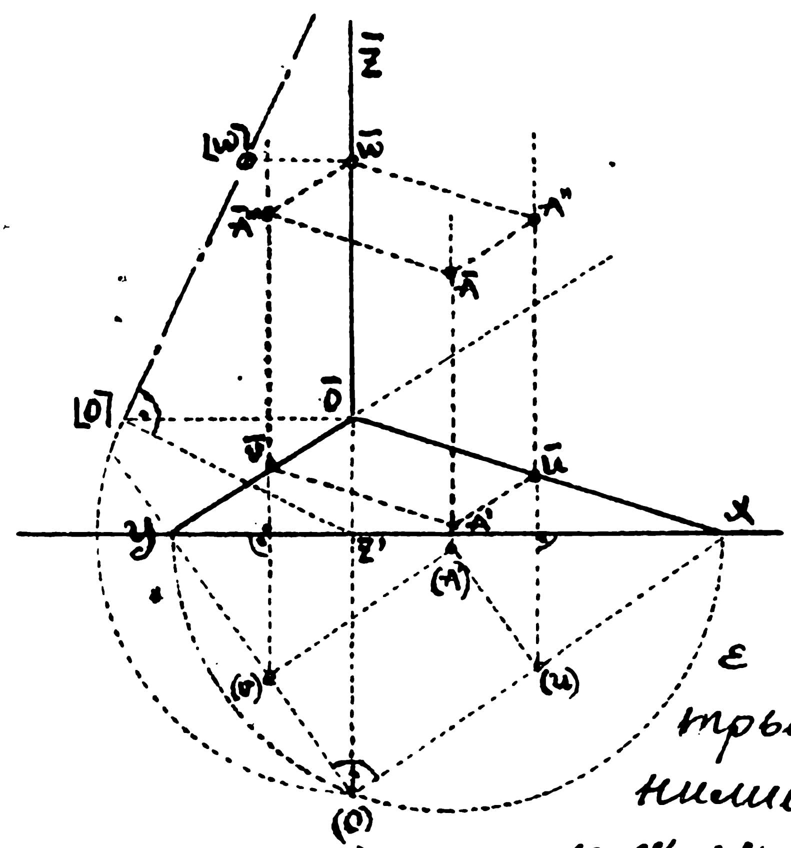
Припустимо, що два відрізка l та m якось означені, тоді ці формули дають межі для вибору третьої довжини n. Довжини l та m можуть бути однієї довжини, або ріжної, m^2-l^2 може бути негативною або рівною нулю величиною. Значить $n^2 \geq l^2-m^2$ $n^2 \leq l^2+m^2$, це є ті межі, між котрими може змінятися n.

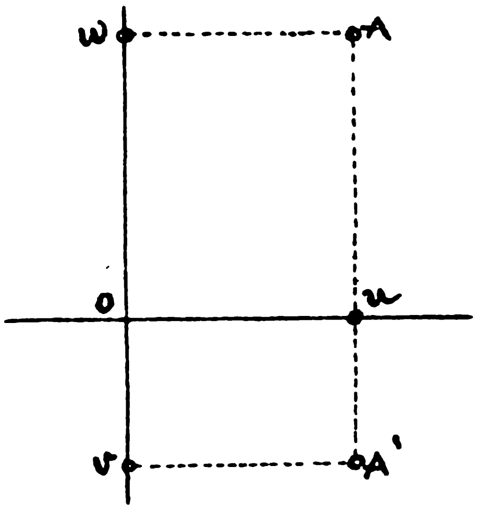
Понеже в кожному трикутнику сума двох сторін ніколи не може бути менше третьої, то значить істнує трикутник, довжини сторін котрого відносяться як $l^2:m^2:n^2$. Такий трикутник називаємо скороченим трикутником, значить, задача скласти прямовісний вісевий хрест зі скороченими осями може бути вирішена так:

Відношення величин $l:m:n$ можна брати довільно, але так, щоб сума квадратів двох була завше більше квадрата третьої. Коли візьмемо відношення 4:5:6 та викреслимо скорочений трикутник UVW, котрого сторони задовольняють умові: $uw : vw : uv = l^2:m^2:n^2$.

Головна задача аксонометрії.

Аксонометрична картина якогось предмета, котрого положення відносно координатних осей відомо може бути означено, коли буде зазначене аксонометричне положення його окремих кутових точок. Понеже кожний такий кут





Фіг. 255.

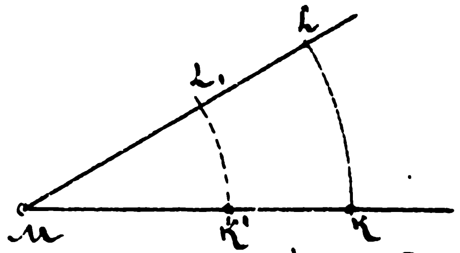
є зазначений своїми трьома простолінійними координатами u v w відносно системи осей (фіг.255), то основна задача аксонометрії показать, як маючи точку, що дається своїми трьома координатами, зазначити її аксонометрично. Рішаємо цю задачу кресленням квадера AA'A''A'''UVWO, котрий утворюється трьома проекційними площами. Нехай на нарисі дається вісевий хрест. Беремо слід якоїсь вісі, напр. X, проводимо S_1 нормально до Z, S_2 через X нормально до Y та S_3 нормально до X. Щоб викреслити площу квадера OUA'V, що лежить в площі $П_1$, повертаємо її навкруги S_1 аж до складення з картинною площею. Складена точка O упаде на нормаль з точки O до S_1 на луку кола, що описаний біля XY, як біля диаметра. (O)X та (O)Y будуть складені положення обох осей

Y та X. На них від точки O наносимо $u = OU$ та $v = OV$. Повернувши площу в первістне становище, одержуємо точки $\bar{U}$ та $\bar{V}$. Через ці точки проводимо рівнобіжні до осей, одержуємо паралелограм $\bar{O}\bar{U}\bar{A}'\bar{V}$ – аксонометричну картину прямокутника $OUA'V$. Щоб зазначити аксонометричну картину, треба ще зазначити довжину одного з чотирьох рівновісних до $П_1$ кантів, напр. канта OW, що лежить по напрямку Z вісі. Для цього складаємо в картинну площу площу Z вісі та наносимо довжину W на складеній Z вісі від $\lfloor O \rceil Z$. З точки $\lfloor W \rceil$ зворотним поворотом одержуємо точку $\bar{W}$, що дає можливість закінчити складення картини квадера. $\bar{A}'$ $\bar{A}''$ $\bar{A}'''$ будуть аксонометричними проекціями точки A. Коли таким чином одержана аксонометрична картина однієї точки, то картина всіх останніх точок одержується просто.

Всі рівнобіжні до якоїсь оси канти предмета виявляються в аксонометричному образі однаково скороченими.

Існує три скорочення для кожної вісі окреме та рівне косінусу кута нахилу даної вісі до картинної площі. Скорочення можна означити так:

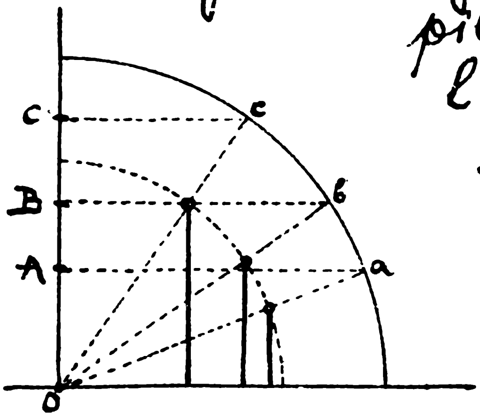
$\frac{O\bar{U}}{OU} = \cos\alpha$, $\frac{O\bar{V}}{OV} = \cos\beta$, $\frac{O\bar{W}}{OW} = \cos\gamma$. Коли сконструіруоане аксонометричне положення якоїсь точки, то відомі три скорочення й можливо наносити канти, рівнобіжні до відповідних осей. Коли розміри предметів даються числами, то, — особливо, коли багато розмірів, — для кожної вісі утворюється окремий поперечний маштаб. Коли приходиться наносити малу кількість кантів або взагалі величин, то користуються так зван. пропорціональним кутом. Напр., пропорціональний кут ω_x для вісі X — описуємо коло радіусом $MK = OU$, наносимо хорду $\underline{KL = OU}$. З допомогою цього кута $\angle LMK$ находимо скорочення (для вісі X) для всякої абсциси MK_1, взятої як радіус. Скорочення хорди K_1L_1 дасть потрібне скорочення.



Фіг. 256

Як уже показувалось, ці три скорочення напрямки взаємно залежні. З нарису (фіг. 256) бачимо, що $\gamma' = 90 - \gamma$, так що з відомої (з Аналит. геометрії) залежности $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$ можливо перейти до рівнання $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma^2 = 1$, або, підставляючи замісць $\sin^2\alpha \dots 1 - \cos^2\alpha$, одержуємо: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$. Коли всі три кути рівні (випадок ізометрії) то $\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$ $\cos\alpha = \sqrt{2/3} = 0,8165 \dots 0,82$.

Сінус-маштаб. Коли маємся прямовісний вісевий хрест з осями OX, OY, OZ, однакової довжини W в проекціях, рівних O'x'=l, O'y'=m, O'z'=n, то при конструкції якогось простірного тіла по цим осям можливо користуватися так зван. сінус-маштабом. Будуємо коло точки O прямим ку описуємо луку радіуса R=W, та на рівновісному боці наносимо l=OA, m=OB, n=OC. З точок A B C проводимо горізонталі до перетинення з лукою кола та проводимо радіуси до точок перетинення. Коли треба якусь довжину зменшити в відношенні l:W, m:W, n:W, то цією довжиною описуємо з точки O' луку. Вона перетинає лучі в точках проведених радіусів, вертікальне віддалення котрих до горізонтального каїна прямого кута і дає довжину в данному віддаленні.

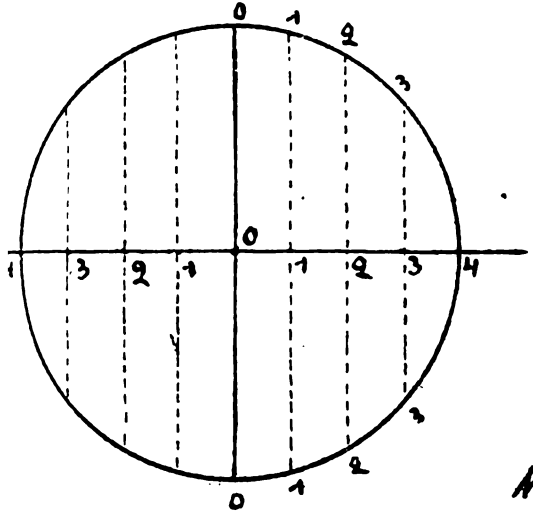


Фіг. 257.

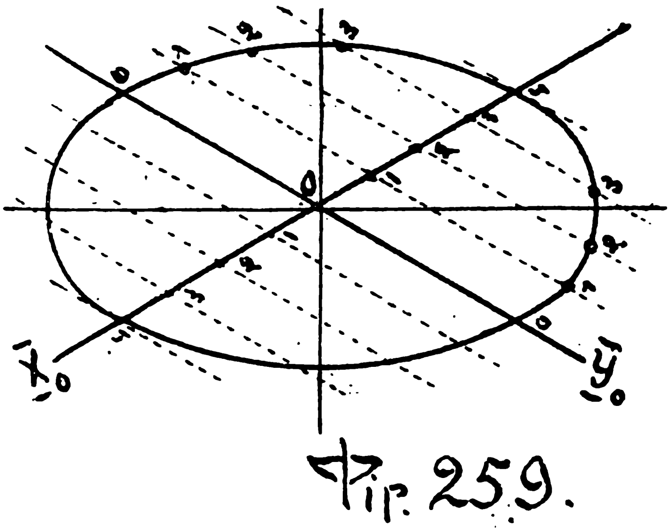
В ізометричних проекціях осі X Y Z мають однаковий нахил відносно картинної площі й складають між собою однакові кути в 120°. Координати звичайно наносять не в скороченому виді, а в дійсну величину й тому в аксонометричних проекціях одержується побільшення проти дійсного в $\frac{1}{0,8165}=1,22$ рази.

Коло, що лежить в площі XY, представити в ізометричних проекціях.

Через центр (фіг.258) проводимо два взаємно рівновісних диаметра — як вісі X та Y — котрі відповідають в ізометричних проекціях X_0 Y_0. Поділяємо диаметр, що складається з X на якусь кількість частин, напр., на 8 і без поменшання переносимо ці частини від O_0 на X_0 і через ці точки поділу X_0 проводимо рівнобіжно до Y_0 і на них відкладаємо хорди 11 22 33.... — так одержуємо картину ізометричного кола (фіг 259).



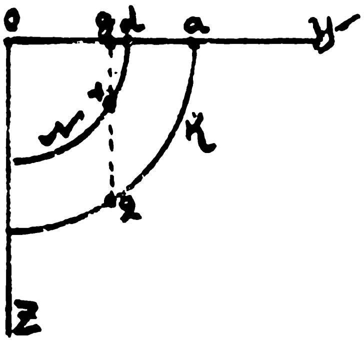
Фіг.258.

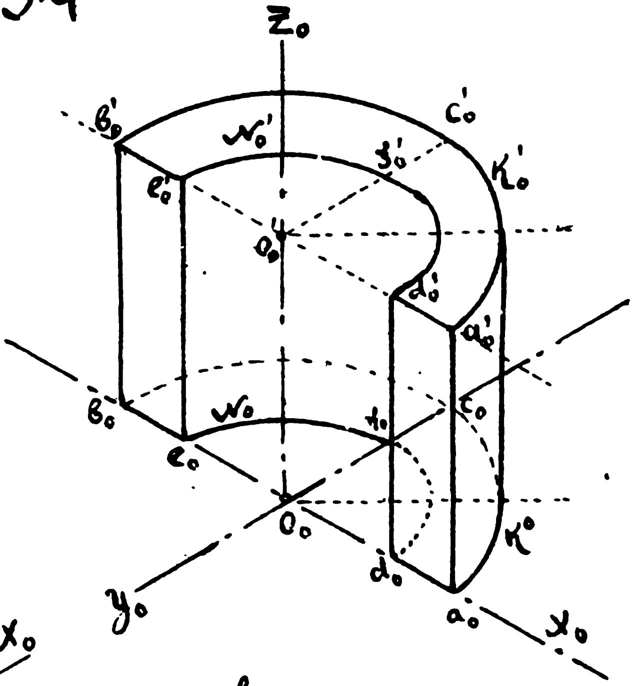


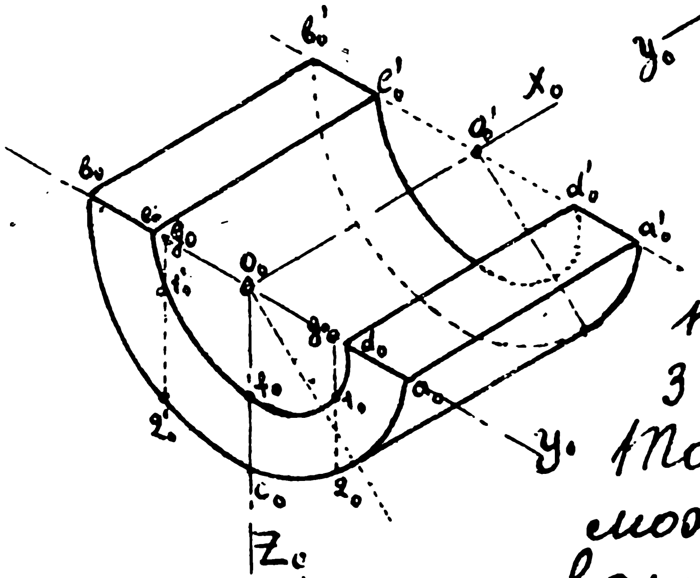
Фіг. 259.

Викреслити порожній колообразний півстовпак в ізометричних проекціях, коли вісь стовпака складається з Z віссю.

Нехай (фіг.260) X_0 Y_0 Z_0 буде картина вісевого хреста. Наносимо зовнішній та внутрішній радіуси стовпака від O_0 по восям X_0 та Y_0: O_0a_0, O_0b_0, Oc_0, O_0d_0, O_0e_0, O_0f_0 та конструюємо обидва еліпса K_0 та N_0 цілком як в попередньому випадку. Коли O_0O_0' є довжина вісі стовпака, то проводимо через O_0' рівнобіжні до X_0 та Y_0, наносимо на них зно—







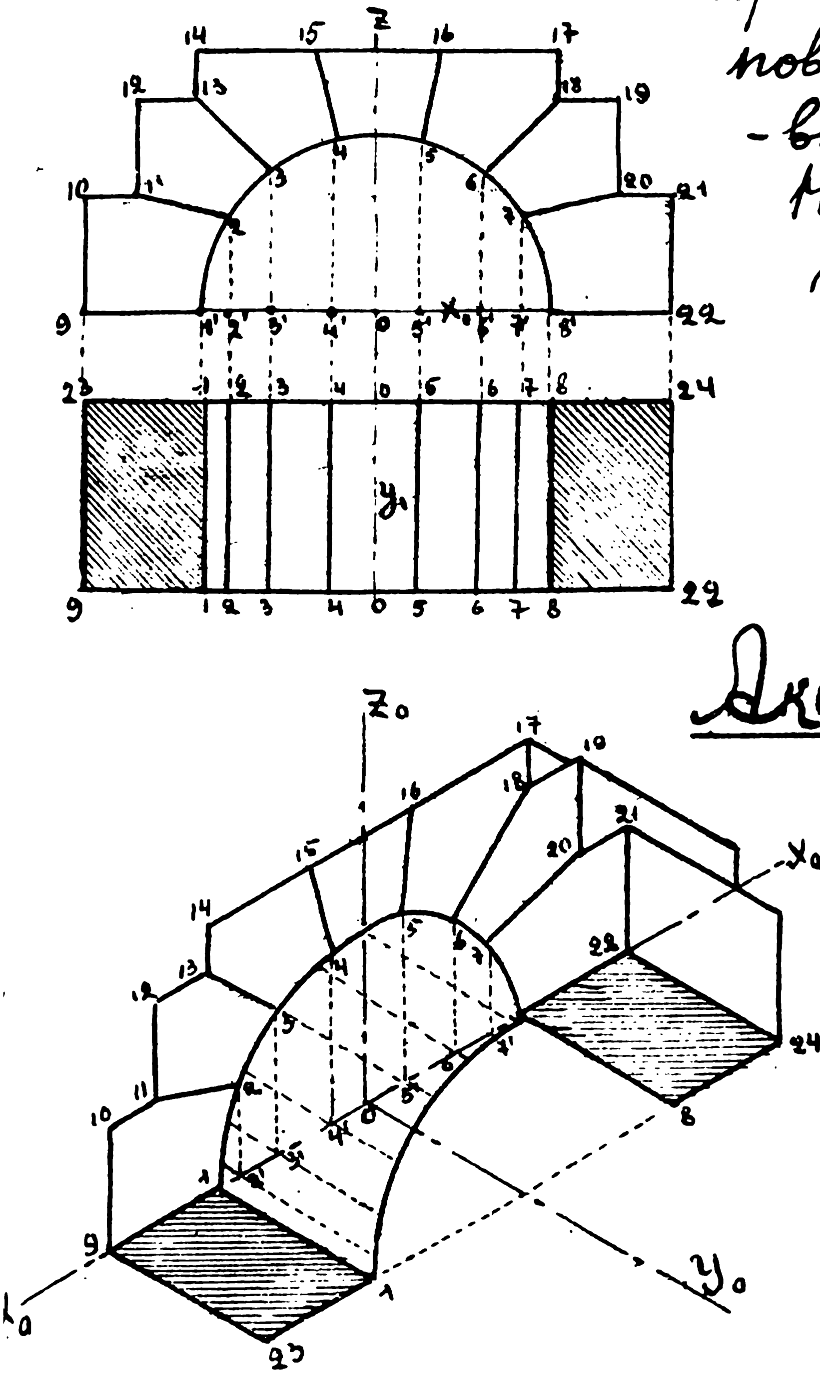
Фіг. 260.

ву радіус стовпака. Еліпси K_0' та N_0' конгруентні з еліпсами K_0 та N_0. (Таким саме чином можна сконструювати основне коло стовпака, коли воно лежить в площі YZ а вісь стовпака складається з осью X. В цьому випадку знову конструюємо конюгіртні радіуси O_0a_0, a_0b_0 та a_0c_0; то так само O_0d_0, o_0e_0 та O_0f_0 дають вісі або проекту g_2.

Дається горізонтальною та вертикальною проекцією каманий свод, требайого представити в ізометричних проекціях так, щоб його було видно знизу (ф. 261)

Вибіраємо вісевий хрест так, як показано на нарису, то вертикальна проекція для кожної точки означає X та Z координати; в горізонтальній проекції мається відповідна проекція Y-вісі.

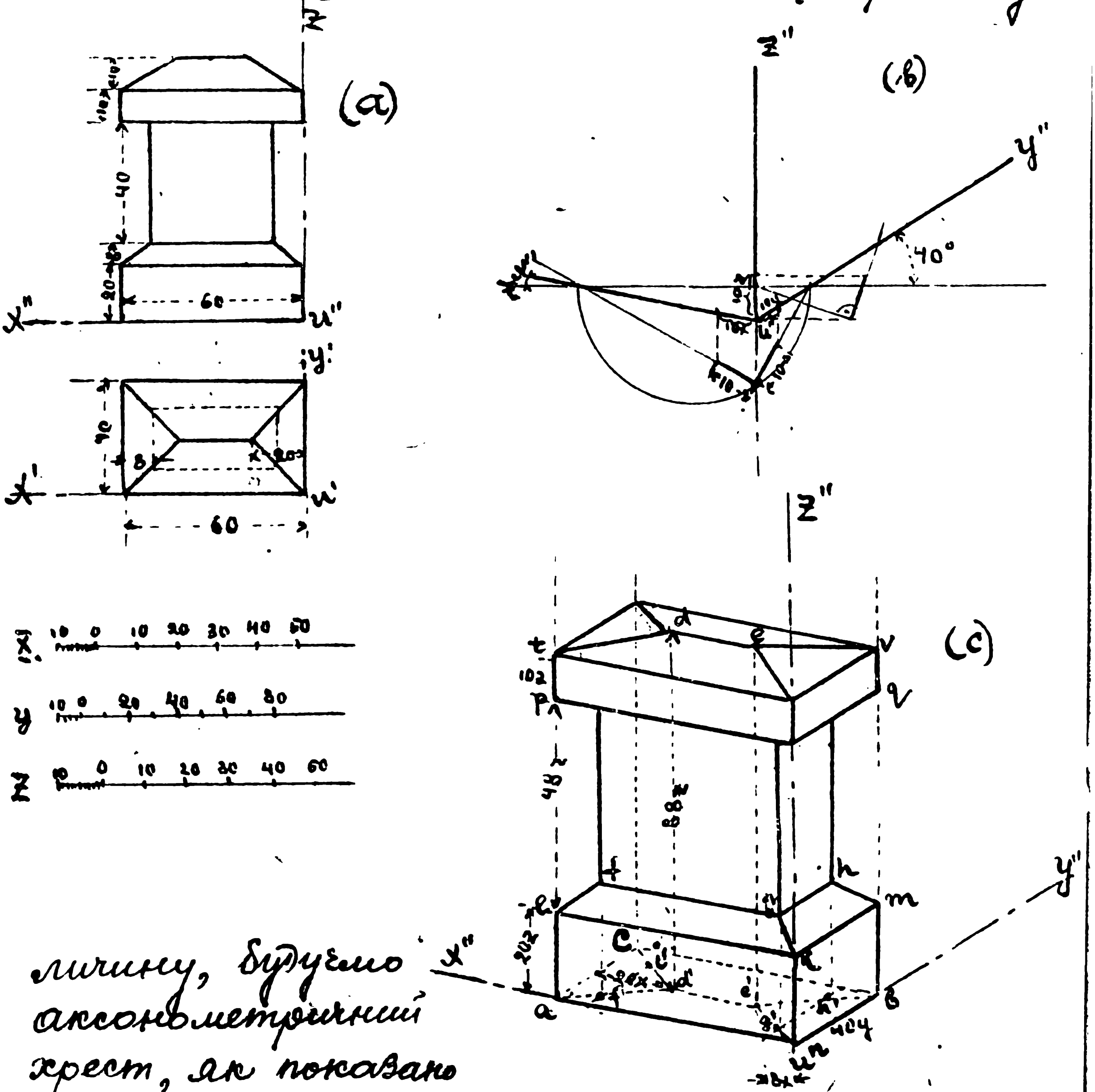
На ізометричному хресті відкладаємо координати, не скорочуючи рівнобіжно до восей X_0 Y_0 Z_0.



Фір. 261.

Аксонометричне виображення камяної тумби, що дається своєю горізонтальною та вертикальною проекцією (фіг. а)

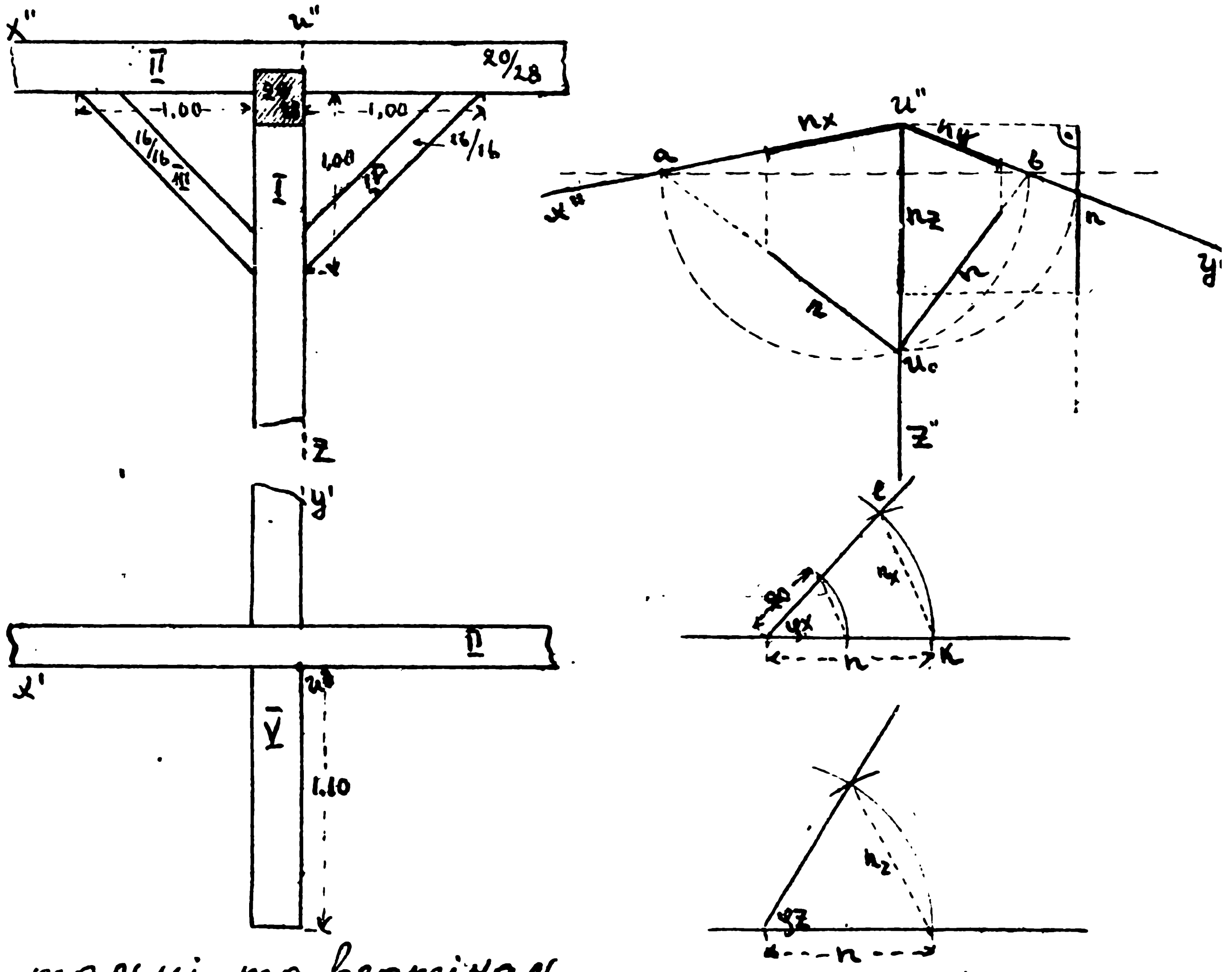
Нехай дається горізонт. та вертик. проекції тумби в маштабі 1:25. Треба представити її аксонометричних проекціях 1:15 Беремо кутову точку И; нехай вона буде початком координат в горізонтальн. проекціях (XY) в вертикальних (XZ). Для цієї точки И будуємо аксонометричний хрест, так що якась основна довільна величина 10 буде для осей 10_x 10_y 10_z (фіг.262 b) з допомогою котрих відкладаємо віддалення по осям X,Y,Z. Понеже ми взяли маштаб 1:15, то то $l = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ сантім. Маючи цю реальну величину, будуємо аксонометричний хрест, як показано на малюнку(ф. в)



Фіг. 262

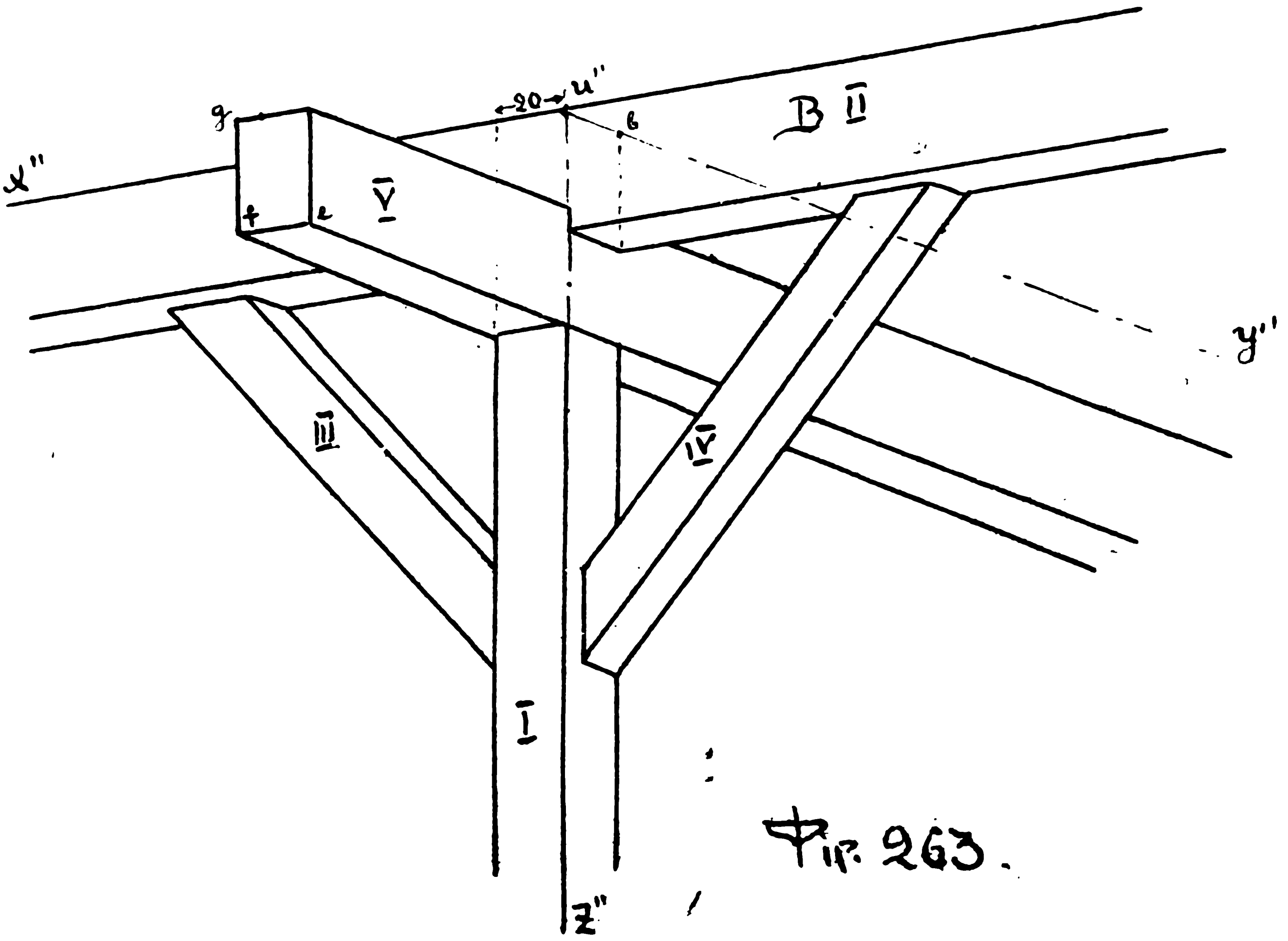
При подібних предметах завше рекомендується перш за все сконструірувати аксонометричну основу, що лежить в площі (XY). Щоб основу, яку беремо з нарису(ф. α) представити аксонометрично, треба тільки, користуючись вісевим маштабом, відкладати відповідні величини по відповідним осям. $U_n a = 60_x$ (ц. т, 60 одиниць X маштаба). $U_n в = 40_y$ і автоматично означити точку $\underline{e}$ шляхом проведення рівнобіжних. Сполучаємо середини ac та $u_n b$; на простій сполучення відкладаємо по 20_x, одержуємо точки d' та e' і ці точки сполучаємо зі всіма кутами $a, c, u_n\ b$. Від точок a та u_n наносимо по 8_x і через ці точки проводимо рівнобіжні до Y, то вони перетинають раніще проведені прості в точках $f'\ i'\ g'\ h'$. Аксонометрична картина доповниться, коли з кутових точок рівнобіжно до вісі Z відкласти довжини кантів, взятих в вертикальної проекції (фіг.) та звичайно проведених в Z маштабі. Наносимо, напр., від 20_z 48_z 10_z, одержуємо картини точок l p t. Точки d^n та e^n одержуються, коли наносимо 88_z. Картини точок $f^-\ i\ g\ h^-$ одержаться, коли від точок $f'\ i'\ g'\ h'$ нанесемо 28_z. Де-які точки одержуються скоріще, як взяти на увагу рівнобіжність кантів Одержані точки сполучаємо, при чім ті канти, котрі цілком не видимі, не креслимо. Хто звик до такого креслення, той не викреслює спочатку основи, але послідовно будує все тіло. В нашому прикладі робиться так: будують призму на $uacbklmn$. Щоб одержати основу $gfih$ другої призми, викреслюємо від k до g координатну систему ($8_x\ 8_y\ 8_z$) і від g^n відкладаємо $g^n f^n = 44_x$ та $g^n h^n = 24_y$. Відклавши висоту призми (40_z), одержуємо невидимий верх f'h'g'i,. Так само закінчуємо креслення верхньої плити.

Викреслити аксонометричний образ дерев'яного моста (фіг. 263) Сполучення складається з п'яти балок (I II III IV V). Даються горізонтальні та вертікальні проекції. Балки I III IV квадратні, II та V - прямокутні. Поневже для креслення потрібна тільки невелика кількість розмірів, то можна обмежитись так зван. кутовим маштабом. По взятому розміру e означаємо e_x e_y e_z по аксонометричному хресту, як показано на нарисі. На підставі цих скорочень можна збудувати кутовий маштаб, а



Фіг. 263.

саме: розміром n описуємо луку та будуємо такий кут, щоб хорда $kl = n_x$, годі, щоб одержати скорочення, скажемо для 20, досить описати цим радіусом луку і взяти циркулем



Фіг. 263.

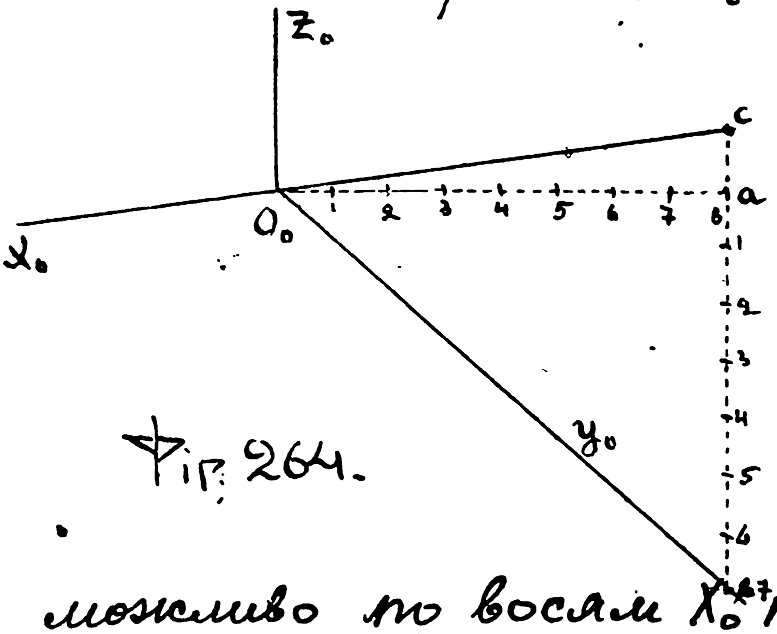
довжину відповідної хорди що й дасть потрібне скорочення. Так само можливо збудувати кутові маштаби для скорочень по вісі Y та X.

Коли вимагається це деревяне сполучення викреслити в 1/20 натуральної величини, то перш за все креслимо маштаби (10сант. маштаб = $5\,{}^{m}/_{m}$ дійсним) та починаємо знову з креслення частини, що лежить в площі XY. Відкладаємо від U розміри

V та I по восям X та У – довжини, що відповідають 20 взятим по кутовим маштабам q_x та q_y. Таким саме чином робимо й при викресленню других частин.

Коли дві вісі рівні, а третя не рівна, маємо так зван. діметричні проекції. Звичайно вибіраються рівними X та Z. Найбільш наочні образи одержується, коли беремо $a=b=1$ а $c=\frac{1}{2}$.

Щоб збудувати напрямки восей, вживають такого засоба: беруть положення Z_0, вибірають початок O_0, та через O_0 проводять до Z_0 рівновісну. Відкладаємо $O_0a=8$, $ab=7$ та $ac=1$. Проста, що сполучає O_0c та O_0b дає напрямок X_0 та $У_0$. При діметричних проекціях, коли справа йде тільки про креслення аксонометричного образу, можливо по восям X_0 та Z_0, для котрих мусять бути однакові скорочення, наносити координати незменшиними – для третьої координати треба наносити половину дійсної координати. В такім разі одержуємо побільшений, але подібний до дійсного аксонометричного образу, вид і можна з нього по напрямку двох осей брати дійсні розміри тіла, то третьому



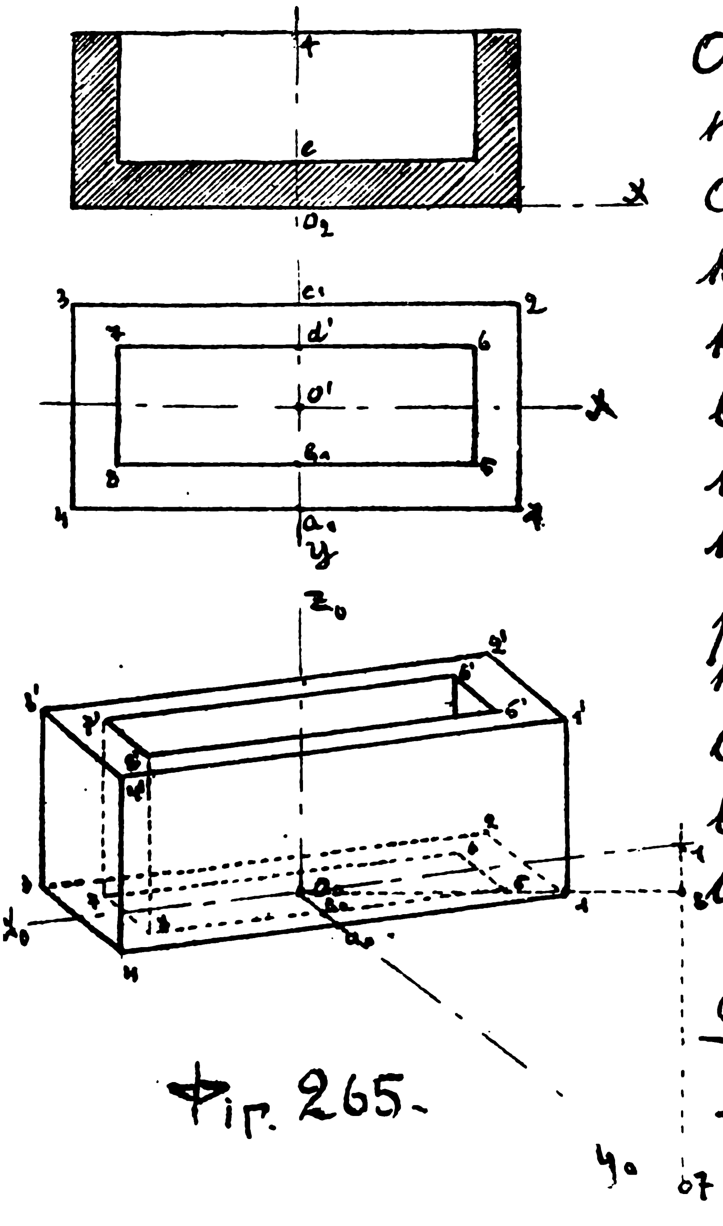
Фіг. 264.

же вони мусять бути подвоєними, щоб одержати дійсну величину.

Для двох осей скорочення (XZ) = 0,9428, а для вісі $Y_0 = 0,4744$. Дякуючи відкладенню дійсних величин координат, одержується побільшення $\frac{1}{0,9428} = 1,06$ раз.

Даються горізонтальна та вертікальна проекції коробки, треба її представити діметрично (1 : ½ : 1) і именно в видом зверху.

По правилу, що дане попереду, викреслюємо аксонометричний хрест. На вісі Y від O_0 з даних проекцій відкладаємо половину дійсних величин $O_1a_1 = O_1c_1$, $O_1b_1 = O_1d_1$, по напрямку O_0a_0, O_1c_0 O_1b_0. Через точку a_0 проводимо рівнобіжну до вісі X_0 та відкладаємо довжину 1–4. Через крайні точки проводимо рівнобіжні до вісі Z_0 та відкладаємо висоту, яку беремо з вертікальної проекції.

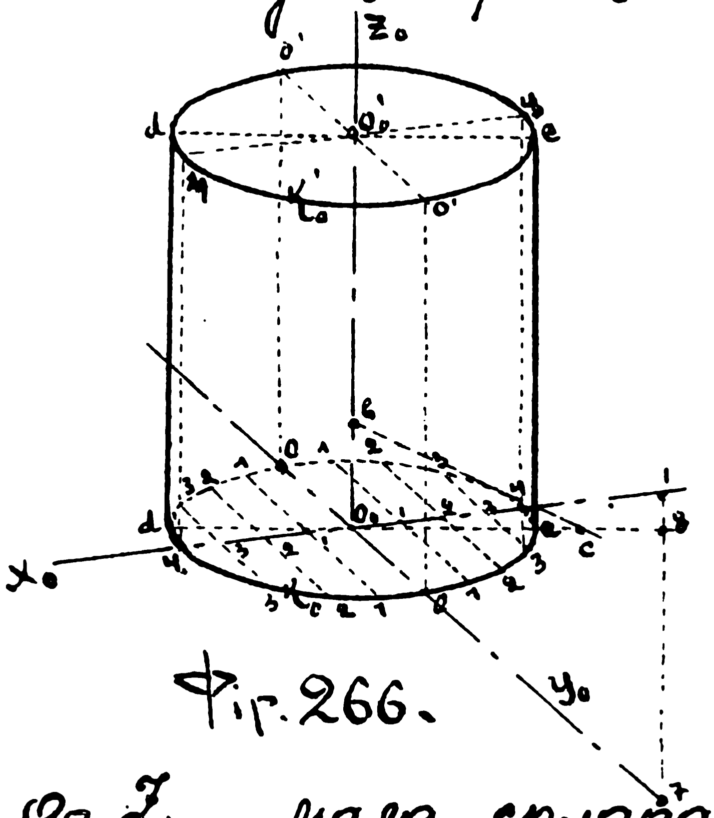


Фіг. 265.

Представити коло, що лежить в площі XY в діметричних про-

екціях Проводимо через центр діметричний восевий хрест. Наносимо по вісі X_0 від початку поділки без зміни. Координати рівнобіжні до вісі Y_0 треба відкладати в половинній довжині.

2) Представити прямий коловий стовпак, основа котрого лежить в площі XY, в діметричних проекціях (фіг.266). Вісь Z мусить складатися з віссю стовпака, тоді діметрична картина восевого хреста для основи означається, як в попередній задачі. Наносимо від центра O_0 по вісі Z висоту стовпака, то O_0' буде центром верхньої основи K_0', котра буде конгруентна з нижньою.

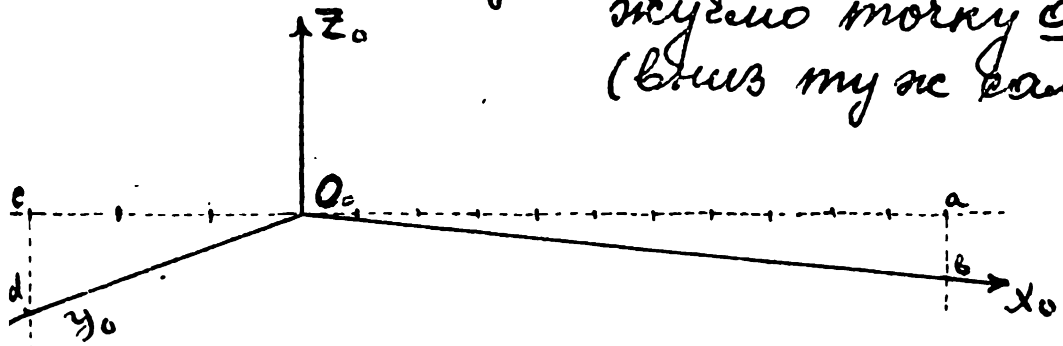


Фіг.266.

Примітка: З допомогою кон'югатніх діаметрів O, O та 4, 4 означаємо головні вісі еліпса. Велика вісь буде рівнобісна до Z_0, мала складається. Рівнобіс O_0a до O_0O дає точку a. Проста, що сполучає a.4, перетинає вісі еліпса в точках b та c, так що 4c рівне половині малої вісі, а 4-b половині вісі великої.

3) Коли всі три вісі не рівні, то маємо

так звані триметричні проекції. Найбільш наочні образи одержуються коли $a=9$; $в=5$ $c=10$. Конструкція восевого хреста робиться так: на вісі Z_0 беруть точку O_0 та проводять через неї рівнобісну до Z_0. Відклавши на ній одинадцять частин, одержуємо точку a, $aв=1$ (вниз ту ж саму одиницю). Так само $O_0c=3$ та $cd=1$ Лінія що сполучає точки в та d з O_0 дає напрямки осей X_0 та Y_0. Конструкція ця відноситься до взгляду знизу. При продовженні осей одержується конструкція для виду зверху. Ріжниця тільки в тім, що в такім разі відкладається не вниз, а вгору.



Фіг.267.

При триметричних скороченнях маємо скорочення : 1..... 0,88; 2....0,49; 3... 0,98. Відповідно цим числам мусять бути зменшені координати при їх нанесенні. Коли справа йде тільки про складення аксонометричного образу, то звичайно для вісі Z не скорочують дійсної величини координат, для вісі X поменшують на 1/10, а для вісі Y поменшують на 5/10 і таким чином поменшині дійсні величини координат прикладаються, як аксоно-

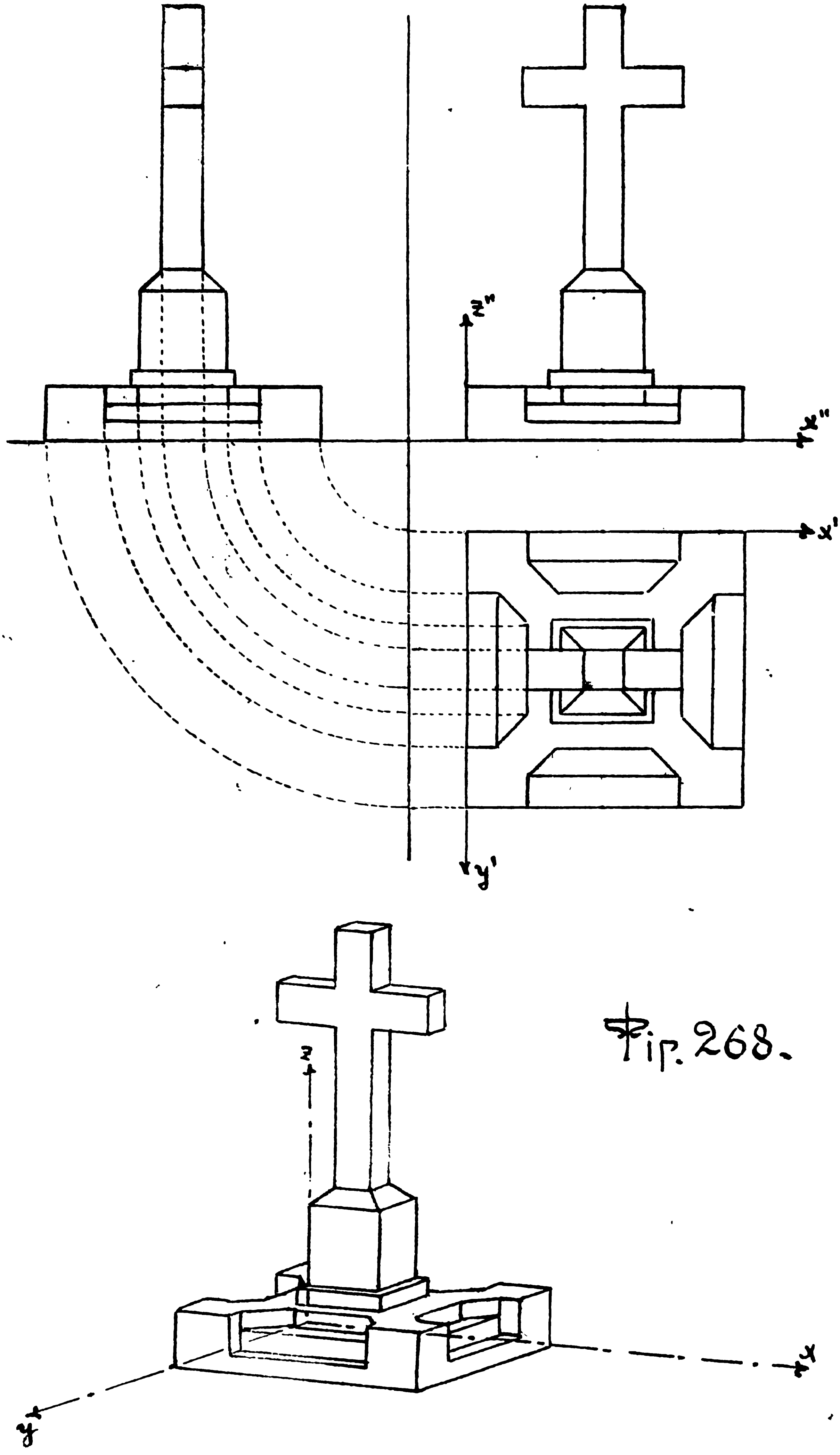


Fig. 268.

метричні. Так утворений аксонометричний образ є подібний до дійсного аксонометричного, але побільшений в 1:0,98=1,02раз

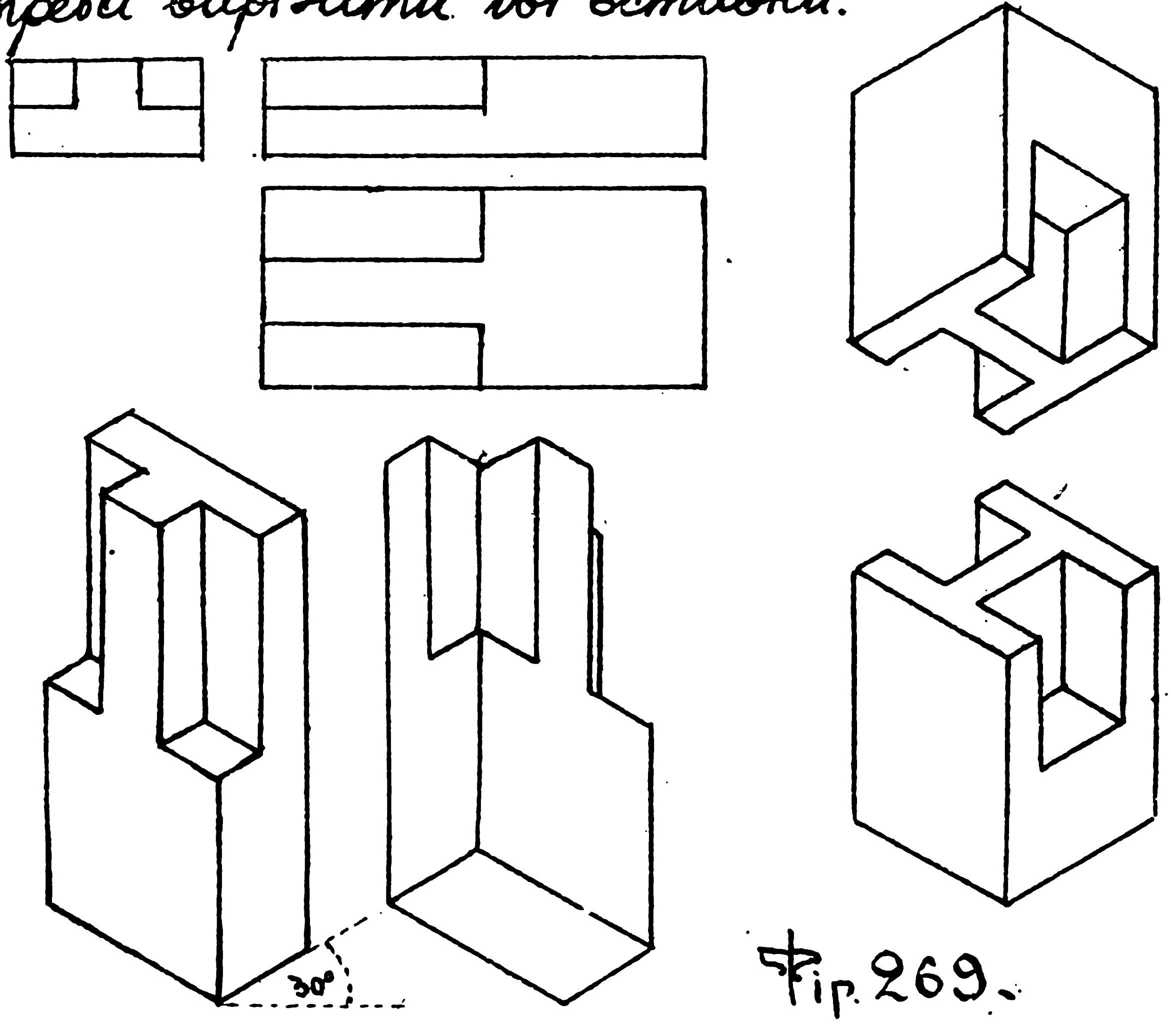
Представити хрест в триметричних проекціях по його звичайним проекціям. Будуємо перш всього триметричний аксонометричний хрест і по напряму його осей відкладаємо довжини, що взяті зі звичайних проекцій, по напрямку рівнобіжному до відповідної вісі та зменшиних в відповідні́м відношенню.

Примітка. За останні часи в Німеччині все більш та більш поширюється вживання так званого „Perpektivischefreihandkroken", ц. т. креслення від руки чи в ізометричних чи в діметричних проекціях в перспективі тих приладів, з котрими студентові приходиться мати діло. Понеже таке навчання починається ще в середній школі, то нарешті студент має такий навик, що досить складні моделі закреслюються ним від руки дуже швидко та наочно. Такіх кроків вживається не тільки при студенських роботах, а й при рекламуванні та в каталогах. Ці кроки, правда, не можуть бути використані для фактичного утворення на фабриці машини або прилядя, але вони не мають такої мети; мета – представити предмет в наочній формі. Всі вони, зви–

чайно ґрунтуються на підставах Нарисної Геометрії. Практика виробила де-які прийоми, котрі значно полегчують складення таких креслів. Зробимо де-які вказівки та дамо де-які приклади.

Коли приходиться робити розрізку, або вирізувати якусь частину тіла, то треба це робити именно так, щоб площі, що обмежують вирізи, були рівнобіжні до взятих площ проекцій.

Приклад: З деревяного бруска квадера треба вирізати дві вставки.

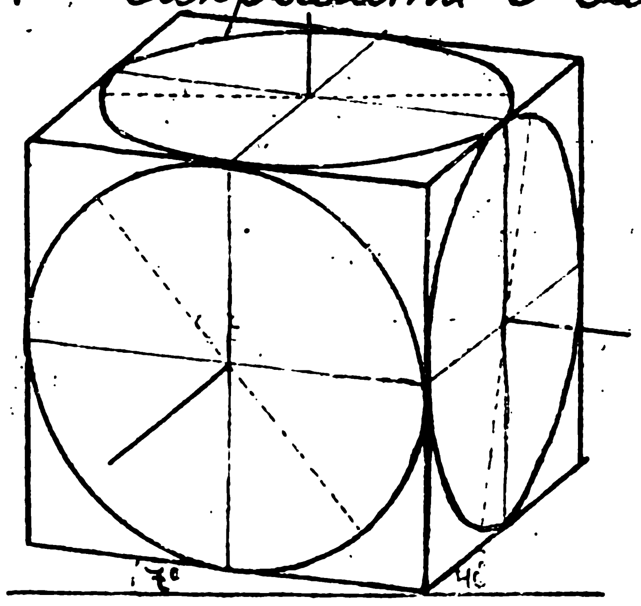


Фіг. 269.

Взагалі вирізки в простолінійних формах не представляють особливих труднощів. При крокируванні криволінійних форм, перш всього й більш всього приходиться мати справу з колом.

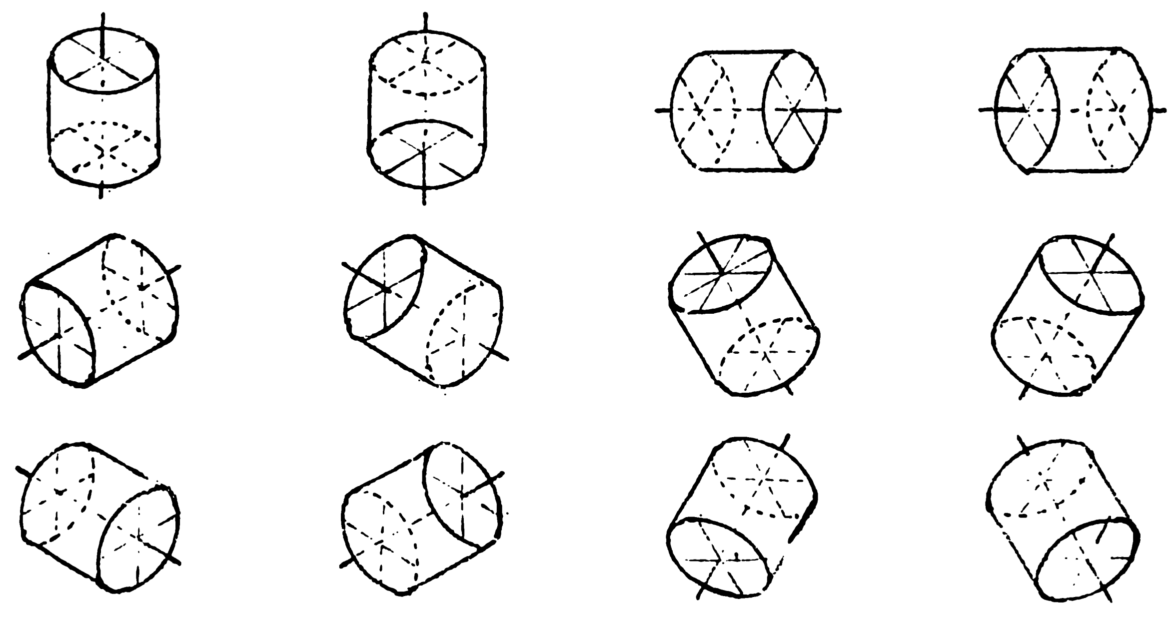
Проекції кола — еліпс. При крокуванню від руки еліпс викреслюють по восям. Найбільш вдалі фігури еліпса одержуємо, коли довжина осей відповідає так зван. золотому січенню 3:5 або 5:8.

Коли еліпс викреслений та намічений напрямок вісі обороту, то цим самим означене все тіло. Еліпс так часто приходиться викресловувати, що дуже корисно викреслити в великому маштабі всі прикладені зразки (фіг. 270).

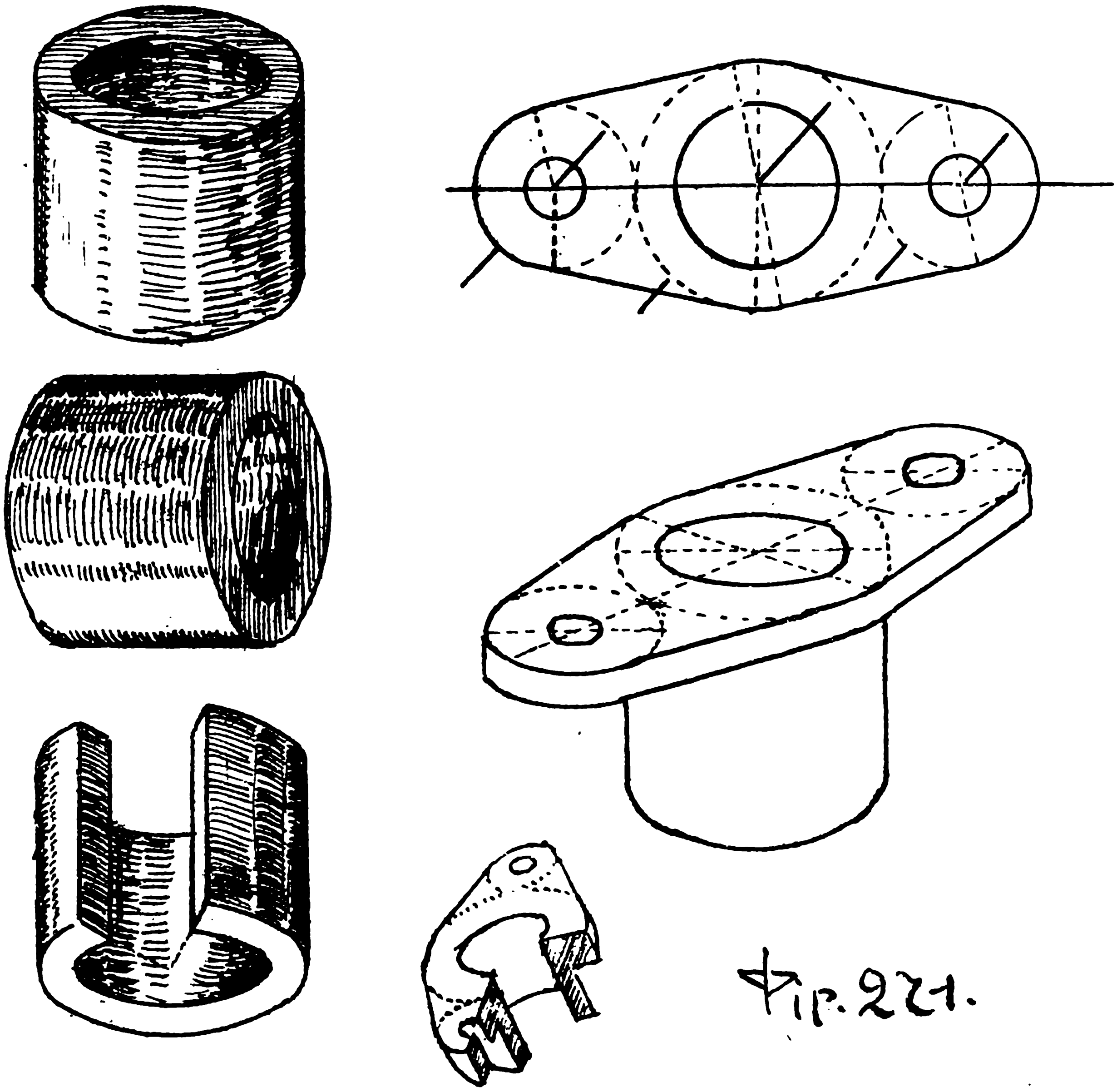


Фіг. 270.

При кресленню об'єктів, де кола лежать в рівнобіжних горізонтальних площах, може бути вжито засобу, що показаний на при-

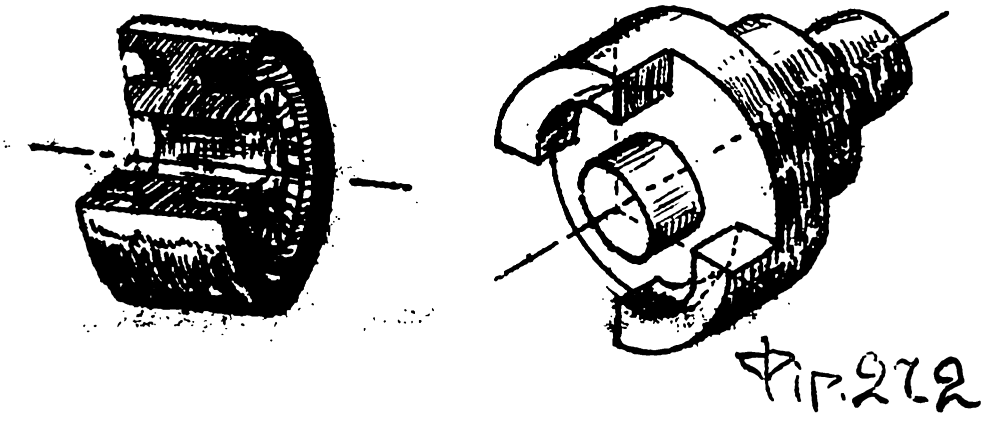


веденому прикладі (фіг. 221).



Фіг. 221.

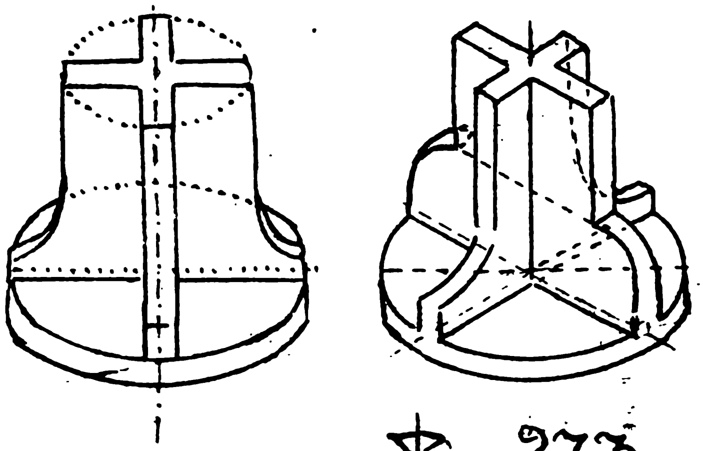
Коли кола лежать в прямовісних площах та мають одну загальну вісь обігу, то предмет виявляється, як це показано на нарису шківа для ремінної пе-



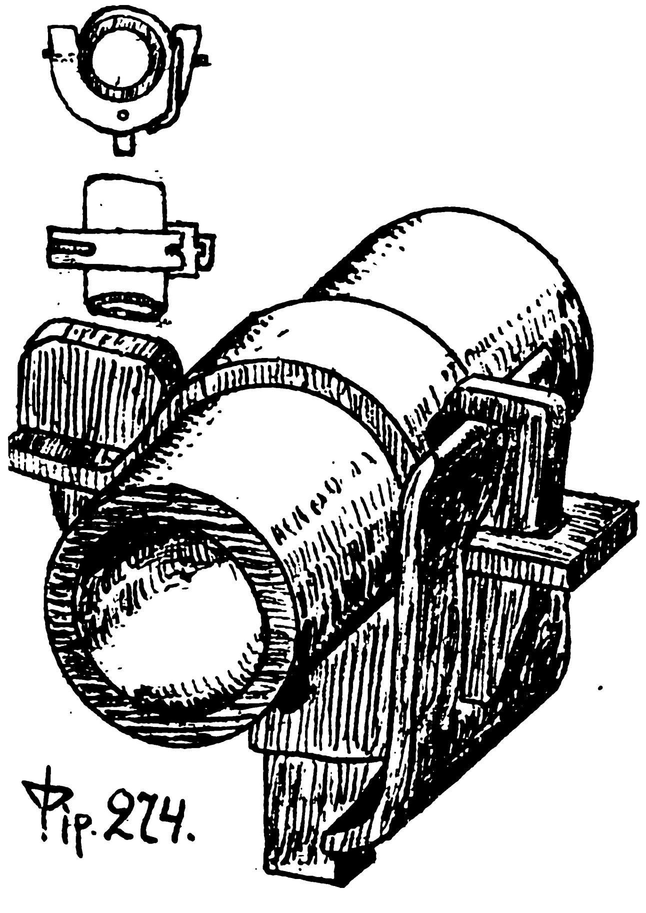
Фіг. 222.

резачі та сполучення Шарпа (фіг.272).

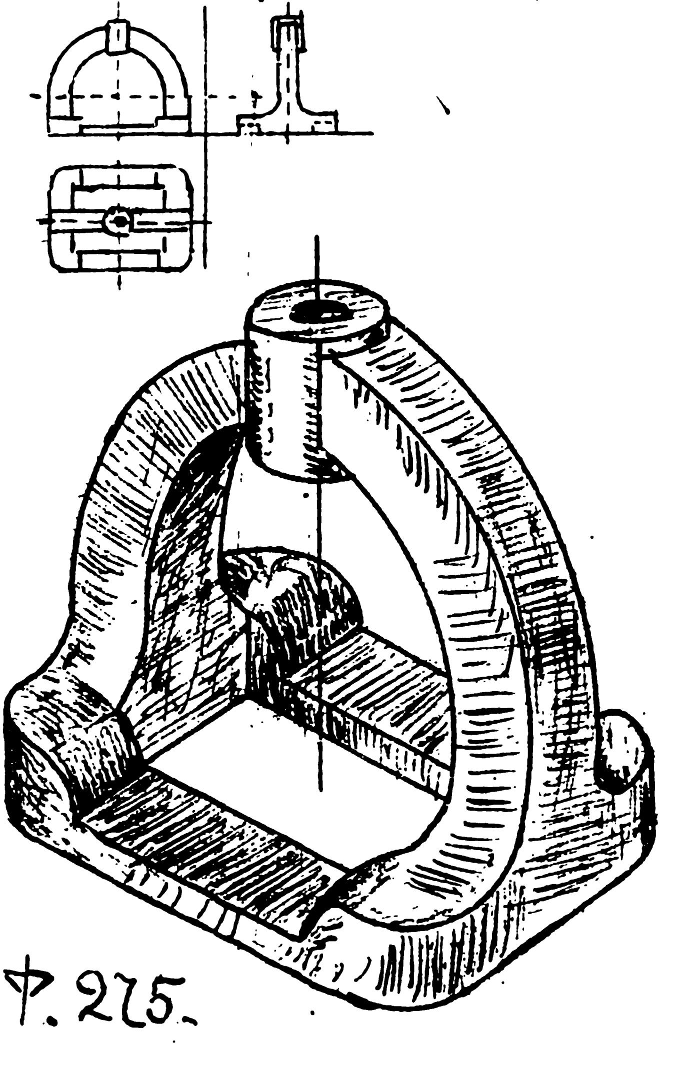
Треба звернути увагу, що іноді хоч приладдя й вірно викреслене, але положення його взято невдало, так що образ одержується дуже не наочним, так наприклад: ліва фігура (фіг.273) цілком не наочна. Взагалі при крокіруванні дають горізонтальну, вертикальну а іноді ще й бокову (третю) проекцію, як це показано на прикладі (ф.274) та (фіг.275).



Фіг. 273.

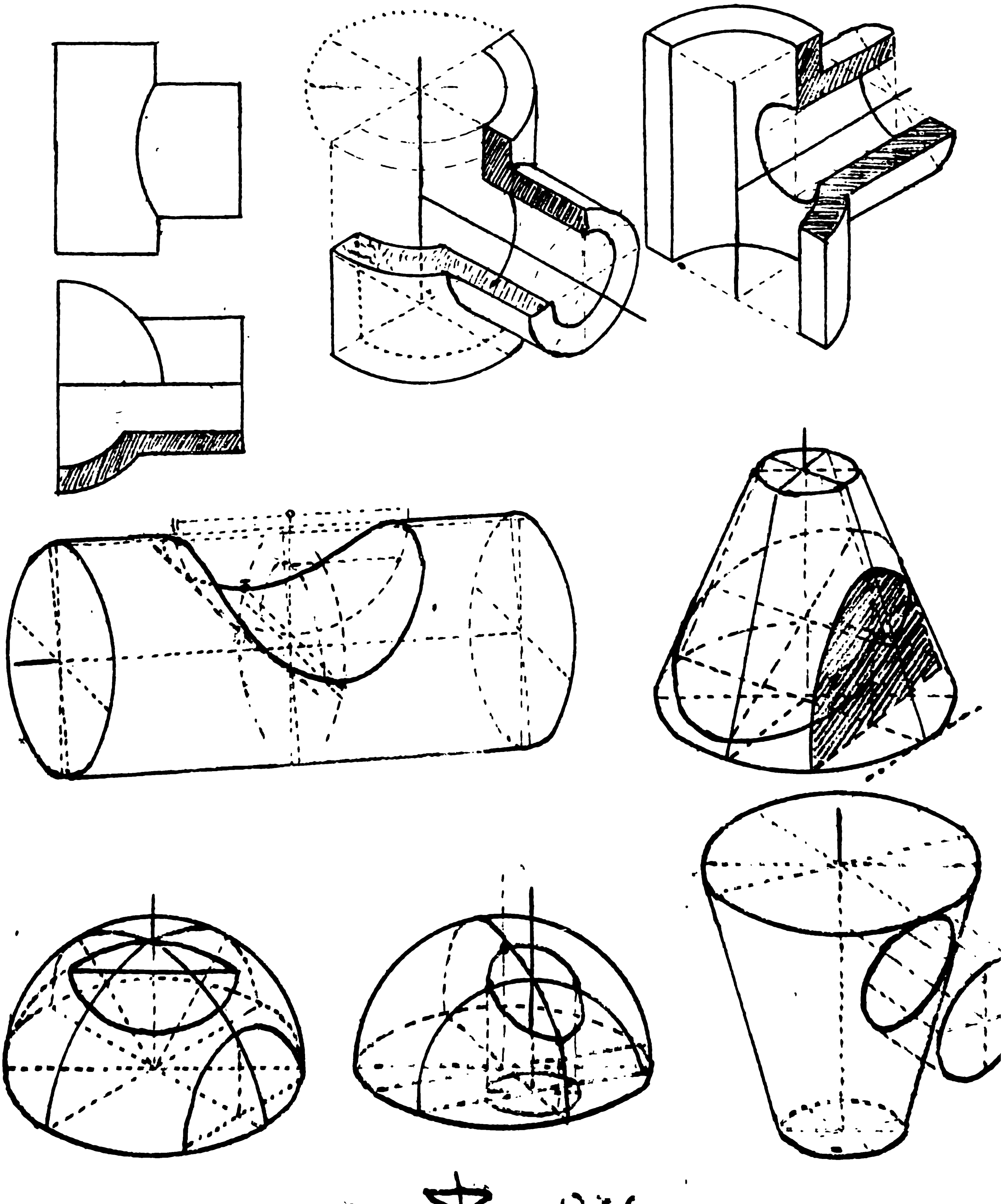


Фіг.274.



Ф. 275.

При представлені зразків перетинення стовпаків, або січення куль обмежилися тільки випадками, коли вісі стовпаків взаємно рівновісні. Перетинення куль будемо брати площами горізон-

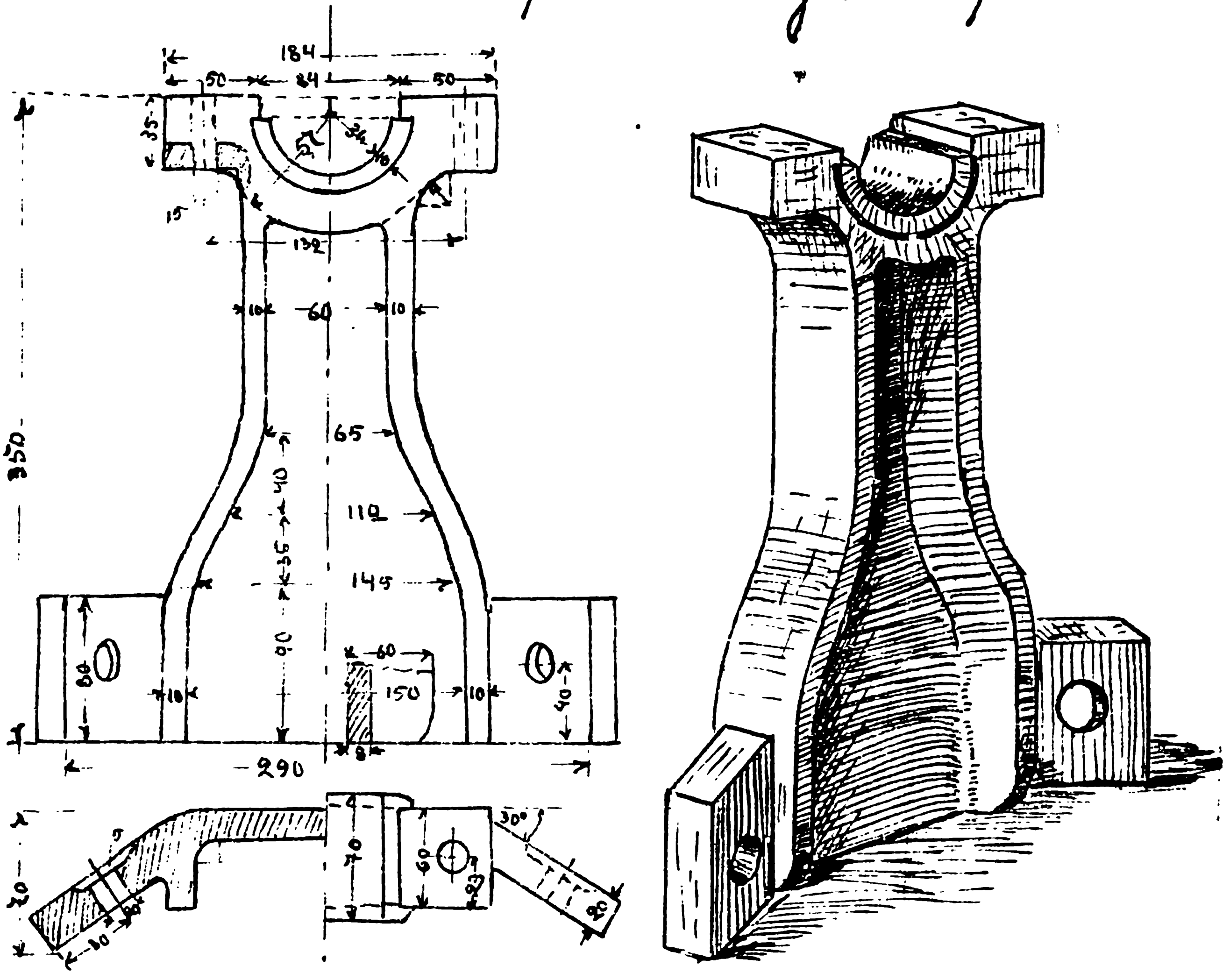


Фіг. 226.

тальними або рівновісниями. В випадках, коли вісі роблять якись гострий кут звичайно роблять кроки в перспективі з моделі.

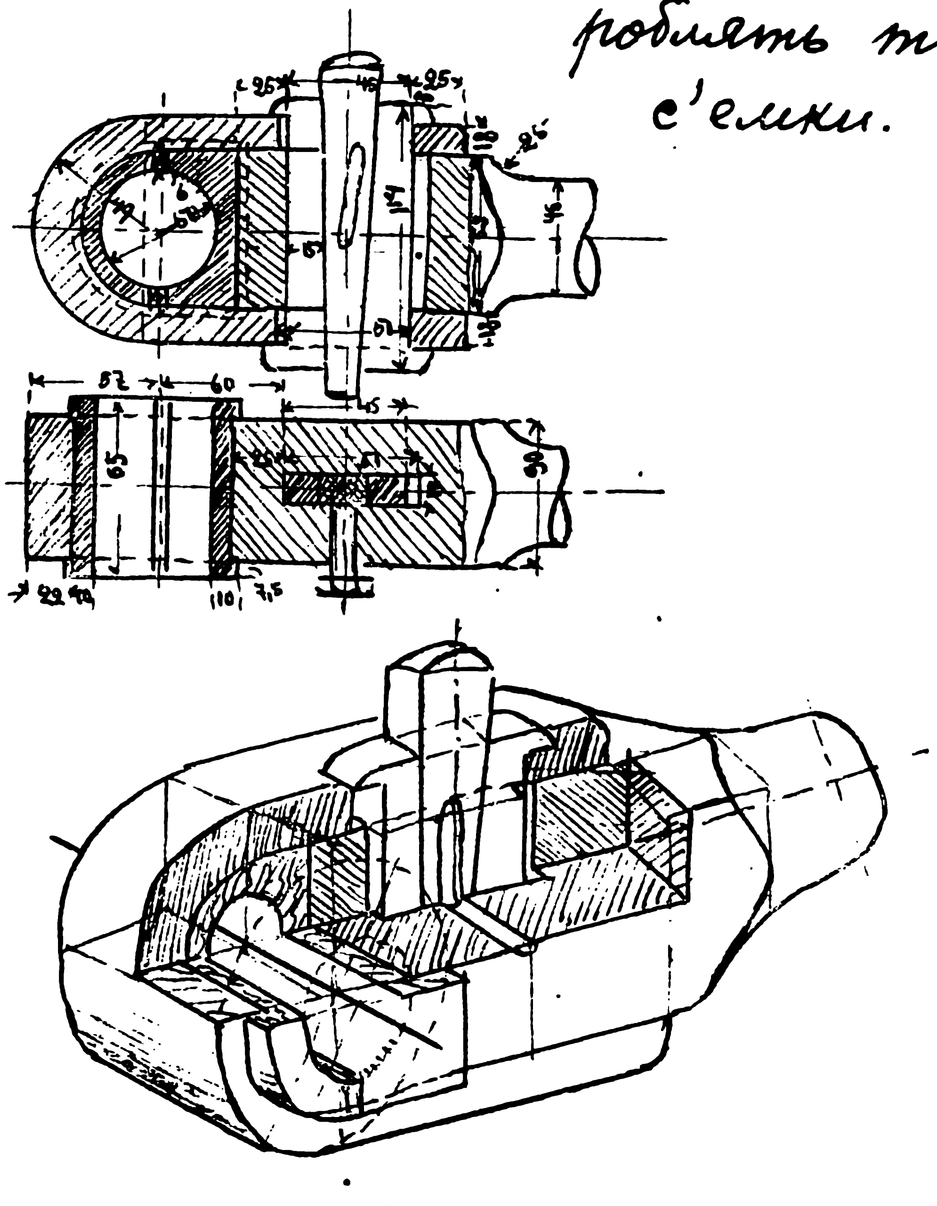
Всі ці приклади робились, коли були дані проекції горізонтальна та вертикальна а іноді й бокова (третя).

В багатьох випадках бува так, що дається модель, треба зняти розміри й в указаному маштабі викреслити нарис. При вимірах розмірів з моделі треба зня-



Фіг. 222.

ти всі ~~найбільш~~ важні та характерні розміри. На нарисі вони рівновісно до тієї простої, що показує розмір та обмежуються стрілкою. Розрізи та вирізи роблять як звичайно так, щоб вони були аб рівнобіжні або рівновісні до площ проекцій. Як приклади, дамо два нариси, щоб можна було бачити, як роблять такі с'емки.



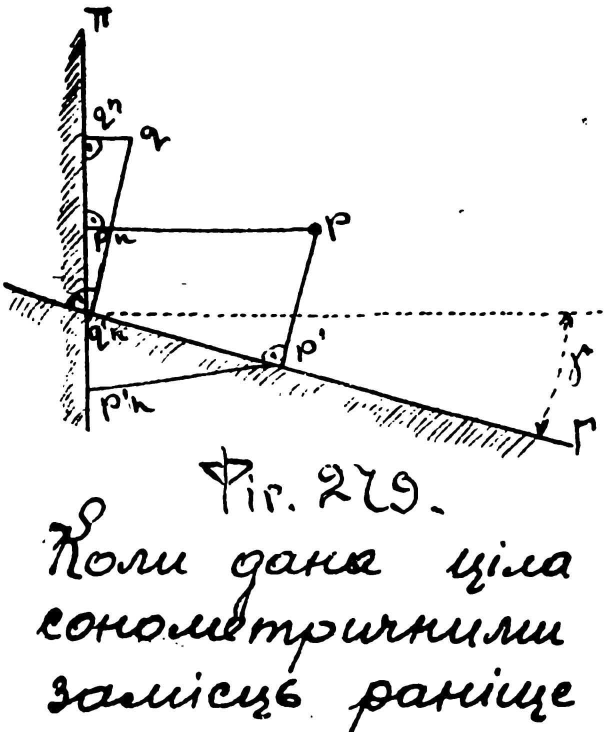
Фіг. 278.

Рішення основних задач в нормальних аксонометричних проекціях та представлення тіл в кривими поверхнями.

Задачі положення.

Коли візьмемо якийсь рівновісний вісевий хрест в просторі, то положення всякої точки простора відносно його може бути зазначено.

Між різними координатними площами площу (XY) рівновісну до Z, котра для аксонометричних картин дає представлення горизонтальних явищ, хоч сама нахилена до горизонту під кутом γ, називаємо *головною* або *основною* (Г) площею. Нормальну проекцію p' якоїсь точки p на площу Г називаємо основною а її картину p'^{n} аксонометричною основною.



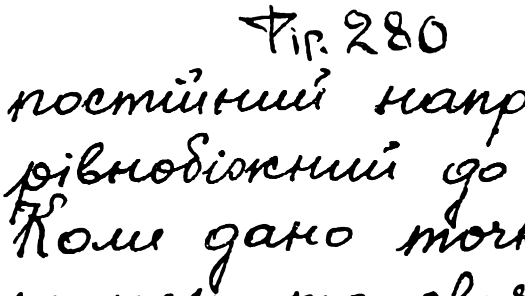
Фіг. 279.

Парою точок p^n та p'^n p цілком означається, бо через p'^n можна зазначити p' в площі Г, а p находиться на ордері до Г $[p'|Г]$ та в лучі бачіння S точки p^n.

Коли дана ціла низка точок їхніми аксонометричними парами $(p^n\, p'^n)$ а замісць раніще взятого аксонометричного хреста беремо якийсь другий, пересунутий в напрямку луча бачіння, то представлення усіх точок простору мають однакове пересунення; їх взаємне положення не зміняється.

Можливо висловити теорему: Взаємне положення точок простору цілком означається їх аксонометричною картиною та їх аксонометричною проекцією на основну площу.

Можливо не користуватися вісевим хрестом й уяви просторних точок представляти простіще так: Нехай дана прямовісна площа П та основна площа Г, що має нахил γ до горізонту. Від кожної точки p з нормальною проекцією p' на Г креслимо p^n та p'^n, так що ними означається точка p (картинною парою p^n p'^n).



Фіг. 280

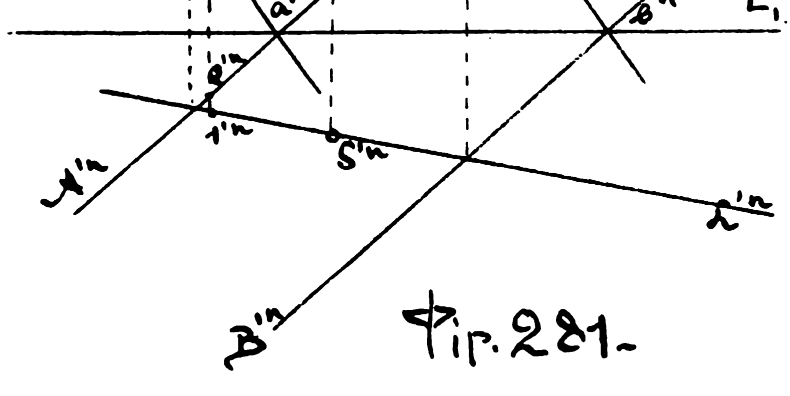
Понеже проста ⌊pp'⌉, рівновісна до Г, в вертікальній проекції виявляється як нормаль до (ПГ), то бачимо, що проста сполучення p^n та p'^n має постійний напрямок в площі креслення, рівнобіжний до (1⌊ПГ⌉).

Коли дано точку аксонометричною картиною та своєю аксонометричною проекцією на основній площі, то всі задачі, що до взаємного положення рішаються так само й з допомогою тих самих ліній, як і в звичайних проекціях. Точка p^n та p'^n тільки тоді складається, коли $p=p'$, ц.т. вона лежить на площі Γ; таким чином основна площа одночасно тут коіцідентна.

Точка g^n (фіг.280), в котрій пара G^n та G'^n простої G перетинається, є картина $g=[G\Gamma]$. Точка g, котрої аксонометрична грунтова проекція належить $(\Pi\Gamma)$, не лежить в картинній площі але в нормально проведеній до площі Γ.

Коли дані аксонометричні картини простірних точок, то для рішення задач, що до положення, не треба обов'язково знати положення $(\Pi\Gamma)$ та кута γ.

Означити грунтовий слід площі E, що дана рівнобіжними простими A та B та точку перетинення її з простою $\mathcal{L}$.



Фіг.281.

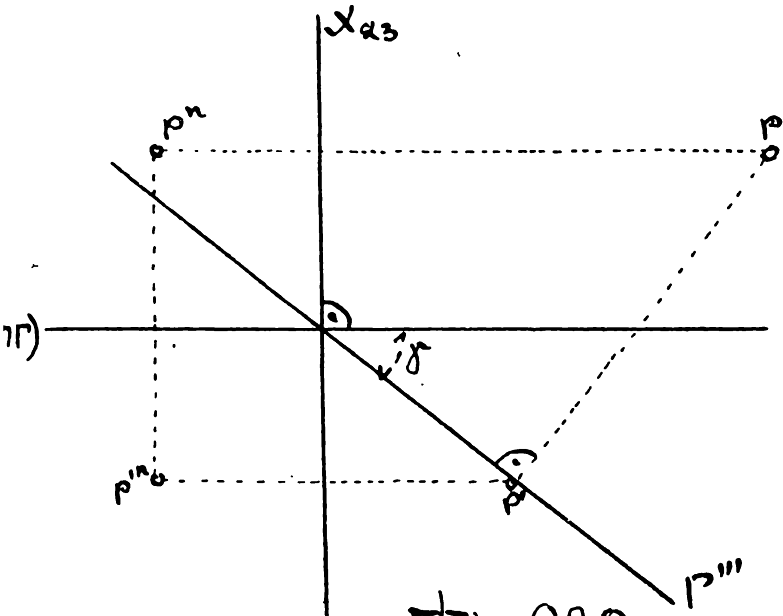
A B та $\mathcal{L}$ дані своїми картинними парами. Картина $a=[A\Gamma]$ та $b=(B\Gamma)$ є $a^n=[A^nA'^n]$ та $b^n=[B^nB'^n]$, тому $E_1^n=[a^nb^n]$. Щоб означити точку перетинення простої $\mathcal{L}$ з площею E_1 треба робити, як раніше робили (проводимо через просту площу, означаємо точки перетинення і т.д.)

Щоб представити площу слідами, треба слід E_1 проектувати на головну площу $Г$, а слід E_2 на площу нормальну до головної. Від обох слідів треба накреслити картини E_1^n та E_2^n. Коли дана картина p^n точки, що лежить в площі ε, то її аксонометричну грунтову проекцію p'^n находимо звичайним шляхом, ц.т. проводимо через точку якусь просту, означаємо проекцію перетинення з площею і т.д.

Рішення задач виміру вимага знання кута γ та $Г$. Це дає можливість негайно означити треті проекції точок або простих.

Коли треба рішити задачу типа виміру, то означаємо третю проекцію даного предмета (ц.т. нормальну проекцію на площу $П_3$, рівновісну до $П$ та $Г$), та складаємо вертикальну та поперечну (третю) проекцію.

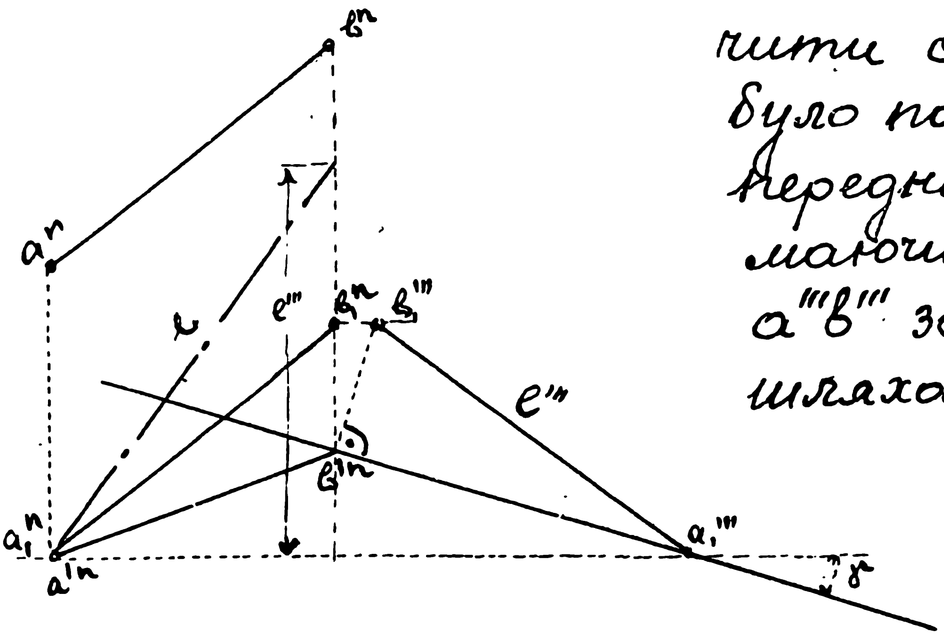
Дана картина p^n та p'^n точки p, треба означити третю проекцію p''' (фіг.282). Щоб маючи p^n та p'^n..p''', треба ще знати не тільки кут нахилу γ але й площу $Г$. Вибіраємо слід $X_{23} = [ПП_3]$ площі $П_3$ нормальної до $(ПГ)$, та через $[ПГ\, X_{23}]$ під кутом γ відносно $(ПГ)$ проходить



Фіг. 282.

площа Г.''' Поперечна проекція p' лежить на Г'''. Рівновіс з цієї точки до Г''' в перетиненні простої з p^n рівнобіжно до (ПГ) дає точку p'''. Можливо пересунути рівнобіжно ПГ, тоді, утримуючи кут γ, Г''' займе нове рівнобіжне положення до старої.

Означення довжини відрізка даного своїми аксонометричними проекціями. Перш всього треба означити a'''b''', як це було показано в попередній задачі; маючи $a^n b^n$ та a'''b''' звичайним шляхом одержуємо



Фіг. 283

довжину $l = ab$. Можна зробити ще простіше: даний відрізок рівнобіжно a_1b_1 так пересовуємо, що $a_1 = a'$. та щоб Г''' проходило через $b'^n = b_1'^n$. Маючи це, легко, як показує нарис (фіг. 283), означаємо довжину l.

Коло, як відомо, в загальному випадку представляється еліпсом. Коли коло лежить в площі YZ, то велика вісь рівновісна до вісі X, а мала — рівнобіжна до неї. Від даної точки (центра m^n) відкладаємо по обидва боки даний радіус — чим обмежується довжина великої вісі. З довжини r одержуємо, шляхом складення в картинною площею, положення точки $\underline{Ц}^n$ (і проектировки довжини r на вісь X). Цю величину r_x відкладаємо від центра еліпси по напрямку великої вісі й одержуємо, таким чином, фокуси f_1 та f_2; з них обмежуємо малу вісь й будуємо весь еліпс.

В будівництві велику ролю грає вірна розрізка та правильне складення кам'яних построек. Головним чином це має значіння при будівлі сводів та лідорізів у биків великих мостів.

Задачу цю можна роскласти на три:

1) Росклад будівлі на окремі каміння, ц. т. на частини такої форми, щоб кожна могла бути вироблена з окремого камня й щоб вони могли в порядку бути так укладені, щоб склали ціле тіло потрібної форми.

2) Означення форми та розмірів окремих камнів. Для цієї мети креслятся в аксонометричних проекціях окремі

камні та по ним роблять шаблони.

3) Обробка камнів. Сировина обробляється в потрібні форми окремих фігур, щоб з них можливо було скласти постройку.

При провадженні цих точок, крім чисто технічних вимог, потрібно рахуватися ще з естетичними, художніми та ріжними вимогами життя.

При так званій „розрізці" камнів треба вважати:

а) не бажано робити гострих кутів,

б) не треба робити окремих камнів дуже великими,

с) каміння не мусить мати в одному напрямку дуже великих розмірів в порівнанню з другими,

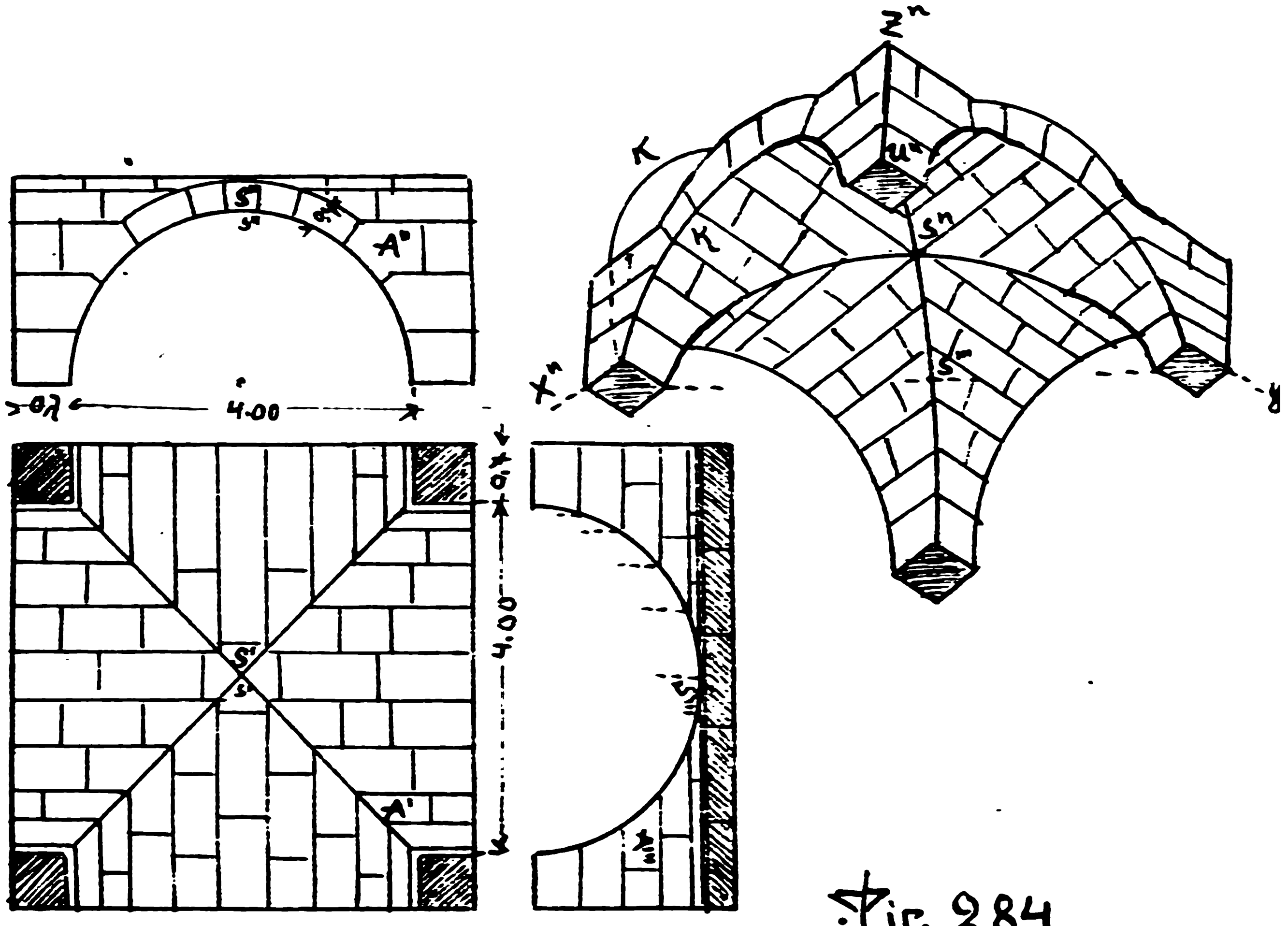
d) бажано „розрізку" робить так, щоб по можливости складалось все з прямокутних (квадерів) камнів без витрати лишнього матер'ялу,

e) при складені слоїв один на один потрібно, щоб шви перекривались; так само й стики мусять буті перекриті,

f) при сводах стики мусять буті рівновісні до поверхні свода.

Точка друга (означення форми та розмірів) цілком належить до Нарисної Геометрії й робиться на ґрунті ї

Коли два рівних півстовпака перетинаються під прямим кутом, то вони складають так званий „хрестовий" свод. Верхня точка перетинення називається верховинкою, а лінії, що йду до стовбів — ребрами. Передня частина наз. лобовою або іноді щоковою. На нарисі (фіг. 284) представлен, згідно з вищенаведеними правилами; розкладка хрестового свода на окремі каміння. Звичайно, це не є єдиний можливий, навпаки — можливо зробити багато варіантів.



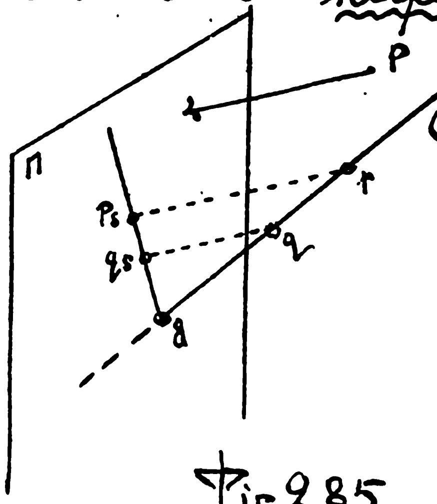
Фіг. 284.

На нарисі в нормальних аксонометричних проекціях викреслений свод з видом знизу, котрий показує взаємне положення швів. Місця швів одержуємо з звичайних проекцій з допомогою координат, або точніще — викреслити до еліпса афінне коло та поділити його незалежно від поділок в звичайних проекціях. Проводимо через так одержані точки шви на стовпаковій поверхні, то точки перетинення однакової висоти швів дають точки ребер.

Нахильні (косі Schrägrisse) аксонометричні проекції.

Скорочення осей аксонометричного хреста в нормальних аксонометричних проекціях дає картину простірного предмета. Коли на цьому аксонометричному хресті почати зміняти ці скорочення, то аксонометрична картина простірного предмета тільки невначно міняється. В багатьох випадках, щоб одержати найбільш наочну картину, міняють не тільки скорочення осей, але й самий напрямок проектуючих лучів. Може бути, що картина буде дуже наочна, навіть більш наочною, як попереду не вважаючи на те, що вона вже не буде нормально аксонометрична. Такі картини є нахильні аксонометричні представлення простірних предметів. Щоб цілком встановити прикмети таких нахильних проекцій, виведемо деякі геометричні положення.

Нехай П буде відвісною площею, котру назовемо картинною або проектною площею (фіг. 285) Напрямок P (нерівнобіжний та нерівновісний до П), по котрому проктуємо тіла простору на площу П. Під нахильною, косою або клиногональною проекцією точки p розуміємо точку $p^s=[p\|P.П]$

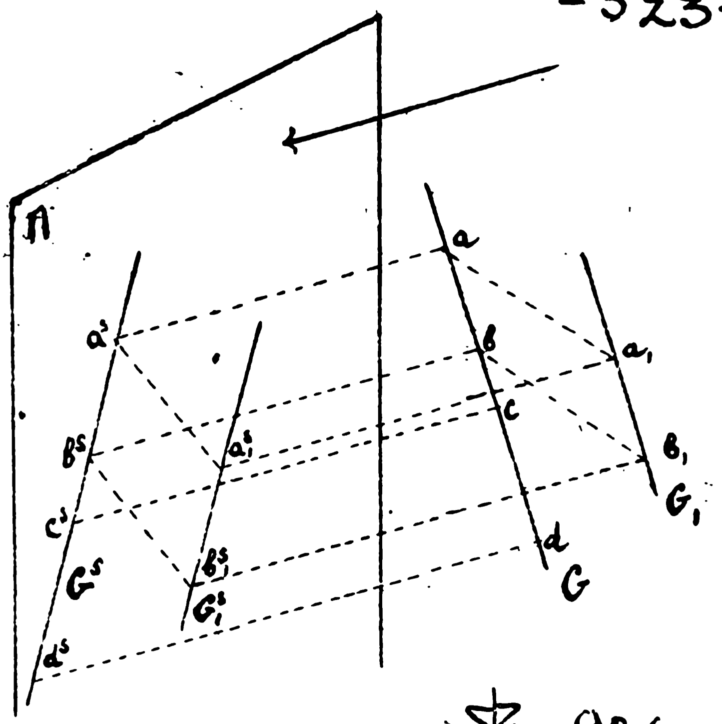


Фіг.285

Нахильна проекція кожної точки простору ідентична зі своєю тінню на площу П для напрямку світляного луча P. Коли через цілу низку точок простої G (що не рівнобіжна до П) проведемо низку лучів, то одержимо проектуючу світляну площу. Картини точок G утворюють просту перетинення П з $(G\|P)$ косу G^s від G. Точка перетинення g простої G з G^s є картинний слід G.

Коли $G\|П$, то $G^3\|G$. Для $G \perp P$ G^3 є точка. Рівнобіжні прості мають рівнобіжні картини.

Коли від якихось двох відрізків ab та cd простої G шукаємо нахильні проекції $a^s b^3$ та $c^s d^s$, то, як показує нарис (фіг. 286) існує пропорція:



Фіг. 286.

$a^sb^s : ab = c^sd^s : cd$

Відношення довжини нахильної проекції якогось відрізка до його дійсної довжини наз. „Зміною відношень довжини" відрізка. Воно може бути менше одиниці, або більше одиниці. Пропорція показує, що всі відрізки простої в нахильних проекціях міняються в однаковому відношенню.

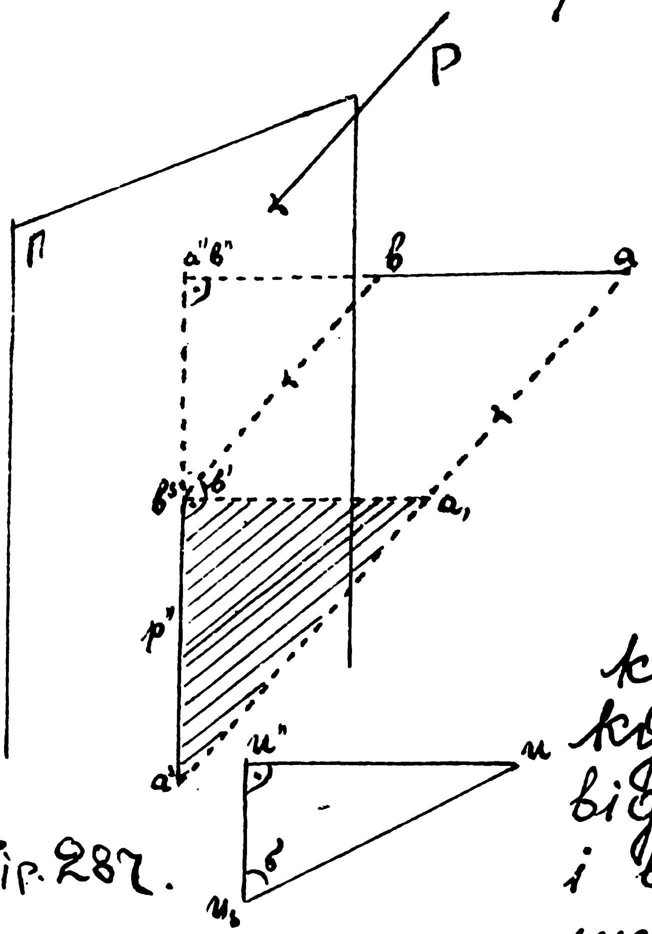
Таким чином в кожних нахильних проекціях для кожної простої існує однакова зміна відношень.

Точки самої простої та відповідні точки нахильної складають подібні ряди точок. Нехай $G_1 \| G$ (фіг. 286) та a_1b_1 відрізок на G_1, котрий виник пересовуванням з $\underline{ab}$ ($a_1b_1 = ab$), то бачимо, що $[a^sa_1^s] \| [b^sb_1^s]$ та $a_1^sb_1^s = a^sb^s$. Зміна відношення (Änderungs Värhältnis) відрізка a_1b_1 простої G_1 рівна зміні відношення простої G.

Можливо висловити таке положення: *Рівнобіжні прості мають рівнобіжні нахильні проекції та однакові зміни відношень.*

До картинної площі рівновісні відрізки дають на ній рівнобіжні та рівні відрізки.

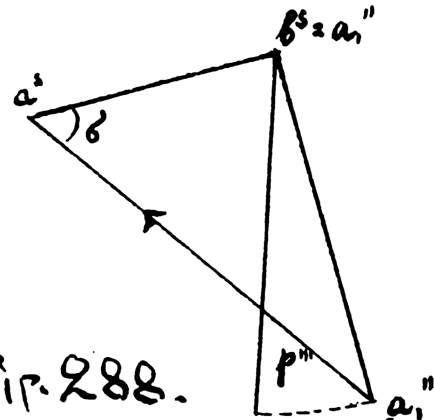
До картинної площі рівновісні відрізки виявляються як відрізки рівнобіжні до вертикальної проекції луча бачіння. (фіг. 287). Для таких відрізків істнує положення: Коли відомі, до П нормального відрізка, нахильна проекція довжина, то цим означається напрямок луча бачіння.



Фір. 287.

Уявимо собі, що $\underline{ab}$ пересунутий до a_1b_1 так, що b_1 складається з b^s, то нахильна проекція a^sb^s відрізка не зміняється й a_1a^s є напрямок P. Понеже в прямокутному трикутнику $a_1b^sa^s$ згідно умові відомі обидва катета і відомо чи a_1 перед площею П лежить чи за нею, то $a_1a^s \| P$ цілком означено.

Коли σ означає нахил до P, то $ctg\sigma = \frac{a^sb^s}{a_1b_1} = \frac{a^sb^s}{ab}$ або: зміна відношень нормального до картин-



Фір. 288.

ної площі відрізка рівна котангенсу нахилу напрямку луча бачіння до картинної площі.

Коли дані: нахильна проекція $a^s b^s$ та дійсна величина $b^s d_0$ відрізка ав нормального до П, то кут б находимо, складаючи напрямок луча бачіння з картинною площею (фіг.288). Положення, що нормальна проекція прямого кута з боками, рівнобіжними до картинної площі, знову прямий кут, для нахильних проекцій не вірно.

На підставі цих положень, коли відомі зміни відношень для окремих осей можливо викреслити вісевий хрест і рішати всі задачі, що рішались при нормальних проекціях. Виникає питання, до якої границі довільно зміняти картину осей та зміну відношень?

На це дає відповідь теорема Польтке*)

Коли з якої-небудь точки u_3 виходять три напрямки $u^s a^s$ $u^3 b^s$ $u^s c^s$, що лежать в площі креслення, то вони завжди нахильні проекції трьох з одної точки виходячих, рівних один другому, рівновісних відрізків, що лежать в просторі. Але ці чотирі точки u_3 a^s b^3 c^3 не мусять лежати на одній простій.

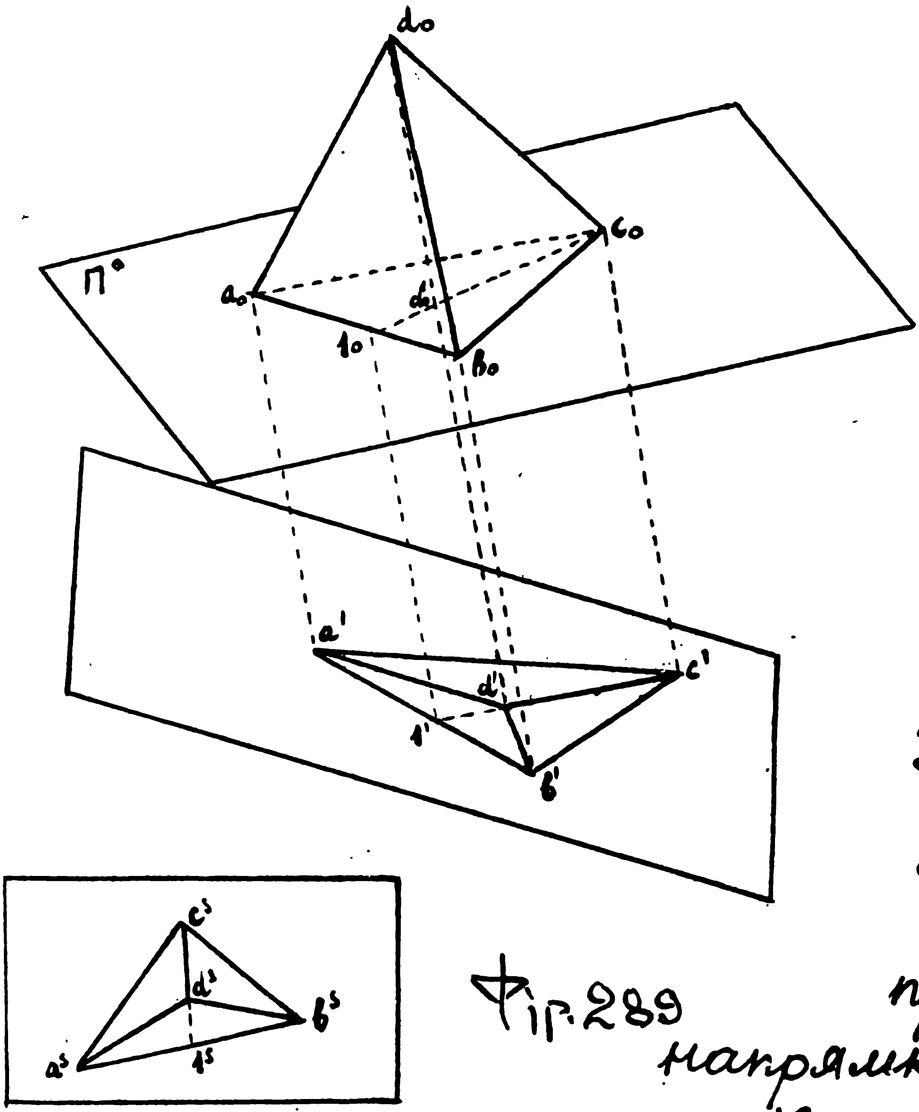
---

*) Професор Берлінської будівничої академії. В перший раз опублікував свій винахід в 1856 році.

Три відрізки, що виходять з однієї точки, однакової довжини та взаємно рівновісні, називаємо прямокутним рівностороннім осевим хрестом. Всі такі образи між собою подібні. Коли сполучити кінці відрізків (однакової довжини), то одержимо тетраедр з прямими кутами. Фігура сполучення чотирьох точок, що не лежать на одній прямій, наз. закінченим чотирикутником.

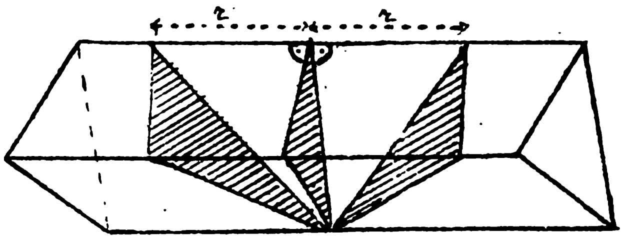
Кожний закінчений чотирикутник $a^s b^s c^s d^s$, в площі нарису, є нахиленою проекцією тетраедра $abcd$, котрий є подібний до наперед заданого тетраедра $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$. (фіг. 289). Беремо тетраедр $\overline{T} = (\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d})$ подібний $T_0 = (a_0 b_0 c_0 d_0)$ та шукаємо такий напрямок луча бачіння P, то таку картинну площу Π_1, щоб нахильна проекція $a_1 b_1 c_1 d_1$ від T_0 на Π_1 була подібна до $a^s b^s c^s d^s$.

Коли проектуємо T_0 в даному напрямку на різні площі в просторі, то його картини будуть взаємно афінні, понеже кожна картина є нахильна проекція попередньої. Коли змінемо напрямок проекції, то знов на площах в просторі одержимо картини, котрі будуть одна з другою афінні, але не з попередніми. Значить, коли на одну й туж постійну площу один і той же тетра-



Фіг.289

едр T_0 будемо проектувати лучами ріжних напрямків, то картини не будуть афінні. За цю постійну площу вибіраємо один з трикутників тетраедра T_0 Коли спроектуємо T_0 на $T_0 = [a_0 b_0 c_0]$, то при всіх змінах напрямку проектних лучів точки $a_0 b_0 c_0$ залишаються на місці змінає своє положення тільки точка d_0, котру можна назвати d_0'. Коли треба, щоб проекція T_0 була з $a^s b^s c^s d^s$ афінною, то тільки точка d_0' мусить так лежати, щоб $a_0 b_0 c_0 d_0'$ було афінно з $a^s b^s c^s d^s$. Ця вимога мусить означати d_0' а, таким чином, і напрямок луча бачіння $P_1 = [d_0 d_{01}]$. Тоді нахильна проекція T_0 по напрямку P_1 на довільну площу простору афінна з $a^s b^s c^s d^s$. Тепер виберемо картинну площу П, так, щоб нахильні проекції T_0 по напрямку P_1 були подібні з $a^s b^s c^s d^s$. В теорії афінности доказується, що дві шрінні фігури подібні, як тільки два відповідних трикутника цих фігур подібні. Призма, що складається лучами бачіння, через трикутник $a_0 b_0 c_0$, площами перетинається по трикутниках, котрі з $a^s b^s c^s$ подібні. Мається два до нормального січення призми симетричних положення цієї площі (фіг. 290) Коли виберемо одну з них за Π_1, то нахильна проекція $a_1 b_1 c_1 d_1$ T_0 на Π_1 подібна з $a^s b^s c^s d^s$.

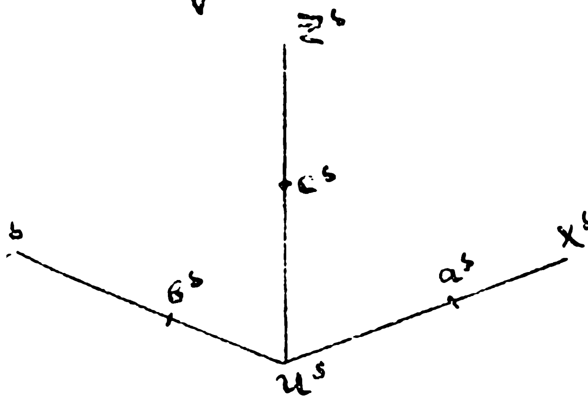


Фіг. 290.

T_0, як умовлено, подібний тетраедр до T, так що можна ще довжини кантів, що виходять з d_0, пропорціонально змінити. Ці зміни можна так вибрати, що нахильні проекції $a_1 b_1 c_1 d_1$ зміненого тетраедра, котрий можна знову назвати T_0, буде конгруентний з $a^s b^s c^s d^s$. Тепер уявимо собі жостку простірну систему, що складається з T_0 P_1 та $a_1 b_1 c_1 d_1$, поставлену в таке положення, ща $a_1 b_1 c_1 d_1$ складається з фігурою $a^s b^s c^s d^s$, що лежить в площі нариса. Цим і доказується вищенаведена теорема.

Примітка. Площа Π_1 взагалі може мати два положення, значить буде два напрямки лучів бачіння. Коли взяти на увагу з T подібні тетраедри, то для кожного напрямку бачіння P мається два тетраедра, котрих нахильна проекція $a^s b^s c^s d^s$, а саме T та його дзеркало на нормальну до P площу, так що можливо висловити положення: маються два дійсних (reelen) напрямки бачіння й для кожного два тетраедра, котрі відповідають умовам попередньої теореми.

Коли виберемо тетраедр T так, щоб три канта, що виходять з одного кута мали одну довжину та були взаємно рівновісні, то цим самим перейдемо до теореми Польке.



Фіг. 291.

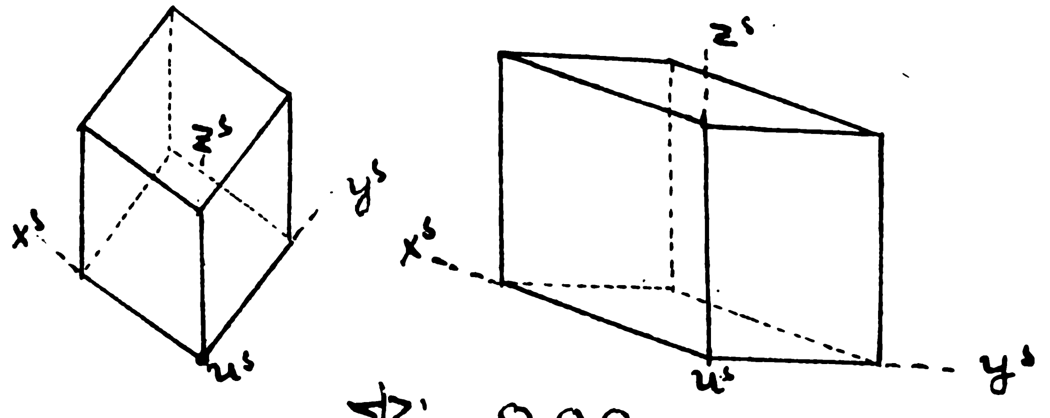
Треба звернути увагу на обставини, котрі можуть привести до помилок при вживанні теореми Польке. На нарисі (фіг. 291) дані $u^s a^s$ $u^s b^s$ $u^s c^s$ картини однієї довжини один до одного рівновісних відрізків, ц. т. вісевий хрест в просторі дається, але нічого невідомо відносно його положення, що до картинної площі. Поперед усього треба звернути увагу, що даний на нарисі напрямок z^s ніяк не можна розглядати, як картину відвісної, ц. т.

до площі П рівнобіжної вісі Z. Так само невідомо положення луча бачіння відносно картинної площі та величина рівних відрізків та тв тс. Невідома зміна відношень для осей, а тільки відношення цих змін скорочень. Неможна сказати (несенитниця): одиницю довжини (Einheitsstrecke) в нахильних проекціях можливо довільно взяти, бо цим гадається, що довжина, котра взята за одиницю, відома, чого в дійсности немає.

При практичному кресленню це обходять так: для трьох осей зміну скорочень вибірають дійсно довільно. Кажимо: довжина e на вісях X Y Z просторного предмета дає картини на вісях довжин e_x e_y e_z. Але ці три довжини по теоремі Польтке є нахильні проекції трьох по вісям X Y Z нанесених (відкладених) відрізків якоїсь дійсної величини e_1. Конструюємо картину зі зміною відношень $\frac{e_x}{e}$ $\frac{e_y}{e}$ $\frac{e_z}{e}$ таким чином креслимо предмет, котрий до даного змінений в невідомому відношенню: $\frac{e_1}{e}$. Це все ж таки цілком допустимо, бо в аксонометричному малюнці не цікавляться абсолютними величинами, а ставлять тільки вимогу, щоб було вірне взаємне відношення однієї частини до другої.

Але це треба знати й пам'ятувати. В нахильних аксонометричних можуть бути, так само як і в нормальних, ізометричні, діметричні, триметричні проекції.

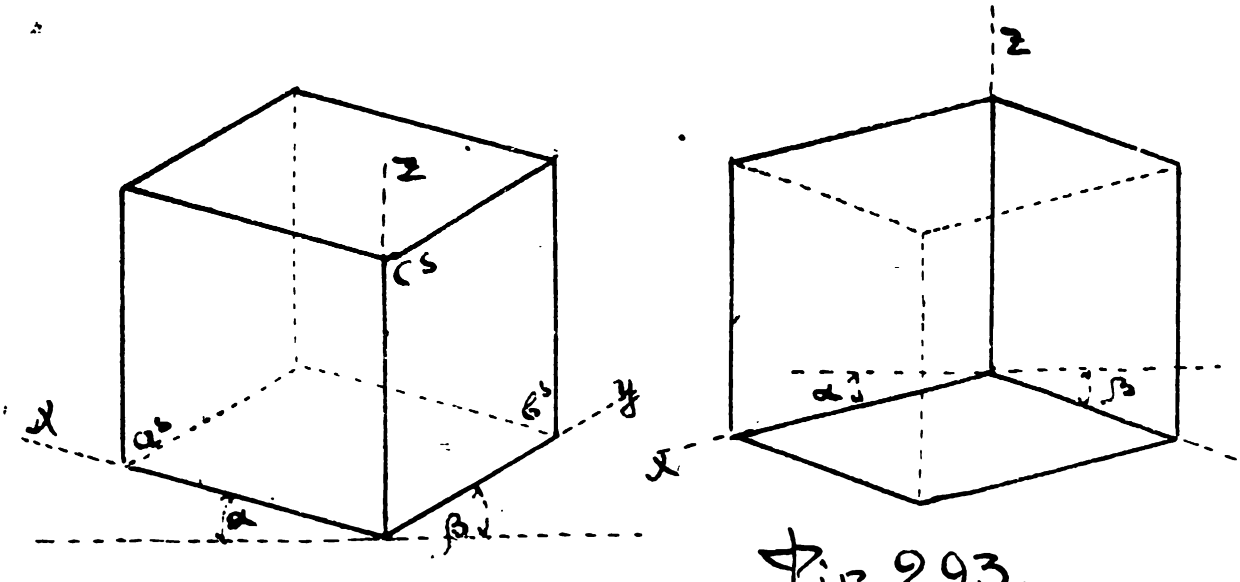
Добрий вибір осей. При кресленні, на підставі теореми Польтке, мається велика свобода вибору як напрямку, так і самої величини осей. Але, щоб ці картини давали добре враження, треба, так само як і в нормальній аксонометрії, ввести де-які обмеження.



Фіг. 292

Наприклад, такі картини куба (фіг 292) цілком карикатурні - гагаїзм.

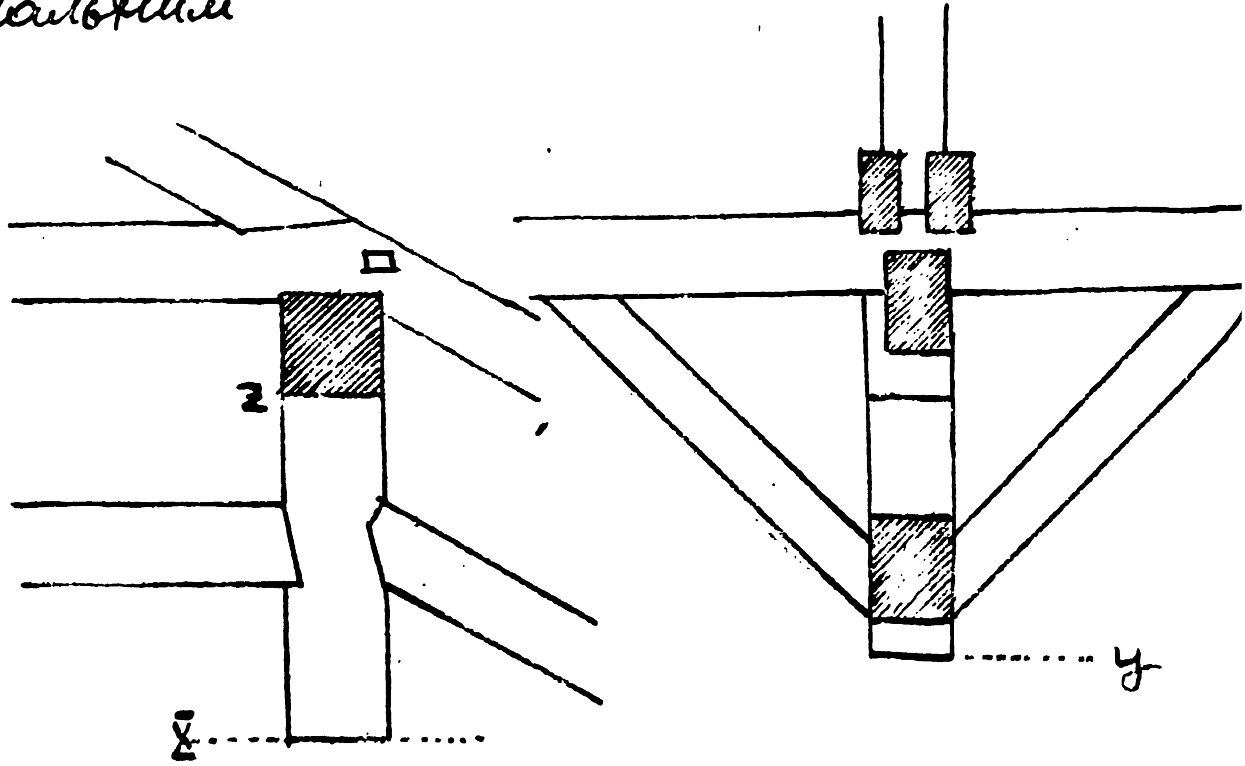
Коли означити кут, котрий роблять X та Y з нормаллю до Z через α та β, найбільш добрі малюнки одержуються, коли при Z^s віднесеному α між $10°-15°$ а β - $20°-30°$. $U^s a^s = u^s c^s$ (фіг. 293) $u^s b^s = \frac{3}{4} u^s c^s$. Треба тільки $\frac{3}{4} u^s c^s$ брати по тій вісі x^s y^s, котра з горізонтом робить більший кут. Можна брати



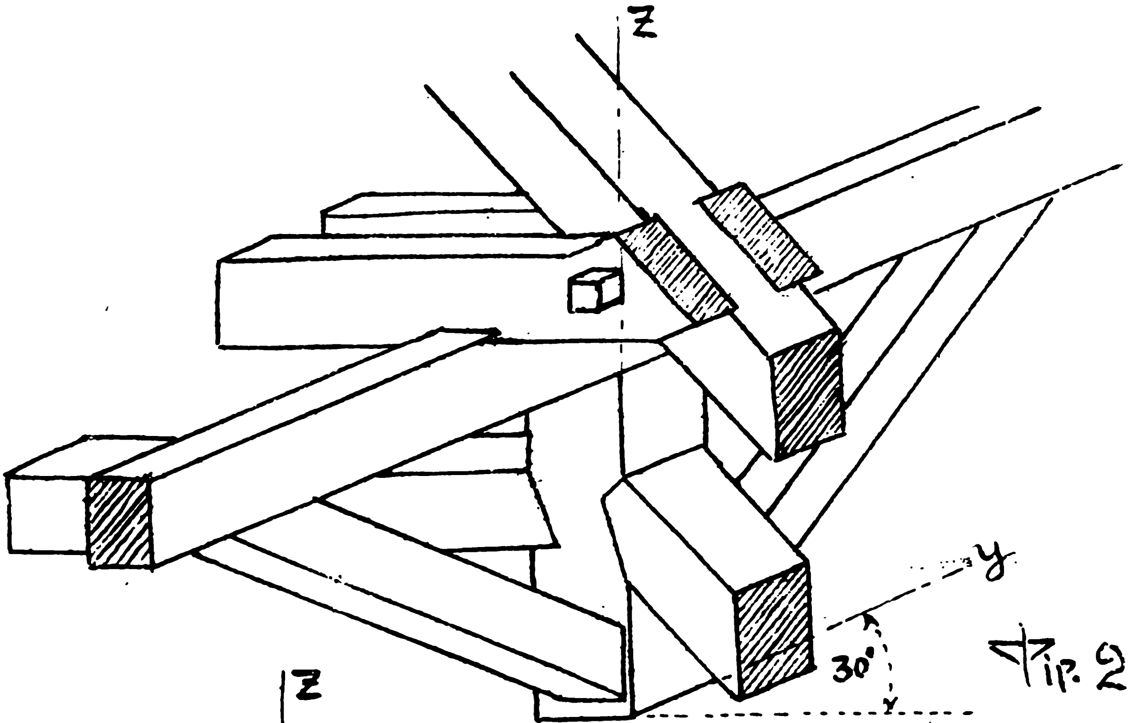
Фір. 293.

β і більш, як 30°, аж до 45°, але тоді треба $u^s b^s = \frac{1}{2} u^s c^s$.

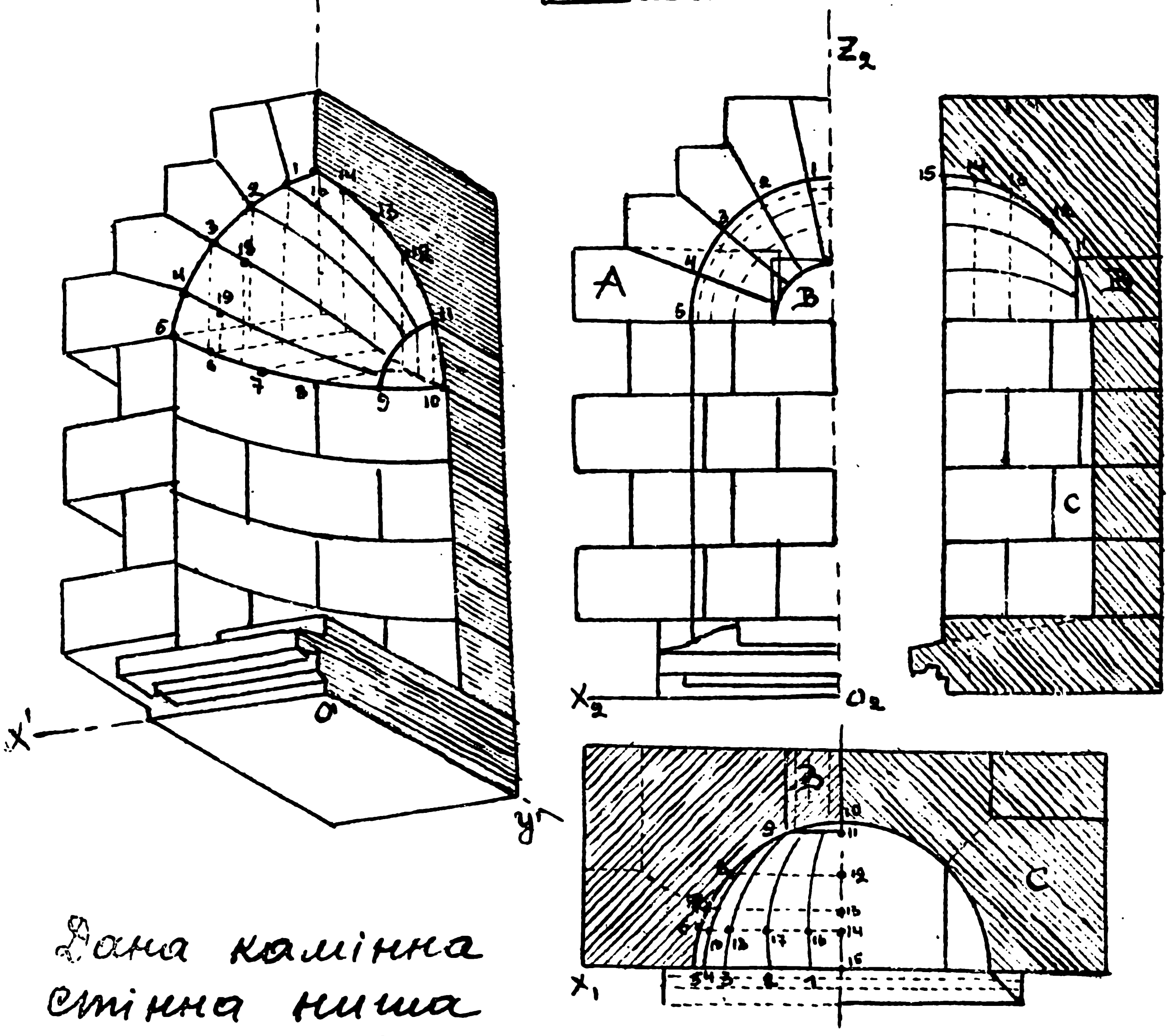
Приводимо де-кілька прикладів представлення різних простірних тіл в нахильних аксонометричних проекціях по даним горізонтальним та вертикальним



Фір. 294.



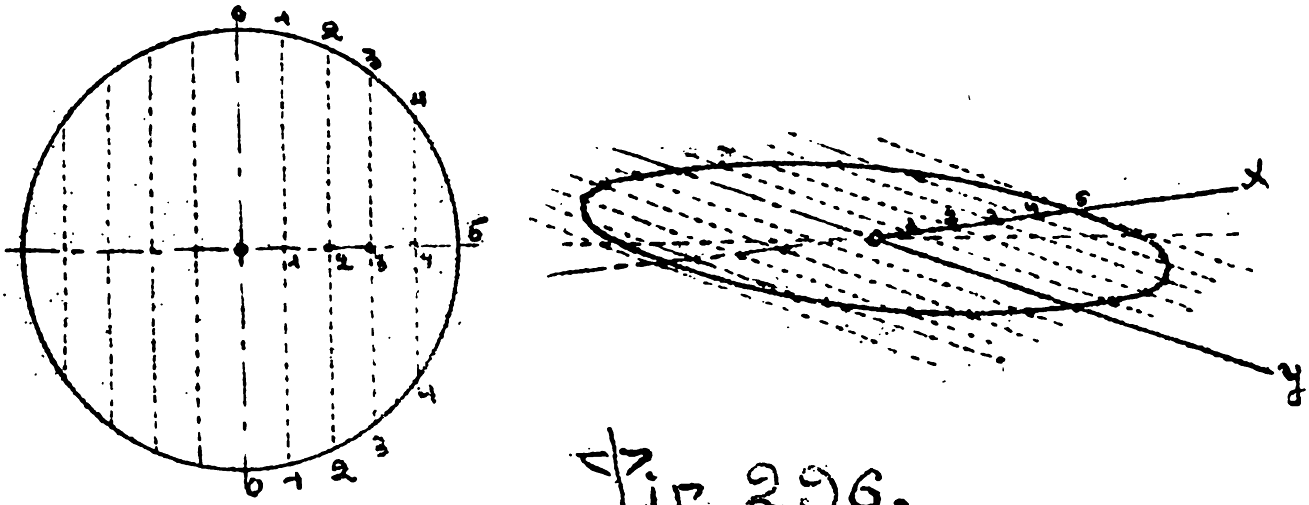
Фіг. 294в



Фіг. 295.

Дана камінна стінна ниша (фіг. 295) своїми проекціями, треба представити ї в нахильних аксонометричних проекціях. Виберемо осевий хрест, як це зроблено на фігурі 295, з умовою, що вісь Z іде рівновісно (рівнобіжно до краю паперу). Тоді треба тільки для кожної точки тіла означити відповідні координати X Y Z та відкласти їх як аксонометрично рівнобіжно до X' Y' Z'. На нарисі для низки точок 1-19 показана конструкція. Крім того, окремо показана конструкція A, B, C.

Представити коло, що лежить в площі XY, в нахильних аксонометричних проекціях (фіг. 296)

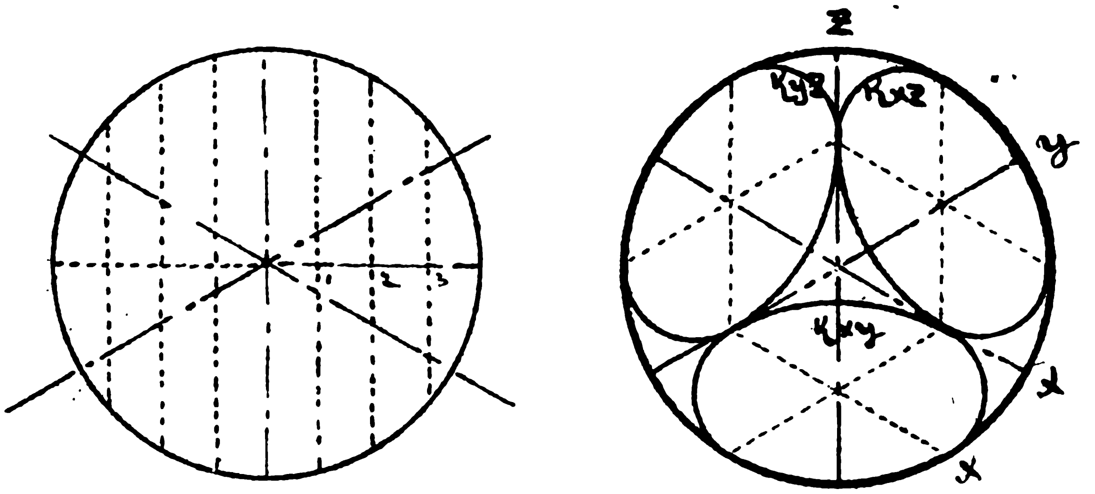


Фіг. 296.

Рішення цієї задачі робиться цілком так, як робилося раніше, ц.т., в колі проводимо два взаємно рівновісних діаметри. Один з них, що складається з осю X, поділяємо на рівні частини. Ставимо рівновиси аж до перетинення з лукою кола. Креслимо, згідно правила, триметричний вісевий хрест і відкладаємо без зменшення координати точок поділу, ц.т., креслимо хрест в нахильних ізометричних проекціях.

Представити кулю в нахильних ізометричних проекціях. (фіг. 297)

Коли XYZ є картина нахильного аксонометричного хреста, то конструкція по суті зводиться до задачі означення кулі, як очертання в тій чи иншій координатній площі січення кулі. Для цього наносимо на вісі радіуси кулі Oa=Ob=Oc=Od=Oe. Очертання кола буде еліпсом. Креслимо ізометричні картини, Kyx, Kyz, Kxz – в відповідних осях дадуть еліпси. До всіх цих трьох еліпсів вкреслюємо обгортуючий еліпс K'. Для цього проводимо рівнобіжні до X тангенти, котрі

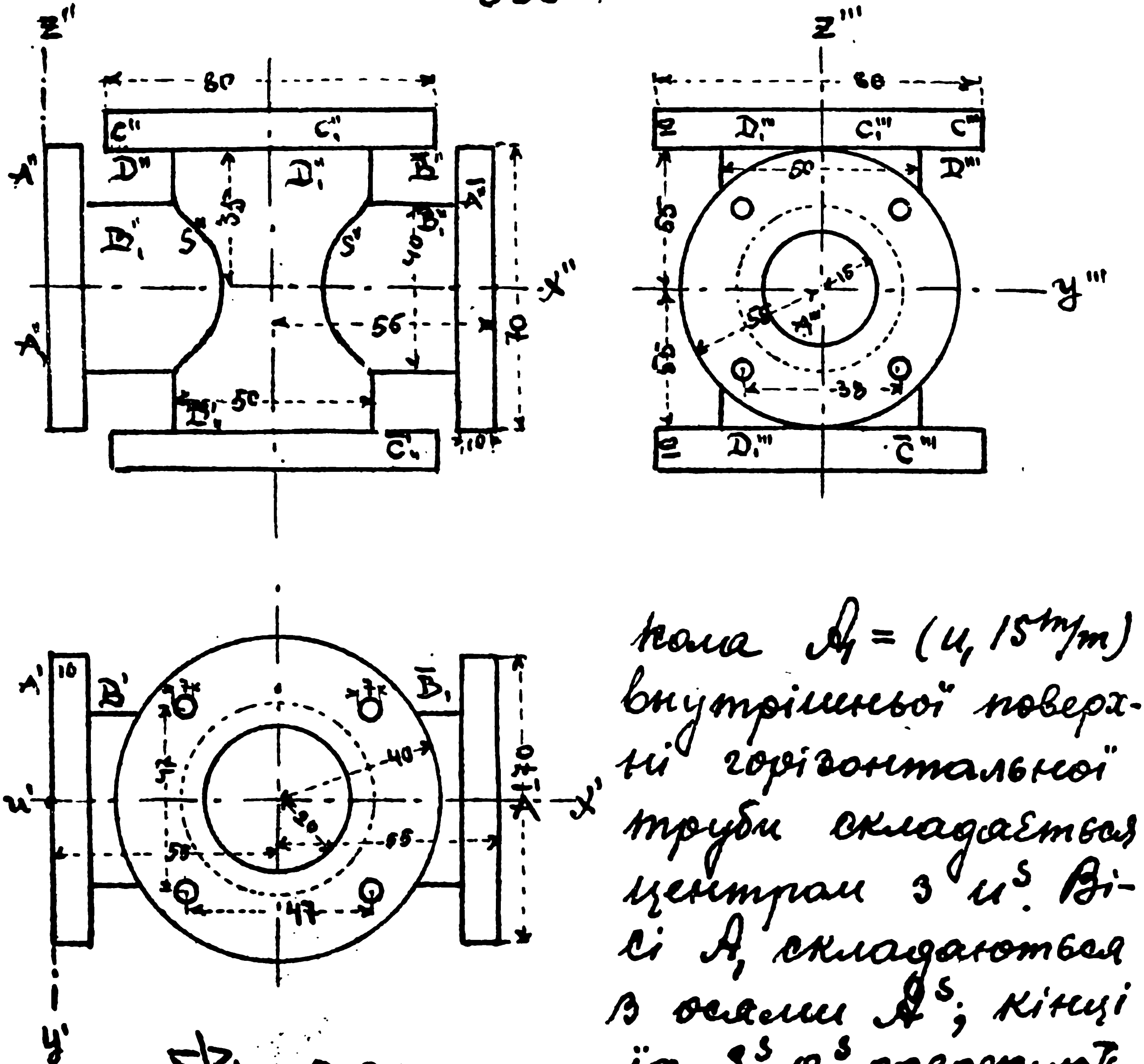


Фіг. 297.

торкаються до еліпса в точках g' та h'. Так само тангенти, рівнобіжні до Y торкаються до еліпса в точках i' та k. Тепер можливо для обгортуючого еліпса провести диаметр g'h', котрий буде конюгиртним до ik.

Представлення кол, площа котрих рівнобіжна до площі осей. Нахильна аксонометрична картина фланца для сполучення труб. Понеже нахильна проекція якогось простірного тіла ідентична з падаючою від цього тіла тінню на картинну площу — коли луч бачіння складається з лучем світла — то можна висловити: Нахильна проекція кола, площа котрого нерівнобіжна до напрямку зору — є еліпс. Нахильні проекції нормальних диаметрів кола — конюгіртні диаметри картинного еліпса. Щоб представити коло в нахильних проекціях, коли дані його центр та радіус, площа котрого рівнобіжна до віссевої площі YZ, креслимо картини диаметрів, рівнобіжних до Y та Z, що дає кон'югіртні диаметри еліпса. З них означаємо всі та промежні точки. При кресленню в аксонометричних нахильних проекціях вистачає, маючи ці диаметри, викреслити від руки всю криву еліпса. Маючи це на увазі, викресимо в нахильних аксонометричних проекціях фланц для сполучення труб в маштабі 1:2. Уявимо собі для цього звичайні проекції, що дані звязаними в осевим хрестом. Хрест виберемо так, щоб Z було відвісно, а X складало з горізонталлю 10° а Y — 20° та зміна відношень 1:1:3/4. Таким чином на осях Z^s та X^s дійсна величина (7,5 m/m.... 10 m/m) відкладаємо на вісі Y^s... 3/4.

Креслення аксонометричної картини починаємо в представлення площі YZ залежного великого хреста A (краєве коло), котрий за центр має U. Для цього наносимо на Y^s та Z^s від U^s по обидва боки 35 m/m — одержуємо точки $e^s f^s g^s h^s$, котрі дають конюгиртні диаметри $e^s f^s$ $g^s h^s$ від A^s. В них визначаються $p^s q^s$ та $r^s s^s$ і викреслюється A^s. Нахильну проекцію другого фланца краю B одержуємо з A пересовуванням його рівнобіжно до X^s. Щоб одержати вісі B^s, треба відкласти товщину фланца (10 m/m) від U^s до U_1^s і через цю точку провести рівнобіжні та рівної довжини відрізки ($p^s q^s$ та $r^s s^s$). Еліпс B^s може бути викреслений з A^s (перебивкою). Рівнобіжні до X^s тангенти A^s та B^s обмежують стовпакову поверхню фланца. Нахильна проекція концентричного ко-

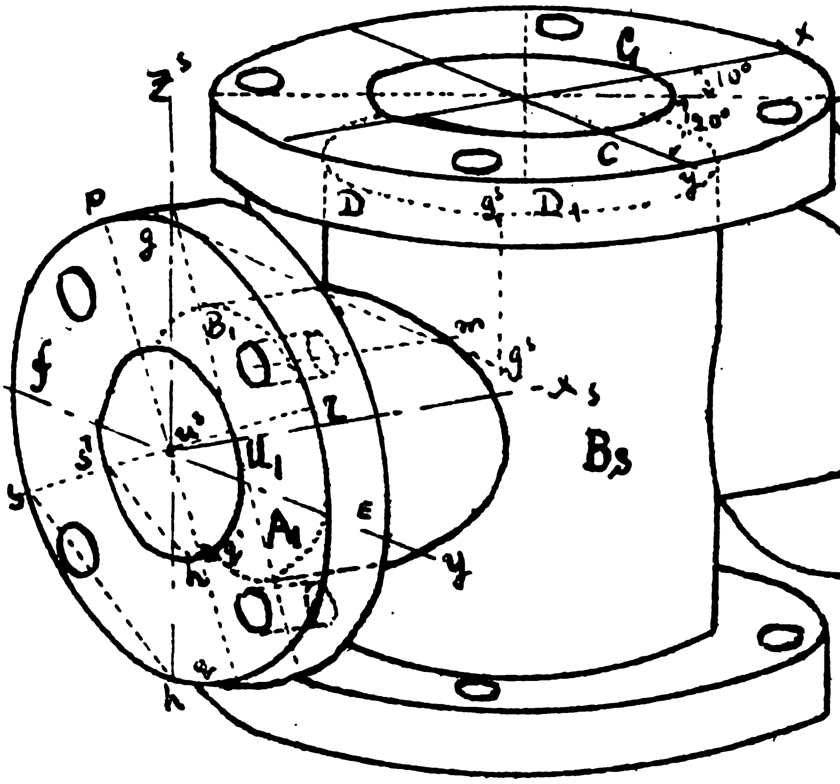


Фіг. 298.

кола A_1 = (u, 15 m/m) внутрішньої поверхні горізонтальної труби складається центром з u^s. Вісі A_1 складаються в осями A^s; кінці їх z_1^s q_1^s одержуються, коли на вісі Z^s означимо точку h_1 (шляхом відкладення радіуса) та проведемо через цю точку рівнобіжні до hs та hq (h_1s_1, h_1q_1).

Тангенти рівнобіжні до X^s, що йдуть з крайніх точок B_1^s, складають очертання горізонтальної трубки; ξ обмежена колом B_1, нахильна проекція котрого утворилась пересовуванням рівнобіжно $X^s - B_1^s$.

Так само нахильні проекції $\overline{B}$ та $\overline{A}$ другої частини трубочного фланцу



Фіг. 298 а.

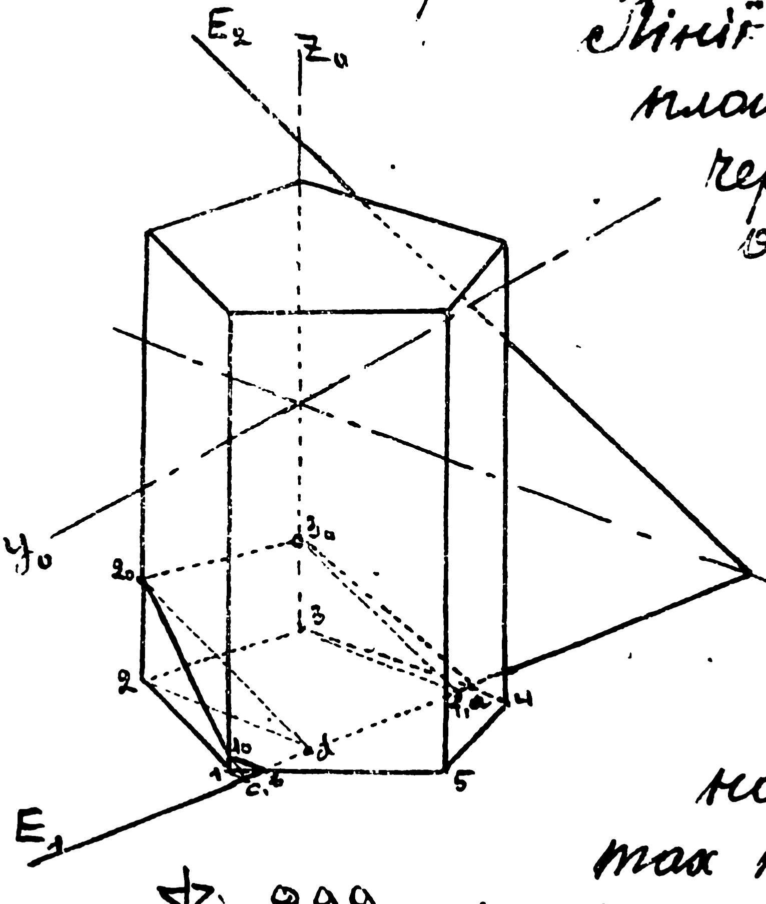
одержуються з A^s відповідним пересовуванням рівнобіжно до X^s.

При кресленні дірок для гвинтів в цих флянцах треба зауважити, що фігури їх будуть цілком подібні до A^s.

Представлення вертикальної труби (ζ) зі своїми флянцами, що лежать в площі, рівнобіжній до XY, робиться цілком подібно до того, як викреслювався перший флянець (A^s). Треба ще означити перетинення горізонтальної труби ξ з вертикальною ζ, що знову таки робиться по загальним правилам, аби можливо користатися готовою кривою січення S'', представивши її в нахильних аксонометричних проекціях.

Дана призма в аксонометричних проекціях, основа її лежить в площі XY. Означити перетинення цієї призми з площею, що дана своїми слідами E_1 та E_2. (фіг. 299)

Січення знаходимо користуючись допоміжними площами, що проводимо через бокові канти призми, рівнобіжно до E_2. Лінії перетинення цих площ в XY проходять через точки 1, 2, 3, 4... основи призми рівнобіжно до X_0, та перетинають E_1 в точках, з котрих проводимо рівнобіжні до E_2. Вони на аксонометричних кантах призми дають точки перетинення з площею E_1E_2, так напр., через точку c, проста, рівнобіжна до X_0 дає в січенні з кантом призми 3 точку 3_0, що належить до січення площі E_1E_2 з призмою.

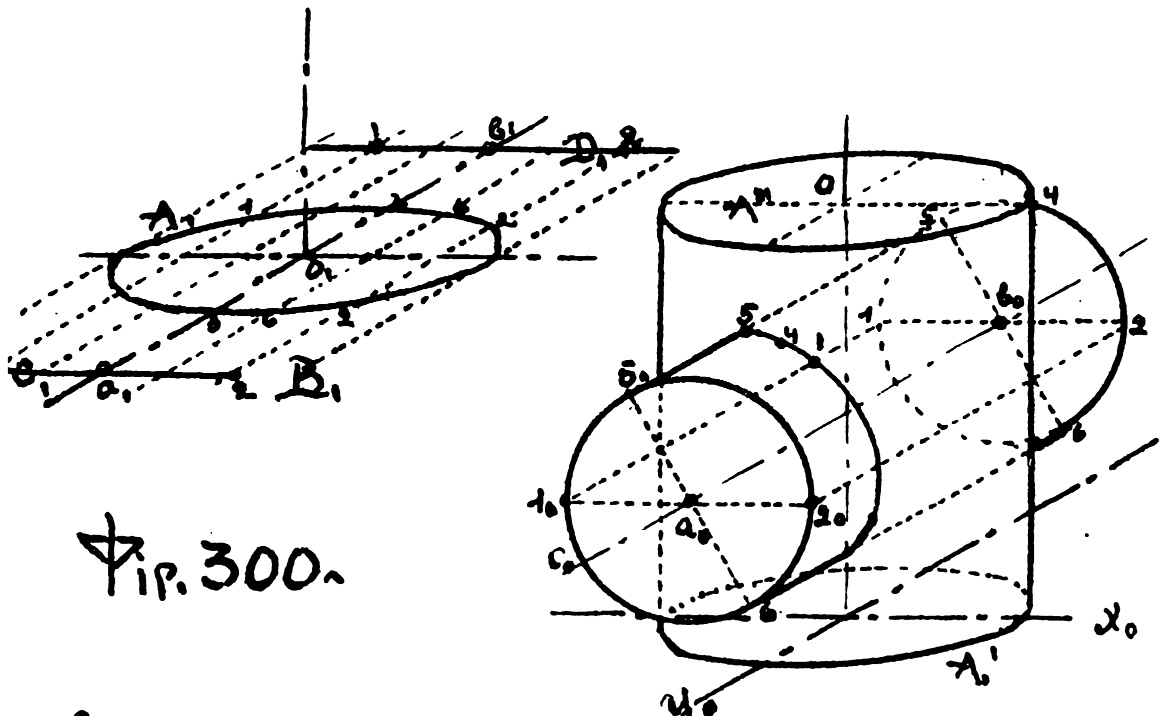


Фіг. 299.

Два прямих колових стовпака, з котрих один прямовісний до площі XY, а другий прямовісний до площі XZ, так поста—

влені, що вісі їх перетинаються. Треба представити їх в нахильних аксонометричних проекціях і означити лінії їх перетинення (фіг. 300).

На нарисі представлені в нахильних аксонометричних проекціях (1:½:1). На окремому нарисі показана основа обох стовпаків в аксонометричних проекці

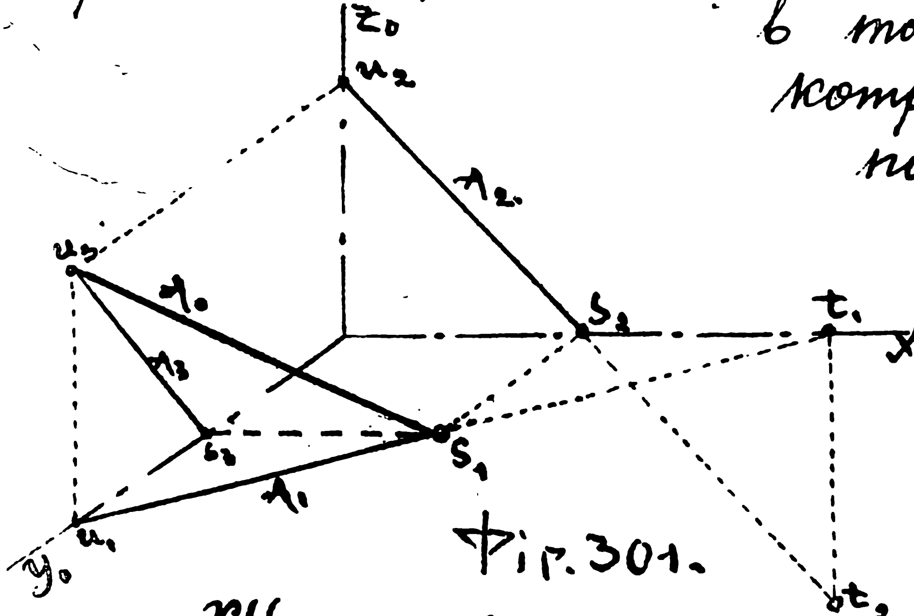


Фіг.300.

З них легко одержуємо всю фігуру пересуненням A' до A'' (на потрібну висот. та проведенням $a_0 b_0$ рівнобіжно до ві y_0. З точок a_0 та b_0 описуємо кола даним радіусом. Загальні тангенти до C_0 та D_0 обмежують поверхню стовпака, що рівнобіжний до площі xz. Тепер беремо низку творячих стовпака B та шукаємо їх перетинення з відповідними утворюючими стовпа ка A. Точки перетинення будуть точками загального перетинення.

<u>Проста дана своєю аксонометричною картиною A_0 та проекцією A_1. Треба означити сліди простої та другі проекції.</u>

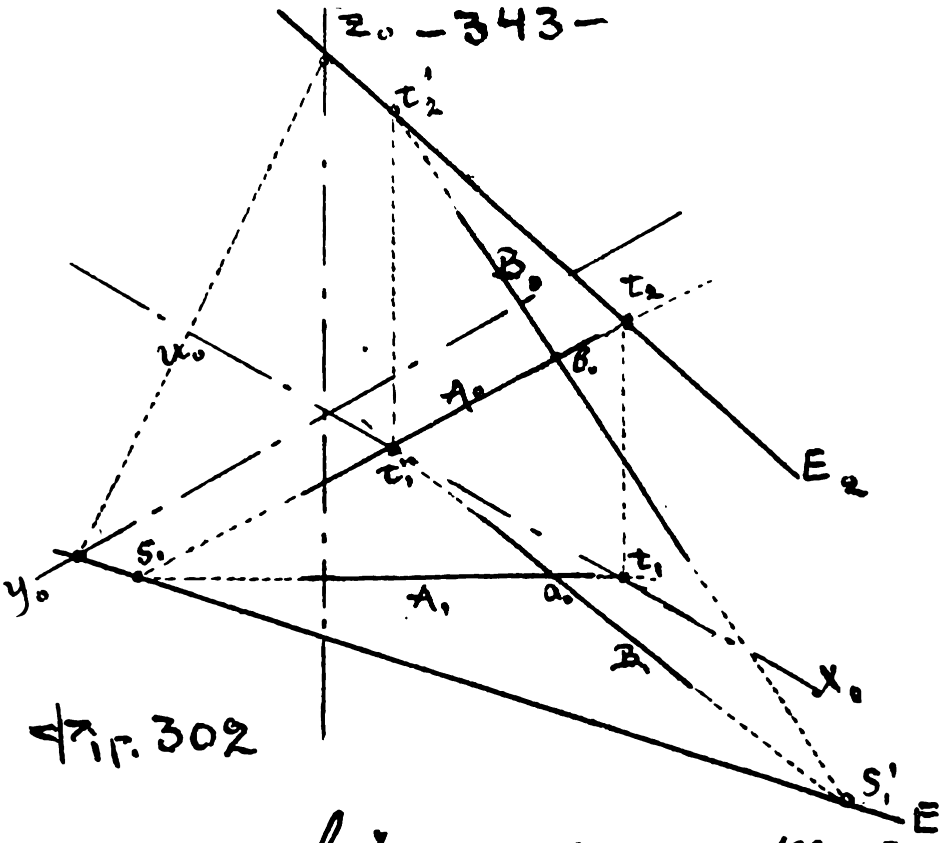
Проста A_1 (фіг.301) перетинає вісі У та X в точках u_1 та t_1, котрім на A_0 відповідають точки u_3 та t_2. Точка перетинення S_1 від A_0 та A_1 є картина перетинання з площею XY, ц.т. картина першого сліда простої. Точці S_1 відповідають на X_0 та Y_0 точки S_3 та S_2. Точці U_3 відповідає на Z_0 точка u_2. Прості сполучення $t_2\,s_2\,u_2$ та $s_3\,u_3$ дають проекції A_2 та A_3, A_0 в точках s_1 t_2 та u_3 дає сліди цієї простої.



Фіг.301.

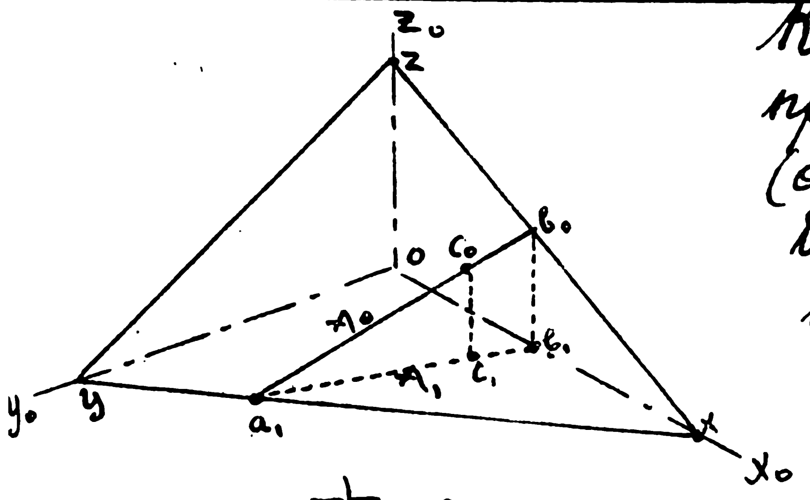
<u>Дані дві прості A та B, що перетинаються, треба означити їх сліди.</u>

Як в попередній задачі перш за все означаємо s_1 t_1 t_2 від A, та s'_1 t'_1 t'_2 від B (фіг.302). Прості сполучення s_1 s'_1 та t_2 t'_2 будуть сліди, які ми шукаємо.



Фіг. 302

Площа дана своїми слідами. Треба накреслити а) просту, в) якусь точку, що лежать в цій площі. (фіг. 303).

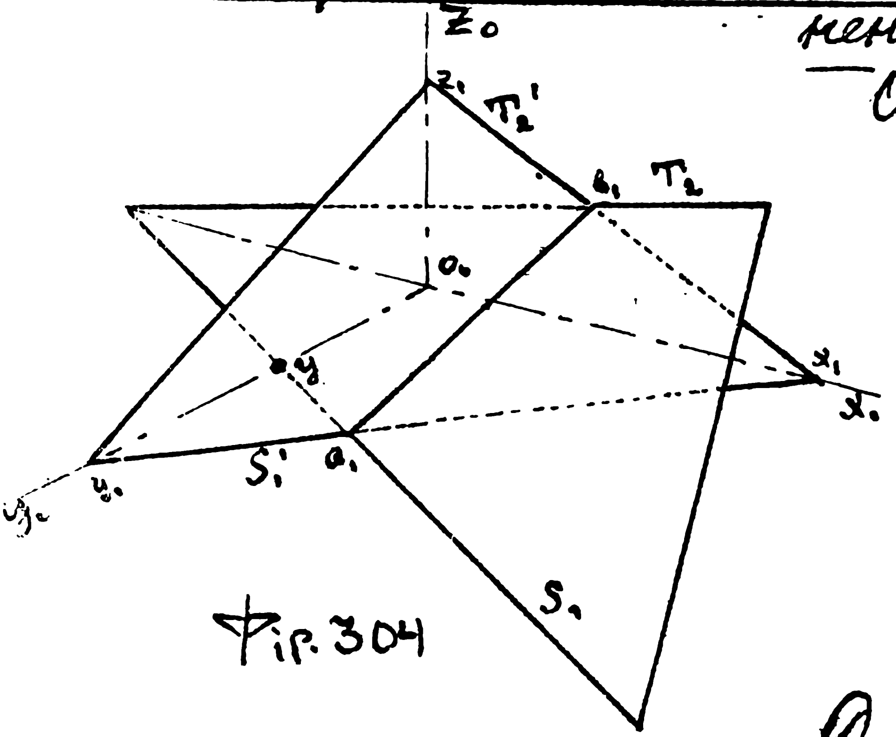


Фіг. 303.

Коли цілком довільно проведемо просту A_0 (але так, щоб вона була в цій площі) то її точки перетинення a_1 та b_0 з xy та xz дають сліди на площах XY та XZ.

Перша проекція b_1 від $\underline{b}$ лежить на вісі X_0, між тим, як друга a_1 складається з $\underline{a}$. Таким чином a_1b_1 є перша проекція A_1 простої A, що лежить в площі XYZ. Щоб взяти якусь точку на тій же площі, беруть, як в попередньому випадкові, просту на цій площі й після на ній якусь точку – C_0 лежить на A_0 c_1 на A_1.

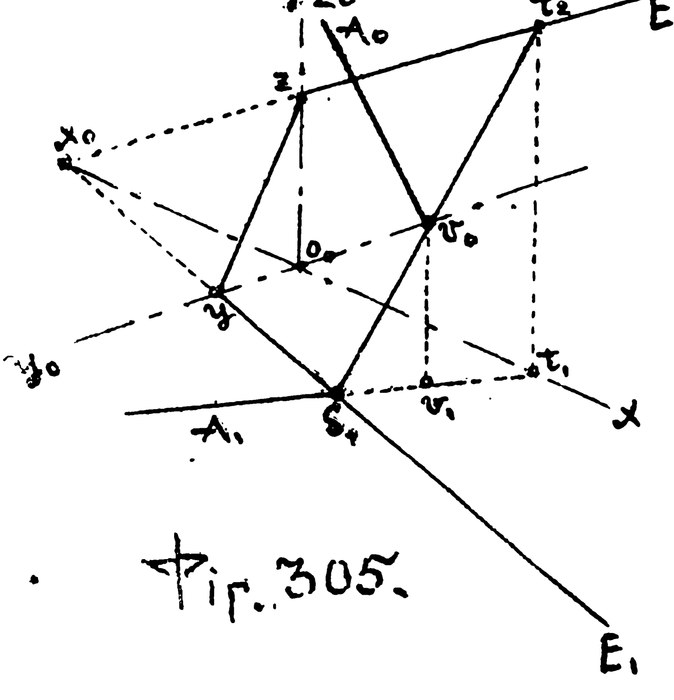
Дані дві площі своїми слідами S_1T_2 та $S_1'T_2'$. Треба означити їх просту перетинення (фіг. 304)



Фіг. 304

Одноіменні сліди перетинаються в точках $a_1 b_1$, проста їх сполучення й буде простою перетинення цих двох площ.

Дана площа своїми слідами та проста своєю аксонометричною картиною A_0 та першою проекцією A_1. Треба означити точку перетинення простої A в площею (фіг. 305).



Фіг. 305.

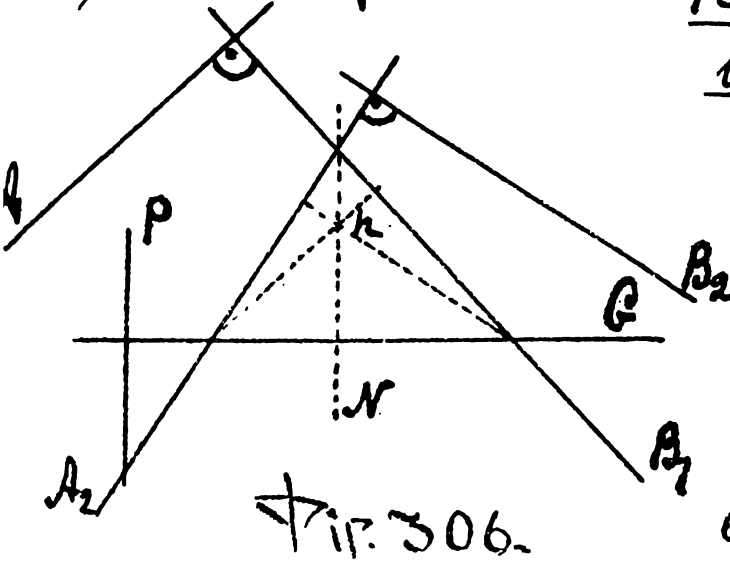
Перша проекція простої A_1 є одночасно картина сліда площі, рівнобіжної до Z_0, котрої слід на площі XZ проходить через точку t_1. В цій площі вона дає слід, рівнобіжний до Z_0 і перетинення з слідом E_2

в точці t_2. Проста, що сполучає s, t_2 дає на A_0 аксонометричну картину v_0 точку перетинення v A з площею $E_1 E_2$.

Взагалі треба сказати, що для викреслення наочних образів технічних частин та приладів, вживають именно аксонометричних нахильних проекцій. При виконанні нарисів мається ряд елементарних задач, як опущення рівновіса, перенесення прямовісного відрізка і т.д., котрі треба робити так, щоб по можливости менше накупчувати на нарисі всяких допоможних ліній. Де-які рішення можуть бути дані на підставі вищеприведених теорем.

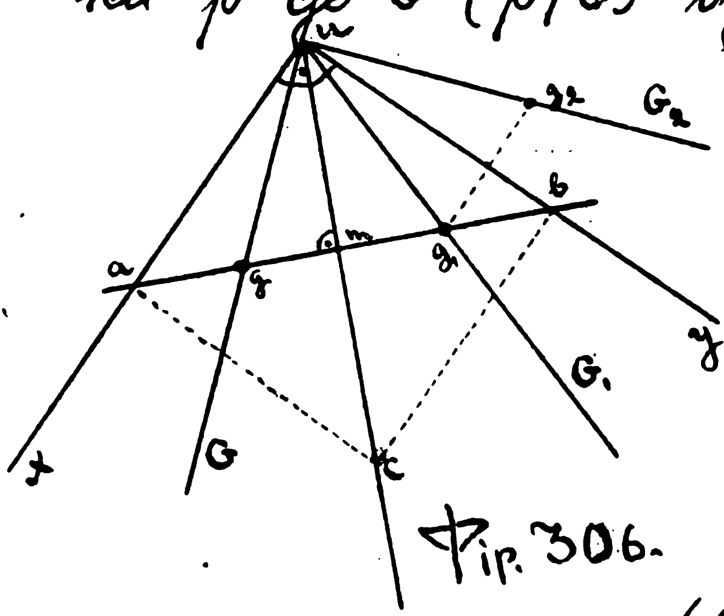
Коли в якійсь площі дані два прямих кута, боки котрих не рівнобіжні, то рівновісн в цій площі одержуємо именно проведенням рівнобіжника.

Нехай A_1B_1 та A_2B_2 будуть дані прямі кути та e довільна проста, на котру треба спустити рівновіс з точки p (фіг.306). В трикутнику, що складається з про-



Фіг. 306.

стої G та двох сторін прямих кутів (не рівновісних один до одного) прості, що проведені рівнобіжно до других сторін (A_1 та B_2) прямих кутів уявляють з себе висоти трикутника. Коли сполучимо точки їх перетинення h з точкою перетинення простих (A_2 B_1), то ця проста N буде рівновісна до G і рівновіс з точки p до G (p/G) буде (p‖N).



Фіг. 306.

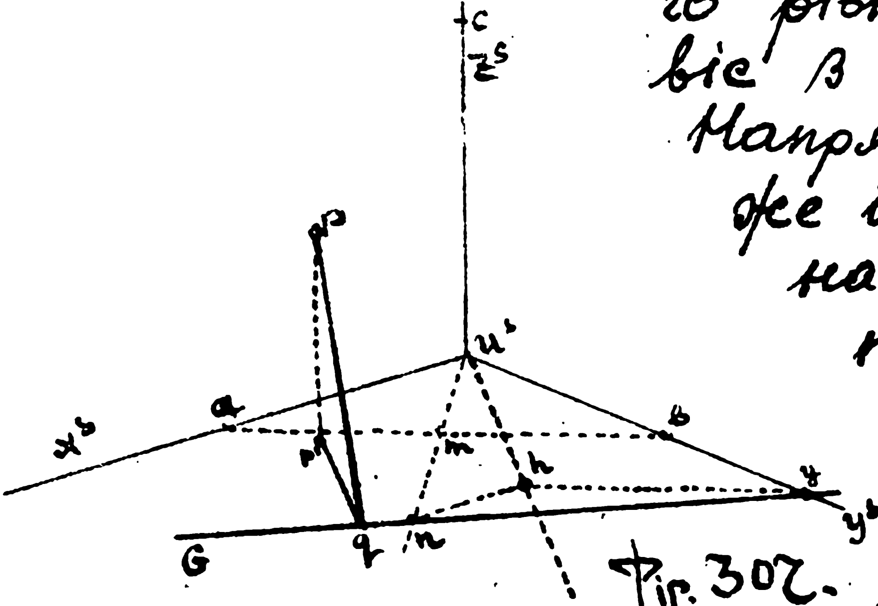
Коли в площі дан рівнораменний прямокутний трикутник uab з гіпотенузою ab і треба означити його середину m, то (фіг. 306) ставлять (um) рівновісно до (ab). Маємо знову два прямих кута aub та uma. Понеже точку m можна одержати, як перетинення (ab) з диоганалью (uc) квадрата ubac, котрого протележний кут до u може бути одержаний проведенням рівнобіжних — з цього виника положення: Коли в якійсь площі дан рівнораменний прямокутний трикутник, то рівновісі до цеї площі можуть бути означені проведенням рівнобіжних.

Коли дано ua ⊥ ub, то до простої G,

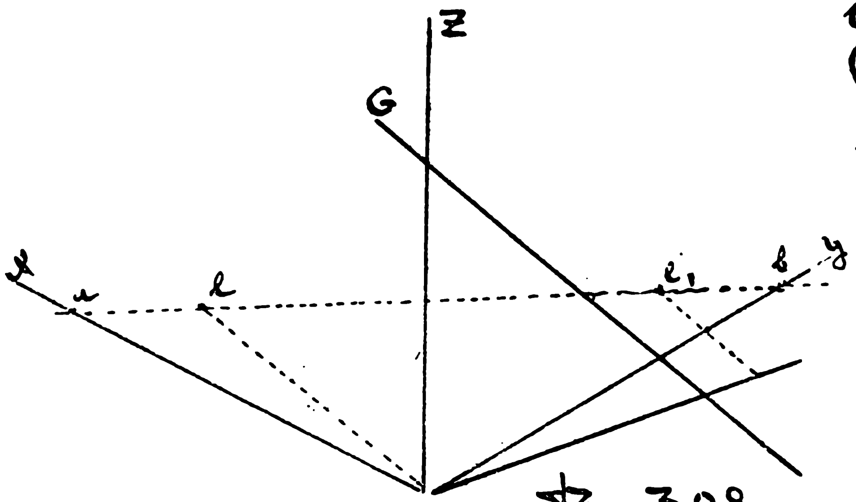
що проходить через $\underline{u}$, нормальна проста G_2 (через $\underline{u}$) означається так: Коли $ua = X$, а $ub = Y$, то шукаємо до G відносно лінії сіметрії um просту G_1, котра булаб симетрична до G, та до неї симетричну відносно вісі Y... G_2. Тоді G_2 буде рівновісна до G, бо на підставі конструкції $XG = G_1Y = YG_2$, звідкіля $GG_2 = 90°$. Виконання може бути так зроблено, що на простій ab, коли $d = [ab. G]$ робимо $bd_1 = -ad$, з точки d_1 проводимо рівнобіжну до X та відкладаємо $Yd_2 = d_1Y$. На підставі положення, що рівнобіжні прості в нахильних проекціях мають рівнобіжні проекції з рівними змінами відношень та на підставі цих двох тільки що приведених положень можна знавати: Коли в нахильних проекціях якоїсь плоскої фігури відомі картини двох прямих кутів, або картина рівнораменного прямокутного трикутника, то проведення (означення рівновісів в цій фігурі може бути безпосередньо зроблено в цих нахильних проекціях проведенням рівнобіжних простих або звязаним з цим переносом відтинків. Таким чином, коли дана нахильна проекція прямокутного рівновісного хреста, на підставі цього в кожній координатній площі проводити рівновіси простим проведенням рівнобіжних простих.

Це положення має приклад при таких задачах:

<u>З точки $p(p^s p'^s)$ треба спустити рівновіс на просту G, що лежить в площі XY (фіг. 307).</u> Основна проекція цього рівновіса є рівновіс з точки p' на G. Напрямок його може бути означений на підставі попереднього, бо uab є прямокутний рівнораменний трикутник. Сполучаємо <u>m</u> середину ab з u_s; тоді $X^s Y^s$ та $(a^s b^s)$ $(u_s m^s)$ картини двох прямих кутів площі XY. Трикутник $u_s y n$, що складається простою G віссю Y та <u>um</u> ...! $y = [GY]$ $n = [um.G]$, то висоти до сторін Y та um $(n \| X)$ $(Y \| ab)$ дає точку висоти h. $(uh) = N$ нормаль до G, тому $(p' \| N)$ дає грунтову проекцію рівновіса, що шукаємо $q = [p' \| N.\, G]$, котрого основа лежить на G. $[p^s q^s]$ представляє рівновіс, спущений з p на G. На нарисі (фіг. 308)



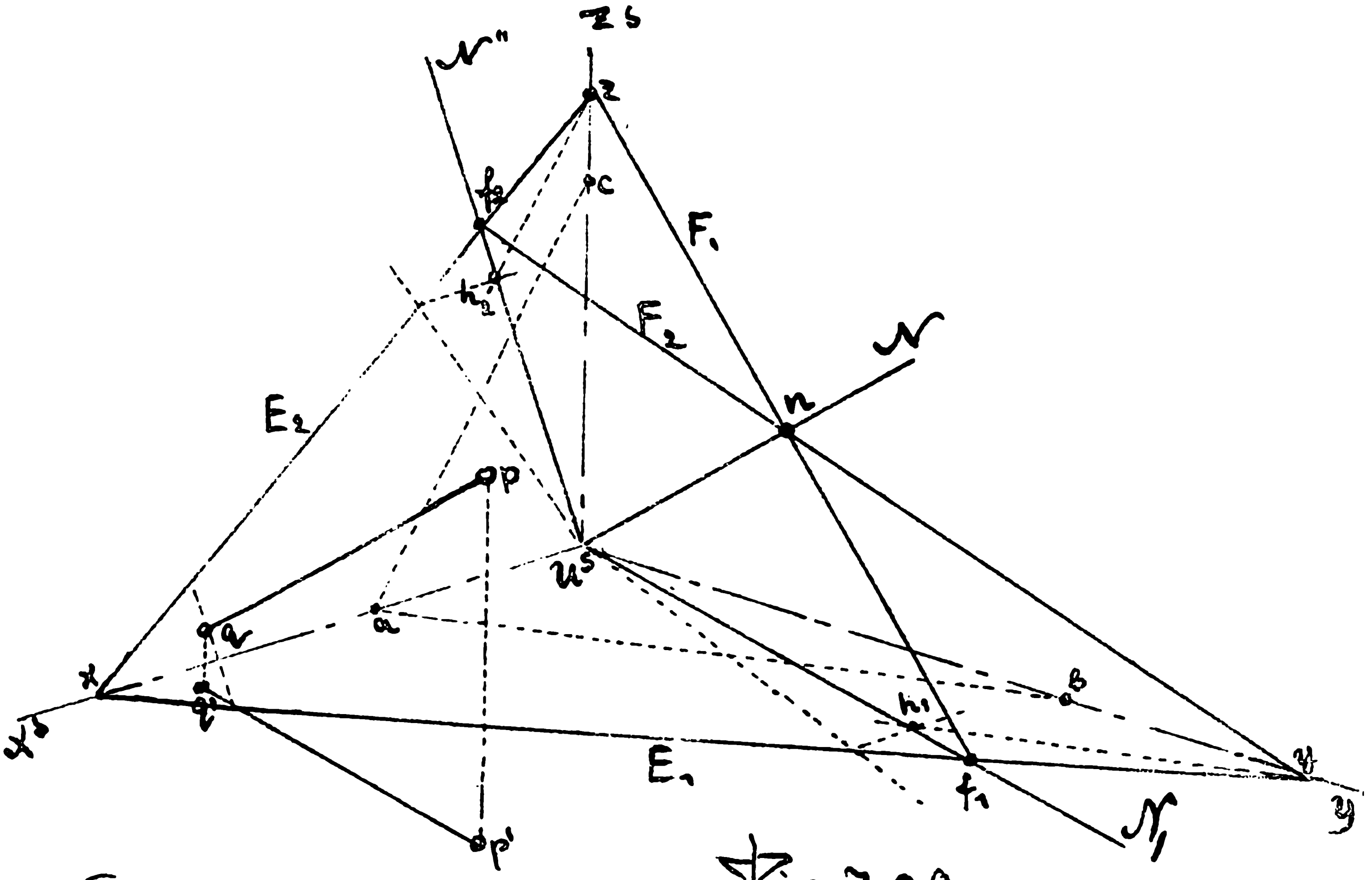
Фіг. 307.



Фіг. 308.

дана конструкція проведення нормалі до простої в.

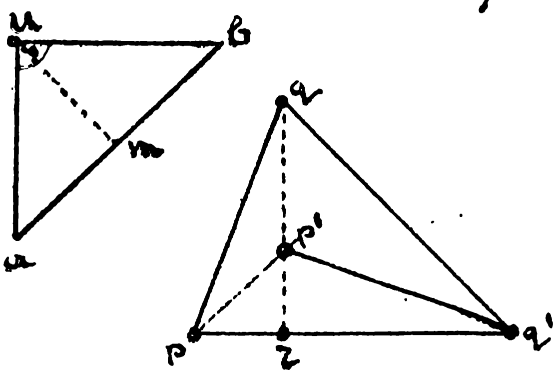
Площа дана своїми слідами E_1 та E_2 на площах (XY) та (XZ). Треба на неї опустити рівновіс з точки p ($p^s p'^s$). Перш за все треба означити рівновіс N [u|E] (фіг. 309)



Фіг. 309.

Його нормальна проекція N' на площу (XY) є перпендикуляр $[u|E_1] = uh_1$, точку h_1 котрого конструюємо так, як це було зазначено в попередній задачі. Аналогічно робимо з $N'' = [uK_2] = [uh_2]$ на площу (XZ). Площі $(N_1 Z)$ та $(N_2 Y)$ нормальні до площ (XY) та (XZ), перетинаються по простій N. Нехай $x\ y\ z$ точки перетинення площі ε з координатними осями та $f_1\ f_2$ відповідні точки основ спущених рівновісів з $\underline{u}$ на E_1 та E_2; площа ε цими двома площами перетинається по простим $(f_1 z)$ та $(f_2 y)$, точка їх перетинення $\underline{u}$ належить і $N^s = (u^s n^s)$ $N'^s = (u^s f_1^s)$. Прості $[p^s \| N^s]$ та $[p'^s \| N'^s]$ — це нахильні проекції рівновіса з $\underline{p}$ на ε. Його точка перетинення $q\,(q^s q'^s)$ з ε означається з допопомогою вертикальної площі до $(X\underline{Y})$ (що проходить через означений рівновіс), котра площу ε перетинає по простій рівнобіжній $(f_1 z)$.

Для швидкого креслення, щоб повернути якийсь відрізок на 90° вживають такого засобу: нехай дана нахильна проекція рівнораменного прямокутного трикутника $\overline{uab}$ та якийсь відрізок pq. Нехай точка r буде $[p \| ub]$. $q \| [ua]$. Коли повернимо $\overline{pq}$ на 90° навкруги r, то замісць того, щоб будувати круги, викреслимо

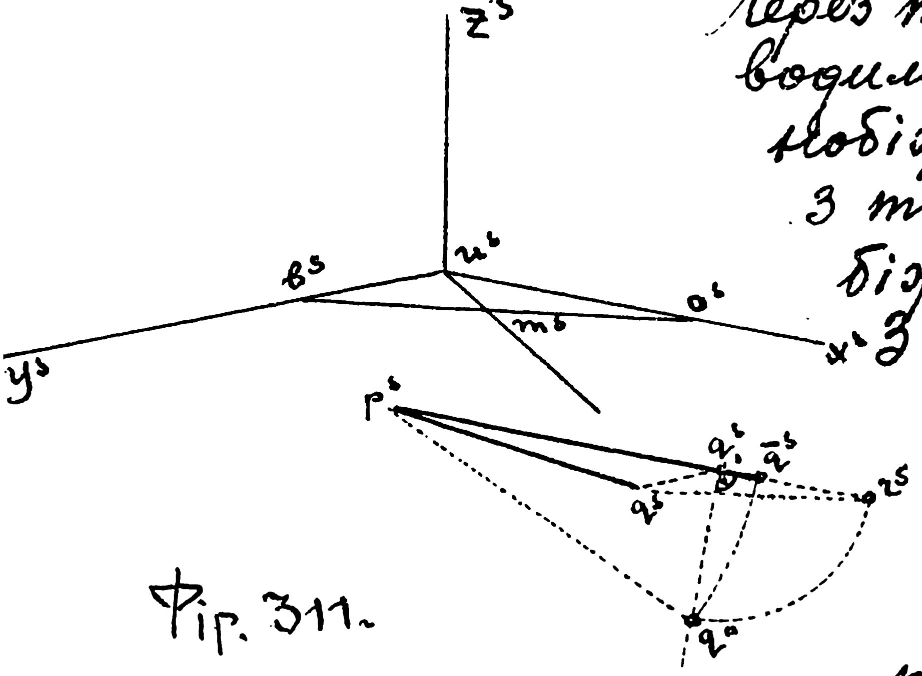


Фіг. 310.

відповідні хорди. Для цього через точку p проводимо просту рівнобіжну до $\underline{ab}$, а через точку q рівнобіжну до $\underline{um}$; проста p'q' буде уявляти в себе повернуте на 90° положення pq.

Цим засобом можна у всякій площі, коли дан прямокутний рівнораменний трикутник в нахильних проекціях, викреслити квадрат, коли дан якийсь відрізок, або коло, диаметром котрого буде цей відрізок.

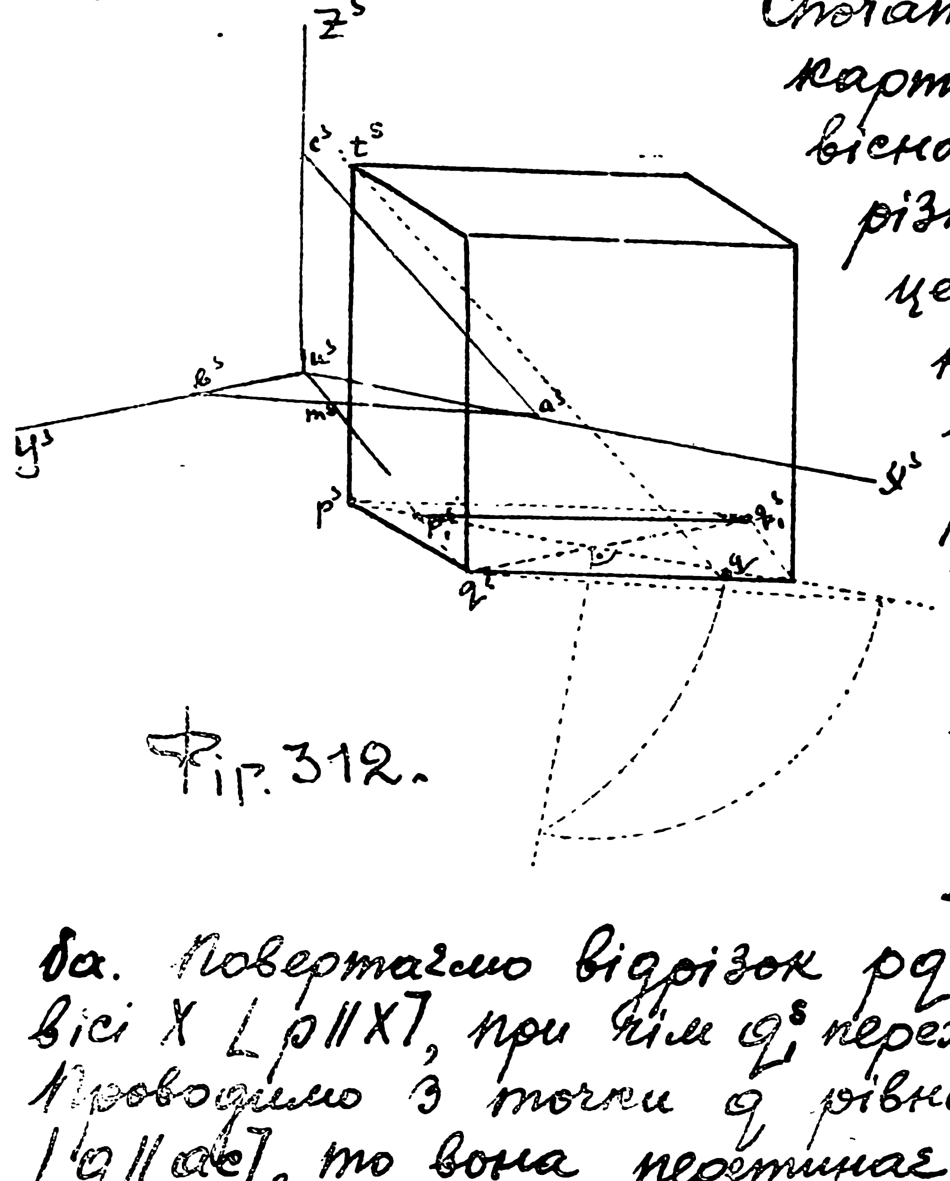
При кресленні від руки для утворення зручних наочних конструкцій покажимо, як даний відрізок pq, що лежить в площі (XY) повернути біля точки p так, щоб він став рівнобіжним до вісі X.



Фіг. 311.

Через точку p^s проводимо просту рівнобіжно до вісі X, а з точки q^s рівнобіжну до вісі Y. З точки q просту рівнобіжну до $b^s a^s$. З точки q^s ставимо рівновісе та відкладаємо $q^s r^s = q^s q^o$. Переносимо гіпотенузу $p^s q_o$ на напрямок вісі X від p^s. $p^s q^s = p^s q_o$, що й буде повернутим відрізком $p^s q^s$ по

напрямку X біля точки p^s.
На підставі цих двох положень можливо викреслити від руки куб в нахильних проекціях, коли дана картина $p^s q^s$ відрізка pq, що лежить в площі XY.



Фіг. 312.

Спочатку кремимо картину прямовісного до $p^s q^s$ відрізка $p_1^s q_1^s$, як це робили раніще. Рівнобіжним пересовуванням ставимо цей відрізок в положення другої сторони квадрата - основи куба. Повертаємо відрізок pq рівнобіжно вісі X $[p \parallel X]$, при чім q^s переходить в q. Проводимо з точки q рівнобіжну до ac $[q \parallel ac]$, то вона перетинає просту, що йде з точки p^s рівнобіжно вісі Z в точці t_s. Цим конче означені нахильні проекції куба.

Нормальну аксонометрію можна розглядати, як окремий випадок нахильної аксонометрії і всі задачі, що вирішаються в нахильних проекціях звичайно можуть бути вирішені й в звичайних. За старі часи була дуже розповсюджена так звана юнацька (Militär) перспектива. (Дві вісі прямовісні, а третя іде під кутом 45°).

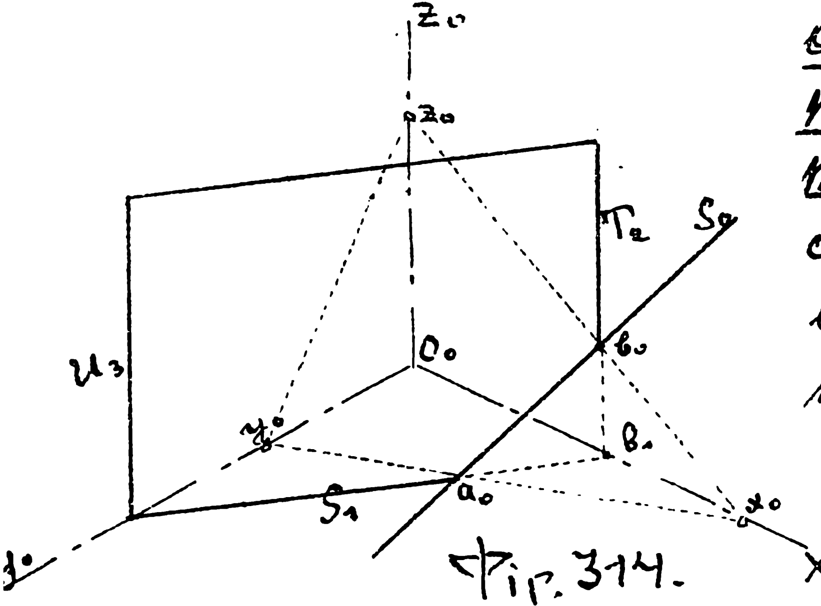
Вирішимо де-кілька задач, що до прямовісних аксонометричних проекцій.

Означити віддалення точки a від картинної площі (фіг. 313) Нехай $x_0y_0z_0$ бу-

Фіг. 313.

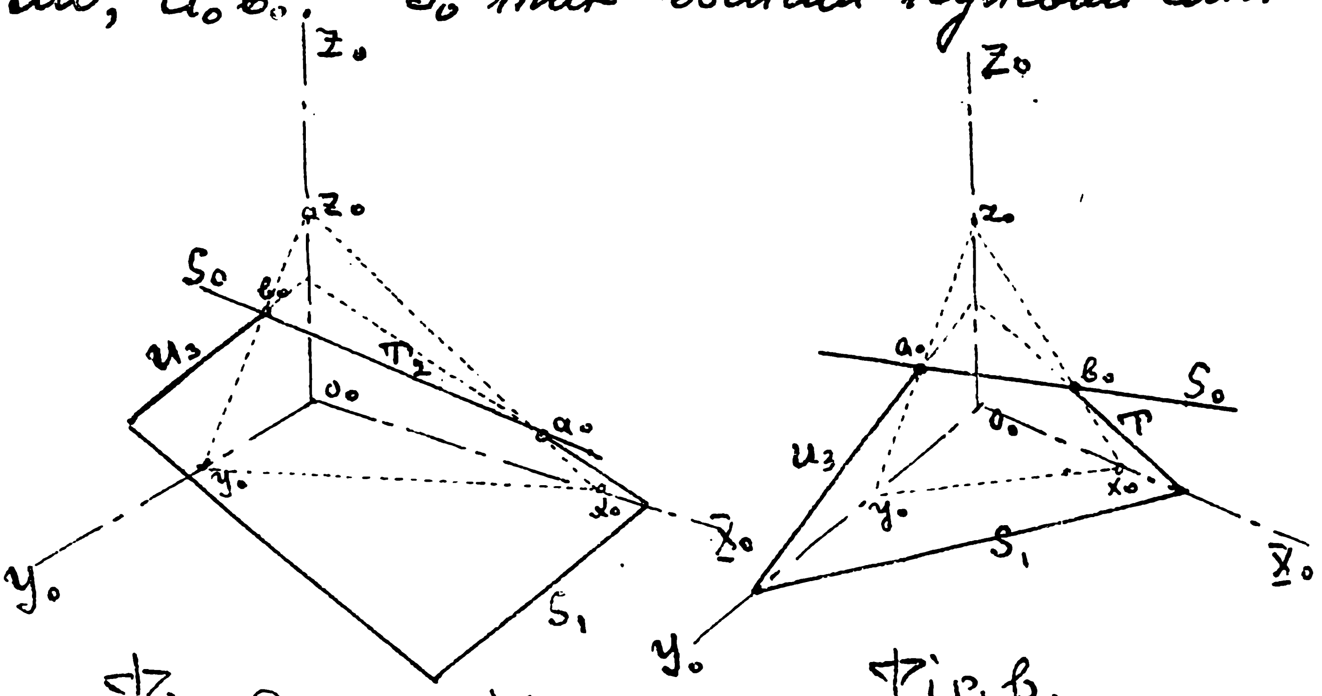
де трикутник перетинення картинної площі з осями. Уявимо собі через Z площу рівновісну до картинної площі, перетинаючу площу XY. Складаємо її біля цього січення з картинною площею. В складеній фігурі E_0 є проекція картинної площі, на котрій 3 та Z_0 будуть точками, що відповідповідають z_0 та 3. На півколі, що описане біля $3z_0$, як диаметра, рівнобіжна через O_0 до x_0y_0 дає точку O і в O3 проекцію площі X-Y. На простій O3 находимо пункт a_1, ставимо в нього рівновіс і на рівнобіжній з a_0 одержуємо точку a_0. Відрізок $a_0a = e$ є віддалення точки $\underline{a}$ від картинної площі. Відрізок a_1a дає віддалення точки a від площі XY в дійсній величині.

Дана площа своїми слідами, треба означити її перетинення з картинною площею.



Фіг. 314.

а) Площа рівновісна до одної з координатних площ. На нарисі (фіг. а) площа рівновісна до XY. Картини слідів S_1 та T_2 перетинають сторони x_0z_0 та x_0y_0 в точках a_0 та b_0, проста перетинення, що шукаємо, a_0b_0. S_0 так званий нульовий слід.



Фіг. а

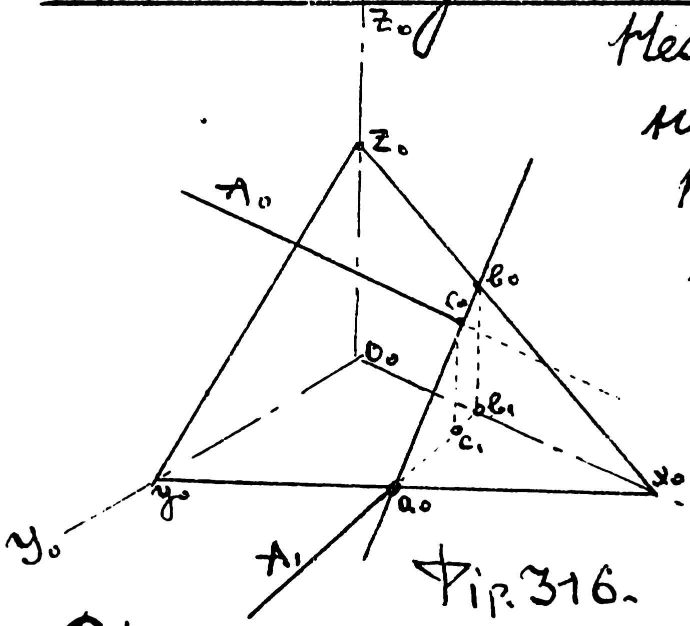
Фіг. 315

Фіг. в.

На фіг. 315 в площа рівновісна до XZ. T_2 та U_5 дають на y_0z_0 та x_0z_0 точки a_0 та b_0 нулевої лінії.

На фіг. площа нахильна до всіх трьох координатних площ.

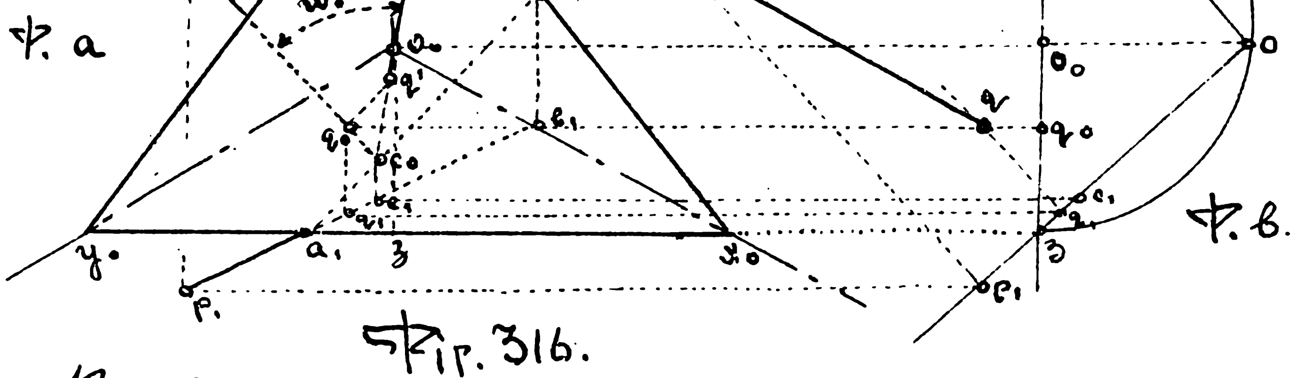
Означити нулевий слід даної простої.



Фіг. 316.

Нехай $x_0y_0z_0$ трикутник картинної площі. Проведемо через A_1 площу рівновісну до XY та означимо по попередньому нулевий слід a_0b_0, котрий z_0A_0 перетинає в точці c_0.

Треба означити дійсну величину відрізка pq та його нахил до картинної площі.

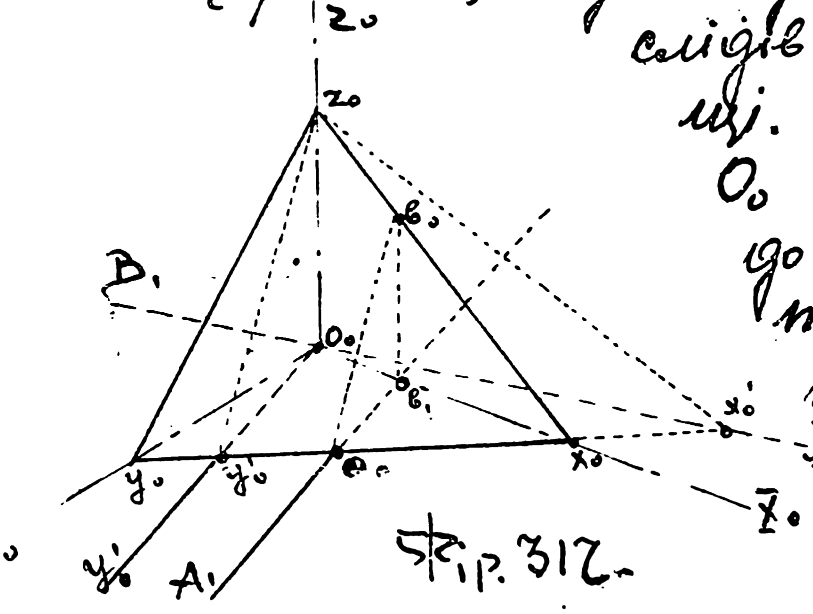


Фіг. 316.

Проводимо через вісь площу, рівновісну до картинної площі, та означаємо її перетинення з нею (Карт. пл.) та з XY. Після цього по попередньому означаємо віддалення точок $p\,p_0$ та $q\,q_0$ від картинної площі. Прокладаємо до p_0q_0 ординати з точок p_0 q_0 та наносимо на них довжини pp_0 та qq_0, з фіг. 316 одержуємо p_1q_1 дійсну довжину відрізка pq. Кут ω_0 буде кутом нахилу даної простої pq до картинної площі.

<u>З початку координат спустити рівновіє на просту A_1, що лежить в площі XY та викреслити його аксонометричну картину.</u>

Нехай (фіг. 317) $x_0y_0z_0$ буде трикутник слідів картинної площі. Проводимо через O_0 рівнобіжну до A_1 до перетинення в точці y_0' з x_0y_0 та розглядаємо лінію O_0y_0' як вісь y_0' вісевого хреста $z_0y_0'x_0'$;

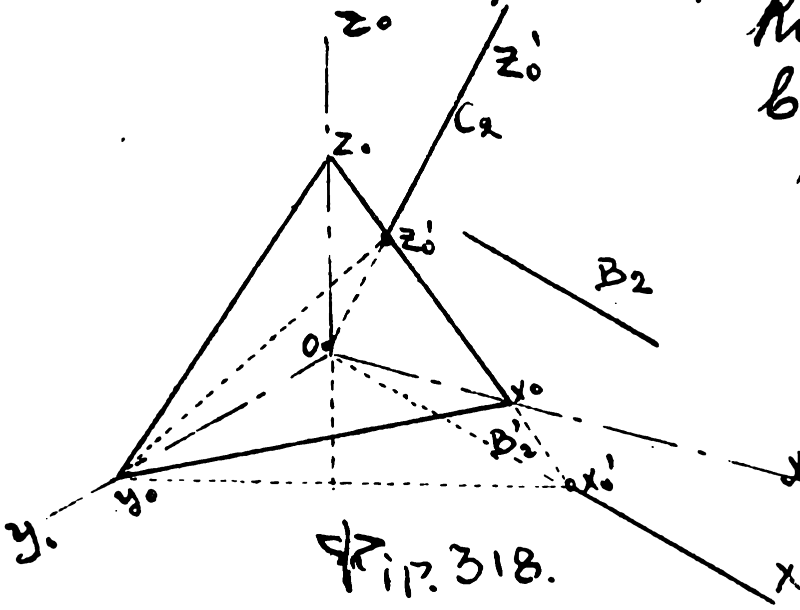


Фіг. 317.

для нього z_0y_0' буде стороною слідового трикутника, в котрім третя вісь X_0 геометрично рівновісна. X_0' або B_1 є, таким чином, аксонометрична картина простої, рівновісної до A_1.

<u>Примітка:</u> Прості A_1 та B_1 суть аксонометричні картини двох в дійсності рівновісних одна до одної простих A та

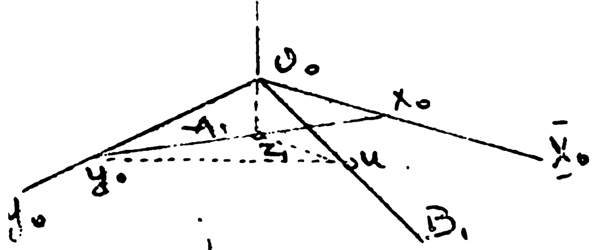
B, що лежать в площі XY. Кут межи A_1 та B_1 є аксонометрична картина прямого кута й кажуть, що прості A_1 та B_1 аксонометрично рівновісні.



Фіг. 318.

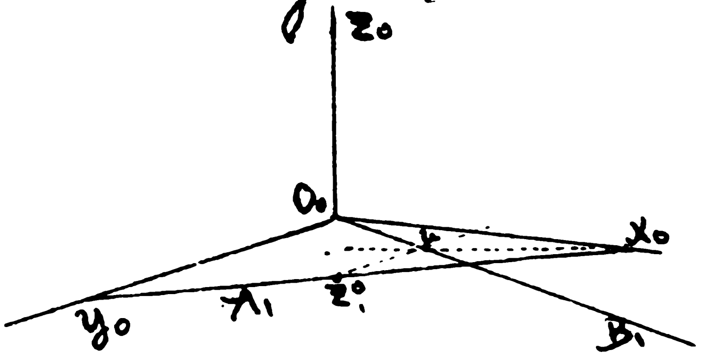
Коли проста лежить в якійсь другій площі, напр., в площі XZ (фіг. 318), то вищенаведене рішення може бути й тут прикладене. Проводимо через O_0 рівнобіжну B_2' до B_2 та приймаємо, як нову вісь X_0' для осевого хреста $Y_0X_0'Z_0'$; тоді Z_0' або C_2 рівновісна до сторони Y_0X_0'. C_2 є аксонометрична картина рівновіса до простої B_2.

Ці рішення можуть бути конструктивно ще попрощені. Нехай (фіг. 319) A_1 проста лежить в площі XY, до неї треба провести аксонометричну рівновісну.



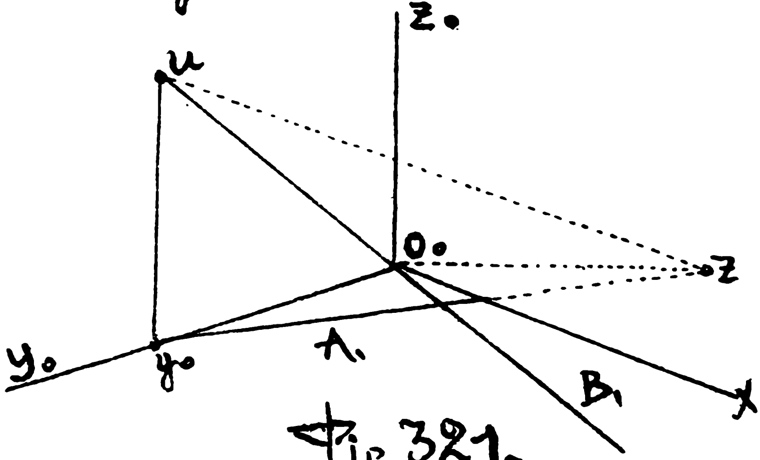
Фіг. 319.

В трикутнику O_0YZ з точки Y_0 проводимо рівновіс до Z, Z, а з точки z рівнобіжно до вісі X_0. Точка перетинення висот трикутника O_0 y z, тому проста, що сполучає O_0 з u (O_0u) аксонометрично рівновісна до A_1.



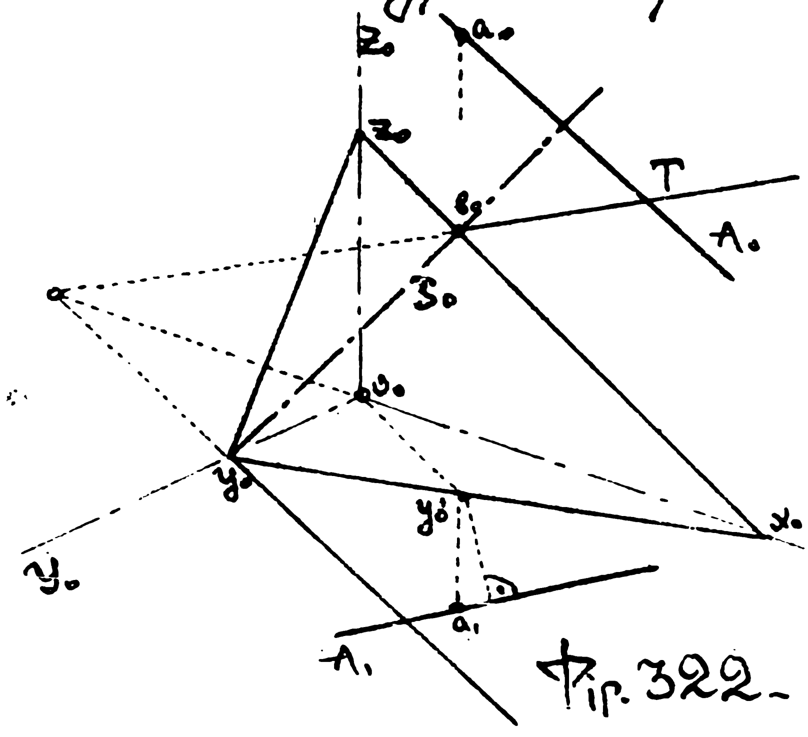
Фіг. 320.

З допомогою трикутника (фіг. 320) O_0zx проводимо конструкцію: через z проводимо zu рівнобіжно до y_0; через x рівновісну до z_0. Ді $\underline{u}$ точка перетинення висот в трикутнику O_0zx і O_0u аксонометрично рівновісна до A_1.



Фіг. 321.

Нарешті на нарисі (фіг. 321) проводимо O_0z рівновісно до z_0 та zu рівнобіжно до X_0. $\underline{u}$ є перетинення висот трикутника yO_0z, значить O_0u (або B_1) є аксонометричний рівновіс до A_1.

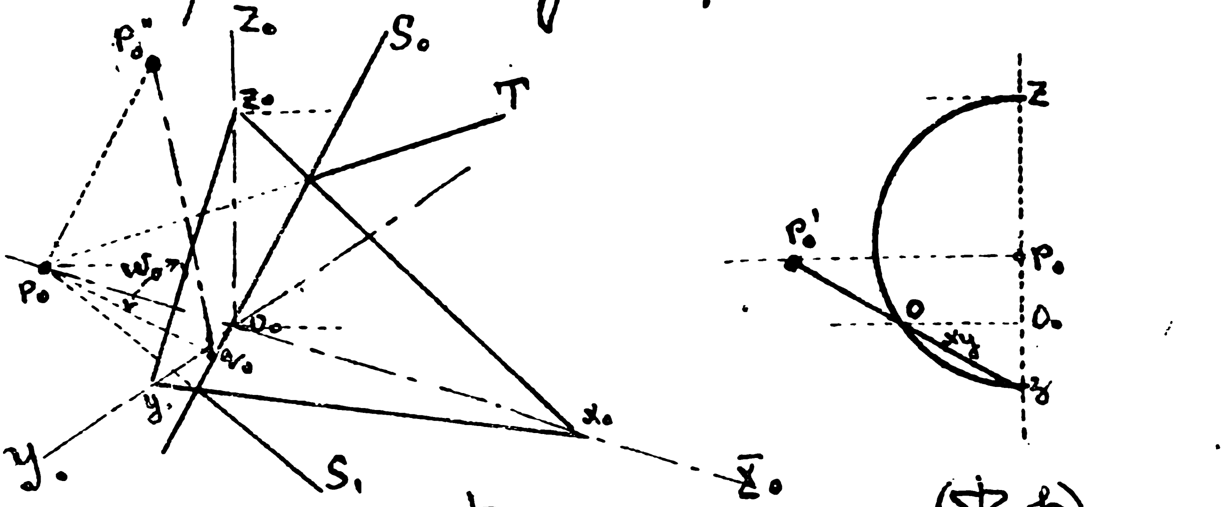


Фіг. 322.

<u>З данної точки (a_0a_1) треба встутити рівновіс на площу, що дана своїми слідами.</u> Раніще всього означимо нульову лінію y_0b_0 площі ST. Після строїмо аксоно-

метричну картину A_0 рівновіса до нулевої лінії S_0, що шукаємо. Тоді A_1 аксонометрично рівновієна до картини сліда S_1 може бути означена по попередньому.

Означити кут нахилу площі ST до картинної площі. Конструюємо просту перетинення площі, що проходить через Z рівновієно до картинної площі,



(Ф. a) Фір. 323 (Ф. b)

з картинною площею та площею XY. Далі означаємо віддалення якоїсь точки P_0, що лежить в цій площі, до картинної площі, рівному $P_0'P_0$ (фіг. b). Проводимо з точки P_0 (фіг. a) рівновіс до нулевої лінії площі ST, робимо P_0P_0''' рівновісним до P_0q_0 та відкладаємо $P_0P_0''= =P_0P_0'$, сполучаємо P_0'' з q_0. В трикутнику $P_0P_0''q_0$ кут $P_0''q_0P_0 = W_0$ буде кутом між площею ST та картинного (в дійсній величині).

Треба означити дійсну величину плоскої

фігури, напр., трикутника bcd (фіг. 324)

Знову означаємо перетинення площі, що проводить через вісь z рівновісно до картинної площі з площею XY та картинною. Далі — нулеву просту S_0. Маючи ці дані, як в попередньому випадку означаємо кут W_0, що складає площа bcd з картинною площею. Коли складаємо площу ST' навкруги нулевої лінії y_0a_0 в картинною площею, то точка p переходить в точку p'' так, що p_0p'' рівновісна до y_0a_0 і $q_0p'' = q_0p'$. Проста сполучення $p''y_0$ та $p''a_0$ дають S'' та T'' складені образи S_1 та T_2. Проводимо рівнобіжні до T_2 через $b_0c_0d_0$ до перетинення з S_0 в точках q e f. З цих точок проводимо рівнобіжні до T''. Коли з точок $b_0c_0d_0$ проведемо рівновісні до S_0, то вони з рівнобіжними до T'' дадуть в перетиненні точки $b''c''d''$, котрі уявляють з себе перекладені точки a b c. Таким чином $b''c''d''$ є дійсна величина трикутника abc. Аксонометрична картина $b_0c_0d_0$ трикутника bcd та перекладена $b''c''d''$ суть афінні фігури; рівновісні до S_0 напрямки афінних лучів; S_0 — афінна вісь, на котрій мусять перетинатися продовжені сторони b_0c_0 $b''c''$ $c''d''$... c_0d_0.

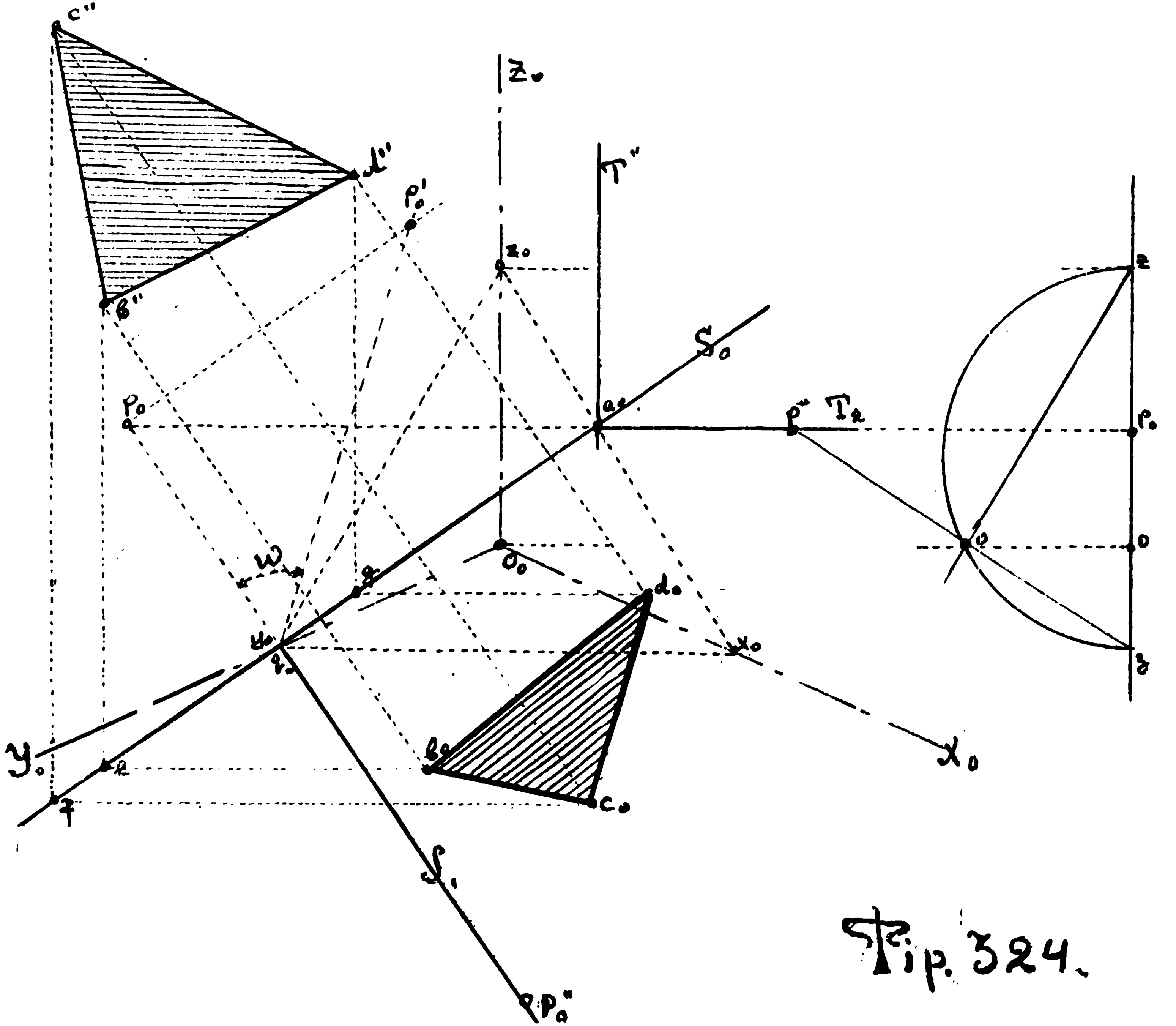
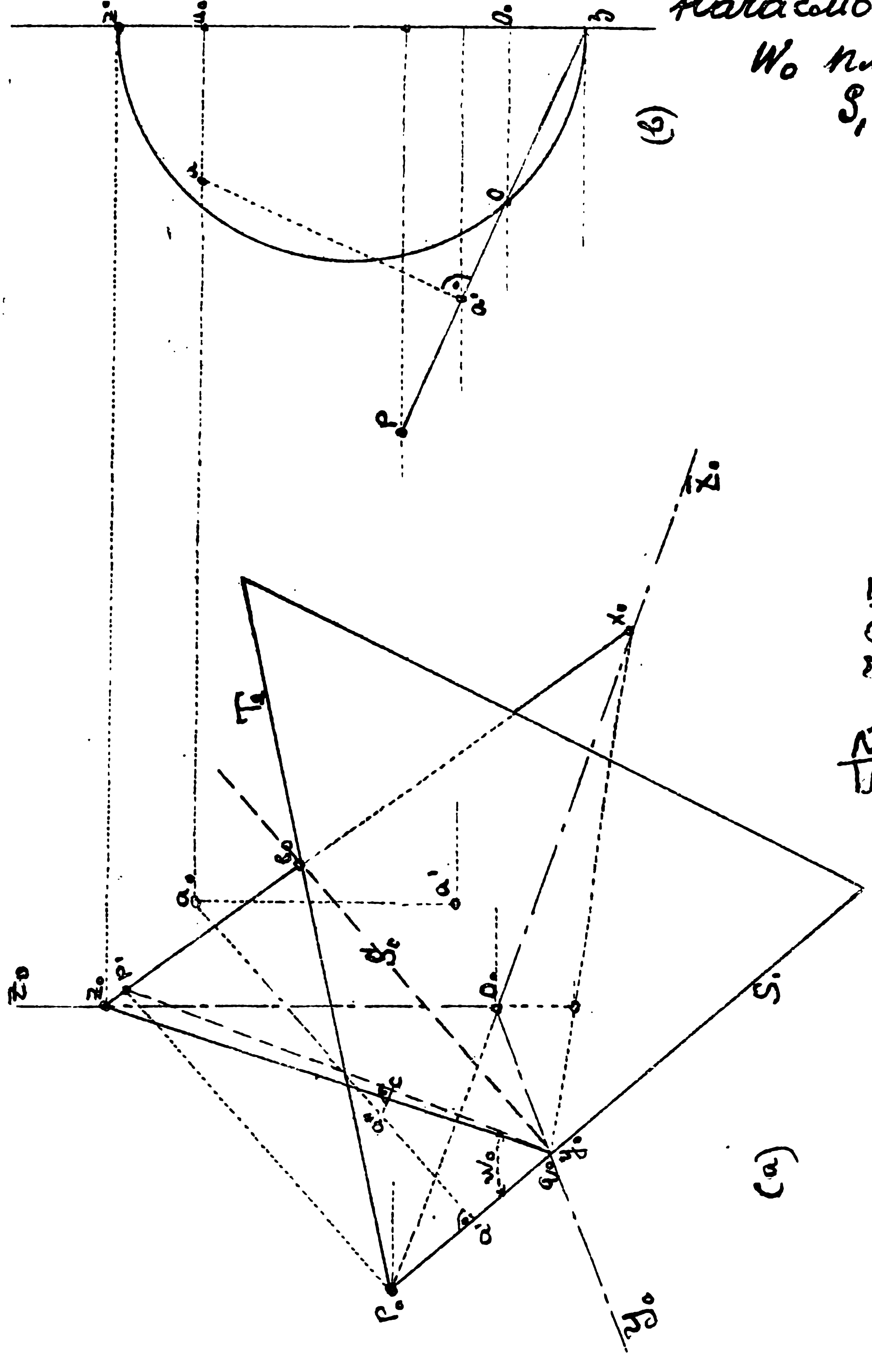


Fig. 324.

Треба означити віддалення точки a від площі ST. (фіг.325)

На підставі попередніх задач, з допомогою точки p_0 означаємо кут W_0 площі $S_1 T_2$ з



Фіг. 325.

картинною площею. Конструуємо віддалення a_0a (фіг.325(б)) точки a від картинної площі. На нарисі (фіг.325(а)) проводимо через точку a_0 рівновіс a_0a, до p_0q_0 та $a'a'' = a_0a$. Тоді рівновіс з точки a''... $a''c$ до q_0p_0' дає віддалення точки a від площі ST.

Ці вищеприведені задачі дають можливість вирішувати цілу низку різних прикладів. Приведемо приклад.

В площі, що дана своїми слідами S_2 та T_2 лежить правильна шостостороння порожня (hohle) призма своєю основою так, що центр складається в данною точкою m. Крім того, одна зі сторін основи рівнобіжна до картинної площі. Довжина сторони основи та висота призми відомі. Треба викреслити аксонометричну картину призми.

Поперед усього означаємо кут нахилу w_0 площі ST до картинної площі. Вибіраємо пункт m_0 в площі ST довільно. З цієї точки m_0 проводимо рівновісну m_0n_0 до a_0b_0 нульової простої. Через точку n_0 – рівнобіжну q_0p' та через точку m_0 рівновісну m_0m' до m_0n_0, то m_0m' є віддалення точки m від картинної площі. Складаємо площу ST навкруги нульової лінії в картинною площею

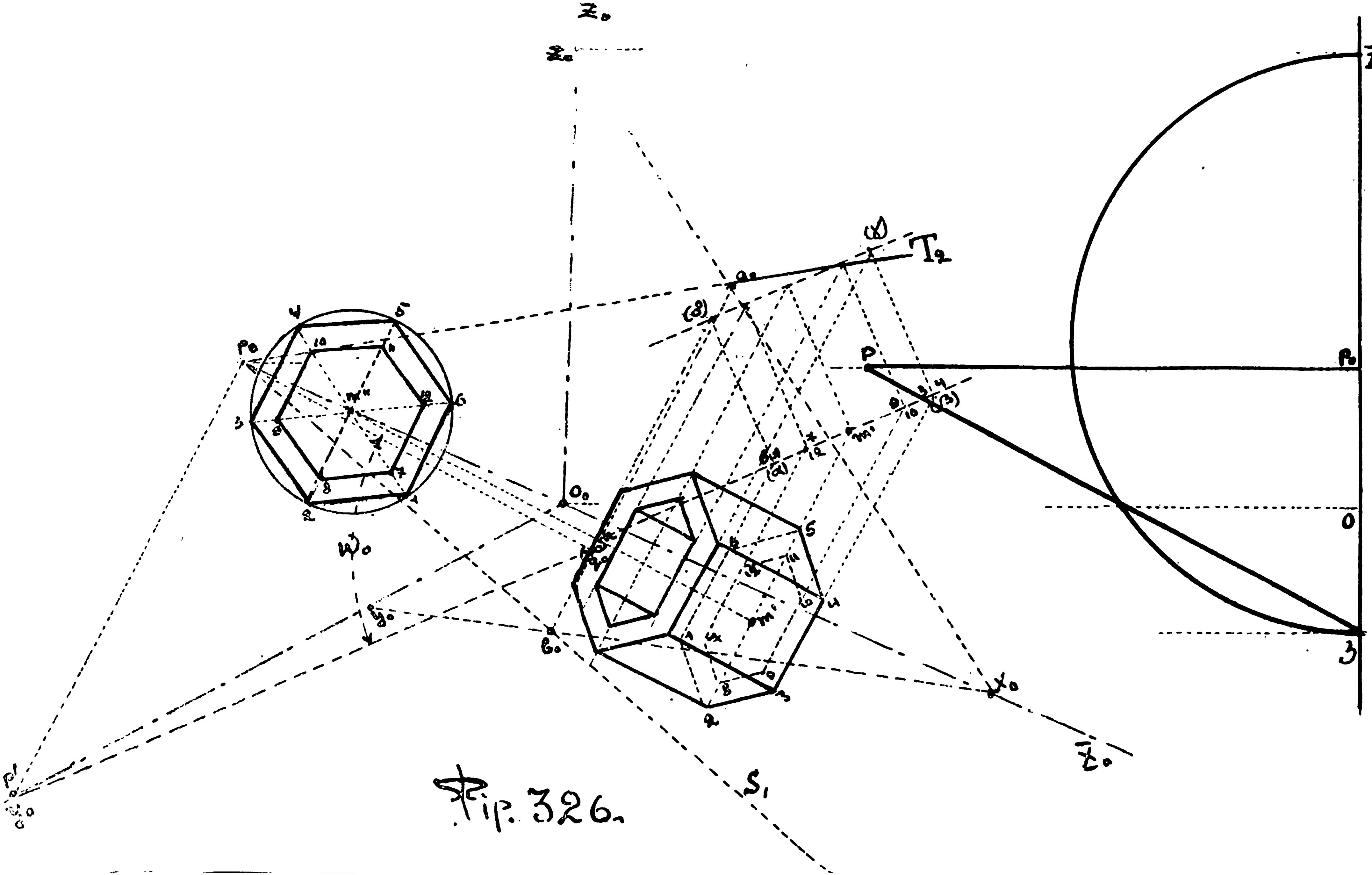
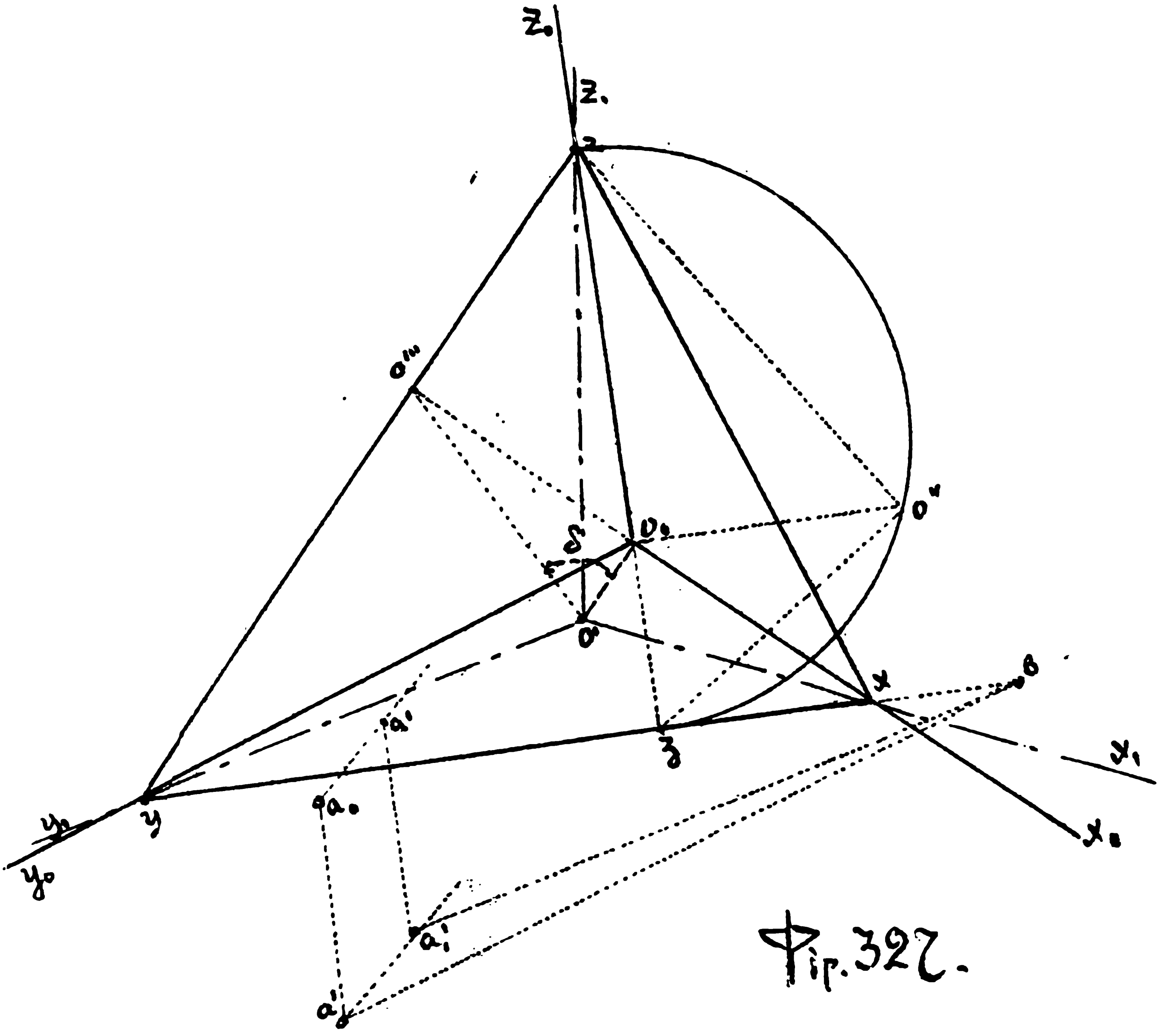

Z₀
z₀
z₀
T₂
a₀
(8)
P
P₀
O
3
p₀
4
5
6
3
2
1
10
11
12
7
8
9
m
O₀
W₀
y₀
G₀
x₀
m'
S₁
Z₀
p'₀

Fig. 326.

Точка m переходить в місце m'', при чім m_0m'' рівновісна до b_0a_0 та $n_0m'' =$ $= n_0m'$. Маючи положення точки m'' можливо навкруги її сконструювати шостикутники 1-6 та 7-12. Переносимо пункти 1-12 на просту n_0m', то цим вже аксонометрична картина точок кутів шостикутників (1-12) означена, а саме: вони лежать на перетиненні рівновісів перекладених точок на n_0m'' (1-6. 7-12 9-10 4-3), та рівновісів з точок складеної фігури. В точці m' ставимо рівновіс, відкладаємо $m'r' =$ відомій висоті призми та будуємо $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. Цим означається решта кутів призми. Простим переносом докреслюємо решту призми в аксонометричних проекціях.

Перехід від прямих до нахильних проекцій. Задачі між ріжними геометричними елементами можливо рішати і в нахильних проекціях, треба тільки знати трикутник слідів. Трикутник слідів може бути вибраний довільно. Нехай $O'X'Y'Z'$ (фіг.327) даний вісевий хрест та xyz трикутник слідів картинної площі. Строїмо точку O, точку перетинення висот трикутника xyz, як початок координат для вісевого хреста $X_0Y_0Z_0$. Цим негайно означає-



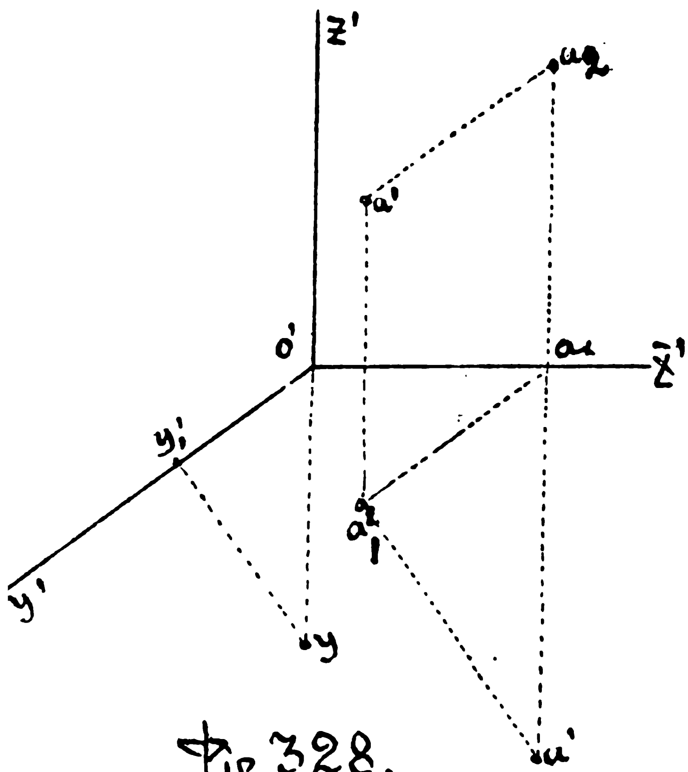
Фіг.327.

ться напрямок нахильних проекцій, коли з допоміжного трикутника $O_0ЗO''$ означиться віддалення початку координат від картинної площі, як відрізок O_0O''. Проводимо O_0O''' рівнобічно O_0O' та робимо $O_0O''' = O_0O''$. O^0O' є аксонометрична картина напрямка проекцій, а кут δ її нахил до картинної площі. Коли дана якась точка $\underline{a}$ своєю проекцією a_1' та аксонометрична картина a' може бути найдена в прямокутному представлені треба зауважити на афінність між прямокутними та нахильними проекціями точок, що лежать в площі XY. Вісь афін. буде xy і напрямок проекцій буде напрямком афінних лучів. Коли, таким чином, проводимо через a_1' рівнобіжну до Y_1, а через точку перетинення b (з продовженням xy) рівнобіжну до Y_0, то перетинення з напрямком, рівнобіжним до напрямку проекцій $(O'O_0)$ - дає положення точки в прямовісних проекціях. Рівнобіжна до Z, через a_1 та рівнобіжна через a' до напрямку проекцій дають аксонометричну картину a_0 точки a в прямовісному представленню.

Бачимо, що таким чином, з кожних нахильних проекцій, можна перейти до прямовісних. Задачу, зроблену в прямовісних координатах, можливо таким чином, перевести в нахильні образи. Ці переходи мають практичне значіння для переходів, коли картинна площа складається з одною з координатних площ. Зробимо де-скільки задач, як практичних прикладів.

<u>Точка $\underline{a}$ в нахильних проекціях дана аксонометричною картиною a' та першою проекцією a_1'; треба означити віддалення від картинної площі.</u>

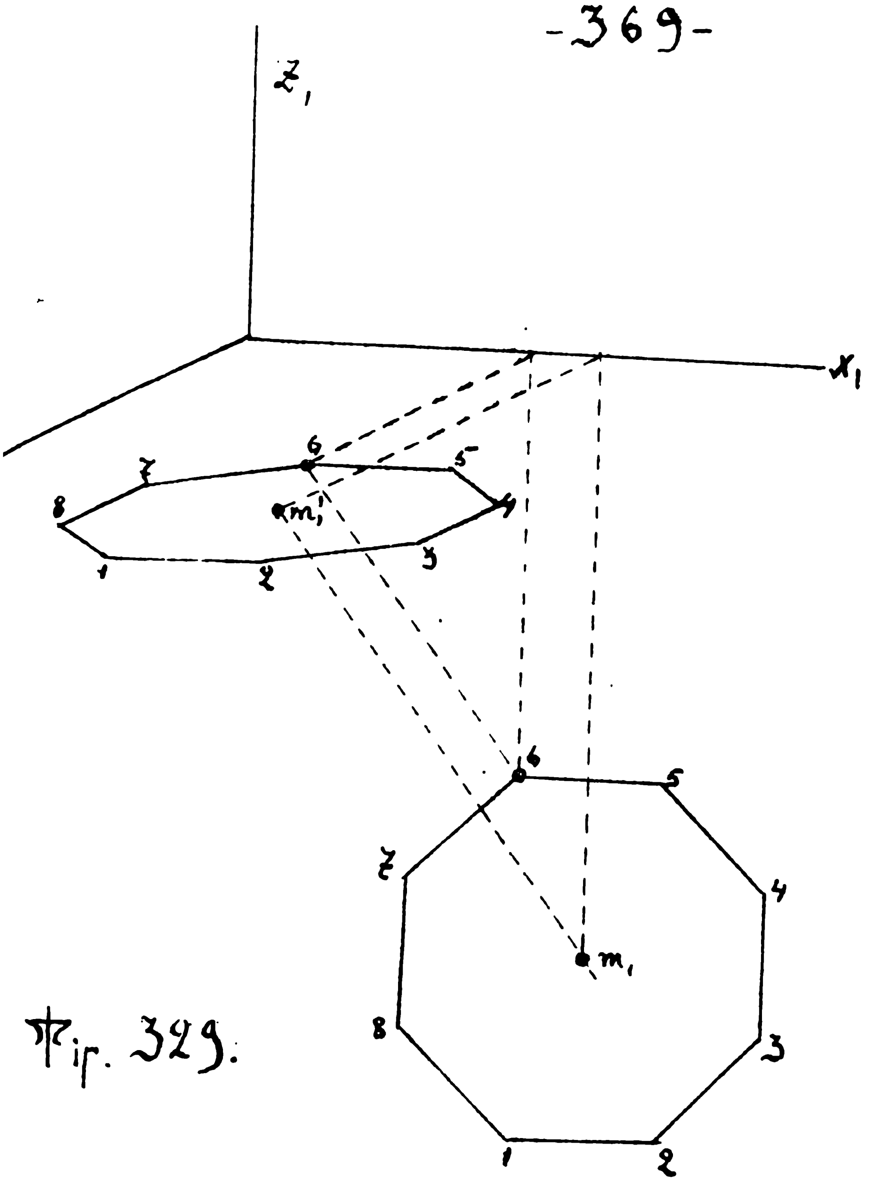
Означаємо з допомогою рівнобіжних $a_1'a_x$ та $a'a_2$ до Y'; то a_xa_2 до Z' проекцією a_2. Віддалення, що шукаємо, (точки $\underline{a}$



Фір.328.

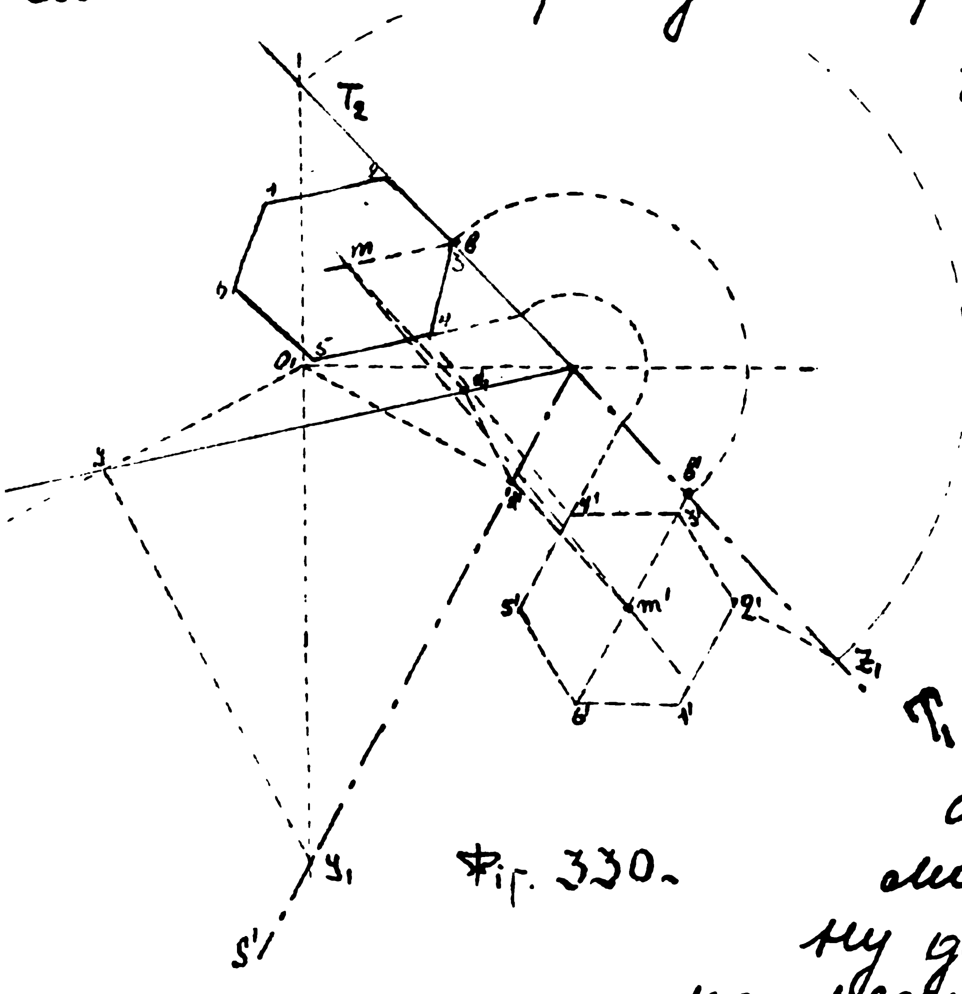
від картинної площі) рівне подвійній довжині $a_1'a_x$ або a_1a_2. Проводимо a_xa_1 рівновісно до X_1, та рівне $2a_xa_1'$, то a_1a_x є віддалення точки a від картинної площі

Точка m_1', що лежить в площі XY є центр правильного восьмикутника. Сторона його відома. Треба накреслити аксонометричну картину, маючи, що дві сторон і його рівнобіжні до вісі X (фіг.329) Складаємо площу XY в картинну площу, так що точка m_1' переходимо в m_1. Навкруги цієї точки m_1 конструюємо даною довжиною правильний восьмикутник 12.....8 в напрямку, як було сказано, та перевертаємо площу XY в первісне становище. Тоді одержуються точки 1'... 8', як нахильні проекції восьмикутника. Для означення точки кута цього многокутника необхідні три прості: рівновіє до X', через відповідний кут, рівнобіжна через 1_x до Y' та напрямок, що рівновісний до Y_1



Фіг. 329.

В площі S_1T_2, що дана цілком довільно відносно координатних осей треба сконструювати правильний шостикутник з центром m. Довжина сторони шостикутника та її положення відомі (фіг. 330) Нехай xyz буде трикутником слідів даної площі. Найпростіше вирішити задачу, склавши її в картинну площу! Складаємо площу XY зі слідом S_1 в картинну площу так, що він займе положення S'. Спускаємо з точки O' рівновіс до S', то він перетинається лукою кола в точці Z', що описуємо з x, як з центра, радіусом xz. Проводимо з точки m рівнобіжну до S_1 до перетинення з T_2 в точці b. Відкладаємо xb' на T' рівне xb та проводимо через b' рівнобіжно до S'. На цьому напрямку мусить лежати m'. Проводимо через точку m рівнобіжну до T_2 md_1, через точку d_1 рівнобіжну до Y_1 аж до перетинення з S' в точці d'. Коли з точки d' проведемо рівнобіжну до T', то вона перетне просту, що йде з точки $в'$ в точці m'. Біля точки m', як центра, будуємо шостикутник і саме так, що дві сторони рівнобіжні до S'.

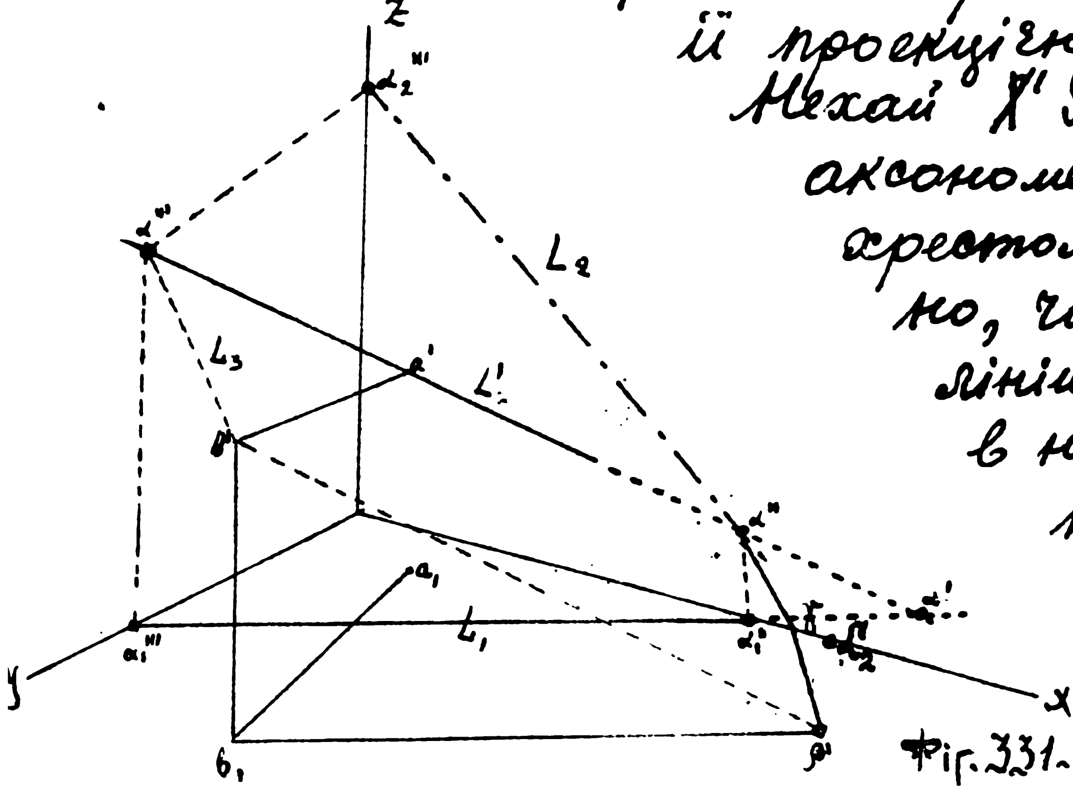


Фіг. 330.

Аксонометрична картина шостикутника може бути збудована на підставі афінности, котра істнує між складеним шостикутником положенням та його аксонометричною фігурою. Проводимо рівнобіжні до S' через кути фігури шостикутника до перетинення з T'. Ці точки переносимо на T_2 і з них проводимо рівнобіжні до S_1'. Точки перетинення з ними простих з кутів шостикутника рівнобіжних до mm' дадуть вершини аксонометричного шестикутника. Звичайно, можливо булоб складення робить навкруги T_2.

Конструкція тіней в аксонометричних проекціях. (фіг.331)

Напрямок світляного проміня може бути представлений його аксонометричною картиною та її проекцією. Нехай $X'Y'Z'$ буде аксонометричним хрестом, все рівно, чи в прямолінійних чи в нахильних проекціях,



Фіг.331.

$\mathcal{L}'$ аксонометрична картина, L_1 перша проекція світляного проміня, то перетинення простої $\mathcal{L}'$ з площею ZY дає точку $\mathcal{L}'''$, точку проекцій L_3; друга точка з перетинення L_1 та L' – $\mathcal{L}'$, як третя проекція α'_3. Означаємо α'_2, як другу проекцію від α' на X' та α_2''', як другу проекцію від $\mathcal{L}'''$ на Z, то проста, що сполучає точки $\alpha'_2 \alpha_2'''$ дає проекцію

L_2 світляного проміння.

Дана проста ав. Треба означити її тіні на площі XY та XZ.

Проводимо через кінці а та в простої ав світляні проміння та означаємо їх перетинення в площами XY та XZ. Світляні проміні (через а та в) перетинають площу XY в точках α' та β'. Проста, що сполучає α' та β' є тінь від ав на площу XY при умові, що ця последня уявляється, як безмежно велика. Понеже існує площа XZ, а не тільки XY, то дійсна тінь від ав на XY буде тільки відрізком $\beta'\gamma$, а тінь від точки а падає на площу XZ.... α''. Тінь від ав на обох площах XY та XZ представиться лінією $\beta'\gamma\alpha''$.

Відділ VII.

Центральні проєкції.

Під центральною проекцією або перспективою (від perspicere = ясно бачить) розуміємо відрук точки простору на площі (може бути й на кривій, коли ця точка сполучена з постійним пунктом. Цей постійний пункт, точка бачіння, центр проекції або око (oculus) будемо означати завше — О. Площу, що не проходить через точку бачіння, називаємо полем картини, полем або проекційним полем, — будемо означати через П. Ця, звичайно рівновісно вибрана площа, є площею креслення. Положення О відносно П означається тим, що дається нормальна проекція О''.. О на площу П, далі d = ОП та бік, з котрого точка О знаходиться. Точку О'' наз. точкою ока або головною точкою. Будемо називати її головною точкою. Віддалення d = дистанцією. Коло, що накреслене в площі П D=(hd) наз. дистанційним колом. В площі П через h проведена горізонтальна проста, що наз. горізонтом; вертикальна лінія — вертикаллю. Площі, що сполучають точку О, горізонтальною

або вертикальною. Коли сполучимо якусь точку простору p з $\underline{O}$ простою, то точка перетинення її p^e з $П$ буде точкою центральної проекції, або перспективою точки, або картиною точки p. Всі точки простору (за виключенням точки O) мають свою перспективу.
$P=\lfloor Op \rceil$ називаємо проекціонним лучем або лучем бачіння точки p.

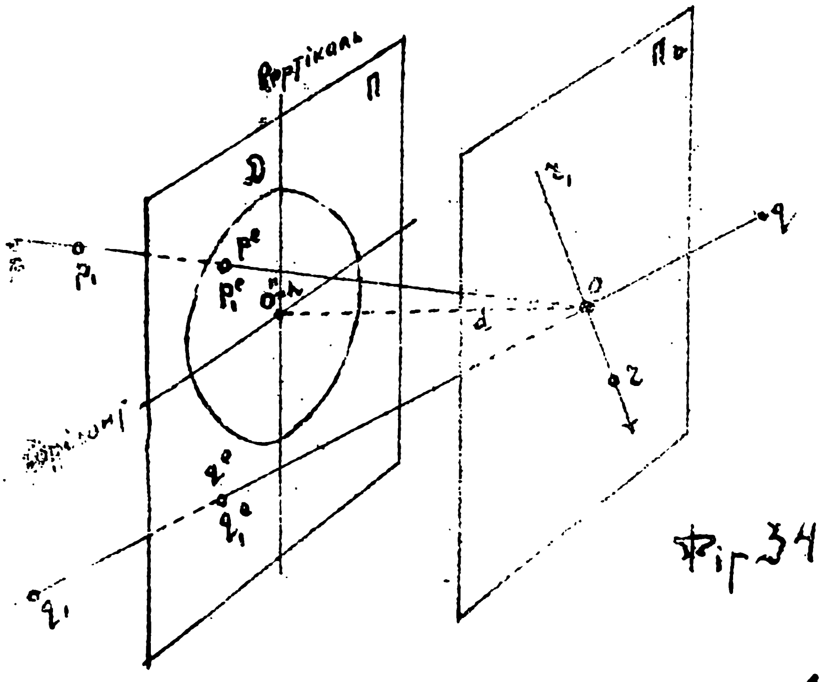


Fig 342

Той промінь, що йде до головної точки, ц. т. нормально до $П$ (oh) наз. головним променем або головним лучем. Всяка проста, що йде з $\underline{O}$, буде променем бачіння для всіх її точок; значить, всі точки луча мають туж саму перспективу. Таким чином p^e ще цілком точки не означає. Центральна проекція переходить тільки тоді в безмежність, коли луч бачіння рівнобіжний до площі $П$. Всі лучі, рівнобіжні до площі $П$, складають площу $П_c = \lfloor O \| П \rceil$ особливий жмут променів, котрих центральні проекції відходять в безмежність, або, як звичайно кажуть, перспективна картина „зника". Тому площу $П_e$ іноді називають „площею знику".

Під центральними (перспективними) проекціями, або картиною бачіння (Schaubild) якогось предмету розуміємо загальну суму його центральних проекцій всіх точок його поверхні, при чім особливо мусять бути виявлені канти та кути. Центральні проекції дають найбільш наочне представлення предметів. Коли розглядаємо оком, котрого оптична вісь знаходиться в $\underline{O}$ і котрого взгляд керується на h, якийсь предмет, то кожна точка його поверхні посилає світляний луч через $\underline{O}$ в око, де на сітчатій оболоці утворюється відбиток. Усунемо тепер самий предмет і нехай впливає на „обсерватора" перспективна його картина. Кожна точка картини посилає світляний луч через $\underline{O}$ в око, відбитки котрих покривають як раз ті самі частини сітчатої оболочки, де були відбитки від точок самого предмету (за виключенням фарби, світла і т.д.). Цим пояснюється, чому перспективні картини роблять майже пластичні враження. З цього можливо зробити висновок, що якийсь перспективний образ може робить тільки тоді тілесне враження, коли на допомогу прийдуть раніще бачені тілесні подібні форми, коли, значить, вже око мало подібні відбитки. Це стверджується на досвіді тих людей, що були рождені сліпими й після почали бачити. Коли розглядаємо обома очима фотографію, то одержуємо майже простірне представлення.

Площа П поділяє простір на дві частини: одну, що лежить перед картинною площею та другу — за нею. Так самой площа знику $П_c$ поділяє простір на дві частини. Та частина простору, котра належить до $П_c$ наз. простором бачіння, або дійсним простором (reele Raum), другу частину — геометричним або віртуельним (virtuelle Raum) простором. В той час, як якась точка p зі звоєю центральною проекцією лежить по одному боці з $\underline{O}$, точки геометричного простору q та центральні проекції q_c лежать на ріжних боках від $\underline{O}$. Перспективні образи таких точок суть чисто геометричні образи й ніякого реального значіння не мають. Проста G, що не проходить через $\underline{O}$, перетинається цілою низкою лучів, дає на картинній площі просту G_c. G_c наз. перспективною картиною (або центральною) При цих проекціях можна висловити положення: I) Центральна проекція всякої простої рівнобіжної до картинної площі — рівнобіжна їй.

Низка точок простої цілком подібна до низки точок перспективної картини.

Коли дана якась фігура, що лежить в площі, рівнобіжній до картинної площі і не належить до площі знику, то її перспективна картина цілком подібна до самої фігури. Перспектива кола, що лежить в площі, рівнобіжній до картинної площі є коло, центр котрого є картина центра в просторі.

В залежности від того, де знаходиться фігура, чи перед площею П чи за нею, одержується перспективна картина або побільшена або поменшана.

Коли якесь тіло дане своєю горізонтальною та вертикальною проекцією, то перспективний його образ будуємо так: вибіраємо довільно площу П та точку О. Проводимо лучі з точки О до точок поверхні тіла (особливо кутів) та означаємо перетинення їх з площею П. Тоді таким чином означена фігура й буде перспективним образом. На нарисі (фіг. 343) дана горізонтальна та вертикальна проекція призми. Щоб одержати її перспективу, беремо вертикальну площу за картинну площу та точки O'' O'. Вертикальні сліди $\lfloor O_1 \rceil$ $\lfloor O_2 \rceil$... дають точк

$1^c\ 2^c$. Перспективні проекції простих — знову такі прості — так одержуємо перспективні картини кантів, коли сполучимо між собою одержані точки. З цього нарису бачимо, що не всі рівнобіжні прості між собою в перспективній картині рівнобіжні. До площі П рівнобіжні рівновісні канти утримують свою рівновісність та рівнобіжність.

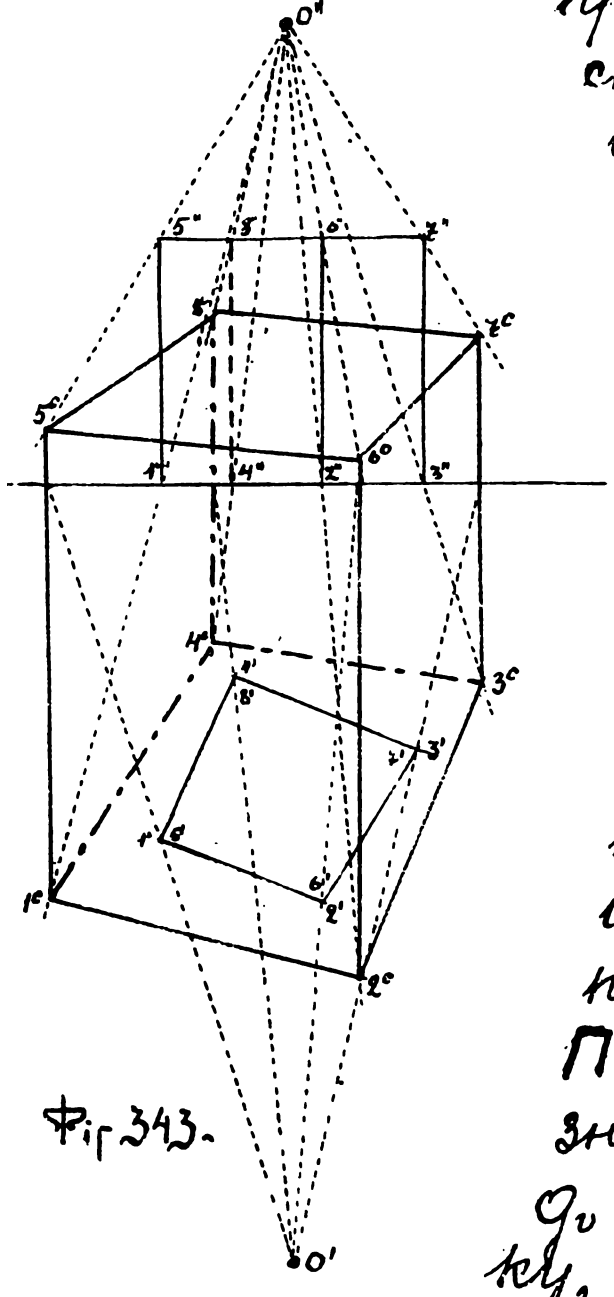
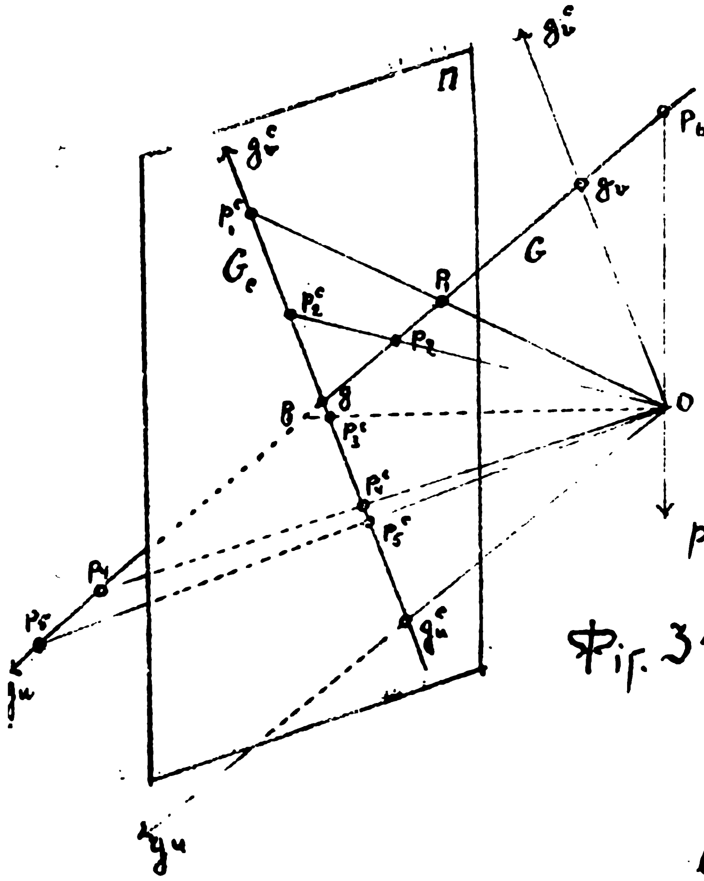


Fig. 343.

Поняття про точку збігу. Прослідкуємо пересунення якоїсь точки по простій G в просторі та її проекції на перспективній проекції G_c. Нехай проста G перетинає площу П в точці g і точка знику буде g_v. Цю точку g_v називаємо точкою знику, бо її перспективна картина усовується в безмежність. Понеже g_v^c простої $[Og_c]$ одночасно належить G^c, то можна висловити положення: Перспективна картина якоїсь простої рівнобіжна до луча бачення, що проведений через точку знику. Уявимо собі, що



Фіг. 344.

точка p сунеться по G від g_v рівномірно до g. В той же час перспективна проекція від безмежного положення g_v^c проходить через точки p_1^c p_2^c ... до точки g. Рух p^c нерівномірний. Коли тепер точка p рухається по g далі до p_3 p_4.... p_5, то перспективна проекція переміщається від p_3^c до p_4^c, p_5^c значно тихіше, ніж p. Коли точка p рухається, то її перспективна проекція пересовується значно тихіше, аж доки промінь не займе положення, рівнобіжного до напрямку простої G. Точка g_u^c нав. точкою втіку або збігу. Це ж саме, звичайно може бути віднесено і до того випадку, коли точка рухається в протилежний бік. Точка збігу простої є перспективна картина її безмежно даленої точки. Точку збігу якоїсь простої одержуємо, коли через око проведемо рівнобіжну до цієї простої та означимо її точку перетинення з картинною площею. Рівнобіжні прості мають одну й ту же точку збігу. Прості з однією точкою збігу — рівнобіжні.

Прості якогось жмутка рівнобіжних як напр., пучка світляних промінів уявляють себе в перспективнім представлені як прості, що проходять через одну точку. Точка збігу простої означа її напрямок. Треба зауважити, що прості, котрих перспективи проходять через точку P^c, котра не є точкою збігу для цих простих, взагалі не рівнобіжні, а тільки перетинають луч світла в точці P^c.

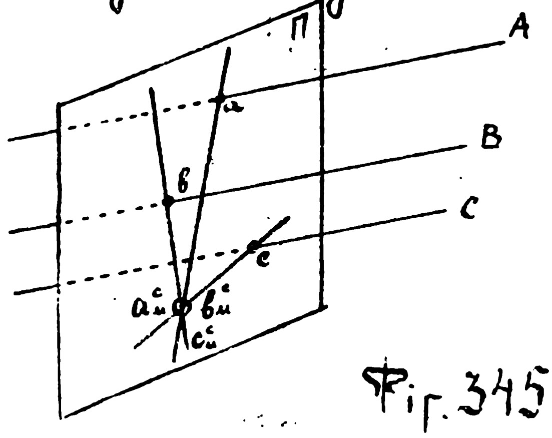
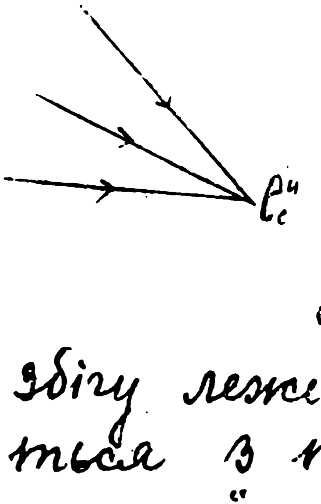


Fig. 345



Досі мали справи з простими, що не були рівнобіжні до картинної площі. Для таких простих, що рівнобіжні до П точка збігу лежить безмежно далеко й складається з точкою знику та слідом самої простої.

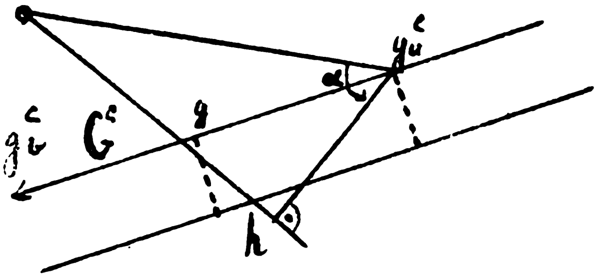
Рівновісні прості виявляються, як рівновісні перспективи. Фотографія — це перспективна картина, тільки предмет та його картина лежать на протилежних сторонах центра проекції (O). Здавалось би, що на фотографіях відвісні прості мусять знову виходити, як відвісні. Як відомо, це не завжди буває так і відвісні лінії якогось будинку зближаються. Ніби то це не відповідає закону збігу. Але це буває тільки тоді, коли вісь фотографичного апарату не цілком горизонтальна і, значить, фотографична пластинка (площа П) не рівновісна.

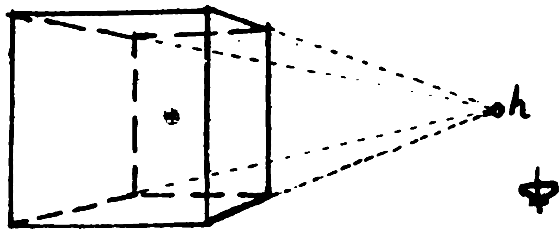
Подібне з'явище буває, коли дивимось на рельси залізниці; здається, ніби вони сходяться.

Коли проста G нерівнобіжна до $П$, то вона своїм слідом g та її точкою збігу g_u^c цілком означається, коли дається положення ока відносно картинної площі головним пунктом h та дистанцією δ, бо G до $[Og_u^c]$ рівнобіжна й проходить через g.

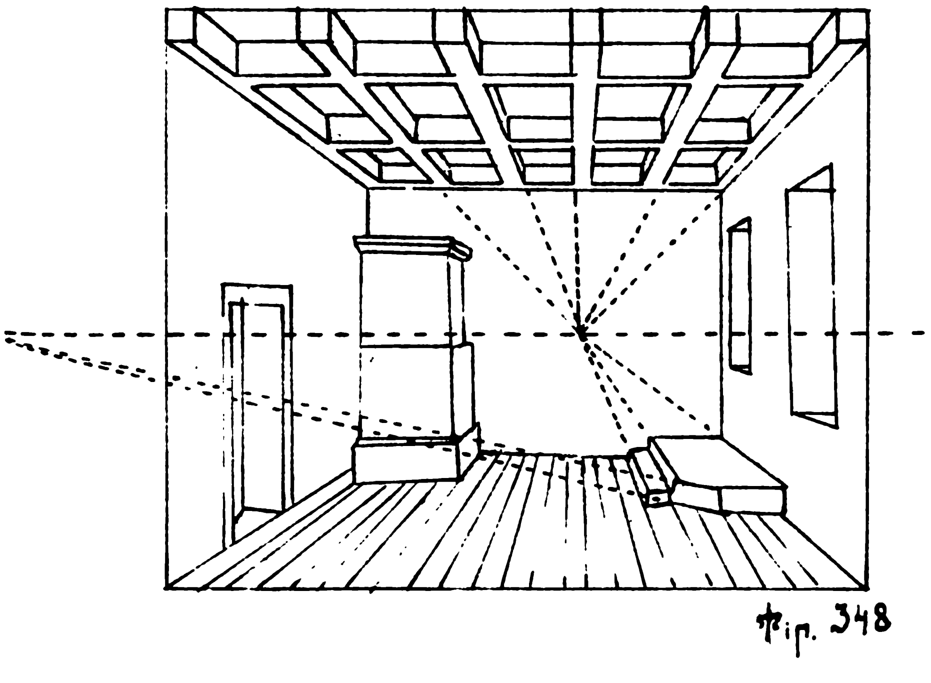
Точка збігу простих, рівновісних

Фіг 346





Фіг 347



Фіг. 348

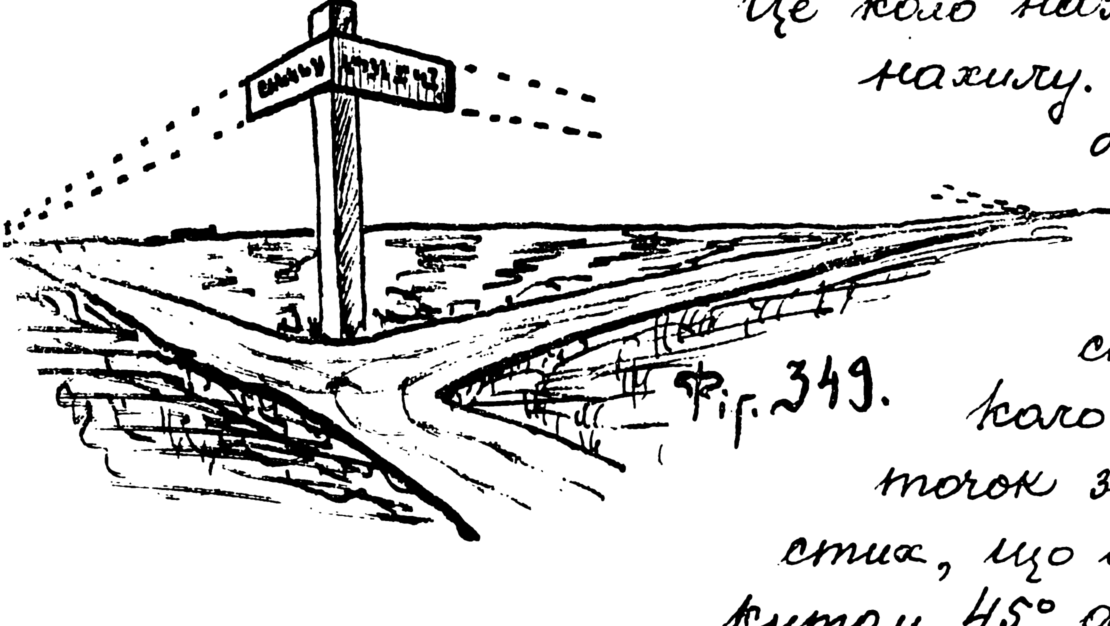
до картинної площі є головна точка. Згідно цього положення перспективна картина прямої призми в боковою площею, рівнобіжною до П, уявляється, як це показано на нарисі (фіг.347). Так само й внутрішня частина кімнати (фіг.348).

Точки збігу простих, рівнобіжних до якої площі та простих, що лежать в цій площі, лежать на одній простій.

Точка збігу горізонтальних простих лежать на горізонті.

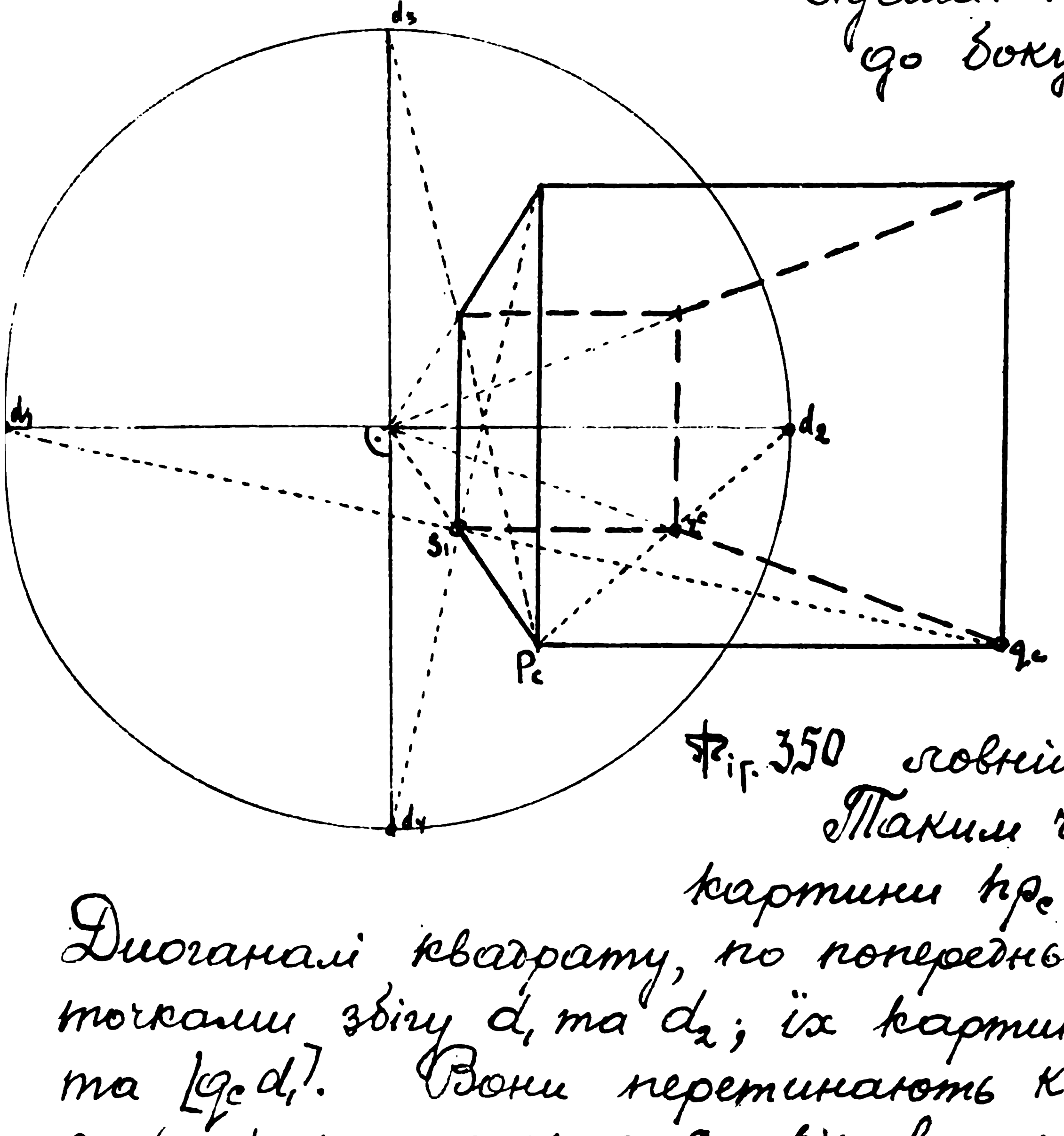
Точка збігу простих, що рівнобіжні до вертікальної площі, лежать на вертикалі.

Точки збігу простих, що нахилені під кутом α до картінної площі П, лежат на колі, що описаний радіусом $r=\delta ctg\alpha$.



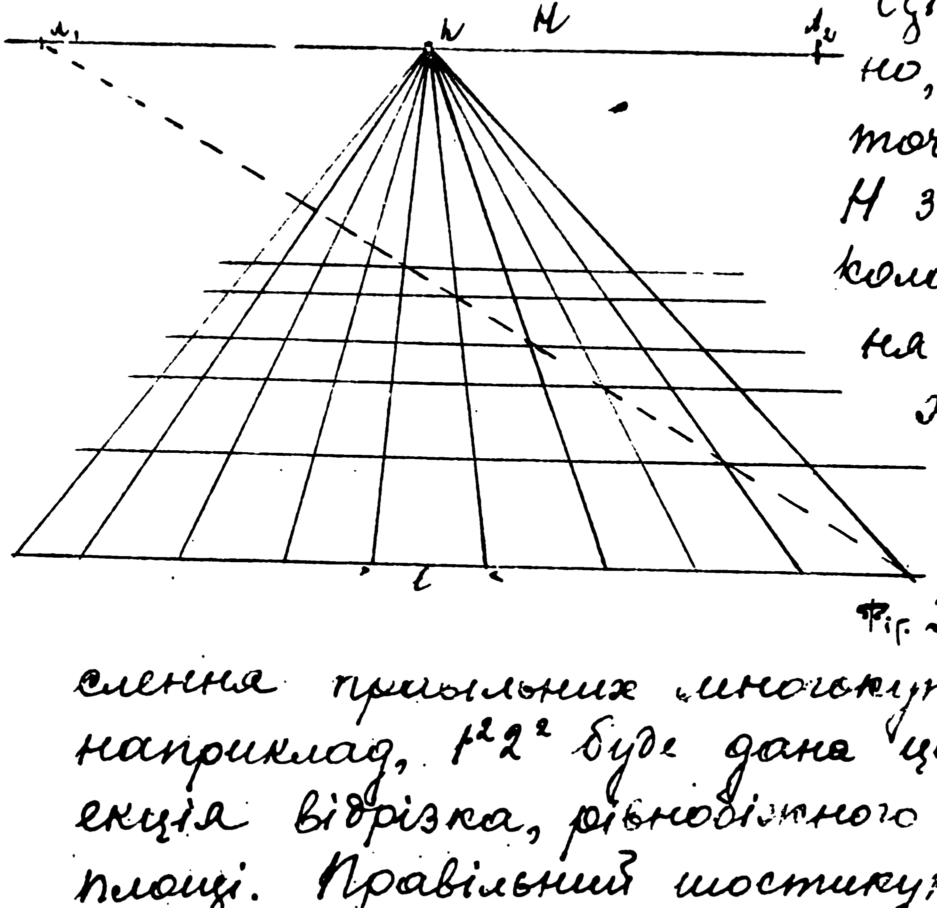
Фіг.349.

Це коло наз. колом нахилу. Коли $\alpha=45^\circ$ то $r=\delta$ і: дистанційне коло є місце точок збігу простих, що йдуть під кутом 45° до картинної площі. Точки перетинення d_1 d_2 дистанційного кола Д з горізонтом H наз. дистанційними пунктами. Вони суть точки збігу горізонтальних простих, котрі нахилені до картинної площі під кутом 45°. З допомогою їх можливо нечайно викреслити горізонтальний квадрат, один бік котрого рівнобіжний до картинної площі й довжина боку $p_c q_c$ - відома. Рівновісні до боку pq (як нормальні до П) мають свою точку звігу в головній точці h Таким чином їх картини hp_c та $q_c h$.



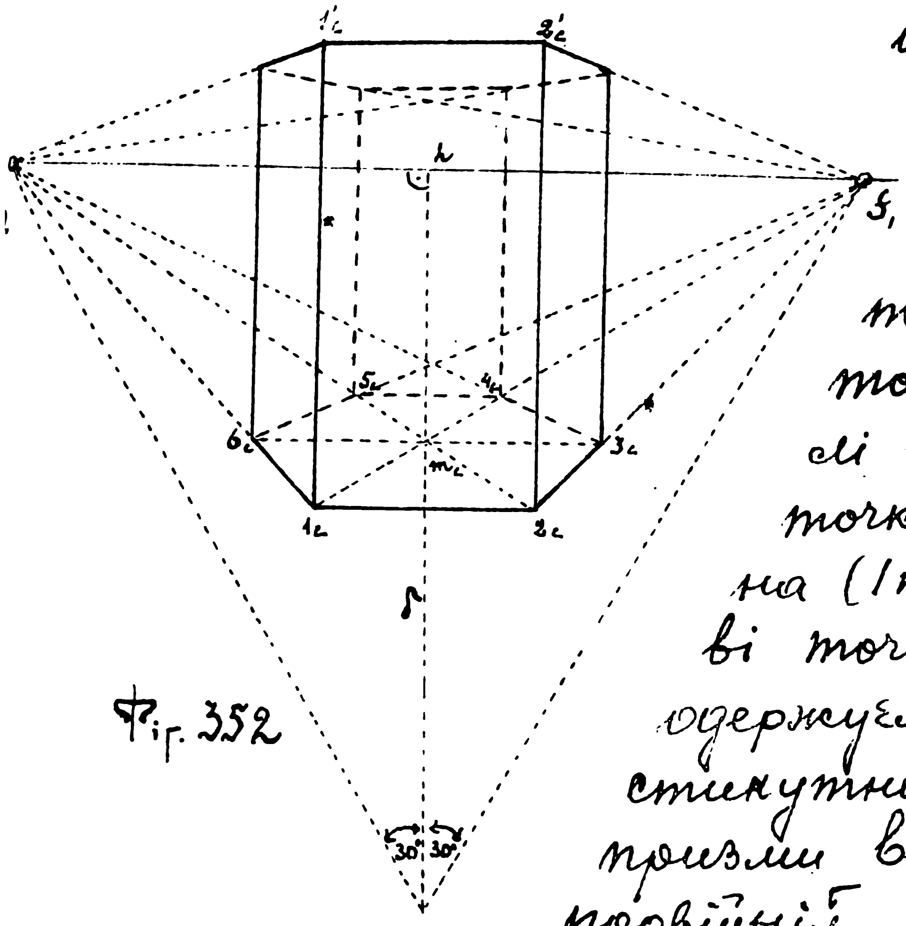
Фіг. 350

Диоганалі квадрату, по попередньому, мають точками звігу d_1 та d_2; їх картини $[p^c d_2]$ та $[q_c d_1]$. Вони перетинають картини до (pq) нормальних сторін в точках (кутах) r та S. Цим картина квадрата закінчена. Тепер можливо збудувати куб. Диоганалі відвісної площі куба, що йдуть до d_3 та d_4, обмежують вертикальні сторони куба. Ці точки так само будуть називаться дистанційними пунктами (d_3 d_4) і можуть буті вжиті при утворенні квадрата, рівнобіжного до вертикальної площі. Ще за старих часів ці дистанційні пункти мали прикладення при перспективному представленню квадратно-поділенної домівки. Таке, як представлено на нарисі (фіг.351) табличне поділення площі служить для вірного розподілення на квадратові осіб та предметів та вірного означення висот їх.



Фіг. 351.

Цілком аналогічно, як знаходимо точки перетинення H з дистанційним колом для креслення квадрата, можуть служити перетинення дистанційного кола з H для креслення правильних многокутників. Нехай, наприклад, $1^c 2^c$ буде дана центральна проекція відрізка, рівнобіжного до картинної площі. Правільний шостикутник, що лежить в горізонтальній площі, може бути збудований на цій стороні так: проводимо через точки 1 та 2 горізонталі під кутом 60° до простої 1-2 та означаємо точку перетинення m, центр шостикутника. Точки збігу f_1 та f_2 цих простих находимо на підставі попередніх приміток. Картини $1^c f_1$ та $2^c f_2$ перетинаються в точці m^c.



Фіг. 352

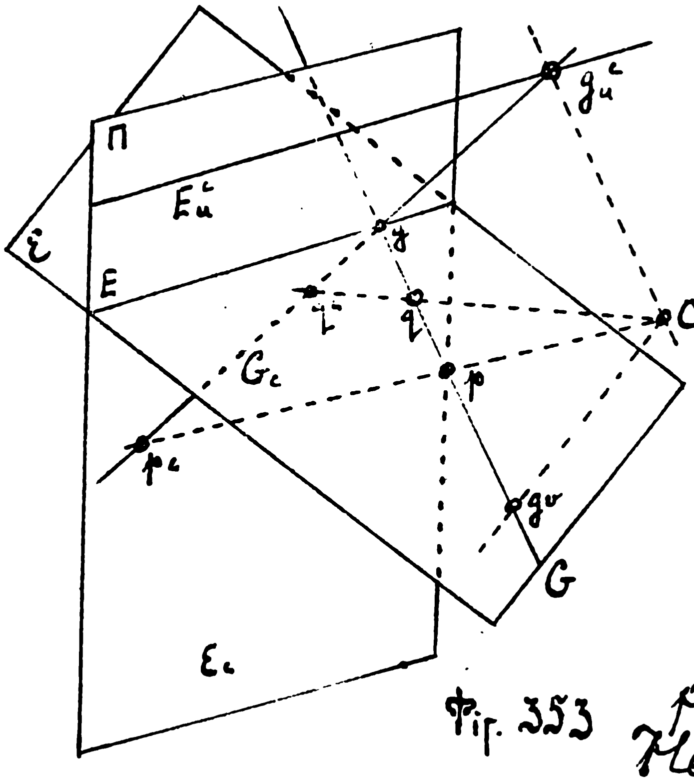
На диоганалі, що йде через m рівнобіжно до 12, перетинаємо простими [2∥1m] та [1∥2m] кутові точки 3 та 6; далі перетинаємо 3 точки [3∥2m] та [6∥1m] на (1m) та (2m) кутові точки 4 та 5. Так одержуємо картину шостикутника. Висоту призми вибіраємо рівну подвійній стороні основи $(2_c\,2'_c) = 2 \cdot \overline{1_c 2_c}$.

Цілком аналогічно можна викреслити правільні многокутники в площах, рівнобіжних до горізонтальної або вертикальної площі, як тільки відома одна сторона (в перспективі), рівнобіжна до картинної площі.

Треба все таки зауважити, що це цілком примитивні засоби. Вони тільки даються, як приклади вживання точок збігу, далі покажимо більш загальні та красиві прийоми.

Віддалення точки збігу простої від її сліда рівне довжині та напрямку віддалення ока від точки знику. Віддалення точки знику простої від її сліда рівне довжині та напрямку ~~ока~~ віддалення ока від точки збігу простої. Прості мають тільки тоді один і той же пункт знику, коли відрізки що проходять через слід та збіг між собою рівні.

Поняття про просту збігу. Коли площа $\mathcal{E}$ не проходить через око, то центральна проекція $\mathcal{E}^c$ її покрива картинну площу; бо не тільки всяка точка p площі $\mathcal{E}$ має картину p^c на $\mathcal{E}^c$, але й навпаки, кожна точка p^c площі П (або $\mathcal{E}^c$) є картина одної точки p площі $\mathcal{E}$. Всяка проста G від $\mathcal{E}$ дає просту G^c і значить всяка проста G^c площі П є картина простої G площі $\mathcal{E}$, а саме, проста перетинення $[G^cO]$ з $\mathcal{E}$.



Фіг. 353

Нехай E буде проста перетинення між П та $\mathcal{E}$, картина сліда $\mathcal{E}$, то прості G та G_c перетинаються на E в точці g. Таким чином можна встановити колінеційну залежність (перепективно-колінеційна взаємність) між $\mathcal{E}$ та П для O колінеційного центру та E, колінеційної осі. Точки збігу всіх простих $\mathcal{E}$ лежать на простій, котру одержимо перетиненням П площею, що проходить через око рівнобіжно до E. Ця проста, котру наз. простою збігу від E містить в собі картини всіх безмежно далеких точок площі E, або инакше, вона є картина безмежно далекої простої E_u цієї площі будемо називати просту збігу E... E_u^c. Треба зауважити, що лінія збігу якоїсь площі не є проста цієї площі, а картинної площі.

Проста збігу якоїсь площі є перспективна картина її безмежно далекої простої. Просту збігу якоїсь площі одержуємо, коли через око проведемо площу їй рівнобіжну та означимо перетинення з картинною площею.

Картина сліду та проста збігу якоїсь площі між собою рівнобіжні. Звідсіля виникає: Рівнобіжні площі мають одну просту збігу. Горізонт є лінія збігу всіх горізонтальних площ. Коли уявимо собі людину (для ока котрої треба збудувати перспективну картину), що стоїть на горізонтальній площі, то безмежно віддалені або взагалі далеко віддалені предмети будуть проектуватись на горізонт. Ці перспективні прості майже покриваються з картиною кола ока (або дійсного горізонту). Цим поясняється вживання слова „горізонт“ для простої H.

Вертикальна лінія є проста збігу всіх вертикальних і до картинної площі нормальних площ.

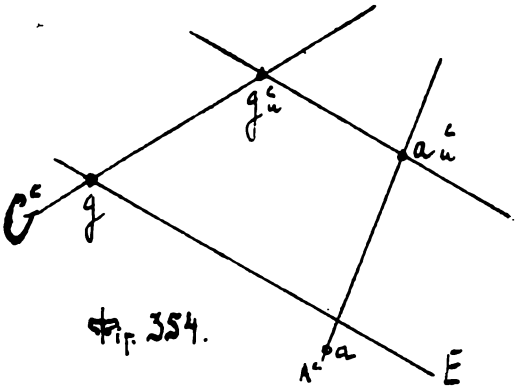
Проста збігу площ нормальних до картинної площі проходять через головну точку.

Прості збігу площ, нахилених до картинної площі під кутом α, обгортують коло нахилу $K_\alpha = (h \delta ctg \alpha)$.

Коли площа E не рівнобіжна до П, то вона цілком означається слідом E та простою збігу E_u^v, як тільки головна точка та дистанція відома.

Рішення задач з допомогою сліда та точки збігу.

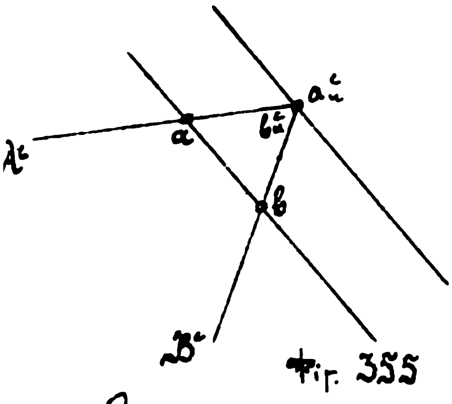
Кожна проста та площа не рівнобіжні до П означаються їх слідами та простими збігу. Це не поширюється на випадок, коли прості та площі рівнобіжні до П. Вимогу „накреслити просту або площу“ зараз будемо розуміти - накреслити сліди та елементи збігу. Коли проста лежить в площі, то сліди, збіг та точка знику простої лежать на сліді, знику та збігу цієї площі. Нехай (фіг.354) треба через просту $G(g g_u^c)$ провести площу E, то досить тільки провести E через g та через g_u^c $E_u^c \| E$. Коли вимагається, щоб площа E, що проходить через G була ще рівнобіжною до даної простої A ($a\,a_u^c$), то треба щоб $E_u^c = |g_u^c a_u^c|$ та $E = \lfloor g \| E_u^c]$.



Фіг. 354.

Коли навпаки, E дається E та E_u^c та треба в цій площі провести якусь просту G, то треба тільки довільно вибрати на E точку g та на E_u^c точку g_u^c. На підставі цього положення рішається багато задач, що до положення простих та площ.

Встановимо ознаку перетинення двох простих. Дві простих A($a\,a_u^c$) та B($b\,b_u^c$) з ріжними точками збігу тільки тоді перетинаються, коли вони належать до однієї площі. Коли ж вони належать до однієї й тієї ж площі, то ab буде слідом, а $a_u^c b_u^c$ проста збігу цієї площі, ц. т. $(ab) \| \lfloor a_u^c b_u^c]$. Коли, навпаки, $(ab) \| \lfloor a_u^c b_u^c]$, то ці прості сліди та проста збігу площі, де лежать A та B. Коли (ab) та $\lfloor a_u^2 b_u^c]$ складаються, то A та B належать до проектуючої площі, ц. т. вони перетинаються. Необхідна умова для перетинення двох простих

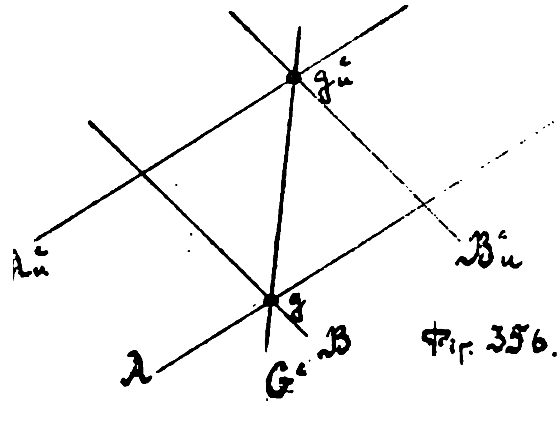


Фіг. 355

– паралелізм (рівнобіжність) до простої, що сполучає сліди з простою, що йде через точки збігу. Коли ця умова виконана, то точка перетинення перспективних проекцій відповіда точці перетинення простих в просторі.

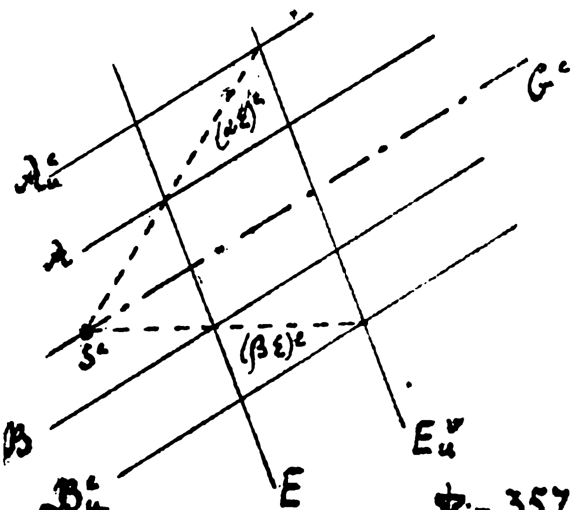
Коли $a_u^c = b_u^c$ $A \| B$ то $(ab) = E$ сліду та $a_u^c \| E = E_u^c$ є проста збігу площі $\varepsilon = (AB)$. a_u^c – є картина точки перетинення A та B.

Коли дані дві площі слідами та простими збігу, то точка перетинення слідів є точка сліду, а точка перетинення простих збігу є точка збігу простої перетинення цих площ. На нарисі (фіг. 356) представлена $G(g\, d_u^c)$ проста перетинення площ $\alpha(AA_u^c)$ та $\beta(BB_u^c)$.



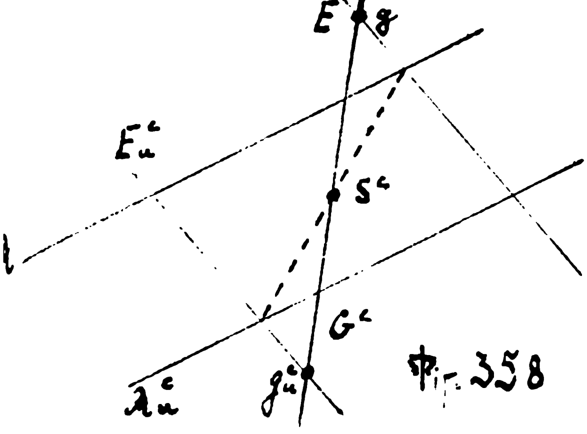
Фіг. 356.

Перспективна проекція простої перетинення G двох площ α та β не може бути так зазначена, коли сліди площ рівнобіжні, бо тоді слід та точка збігу G в безмежності складаються. G_c тоді до слідів площ рівнобіжна. Якусь точку від G_c, що лежить в конечному віддаленні, можна одержати, коли да-



Фіг. 357.

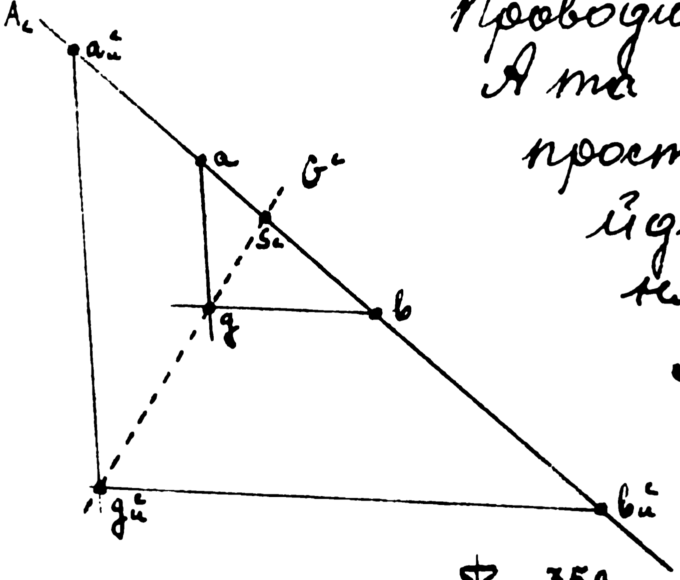
ні площі α та β перетнимо третьою $\mathcal{E}(E\,E_u^v)$, котрої слід не рівнобіжний до α. Означаємо прості перетинення $(\alpha\mathcal{E})$ та $(\beta\mathcal{E})$, одержуємо точку S простої G, перспективна проекція котрої G_c.



Фіг. 358

Точку перетинення S простої G ($g\,g_u^c$) з площею α ($A\,A_u^c$ означаємо, як показано на фіг. 358, коли через G проведимо якусь довільну площу $\mathcal{E}$, просту перетинення котрої з α означаємо та одержуємо перетинення з G.

Означити точку перетинення двох простих, що лежать в проектуючій площі (фіг. 359).

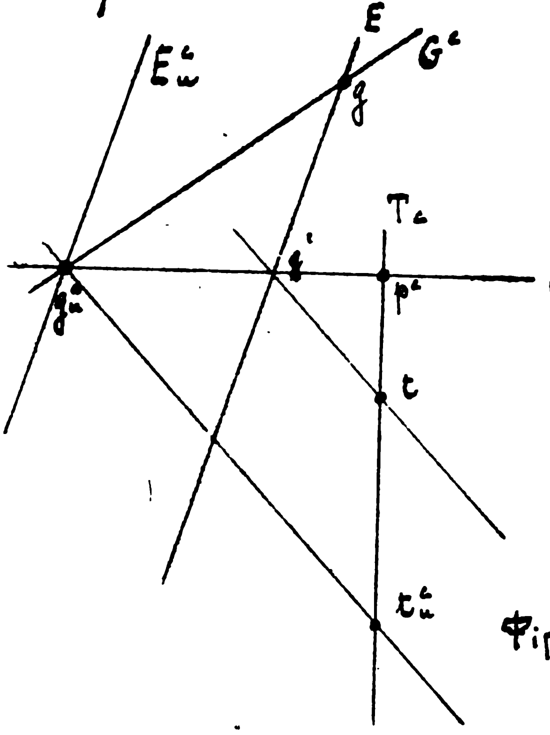


Фіг. 359.

Проводимо через дані прості A та B ($A^c = B^c$) площі, що проста перетинення їх G йде через точку перетинення S... A та B. Тому $S_c = \lfloor A_c\, G_c \rceil$. При рішенні задач иноді не вистачає даних слідів та точок збігу, тоді вводять ще просту, на котрій лежить именно ця точка. Така проста наз. трегером (Träger).

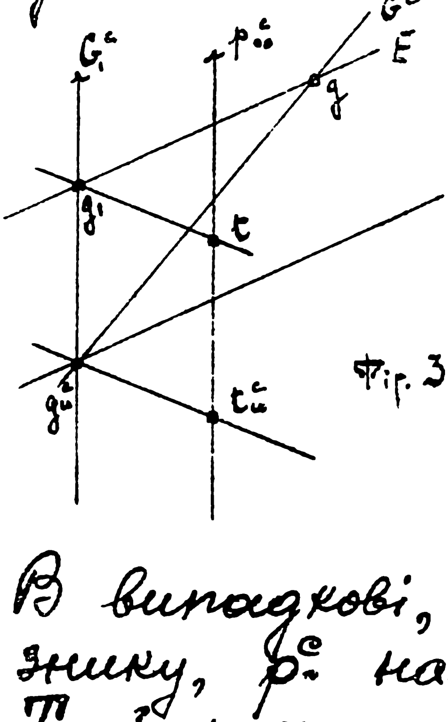
Точка p, що дана своєю p^c та трегером

$T(t, t_u^c)$ лежить на простій G або на площі $\mathcal{E}$ тільки тоді, коли вона лежить на перетиненні T з G. Площа сполучення $\mathcal{E}(E E_u^c)$ простої $G(g g_u^c)$ та якоїсь точки $p(p^c)$, що лежить на трегері $T(t t_u^c)$ — рішається таким засобом: проводимо (фіг.360) через p до G рівнобіжну просту G_1, тоді площа, що шукаємо $\lfloor G G_1 \rceil \dots \mathcal{E}$.



Фіг. 360

Слід та просту збігу можемо зразу накреслити, як тільки знаємо слід g_1... (від G_1). Треба взяти на увагу, що G_1 та T належить до однієї площі й що дякуючи рівнобіжности $G \parallel G_1$... g_u^c є точка збігу G_1.



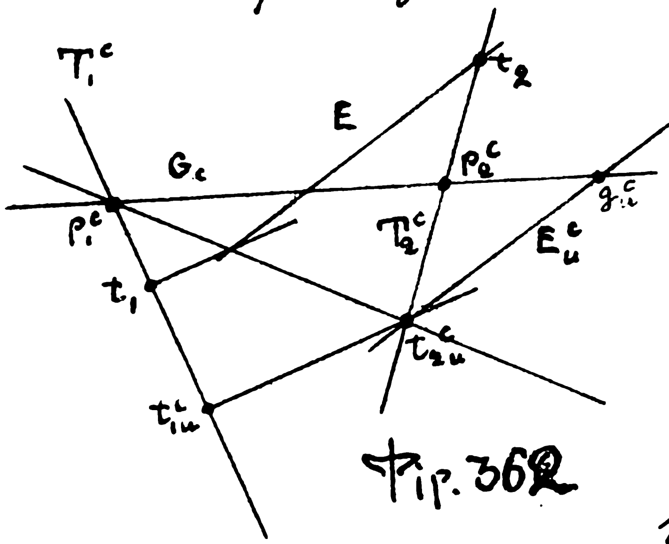
Фіг. 361.

Проводимо через t рівнобіжну до простої знику $\lfloor g_u^c t_u^c \rceil$ площі $\lfloor G_1 T \rceil$, то слід цієї площі та точка перетинення з G_1^c є точка g_1. Як показує фіг. 361. $E = (g g_1)$ слід і $E_u^c = \lfloor g_u^c \parallel E \rceil$ проста збігу площі $\mathcal{E}$.

В випадкові, коли p лежить на площі знику, p^c належить T_c й конструкція робиться, як показано на фіг. 362. .

Ці конструкції допомагають вирішити таку задачу:

Означити просту сполучення $G(g\, g_u^c)$ двох точок p_1 та p_2, що дані своїми центральними проекціями та трегерами. (фіг. 356)



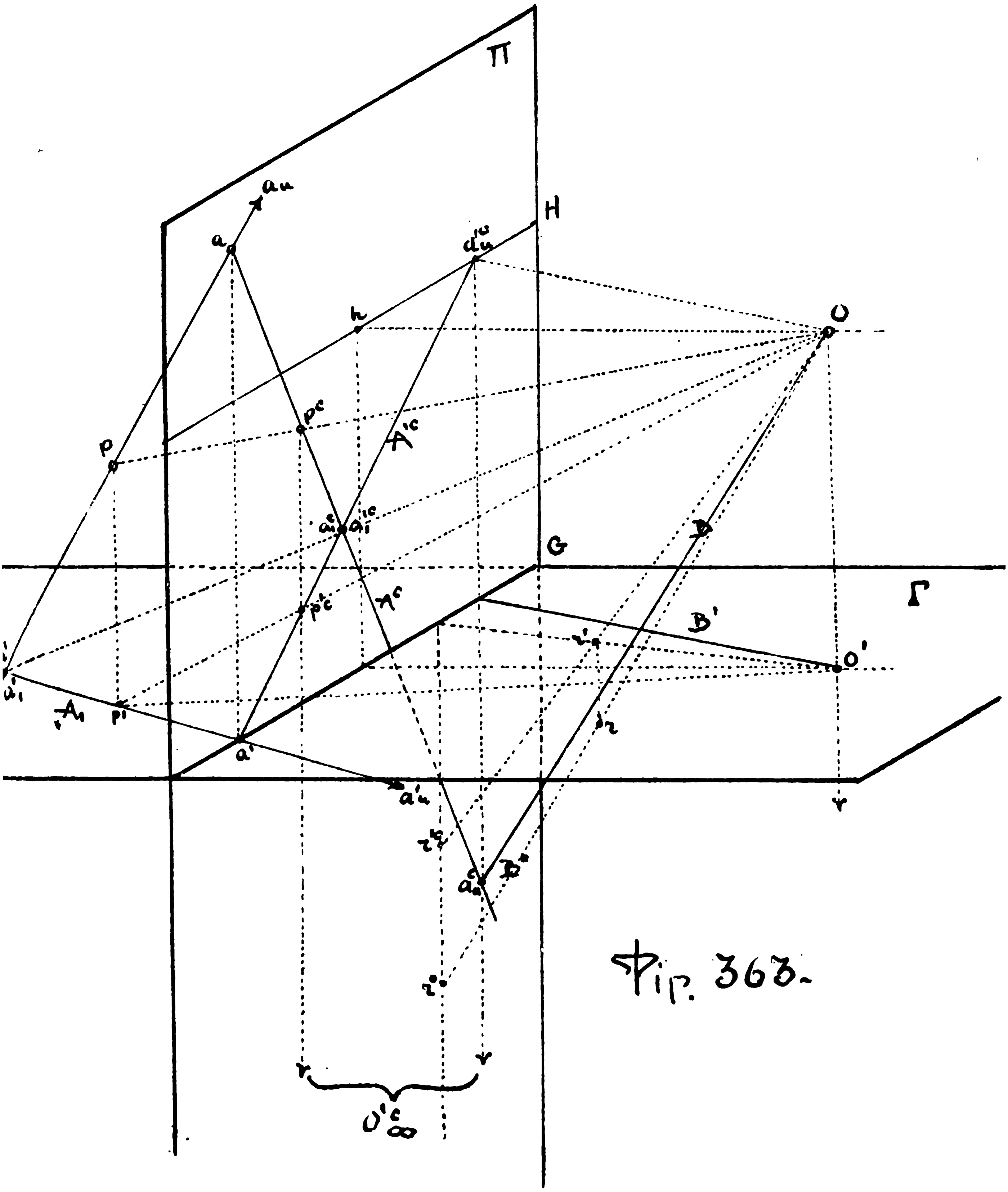
Фіг. 362

Нехай $T_1(t_1 t_{1u}^c)$ та $T_2(t_2 t_{2u}^c)$ будуть трегери точок p_1 та p_2, то площа $E=(p_1 T_2)$ (або так само $E_1=(p_2 T_1)$ має в собі просту $G=(p_1 p_2)$. Построїти (як на фігур. 362) слід E та просту збігу E_u^c цієї площі можливо, то точки перетинення E та E_u^c з $G_c=(p_1^c p_2^c)$ дають точку g та g_u^c, що шукаємо.

Представлення центральної вертікальної та центральної горізонтальної проекції.

Крім відвісної картинної площі Π та ока, беремо іще горізонтальну проекцію, що не проходить через око. Означимо її через Γ та будемо називати грунтовою площею. Звичайно вибірають ту, на котрій стоїть обсерватор, ц.т. вона лежить під оком. Просту перетинення між картинною площею та грунтовою площею, ц.т. картина сліда Γ наз. грунтовою лінією; будемо означати її літерою G. Проста збігу Γ є горізонт

$H (= G_u^c)$. Нехай маємо якусь точку простору p, p'– її нормальна проекція на Г. Уявімо собі центральні проекції від p та p' на площу П... p^c та p'^c. Таким чином кожній точці простору відповідає картина пари точок. Називаємо p^c центральною вертикальною проекцією або перспективною картиною, p'^c центральною грунтовою проекцією або перспективною грунтовою проекцією від p; обидві разом наз. центральними картинами або перспективними картинами точки p. Понеже $(pp') \parallel П$ $p^c p'^c \parallel pp'$ то $p^c p'^c \perp G$. Обидві картини просторної точки лежать на одному перпендикулярі до грунтової лінії G. Це положення справедливе й для точок безмежно віддалених. Нехай A_u безмежно віддалена точка простої A, то грунтова проекція a_u' безмежно даленої точки A' та a_u^c $a_u'^c$ суть точки збігу A та A_1, ц.т. точки перетинення рівнобіжних лучів $[O \parallel A]$ та $[O \parallel A']$ з картинною площею (фіг.363) Понеже A та A_1 належать до площі нормальної до Г, то й їх рівнобіжні лучі так само належать до подібної площі й точки перетинення цих лучів з площею П лежать на простій, нормальній до G. Центральна грунтова проекція безмежно далекої точки лежить на горізонті й зі своєю нормальною проекцією лежить на одному рівнобісі до горізонту.



Фіг. 363.

або це положення можна так переиначити. Точка збігу простої та точка збігу грунтової проекції її, що лежать на горізонті, належать до одного перпендикуляру до горізонта.

Креслення перспективних картин по методу перетинення.

Вже раніще прикладався цей засіб, але при умові, що картинна площа була рівнобіжна до вертикальної площі. При цьому одержували так звані прямі або фронтові уяви. Для одержання бокових уяв (Schrägansichten) треба, або повернути предмет біля вертикальної осі, або вибрати инше положення площі П. Поворот викликає багато роботи, так що краще вибрати инакше положення площі П, залишивши її рівновісною. Щоб нарис зробити більш компактним, ґрунтову проекцію креслимо над вертикальною.

Дана вертикальною та горизонтальною проекцією кам'яна тумба в 1/40 натуральної величини, треба накреслити її перспективне виображення. Що до горізонтальної проекції, то треба тільки примітити, що боки відносяться, як 2:1. Ґрунтову проекцію П' картинної площі, далі, горізонтальну та вертикальну проекцію ока вибіраємо довільно. Ґрунтова точка з O на П спущенного рівновіска є головна точка h — h' = [O' | П'. П']. На нарисі (фіг. 364) накреслена точка h'' знаходиться на однаковій висоті з точкою O'', ц. т. на вертикальній проекції H'' горізонту H. Щоб одержати перспективну картину якоїсь кутової точки a, проводимо через неї луч бачіння $[Oa]$ та означаємо його перетинення a^c з $П$. Ґрунтова проекція цієї точки $a'^c = [O'a'. П']$, вертикальна $a^{c''}$ находиться на перетиненні $[O''a'']$ з рівновісом a^c! Коли теж саме зробимо зі всіма кутами, одержимо вертикальну проекцію картину, що находиться в площі $П$, котра, дякуючи нахилу $П$ до $П_2$ має инший образ, як сама картина. Щоб одержати дійсний образ, кладемо $П$ в площу нариса так, щоб H прийняло горізонтальне положення та головна точка перейшла в точку h. Точці a^c відповідний пункт в цій картині, котрий знову таки означимо через a^c. Він легко одержується, коли взяти на увагу, що положення його вліво від h на $h'a'^c$ та вниз від $П$ на довжину $h''a''^c$. Так наносимо і всю решту точок (фіг. 364); одержуємо перспективну картину. Конструкція значно попрощується, коли взяти на допомогу точки збігу рівнобіжних кантів даного предмету. В данному образі крім рівновісних кантів, мається ще два ряди горізонтальних рівнобіжних кантів, а саме, рівнобіжних та рівновісних до стіни. Щоб одержати точку збігу, пригадаємо, що досить провести з ока рівнобіжну та означити її перетинення з картинною площею. З точки O проводимо рівнобіжні прості та означаємо ґрунтові проекції f_1' f_2' з площею П. $f_1' = [O' \parallel (b'c') . \Pi']$ $f_2' = [O' \parallel (a'b') . \Pi']$ (як раз f_2 виходить по-за межу нарису). Віддалення цих точок від h' нехай будуть f_1 та f_2. Для означення точки f_2' візьмемо на $[h'O']$ точку $\frac{O'}{n}$, котра знаходиться в віддаленні від h' .... $\frac{J}{n}$ та через неї проведемо рівнобіжну до $[O'f_2']$. Вона перетинає Π' в точці $\frac{f_2'}{n}$, котра має віддалення від h'.... $\frac{f_2}{n}$ (n - вибіраємо таке, щоб $\frac{f_2'}{n}$ лежала в межах нарису). Часто буває досить взяти $n = 2$; візьмемо $n = 3$ так що $f_2 = 3 . h' \frac{f_n'}{3}$. Пенеже точки збігу f_1 та f_2 лежать на горізонті, то на перспективній фігурі треба тільки відкласти f_1 та f_2 від h, щоб мати ці точки в перспективі. Це при припущені, що точки збігу лежать в межах нарису. Креслення перспективних картин завше починається з зазначення точок збігу, як це було показано. Далі означаємо перспективу точки якогось кута, як це було з'ясовано для точки $\underline{a}$. Коли треба тепер знайти картину точки b $(b'b'')$, то досить тільки означити точку $b^c = [ob' . \Pi']$. Понеже точка збігу (ab) лежить в f_2 то b^c лежить на $[a^c f_2)$ і саме на відрізку $b = h'b^{c'}$ пра-

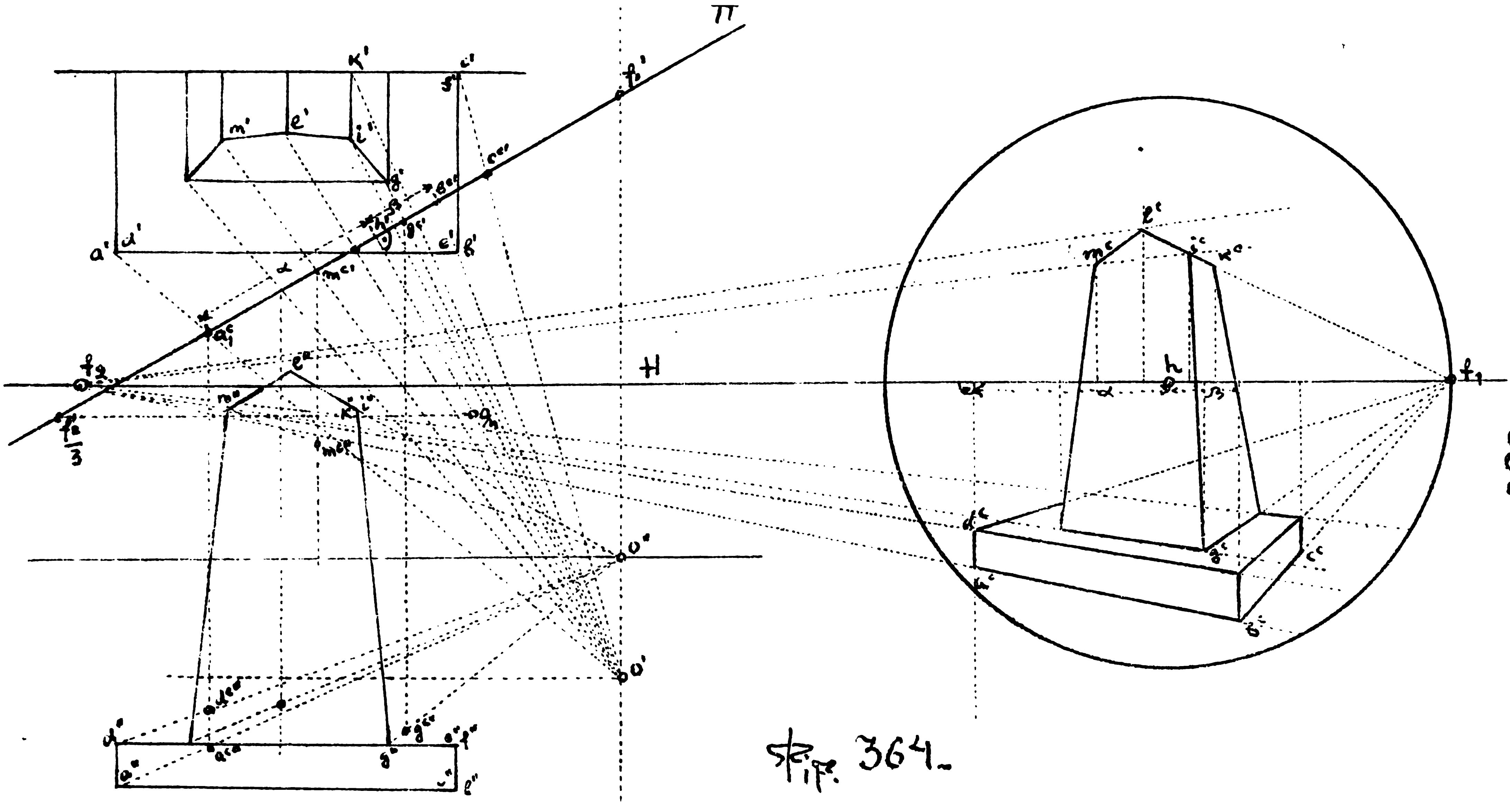

π
k'
i'
f'
f₁'
m'
e'
i'
g'
c''
a'
d'
e'
b'
α
β
h
a₁ᶜ
f₂
H
e''
m''
k''
q_h
f₂/3
o''
o'
d''
a''
g''
e'' f''
c''
b''
eᶜ
mᶜ
iᶜ
kᶜ
h
α
β
dᶜ
gᶜ
cᶜ
kᶜ
bᶜ
f₁

Fig. 364.

воруч від h. На перспективному нарисі від h по H праворуч відкладаємо $h'b'^c$, спускаємо перпендикуляр, перетинення которого й дасть точку b^c. Цілком аналогічно знаходимо другі точки каміння c. $[c^c f_2]$ дає перетинення стінки з поверхнею грунта та перетинення її з $(a^c f_1)$ означить четвертий невидимий кут. Щоб викреслити верхню частину, означаємо якусь точку кута d, що лежить над a. Проводимо $b''d''$, означаємо перетинення з ордерам, що йде з $\underline{a}^{c\prime}$, то точка $d^{c\prime\prime}$ та $a^{c\prime\prime} d^{c\prime\prime}$ дають висоту точки d^c над a^c. Означимо її на перспективному нарисі та проводимо рівнобіжні (через неї) до (ab) та (bc), котрі точки збігу мають в f_2 та f_1; проводимо відвісні прості через $\underline{b}$ та c — одержуємо перспективну картину нижньої частини кам'яної колони.

Тепер аналогічно, як для точки a^c, шукаємо картину точки g^c кута $(g'g'')$ і з допомогою точки збігу одержуємо решту видимих кантів обеліска. Точку m^c означаємо безпосередньо.

Вибір картинної площі та положення ока. Понеже головний промінь завше рівновісний до картинної площі $П$, то положення $П$ означає, де знаходиться око. Де знаходиться площа $П$, перед або за предметом, по суті справа від цього не міняється: перспектива одержується побільшена або поменьшена. Головний луч (напрямок його) треба так вибрати, щоб він був приблизно посередині предметів. Цим горізонтальна проекція головного луча означається. Що до вертикальної проекції, то тут грає ролю висота, на котрій знаходиться око. Звичайно беруть над горізонтальною площею на 160 сантіметрів. Більш трудно вибрати віддалення (дистанції). Вона мусить бути вибрана так, щоб картина не була перекошена.

Коли дивимось на картинну площу, то без повороту голови бачимо поверхню, що описує луч, який складає з головним лучем кут біля 30° По-за цим відруки неясні, або, як кажимо, предмети не лежать в полі бачіння. Уявимо собі стіжок з верховиною в $\underline{O}$, віссю [Oh] та бісевим кутом 30°, то можливо сказати: тільки всередині цього конуса предмети видні ясно, коли око направлено на головну точку.

Між дистанцією та радіусом цього кола існує така залежність: $d=r\sqrt{3}=1,75r$, при котрій предмет є видимий найкраще. Щоб найкраще, значить, бачити, треба так вибрати віддалення, щоб предмет знаходився всередені кола бачіння. Коли це осягнуто, то вже побільшення дистанції тільки побільшує розміри, а не скорочує, не змінає форм предмета. Звичайно, коли дистанція взята занадто великою то все-таки де-яка зміна форм, де-яка косина частин предмета виявляється. При кресленні навпаки, завдяки невеликому розміру паперу треба ці віддалення брати по можливости найменшими і справа йде тільки про те найменше віддалення, при котрому предмет ще свого виду не змінає, коли форми його не перекошуються.

Для означення цього віддалення можемо взяти такий приклад: Раніще всього рахуємо, що предмет цілком лежить за картинною площею. Спочатку вибіраємо, як пробу, на головному лучу такий пункт O за око, котрий очевидячки дасть завелику дистанцію. При цьому положенню ока означаємо перспективу якоїсь точки-кута предмета, котра має найбільше віддалення від h. На нашому нарисі (фіг. 364) такі точки будуть a, e, m. Точне віддалення точки a^c від h виявляться, як гипотенуза прямокутного трикутника, катети котрого $h'a^{c'}$ та $H''a^{c''}$. Понеже $H''a^{c''}$ для кожної точки, що лежить за площею П меньше, ніж $H''a''$, то очевидно гипотенуза, що збудована на цих катетах очевидно буде більша, ніж

ha^c. Промінь $[O'a']$ не треба проводити, щоб одержати точку $a^{c'}$, досить нанести її приблизно на око. Виміряють циркулем віддалення від h' та переносимо на H'' від точки перетинення з ордінером точки a'', то віддалення одержаної конечної точки від a'' (приблизно) рівно відрізку ha^c, що шукали, у всякому разі не менше. Записуємо довжину її та шукаємо таким же засобам довжини hl^c та hm^c. Нехай найбільш довга між ними буде r, то r буде найбільшим віддаленням якоїсь точки картини від головної точки, або картина лежить всередині кола (h, r). Щоб це коло лежало всередині кола перетинення з стіжком бачіння, d мусить бути $1\frac{1}{3}r$. Коли, таким чином, взята пробна точка O від Π має менше віддалення, як тільки що встановлене, то повторюють шукання з трохи більш віддаленною точкою O. Коли ж таке пробне взяте віддалення виявляється більшим, то можна його трохи менше взяти, як вірне мінімальне для дистанції. При наближенні ока до Π сунуться й перспективні картини всіх точок, що знаходяться за площею Π ближче до h; значить, коли для віддаленного ока перспективні картини всіх точок лежать всередині кола (h, r), то, мавляв для ближчого ока тим більш вони лежать всередині його. Колиж при першій спробі виявилось, що віддалення для О вибрано занадто далеко від П, приходиться повторити цей дослід. Нарешті одержуємо r, ($d = 1\frac{3}{4} r$) при чім відрізки бувають трохи великими.

Цей даний засіб встановлення віддалення ока не має широкого росповсюдження. Майже кожний автор дає свій власний. Леонардо де Вінчі дає таке емпиричне правило при кресленні предметів з натури: віддалення мусить бути в три рази більшим найбільшого виміру предмета. Инші пропонують брати віддалення рівним найбільшому розміру рамки малюнка. У всякому разі всі погоджуються, що віддалення не мусить бути менше 25 сантіметрів. Виходять з тієї думки, що готовий перспективний малюнок буде розглядатися оком, котре буде знаходиться в центрі проекцій й котре природньо буде в віддаленні найкращого бачіння від предмета.

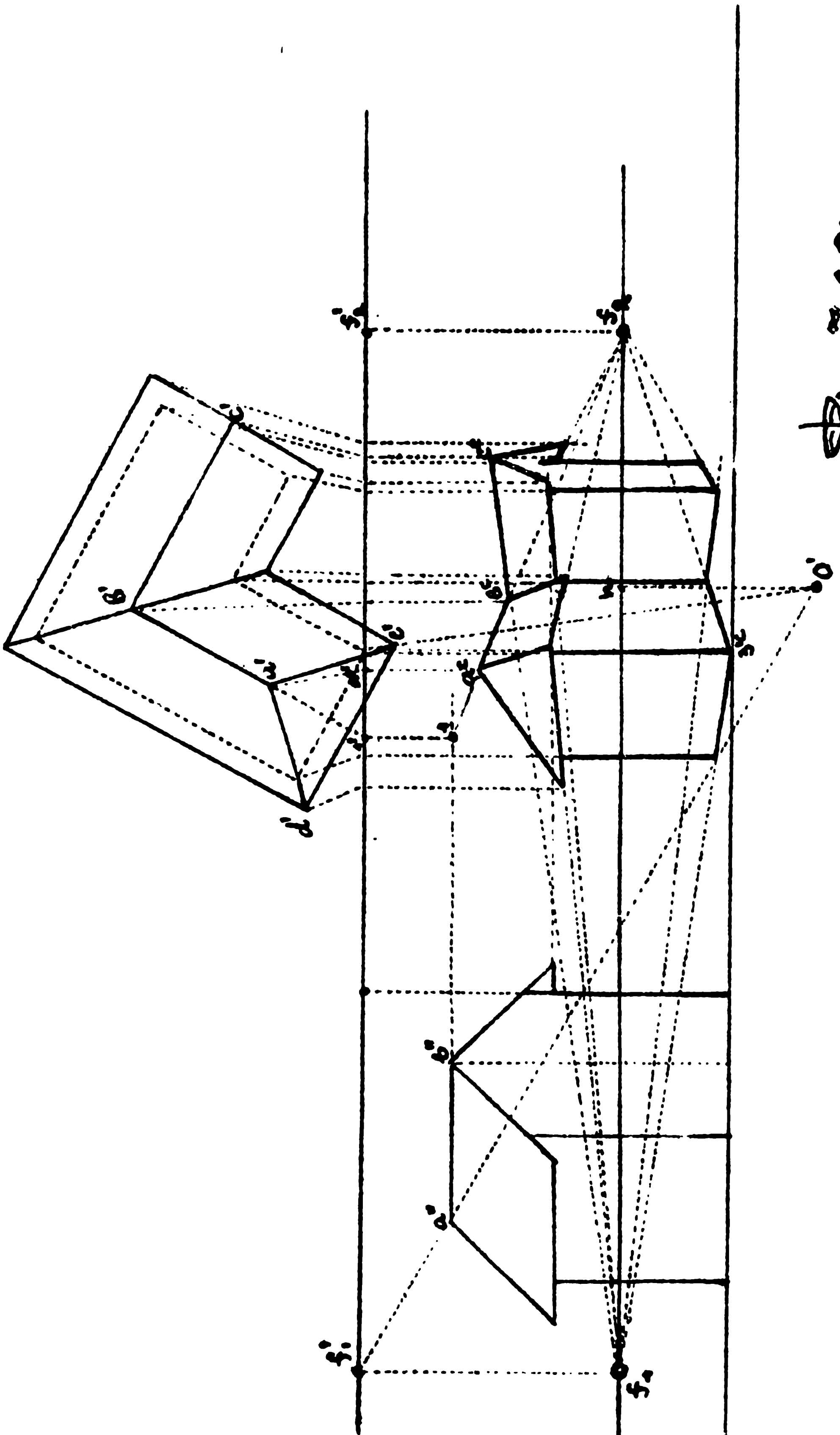
Коли розглядати вірно складний перспективний малюнок через конічну трубку, то дійсно одержується враження тілесного (стереоскопічного) предмета.

Креслення перспективних картин по методу слідів.

Креслення перспективних картин по методу перетинення звичайно вживається архітекторами з невели—

кими змінами, котрі мають приклад особливо тоді, коли предмет дається своєю горізонтальною та вертикальною проекцією — звичайно якийсь будинок на двох окремих листах (в однім і тім же маштабі). Поворот горізонтальної проекції зроблений може бути просто тим, що лист з горізонтальною проекцією закріпляється на дошці для креслення кнопками в бажаному напрямку, тоді П можна взяти за вертикальну площу — П' рівнобіжно горізонтальному канту дошки креслення. Вибравши O' на відповідній дистанції, находимо горізонтальну проекцію перспективу окремих точок, як раніще, як перетинення П' з грунтовою проекцією луча бачіння, що проводимо до відповідних кутових точок предмета. Тоді вертикальні проекції цих точок, що лежать на відповідних ординатах і будуть перспективами. Ця конструкція, відрізняючись від першої методи, користується слідами горізонтальних простих, що йдуть через кутові точки, наз. методом означення слідів.

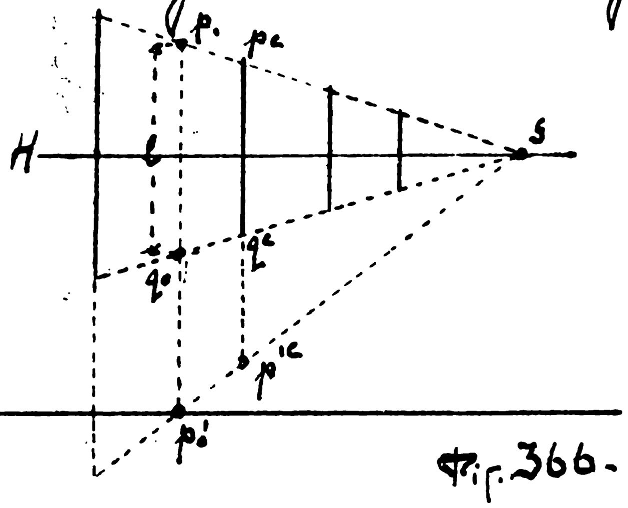
Нехай G буде довільна проста та H, що проведемо рівнобіжно їй на висоті ока; шукаємо перш всього точку збігу f_1 та f_2 горізонтальних кантів предмета; проводимо через O' до грунтової проекції цього канта рівнобіжну та пересічення її з П' на горізонті означаємо рівновісом. Прикріплюємо збоку, де будемо креслити перспективний вид, лист В вертикальною проекцією так, щоб нижня лінія його була продовженням G. Перспективна картина якоїсь кутової точки даного предмета, наприклад, пункта $a(a'a'')$ одержуємо таким чином. Означаємо $a^{c'}=[o'a'. П']$ та проводимо через неї орднер. Проводимо через $\underline{a}$ просту, котра має свою точку збігу в f_1 або f_2; в даному випадку за таку просту вибрати гребінь (ab). Ця проста перетинає П в точці 1, горізонтальна проекція котрої $1'=[a'b'. П']$ лежить на одній висоті з $\underline{a}$. Щоб одержати $1=1''$, потрібно тільки орднер з $1'$ перетяти з горізонталлю (ab). Перспектива (ab) йде через 1 та точку збігу f_2; перетинення орднера через $a^{c'}$ є точка, що шукали (a^c). Звичайно, для де-яких точок конструкція ще попрощується. Наприклад, щоб одержати b^c, досить через перетинення $b^{c'}$ провести орднер та означити його перетинення з раніще проведеною простою $(a^c f_2)$. Далі $(b^c f_1)$ є картина $\underline{b}$ гребня, на котрій c^c лежить на орднері $c^{c'}$. При конструкції перспективних нарисів починають з кантів, сліди котрих лежать на G. Лучі сполучення з O' викреслюють тільки частично, але рекомендується доводити їх до перетинення з площею П, а звідціля вже проводити орднери.



Фіг. 365.

Виміри, перенос та поділ відрізків.

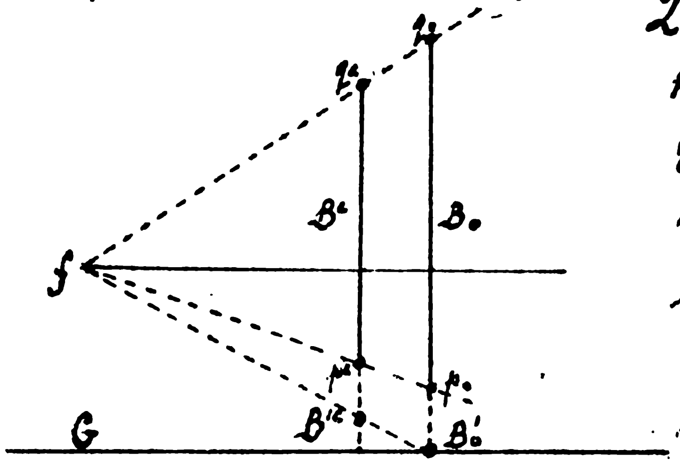
Відрізки ⊥ Γ. Нехай $p^c q^c$ перспективна картина, $p'^c = q'^c$ перетинає грунтова проекція нормального відрізка pq, довжину котрого в треба виміряти. Для цього пересовуємо відрізок по рівнобіжному до Γ напрямку аж доки він складеться з П. Нехай картина цього нового положення буде довжина ℓ. При цьому пересовуванню точки p та q описують прості, рівнобіжні до Γ, точка збігу котрих може бути довільно вибрана на H. Точка p' описує при цьому просту в площі Γ з картиною $(p'^c \ell)$. Точка перетинення цієї простої з картинною площею є $p_0' = [p'^c \ell . G]$; рівновісно між простими $(p^c \ell)$ $(q^c \ell)$ мусять знаходитись пересунуті положення $p_0\, q_0$ точок p та q так щоб $\ell = p_0 q_0$. Всі рівновісні відрізки, що лежать між рівнобіжними простими, що проходять через точки p та q з точкою збігу, мають однакову довжину. Ці відрізки можуть бути або побільшені, або поменшені, в залежности від того, де вони лежать, чи перед картинною площею чи за нею й зміни будуть тим більші, чим далі лежать вони від картинної площі. Як що виберемо головний



Фіг.366.

пункт h за f, то $p_o q_o$ будуть вертикальні проекції точок p та q, ц. т. проекцією на площу П.

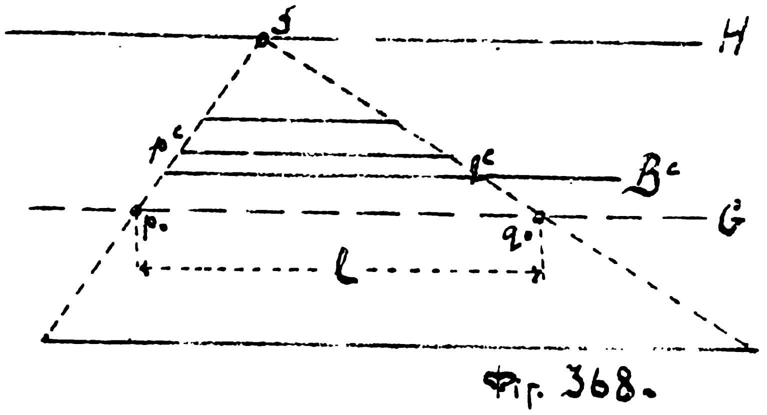
Важна відворотна задача: на відбісному відрізку B, що дається своєю перспективою та грунтовою проекцією, треба від точки p (дається p^c) відкласти відрізок довжиною



Фіг. 367.

25 сантиметрів (фіг.367) Приклад цілком аналогічний з попереднім. Пересовуємо B по довільному горізонтальному напрямку (точка збігу f) в картинну площу по напрямку B_o, при чім p переходить в p_o, наносимо на B_o від p_o 2,5 сантим. до q_o та пересовуємо всю просту з q_o знову в початкове положення, при чім одержуємо q_c; тоді $p^c q^c$ є картина відрізка, що шукаємо. Треба зауважити, що при пересовуванні до грунтової простої вийшла точка B_o' а не p.

2) Відрізки, рівнобіжні П, що лежать в Г

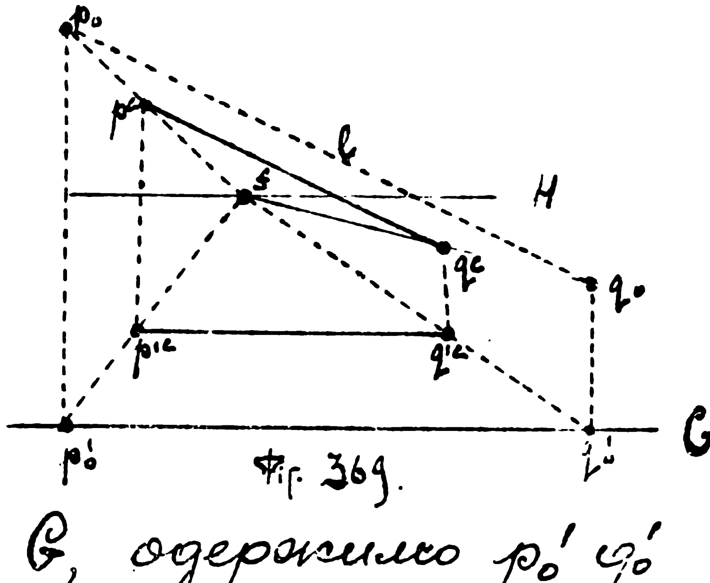


Фіг. 368.

Нехай $p^c q^c$ картина такого відрізка (фіг. 368) Щоб означити довжину l, пересовуємо такий відрізок в фіному горізонтальному напрямку (точка збігу f) аж доки вона складеться з картинною площею, ц. т. в даному разі, з грунтовою лінією. Картина $p_0 q_0$ пересунутого відрізка дає довжину l. Всі (до pq) рівнобіжні відрізки між простими, що йдуть до f, мають однакову довжину.

Коли, навпаки, на рівнобіжній до П простій B, що дана своєю B^c в $Г$, починаючи від точки p треба відкласти відрізок l, то пересовуємо B на $\mathcal{B}$, наносимо від p_0 довжину l аж до точки q_0 та пересовуємо цей відрізок в первичне положення.

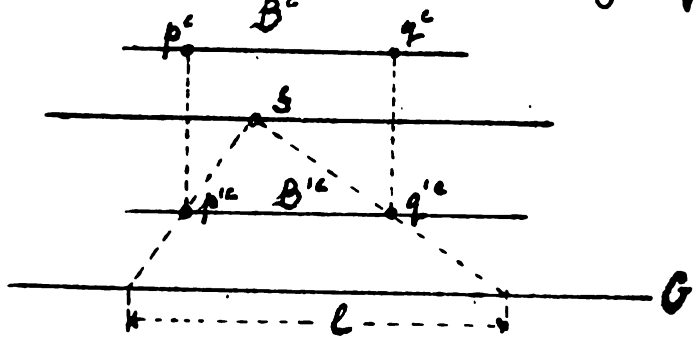
3) Відрізки довільного положення, що рівнобіжні до П. Коли треба означити довжину l відрізка, що дається своїми перспективними картинами $p^c q^c$, $p'^c q^c$, то робимо, як в попередніх випадках.



Фіг. 369.

Нехай f буде точкою збігу, що лежить на H, горізонтальних пересунутих напрямків; між fp'^c та fq'^c, що продовжимо аж до перетинення з G, одержимо $p_0' q_0'$ грунтову проекцію пересунутого відрізка. На рівновісах через точки p_0' та q_0' лежать точки перетинення в простими sp^c та sq^c, так що відрізок $p_0q_0 = l$. Дякуючи рівнобіжності пересунотого відрізка з pq, а значить і картини $p_0q_0 \| p^cq^c$; значить досить означити тільки одну з точок чи p_0' чи q_0'. Відкладення якоїсь даної величини від даної точки не вимагає особливих пояснень.

На рівнобіжному відрізку до П pq, одночасно рівнобіжному до Г, треба означити довжину $p'q'$.

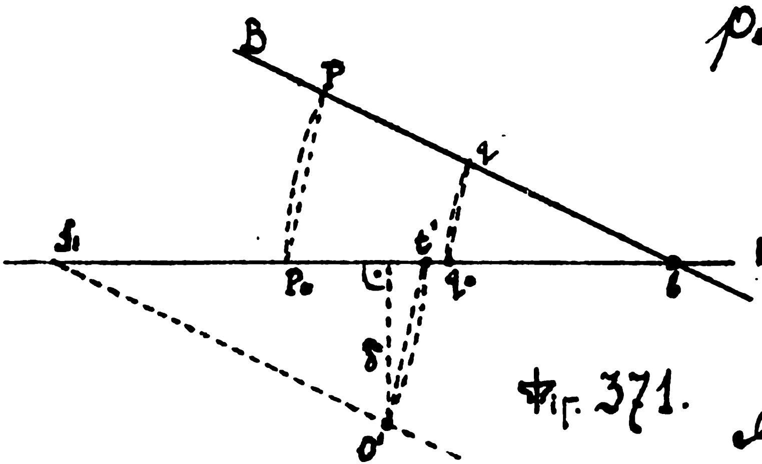


Фг. 370.

Коли на такому відрізку B, що одночасно рівнобіжний до П та Г, треба відкласти дану довжину l, то наносимо її від p' на її грунтовій проекції B' та переносимо одержані точки на даний відрізок.

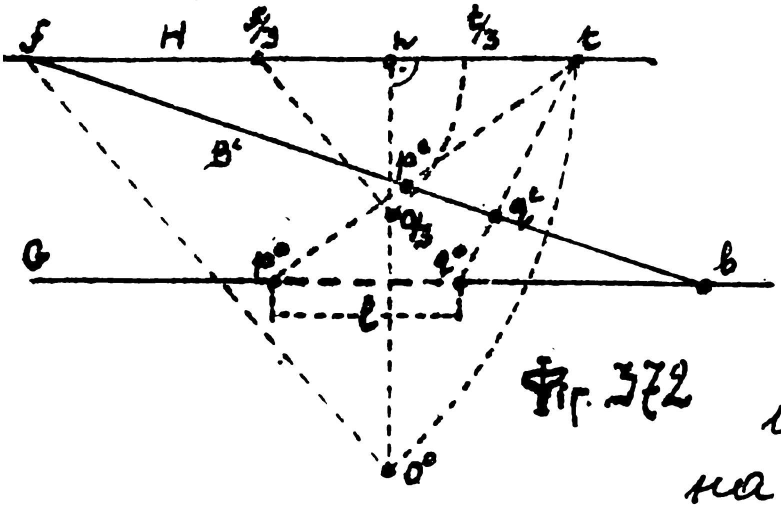
Довільний відрізок, що лежить в Г або рівнобіжний до Г.

Нехай pq буде відрізок, що лежить в Г, нахилений до П під якимсь кутом, то вже не можна, як в попередніх випадках, пересовуванням перенести в картинну площу. Повертаємо навкруги точки перетинення $\underline{b}$ простої $B = (pq)$ з грунтовою простою G; повернуте положення p_0q_0 дає довжину l відрізка pq. На нарисі (ф. 371) показана конструкція, котра дає положення грунта картинної площі, ока та відрізка pq $p_0 q_0$. При повороті від В до С кожна точка описує луку кола навкруги в = (ВС), котрих хорди, як qq_0 pp_0 рівнобіжні та лежать в Г.



Фіг. 371.

Коли напрямок цього повороту відомий, то повернуті точки p_0 q_0... легко одержуються простим проведенням рівнобіжних. Далі, коли відома точка збігу t цих хорд, то точки p_0 q_0 можуть буті означені в перспективі, мають p' q', як перетинення С з $p^c t$ та $q^c t$ (t - є перетинення простої, що проведена через О рівнобіжно до хорд повороту з картинною площею, в данному випадку - з горізонтом) і перетинення (О‖В) з горізонтом дає точку збігу $f = в^c_u$ простої В. Понеже боки трикутників $вpp_0$ та fot рівнобіжні та $вp_0 = вp$ і $ft = fo$, можливо висловити положення: точка збігу хорд повороту якоїсь простої грунни одержується, коли віддалення ока від точки збігу простої відкладемо від неї по горізонту. Відкладати можна або по один бік точки збігу, або по другий. Так отримані дві точки збігу хорд повороту належать до обох можливих поворотів B відносно G. Для рішення задачі в перспективі необхідно мати положення головної точки та дистанції (при рішенні попередніх задач це було непотрібно). На нарисі (фіг. 372) крім горізонта, грунтової простої та перспективної картини відрізка pq, що лежить в Γ, ще дається h та на вертикальній лінії нанесена дистанція $\delta = hO^\circ$. f^t є перетинення $B^\circ = (p^\circ q)$ з H і fO є гіпотенуза прямокутного трикутника з катетами fh та δ. Понеже $fO^\circ = fO$, то щоб одержати t, на H (без проведення fO° або луки $O^\circ t$) $ft = fO^\circ$. Прості $(p^\circ t)$ $(q^\circ t)$ суть картини повернутих хорд, що проходять через p та q, їх точки перетинення з G суть повернуті точки p_0 q_0 так що $p_0 q_0 = l = pq$. Точка збігу t наз. точкою поділу простої G, бо вона вживається для поділу в перспективі даного відрізку на рівні частини (де-які автори наз. цю точку — точкою виміру). Точкою збігу якоїсь простої грунтової площі — означається.



Фіг. 372

її точка виміру (поділу). Для рівнобіжних простих належить одна й та ж сама точка виміру. Для простих нормальних до П дистанційна точка, що лежать на H..є точки виміру. Для простих, що рівнобіжні до G, точку виміру неможна означити бо f лежить в безмежності (кожна точка, що лежить на H може бути для цього вжита).

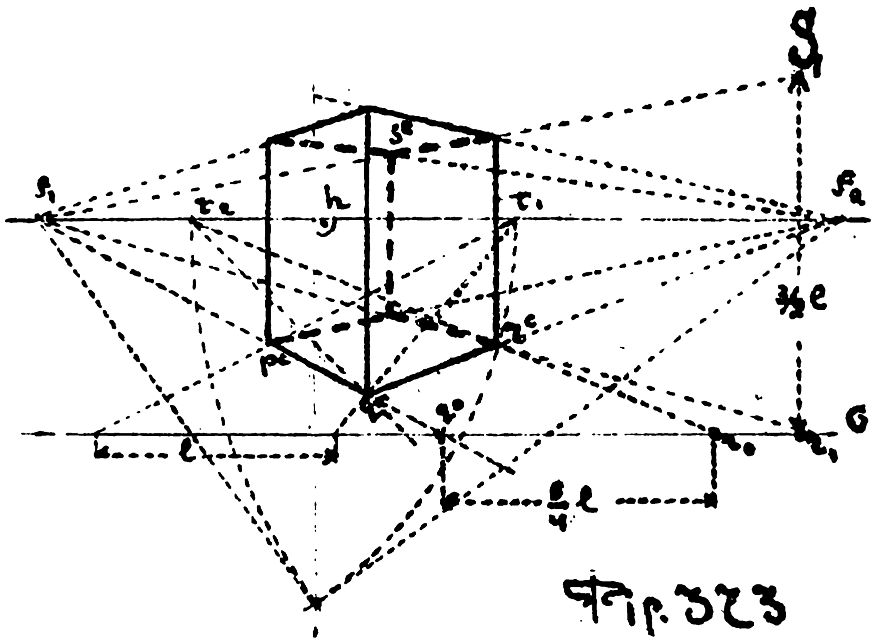
Нанесення даного відрізка l на якусь просту B, що лежить в площі Г та дана своєю картиною B^c відно з останнього нарису. Коли треба відрізок нанести від точки p (p^c), то, означивши точку виміру t простої B, повертаємо B аж до G. Точка p проходить тоді в p_0, то, зробивши на G $p_0 q_0 = l$, повертаємо q_0 (знову з допомогою t назад в положення B. q^c є картина повернутої точки.

Довжина відрізка, рівнобіжного до Г, котрий дається центральною вертикальною та горізонтальною проекцією, одержується найпростіще, коли довжину ґрунтової проекції виміряємо означеним засобом.

Так само робиться нанесення якоїсь довжини на простій, що рівнобіжна до Г, коли цю довжину відкладаємо на ґрунтовій проекції, то конечний пункт при допомозі ободнеру переносимо на картину.

Коли точка збігу якоїсь простої лежить по-за межами даного нарису, то все ж таки її точка виміру t звичайно лежить в межах нарису. Нехай, наприклад, на попередній фігурі O° лежить по-за межами нарису, але віддалення до h відоме. В цьому разі t можливо просто одержати, коли викреслимо трикутник, подібний до $fO^\circ t$ центричний відносно h і остільки зменшений, щоб точки відповідні O° та f лежали в межах нарису. Нехай поменшення буде $1/3$. Наносимо на H та V від h відрізки $\frac{f}{3}$ та $\frac{\delta}{3}$ до точок $\frac{f}{3}$ та $\frac{\delta}{3}$ і робимо на H $\frac{f}{3}\cdot\frac{t}{3}=\frac{f}{3}\frac{O^\circ}{3}$ то $\frac{t}{3}$ відповідає в цьому подібному нарисі точці виміру t. Одержуємо t, коли $3.h.\frac{t}{3}$ наносимо від точки h.

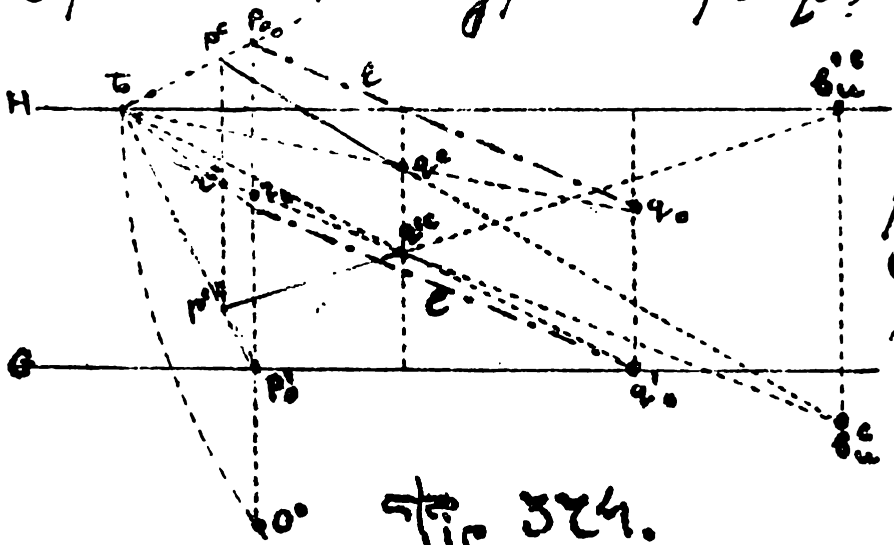
Нехай $p^c q^c$ буде картиною ґрунтового канта прямокутного паралепіпеда (квадера), що стоїть на площі Γ. Ґрунтові канти, що роблять праві кути з pq нехай мають довжину $5/4\,pq$, відвісні канти $\frac{3}{2}pq$. Треба накреслити його при дистанції $hO^\circ = \delta$. Раніше всього шукаємо (фіг. 323) точку збігу f_2 до pq нормального ґрунтового канта. Нехай $f_1 = [p^c q^c H]$ точки збігу (pq), то одержуємо f_2, як перетинення $[O^\circ | (f_1 O^\circ)]$ з горізонтом $[q^c f_2]$ дає картину другого ґрунтового



Фіг. 323

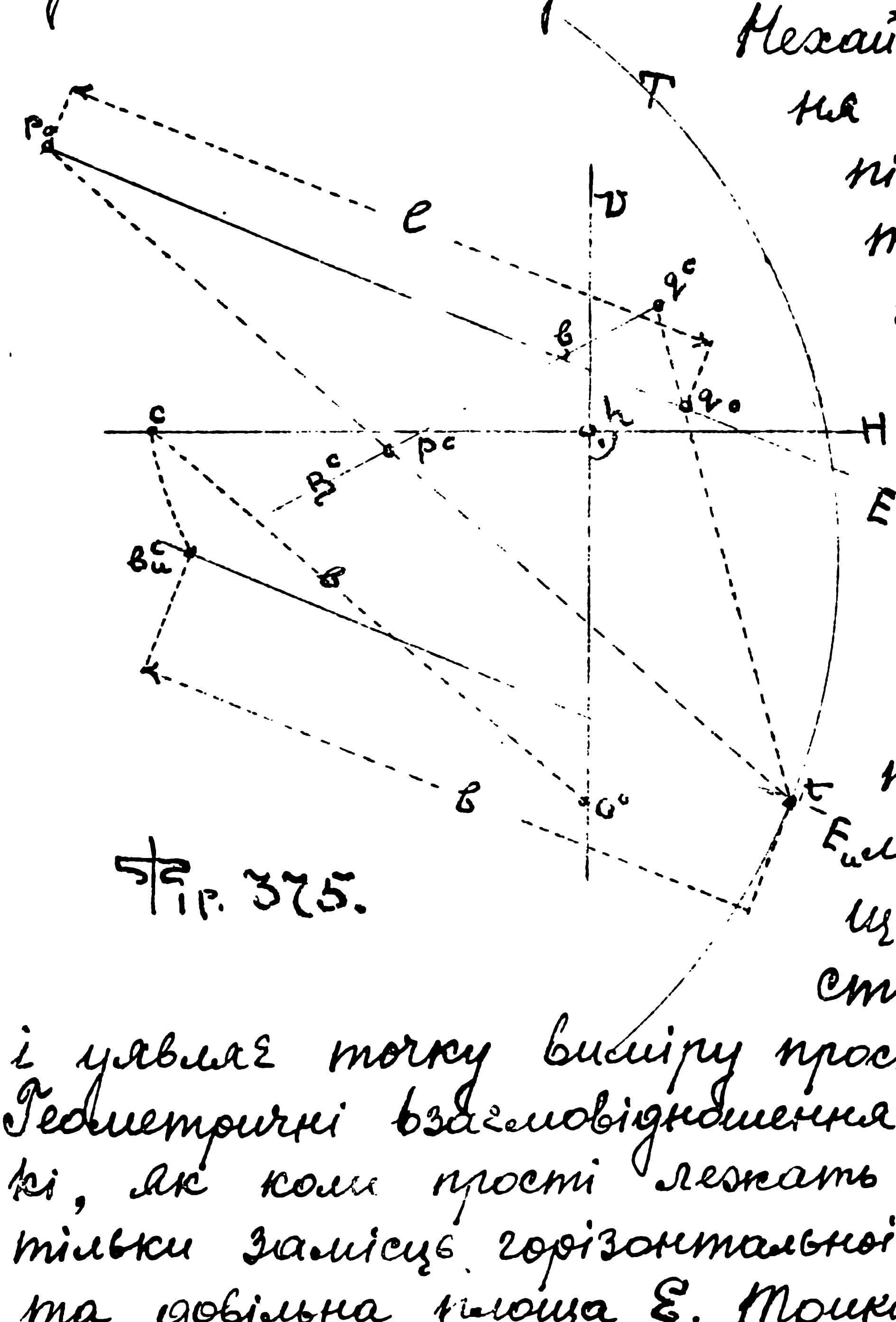
канта через q. Щоб одержати кінцевий пункт r шукаємо до f_1 належний пункт поділу t_1 та довжину l від pq. Повертаємо (qr) навкруги t_2 аж до G, при чім q переходить в q_0; робимо $q_0r_0 = \frac{5}{4}l$ та повертаємо r_0 назад в r; одержуємо картину r^c. $[p^c f_2 \cdot r^c f']$ дає картину чотирикутника ґрунта. Треба ще на відвісному канті відкласти $\frac{3}{2}l$. Для цього пересовуємо просту рівнобіжно до напрямку (f_1 або f_2) картинної площі, бо тоді допоміжні прості будуть частинні картини кантів. На нарисі (фіг. 323) точка S^c находиться з допомогою точок збігу f_1 та f_2; r, S_1 є в картинну площу пересунутий відрізок rs.

Довільні відрізки. Розглянемо загальний випадок — найти довжину відрізка l, що дається своїми картинами p^cq^c та $p'^cq'^c$. Хід рішення міг би бути таким: $l' = p'q'$ означити, як в випадку рівнобіжних до Г, та довжини $p'p$ та $q'q$ виміряти, коли вони рівновісні до Г. З цього виявилась би безпосередньо довжина l. Точку виміру t (для p'q') можна вжити для виміру відвісних довжин з більшим успіха як точки збігу, як це показує нарис (фіг. 374). Відрізок $p_0 q_0$, котрий одержуємо, має просте геометричне значіння. Уявимо собі відвісну площу через pq, котра содержить і p'q', складеною навкруги її сліду з картинною площею, то точки p' q' переходять в точки p_0' q_0' на B, а точки p q, понеже t є точкою збігу всіх хорд повороту – в p_0 q_0. Таким чином $p_0 q_0$ є перекладене положення відрізка pq, коли першу проектуючу площу складемо з картинною площею. Проводимо через точку збігу b_u^c простої $B = (pq)$ через q_0' рівнобіжну до B та перетинаємо її (p'p) в z, то p'z є різниця віддалень точок p та q від Г. Коли найдемо складене положення z_0 від z, як було сказано, то $q_0' z_0 = l$. Иноді така конструкція добре проходить. Частіще, особливо коли точка сліду b та точка збігу b_u^c відрізка pq вже відомі, можна вжити ще простішого засобу. Прово-



Фіг. 374.

димо через B довільну площу ε $[E E_u^c]$ та повертаємо в ній B навкруги $\underline{b}$ аж доки вона складеться зі слідом E.



Фіг. 375.

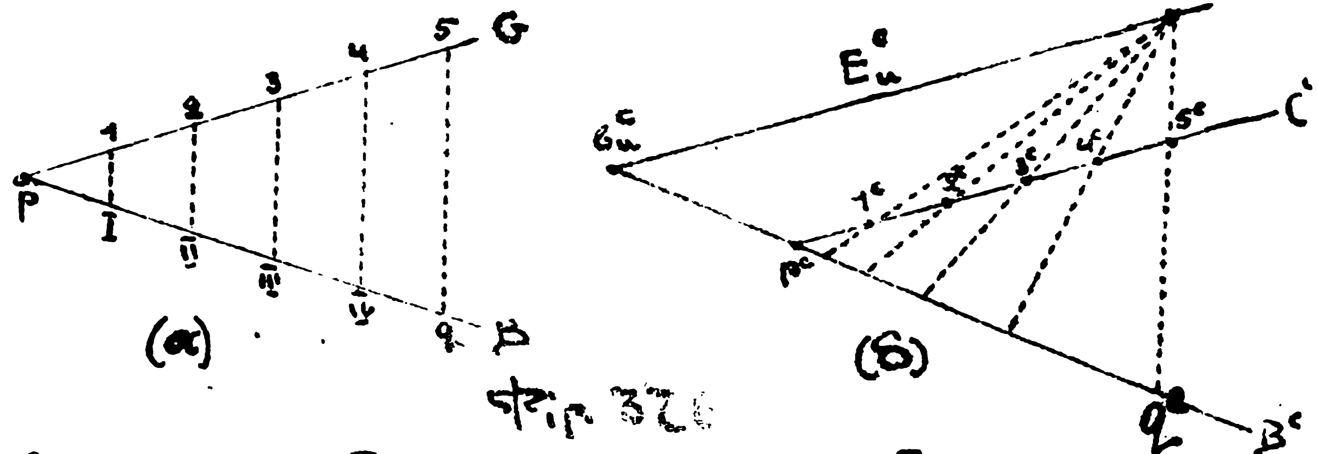
Нехай $p_0 q_0$ положення точок $p\,q$ після повороту, то $p_0 q_0 = pq = l$. Щоб одержати p_0, q_0 означаємо точку збігу t для хорд повороту. t, як точка збігу простих, що лежать в площі ε на простій збігу E_u^c і уявляє точку виміру простої B. Геометричні взаємовідношення майже такі, як коли прості лежать в площі Γ, тільки замісць горізонтальної площі Γ взята довільна площа ε. Трикутник bpp_0 подібний до $b_u^c ot$ дякуючи рівнобіжності сторін; поневже $bp_0 = bp$ і $b_u^c t = b_u^c o$, можливо висловити положення: на довільній простій на площі, що проходить через неї, відповідний пункт виміру означиться, коли віддалення ока від точки збігу простих від цього пункта відкладаємо по напрямку простої збігу. Віддалення $b_u^c O = b$ є гіпотенуза прямокутного трикутника з катетами $h b_u^c$ та $hO = \delta$. Коли дистанція δ, як звичайно дається відрізком hO° по вертикалі, то треба тільки на горізонті зробить $hc = h b_u^c$, тоді $cO^\circ = b$. Наносимо цей відрізок від b_u^c по E_u^c до t, то t і є точка виміру. Прості $(p^c t)$ та $(q^c t)$ перетинають на E повернуте положення $p_0 q_0$ точок p та q і $p_0 q_0 = l$.

Простій B для всякої площі $\mathcal{E}$, що проходить через неї, належить дві точки виміру (або поділу), котрі від b_u^c на $b = b_u^c O$ віддалені одна від другої. Коли змінятм $\mathcal{E}$, то змінаються положення точок виміру по колу $T = (b_u^c b)$, котрий наз. колом поділу, або колом виміру даної простої. Кожна точка цього кола може бути вжита, як точка виміру; треба тільки зауважити, що дійсні довжини відрізків завше мусять бути відкладеними по простим, що виходять зі сліда B рівнобіжно до радіуса точки виміру. Рівнобіжні прості мають одне й те ж коло виміру. Дистанційне коло є коло виміру для простих, нормальних до Π.

Назва „точка поділу“ дана тому, що її вживають при перспективному поділу довжин. Так напр., на нарисі (фіг.376а), щоб відрізок pq поділити на

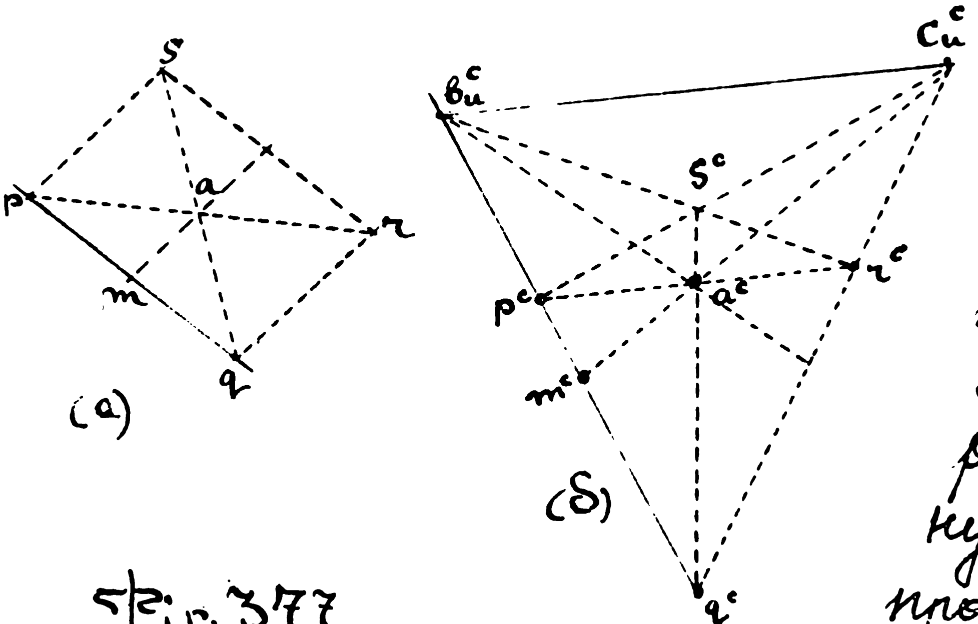
5 рівних частин, можна p_0q_0 поділити та одержані частини біля t повернути в початкове положення.

Перспективне ділення відрізків робиться простіше без вживання точки виміру, коли відому фігуру для перспективного поділу pq викреслимо та просту C виберемо рівнобіжно до картинної площі (фіг. 376). Коли p^cq^c є картина, що нале-



Фіг. 376

жить до B, поділеної на 5 частин pq та B_u^c є точка збігу B, то можна розглядати просту E_u^c, що проходить через B_u^c, як просту збігу площі $\mathcal{E}$, через котру проходить $\mathcal{E}$. Понеже рівнобіжна, що проходить через p — C є $C^c=[p^c \| E_u^c]$, то рівні відрізки на C виявляються в перспективі рівними. Наносимо на C^c, починаючи з p^c 5 довільних відрізків до точки 5^c, то $f=[5^cq^c . E_u^c]$ точка збігу (5q). Лінії, що сполучають f з точками поділу 1^c2^c... 5^c це картини до (q) рівнобіжних простих. Вони перетинають на B^c бажані точки поділу $\underline{I}^c\ \underline{II}^c$... Для проведення цієї конструкції потрібний циркуль, але можна зробить поділ з допомогою лінейки. Наприклад, на даному відрізку pq строїмо паралелограм $pqrs$ (фіг.377) проводимо диогонали, та через точку перетинення a рівнобіжну до сторони (qr), то вона проходить через середину m відрізка pq. Щоб одержати m^c, треба накреслити перспективну фігуру. Можна вибрати довільну просту та провести її через точку збігу b_u^c простої $B=(pq)$, як картина (rs) та C_u^c точка збігу простих (ps) і (qs) зовні $(p^c q^c)$. Проведенням цих простих в перспективі одержимо картину m^c середини pq. Звичайно перетинення $(a^c c_u^c)$ та $(r^c s^c)$ є середина rs. і $a^c b_u^c$ перетинає $(q^c r^c)$ та $(p^c s^c)$ посередині. Фігура 377(б) дає повний чотирикутник $p^c q^c r^c s^c$ та диогональний $a^c b_u^c c_u^c$. Зворотно, кожний повний чотирекутник площі нариса можна розглядати, як центральну проекцію паралелограма, бо досить тільки одну сторону диогонального трикутника розглядати, як про-



Фіг. 377

сту збігу, що має початкову точку якоїсь площі.

Креслення перспективних картин по аксонометрічній методі.

Вільна перспектива. Короткий історичний огляд розвитку перспективи. Великі будинки старих часів роблять вказівки, що люди знали про засоби проектування. Правда, по більшости це було таємнитством та належало особливо одухотвореним людям. Але все же таки можна ствердити, що вже багато тисячіліт ортогональні проекції відомі. Що торкається власне до перспективи, ц. т. до центральних проекцій, то тут справа стоїть инакше. Вона утворилась під впливом необхідности встановити закони малярства. Невірні проекції земляних робот, невірна розрізка камінів свода, невірна проектировка будинку, це негайно виявлялось в такій формі, що вже вдруге помилка не робилась. Що торкається до невірного приложення законів перспективи в малярстві, то тут справа стояла цілком инакше. Наприклад, неможливо встановити, коли став відомим закон точки збігу рівнобіжних простих. Нарешті картина може бути намальована вірно не вважаючи на те, що творець її не має поняття про закони перспективи. Можливо, що творець картини почував инстинктивно про необхідність де-яких річей, котрі по сути підлягають основним законам перспективи може бути поповнено доброю памяттю бачіння. Ті картини, що дійшли до нас з дуже старих часів, роблять вказівки, що у народів Сходу вірного представлення про простірне тіло не було; перспективи вони не знали. Навпаки, стінні малюнки Помпеї та Рима кажуть, що построчння низчої простої глибин вони вже знали. Вони знали, що для таких простих мається загальний пункт. На сводчатих (кулевих) поверхнях вони відступали від геометричних законів, бажаючи надати більшу наочність — чи може взагалі закон точка збігу для них був неясний. Так само як і в других галузях, так і в знанні законів перспективи середні віки значно відстали від того, що все було відомо грекам та римлянам. Ландшафти та будинки креслили в похильних проекціях, не турбуючись про те, як це мусіло виглядати. Тільки з часом, коли вплив візантійського стилю почав зникати, почався розвиток методів перспективи. Спочатку почалось з представлення простих глибин та рівнобіжних до картинної площі. Можна встановити, що все-таки в ті часи не знали про точку збігу простих глибин, ц.т. головного пункта та точки збігу, що проведені під кутом 45°. Нам роздивиться картини того часу, то багато є невірного, невідповідаючого законам перспективи. Тільки року 1370 будівник та скульптор Філіпо Брунеліні склав геометричні початкові правила перспективи. Року 1651 Lionardo da Vinci видав свою знамениту книгу „Trattato della pittura", де вже було поняття про дистанц-пункт. Введення поняття про горізонт, як про самостійну просту, було зроблено французом Jean Pèlerin (1560) „La perspective speculative et pratique, où sont demonstrés les fondements de cet art et tout ce qui en a été enseigné jusqu'à present. Ensemble la manière universelle de la pratiquer non seulement sur le plan geometral et sans tiers point dedans ni dehors le champ du tableau, mais encore par le moyen de la ligne, communément appellée horizontale". Треба сказати, що відомости, що до Нарисної були вже в ті часи більш поширені, бо життя ста. вимоги до точних відомостей як розрізки камінів, так і гномониці. Щож торкається до законів перспективи, то завше вони якось відходили на задній план. Розрізка камінів або стереотомія встановлювала форми каміння, з котрих складаються своди та другі важні тяжкі частини.

Гноміка учить, як конструірувати вірно

соняшні годинники. Горізонтальні та вертикальні проекції, що мають таке важне значіння в Стереотомії та Гномониці — в перспективі цього значіння не мають. Ті що працювали над засобами розрізки каменів мусили й поширювали відомости, що до ортогональних проекцій (горізонтальних та вертикальних). В історії розвитку Нарисної Геометрії не можна обійти юнацьку інженірну школу в Mezière, де почав викладати Gaspard Monge. Перші задачі Монжа зробити найменьш видимими для ворога укріплення кріпости були поширені та розвиті ним в загальні питання конструкції нахильних площ. Після знищення революцією цієї юнацької школи — в 1794 році в Парижі була утворена знаменита École normale, де знову таки Монж викладав Нарисну Геометрію й видав свою знамениту: „Leçons de geometrie descreptive, données à l'école normale, publiées d'abord en feuilles, d'après sténographes".

Ті задачі, котрі виставляє простірна геометрія; особливо основні задачі Стереометрії вирішає так звана вільна перспектива. Вільна перспектива простірної конструкції представляє зразу безпосередньо в перспективі. В ґрунтових (основних) задачах Стереометрії йде справа про сполучення між точками, прямими та площами простору.

Перспективне положення встановлено для простої, коли дається її слід та проста збігу, для площі — коли дається її слід та проста збігу. Положення точки ще не означене, коли дається її перспектива, ще треба, щоб проста або площа (в котрій вона лежить) була відома й саме, була так означена, як це наводилось попереду. Нарешті ще треба, щоб було відоме положення ока відносно картинної площі, означене дистанційним колом.

Виняток складають ті прості та площі, що рівнобіжні до картинної площі, бо їх сліди та точки збігу лежать безмежно далеко.

Проста, що рівнобіжна до картинної площі, точно означається тим, (що крім її перспективи, ще дається слід та проста збігу площі) що проходить через неї, але не рівнобіжно до картинної площі; звичайно всі три прості між собою рівнобіжні.

Площа, рівнобіжна до картинної площі, цілком означена, коли відома якась точка, котра належить простій або площі, рівнобіжній до картинної площі.

Вільна перспектива служить більш для вирішення геометричних задач ніж художественних. Вільна перспектива предбачає повне знання всієї Нарисної Геометрії й характеризується тим, що в ріжних випадках в залежности від обставин, дозволяє вживати той чи инший засіб будівлі перспективних картин.

Представлення кола в перспективі.

1) Коло лежить в площі, рівнобіжній до картинної площі.

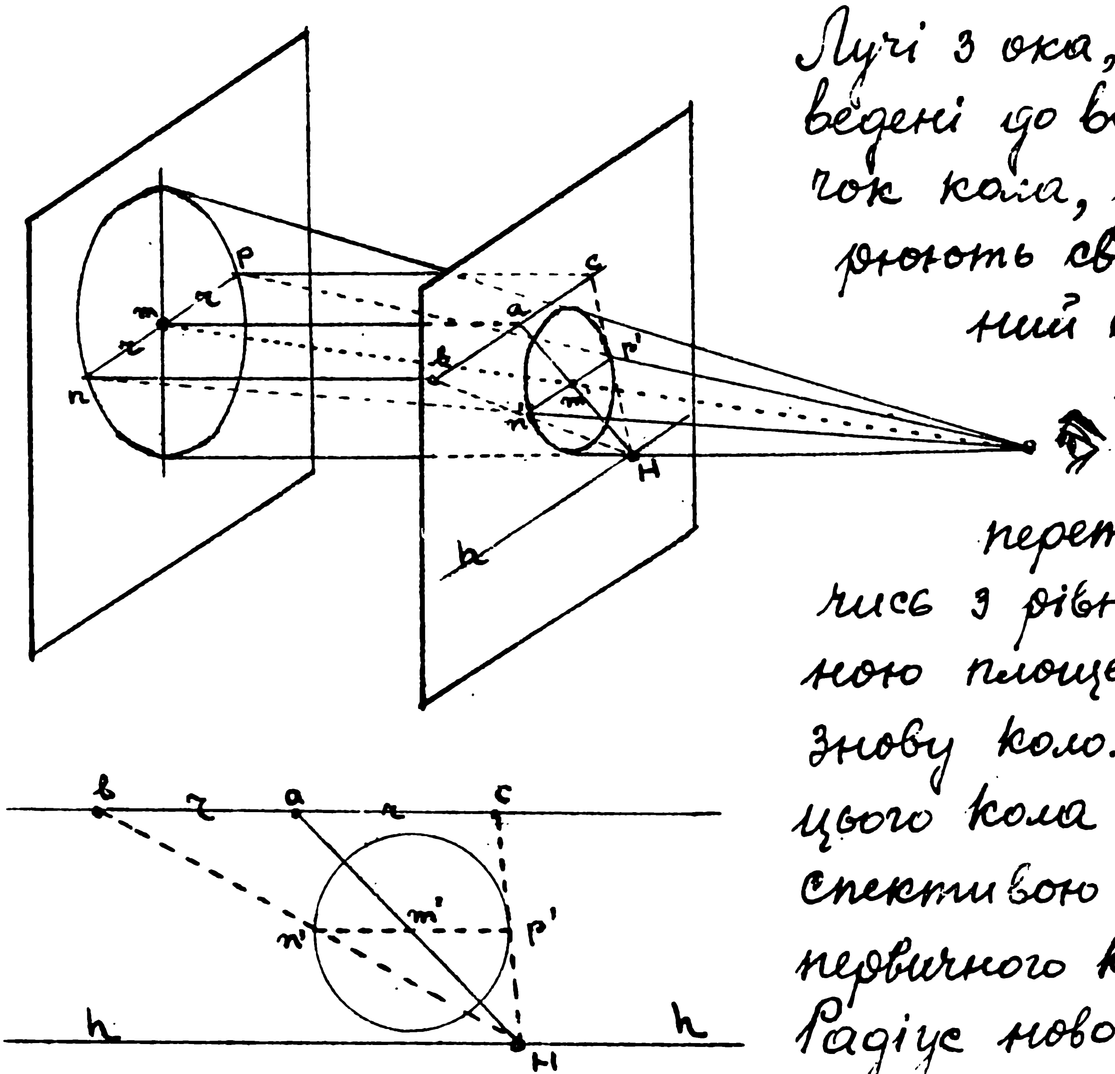
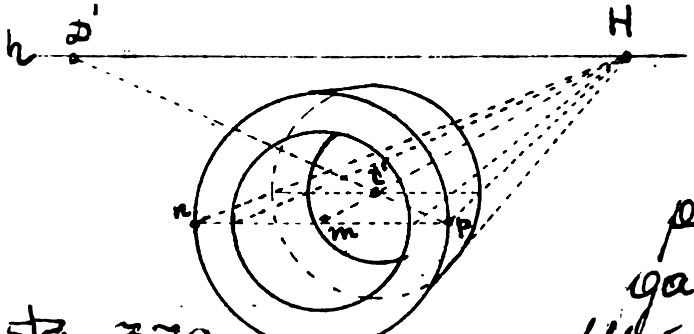


Fig. 378.

Лучі з ока, що проведені до всіх точок кола, утворюють світляний стіжок, котрий, перетинаючись з рівнобіжною площею, дає знову коло. Центр цього кола буде перспективою центру первичного кола. Радіус нового кола буде поменшений тим більше, чим ближче нова сікуча площа до ока.

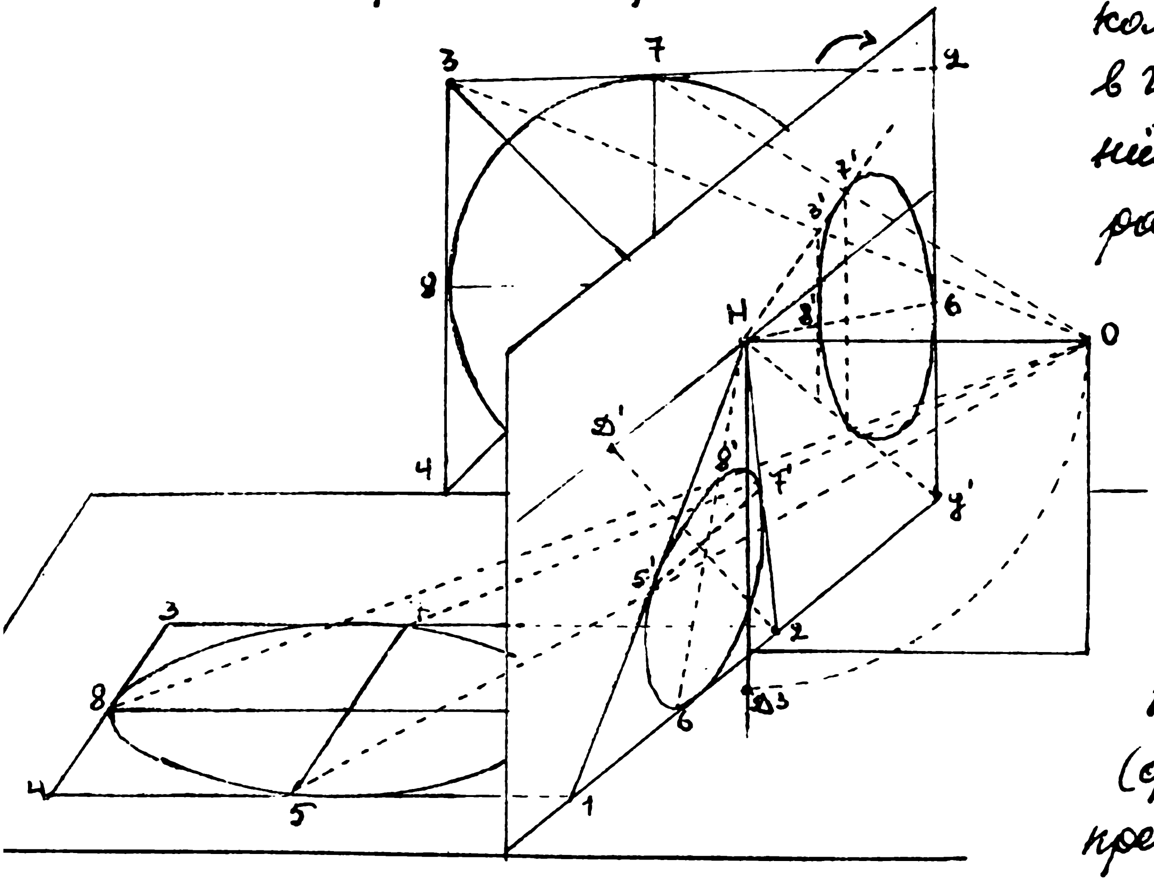
Нехай точка m (центр кола) дана своєю картиною m' та дана точка a слід простої, що проходить через головну точку H та центр m. Від точки a відкладаємо r по обидва боки та сполучаємо точки b та c з головною точкою H. Точки n' та p' пересічення з горізонтальною простою, що проведена через m', дають точки, обмежуючі діаметр кола.

Як приклад цього, викреслимо в перспективі кільцевидну пластинку, котра своїм переднім боком рівнобіжна до картинної площі — нехай m буде центром передніх кол. Проводимо через m рівнобіжну до горізонту та наносимо від точки m mp, котра рівна товщині пластинки. Точку p сполучаємо з D', перетинення mH з нею дає t' центр задніх кол. Щоб одержати їх радіуси, робимо, як раніще: сполучаємо p та n з H, перетинення з горізонталлю, що проходить через t', дає величину радіусів.



Фіг. 379.

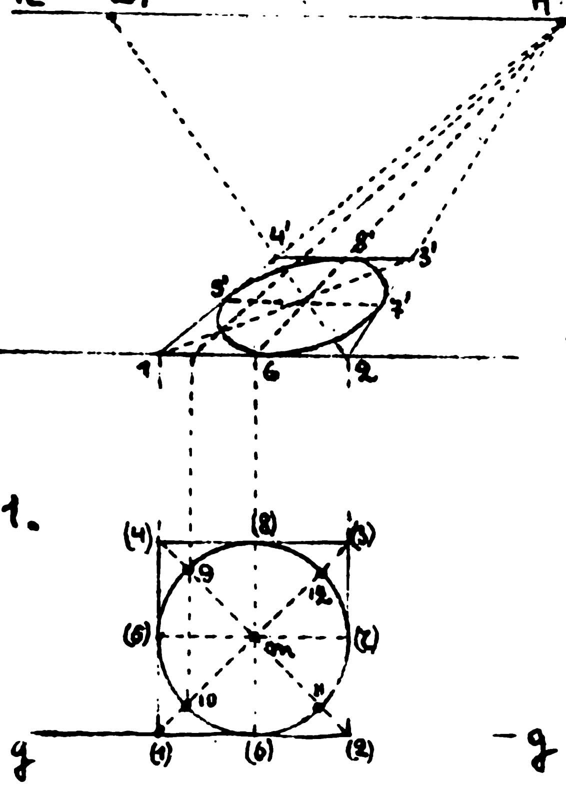
2) Коло лежить в горізонтальній площі. Нехай коло лежить в горізонтальній площі, радіус відомий, треба накреслити в перспективі. Нарис (фіг. 380) представляє росположен-



Фіг. 380.

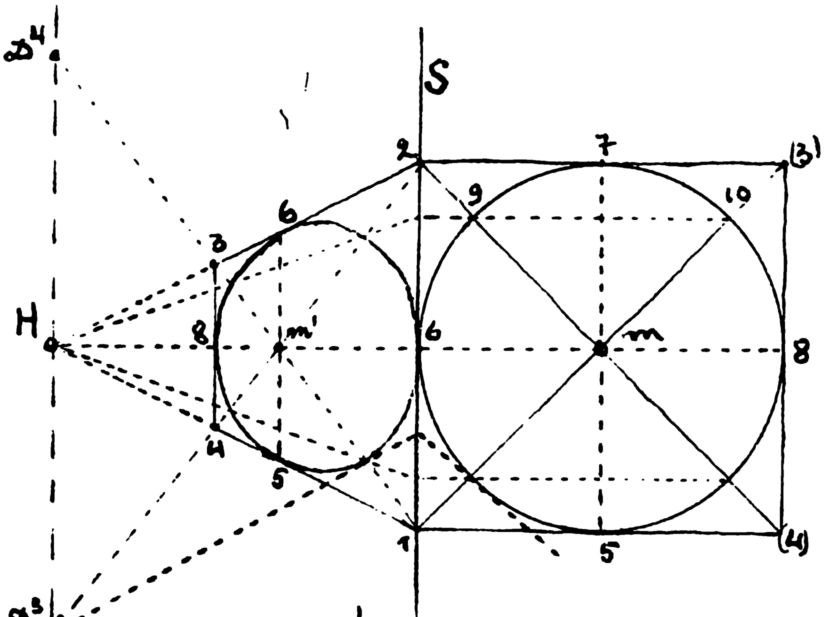
ня в просторі. Описуємо навкруги кола квадрат (1) (2) (3) (4), боки котрого торкаються до кола в точках (5) (6) (7) (8). Картину квадрата легко накреслити. Картини простих (1)(4) (2)(3) сходяться в точці H. Прості з точок (2) (4) ідуть до лівої дистанційної точки d_1; картина простої (6)(8) перетинає просту (2)(4') в точці m' (картина m). Проста (5)(7) іде через m' рівнобіжно до грунтової простої на простих 1.4' та 2.3' дає пункти 5' та 7'. Картина кола буде еліпсом. Треба звернути увагу, що m' не буде центром еліпса. Диоганалі квадрата дають низку точок котрі легко будуються в перспективі

3) Коло лежить в вертикальній площі. Нехай коло лежить в вертикальній площі, котра дана своїм слідом S; радіус кола відомий. Знову описується квадрат 1234, бік 1,2 складений зі слідом S. Повертаємо площу, як показано стрілкою на фіг. 380 аж доки вона складеться з картинною площею. Прості (1)(4) та (2)(3) сходяться в головній точці H. Проводимо диоганаль 1.3,



Фіг. 381.

що проходить через центр $\underline{m}$ кола, то вона нахилена під кутом 45° до ґрунтової площі. Точка D_3 є точка збігу для діоганелей (2)(4), а D_4 – для (1)(3). Коли проведемо, як на нарисі (фіг. 382) прості $1D_4$ та $2D_3$, то вони перетинають картини $2H$ та $1H$ в точках $3'$ та $4'$ (контроль: проста $3'4'$ мусить бути відвісною) Сама точка перетинення цих диоганалей є картина m'. Вертикаль через

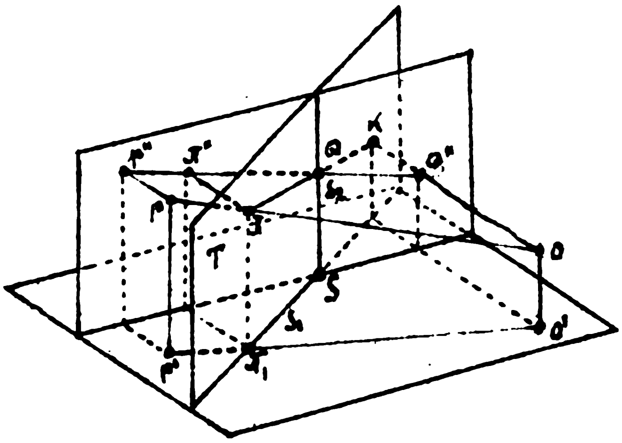


Фіг.382.

m' дає на простих $2H$ та $1H$ точки торкання $5'$ та $7'$. Звичайно проста $6H$ мусить проходити через точку m' та давати точку торкання $8'$. В цьому випадку перспектива кола є еліпс. Точка m' не є центр еліпса. Точки (9)(10) означаються звичайним шляхом.

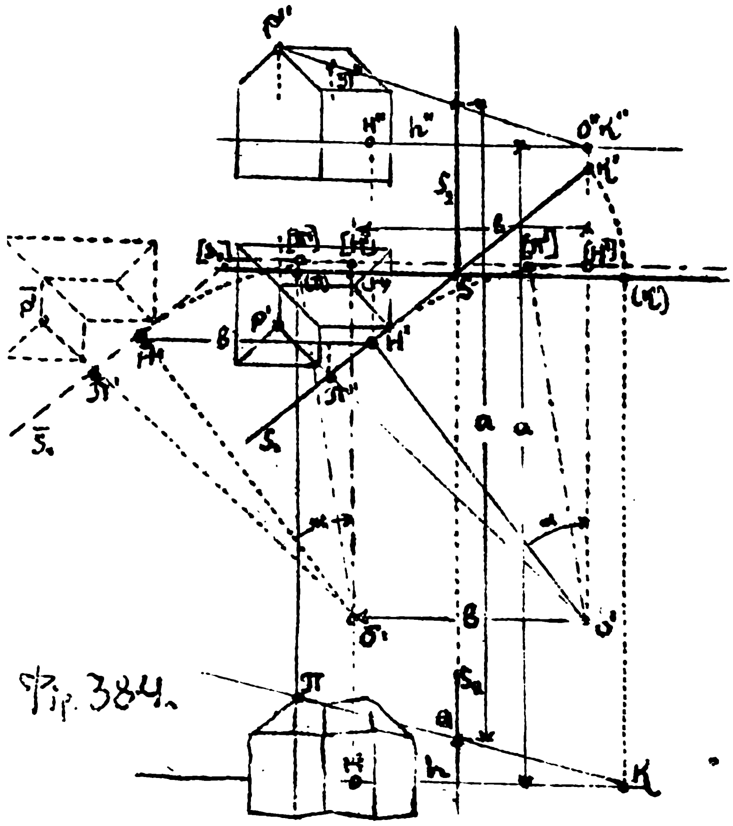
Приладдя для креслення перспективних нарисів Гаука. Велика кількість всяких допоміжних простих, що потребують перспективні нариси для свого утворення, породили думку сконструіровати приладдя для безпосереднього викреслення нарисів. Один з них – Гаука, професора Берлинської Будівничої Академії а після ректора Шарлотенбургского Політехнікума, складений на підставі таких геометричних положень.

В його конструкції має значну ролю так званий зерновий пункт (Kernpunkt). Це грунтова точка рівновіса, що опущений з ока на вертикальну площу. На фіг. 383 представлені горізонтальна, вертикальна та картинна площі. Площа луча OP якогось пункта P, що проектує точку P на вертикальну площу та точка Q перетинення вертикального сліда S_2 з простою O''P''. Проектуюча площа перетинає картинну площу T по простій KQ, котра проходить через перспективу Π точки P. Коли точка P в просторі проходить по якомусь тілу, перспективний нарис котрого мусить бути складений, то утворюється три жмутка світляних лучів: в грунтовій площі лучі O'P' від O', в вертикальній площі лучі O''P'' від O'' та в картинній площі лучі KΠ від K.



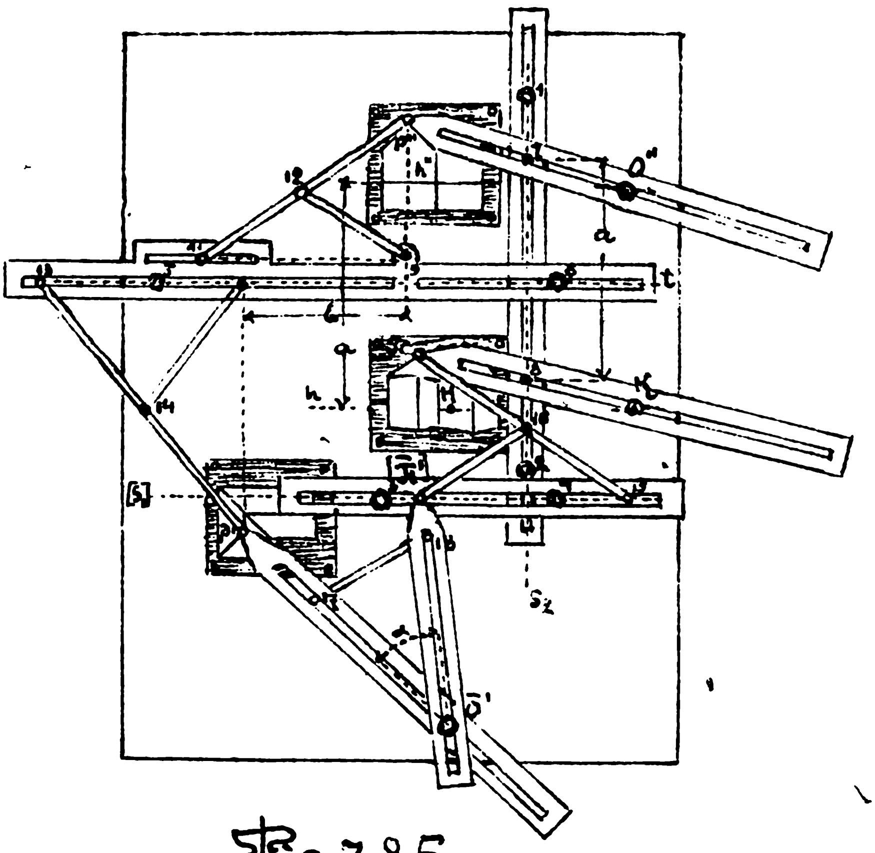
Фіг. 383.

На фіг. 384 дається якийсь простий будинок своєю грунтовою та вертікальною проекціями. Щоб ясніщою була конструкція пристрію, грунтову площу візьмемо низче, як грунт самої хати. Проводимо вертикальну площу через хату так, щоб вісь проекцій проходила через грунтову проекцію. Горізонтальна Π' та вертикальна Π'' перспективні картини Π точки P хати означаються, як звичайно. Тепер картинну площу T навкруги S_2 складаємо з вертикальною площею. При цьому переходить



Фіг. 384.

H' в (H) та Π' в (Π') на вісі проекцій. Щоб викреслюєма перспективна картина не налазила на вертикальну проекцію, пересовуємо значно вниз, ц. т.: горізонт h викреслюється низче рівнобіжно до вертикальної проекції h''. Назвемо це довільно вибране віддалення через a. Головний пункт H намічається на рівновісі до h під (H'). Щоб одержати картину точки Π від P, користуємось зерновою точкою K, що лежить на горізонті. Її вертикальна проекція спадається з точкою O'', а горізонтальна проекція лежить на S_1. Дякуючи повороту навкруги S_2 точка K_1 переходить в (K_1) на вісь проекцій, так що зерновий пункт $\underline{K}$ картинного нарису лежить низче (K') на рівновісі на взятому горізонті h. Точка перетинення до Π з S_2 на фіг. 443 означена через Q. Понеже цей пункт є пункт перетинення $O''P''$ з S_2 і понеже він належить до площі T, то він мусить бути відкладений низче на зниження $\underline{Q}$. Кортина Π точки P, що шукаємо, є точка перетинення рівновіси, що проходить через (Π') з простою KC. Щоб цю конструкцію утворити з допомогою пристрію, замісць повороту навкруги постійної (Standlinie) (або грунтової простої S, робимо навкруги точки S, що лежить на вісі проекцій другий рух: Коли ця постійна проста S повернута навкруги грунтової проекції O' ока так, щоб вона заняла горізонтальне положення $(S_1$, то точки H' та Π' переходять в (H') та (Π') на (S_1), котрі власне ще не лежать на своєму місці, а їх треба пересунути ліворуч на $\underline{b}$ віддалення точки (H') від $O'O''$. Значить ще треба просту $[S_1]$ з точками $[H']$ та $[\Pi']$ пересунути по самій собі ліворуч на $\underline{l}$, щоб точки $[H']$ та $[\Pi']$ прийшли на вірні місця, з котрих рівновіси з точок H та Π дадуть низчий нарис. Це можна зробити так: спочатку всю грунтову проекцію з постійною (грунтовою) простою S, та грунтовою проекцією пересунемо ліворуч на $\underline{b}$. Коли прості $\overline{O}'\overline{H}'$ та $\overline{O}'\overline{\Pi}'$ навкруги $\overline{O}'$ на кут $\alpha = \sphericalangle H'O'O''$ повернимо, то точки $\overline{H}'$ та $\overline{\Pi}'$ перейдуть в точки $[H']$ та (Π') на $[S_1]$, котрі лежать на рівновісі через (H') та (Π'). По даному вертикальному положенню та по пересунутому вліво на $\underline{b}$ горізонтальному положенню одержується картина Π точки P: означаємо перетинення луча $O''P''$ з S_2 в Q та пересовуємо Q на відрізок $\underline{a}$ вниз, після чого через пересунуту точку Q проводимо просту KQ. Далі, повертаємо луч $O'P'$ навкруги O' на кут α, так що цей луч в новому положенню перетинає просту (S_1) в точці (Π'). Таким чином пункт, що шукаємо, Π перетинення KQ з рівновісом, що йде через (Π'). Треба зауважити, що O'', K та O' суть точки постійного положення, $\underline{a}$ - постійний відрізок та α - постійний кут, а саме $\sphericalangle H'O'O''$. Довжина відрізку $\underline{a}$ може бути взята довільно великою, навпаки, довжина $\underline{b}$, на котру грунтова проекція мусить бути пересунута вліво, рівна віддаленню пункта (H') від $O'O''$. Цілком все рівно, як високо або низько положимо грунтову проекцію, бо вона служить тільки для означення рівновісної простої, що проходить через точку (Π'). При перспективному приладдю Гаука грунтова проекція лежить, як

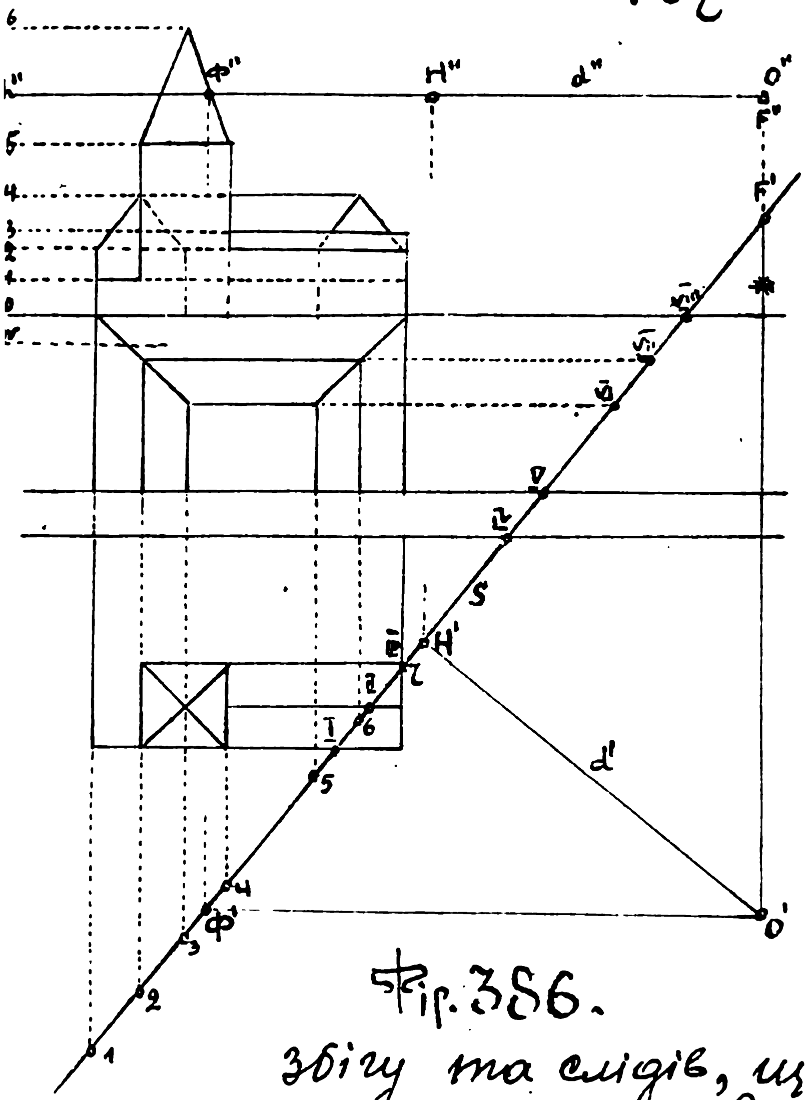


Фіг. 385.

це показано на фіг. 385. нижче, як перспективна картина. На місцях O'', K та O' на дошці, де креслимо, встановлюються штифти та по вертикальному прорізу вздовж двох штифтів 1 та 2 по S_2 рухаються закріплених два штифта 7 та 8 на віддаленні <u>a</u>. Ці два штифта означають точку Q фіг. 384. Кут α є постійний кут між ножками $O'P'$ та $O'(П)^*$ і він може повертатися навкруги закріпленого штифта O'. Далі постійна (грунтова) проста S, в горізонтальне повернуте положення $[S_1]$, представлена штангою, котра при допомозі прорізa та двох постійних точок 3 та 4, що закріплені на дошці. Що торкається до штанг $P''O''$, $ПК$, $\bar{P}'\bar{O}'$ та $(П^*)O'$, то вони так само мають прорізи, так що вони можуть пересовуватись по постійним точкам (штифтам) O'', K, O'. Нарешті, вони цілком вільні в своєму русі. Кут $P'O'П'$ постійно залишається рівним α

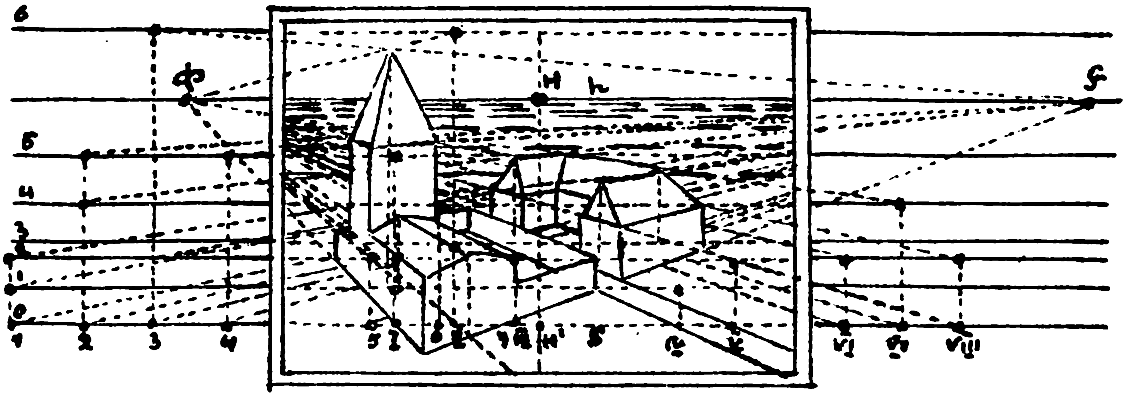
жорсткий (starrer) трикутник з раменами O'17 та O'18, коли штифти в 17 та 18, буде рівнораменним. Маються ще сполучаючі планки Π 16 15 та [Π'] 16. Друга планка наполовину коротча від першої й повертається навкруги середини. Штифти (15) та (16) рухаються вздовж (S_1) та S_2. Трикутник Π (Π') 15 при (Π') прямокутний, так що Π завше лежить на рівновісі над (Π'). P'' та P', рухомі штифти ставляться на відповідними горізонтальними проекціями. Тоді штифт в Π креслить перспективу. Треба ще, щоб рухомі олівці p'' та p' були встановлені на відповідних точках вертикальної та горізонтальних проекцій, ц. т., щоб P' завше були ліворуч від P'' на в. Це досягається вставленням штанги t, котра з допомогою прорізу та двох штифтів 5 та 6 пересовується горізонтально. Парою штанг P'' 12 11, 12 9 та P' 14:13, 14,10, котрі також скріплені, як і пари Π 16 15, 16 (Π') досягається, що місце 9 як раз рівновісно від P'' лежить так само, як P'' від 10. Точки 9 та 10 на штанзі t закріплені кріпко й саме так, що віддалення = в. Дякуючи цьому P' лежить ліворуч на в від P''

Представлення слоями (фіг. 386.). Предмети, що представляються в перспективі, по більшій части, як будинки, складаються з окремих горізонтальних слоїв. Звичайно,



Фіг. 386.

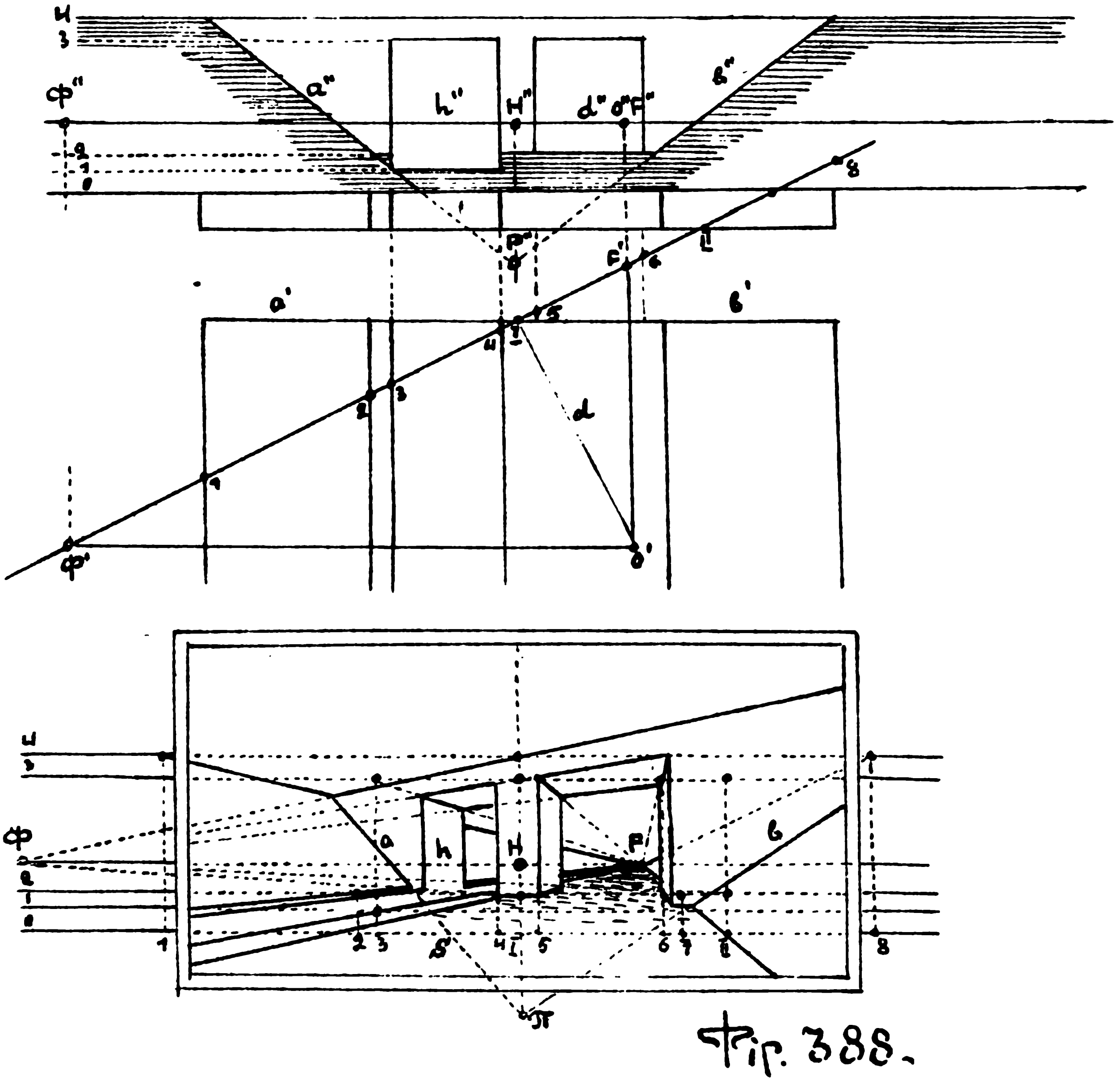
раніще всього означають картину грунтової проекції. Понеже відомо, що картини всіх кутових точок предмета лежать рівновісно над перспективою відповідних перспектив грунтової проекції, то треба тільки означити висоту відповідного канта. Звичайно це роблять при допомозі точок збігу та слідів, що лежать в горізонтальних слоях. Всі горізонтальні площі мають горізонт h, як загальну просту збігу — всі горізонтальні прості предмета мають одні точки збігу як і грунтові проекції. Тому слід простої лежить на горізонтальній площі на такій же висоті над головною (постійною) простою, як сама площа над грунтовою площею. Значить, щоб означити слід простої в якомусь горізонтальному слою, пересовуємо головну (постійну) просту зі слідом простої, що лежить на грунтовій проекції — на потрібну висоту. Означивши грунтову проекцію O' та вертикальну O'' ока O, проводимо через O' головний луч так (OH), щоб його грунтова проекція приходилась приблизно посередині грунтової проекції предмета. Тоді рівновісно до цього напрямку беремо головну (постійну) просту, означимо її через S. Горізонтальні канти будинка мають тільки дві точки збігу F та Ф. Грунтові проекції лежать на S на напрямку лучів, що проведені з точки O' — відповідні вертикальні проекції на вертикальній проекції h'' горізонта. Ті прості грунтової проекції, що отримують той, чи інший напрямок, мають сліди на S, котрі означаються 1, 2.... 7 та I, II.... VIII. Креслимо на нарисі (фіг. 387) постійну (го-



Фіг. 387.

ловну) просту S з точкою H' та горізонталь h з головним пунктом H на такій висоті, як O'' лежить над віссю проекцій. Тоді означимо точки збігу F та Ф, вони лежать праворуч та ліворуч від H на h на віддаленнях H'F' та H'Ф', що беремо з грунтової проекції. Точки збігу 1, 2.... 7 та I, II, III.... VIII переносимо з допомогою паперової стрічки. Сполучивши точки 1, 2, 3.... 7 з точкою збігу F та точки I, II, III.... VIII з точкою збігу Ф, легко викреслити повну перспективну картину ґрунтової проекції. Горізонтальні плості будинка лежать в своїх слоях, котрі означаємо 0, 12… 6. Слой 0 є ґрунтова площа, вищий шостий слой 6 йде через верховинку башні й служить тільки для означення повної перспектив . На таких саме висотах, як слоєві прості (фіг. 386) на вертикальному нарисі мусять бути вони нанесені на нарисі (фіг. 387). Означаємо слої 0, 1…. 6. Слой 1 содержить вищі канти стін двору, точки слідів котрого означаються, коли на S відмічені точки слідів 1, 7, I та IV підняті до висоти першого слоя. Коли ці підняті точки слідів сполучити з F та Φ, одержимо перспективну картину верхнього канту стіни двору. Таким саме чином переходимо від слоя до слоя далі, як це видно на нарисі. Верховинку башні одержимо, коли на нарисі 386. накреслимо рівнобіжні допоміжні прості OF та OΦ, сліди точок котрих рівновісно над слідами точок 3 та II лежать в шостому слою. Негорізонтальні канти нарешті означаються сполученням кутових точок горізонтальних простих. Понеже всі кутові точки на картині мусять лежати на рівновісах до відповідних точок ґрунтової проекції, то є багато можливости проконтролювати вірність нарису.

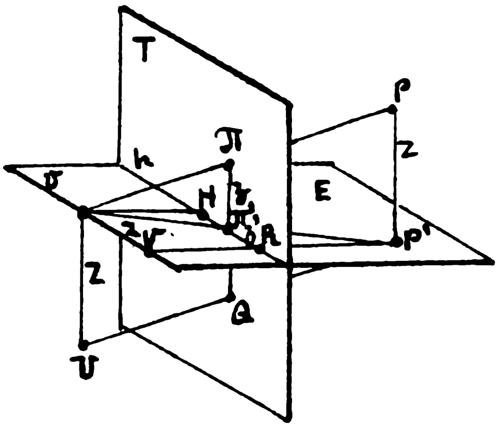
Перспекивне представлення необмежених предметів. Досі креслили перспективні уяви тільки обмежених предметів. Необмежена була тільки горізонтальна ґрунтова площа. Але предмети, як великі земляні насипи або нижка значних будинків в перспективних нарисах так само креслятьса як і звичайні лінії. На нарисі (фіг. 388)



Фіг. 388.

представлений проріз з мостом в своєму горізонтальному та вертикальному виді. Нарис, де дана горізонтальна та вертикальна проекція, дає дві площі відкосів та дві горізонтальних площі, де проходить дорога. Головний луч OH керується на середину мостового бика. Перспективний малюнок складається по засобу слоїв, як було показано раніш.

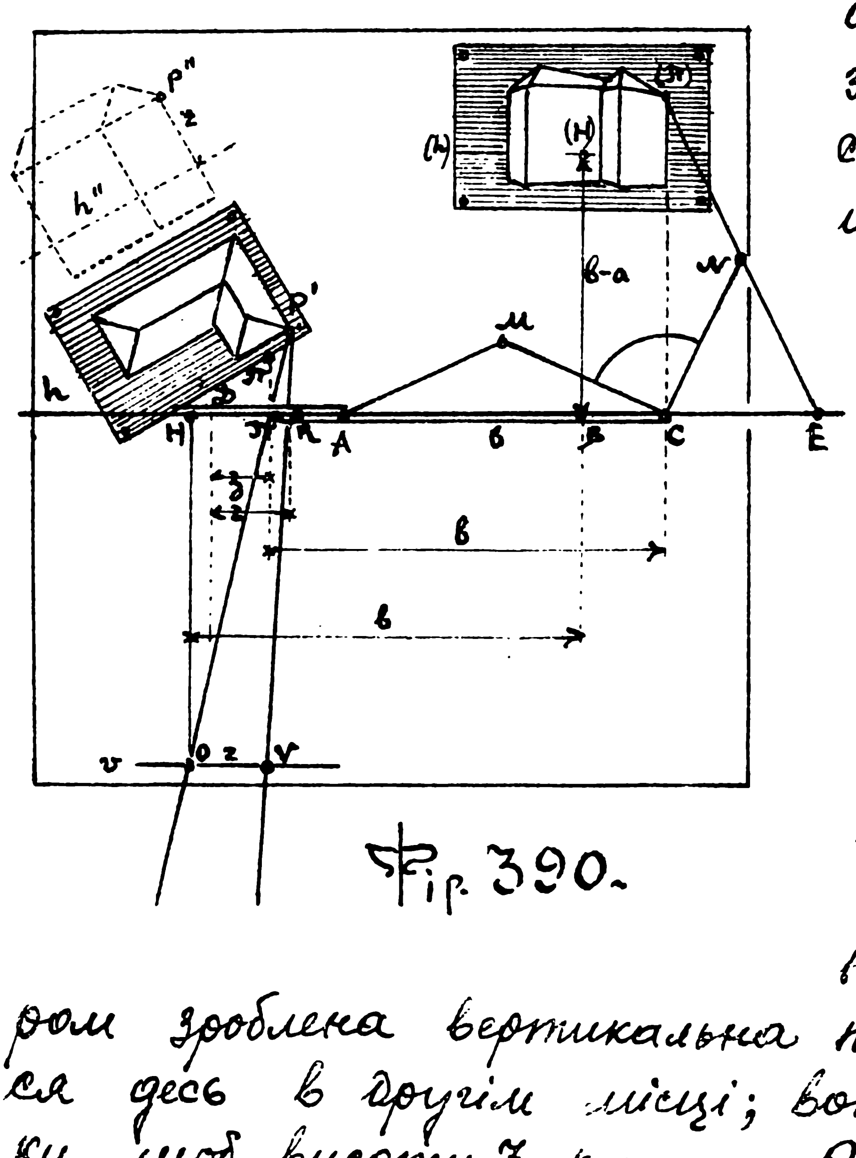
<u>Перспективний пристрій Ріттера.</u> Нарис (фіг. 389) дає горізонтальну площу E, що проходить через око O. Вона перетинає рівновісну площу T в горізонті h. Даний предмет проектується рівновісно на площу E. Нехай точка P буде точкою цього предмета, P' її ортогональна проекція на E та z висота P'P. Перспективна картина Π' від P'



Фір. 389

лежить на h. Перспективна картина Π від P на рівновісі до Π'. Означимо висоту Π над h через ζ, так що $\Pi'\Pi=\zeta$. Означимо тепер пункт U, що лежить на рівновісі під O і саме так низько, як P лежить над E. $UO=z$; UP' перетинає картинну площу T на рівновісі під Π' в точці Q, так що $Q\Pi= z$. Нехай $Q\Pi'$ буде ζ', то висота ζ картини точки Π над горізонтом рівна різниці $z-\zeta'$ між дійсною висотою z та положенням точки Q під горізонтом. Замісць точки U можна взяти точку V, котра лежить в площі E. Наносимо z = OU на простій знику V до V̲ та означаємо перетинання vP' з h в точці R. Понеже Π'R : Ov як Π'P' : OP', ц. т. як QΠ' до OU, то Π'R = z', а значить, висота z картини точки Π над горізонтом рівна диференції z - z' між дійною висотою z та відрізком z' = Π'R.

Поглядя Риттера для креслення перспективи користується горізонтальною площею E (через O), як площею креслення, куди складаєтьcя картинка площа T з перспективним нарисом навкруги горізонта h. На фіг. 390 площу нариса уявляє з себе дошка креслення площа E, що содержить h та горізонт h. Ґрунтовий нарис предмета ставиться в такім положенні за h, рахуючи від O, щоб головний луч OH приходився приблизно в середині предмета. Пунктиром зроблена вертикальна проекція кладеться десь в другім місці; вона потрібна тільки, щоб висоту z пункта P предмета над



Фіг. 390-

горізонтом h нанести. Роздивимось якийсь пункт P предмета та означимо на рівнобіжній до h простій зникy V праворуч від O точку V так, щоб OV=Z, котра буде рівна висоті P над горізонтом (можна взяти з вертикальної проекції). Коли P'O та P'V перетинаються з h в точках П' та R, то П'R дає довжину, що раніще означили через z'. Поневже перспективна картина навкруги h мусить бути складена в площу дошки креслення получаємо картину П, коли поставимо рівновіс в П' до h та зробимо П'П=Z−z'. При такому викресленню перспективи частина нарису попалаб на грунтову проекцію, перспективний нарис був би не наочний, то роблять так, щоб перспективна уява була пересунута вправо до zфи. Проста h в пристрої є шина, котра нерухомо закріпляється на дошці та може пересовуватись по двом саночкам П' та R. Ці саночки сполучені з допомогою штанги з рухомим оливцем P'. Вони, користуючись проорізами, можуть пересовуватись навкруги O та V. O та V закріплюються до шини V штифтами. На шині Я лежить (на фіг. 390 для наочности викреслено тільки наполовину) кріпко сполучена з П' штанга П'C довільно поділеної довжини b, так що коли по h пересовується пункт C по прорізу, то має завше віддалення b.

Далі вздовж h рухається ще третя штанга, котра накрінко сполучена з R і так само з допомогою саночок пересовується по h (вона так само для наочности викреслена наполовину). На цій штанзі ліворуч від R є штифт Д в віддаленні RД=Z. Крім того ця штанга має закріплений штифт A і саме так, що відрізок ДA постійно має довжину a. Навкруги A та C повертають однакової довжини штанги AM та CM. Такої ж самої довжини штанга CN складає з CM прямий кут і в точці C накрінко сполучений. Нарешті навкруги N, як середини, може повертатися штанга E(П), кінець котрої E мусить залишатися на штанзі h. Це робить напрямок CП рівновісний до h та рівний AC. Понеже RД= =Z то П'R=z' П'Д=Z-z'=z= висоті картини пункта П над горізонтам.

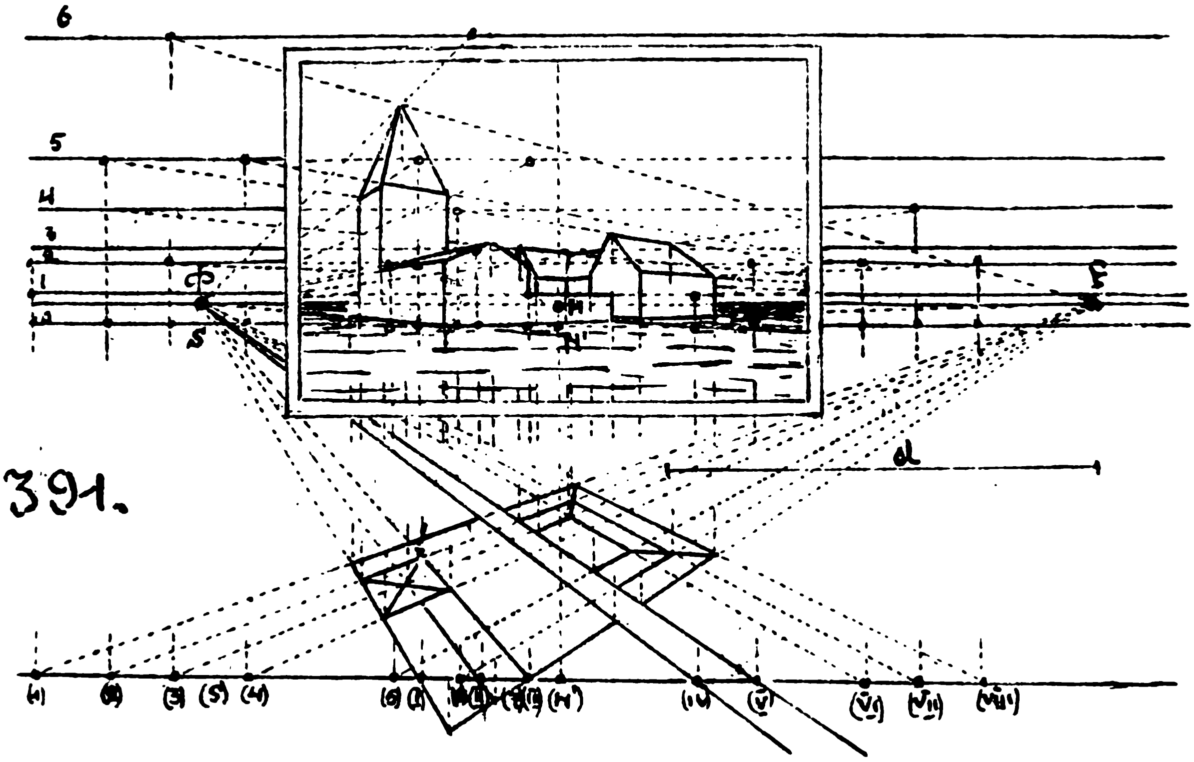
П'A = a-z, значить AC= b-a+z та CП=b-a+z. Понеже П'П=z, сполучення штанг так впливає, що П пересовується перш всього праворуч на b та другий відрізок b-a піднімається догори, так що під оливцем b(П) одержується перспективна картина. Горізонт (h) перспективи, що креслиться, лежить на (b-a) вище h та головна точка (H) на b вправо від H.

Коли рухомий оливець P' окреслює грунтову проекцію слоя, що лежить на висоті Z над горізонтом, то оливець (П) викреслює перспективу цього слоя. Бажається викреслити якийсь другий горізонтальний слой, то треба V, як і D, поставити на відповідну висоту Z, при чім OV = RD = Z. Для цього на штангах V та AD маються паперові ленточки на котрих цифрами означають окремі висоти слоїв, так що встановка для ріжних слоєвих висот робиться дуже легкою.

Коли викреслена ціла низка окремих слоїв, закінчують картину тими простими, що сполучають точки ріжних слоїв.

Пониження грунтової проекції. Хиба перспективних слоєвих креслень — це узкість перспективної картини грунтової проекції, особливо, коли висота ока над грунтовою площею, ц.т. висота горізонту h над постійною (грунтовою) простою S не велика. Тоді перетинення простих грунтової проекції складаються під такими гострими кутами, що не можливо вірно їх означити.
На фіг. 387 цього не помічалось, бо віддалення ока було взяте досить далеким. Але по суті всі будинки ~~[illegible]~~ та інші предмети мусять бути розглядаємі именно з тої висоти, котра відповідає природній висоті людського ока. Тоді треба брати O'', як помічено на фіг. 386 на тій висоті, де поставлена зірка. Але понеже полоска

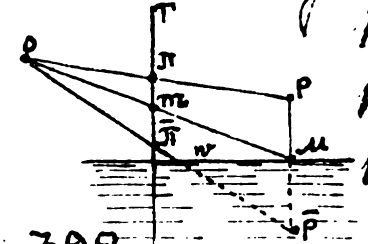
між S та h дуже вузька, то грунтову площу заміняють другою горізонтальною площею, що лежить значно нижче. Засіб пониження грунтової проекції, що називають льоховою конструкцією, представлений на фіг. 391. Вона базується на грунтовій та вертикальній проекції, як це дає фіг. 386



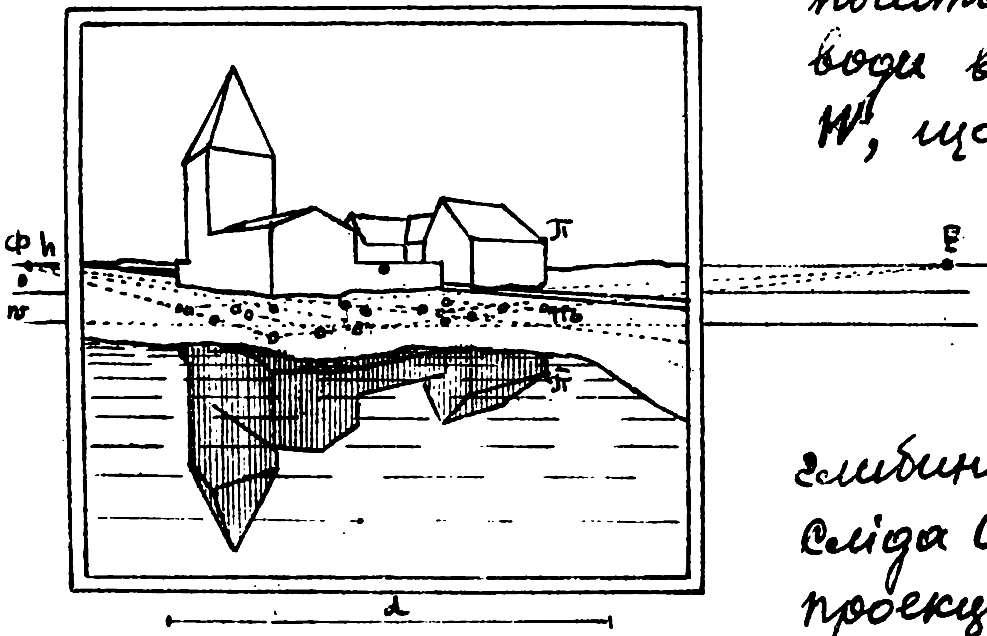
Фіг. 391.

з тією тільки ріжницею, що O'' поставлене на місці, означеному зіркою. Замісць постійної (грунтової) простої S, котра лежить тільки трохи нижче горізонта h, вживається друга, що лежить значно нижче (S) з відміткою (H') рівновісно під H'. Таким чином утворюється в площі, що лежить нижче, у всіх частинах наочна грунтова проекція, на котрій з допомогою засоба слідів утворюється картина будинку. Сліди слоїв означені через 0, 1, 2.... 6 та горізонті h мають на нарисі (фіг.391) тіж самі віддалення одні від другого, як і на фіг. 387. Треба признати, що перспектива нарису 391 більш наочна, ніж фіг. 387

Рефлекс в воді. При ландшафтах часто трапляється, що предмети на поверхні води рефлектують. Рефлекс $\bar{P}$ точки P лежить на рівновісі з P до поверхні води й саме так глибоко від поверхні, оскільки P лежить над водою над точкою M (фіг. 392). Понеже $PM\bar{P}$ до рівновісної картинної площі рівнобіжна, то картина m (середини M від $P\bar{P}$) дає середину $\Pi\bar{\Pi}$. При рефлексі якоїсь перспективи будинку рахуємо (фіг. 393) початок глибини води від простої W, що лежить нижче слоя O. На фіг. 393 накреслена W на тійже глибині під простою сліда O. Ґрунтова проекція викреслена в цьому слою з простої сліда W. Тоді виявляються точки, означені через m, по напрямку котрих мусять рефлектувати точки $\bar{\Pi}$.



Фіг. 392.



Фіг. 393.

Дзеркало води лежить нижче ніж слой 0; тому здається, що будинок має нахил до води. Він виявляється не як простий , а простірний. Тому, як грунтові прості будинку, так само і горізонт можуть бути замінені хвилевими простими. Край води може бути викреслений по бажанню.

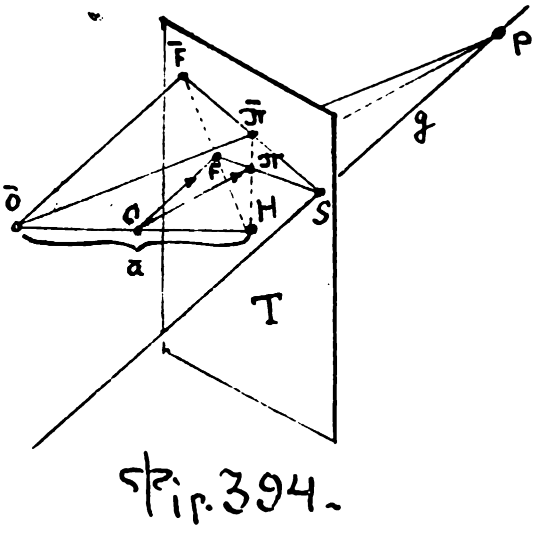
Побільшення картини. Креслення перспективних нарисів з допомогою слоєвих перетинень завше трудне, коли точки слідів або точки збігу лежать далеко.

В таких випадках означення по точках значно допомагає. Побільшости тільки де-які прості означаються через сліди, між тим, як з точки збігу завше виходить ціла низка простих.

В випадку, коли точка сліда не може бути осягнута, пропонується з допомогою метода точок означити якусь точку, через котру проходить проста, яку потрібно викреслити; її й вживають замісць точки сліда, але взагалі такий метод дуже важкий. Як би з такої „неосягнутої точки“ збігу роздивлятись таку просту, котра майже рівнобіжна до картинної простої, то точки збігу стануть досягаємі, коли дистанція стане значно меншою. Тому дистанцію звичайно беруть меньшою, ніж ясне віддалення бачіння. Щоб позбавитись від трудностей, коли точка збігу недосягаема, можна дистанцію вибрати по можливости малою та перспективну картину побільшити. Иноді й другі обставини вимагають побільшення перспективної картини.

Перспектива служить головним чином для малярських цілей для більш наочного представлення великих предметів, котрі завше даються в маленьких маштабах в горізонтальній та вертикальній проекціях. Таким чином перспективне уявлення, складене на підставі горізонтальної та вертикальної проекції не є по-суті самим предметом, а тільки його моделлю. Коли цю модель побільшувати аж до дійсної величини предмета, при чім точку О ока вживати, як точку подібности, ц. т. всі довжини від О до точок моделі в тім же маштабі побільшувати, то кожна точка залишається на своєму первістному лучу. Модель перетворилася в самий предмет. Предмет, дякуючи своєму побільшенню, пересовується дуже далеко а саме перспективне утворення на площі, відносно близької до ока, дає маленьку картину. Ця обставина вимагає утворити картину великого розміру з великою дистанцією. Ще з початку курса казали що подібне побільшення одержується, коли просто картинну площу Т змінити на на другу до неї рівнобіжну П з більшою дистанцією d. Маштаб побільшення буде д:d, коли д було первісною дистанцією. Коли S є точка сліду якоїсь простої відносно картинної площі T, то після побільшення з S одержуємо точку S' точку простої на новій площі П, але ця точка S' не буде слідом простої на новій площі П. Понеже точка сліда грає дуже поважну ролю при методах утворення перспективних нарисів, то це є хиба такого засоба побільшення. Треба вжити такого засоба, щоб кожна точка сліда знову була точкою сліда. Це утвориться, коли ввесь простір побільшимо в якомусь маштабі. Тоді в цьому маштабі побільшиться не тільки даний предмет, але всі його віддалення від картинної площі, дистанція та всі перспективні частини предмета. При цьому вживають за центр побільшення не око, а головну точку H. Коли стара дистанція д переходить в нову d, то маштаб побільшення д:d. Якась точка предмета P пересовується дякуючи побільшенню на нове місце $\bar{P}$ на лучі HP так що $H\bar{P}:HP=d:д$. Теж саме відноситься до картини П від P. Понеже H належить до картинної площі, вона залишається при цьому побільшенню на місці, але кожна картина точки П заміняється новою точкою $\bar{П}$, котра на простій HП лежить так, що НП : Н$\overline{П}$ = d : д. На місце старого ока з'являється нове око $\bar{O}$ на старому головному лучу $\bar{O}H = d$. Таким чином одержується перспективна картина побільшена в маштабі: d : д відповідно далі від картинної площі предмета, котрий є видимий з ока, котре лежить на головному лучу на більшій дистанції d — коли стару картину з головної точки H, як точки подібности, побільшили в маштабі д : d. Всі точки та прості картини утримують при цьому їх старе значіння природно відносно побільшеного предмета та більш віддаленного ока. Особливо кожна точка сліду S переходить в нову точку сліду S' та кожна точка збігу F в нову точку збігу F'. Так само кожна проста сліда S переходить в нову просту сліда S' та кожна проста збігу — в нову просту збігу.

<u>Побільшення дистанції.</u> Око O пересовується по напряму головного луча OH в нове положення $\bar{O}$ (фіг.394), ц. т. дистанція $d = OH$ міняється на нову побільшену $Ɗ = \bar{O}H$.

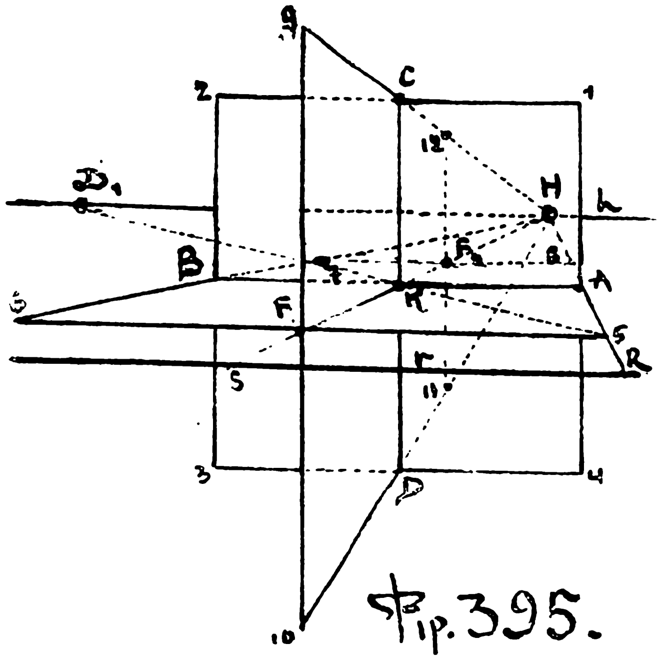


Фіг.394.

Картина предмету залишається стара так само, як і картинна площа T на старому місці. Картина, що бачимо з нового ока $\bar{O}$ не подібна до картини, що бачили зі старого ока. Понеже картинна площа залишається на старому місці, кожна точка сл да має значіння сліда при новому положенню ока. Коли бажається одержати нову картину Π точки P з старої Π, то треба ще викреслити якусь просту g, щ проходить через точку P, з слідом S та точкою збігу F, бо точка P своєю картиною Π ще цілком в просторі не означається. Нове положення точки збігу $\bar{F}$ простої g (фіг. 394) є перетинення картинної площі з рівнобіжною до g через $\bar{O}$. Тому $\bar{F}$ лежить на простій HF та $H\bar{F}:H$ $=\bar{d}:d$. Новий луч бачіння $\bar{O}P$ на P означає з старим лучем OP площу, котра содержить $\bar{O}O$ та головний пункт H. Тому Π та $\bar{\Pi}$ на одній простій, що йде через H. Значить $\bar{\Pi}$ одержується, як перетинення $S\bar{F}$ з $H\Pi$.

Одночасове побільшення картини та дистанції. Побільшуємо дистанцію d в m раз, ц.т. кожна точка збігу та кожна проста збігу на m раз відсунеться від H. Так одержану нову картину побільшуємо, при чім всі віддалення від H побільшуються в n раз. При цьому звичайно й дистанція побільшується в n раз, значить, вона побільшиться всього в $m\times n$ раз. Що торкається до самого предмета, то при першому побільшеню він залишається без зміни, при другому же він побільшується в $\underline{n}$ раз. Нарешті одержана картина є картина n-раз лінейно побільшена й в $\underline{n}$ раз усунута фігура від картинної площі при $n \times m$ побільшеній дистанції. Кожна точка збігу лежить на $m \times n$ віддаленні від H. Віддалення між слоями при слоєвому методі побільшиться в $\underline{n}$ раз. Для приклада беремо нарис (фіг. 387). картину предмета, дистанцію робимо вдвічі більшою ($m = 2$) і тоді одержані дані лінейно побільшуємо в 2 ($n = 2$). Тоді картина буде з дистанцією в 4 рази більшою. На місце точок збігу F та $Ф$ (фіг. 387) означаються в четирі рази далі пункти від точки H. Тому на новому нарисі означаємо точки F та $Ф$ $F/4$ та $Ф/4$, котрі грають тільки допоміжну ролю. Віддалення слоїв 0, 1, 2.... в один від одного та від горізонта h нариса на новому нарисі побільшуються вдвоє; це же саме відноситься до віддалення на грунтовій простій S точок слідів $\underline{I}$ до 7 та $\underline{I}$ до $\overline{\underline{VII}}$ від точки H'. Понеже точки треба сполучити з недосяжними точками збігу F та $Ф$ треба сполучити, то вживаємо грунтову просту $S\frac{1}{4}$, віддалення котрої від H має тільки чверть HH' та кресимо на ній точки (1)....(7) та ($\overline{\underline{I}}$)....($\overline{\underline{VII}}$) слідів на тих самих віддаленнях від ознаку, як на головній простій (фіг.387), так що відповідні точки на S¼ та S лежать на одному лучу, що проходить через H. Напр., замісць того, щоб точку сліда I сполучати з недосягаємою точкою збіга Ф, проводимо просту від (I) до допоміжної точки збігу Ф¼, рівнобіжно до неї є проста, що шукаємо через I. Таким чином можна викреслити всі прості, що йдуть від точок слідів і так складається ґрунтова проєкція. Слої означаються так само. Картина, як казалось, не є цілком подібна до фіг.387

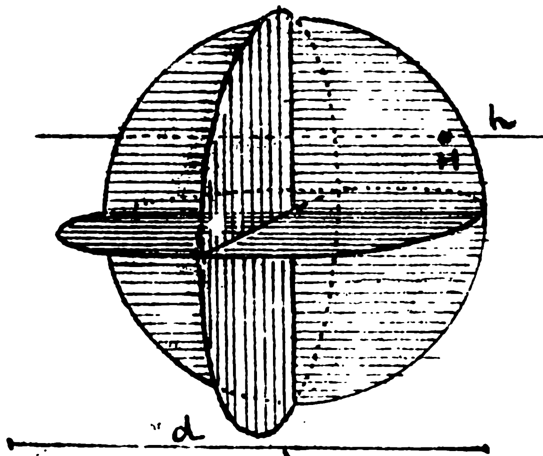
Перспектива кулі. Раніш усього покажемо, як викреслювати головні площі кулі, одна з котрих рівновісна до картинної площі, а друга площа горізонтальна. Коли опишемо квадрати на великих колах головних січень кулі, то боки цих квадратів одні до картинної площі рівнобіжні, другі - горізонтальні а треті - рівновісні. Кожні два квадрата мають загальну середню просту. Креслимо раніш всього ці квадрати (фіг 395) Нехай буде дана горізонтальна проста з простою сліда S та на ній точка K, як загальна точка всіх трьох квадратів. Далі, дан радіус кулі r. Боки квадрата в дійсности мусять бути $2r$. Горізонтальна середня проста AB квадрата 1234, котрий в перспективі так само виявляться, як квадрат, проходить через K та рівнобіжна



Фіг.395.

до простої сандів S. Її кінець A одержимо, коли відложимо r = SR від точки S по S та точку R сполучимо з H. Тоді горнтальний квадрат 5678 виявляється дуже просто, бо диогональ 57 мусить проходити через точку D₁. Кінці простих, що рівновисні до картинної площі, обмежуються простими, що йдуть до головної точки H, означаємо через F та F₁. Кант 9-10 з кантом 5-6 лежать в одній площі, рівнобіжній до картинної площі. Те же саме відноситься й до кантів 11-12 та 7-8. Тому в картині виявляється 9-10 такої же довжини, як 7-8. В квадраті 1234 вписане коло виявляється знову колом. Кола, що вписані в квадрати 5678 та 9101112 виявляються, як еліпси. Понеже ці квадрати перетворюються в трапеції, то кон'югіртні диаметри означаються звичайним засобом. На нарисі (фіг.396) представлені три головних січення кулі. Що центр кулі не складається з центром еліпсів, це цілком ясно.

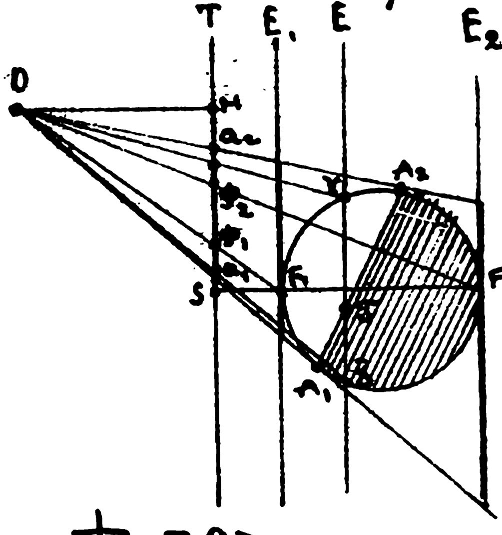
Перспективна картина кулі не завше має обрис (Umriss), але тільки тоді, коли мають ся лучі бачіння, що торкаються до кулі. Коли



Фіг. 396.

око лежить в середині кулі, обрису не має. Картини точок на кулі заповнюють в цім разі всю картинну площу. Коли око лежить на кулі, то всі видимі точки заповнюють взагалі половину картинної площі, особливо тоді, коли тангенціальна площа до кулі в точці О не буде рівнобіжна до картинної площі. Куля знаходиться по одному боці цієї тангенціальної площі, тому перетинають лучі бачіння по видимих точках площу Т у всіх тих точках, котрі лежать по одному боці простої слідів тангенціальної площі. В цьому випадку складає ця проста слідів обрис кулі. В окремому випадку, коли око знаходиться на поверхні кулі та тангенціальна площа рівнобіжна до картинної площі Т, картини знову заповнюють усю площу Т; як обрис, тоді є безмежно ідалека проста картин. площі. Коли око знаходиться зовні та перед кулею, то картина кулі буде кривий обрис, бо тоді лучі бачіння, що торкаються до кулі, утворюють стіжок, котрого вісь є проста від О до центра кулі К. Стіжок торкається кулі по колу. Обрис кулі є перетинення тангенціального стіжка з картинною площею Т, ц.т. стіжкове січення.

Це січення стіжка є картина кола, по котрому тангенціяльний стіжок торкається до кулі. В залежности від того, чи коло перетинає, торкається або цілком уника площі знику, ц. т., коли мається один, два або немає лучів бачіння, що торкаються до кулі та рівнобіжні до картинної площі T; обрис буде або еліпсом, або параболою, або гіперболою. Можна сказати: обрис (Umriß) кулі буде еліпсом, параболою або гіперболою в залежности від того, чи куля усиляється від площі знику, торкається або перетинає її — при умові, що око зовні та попереду кулі. Раніще ніж перейти до дійсного викреслення перспективи кулі, треба зробити де-які зауваження, що до прикмет площі, що проходить через головний луч OH та центр кулі K. Нехай на нарисі (фіг. 397) вона буде площею креслення. Уявимо собі площу T рівнобіжною до площі креслення і кулю, котра представлена великим колом, наполовину лежить вище, наполовину нижче площі фігури. Лучі бачіння, котрі торкаються до кулі OA_1 та OA_2 є утворюючі світляного стіжка, котрий торкається до кулі. Мається дві площі E_1 та E_2 рівнобіжних до T, котрі торкають-



Фіг. 397.

ся до кулі в кінцях диаметру F_1 та F_2. Ці площі перетинають тангенціальний стіжок по стіжковим січенням, котрі з січенням площі T з тангенціальним стіжком – подібні й подібним засобом розкладені, коли око O є точкою подібности. Точки F_1 та F_2 площ E_1 та E_2 суть фокуси січень. Таким чином Φ_1 та Φ_2 картини точок F_1 та F_2 фокусів стіжкового січення. Проста F_1F_2 має свою точкою збігу головний пункт H. Головна вісь обрису січення кулі керується на головний пункт. Утворюючі прості (Mantellinien) OA_1 та OA_2 перетинають площу T. просту $\Phi_1\Phi_2$ в a_1, a_2, котрі суть картини A_1 та A_2. Вони суть верховинки обрису стіжковидного січення. Понеже стіжковидне січення цілком визначається, коли дані головна вісь a_1a_2 та фокуси Φ_1 та Φ_2, можливо викреслити обрис кулі, як тільки найдемо картини точок A_1, A_2 та F_1 F_2. При визначенні точок Φ_1 та Φ_2 користуються точкою сліда S простої F_1F_2 бо Φ_1 та Φ_2 лежать на SH. Якась площа E, що перетинає кулю та рівнобіжна до картинної площі T, дає коло, котре на фиг. 397 представлено диаметром XY. Це коло утворюється, як дійсне коло. Коли куля не світла, то це коло не завше видиме. Видима частина кулі обмежена тангенціальним стіжком з вершиною O, ц.т. вона буде обмежена колом, площа котрого вздовж диаметра A_1A_2 рівнобіжна до площі креслення (фіг.397). Це коло з колом, диаметр котрого XY, має дві спільні точки. Вони лежать на рівновісі, котрий спускаємо з перетинення T від A_1A_2 та XY на площу креслення фігури. Так само виявляється картина коло кулі диаметра XY в двох місцях на поверхні кулі. Такі площі, як E_1, котрі A_1A_2 не перетинають між A_1 та A_2 хоч і дають в січенні з кулею коло, але картина його не входить до обрису. Але всі такі кола в площах, рівнобіжних до картинної площі дають кола, центри котрих являються картиною середини відрізка XY між $Ф_1$ та $Ф_2$, ц.т. на головній вісі обгортуючого стіжка. Як тільки картина кола, як це бачимо на прикладі кола XY, доходить до обрису кулі, то точки, що він має загальні з обрисом, лежать симетрично до головної вісі обгортуючого стіжка. Понже картина кола не може виходити за обрис, то на них мусять бути точки торкання.

Нарис (фіг.398) в головному повторює дані фіг. 397. Очертання стіжкового січення, котрого головна вісь a_1a_2 та площа T_1 уявимо складеним навкруги вісі a_1a_2 з площею нарису. Щоб не накупчувати нариса, складення накреслено _трохи_ праворуч. Картини X та Y точок $\underline{X}$ та $\underline{Y}$ лежать на головній вісі a_1a_2 та обмежують диаметр

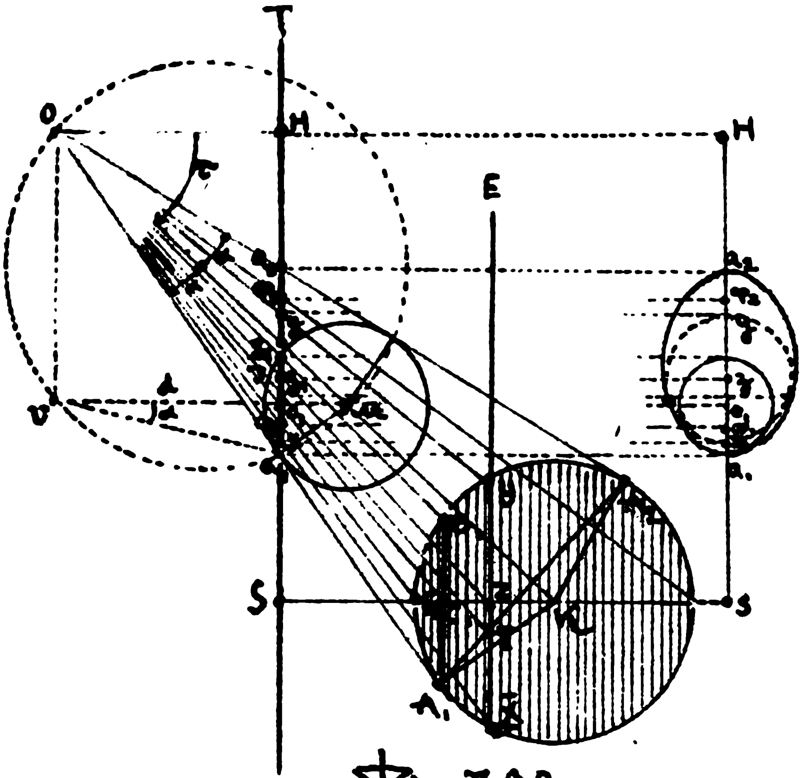
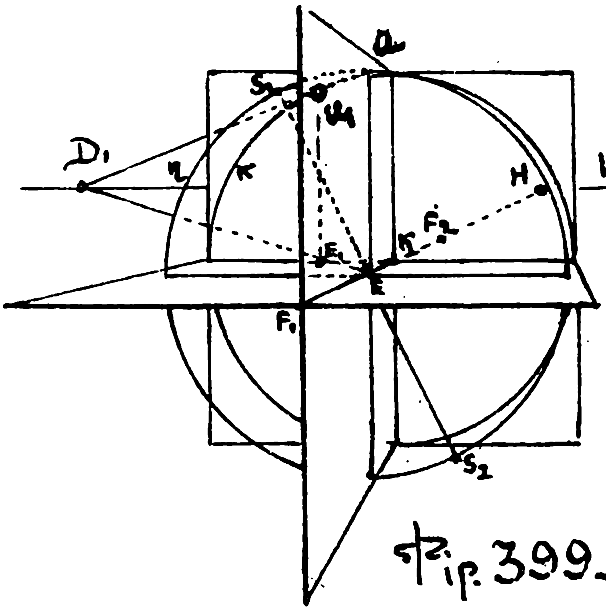


Fig. 398.

картини кола, котре в двох, симетричних відносно головної осі, точках торкається до очертання. Коли пересунемо площу E по напрямку T рівнобіжно, то картина кола перетинення стане меншою. Значить, обидві ці точки зближуються по напрямку верховинки a_1. Вони складаються з точкою a_1 коли пересунення площі досягне того, що вона буде проходити через A_1, бо тоді точка перетинення XY з A_1A_2 пересунеться в A_1. Тоді картина кола буде колом кривизни в точці a_1 очертання. Коли XY переходить в рівнобіжну хорду A_1B_1, середина Z від XY переходить в C_1. Таким чином картина C_1' від C_1 є центр кола кривизни очертання в точці a_1. Радіус цього кола кривизни може бути так виражений. Щоб його найти, станемо в a_1 рівновіс до Oa_1. Він перетинає OK в M. Коло навкруги M, що проходить через точку a_1, торкається до OA_1 та OA_2 і таким чином з великим колом кулі подібний й подібно розкладений. (O є точка подібности)

При цій подібности точка A_1 відповідає точці a_1 та хорда A_1B_1 хорді a_1b_1, ц.т. коло навкруги M мусить проходити через картину b_1 від B_1. Так само C_1' є грунт рівновіса M на a_1b_1. Проста MC_1' перетинається з рівнобіжною до a_1b_1 в точці U; віддалення UC_1' = дистанції d. Понеже кути Ma_1O та MUO прямі, то a_1 та U лежать на колі з диаметром MO. В цьому колі $\angle MOa_1$ та $\angle MUa_1$ кути переферії над однією й тією же хордою Ma_1 і, значить, рівні. Називаємо $\angle MOa_1 = \alpha$ половиною лицевого кута кулі; це є половина кута, під котрим бачимо кулю з O. З прямокутного трикутника $a_1C_1'U$ одержуємо, що радіус кола кривизни в точці a_1 очертання рівний $d\,tg\,\alpha$. Таким чином цей радіус залежить не тільки від дистанції d, але ще й від лицевого кута 2α, ц.т. всі кулі, котрі бачимо з точки O під одним і тим же лицевим кутом, складаються так, що кола кривизни головної верховинки завше рівні.

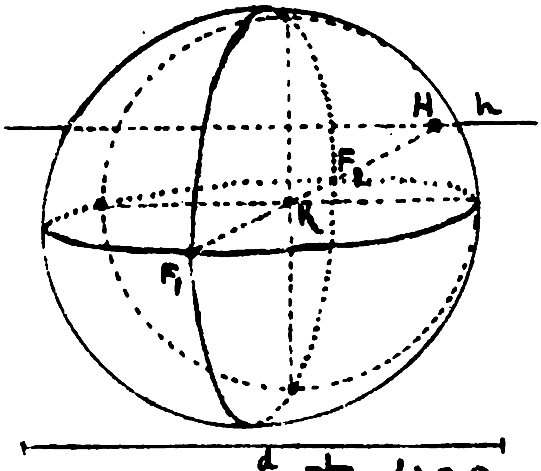
Покажимо, як викреслюється все очертання перспективи кулі, про що вже була річ і де-які вказівки були зроблені на фіг.396 На фіг.399 бачимо три квадрати, що конструірувались на фіг.395 та коло K, котре вписане в квадрат, рівнобіжний до картинної площі. Зредні точки F_1 та F_2 до картинної площі рівнобіжних кантів горізон-



Фіг. 399.

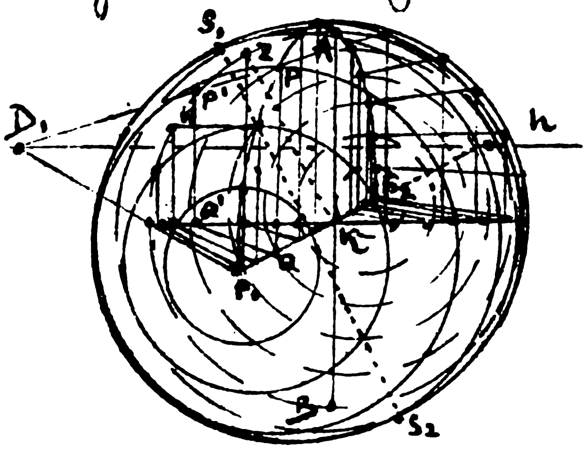
тального квадрата — суть огнища (фокуси) еліпса очертання, котрий має рівнобіжний до картинної площі диаметр з точкою збігу H і проходить через серединну точку K. Відомі фокуси и як тільки означимо якусь вісь, то можливо буде викреслити самий еліпс. Побічку (Nebenaxe) вісь находимо так: вже казалось, що кожне коло кулі, що лежить в площі рівнобіжній до картинної площі, виявляється, як коло, центр котрого лежить на головній вісі й картини кола, коли воно торкається очертання, має два торкання симетричних відносно головної вісі. Найбільше між всіма вписаними колами є те, центр котрого лежить на головній вісі, має свій центр в центрі еліпса та торкається до еліпса в верховинці малої вісі. Центр еліпса є середина E відрізка F_1F_2 на фіг.   , значить на картині торкається коло кулі X, котре лежить в площі, рівнобіжній до картинної площі та проходячій через E, еліпса очертання через верховинки малої вісі.

Радіус цього кола X може бути легко означений. Проводимо з дистанції D, просту DE, то вона перетинає горізонтальний диаметр кола K в точці E_1 і понеже D_1E в дійсности складає з картинною площею кут 45°, в дійсности E_1 віддалена від K настільки ж, як і E. Поставлений рівновіс в E' на горізонтальному диаметрі кола K — E_1U' рівний радіусу кола, що шукали. Коли означимо точку перетинення D'U' з рівновісом в E то EU є радіус кола X в перспективі, бо D_1U до D_1E в дійсности рівнобіжні. Значить коло x торкається до еліпса очертання в верховинках малої вісі, кінці котрих S_1, S_2 лежать на диаметрі рівновісному до EH. Таким чином, половина головної вісі еліпса очертання є F_1S_1. Можливо викреслити еліпс очертання, як це показано на фіг. 400



Фіг. 400.

Представлення кулі низкою кол, що рівнобіжні до картинної площі. Так само, як означали радіус до картинної площі рівнобіжного кола з центром E — можливо означити радіус кожного кола, що рівнобіжне до картинної площі. Тоді картина кулі представляється так: до картинної площі рівнобіжне коло кулі K, центр котрого є центр кулі K, дається на фіг. 401 Головна вісь очертання січення кулі лежить на KH. Сполучивши кінці горізонтального диаметру кола K з дистанційною точкою D, — означимо точки перетинання з простою KH, одержим до картинної площі рівнобіжний диаметр F_1F Точки F_1 та F_2 суть огнища очертання. Розкладаємо верхню половину кола K на рівні частини. Нехай якась точка ділення буде означена через P'. Рівнобіж з P' на горізонталний диаметр має грунтом Q_1. Коли D_1Q' перетинає KH в точці Q — ставимо рівнобіж котрий перетинає D_1P' в точці P. Тоді QP є р діус кола кулі, котре лежить в площі, що



Фіг. 401.

проходить через Q, рівнобіжній до картинної площі. В дійсности KQ=KQ та QQ' ∥ PP'. Більш наочно буде так: місце точок P', котрі так находимо, є стіжкове сїчення на фіг. 401 — еліпс, а саме, картина великого кола, котре проходит через точку K. Коли це коло навкруги свого рівнобіжного диаметра AB повернути на прямий кут, то він переходить в коло K, а значить,

Q..... Q' та P........ P'

Кола навкруги точки Q через відповідну точку P дають вже повну наочну карти ну кулі, бо вона обгортає кулеві очерта ння.

* * *

Видавниче Товариство при Українській Господарській Академії
Č. S. R. Lázně Poděbrady, hotel „U krále Jiřího“ č. 42.