Ч. 13. [517. 2(02)].

На правах рукопису.

Проф. Є. ІВАНЕНКО.

Диференціяльне числення

Видавниче т-во „СІЯЧ“
при Українському Педагогічному Інституті ім. М. Драгоманова
Прага 1925 р.

41126.

[517(02)]

На правах рукопису.

Проф. Є. Іваненко.

Диференціяльне числення

Конспект лекцій, читаних в Українському Педаг. Інституті ім. М. Драгоманова

Видавниче т-во „Сіяч" при Укр. Педаг. Інституті ім. М. Драгоманова.
Прага 1925.

Літографовано 100 примірників.

§1. В пропедевтичному курсі ми докладно розглядали похідні й диференціали функцій від одного незалежника, а тому далі на них зупинятися не будемо.

Зараз повторимо й простудіюємо більш широко диференцування визначених функцій від кількох незалежників і диференцування невизначених функцій, а також зупинимося над складними функціями. Будемо розглядати випадок визначеної функції від 3х незалежників. В дальшому переконаємося, що цей випадок можна поширити й на функції від кількох бажано незалежників.

Отже припустім, що маємо функцію від 3х незалежників x, y і z і означимо її через u:

$$u = f(x, y, z)$$

Коли всі змінні x, y і z незалежні між собою, то ми можемо до однієї з них, напр., x додати приросцення Δx, лишаючи в той час y і z Зміст

Тоді ціла функція u, матиме приросцення:

$$f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$$

Будемо шукати межу відношення приросцення цілої функції до приросцення відповідного незалежника, а саме:

$$\frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

коли це приросцення незалежника Δx простує до нуля (при умові що y і z є незмінні).

Коли ця межа існує, себто є обмеженою, цілком визначеною величиною, то її називають <u>окремою похідною від функції u через x</u> і (як ми вже в проведевтичному курсі зазначили) має символом:

$$u'_x = f'_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

Аналогічно можна визначити й окремі похідні від тієї ж функції u через y і через z, а саме:

$$u'_y = f'_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$u'_z = f'_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

[і т.д. коли б незалежників було більш ніж три]

На практиці при відшуканні якої окремої похідної користуються правилами, що доведено для функцій від одного незалежника, бо згідно умови нашого диференцування всі инші змінні, крім однієї, що має приросщення, лишаються на час диференцування сталими (незмінними)

<u>Приклад.</u> Дано функцію:

$$u = x^3y^2 - 3x^2z - y\lg z$$

Тоді окремі похідні:

1) через x: $3x^2y^2 - 6xz$ 2) через y: $2x^3y - \lg z$ і

3) через z: $-\left(3x^2 + \frac{y}{z}\right)$

§2. Припустіли, що всі окремі похідні даної $f(x, y, z)$ – існують і є такими в границях, що ми розглядаємо для вартостей x, y і z. Розберемось тепер у випадку, коли всі незалежні змінні разом мститимуть відповідні приросщення.

Означимо в цьому разі приріщення цілої функції через Δu, тоді маємо:

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$$

Щоб перейти до попередніх висновків, додамо до правої частини многочлен рівний нулеві, а саме:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) + f(x+\Delta x, y, z) - f(x+\Delta x, y, z)$$

Тоді матимемо:

$$\Delta u = \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\right] +$$

$$+\left[f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y, z)\right] + \left[f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)\right] \quad (A)$$

З попередніх визначень маємо:

$$f'_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

звідки можемо написати:

$$\frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x} = f'_x(x,y,z) + \alpha$$

де α є безмежно мала величина, що разом з Δx простує до нуля. Тому:

$$f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z) = f'_x(x,y,z)\Delta x + \alpha \Delta x \quad (a)$$

Аналогічно:

$$f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z) = f'_y(x,y,z)\Delta y + \beta \Delta y \quad (б)$$

$$\text{і} \quad f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z) = f'_z(x,y,z)\Delta z + \gamma \Delta z \quad (в)$$

де β і γ теж безмежно малі величини, що простують відповідно разом з Δy і Δz до нуля.

Зважаючи на <u>тяглість</u> функції зміна x на $x+\Delta x$ і y на $y+\Delta y$ збільшить приріщення відповідних цілих функцій також на безмежно малі величини, а тому:

1) заступаючи в рівності (б) вартість x через

$x+\Delta x$, матимемо:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y, z) = f'_y(x+\Delta x, y, z)\Delta y + \beta_1 \Delta y \quad (б_1)$$

де β_1 може бути й більш β, але лишатиметься безмежно малою величиною тієї ж малости, що й β.

2) заступаючи в рівності (в) вартости x через $x+\Delta x$ і y через $y+\Delta y$, матимемо:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) = f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\Delta z + \gamma_1 \Delta z \quad (в_1)$$

де γ_1 також може бути й більш γ, але лишатиметься безмежно малою величиною тієї ж малости, що й γ.

Вставляючи останні вартости (а), ($б_1$) і ($в_1$) в рівність (А), маємо:

$$\Delta u = f'_x(x, y, z)\Delta x + f'_y(x+\Delta x, y, z)\Delta y + f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\Delta z + \alpha\Delta x + \beta_1 \Delta y + \gamma_1 \Delta z. \quad (В)$$

Розглянемо зокрема вартости:

$$f'_y(x+\Delta x, y, z)\Delta y \quad і \quad f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\Delta z$$

Ми умовилися, що окремі похідні: $f'_y(x, y, z)$ і $f'_z(x, y, z)$ є такі в границях вартостей x, y і z, що ми їх розглядаємо, тому кожне безмежно мале приросцення незалежних цих функцій тягне безмежно мале приросцення самої функції, а саме:

$$f'_y(x+\Delta x, y, z) = f'_y(x, y, z) + \varepsilon$$

$$f'_z(x+\Delta x, y+\Delta z, z) = f'_z(x, y, z) + \eta$$

де ε і η є безмежно малі величини відповідні приросцеам f'_y і f'_z про заступленню в них x через $x+\Delta x$ і y через $y+\Delta y$. Тоді:

$$f'_y(x+\Delta x, y, z)\Delta y = f'_y(x, y, z)\Delta y + \varepsilon\Delta y$$

$$f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\Delta z = f'_z(x,y,z)\Delta z + \eta\Delta z$$

Вставляючи ці вартости в рівність (B) одержимо:

$$\Delta u = f'_x(x,y,z)\Delta x - f'_y(x,y,z)\Delta y + f'_z(x,y,z)\Delta z + \alpha\Delta x + (\beta_1+\varepsilon)\Delta y + (\gamma_1+\eta)\Delta z \quad (C)$$

Умовилося, як було й для функції від одного незалежника, заступати безмежно малі приросшення незалежника Δx, Δy і Δz через їх походи (диференціяли) й означати їх через dx, dy і dz.

Назвемо многочлен:

$$f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz$$

цілим походом (диференціялом) функції $f(x,y,z)$ (або u) і означимо його через символ:

$$df(x,y,z) = du$$

Тоді:

$$df(x,y,z) = du = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz$$

або:

$$du = d_x u + d_y u + d_z u$$

Порівнюючи цей вираз з рівностю (C), маємо:

$$\Delta u = du + \alpha\Delta x + (\beta_1+\varepsilon)\Delta y + (\gamma_1+\eta)\Delta z$$

Коли Δx, Δy і Δz згідно dx, dy і dz є одної малости між собою, то тієї ж малости буде й похід du, бо чинники f'_x, f'_y і f'_z – є сталі величини (і вважаємо їх нерівними з нулем). Вартости же $\alpha\Delta x$, $(\beta_1+\varepsilon)\Delta y$ і $(\gamma_1+\eta)\Delta z$ – мають малість значно більшу, бо є здобутками безмежно малих величин попередньої малости, тому ними можна нехтувати й твердити, що:

Ціле приросшення функції $f(x,y,z)$ буде еквівалентним (рівнозначним) з її цілим походом

(диференціалом):

$$\Delta u = du$$

Цей довід дуже легко поширити на функції кількох бажано незалежників. Таким чином ми доводимо, що <u>цілий похід функції від кількох незалежників є сумою окремих походів цієї функції через кожного окремого незалежника.</u>

§3. На підставі цього доводу кожний окремий похід можна вважати, як окремий випадок цілого, а саме:

Припустіли, що для даної зміни незалежника x, незалежники y і z лишаються незмінними (тимчасово сталими), тоді їх походи мають бути рівні з нулем, себто $du = 0$ і $dz = 0$. А звідси:

$$du = f'_x(x,y,z)\,dx + f'_y(x,y,z)\,dy + f'_z(x,y,z)\,dz$$

стає рівним:

$$du = f'_x(x,y,z)\,dx \cancel{+0+0}$$

Давши в даному разі походу du символ $d_x u$, маємо:

$$d_x u = f'_x(x,y,z)\,dx$$

Аналогічно:

$$d_y u = f'_y(x,y,z)\,dy$$

$$d_z u = f'_z(x,y,z)\,dz$$

З останніх рівностей маємо:

$$f'_x(x,y,z) = \frac{d_x u}{dx}$$

$$f'_y(x,y,z) = \frac{d_y u}{dy}$$

$$f'_z(x,y,z) = \frac{d_z u}{dz}$$

Ми бачимо, що аналогічно до похідних функцій від одного незалежника, <u>окремі похідні від функцій кількох незалежників, є відношенням відповідного окремого походу до походу самого незалежника.</u>

Як знаємо з пропедевтичного курсу для таких відношень Якобі дає символи:

$$f'_x(x,y,z) = \frac{d_x u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\ ;\quad f'_y(x,y,z) = \frac{d_y u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y} \text{ і т.д.}$$

Тому:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \cdots$$

§4. <u>Окремі похідні вищих порядків функцій кількох незалежників.</u>

Як ми говорили в пропедевтичному курсі, на випадок, коли окремі похідні даної $f(x,y,z\ldots)$ себто $f'_x, f'_y, f'_z \ldots$ є також тяжкими функціями незалежників $x, y, z\ldots$ то ми зможемо й від цих функцій вишукати нові окремі похідні, що мають назву других похідних. Так, напр.,

$$\frac{\partial f'_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

є другою окремою похідною взятою двічі через x.

Або:

$$\frac{\partial f'_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial z}$$

є другою окремою похідною взятою перше через x, а потім через z.

Наприклад:

$$\frac{\partial f_2'}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \cdot \partial x}$$

є другою похідною f взятою перше через z, а потім через x.

Коли б і другі окремі похідні були такими функціями незалежників $x, y, z \ldots$ то в той же спосіб ми взяли б треті окремі похідні і т. д. Напр.

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^p \cdot \partial y^q \cdot \partial z^r} \quad (\text{де } n = p + q + r)$$

§5. <u>Коли дана функція f від кількох незалежників ($x, y, z \ldots$) і її відповідні похідні є такими для певних вартостей яких будь незалежників x, y, то в границях цих вартостей ~~то~~ вартости окремих похідних не залежать від порядку диференцування через ці незалежники</u>, себто:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^m} = \frac{\partial^n u}{\partial y^m \partial x^k} \quad (\text{де } m + k = n)$$

Для доводу цієї теореми досить показати, що при тих же умовах другі окремі похідні підлягають цьому закону, а саме доведемо, що

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

В даному разі, коли ми цікавилися окремими похідними лише незалежників x і y, то решту незалежників можемо вважати за сталі величини й тому розглядати цілу $f(x, y, z \ldots)$ як якусь-небудь функцію незалежників x і y, а тому можемо описати:

$$f(x,y,z\ldots)=\varphi(x,y)$$

Даємо змогу x яке-будь безмежно мале, але довільне приросщення h. Тоді приросщення самої функції буде:

$$\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)=a$$

Але вартість a при даних незмінних вартостях x і $x+h$ буде все ж таки змінною в залежності від змін вартости y, а тому вартість a можна означити як де-яку функцію y, а саме:

$$\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)=f(y)$$

Так само даємо де-яке довільне безмежно мале приросщення незалежному y у функції $f(y)$, тоді матимемо приросщення самої функції.

$$f(y+g)-f(y)=A$$

Вставляючи в цю рівність вартости $f(y)$ одержимо вартість величини A, а саме:

$$A=\varphi(x+h,y+g)-\varphi(x,y+g)-\varphi(x+h,y)+\varphi(x,y)\ldots(I)$$

Перетворимо вартість A у два способи й порівняємо одержані вислоги.

1 спосіб. Перепишемо рівність (I) так:

$$A=[\varphi(x+h,y+g)-\varphi(x+h,y)]-[\varphi(x,y+g)-\varphi(x,y)]$$

Для спрощення зауважимо, що $[\varphi(x,y+g)-\varphi(x,y)]$ є також загалом де-якою функцією від x і y, а тому тимчасово означимо її через $\psi(x,y)$, тоді $\varphi(x+h,y+g)-\varphi(x+h,y)$ відрізняється від $\psi(x,y)$ заміною в ній незалежного x через $x+h$, тому можна написати, що:

$$[\varphi(x+h,y+g)-\varphi(x+h,y)]=\psi(x+h,y)$$

Отже:

$$A = \psi(x+h, y) - \psi(x, y)$$

За теоремою Лагранжа о середній вартости незалежника (а саме за взором: $f(x+h) - f(x) = h f'(x+\theta h)$ де $0 < \theta < 1$) матимемо:

$$A = h\psi'(x+\theta h, y) \quad \text{де } 0 < \theta < 1$$

Але $\psi(x,y) = \varphi(x, y+g) - \varphi(x,y)$, що дає:

$$\psi'_x(x,y) = \varphi'_x(x, y+g) - \varphi'_x(x,y)$$

А тому:

$$A = h\psi'_x(x+\theta h, y) = h\left[\varphi'_x(x+\theta h, y+g) - \varphi'_x(x+\theta h, y)\right]$$

В правій частині при незмінній вартості $x+\theta h$, маємо приріщення функції $\varphi'_x(x+\theta h, y)$, коли даємо незалежникові y приріщення g, а тому знова можемо скористатися теоремою Лагранжа, а саме:

$$A = h\left[g\,\varphi''_{yx}(x+\theta h, y+\vartheta g)\right] \quad \text{де } 0 < \vartheta < 1$$

або:

$$A = hg\,\varphi''_{yx}(x+\theta h, y+\vartheta g) \quad \cdots \quad (M)$$

Від переставки членів многочлена з їх знаками, вислід многочлену не зміняється, а тому рівність (I) можна написати ще й так:

$$A = \left[\varphi(x+h, y+g) - \varphi(x, y+g)\right] - \left[\varphi(x+h, y) - \varphi(x,y)\right]$$

Так само, як і раніш, ми можемо означити:

$$\left[\varphi(x+h, y) - \varphi(x,y)\right] = \chi(x,y)$$

тоді:

$$\left[\varphi(x+h, y+g) - \varphi(x, y+g)\right] = \chi(x, y+g)$$

Отже:

$$A = \chi(x, y+g) - \chi(x,y)$$

або на підставі теореми Лагранжа:

$$A = g\,\chi'_y(x, y+\vartheta_1 g) \quad \text{де } 0 < \vartheta_1 < 1$$

Вставляючи вартість:

$$\Delta'_y = \varphi'_y(x+h, y) - \varphi'_y(x, y)$$

матимемо:

$$A = g\left[\varphi'_y(x+h, y+\vartheta_1 g) - \varphi'_y(x, y+\vartheta_1 g)\right]$$

На підставі попередніх міркувань ми й до виразу в клямрах можемо приєтосувати теорему Лагранжа, а тому:

$$A = g\left[h\,\varphi''_{xy}(x+\theta_1 h,\ y+\vartheta_1 g)\right] \quad \text{де } 0<\theta_1<1$$

Отже:

$$A = hg\,\varphi''_{xy}(x+\theta_1 h,\ y+\vartheta_1 g) \cdots (N)$$

Рівности (M) і (N) дають нам:

$$\cancel{hg}\,\varphi''_{yx}(x+\theta h,\ y+\vartheta g) = \cancel{hg}\,\varphi''_{xy}(x+\theta_1 h,\ y+\vartheta_1 g)$$

Зогляду на тяглість функцій φ''_{yx} і φ''_{xy} (засадну умовою) при простуванню до нуля вартостей h і g і самі вартости: $\varphi''_{yx}(x+\theta h, y+\vartheta g)$, та $\varphi''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\vartheta_1 g)$ будуть простувати до своїх лише, а саме до:

$$\varphi''_{yx}(x, y) \quad \text{і} \quad \varphi''_{xy}(x, y)$$

тому матимемо рівність:

$$\varphi''_{yx}(x, y) = \varphi''_{xy}(x, y)$$

Ми довели нашу теорему на випадок 2х похідних. Але зогляду на те, що треті похідні є відповідно другими для третіх і т.д. то цей довід легко поширити для загального твердження, щодо похідних всіх порядків, бо <u>кожну перестановку кількох бажано диференцувань можна звести до серегу ступневих перестановок по два диференцування кожний раз.</u>

Напр. хай вислід деякого шереку диференцувань буде:

$$K = \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial x} < \frac{\partial}{\partial z} < \frac{\partial u}{\partial y}$$

покажемо, що вартість цього висліду не зміниться коли порядок тих же диференцувань буде такий:

$$\frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial x} < \frac{\partial u}{\partial z}$$

На підставі доведеної теореми ми можемо змінити порядок останніх диференцувань і матимемо:

$$K = \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial x} < \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial u}{\partial z}$$

означивши похідну $\frac{\partial u}{\partial z}$ через v, матимемо:

$$K = \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial x} < \frac{\partial v}{\partial y}$$

Знов змінюючи порядок останніх двох диференцувань, маємо;

$$K = \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial v}{\partial x}$$

або вставляючи вартість v, маємо:

$$K = \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial y} < \frac{\partial}{\partial x} < \frac{\partial u}{\partial z}$$

що й треба було довести.

§6. Зупинимося тепер трохи докладніш ніж в пропедевтичному курсі над походами вищих порядків для кількох незалежників.

Припустім, що маємо якусь функцію u від двох незалежників x і y, себто $u = f(x, y)$. Візьмім її цілий поліг:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

і продиференцуємо ще раз. Цей новий поліг будемо звати другим походом функції $f(x, y)$. Так само

можемо взяти 3-й, 4-й і т. д. похідні функції $f(x,y)$. Ми вважаємо du за нову таку функцію від x і y і означимо її символом через $\varphi(x,y)$. Тоді цілий похід цієї функції буде:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy \dots \quad (\mathrm{I})$$

Але $\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$, а тому:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)$$

dx і dy є безмежно-малі приросцення незалежних і тому в кінцевий спосіб не залежатимуть від ~~тих~~ вартостей, що будуть набувати самі незалежні. Отже, при новому диференцуванню через x, або через y і великими dx і dy відограють ролю сталих величин. Вони не змінюватимуться й тоді, коли цим незалежним придати які-будь приросцення h або g. Тому при диференцуванню чинники dx і dy можна винести за знак диференцування. Таким чином маємо:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = dx\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + dy\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

а звідси:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dy$$

Аналогічно:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy$$

Вставляючи знайдені вартости $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ і $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ у взір (I) маємо:

$$d\varphi = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right)dy$$

або:

$$d\varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx \cdot dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

Але $\varphi(x,y) = du$, а тому:

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

Так само вважаючи d^2u за таку функцію тих же незалежних x і y, та означуючи її через $\psi(x,y)$, маємо:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (\mathrm{II})$$

Але:

$$\psi(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

а тому:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^2 + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} dy^2$$

де на підставі попередніх міркувань dx і dy (а також і їх ступені) є сталими величинами.

Аналогічно:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx\, dy + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^2$$

Таким чином вставляючи ці вартости в (II) маємо:

$$d\psi = d^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + \underbrace{2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2\, dy} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} dy^2 dx +$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3$$

або:

$$d^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2} dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3$$

У розгнаних взорах перших трьох похідів від функції u ми помічаємо зовнішню схожість з розгорненим шереговим Ньютона. Різниця лише в тому, що символи $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ означають не ступінь, а порядок диференціювання. Тому взявши умовно

символ u за сочинник і вивівши його за дужки, маємо:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)u$$

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot u$$

$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 u$$

Доведемо, що цей символ можнеа поширити на цілий похід від функції двох незалежників якого бажано порядку. Для цього за методом індукції, припустім, що згаданий символ є придатний для n-го цілого походу функції $f(x,y)$, а саме:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u \quad \cdots \quad (A)$$

і покажемо, що в цьому разі він буде придатним і для наступного порядку $(n+1)$-го походу:

При розгорненню символа (А) через шерег Ньютона ми будемо мати такий загальний член:

$$f_{m+1} = C_n^m \frac{\partial^{n-m}}{\partial x^{n-m}} dx^{n-m} \cdot \frac{\partial^m}{\partial y^m} dy^m \cdot U$$

або переходячи до попередніх означень:

$$f_{m+1} = C_n^m \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-m} \partial y^m} dx^{n-m} dy^m$$

Даючи значнику m вартости від 0 до n, ми одержимо всі члени многочлену, що є виразом цілого походу функції u порядку n. Тому можна написати, що:

$$op(x,y) = d^n u = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m \frac{d^n u}{\partial x^{n-m} \partial y^m} dx^{n-m} dy^n \quad (Б)$$

Ми знаємо, що:

$$d^{n+1}u = d\, op(x,y)$$

Тому:
$$d^{n+1}u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \quad \cdots\cdots (В)$$

але:
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{m=0}^{m=n} C_n^m \frac{d^n u}{\partial x^{n-m} \partial y^m} dx^{n-m} dy^m\right]$$

і
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{m=0}^{m=n} C_n^m \frac{d^n u}{\partial x^{n-m} \partial y^m} dx^{n-m} dy^m\right]$$

Ми вважаємо величини dx і dy за сталі, а тому:
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{d^n u}{\partial x^{n-m} \partial y^m}\right]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d^n u}{\partial x^{n-m} \partial y^m}\right]$$

а звідси:
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n-m+1} \partial y^m}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n-m} \partial y^{m+1}}$$

Вставляючи тепер знайдені вартости $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ і $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ у взір (В) матимемо:
$$d^{n+1}u = dx \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n-m+1} \partial y^m} + dy \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n-m} \partial y^{m+1}}$$

або:
$$d^{n+1}u = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \left(\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n-m+1} \partial y^m} dx + \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n-m} \partial y^{m+1}} dy\right)$$

або:
$$d^{n+1}u = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial^n}{\partial x^{n-m} \partial y^m}\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) u$$

Лише в дужках входить в кожний член не залежне по від вартости m (або не залежить від m), тому його можна винести за знак Σ і матимемо:
$$d^{n+1}u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m dx^{n-m} dy^m \frac{\partial^n}{\partial x^{n-m} \partial y^m} u$$

На підставі взорів (А) і (Б) можемо Σ замінити

через $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n . u$, а тому одержимо:

$$d^{n+1}u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n . u$$

а звідси:

$$d^{n+1}u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1} . u$$

що й треба було довести.

Раз ми переконалися в правильности цього символу для 3-го цілого походу від функцій 2-х незалежних, то, на підставі доведеного, цей символ можна поширити й для 4-го походу, далі для пятого і т.д.

§7. Наколиб функція u була від кількох незалежних, напр.

$$u = f(x, y, z \ldots)$$

то 1-й похід буде:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \cdots$$

Тоді, беручи способом що вживали перед цим, другий похід, матимемо:

$$d^2u = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \cdots =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dy + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dz + \cdots\right)dx + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dz + \cdots\right)dy +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dy + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz + \cdots)dz + \cdots$$

А звідси, зносячи дужки, маємо:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + \cdots\cdots +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dy\,dz + \cdots\cdots$$

Це, як і попереднє, можна виобразити символом:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \cdots\right)^2 . u$$

Аналогічним шляхом дійдемо, що:

$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \dots\right)^3 . u$$

і нарешті:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \dots\right)^n . u.$$

§8. Взір $d^n u$ є правильний в разі коли всі змінні $x, y, z \dots$ є цілком незалежні, або в крайньому випадкові уявляють лінійні залежности.

Справді, коли б x, y, z були б у свою чергу функціями яких-небудь нових змінних, напр. $k, p, q \dots$, то dx, dy, dz не можна було б вважати за сталі величини, як це ми робили при виводі взору (бо коли $x = \varphi(k, p, q \dots)$, $y = \psi(k, p, q)$ і $z = \chi(k, p, q)$, то, напр. $dx = \varphi'_k(k, p, q)dk + \varphi'_p(k, p, q)dp + \varphi'_q(k, p, q)dq$ – себто зпочаткам є функцією k, p, q). Наколиб φ, ψ і χ були б лінійні функції k, p і q, то φ', ψ' і χ' були б сталі величини, а dk, dp і dq будуть сталі величини, як походи незалежників, а тому dx, dy і $dz \dots$ можна вважати сталими величинами, тобто взір $d^n u$ можна буде поширити й на цей випадок.

Невизначені функції.

§9. В пропедевтичному курсі ми розглядали відшукання першої похідної невизначеної функції, даної рівнянням:

$$f(x, y) = 0$$

Для цього диференцуючи за правилом складних функцій, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

а звідци:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

або:

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Очевидно, що вартість y' можлива при умові що $f'_y(x,y) \neq 0$.

Розглянемо тепер випадок системи рівнань, що зв'язують кілько невизначених функцій. Напр.,

$$f(x, y, z, u, v, t) = 0$$
$$\varphi(x, y, z, u, v, t) = 0$$
$$\psi(x, y, z, u, v, t) = 0$$

де x, y і z - є незалежними, а u, v і t є певні функції цих незалежників. Тоді диференцуючи за правилом складних функцій, матимемо:

1) через x:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Ми маємо систему рівнань, щодо змінних:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial x}$$

Розв'язавши її знайдемо окремі похідні через x всіх невизначених функцій.

Таксамо, диференцуючи, через y і через z, знайдемо:

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial t}{\partial z}$$

<u>Приклад:</u>

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 5u = 0$$
$$3x - y^2 - z + 2u^2 = 0$$

де x і y вважаємо за незалежними. Тоді:

$$2x + 6z\frac{\partial z}{\partial x} - 5\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ; \quad 3 + \frac{\partial z}{\partial x} + 4u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Звідци:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8xy+15}{5-24uz} \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{18z+2x}{5-24uz}$$

Далі:
$$4y + 6z\frac{\partial z}{\partial y} - 5\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \; ; \quad -2y - \frac{\partial z}{\partial y} + 4u\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

а звідци:
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y(8u+5)}{24uz-5} \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4y(1+3z)}{24uz-5}$$

Загалом, коли дається система $n-1$ рівняння з n змінними, напр.,

$$\begin{aligned} f_1(x, y, u, v \ldots\ldots w) &= a_1 \\ f_2(x, y, u, v \ldots\ldots w) &= a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}(x, y, u, v \ldots\ldots w) &= a_{n-1} \end{aligned}$$

то беруци довільно за незалежнимъ, напр., x, а решту за функції x ми після диференцування, маємо:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots \frac{\partial f_1}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots \frac{\partial f_2}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

А звідци:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial u} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u} & \ldots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial u} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u} & \ldots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial w} \end{vmatrix}}$$

Загалом же коли рівнянь k, а змінних $n=k+p$, то ми маємо тоді похідні через p незалежних змінних, виражені через k невизначених функцій. Це ми розглядні на попередньому прикладі.

Щоб знайти ще другі похідні, ми мусимо рівняння (B) ще раз подиференцувати. Напр., дано рівняння:

$$x^2-2y^2+3z^2=0$$

Очевидно тут лише одну із змінних можна вважати функцією решти. За таку змінну візьмемо z, тоді 1ше диференцування:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

маємо: $2x+6z\frac{\partial z}{\partial x}=0$, або $x+3z\frac{\partial z}{\partial x}=0$

$$-4y+6z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad \text{або} \quad -2y+3z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

2ге диференцування:

$$1+3\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+3z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \quad ; \quad 3\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+3z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

$$-2+3\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+3z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad ; \quad 3\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+3z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

Звідси з першого диференцування маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{3z} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{3z}$$

Тому:

$$1+3\left(-\frac{x}{3z}\right)^2+3z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{3z^2+x^2}{9z^3}$$

$$3\left(-\frac{x}{3z}\right)\frac{2y}{3z}+3z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2xy}{9z^3}$$

і $$-2\cdot 3\left(\frac{4y^2}{9z^2}\right)+3z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2-4y}{9z^3}$$

§10. Одновимірні функції.

Функція $f(x, y, z \ldots)$ зветься одновимірною, коли від помноження її незалежників на яке будь довільне число, вартість самої функції помножиться на певну ступінь цього довільного числа.

Себто, коли $f(x, y, z \ldots)$ є одновимірною функцією, то

$$f(xt, yt, zt \ldots) = t^m f(x, y, z \ldots)$$

Число m має назву виміру одновимірної функції

Приклад. $f(x) = x^3 + \frac{y^4}{z} + z^3 \sin\frac{x}{y}$

Заступаючи вартість незалежників через xt, yt і zt маємо:

$$x^3t^3 + \frac{y^4t^4}{zt} + z^3t^3 \sin\frac{xt}{yt} = t^3\left(x^3 + \frac{y^4}{z} + z^3 \sin\frac{x}{y}\right)$$

Отже $f(x)$ - є одновимірною, третього виміру (або ступіня).

Коли ця умова має бути виконана при кожному t, то очевидно виконається й при $t = \frac{1}{x}$. Тому множучи всі незалежники $f(x, y, z \ldots)$ на $\frac{1}{x}$, матимемо:

$$f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \ldots\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^m f(x, y, z \ldots)$$

А звідци:

$$f(x, y, z \ldots) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \ldots\right) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \ldots\right)$$

Отже, кожена одновимірна функція є рівна зі здобутком степені, рівній з виміром функції, одною з незалежників її на функцію від відношення решти незалежників до даного

Коли функція є нулевого виміру (напр. $f(x, y) = tg\frac{x}{y}$) то $m = 0$, а тому попередня рівність має вигляд:

$$f(x, y, z \ldots) = \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \ldots\right)$$

Себто:

Одновимірна функція нулевого виміру є функцією від відношення незалежників.

Теорема Ейлера

Коли $f(x, y, z \ldots)$ однородна є функція якого-будь m-го виміру від кількох незалежників, то сума здобутків окремих похідних цієї функції на самих незалежників, через які ці похідні взято, є рівна із самою функцією, помноженою на показателя виміру.

Инакше кажучи: коли в цілому поході одновимірної функції походи незалежників заступити через самі незалежники, то одержимо саму функцію помножену на показателя виміру.

Напр., хай дана одновимірна функція буде:

$$f(x, y, z \ldots) = u$$

Тоді цілий її похід буде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \ldots$$

Заступаючи походи незалежників через самі незалежники, матимемо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z + \ldots$$

Теорема Ейлера доводить, що:

$$\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z = m.u$$

де m є показатель виміру функції $u = f(x, y, z \ldots)$

З визначення самої одновимірної функції, маємо:

$$f(xt, yt, zt \ldots) = t^m f(x, y, z \ldots)$$

Означимо тимчасом здобутки: $xt, yt, zt \ldots$ через ξ, η, ζ

Тоді:

$$f(\xi, \eta, \zeta \ldots) = t^m f(x, y, z \ldots) \cdots (a)$$

Розглянемо момент, коли вартости незалежників x, $y, z \ldots$ не змінюються й будемо тепер змінати вартість t. Тоді: $\xi = xt$, $\eta = yt$, $\zeta = zt \ldots$ будуть функціями t, а $f(\xi, \eta, \zeta \ldots)$ складною функцією від t, вартості же x, y, z, а разом і $f(x, y, z \ldots)$ будуть тимчасом сталими. Отже продиференцуємо рівність (a) через t, то при указаних умовах матимемо:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \cdots = m t^{m-1} f(x, y, z \ldots)$$

Але $\xi = xt$, то $\frac{\partial \xi}{\partial t} = x$; таксамо: $\frac{\partial \eta}{\partial t} = y$; $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = z$ і т.д.
Отже маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} x + \frac{\partial f}{\partial \eta} y + \frac{\partial f}{\partial \zeta} z + \cdots = m t^{m-1} f(x, y, z \ldots)$$

Ми маємо вартість t цілком довільною, а тому беручи $t = 1$, одержимо:

$$\partial \xi = \partial(xt)_{t=1} = \partial x; \quad \partial \eta = \partial(yt)_{t=1} = \partial y \quad \text{і т.д.}$$

Таким чином:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z = m f(x, y, z \ldots).$$

Що й треба було довести.

<u>Приклад.</u> $u = x^2 y + 3xy^2 - 2x^2 - \frac{y^4}{z}$

Це є одновимірна функція 3-го виміру. Беремо окремі похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y^2 - 2zx; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6xy - \frac{4y^3}{z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -x^2 + \frac{y^4}{z^2}$$

Тому: $\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z = \underline{2x^2y} + \underline{3xy^2} - \underline{2x^2z} + \underline{x^2y} +$

$$+ \underline{6xy^2} - \underline{\frac{4y^3}{z}} - \underline{x^2z} + \underline{\frac{y^4}{z}} = 3x^2y + 9xy^2 - 3x^2z - \frac{3y^4}{z} =$$

$$= 3\left(x^2y + 3xy^2 - x^2z - \frac{y^4}{z}\right)$$

§ 11. Шерег Тайльора.

В елементарному курсі ми вивели вже шерег Тайльора, а саме:

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

Цей вір є можливим при довільних a і z. Коли існують вартости $f(a)$ і її перших $(n-1)$ похідних. Очевидно, що число n є в даному разі довільне, а тому від його вартости (себто від числа взятих похідних) буде залежати та або инша вартість суми, що є в правій частині рівности. Це нас переконує, що права частина не є точною вартістю $f(z)$, а лише певним її наближенням, а тому виникає потреба в обчисленні похибки, що ми робимо, коли прирівнюємо ліву частину до правої. Це й поставимо ми собі як задачу

Означимо нашу похибку через $R = (z-a)^p \cdot Q$, де Q є величина поки-що нам невідома, а p довільне число від 1 до n. Тоді:

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + (z-a)^p Q \quad (A)$$

є правдивою рівністю. Звідси:

$$f(z) - \left[f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + (z-a)^p Q\right] = 0$$

В цій різниці a цілком довільне й тому замінивши його через x, припустимо ще x тілько змінятися в інтервалі від a до z. Тоді, означивши ліву частину рівности через $\varphi(x)$, матимемо:

$$\varphi(x) = f(z) - \left[f(x) + \frac{z-x}{1!} f'(x) + \frac{(z-x)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + (z-x)^p Q\right.$$

Ця функція обертається в нуля 1) при $x=z$ і 2) при $x=a$ (на підставі попереднього взору). Тому за теоре-

проведевтичному курсі, а саме через: $a=x$; $z-a=h$; звідси $z=a+h=x+h$, одержимо для ряду Тейльора такий вигляд:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R$$

де $R=\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(x+\theta h)$, де $0<\theta<1$, а p довільне.

Зогляду на довільність вартости p, Лагранж вважав її рівній n, себто $p=n$ і тоді останочний член Лагранжа мав вигляд:

$$R=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$$

де $x+\theta h$ - є середня вартість x в інтервалі $x\ldots x+h$.

Також Коші вважав $p=1$ й останочний член Коші має вигляд:

$$R=\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x+\theta h)$$

Коли тепер довільну величину a прирівнаємо до нуля, себто в ряді (B) положимо $a=0$, то матимемо відомий ряд Маклорена, а саме:

$$f(z)=f(0)+\frac{z}{1!}f'(0)+\frac{z^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R$$

де R:

$$(\text{Шльомільха})-R=\frac{z^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(\theta z)$$

$$(\text{Лагранжа})-R=\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(\theta z)$$

$$(\text{Коші})-R=\frac{z^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta z)$$

Ряд Маклорена має важне призначення для розгорнення окремих функцій в ряди.

§ 19. Розгорнення в ряд $f(x)=\sin x$. Ряди зовсі

треба переконатися, чи існують всі n-1 похідні цієї функції. Ми вже знаємо, що $(\sin x)^n = \sin(\frac{n\pi}{2}+x)$. Тому $(\sin x)' = \sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$; $(\sin x)'' = \sin(\pi+x) = -\sin x$; $(\sin x)''' = \sin(\frac{3\pi}{2}+x) = -\cos x$; $(\sin x)^{IV} = \sin(2\pi+x) = \sin x$ і т.д. Отже: $f(0)=0$; $f'(0)=1$; $f''(0)=0$; $f'''(0)=-1$; $f^{IV}(0)=0$; $f^{V}(0)=1$ і т.д. Ми бачимо, що паристі похідні є рівні з нулем а не паристі: 1, 5, 9... рівні +1, а 3, 7, 11... рівні −1. Це вірші n непаристого можна висловити так: $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ (бо число непаристе $n = 2k+1$, звідки $k = \frac{n-1}{2}$) Звідси, вставляючи знайдені вартости в ряд Маклорена, маємо:

$$\sin x = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

або:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} + \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} + \dots$$

Щоб знайти похибку користуємося з остаточного члена Лаґранжа й маємо:

$$R_1 = \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x) = \frac{x^n}{n!} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right)$$

$\sin(\frac{n\pi}{2} + \theta x)$ не більш від 1, тому є величиною обмеженою. Доведемо що $\frac{x^n}{n!}$ простує до нуля, коли $n \to \infty$. Хай число a і a+1 є вартости, що містяться в своїм інтервалі x, себто:

$$a < x < a+1 < n$$

Вираз $\frac{x^n}{n!}$, напишемо так:

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} \cdots \frac{x}{n}$$

Зупинимо тепер на вартости знаменателя a, тоді матимемо:

$$\frac{x^n}{n!} = S \cdot r$$

де $S = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{a}$ = обмеженому числу, незалежно

від вартости n. Але:

$$r = \frac{x}{a+1} \cdot \frac{x}{a+2} \cdot \frac{x}{a+3} \cdots \frac{x}{n}$$

Коли в цій рівності замінити всі знаменателі через $a+1$, то права частина збільшиться й ми одержимо

$$r < \left(\frac{x}{a+1}\right)^{n-a}$$

Але з умови $x < a+1$, тому дріб $\frac{x}{a+1} < 1$ й $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{x}{a+1}\right)^{n-a} = 0$

Очевидно, що й здобуток:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} r = 0$$

Це нам дає право твердити, що й останній член R простує до нуля зі збільшенням n до безмежности, а тому розгорнення в ряд $\sin x$ можливе при кожній вартости x. Таким чином маємо:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

§ 13. Розгорнення в ряд $\cos x$.

Коли $f(x) = \cos x$, то, як відомо, $f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; $f''(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{2} + x\right) = -\cos x$; $f'''(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$; $f^{(IV)}(x) = \cos(2\pi + x) = \cos x$; $f^{V}(x) = -\sin x$ і т. д. Загалом $f^{(n)}(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$. Всі похідні при кожному x - існують, отже, беручи $x = 0$, матимемо: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{IV}(0) = 1$, $f^{V}(0) = 0$ і т. д. Отже коли n є непарне, то $f^{(n)}(0) = 0$, коли n парне, то $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}$; $\left[n = 2k,\ k = \frac{n}{2}\right]$. Тому:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots R$$

де R за Лагранжем буде:

$$R = \frac{x^n}{n!} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right)$$

$\cos$ не може мати вартости більш 1, а ми до-

вели, що $\frac{x^n}{n!}$ для кожної вартости x простує до нуля при зростанню n до ∞, а тому:

$$\lim_{n\ldots\infty} R = 0$$

Таким чином розгорнення $\cos x$ в ряд можливе при кожній вартості x. Отже:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

§14. Розгорнення в ряд e^x.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ і т. д. $f^{(n)}(x) = e^x$. Отже всі n перших функцій існує. Вставляючи $x = 0$, матимемо:

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1 \text{ і т. д.}$$

Тому за взором Маклорена, маємо:

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots R$$

де R за Лярансем буде:

$$R = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$$

θ є дріб менший від одиниці і здобуток $\theta x < x$, а тому якеб не було R вартість $e^{\theta x}$ є обмеженого, бо $e^{\theta x} < e^x$. Щодо $\frac{x^n}{n!}$ нами доведено, що для кожної вартости x $\lim_{n\ldots\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, а тому $\lim_{n\ldots\infty} R = 0$. Розгорнення можливе при кожному x, а тому:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Взявши $x = 1$, одержимо ряд, яким користуються для обчислення самого e, а саме:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Розгорнемо ще в ряд ступінів x функцію a^x. Коли $a = e^y$, знайдемо y. Логаритмуємо й маємо

$\mathcal{L}g\, a = y$, тому $a = e^{\mathcal{L}g a}$, а звідци $a^x = e^{x \mathcal{L}g a}$. Отже:

$$f(x) = a^x = e^{x \mathcal{L}g a}$$
$$f'(x) = \mathcal{L}g a\, e^{x \mathcal{L}g a}$$
$$f''(x) = \mathcal{L}g^2 a\, e^{x \mathcal{L}g a}$$
$$f'''(x) = \mathcal{L}g^3 a\, e^{x \mathcal{L}g a}$$
$$\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = \mathcal{L}g^n a\, e^{x \mathcal{L}g a}$$

Тому:

$$f(0) = 1;\ f'(0) = \mathcal{L}g\, a;\ f''(0) = \mathcal{L}g^2 a;\ f'''(0) = \mathcal{L}g^3 a \text{ і т.д.}$$

А тому шерег Маклорена має вигляд:

$$a^x = 1 + \frac{x \mathcal{L}g a}{1!} + \frac{(x \mathcal{L}g a)^2}{2!} + \frac{(x \mathcal{L}g a)^3}{3!} + \cdots R$$

де $R = \frac{(x \mathcal{L}g a)^n}{n!} e^{\theta x \mathcal{L}g a}$.

або беруци $x \mathcal{L}g\, a = y$, маємо:

$$R = \frac{y^n}{n!} e^{\theta y}$$

А ми перед цим довели, що при всякому y $\lim\limits_{n \to \infty} R = 0$

Отже розгорнення в шерег ступінів x функції a^x можливе при кожному x

Коли візьмемо шерег:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \qquad (a)$$

і замінимо в ньому x на $-x$, то матимемо:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \qquad (б)$$

Взявши півсуму й півріжницю цих шерегів (а) і (б) матимемо:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots + \frac{x^{2m}}{2m!}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Вартість $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ має назву гіперболичного синуса,[1]

$$\sin_{гір.} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

а вартість $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ має назву гіперболичного косинуса

$$\cos_{гір} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

§15. Розгорнення в терен логаритмичної функції.

Функцію $\lg x$ розгорнути не можна, бо при $x = 0$ ця функція має розрив тяглости ($\lg 0 = \infty$)
Розглянемо $f(x) = \lg(1+x)$. Тоді:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \quad f'''(x) = \frac{1.2}{(1+x)^3}; \quad f^{(IV)}(x) = -\frac{1.2.3}{(1+x)^4}$$

і загалом:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

Тому:

$$f(0) = \lg 1 = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = -1; \quad f'''(0) = 2! \quad і \quad f^{n}(0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

Тому терен Маклорена матиме вигляд:

$$\lg(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2 \cdot 1!}{2!} + \frac{x^3 \cdot 2!}{3!} - \frac{x^4 \cdot 3!}{4!} + \dots$$

або:

$$\lg(x-1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} \qquad (\alpha)$$

де R за взором Коші:

$$R = (-1)^{n-1}\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n}$$

або (тут $\frac{(n-1)!}{(n-1)!}$ скорочується):

$$R = (-1)^{n-1}\frac{x}{1+\theta x}\cdot\left(\frac{x - x\theta}{1 + x\theta}\right)^{n-1}$$

де $0 < \theta < 1$.

1) бо по-грецькому ὑπερβολεύω – v – бовге.

Розглянемо випадки:

1) $|x|>1$

В цьому разі ряд (d) є розбіжний, бо ознака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}:(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}-\frac{n}{n+1}x=\lim_{n\to\infty}-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)x=-x$$

Отже при $|x|>1$ ряд є розбіжний, а при $|x|<1$ ознака Даламбера виконується і ряд має бути збіжним.

2) $|x|=1$, себто при $x=\pm1$

Коли $x=1$, то ряд обернеться в

$$\lg 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

це ряд гармонічний, а тому (як ми розглядали у вступі в аналізу) є збіжний.

Коли $x=-1$, то ряд обертається в

$$\lg 0=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots\cdots$$

або

$$\lg 0=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

Це ряд гармонійний, що розбігається

3) Коли $|x|<1$

Тоді розглядаючи $R=(-1)^{n-1}\frac{x}{1+\theta x}\cdot\left(\frac{x-x\theta}{1+x\theta}\right)^{n-1}$, маємо:

a) при $x>0$

Дріб $\frac{x}{1+\theta x}$ завжди менше одиниці, бо $x<1$, $1+\theta x>1$, а дріб $\frac{x-x\theta}{1+x\theta}$ - також менше одиниці, бо здобуток $x\theta$ при $x<1$ і $\theta<1$, буде:

$$x\theta<x$$

Тому: $0 < x - x\theta < 1$, а $1 + x\theta > 1$.

Ми знаємо, що коли дріб менший одиниці підносити у досить велику ступінь, то вислід ступінування може бути як бажано малим, себто

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{x - x\theta}{1 + x\theta}\right)^{n-1} = 0$$

тому й

$$\lim_{n \to \infty} R = 0$$

б) при $x < 0$ (але більшому -1)

Заступаючи x через $-y$, ми матимемо:

$$0 < y < 1$$

Тому:

$$R = (-1)^{n-1} \frac{-y}{1 - \theta y} \cdot \left(\frac{-y + y\theta}{1 - y\theta}\right)^{n-1}$$

а) дріб $\frac{y}{1 - \theta y}$ є <u>числом обмеженим</u>, бо при $y < 1$ і $\theta < 1$ здобуток $y\theta < 1$, а тому знаменатель завжди $\neq 0$ а чисельник цього дробу не більш одиниці

б) дріб $\frac{y - y\theta}{1 - y\theta} < 1$, бо $y < 1$, а відлічуючи з обох частин по $y\theta$ (що є менше y) матимемо:

$$y - y\theta < 1 - y\theta$$

Отже

$$\frac{y - y\theta}{1 - y\theta} < 1$$

Тому $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{y - y\theta}{1 - y\theta}\right)^{n-1} = 0$. А звідци

$$\lim_{n \to \infty} R = 0$$

Це доводить, що для всіх вартостей x, абсолютною величиною не низчих від одиниці розгорнення в степенний ряд функції:

$$\lg(1+x)$$

можливе, а саме:

$$\lg(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$|x| < 1$

Цей ряд має свої недружности, а саме:

1) дає можливість розгортати логарифми не більше 2.

а 2) досить повільно збігається особливо при вартостях, що наближаються до 1.

Тому цей ряд перетворюють в другий таким шляхом:

Візьмім даний ряд:

$$\lg(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

і замінимо в ньому вартість x на $-x$:

$$\lg(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

Тепер відімнемо другий ряд від першого і матимемо:

$$\lg(1+x) - \lg(1-x) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right)$$

Означимо суму $1+x$ через y, а різницю $1-x$ через z, тоді матимемо:

$$\lg\frac{y}{z} = 2\left[\frac{y-z}{y+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^5 + \ldots\right]$$

Знаючи $\lg z$, ми за допомогою даного взору обчислимо $\lg y$. Очевидно, що ряд буде збігатися тим скорше, чим більша різниця між знаменателем і чисельником (себто між величинами: $y+z$ і $y-z$)

Приклади.

1). $\lg\frac{y}{z} = \lg\frac{2}{1}$

$$\lg 2 - \overset{0}{\lg 1} = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \cdots\right] = 0{,}6931471\ldots$$

2). $\mathcal{L}g\,\frac{4}{2} = \mathcal{L}g\,\frac{3}{2}$

$$\mathcal{L}g\,3 - \mathcal{L}g\,2 = 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^4} + \cdots\right] = 0,0986122\ldots$$

Очевидно, що логарифми складних чисел, напр. 6. = 3.2; $8 = 2^3$; $36 = 3^2 . 2^2$ і т.д. знайдуться шляхом складання й множення основних логарифмів, напр. $\mathcal{L}g\,24 = \mathcal{L}g\,3 + 3\,\mathcal{L}g\,2$.

Ми вже знаємо, що для того щоб перейти від природніх логарифмів до десяткових, і відповідні природні логарифми ~~ми мусимо~~ помножити на модуля:

$$M = 0,43429448\ldots$$

Напр. $\mathcal{L}g_e\,2 = 0,6931471\ldots$ Множимо на M, маємо: $lg\,2 = 0,301026854\ldots$, або $lg\,2 = 0,30103$.

§16 Розгорнення в ряд степенів x функції $f(x) = (1+x)^m$, де m є якесь реальне число.

Всі похідні функції існують, а саме:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}; \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \quad \text{і т.д.}$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

Звідси маємо такі Маклоренові функції

$f(0) = 1$; $f'(0) = m$; $f''(0) = m(m-1)$ і т.д. $f^{(n-1)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+2)$

Тому:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 +$$

$$+ \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + R \qquad (A)$$

де R, взяте за взором Коші, буде:

$$R = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(1-\theta)^{n-1}x^n}{(n-1)!}(1+\theta x)^{m-n}$$

Ми, знаючо, що при m цілому додатньому цей шерег зупиниться сам собою, бо починаючи з певного місця всі соотинники обертаються в нуля.

При инших вартостях m цей шерег є безконечним.

Отже, ми розглянемо цей шерег ах раз для m дробового, або відємного.

1-й випадок. $|x|>1$

Тоді шерег є розбіжний, бо взявши основу Даламбера, ми бачимо, що:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1} : \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m-n}{n+1}x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}\right)x = -x$$

Отже при $|x|>1$ шерег є розбіжний.

У 2-му випадку $x=\pm 1$ ми приходимо до конкретних ступінів 2^m: 0, а тому ми розглядувати їх не будемо. Перейдемо до наступних випадків, а саме:

3-й випадок. $|x|<1$

Розглянемо можу останнього члену:

$$R = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{m-n}$$

При простуванню $n\dots\infty$

Напишем цей член так:

$$R = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\cdot(1+\theta x)^{m-1}\cdot\left(\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n\right)$$

1) Дріб $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ а) при $x>0$ - є менший від одиниці.

б) при $x<0$ (але, коли $|x|<1$), маємо $\frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|}$, але $0<\theta<1$, то здобуток двох дробів менших від одиниці

$$\theta|x| < \theta$$

а тому $1-\theta|x| > 1-\theta$ і дріб $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ при $x<0$ буде також правильний.

В цьому разі завжди можна взяти n остільки великим, що цей дріб може бути менш кожного наперед заданого числа, себто:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} = 0$$

2) Чинник $(1+\theta x)^{m-1}$ є обмежена величина, бо коли $0<\theta<1$; $|x|<1$, то двочлен $1+\theta x$ - є обмежений (ні нуль, ні безмежність, а ступінь m є також обмежений.

3) Член

$$a_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n$$

Цей член можна розглядати, як n-й член ряду:

$$\frac{m(m-1)}{1}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2!}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}x^4 + \dots\dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n$$

Коли ряд цей буде збіжний, то останній його член a_n буде простувати до нуля при $n\to\infty$

Вживаємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)}{n!}x^{n+1} : \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{m-n}{n}x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{n}-1\right)x = -x$$

Отже коли $|x|<1$, то ряд збіжний, а тому

$$\lim a_n = \lim \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n = 0$$

тобто маємо:

$$\lim R = 0$$

Положивши (A) замість x косинуса α абсолютної величини меншої від одиниці.

Висновки.

1) Беручи $x = -y$, одержимо:

$$(1-y)^m = 1 - mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} \qquad (B)$$

2) Беручи $m = -k$, одержимо: 1) зі взору (A)

$$\frac{1}{(1+x)^k} = 1 - kx + \frac{k(k+1)}{2!}x^2 - \frac{(k+1)(k+2)}{3!}x^3 + \dots \quad (C)$$

2 зі взору (B)

$$\frac{1}{(1-x)^k} = 1 + kx + \frac{k(k+1)}{2!}x^2 + \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}x^3 + \dots \quad (D)$$

3) Беручи $k = 1$ одержимо

а) зі взору (C):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

б) зі взору (D)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

4) Беручи $x = \frac{y}{a}$ де $y < a$ зі взорів (C) і (D) маємо:

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \dots$$

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \dots$$

Вправи.

1. Розкинути в ряди: $f(x) = \arcsin x$ і $f(x) = \operatorname{arctg} x$ і обчислити межі збіжности рядів; також, беручи в 1-ому ряді $x = \frac{1}{2}$, а в 2-ому $x = 1$, обчислити π.

Відповіді.

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{4} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Збіжні при $|x| < 1$.

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \dots$$

§17 Взори Ейлера для тригонометричних функцій

Ми вивели:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \frac{y^n}{n!} \qquad (a)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (б)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \qquad (в)$$

У взорі (а) беремо $y = ix$, тоді:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

або:

$$e^{ix} = \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}\right] +$$

$$+ i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \qquad (г)$$

або, користуючися взорами (б) і (в), маємо:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (д)$$

Далі беруи у взорі (г) $x = -x$, одержимо:

$$e^{-ix} = \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right] - i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right]$$

а звідси: $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ . . . . . (ж)

Отже можна написати:

$$a \pm ib = \rho(\cos x \pm i \sin x) = \rho e^{\pm i\theta}$$

А з другого боку додаючи и відніманючи рівности (д) і (ж) одержимо взори Ейлера:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad ; \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

що висловлюють тригонометричні функції через показательні.

§18. Розгорнення неозначеностей за допомогою розгорнення функцій в степенні ряди незалежника.

Крім способів розгорнення неозначеностей указаних нами в проседевтичному курсі, зупинимося тут ще на одному способі[1] за допомогою розгорнення функцій в степенні ряди незалежників.

Припустіли, що ми маємо дріб функцій, що при вартостях незалежника $x = a$ дають неозначеність $\frac{0}{0}$.

Припустіли, що за допомогою ряду Маклорена ми можемо надати чисельника й знаменника розгорнути в ряди з ступенів x.

Коли тепер ми чисельника й знаменника скоротимо на найменший ступінь x, то, або в чисельнику, або в знаменнику, або в обох разом ми одержимо член, що не містить x, тому беручи межу вартости дробу при $x = a$, ми матимемо або 0 (коли в чисельнику є вільний член),

[1] обчислення правдивих вартостей неозначеностей

або 0 (коли вільний член є в знаменнику), або обмежене число (в третьому випадкові), що й буде правдивою вартістю неозначеності.

<u>Приклад 1</u> $u = \frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ при $x=0$

Отже $u = \frac{x^2}{1-\cos x}$, але $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$, тому

$u = \frac{x^2}{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\dots}$ скорочуючи на x^2, маємо:

$u = \frac{1}{\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\dots}$, а звідси: $\lim\limits_{x\to 0} u = \frac{1}{\frac{1}{2!}} = 2$

<u>Приклад 2.</u> $u = \sec x - \operatorname{tg} x$; при $x = \frac{\pi}{2}$

Це є неозначеність типу $\infty - \infty$, тому перетворюємо: $u = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{1-\cos y}{\sin y}$

(де $y = \frac{\pi}{2} - x$). Треба знайти $\lim u = \frac{1-\cos y}{\sin y}$ при $y=0$

$u = \frac{1-1-\frac{y^2}{2!}-\frac{y^4}{4!}+\dots}{\frac{y}{1}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}\dots}$ після скорочення на y, матимемо:

$$\lim_{y\to 0} u = \frac{\frac{y}{2!}-\frac{y^3}{4!}+\dots}{1-\frac{y^2}{3!}+\dots} = \frac{0}{1} = 0$$

§19. <u>Ряд Тейльора для функцій кількох незалежників.</u>

Для функцій одного незалежника ми мали:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{h^n f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}$$

(останочний член беремо за Лагранжем)

Ми знаємо, що:

$$f'(x)h = df(x) = du$$
$$f''(x)h^2 = d^2f(x) = d^2u$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n-1)}(x)\,h^{n-1} = d^{n-1}f(x) = d^{n-1}u$$

$$\text{і}\quad f^{(n)}(x+\theta h)(h\theta)^n = d^n f(x+\theta h) = d^n u_\theta$$

Тоді:

$$f(x+h) - f(x) = du + \frac{d^2u}{2!} + \frac{d^3u}{3!} + \dots \frac{d^{n-1}u}{(n-1)!} + \frac{d^n u_\theta}{n!} \qquad (A)$$

Доведемо тепер, що цей вигляд має й тоді від кількох незалежників. Справді, хай $u = f(x, y, z \dots)$, а приросцення незалежників будуть $h, k, l \dots$, себто наша різниця функцій (див. (A) ліву частину) буде:

$$f(x+h, y+k, z+l, \dots) - f(x, y, z \dots)$$

Візьмім довільну величину t і помножимо на неї всі наші приросцення й означимо через $\xi = x + ht$; $\eta = y + kt$; $\zeta = z + lt \dots$ Таким чином:

$$f(x+ht, y+kt, z+lt \dots) = f(\xi, \eta, \zeta \dots)$$

Нову функцію $f(\xi,\eta,\zeta)$ можна розглядати, як певну функцію t, себто:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(t)$$

при чому при $t=0$, ми одержуємо $f(x, y, z)$, себто:

$$\varphi(0) = f(x, y, z \dots)$$

а при $t=1$ одержуємо:

$$\varphi(1) = f(x+h, y+k, z+l, \dots)$$

За Маклорепем ми можемо написати:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)t}{1!} + \frac{\varphi''(0)t^2}{2!} + \dots \frac{\varphi^{(n)}(\theta t)t^n}{n!} \qquad (I)$$

Отже треба нам знайти всі n похідних $\varphi(t) = f(\xi, \eta, \zeta \dots)$.

Коли візьмемо який p-й похід функції, то ми матимемо:

$$d^p\varphi(t) = d^p f(\xi, \eta, \zeta \dots) = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta}d\zeta \dots\right)^p f(\xi, \eta, \zeta \dots)$$

але $\xi = x + ht$, тому $d\xi = hdt$ і аналогічно $d\eta = kdt$; $d\zeta = ldt$ і т.д. Тому:

$$d^p\varphi(t) = d^p f(\xi, \eta, \zeta \ldots) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} hdt + \frac{\partial}{\partial \eta} kdt + \frac{\partial}{\partial \zeta} ldt \ldots\right)^p f(\xi, \eta, \zeta \ldots)$$

або:

$$d^p\varphi(t) = d^p f(\xi, \eta, \zeta \ldots) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} h + \frac{\partial}{\partial \eta} k + \frac{\partial}{\partial \zeta} l + \ldots\right)^p \cdot (dt)^p f(\xi, \eta, \zeta \ldots)$$

А звідси, поділивши обидві частини на $(dt)^p$, маємо:

$$\varphi^{(p)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} h + \frac{\partial}{\partial \eta} k + \frac{\partial}{\partial \zeta} l + \ldots\right)^p \cdot f(\xi, \eta, \zeta \ldots)$$

При $t = 0$, матимемо:

$$\varphi^{(p)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \ldots\right)^p \cdot f(x, y, z \ldots)$$

(бо $\xi = x + ht$, а при $t = 0$ $\xi = x$, аналогічно $\eta = y$; $\zeta = z \ldots$)

Даючи p вартости $1, 2 \ldots n$, ми одержимо всі вартости: $\varphi'(0), \varphi''(0) \ldots \varphi^{(n)}(0)$ і вставляючи їх у рівність (I), матимемо:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l \ldots\right) t f}{1!} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l \ldots\right)^2 t^2 f^2}{2!} +$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l \ldots\right)^{n-1} \cdot t^{n-1} \cdot f^{n-1}}{(n-1)!} + R_n \quad (\text{II})$$

Нам треба знайти вартість розгорнення різниці:

$$f(x+h, y+k, z+l \ldots) - f(x, y, z \ldots)$$

Але:

$$f(x+h, y+k, z+l \ldots) - f(x, y, z \ldots) = \varphi(1) - \varphi(0)$$

а тому вважаючи в рівності (II) $t = 1$, і переносячи $\varphi(0)$ в ліву частину, одержимо:

$$f(x+h, y+k, z+l \ldots) - f(x, y, z \ldots) = \varphi(1) - \varphi(0) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l \ldots\right) f + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l \ldots\right)^2 f + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l \ldots\right)^3 f \ldots + R_n$$

Але приросцення $h = dx$, $k = dy$; $l = dz$, тому вирез:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \dots\right)^p f = d^p f(x, y, z \dots) = d^p u$$

де $p = 1, 2, 3 \dots n$. Отже:

$$f(x+h, y+k, z+l \dots) - f(x, y, z \dots) = du + \frac{d^2u}{2!} + \frac{d^3u}{3!} + \dots R_n$$

$$\text{де } R_n = \frac{d^n u_0}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \dots\right)^n f(x, y, z \dots)\right]_{\substack{x = x+\theta h \\ y = y+\theta k \\ z = z+\theta l}}$$

при $0 < \theta < 1$.

Себто маємо вір стосовний, що й для функцій з одним незалежним.

§20 Maximum і minimum невизначених функцій

Коли в проседевтичному курсі ми розглядали maximum і minimum функцій, то ми зупинялися на випадку лише визначеної функції від одної незалежної змінної. Тепер розглянемо ще випадок maximum'а й minimum'а від функції невизначеної. Хай такого цілого функцією буде:

$$u = f(x, y) = 0 \quad \dots \quad (a)$$

де y є якась алгебрична функція x. Ввважаючи в цьому разі, як і раніш $f'_x(x, y)$ для нашого інтервала вартостей x і y нерівного з нулем, ми найшли першу похідну y' так як це робили в проседевтичному курсі, а саме:

$$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \quad \dots \quad (б)$$

Функція y' є такого в даних границях (бо

f'_x і f'_y - також такі відно умові, що y є така функція x), а тому беруги на увагу, що y' при максимумі й мінімумі можемо замінювати нею, вона має обертатися нуль.

Раз $f'_y(x,y) \neq 0$, то має бути в цьому разі $f'_x(x,y)=0$ Такими чином для визначення вартостей x і y, при яких може бути або максимум, або мінімум, ми маємо систему рівнань.

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ f'_x(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Припустім, що розвязавши цю систему, ми одержимо:

$$x = \alpha \; ; \quad y = \beta$$

Тоді, як нам відомо, щоб довідатися, чи при $x=\alpha$, і $y=\beta$ є максимум або мінімум, ми можемо знайти знак другої похідної y''. Тому складаємо цю похідну.

Ми знаємо, що:

$$f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

Звідци:

$$f''(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y')^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

або:

$$f''(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y')^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

Але при даних вартостях $x=\alpha$; $y=\beta$ перша похідна $y'=0$, тому:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

Отже: $$y'' = -\left(\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right) = -\left(\frac{f''_{xx}(x,y)}{f'_y(x,y)}\right)_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}}$$

Коли в цьому разі 1) вартість $y''<0$, то (як ми знаємо) буде maximum

2) $y''>0$ minimum

3) $y''=0$, то питання не вияснене й вимагає дослідження наступних похідних.

Приклад $f(x,y) = x^3+y^3-8xy = 0$

Тоді:

$$f'_x = 3x^2-8y \quad ; \quad f'_y = 3y^2-8x$$

Система:

$$x^3+y^3-8xy=0$$
$$3x^2-8y=0$$

дає розвязки: $\alpha_1=0$, $\beta_1=0$; $\alpha_2=\frac{8\sqrt[3]{2}}{3}$, $\beta_2=\frac{8\sqrt[3]{4}}{3}$ і т.д.

Обмежемося розглядом лише реального розвязку α_2 і β_2 не рівного з нулем (бо α_1 і β_1 негодяться, бо при них $f'_y(x,y)=0$).

$f''_{xx}(x,y) = 6x$, тому:

$$y''_{(x=\alpha_2)} = -\left(\frac{6x}{3y^2-8x}\right)_{\substack{x=\alpha_2\\ y=\beta_2}} = -\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{\frac{64\sqrt[3]{2}}{3}}\right) = -\frac{3}{32}$$

Отже вартости α_2 і β_2 - є maximum

§21 Maximum і minimum визначених функцій від двох незалежних.

Припустім, що маємо:

$$u = f(x,y)$$

від двох незалежних x і y.

З попередніх визначень maximum'а й minimum'а функції від одного незалежного, очевидно що під maximum'ом функції u, ми будемо розуміти ту вартість цієї функції при вартостях $x=\alpha$ і $y=\beta$, коли існують нерівності:

$$f(\alpha+h, \beta+k) < f(\alpha,\beta)$$

при всіх можливих додатніх і від'ємних h і k близьких до нуля.

Такожсамо умовою мінімум'а тієї ж функції буде:

$$f(\alpha+h, \beta+k) > f(\alpha, \beta)$$

також при всіх можливих додатніх і від'ємних h і k досить близьких до 0.

Загалом ріжниця:

$$f(\alpha+h, \beta+k) - f(\alpha, \beta)$$

мусить при всіх можливих додатніх і відємних вартостях h і k (близьких до 0), затримувати знак „мінус" при максимумі, а „плюс" при мінімумі.

Коли ж зі зміною знаку h або k і знак ріжниці зміниться, то ні максимум'у, ні мінімум'у не існує.

Доведемо теорему: <u>Конечною умовою того, щоб при даних вартостях $x=\alpha$, $y=\beta$ дана функція від двох незалежних $f(x,y)$ мала або максимум, або мінімум є рівність з нулем при цих вартостях x і y її окремих перших похідних, себто $f'_x(\alpha,\beta)=0$ і $f'_y(\alpha,\beta)=0$</u>

Ми вже казали, що для максимум'а, або мінімум'а мусить приросщення функції

$$f(\alpha+h, \beta+k) - f(\alpha, \beta) \lessgtr 0$$

заховувати сталий знак для всіх можливих h і k близьких до нуля. Отже це приросщення має заховувати той же знак коли δ і $k=0$, себто:

$$f(\alpha+h,\beta)-f(\alpha,\beta)\lesseqgtr 0$$

Але за теоремою Лагранжа:

$$f(\alpha+h,\beta)-f(\alpha,\beta)=h f'_x(\xi,\beta)$$

де ξ якась середня вартість між α і $\alpha+h$ функції $f'_x(\alpha,\beta)$, а разом і $f'_x(\xi,\beta)$ - стала - , а тому, коли $f'_x(\alpha,\beta)\neq 0$, то $f'_x(\xi,\beta)$ <u>мусить заховувати свій знак для всіх досить малих вартостей h.</u>

Отже в цих умовах здобуток:

$$h f'_x(\xi,\beta)$$

що має другий сомножник сталого знаку, <u>зміновати</u> свій знак разом зі зміною знаку h, а тому й приросшення функції зміновати свій знак.

Таким чином, коли $f'_x(\alpha,\beta)\neq 0$, то немає ні maximum'а, ні minimum'а

Значить, для існування maximum'а, або minimum'а конечно мусить $f'_x(\alpha,\beta)=0$. Аналогічно, беруги $h=0$ доведемо конечність умови:

$$f'_y(\alpha,\beta)=0$$

Ці умови дають нам для визначення вартостей $x=\alpha$ і $y=\beta$, тому систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y)&=0\\ f'_y(x,y)&=0\end{aligned}\right\}\ldots(a)$$

Розвязуючи її ми й одержимо потрібні $x=\alpha$; $y=\beta$. Зогляду на те, що при несвідомім зміними x і y вартости похідів dx і dy - цілком довільні, то умову існування maximum'а й minimum'а можна написати ще й так:

$$\underset{x=\alpha;\ y=\beta}{du} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}} = 0$$

де цей двочлен при довільних dx і dy буде рівний нулеві тоді, коли $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ і $\frac{\partial u}{\partial y}=0$. Таким чином:

Конечною умовою того, щоб при даних вартостях $x=\alpha$, $y=\beta$ функція $f(x,y)$ мала maximum або minimum є рівність з нулем цілого походу (диференціяла)

Тепер розслідуємо, коли ця функція буде мати maximum, а коли minimum.

Доведемо теорему:

Коли $f(x,y)$ при даних вартостях $x=\alpha$; $y=\beta$ має перший цілий похід рівний з нулем то вона матиме:

1) maximum, коли при тих же вартостях $x=\alpha$, $y=\beta$, різниця:

$$f''_{xx}(\alpha,\beta)\cdot f''_{yy}(\alpha,\beta) - \left(f''_{xy}(\alpha,\beta)\right)^2 > 0 \ (1) \text{ і } f''_{xx}(\alpha,\beta) < 0 \ (2)$$

2) minimum, коли при тих же умовах і при того ж роду вартости розглянеої різниці (1):

$$f''_{xx}(\alpha,\beta) > 0$$

Коли ж задана різниця:

$$f''_{xx}(\alpha,\beta)\cdot f''_{yy}(\alpha,\beta) - \left(f''_{xy}(\alpha,\beta)\right)^2 < 0$$

то не існує ні minimum, ні maximum;

і нарешті, коли ця різниця є рівна з нулем, то справа лишається не з'ясованою й вимагає дальших досліджень.

Для спрощення введемо, вживані при цьому, означення:

$$f''_{xx}(\alpha,\beta)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}}=A;\quad f''_{xy}(\alpha,\beta)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}}=B;\quad f''_{yy}(\alpha,\beta)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}}=C$$

тоді наша умова має вигляд:

$$AC-B^2$$

і коли $AC-B^2>0$, то існує або maximum, коли $A<0$, або minimum, коли $A>0$. А коли $AC-B^2<0$, то немає ні maximum, ні minimum, і, нарешті, коли $AC-B^2=0$, то справа є нерозв'язаною.

Хай розв'язками рівнань (a) будуть $x=\alpha$; $y=\beta$ Тоді візьмім досить близькі до α і β вартости x і y:

$$x=\alpha+h\ ;\qquad y=\beta+k$$

де h і k наближуються до нуля. За взором Тейльора матимемо:

$$f(\alpha+h,\beta+k)=f(\alpha,\beta)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)f(\alpha,\beta)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(\alpha,\beta)+\cdots R_n$$

Для нашого дослідження досить зупинити цей перед на другому члені й ми матимемо:

$$f(\alpha+h,\beta+k)-f(\alpha,\beta)=\left(\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial x}h+\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial y}k\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\alpha+\theta h,\beta+\theta k)\qquad \text{де } 0<\theta<1$$

Ми знаємо, що умовою існування maximum'а й minimum'а є $\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial x}=f'_x(\alpha,\beta)=0$ і $\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial y}=f'_y(\alpha,\beta)=0$

а тому наш вір у цьому випадку матиме вигляд:

$$f(\alpha+h, \beta+k) - f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(\alpha+\theta h, \beta+\theta k)$$

З аналогії з означеннями $f''_{xx}(\alpha,\beta) = A$ і т. д. Означимо:

$$f''_{xx}(\alpha+\theta h, \beta+\theta k) = \frac{\partial^2 f(\alpha+\theta h, \beta+\theta k)}{\partial x^2} = A_\theta$$

$$f''_{xy}(\alpha+\theta h, \beta+\theta k) = \frac{\partial^2 f(\alpha+\theta h, \beta+\theta k)}{\partial x \partial y} = B_\theta$$

$$\text{і } f''_{yy}(\alpha+\theta h, \beta+\theta k) = \frac{\partial^2 f(\alpha+\theta h, \beta+\theta k)}{\partial y^2} = C_\theta$$

і маємо:

$$\Delta = f(\alpha+h, \beta+k) - f(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left[A_\theta h^2 + 2B_\theta hk + C_\theta k^2\right]$$

Очевидно наш приріст функції залежатиме - знаку правої частини, яку й будемо досліджувати.

Припустім, що $A_\theta \neq 0$, тоді:

$$\Delta = \frac{1}{2A_\theta}\left[A_\theta^2 h^2 + 2A_\theta B_\theta hk + A_\theta C_\theta k^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2A_\theta}\left[A_\theta^2 h^2 + 2A_\theta B_\theta hk + B_\theta k^2 - B_\theta^2 k^2 + A_\theta C_\theta k^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2A_\theta}\left[(A_\theta h + B_\theta k)^2 + (A_\theta C_\theta - B_\theta^2)k^2\right]$$

Отже знак Δ незалежно від вартостей h і k (бо вони в квадратах) залежатиме від знаків 1) A_θ 2) $(A_\theta C_\theta - B_\theta^2)$

I Коли $A_\theta C_\theta - B_\theta^2 > 0$

то через те, що многочлен в квадратових дужках завжди додатній і знак приросту функції залежатиме лише від знаку A_θ, себто коли $A_\theta < 0$ максимум, $A_\theta > 0$ мінімум.

Коли $A_0 C_0 - B_0^2 < 0$, то, щоб переконатися, що вираз:

$$\left[(A_0 h + B_0 k)^2 + (A_0 C_0 - B_0^2) k^2\right]$$

міняє знак в залежности від вартости h і k, досить взяти два яких будь окремих випадків, напр., коли при $k \neq 0$ візьмемо для h таку вартість, щоб перший член в дужках обертався в нуль, себто $h = -\frac{B_0}{A_0} k$ (що одержимо, розвязавши рівнення $A_0 h + B_0 k = 0$), то при $(A_0 C_0 - B_0^2) < 0$ многочлен в дужках буде <u>відємним</u>. Навпаки, коли при $h \neq 0$ вартість k буде наближатися до нуля, то многочлен в дужках матиме знак однаковий з членом $A_0^2 h^2$, себто буде <u>додатним</u>

Зогляду на такість функції:

$$A_0 = f''_{xx}(\alpha + h, \beta + k)$$

заховує сталий знак, а через те знак приросту Δ буде змінюватися в залежности від знаку вартости многочлена в дужках. Отже ні мах., ні мін. не буде.

Випадок, коли $A_0 = 0$ зводиться до тільки що розглянеого, бо тоді:

$$A_0 C_0 - B_0^2 = -B_0^2 < 0$$

Вартости:

$$A_0 = f''_{xx}(\alpha + h, \beta + k)$$

$$B_0 = f''_{xy}(\alpha + h, \beta + k)$$

$$C_0 = f''_{yy}(\alpha + h, \beta + k)$$

є безумовно функціями h і k (бо α і β є певні сталі величини) Ми розглядаємо ці функції при всіх

можливих вартостях h і k, а тому вважаємо A_0, B_0 і C_0 за <u>такі</u> функції h і k.

Вартости A, B і C є межовими вартостями функцій A_0, B_0 і C_0 коли h і k простують до нуля. В силу своєї тяглости при вистарчально малих абсолютних величинах h і k A і A_0, B і B_0, C і C_0 будуть однакового знаку, а разом і різниці:

$$A_0C_0 - B_0^2 \quad і \quad AC - B$$

також будуть однакових знаків, тому при дослідженні maximum'а й minimum'а замісць виразу $A_0C_0 - B_0^2$, досить, а практично зручніш, користатися з виразу $AC - B^2$

Отже 1) коли

$$AC - B^2 > 0$$

то при $A<0$ maximum, а при $A>0$ minimum

2) коли

$$AC - B^2 < 0$$

немає ні maximum'а, ні minimum'а і

3) коли

$$AC = B^2$$

то справа стає ще не розвязаною. На дослідженню цього випадку ми не зупиняємося.

<u>Приклад 1</u>. Сума всіх вимірів прямокутного бруса S, який з цих брусів має найбільший обсяг?

Задача зводиться до поділу числа на три такі частини, щоб їх здобуток був maximum. Хай частини будуть x, y і $S-(x+y)$. Тоді

$$u = xy(S-x-y) = Sxy - x^2y - xy^2$$

Щоб він був maximum або minimum, треба щоб $f'_x(u)=0$, $f'_y(u)=0$. Тому:

$$f'_x(u) = Sy - 2xy - y^2 \qquad f'_y(u) = Sx - x^2 - 2xy$$

Маємо систему:

$$y^2+(2x-S)y=0;\ y=0;\quad y+2x-S=0 \qquad\qquad 2y+4x-2S=0$$
$$x^2+(2y-S)x=0;\ x=0;\quad x+2y-S=0 \qquad\qquad -\ x+2y-S=0$$
$$3x-S=0$$

$$x_1=0 \qquad x_2=0 \qquad x_3=S \qquad x_4=\frac{S}{3}$$

$$y_1=0 \qquad y_2=S \qquad y_3=0 \qquad y_4=\frac{S}{3}$$

Очевидно, що ні один із розв'язків: x_1, x_2, x_3 не відповідає задачі (бо нульових вимірів бруса не має), крім розв'язків x_4, y_4. Тоді 3-ій руб: $z = S - \frac{S}{3} - \frac{S}{3} = \frac{S}{3}$. Довідаймося, чи це буде maximum?

$$f''_{xx}(u) = -2xy; \qquad A = -\frac{2S}{3}$$

$$f''_{xy}(u) = S - 2x - 2y \qquad B = S - \frac{2S}{3} - \frac{2S}{3} = -\frac{S}{3}$$

$$f'_{yy}(u) = 2x \qquad C = -\frac{2S}{3}$$

Отже $AC - B^2 = \frac{4S^2}{9} - \frac{S^2}{9} = \frac{S^2}{3} > 0$. Раз $A = -\frac{2S}{3} < 0$ то маємо maximum.

Отже при даних умовах найбільшого обсягу брус має бути кубом.

<u>Приклад 2</u>. Який з прямокутних брусів, що має сталий обсяг $V = a^3$ має найменшу поверхню.

Означимо руби бруса через $x, y, z = \frac{a^3}{xy}$. Тоді поверхня:

$$u = S = 2xy + 2\frac{a^3}{y} + 2\frac{a^3}{x}$$

$$u'_x = 2y - 2\frac{a^3}{x^2}; \qquad u'_y = 2x - \frac{2a^3}{y^2}$$

$$y - \frac{a^3}{x^2} = 0;\ x^2y = a^2\ (1);\ x^3y^3 = a^6$$

$$x - \frac{a^3}{y^2} = 0 \qquad xy^2 = a^3\ (2);\ xy = a^2\ (3)$$

Поділивши почерзі рівняння (1) і (2) на (3) маємо: $x = a$; $y = a$

Решта нереальних розв'язків рівнянь:

$$x^3 = a^3 \; ; \quad y^3 = a^3$$

нам логічно не відповідають.

Отже $x = a$; $y = a$; $z = a$

$$u''_{xx} = \frac{4a^3}{x^3}; \quad u''_{xy} = 2; \quad u''_{yy} = \frac{4a^3}{y^3}$$

$$A = 4; \quad B = 2; \quad C = 4$$

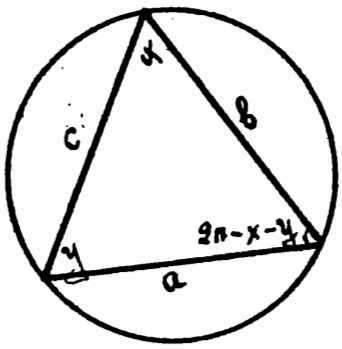
$$AC - B^2 = 16 - 2 > 0$$

але $A = 4 > 0$, тому маємо мінімум. Значить із всіх брусів даного обсягу найменшу поверхню має куб.

<u>Приклад 3.</u> В круг ввести Δ-к з найбільшим полем.

Боки введеного в коло Δ будуть:

$$a = 2r\sin x \; ; \quad b = 2r\sin y$$



$$S_\Delta = \frac{ab\sin[\pi-(x+y)]}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 4r^2\sin x\sin y\sin(x+y) = 2r^2\sin x\sin y\sin(x+y)$$

Ясно, що треба знайти максимум здобутку:

$$u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$$

$$u'_x = \cos x\sin y\sin(x+y) + \sin x\sin y\cos(x+y)$$

$$u'_y = \sin x\cos y\sin(x+y) + \sin x\sin y\cos(x+y)$$

Система:

$$\begin{cases} \cos x\sin y\sin(x+y) + \sin x\sin y\cos(x+y) = 0 \\ \sin x\cos y\sin(x+y) + \sin x\sin y\cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

Перенесемо другий член кожного рівняння у праву частину й поділимо їх

тоді: $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$

$$\cos x\sin(x+y) = -\sin x\cos(x+y) \qquad \sin y = 0$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = -\operatorname{tg} x \quad (*) \qquad \sin x = 0$$

А перетворюючи функцію $\operatorname{tg}(x+y)$ за тригон. взорцем

маємо: $\frac{tg x + tg y}{1 - tg x\, tg y} = -tg x$; $\frac{2 tg x}{1 - tg^2 x} = -tg x$; $tg x = 0$

$2 = -1 + tg^2 x$; $tg x = \pm\sqrt{3}$; $x = 60°, \cancel{120°}$; $y = 60°, \cancel{120°}$ (бо $tg x = tg y$)

[Другі вартости не годяться, бо сума кутів Δ-ка $= 180°$]

Отже кути тр-ка $x = 60°$, $y = 60°$, $z = 60°$

$$u''_{xx} = -\sin x \sin y \sin(x+y) + \cos x \sin y \cos(x+y) + \cos x \sin y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y) =$$
$$= 2\cos x \sin y \cos(x+y) - 2\sin x \sin y \sin(x+y)$$

$$A = 2\cos 60° \sin 60° \cos 120° - 2\sin 60° \sin 60° \sin 120° = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}$$

$$u''_{xy} = \cos x \cos y \sin(x+y) + \cos x \sin x \cos(x+y) + \sin x \cos y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y)$$

$$B = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$u''_{yy} = -\sin x \sin y \sin(x+y) + \sin x \cos y \cos(x+y) + \sin x \cos y \cos(x+y) -$$
$$- \sin x \sin y \sin(x+y) = 2\sin x \cos y \cos(x+y) - \sin x \sin y \sin(x+y)$$

$$C = 2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = -\sqrt{3}$$

Отже $AC - B^2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$. Але $A < 0$ тому маємо максимум.

<u>Із всіх трикутників введених у дане коло найбільше поле має правильний</u>

<u>Приклад 4</u> В якому з Δ-ів, введених у дане коло обвід буде найбільший?

Боки тр-ка:
$$a = 2r\sin x$$
$$b = 2r\sin y$$
$$c = 2r\sin(x+y)$$
$$S = a + b + c = 2r(\sin x + \sin y + \sin(x+y))$$

Очевидно треба знайти максимум виразу в дужках, а саме:

$$u = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$

$u'_x = \cos x + \cos(x+y)$ $\qquad$ $\cos x + \cos(x+y) = 0$

$u'_y = \cos y + \cos(x+y)$ $\qquad$ $\cos y + \cos(x+y) = 0$

$\cos x = -\cos(x+y)$ $\qquad$ $\cos x = \cos y$ (1)

$\cos y = -\cos(x+y)$ $\qquad$ $\frac{\cos x}{\cos y} = 1$ $\qquad$ $\cos x = -\cos(x+y)$ а тому:

$\cos x = \sin x \sin y - \cos x \cos y$; $\cos x = \sqrt{1-\cos^2 x}\sqrt{1-\cos^2 y} - \cos x \cos y$ а на підставі (1):

$\cos x = \sqrt{1-\cos^2 x}\sqrt{1-\cos^2 x} - \cos^2 x$; $\cos x = 1 - \cos^2 x - \cos^2 x$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; $\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} = 0$; $\cos x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} =$

$= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$; $\cos x = \frac{1}{2}$; $\cos x = -1$ (для Δ-ка не годиться). Отже $x = 60°$; $y = 60°$; $z = 60°$

$u''_{xx} = -\sin x - \sin(x+y)$ $\qquad$ $A = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

$u''_{xy} = -\sin(x+y)$ $\qquad$ $B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$C = u''_{yy} = -\sqrt{3}$ $\qquad$ $AC - B^2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$ $\quad A < 0$

З трикутників, введених у коло має найбільший обвід правильний.

<u>Приклад 5</u>. Який Δ-к, що має даний обвід $2p$ буде мати найбільше поле?

Боку: $a = x$; $b = y$; $c = 2p - x - y$

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-2p+x+y)} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p}$$

Очевидно, що поле буде мати максимум, коли найбільшу вартість прийме функція

$$u = (p-x)(p-y)(x+y-p)$$

Беремо окремі похідні функції u через x і через y, маємо:

$$u'_x = -(p-y)(x+y-p) + (p-x)(p-y)$$

$$u'_y = -(p-x)(x+y-p) + (p-x)(p-y)$$

Складаємо систему:

$$(p-x)(p-y) - (p-y)(x+y-p) = 0$$

$$(p-x)(p-y) - (p-x)(x+y-p) = 0$$

перенести другий член в другу частину й поділивши наші рівняння одно на друге, одержимо:

$$1 = \frac{p-y}{p-x}; \quad p-x = p-y; \quad x = y$$

Далі:

$$(p-y)[p-x-x-y+p]=0;\quad p-y=0;\quad y_1=p$$
$$p-x=0;\quad x_1=p \quad \Big\}\ \text{не годяться.}$$

$$-2x-y+2p=0 \qquad 2x+y=2p$$
$$2y+x=2p$$
$$-\ 2x+y=2p$$
$$4y+2x=4p$$
$$3y=2p$$

$$b=y=\frac{2p}{3};\qquad a=x=\frac{2p}{3};\qquad c=\frac{2p}{3}$$

$$u''_{xx}=-(p-y)-(p-y)=-2(p-y);\quad A=-2\cdot\frac{1}{3}p=-\frac{2}{3}p$$

$$u''_{xy}=-(p-y)+(x+y-p)-(p-y)=-p+x+x+y-p-p+y=$$
$$=2x+2y-3p=-\frac{p}{3}$$

$u''_{yy}=-2(p-x)=-\frac{2}{3}p$. Отже $AC-B^2=\frac{4}{9}p^2-\frac{p^2}{9}=\frac{p^2}{3}>0$

$A=-\frac{2}{3}p<0$ тому маємо справу з максимумом.
Очевидно, що <u>при даному обводі найбільше поле має правильний Δ.</u>

<u>Приклад 6.</u> З кулі вирізати прямокутний брус найбільшого обсягу.

Косина цього брусу буде поперечником, а тому:

$$(2r)^2=x^2+y^2+z^2$$
$$4r^2=x^2+y^2+z^2;\quad z=\sqrt{4r^2-x^2-y^2}$$

$$V\ \text{бруса}=xyz=xy\sqrt{4r^2-x^2-y^2}$$

Отже маємо функцію:

$$u=xy\sqrt{4r^2-x^2-y^2}$$
$$u'_x=y\sqrt{4r^2-x^2-y^2}-\frac{x^2y}{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}$$
$$u'_y=x\sqrt{4r^2-x^2-y^2}-\frac{xy^2}{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}$$

$$y\sqrt{4r^2-x^2-y^2}=\frac{x^2y}{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}\ ;\quad x\sqrt{4r^2-x^2-y^2}=\frac{xy^2}{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}$$

$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$; $x^2=y^2$; $x=y$ (беруть відємних рудів нема)

$$y(4r^2-x^2-y^2)=x^2y \qquad (y\neq 0 \text{ - тотуна})$$

$$\begin{array}{l|l|l} 4r^2-x^2-y^2=x^2 & 4r^2-y^2=2x^2 & y^2=4r^2-2x^2 \\ 4r^2-x^2-y^2=y^2 & 4r^2-x^2=2y^2 & 4r^2-x^2=8r^2-4x^2 \end{array}$$

$3x^2=4r^2$; $x=\frac{2r}{\sqrt{3}}$; $y^2=4r^2-2\cdot\frac{4r^2}{3}$; $y^2=4r^2(1-\frac{2}{3})=\frac{4r^2}{3}$

$y=\frac{2r}{\sqrt{3}}$; $\frac{4r^2}{3}+\frac{4r^2}{3}+z^2=4r^2$; $z^2=\frac{4}{3}r^2$; $z=\frac{2r}{\sqrt{3}}$

Отже $x=y=z$; куб.

$$u'_{xx}=-\frac{yx}{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}-\frac{2xy(4r^2-x^2-y^2)+x^3y}{(4r^2-x^2-y^2)\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}=$$

$$=-\frac{4r^2yx-\cancel{yx^3}-y^3x+8r^2xy-2x^3y-2xy^3+\cancel{x^3y}}{4r^2-x^2-y^2\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}=-\frac{12r^2xy-2x^3y-3xy^3}{4r^2-x^2-y^2\sqrt{4r^2-x^2-y^2}}$$

$$A=-\frac{12r^2\cdot\frac{4}{3}r^2-2\cdot\frac{16r^4}{9}-3\frac{16r^4}{9}}{(4r^2-2\cdot\frac{4r^2}{3})\sqrt{4r^2-2\cdot\frac{4r^2}{3}}}=-\frac{16r^4-\frac{32r^4}{3}-\frac{48r^4}{9}}{\frac{4}{3}r^2\sqrt{\frac{4}{3}r^2}}=-\frac{64r}{24\sqrt{\frac{1}{3}}}=-\frac{8r}{3\sqrt{\frac{1}{3}}}<0$$

maximum.

§ 22. Поширюючи правило находження максимуму й мінімуму на функції від багатьох незалежних, напр.

$$u=f(x,y,z,u,t\ldots)$$

ми в той спосіб як і для двох незалежних (приймаючи всі приросщення $k, l, m, n, p\ldots$ за нулі, а одно, напр. $h\neq 0$) переконалися, що конечною умовою того щоб $f(x,y,z\ldots)$ мала максимум або мінімум є рівність з нулем $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial f}{\partial z}\ldots$ що загально висловиться в умові рівности (при всіх $x, y, z\ldots$ незалежних між собою)

з нулем першого цілого походу функції:

$$du = 0$$

Загалом розпізнати, чи буде при цій умові максимум або мінімум в загальному вигляді трудно й приходиться пробувати в кожному окремому випадкові зокрема.

Але у випадку, коли при $du = 0$, цілий другий похід функції:

$$d^2u$$

заховує свій знак, визначення максимума й мінімум'а легке. А саме:

За взором Тейльора маємо (досить 2х членів)

$$\Delta = f(\alpha+h, \beta+k, \gamma+l \ldots) - f(\alpha, \beta, \gamma \ldots) = du + \frac{d^2u}{2!} + \ldots$$

Отже при двох членах:

$$\Delta = du + \frac{d^2u_0}{2!}$$

де u_0 вигляд вставки d^2u вартости: $y(x+\theta h)$ і т.д. $0<\theta<1$, але $du=0$, то

$$\Delta = \frac{d^2u_0}{2!}$$

Отже, коли d^2u_0 при довільних $h, k, l \ldots$ заховує для всіх вартостей змінних знак, то

при $d^2u_0 < 0$ – є максимум

а при $d^2u_0 > 0$ – є мінімум

У випадку, коли б d^2u зі зміною вартостей $h, k, l \ldots$ змінювало б знак, то ні максимума, ні мінімум'а нема.

До цього часу ми відшукуючи максимум і мінімум, мали справу лише з функція-

ли від незалежних змінних, яких не підпорядковували ніякими умовами. Тому всі розглянені max. і min. мають назву безумовних

§ 23. Умовні maximum і minimum.

Тепер розглянемо maximum і minimum функцій від змінних, що звязані між собою певними умовами. Такі maximum і minimum, що мають виповнюватися при певних обмеженнях, створених умовами, накладеними на змінних функції, звуться умовними maximum'ами й minimum'ами функції.

Хай дано нам функцію:

$f(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ від n змінних і треба знайти maximum і minimum цієї функції, коли ці змінні звязано умовами (такими рівняннями)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n) = 0 \\ \vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots \\ \varphi_k(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) = 0 \end{array}\right\} (\alpha)$$

де $k < n$.

Очевидно, що розвязуючи ці k рівнянь, ми визначимо k з цих n змінних через решту $n-k$ змінних. Коли б ми знайдені вартости вставили б у дану функцію, то одержали б нову функцію від $n-k$ незалежних змінних і задача обернулася б у задачу відшукання безумов-

них maximum'а й minimum'а, що ми вже вміємо.

В де-яких випадках, цей спосіб розвязання задачі можливий і легко виконується, але в загальному випадку він є надзвичайно складним, а тому Лагранж дав инший значно простіший (а иноді єдиний до виконання) спосіб.

Візьмім цілий похід нашої функції:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \qquad (\beta)$$

Ми вже бачили, що ті вартости змінних, що при них має бути maximum або minimum функції мусять при всіх вартостях походів змінних (себто тотожньо) обертати в нуля цілий похід функції.

Отже, коли б ми після розвязання рівнань і вставки вартостей розвязків у $f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ мали б цю функцію від $(n-k)$ незалежників, то для існування maximum'а й minimum'а конечною була рівність:

$$df = 0$$

при всіх вартостях цих незалежників.

Далі беруги походи умовних рівнань (α), маємо:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots\dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\
\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} dx_2 + \dots\dots \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} dx_n = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} dx_2 + \dots\dots \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} dx_n = 0
\end{array}\right\} \qquad (\gamma)$$

Йдучи за Лагранжем, будемо вигукати 3

рівняння (β), похідні заданих к змінних, що ми вважаємо їх функціями решти, в такий спосіб: Помножимо всі рівняння (γ) на якісь довільні числа $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ і додамо їх до рівняння (β), тоді матимемо:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}\right) dx_2 + \dots \dots \dots \dots \dots +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\right) dx_n .$$

(бо ми до df додали вартости рівні з нулем.)

Тепер припустім, що перші змінні $x_1, x_2 \dots x_k$ є ті, що ми вважаємо залежними від решти, [зогляду на рівняння (α)]. Тому їх похідні $dx_1, dx_2 \dots dx_n$ є змінні величини.

Отже добіраємо вартости $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ так, щоб сочинники при $dx_1, dx_2 \dots dx_k$ були рівні з нулем, тоді лишиться рівність.

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+1}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k+1}} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+1}}\right) dx_{k+1} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+2}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+2}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k+2}} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+2}}\right) dx_{k+2} + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\right) dx_n$$

Це є похід функції від незалежних змінних, а ми знаємо, що для існування максимум'а й мінімум'а конечним є рівність його, а себто й перелих сочинників, з нулем. Таким чином ми маємо n рівнань (перші k сочинників походів

рівні з нулем через добір вартостей $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$, а решта на підставі останніх міркувань); отже:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (\delta)$$

Таким чином маємо n одержаних рівнянь і k рівнянь даних - разом $n+k$ рівнянь; а змінних:

n змінних: $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$

і k змінних: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_k$

разом $n+k$ змінних. Очевидно, що ці рівняння дадуть нам змогу найти всі вартости $x_1, x_2 \dots x_n$ при яких можуть бути або max., або min. Лишається лише дослідити, що саме?

Означимо $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ через u і складемо нову функцію:

$$V = u + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots \lambda_k \varphi_k$$

(де $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_k$ - є дані нам умовними рівняннями) Візьмім окремі похідні цієї функції й маємо:

$$V'_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}$$

$$V_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$V_{x_n} = \frac{\partial u}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}$$

Ми бачимо, що прирівнюючи до нуля всі ці окремі похідні, ми одержимо рівняння (б).

Тому спосіб Лаґранжа зводиться до наступного:

Коли нам дано якусь функцію від n змінних і k рівнянь, що звязують ці змінні, то:

1) Множимо ліві частини згуртованих цих рівнянь на довільні чинники й додаємо їх до даної функції.

2) Беремо окремі похідні від нової, одержаної цим додаванням функції, й дорівнюємо їх до нуля.

3) З одержаних n рівнянь і даних k рівнянь складаємо систему, з якої визначаємо потрібні нам змінні, що можуть дати maximum або minimum.

Дослідження, чи справді одержимо max. або min. - дуже й дуже складне в загальному вигляді, а тому його опустимо. В окремих випадках будемо шукати найпростіших способів переконатися в правдивості питання.

Приклад. Які з трикутників даного обводу мають найбільше поле?

Хай пів даного обводу p, означимо боки через x, y, z, тоді як відомо:

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

але як ми бачимо існує умова:

$$x + y + z = 2p.$$

Очевидно, щоб S_Δ було maximum, треба, щоб було maximum:

$$u = (p-x)(p-y)(p-z)$$

Складаємо функцію v:

$$V = (p-x)(p-y)(p-z) + \lambda(x+y+z-2p)$$

тоді:

$$V_x = \lambda - (p-y)(p-z)$$

$$V_y = \lambda - (p-x)(p-z)$$

$$V_z = \lambda - (p-x)(p-y)$$

Отже маємо систему:

$$x + y + z = 2p$$

$$(p-y)(p-z) = \lambda$$

$$(p-x)(p-z) = \lambda$$

$$(p-x)(p-y) = \lambda$$

Перемножимо три останні рівняння:

$$(p-x)^2(p-y)^2(p-z)^2 = \lambda^3$$

$$(p-x)(p-y)(p-z) = \sqrt{\lambda^3} = \lambda\sqrt{\lambda}$$

Ділимо ці рівняння почерзі на останні три:

$$p-x = \sqrt{\lambda}$$

$$p-y = \sqrt{\lambda} \qquad x-y=0 \qquad x-z=0$$

$$p-z = \sqrt{\lambda} \qquad y-z=0$$

Отже $x=y=z=\frac{2p}{3}$. Це є правильний трикутник.

Розділ II

Диференціяльна геометрія

В цьому розділі ми маємо нагоду застосувати методи аналізи б-малих до дослідження властивостей геометричних образів. Ми вже вивчили основні властивости цих образів за допомогою аналітичної геометрії й тепер, грунтуючися на них зможемо перейти до більш складних випадків окремих образів, а також дослідити різні їх комбінації й системи. Очевидно, що розгляду нашому належатимуть лише ті геометричні образи, рівняння яких дають можливість застосування до них диференціяльного числення, себто ці криві є такими в границях нашого дослідження й у більшости дають право вживання теореми Тейльора (себто мають похідні навіть вищих порядків).

Першим нашим завданням буде вивчення плоских кривих. Як побачимо далі, — про особливі властивости кожної точки такої кривої ми зможемо судити по характеру дотичної, поведеної через цю точку, а тому головним нашим завданням буде дослідження цих дотичних.

Аналітичне рівняння плоскої кривої.

Ми вже знаємо, що функція, що може для всіх заданих вартостей незалежника (крім, може бути,

де якими окремими, що звуться особливими), розгортуватися в ряд Тейльора, зветься аналітичною.

Із попередніх міркувань видно, що ми будемо мати діло лише з кривими аналітичними, що визначаються того же імени функціями.

Звернемося до аналітичної геометрії. Ми студіювали рівняння:

1) простої:

$$y = mx + n$$

$$x\cos\varphi + y\cos(\omega - \varphi) = \delta$$

$$Ax + By + C = 0$$

або 2) кривої другого ступіня, загалом, вигляду:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + f = 0$$

і 3) де-які криві вищих ступінів.

Всі ці рівняння в загальному вигляді можна виобразити так:

1) $f(x, y) = 0$ — (невизначено)

2) $y = f(x)$ — (визначено)

Очевидно, що кожна точка кривої, напр. M визначається певними вартостями значників: $x = x_0$, $y = y_0$. Кожна инша точка N буде визначена вже новими вартостями значників, а саме: $x = x_1$, $y = y_1$. Щоб мати визначення цілої кривої, або певного геометричного осередку окремих її точок, нам треба буде установити

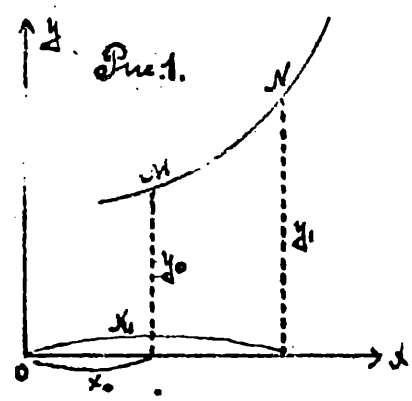


Рис. 1.

функціональну залежність між цими значіннями, щоб ця залежність висловлювала ту спільну прикмету (або закон), що їй підлягають всі точки кривої без виключення.

Ця залежність і буде:

$$F(x, y) = 0 \qquad (1),$$

що устанлює закон взаємочинности між x і y — значинками окремих точок кривої. Цей самий закон устанлюється й рівнанням:

$$y = f(x) \qquad (2)$$

де вартости рядної y підпорядковуються змінам вартостей відтинкової x.

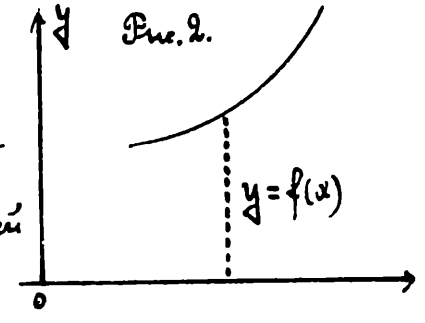


Рис. 2.

В цьому разі крива лінія є геометричним осередком кінців рядних для всіх можливих вартостей відтинкової x.

Очевидно, що рівнання (2) є висновком рівнання (1) як вислід визначення з нього вартости рядної y через x.

Крім наданого роду рівнань, ми в аналітичній геометрії зустрічаємо ще й такі:

$$x = a(\theta - \sin\theta) \; ; \qquad y = a(1 - \cos\theta)$$

(рівнання циклоїди), де θ була загадана нами змінником. В цьому разі устанлюється закон підпорядкування вартостей обох змінних значників окремих точок кривої якійсь незалежно-змінній третій величині, що має назву параметра або змінника.

Це підпорядкування й є тою прикметою, що визначає криву як певний геометричний осередок. Загально вибраємо його так:

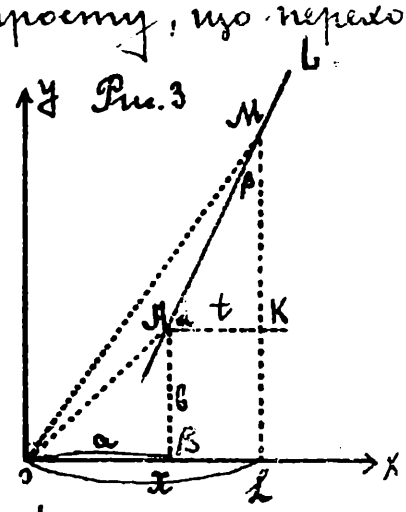
$$x=\varphi(t)\ ;\quad y=\psi(t)\ \ldots(3)$$

Очевидно вилучивши з цих рівнань змінника t, ми перейдемо до одного з рівнань (1) або (2).

§2. Виведемо змінникові рівняння де-яких простіших геометричних образів:

I Проста

Візьміть осі координат і просту, що переходить через задану точку $A(a,b)$. Означимо кути, що творить проста з осями x і y через α і β, а $\cos\alpha=\lambda$ і $\cos\beta=\mu$. Ми знаємо, що лет відтинку AM на вісь x-ів буде:



$$AM_x = AK = x-a = t\cos\alpha = \lambda t,$$

а лет цього ж відтинку AM на вісь y-ів буде:

$$AM_y = KM = y-b = t\cos\beta = \mu t$$

Таким чином ми можемо за рівняння простої вважати:

$$x = a + \lambda t$$
$$y = b + \mu t$$

це є змінникові рівняння простої. А виключаючи змінника t ми одержимо:

$$(t=)\ \frac{x-a}{\lambda} = \frac{y-b}{\mu}$$

рівняння простої, що переходить через дану точку, а саме:

$$\mu(x-a)-\lambda(y-b)=0$$

або, множачи на сомножника пропорційности к і беручи $к\mu = A$ і $к\lambda = B$, матимемо відоме рівняння:

$$A(x-a)+B(y-b)=0$$

II Змінникове рівняння кола.

Візьмім початок вісей в центрі кола й точку $M(x,y)$ на обводі його. Поведемо луч r в цю точку й хай кут, що творить цей луч з віссю x-ів буде θ. Тоді з тр-ка OMK маємо:

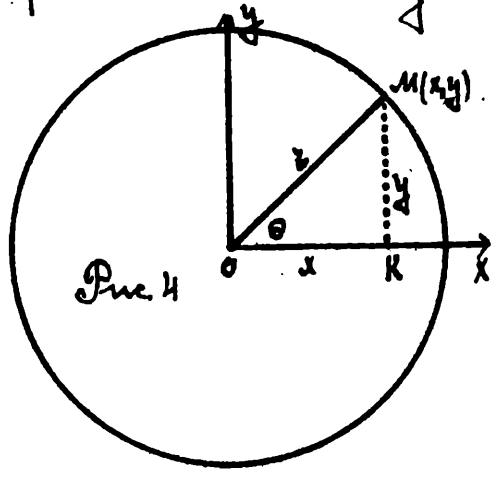


Рис. 4

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

Це й є змінникові рівняння кола, бо виключаючи з них змінника θ (піднесенням до квадрату й додаванням), ми матимемо відоме рівняння кола:

$$x^2+y^2=r^2$$

III Змінникове рівняння еліпси.

Очеркнемо навколо початку вісей два концентричні кола лучів a і b. На більшому колі візьмемо точку K й поведемо луч $OK = a$, тоді $OL = b$. З точок K і L спустимо на вісь x-ів прямі

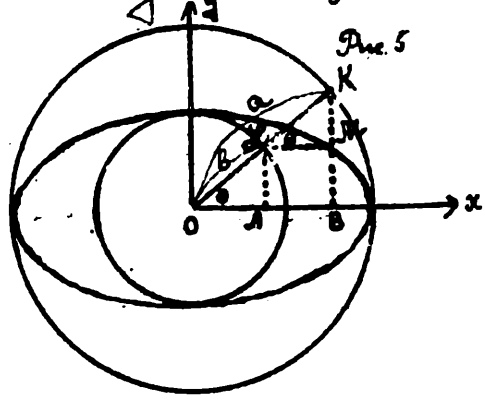


Рис. 5

і через точку L поведемо LM || осі [illegible] [illegible] знаємо, що точка M перетина пряма KB і LM буде належати до еліпси, що має осі 2a і 2b (див. будування еліпси). Означимо значини точки M через: $x = OB$ і $y = BM = AL$ і обчислимо їх.

З Δ OBL маємо: $OB = x = a\cos\theta$, а з Δ OLA маємо $AL = y = b\sin\theta$. Ці дві залежности x і y (значинів довільної точки еліпси) від одного й того самого змінника θ і є змінниковими рівняннями еліпси:

$$x = a\cos\theta$$

$$y = b\sin\theta$$

Справді: $\sin\theta = \frac{y}{b}$, $\cos\theta = \frac{x}{a}$. Піднесемо до квадрату й додамо рівности:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

IV Змінникове рівняння гіперболи.

Із курсу аналітичної геометрії знаємо, що коли від початку координат відкласти відтинки $OA = a$ і $OB = b$ поставити до осі x-ів в цих точках прямі, повести довільний промінь OK то відтинок його OD до перетину з першими прямими (в точці A) буде одного з відтинкових точок гіперболи, а відтинок другого прямого BC утворений тимчасе проміжком буде рядного тієї ж точки, що має відтинкову OD (рис. 6)

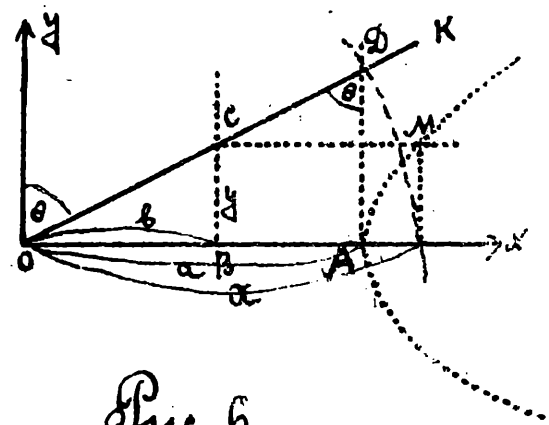


Рис. 6

Означимо кут відхилення проміня OK від вісі y-ків через θ, тоді $x = OD = \frac{OA}{\sin ODA} = \frac{a}{\sin\theta}$. А з Δ OBC маємо: $y = BC = OB\,ctg\,OCB = b\,ctg\,\theta$. Таким чином змінникові рівняння гіперболи є:

$$x = \frac{a}{\sin\theta}$$

$$y = b\,ctg\,\theta$$

§3. Дотична до плоскої кривої.

Ми вже зазначили, що для дослідження властивостей окремих точок кривої нам необхідно довідатися про характер дотичної до кривої, через цю точку поведеної. Тому в першу чергу перейдемо до складання загального рівняння дотичної до кривої в кожній її точці.

Зогляду на те, що ми розглядатимемо не певну означену точку кривої (x_0, y_0), а кожну почерзі в цій кривій, то значки її будемо означати x, y. Щоб відрізнити бігучі змінні рівняння ми їх будемо означати через заглавні літери X, Y.

Отже хай в прямокутній системі координат дана крива виражається рівнанням:

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots (d)$$

Візьмім на цій кривій точку $M(x, y)$ (рис. 7) і дуже близьку до неї точку $M_1(x_1, y_1)$ де $x_1 = x + \Delta x$ і $y_1 = y + \Delta y$. Тоді рівняння простої (в даному разі січної), що перейде через ці точки M і M_1 буде:

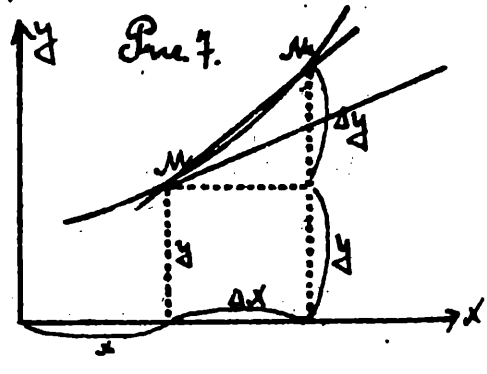


Рис. 7.

$$Y - y = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}(X - x)$$

або:

$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x)$$

Коли наближуватимемо точку M_1 до M до їх злиття, то Δx і Δy простуватимуть до нуля і в момент злиття M і M_1, себто, коли дана січна стане дотичною до кривої в точці M, ми матимемо:

$$Y - y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x)$$

або:

$$Y - y = y'(X - x) \quad \ldots\ldots (4)$$

або:

$$Y - y = f'(x)(X - x)$$

де із розуміння про похідну ми вже знаємо, що $y' = \operatorname{tg}\alpha$ - кутовому зміщенню самої дотичної. З рівняння (4) маємо:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

або:

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} \quad \ldots\ldots (5)$$

Коли б крива визначалася б змінними рівняннями: $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ то ми мали б

$$dx = \varphi'(t)\,dt \quad \text{і} \quad dy = \psi'(t)\,dt$$

А тому рівняння (5), після вставки знайдених величин dx і dy, та скорочення на dt, мало б вигляд:

$$\frac{X - x}{\varphi'(t)} = \frac{Y - y}{\psi'(t)}$$

Нарешті, коли рівняння кривої є в невизначеній формі:

$$F(x, y) = 0$$

то за правилом диференцування невизначених функцій маємо:

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

А тому вставши нової вартости y' в рівняння (4), після зведення до спільного знаменателя, дам:

$$(X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \ldots\ldots (7)$$

Лишається ще нам зясувати положення самої дотичної на площі, а це, як нам відомо з аналітичної геометрії, визначається кутами, що творить ця дотична з осями координат. До обчислення цих кутів і перейдемо.

§4. Кути спаду дотичної до кривої на осі координат.

Ми вже зазначили, що $y' = tg\alpha$, а тому:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{dy}{dx}$$

а звідси:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{dy^2}{dx^2}$$

Складаємо похідну пропорцію й маємо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{dy^2}{dx^2 + dy^2}$$

або:

$$\sin^2\alpha = \frac{dy^2}{dx^2 + dy^2}$$

Таким чином:

$$\sin\alpha = \frac{dy}{\pm\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Але $\angle\alpha + \angle\beta = \frac{\pi}{2}$ (див. рис. 8), а тому:

$$\cos\beta = \pm \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

Аналогічно:

$$\cos\alpha = \pm \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

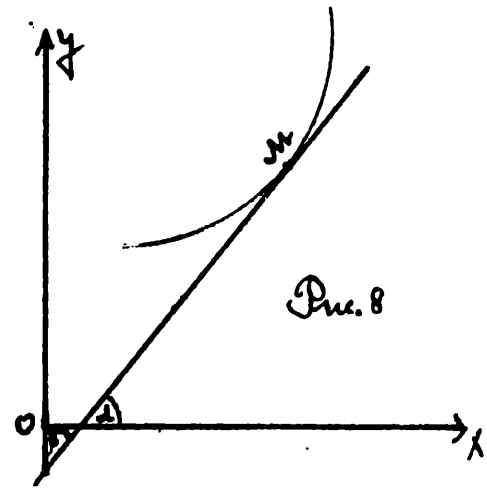


Рис. 8

А із проведених вищого рахунку ми знаємо, що:

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

а тому:

$$\lambda = \cos\alpha = \pm \frac{dx}{ds};\ \mu = \cos\beta = \pm \frac{dy}{ds} \quad \ldots\ldots (8)$$

Умовилося брати знак + коли дотична спрямована в бік зростання дуги й навпаки.

Очевидно, що коли рівняння кривої має вигляд:

$$x = \varphi(t)\ ;\quad y = \psi(t),$$

то $dx = \varphi'(t)\,dt$; $dy = \psi'(t)\,dt$ і

$$ds = \pm dt\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2},$$

а тому (після скорочення на dt):

$$\lambda = \cos\alpha = \pm \frac{\varphi'(t)}{\frac{ds}{dt}};\ \mu = \cos\beta = \pm \frac{\psi'(t)}{\frac{ds}{dt}}$$

або вживаючи символів: $\frac{dx}{dt} = x'$; $\frac{dy}{dt} = y'$; $\frac{ds}{dt} = s'$ маємо:

$$\lambda = \cos\alpha = \pm \frac{x'}{s'};\ \mu = \cos\beta = \pm \frac{y'}{s'} \quad \ldots\ldots (9)$$

Розглянемо тепер кілько прикладів:

1) Написати рівняння дотичної до параболи $y^2 = 2px$.

Рівняння дотичної є: $y - y_1 = y'(x - x_1)$.

Але $2yy' = 2p$; $yy' = p$; $y' = \frac{p}{y}$ тому:

$$y - y_1 = \frac{p}{y}(x - x_1)$$

або:

$$\overset{2px}{\cancel{y^2}} - yy' = px - px_1$$

тому:

$$yy' = p(x + x_1)$$

(відоме з аналітичної геометрії рівнання)

2) Написати рівнання дотичної до еліпси:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$$

$$(x - x_1)\frac{2x}{a^2} + (y - y_1)\frac{2y}{b^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 0; \quad \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

3) Написати рівнання дотичної до кривої
$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + D; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2By + E$$

Отже:

$$(x - x_1)(2Ax + D) + (y - y_1)(2By + E) = 0$$

або:

$$2Ax^2 + Dx - 2Axx_1 - Dx_1 + 2By^2 + Ey - 2Byy_1 - Ey_1 = 0$$

або:

$$Ax^2 + \frac{D}{2}x - Axx_1 - \frac{D}{2}x_1 + By^2 + \frac{E}{2}y - Byy_1 - \frac{E}{2}y_1 = 0$$

$$Axx_1 + Byy_1 + \frac{D}{2}x_1 + \frac{E}{2}y_1 = Ax^2 + By^2 + \frac{D}{2}x + \frac{E}{2}y$$

Додаємо до обох частин рівнання: $\frac{D}{2}x + \frac{E}{2}y + F$ і після упорядковання маємо:

$$Axx_1 + Byy_1 + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) - F = 0$$

4) Написати рівнання дотичної до циклоїди.

Рівнання її:

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t) \ldots\ldots (\alpha)$$

$dx = a(1-\cos t)\,dt = 2a\sin^2\frac{t}{2}\,dt; \quad dy = a\sin t\,dt$

А тому рівнання дотичної до циклоїди матиме вигляд (див. рівн. 4)

$$y - y_1 = \frac{a\sin t\,dt}{2a\sin^2\frac{t}{2}\,dt}(x - x_1)$$

або:

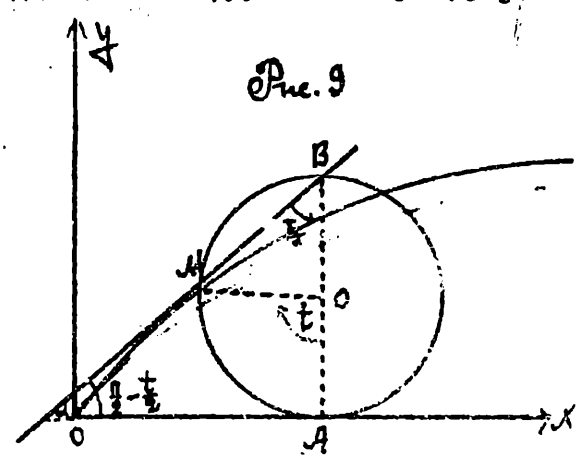
$$y - y_1 = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}(x - x_1)$$

або:

$$y - y_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)(x - x_1) \ldots\ldots (\beta)$$

Очевидно, що кут спаду дотичної на вісь x-ів є $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$.

Рис. 9



Візьмім на циклоїді точку $M(x_1, y_1)$ і творче коло що переходить через точку M. Поведемо поперечник кола $AB \perp$ до вісі x-ів і сполучимо точку M і B. Маємо Δ OBM, рівнораменний, в якому кути $\angle B$ і $\angle M$ є рівні половині зовнішнього Δ-ові кутут. Отже $\angle MBO = \frac{t}{2}$ а з Δ-ка ABK маємо $\angle\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$. Отже кут спаду простої MB буде $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ але як свідчить рівнання (β), це є кут спаду дотичної, що проходить через точку M, а тому MB є разом дотичною самої циклоїди.

Ці міркування дають спосіб збудування дотичної до циклоїди, а саме: через точку дотику ведемо творче коло й проста MB, що сполучує

точку дотику з верхнім кінцем основного поперечника кола й буде дотичною.

§5. Нормаля (прямова)

Ми знаємо, що прямовою зветься пряма до дотичної, поведений через точку дотику. З цього видно, що для кутових змінників обох простих мусить існувати умова їх прямовости, а саме

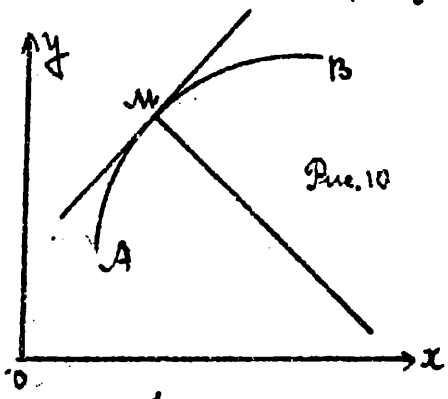


Рис. 10

$m_1 = -\frac{1}{m}$ де m_1 є кутовий змінник нормалі, а m - кутовий змінник дотичної. Ми довели, що кутовий змінник дотичної $\frac{dy}{dx}$, а тому кутовий змінник прямової має вигляд:

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}$$

Отже I) коли крива визначається рівнянням $y = f(x)$, то рівняння прямової буде:

$$1)\ Y - y = -\frac{1}{f'(x)}(X - x)$$

або:

$$(X + x) + f'(x)(Y - y) = 0 \ldots\ldots (10)$$

$$2)\ Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

або:

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0 \ldots\ldots (11)$$

II коли крива визначається рівнянням $F(x, y) = 0$ то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

а тому:

$$Y - y = + \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} (X - x)$$

або:

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad \ldots\ldots (12)$$

і III коли крива визначається злітниковими рівняннями:

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

то: $dx = \varphi'(t)\,dt$; $dy = \psi'(t)\,dt$, а через те рівняння (11) після скорочення на dt дає:

$$(X - x)\varphi'(t) + (Y - y)\psi'(t) = 0 \quad \ldots\ldots (13)$$

§6. Кути прямової з осями.

Означимо кути спаду дотичної АМ на вісь x-ів через α, а на вісь y-ків - через β. Кути ж спаду прямової на туж вісь x-ів через τ, а на вісь y-ів через ν. Тоді з Δ АМВ маємо (рис 11):

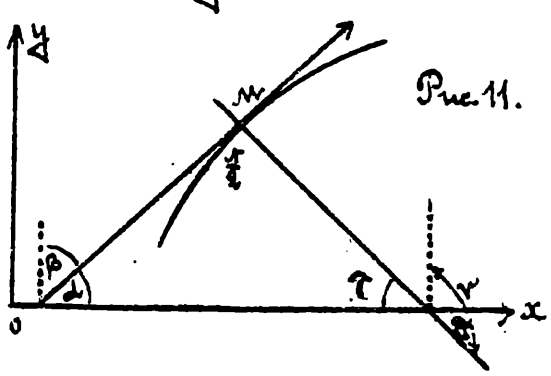


Рис. 11.

$$\tau = \beta$$

(як прямово-рамені кути)

а кут $\nu = \frac{\pi}{2} + \tau = \pi - \alpha$ (з Δ АМВ)

А тому:

$$\cos\tau = \cos\beta$$

а $\cos\nu = -\cos\alpha$; але $\cos\alpha = \pm\frac{dx}{ds}$; $\cos\beta = \pm\frac{dy}{ds}$, тому:

$$\lambda_n = \cos\tau = \pm\frac{dy}{ds}; \quad \mu_n = \cos\nu = \mp\frac{dx}{ds}$$

В даному разі знак ± взято щодо напряму прямової, так: + беруть тоді, коли напрям прямової одержується поворотом додатнього напряму дотичної на 90° проти стрілки годинника.

Коли же крива визначається рівнянням:

$$F(x,y)=0$$

то з рівности:

$$tg\,\tau = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \quad \text{(див. рівн 12)}$$

Як висліц попередніх перетворень маємо:

$$\lambda_n = \cos\tau = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\Delta F} = \frac{1}{\Delta F}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}$$

і аналогічно:

$$\mu_n = \cos\nu = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\Delta F} = \frac{1}{\Delta F}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}$$

де вираз:

$$\Delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} \quad \ldots\ldots (13)$$

має назву <u>диференціального змінника першого порядку.</u>

Як приклад напишемо рівняння прямової до циклоїди.

Рівняння самої кривої буде:

$$x = a(t-\sin t) \qquad y = a(1-\cos t)$$

а тому:

$$dx = a(1-\cos t)\,dt\ ; \qquad dy = a\sin t\,dt$$

Тепер тепер, вставляючи ці рівности в рівняння (11) і скорочуючи через на a і dt, маємо:

$$(X-x)(1-\cos t) + (Y-y)\sin t = 0$$

де t є центровий кут творчого кола AOM, що відповідає даній точці дотику. Вставляючи в неше рівнян-

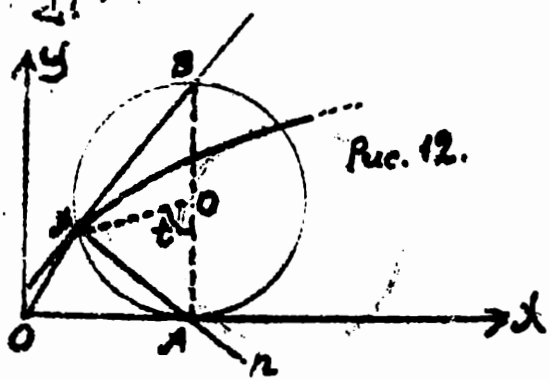


Рис. 12.

на вартости x і y маємо:

$$[x-a(t-\sin t)](1-\cos t)+[y-a(1-\cos t)]\sin t=0\text{, або:}$$

$$(x-at)(1-\cos t)+\cancel{a\sin t(1-\cos t)}+y\sin t-\cancel{a\sin t(1-\cos t)}=0,$$

або:

$$(x-at)\sin\frac{t}{2}+y\cos\frac{t}{2}=0.$$

Щоб збудувати прямову до циклоїди, ми будемо шукати точку перехрестя її з віссю x-ів і для цього вставимо в останньому рівнянню $y=0$; тоді:

$$(x-at)\sin\frac{t}{2}=0\text{, або } x=at$$

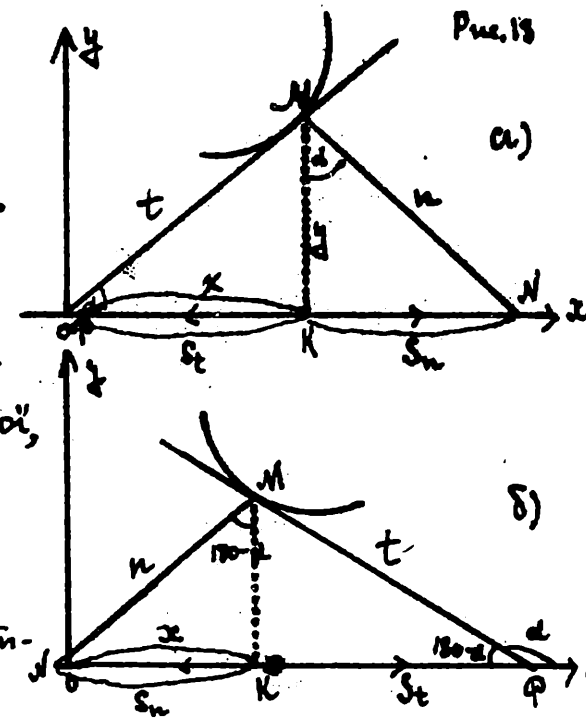
Але, з властивости циклоїди: $OA=\smile AM=at$, а тому прямова має переходити через точку A дотику творчого кола до осі x-ів. Отже спосіб будування прямової до циклоїди ясний: Для цього досить сполучити просторо точку дотику з нижнім кінцем головного поперечника творчого кола.

Це твердження цілком оправдується геометрично, бо коли, як доведено, дотична до циклоїди є проста (тятива), що переходить через точку дотику й верхній кінець головного поперечника творчого кола циклоїди, то прямова мусить переходити через нижній кінець того ж поперечника, бо кут BMA (рис 12) є прямий і обводовий для кола (бо рахено MB є тятивою кола) а тому він спирається на поперечника, що й підтверджує наші доводи.

§7. Обчислення величин дотичностей кривої.

Ми знаємо, що відтинки KP і KN (рис 13) звуть-

ся відповідно піддотичного й підпрямового. Їх напрям вважається від основи мережевого прямку до перехрестя дотичної, або прямової, з віссю x-ів. Коли напрям чи піддотичної, чи підпрямової однеаковий з напрямом вісі x-ів, то ми беремо їх вартости за додатні й навпаки.



Розглянемо Δ PMK (рис. а). З нього маємо:

$$-S_t = PK = y\,ctg\,\alpha$$

(тут знак — бо напрям піддотичної противний напряму вісі x-ів). Звідси:

$$S_t = -\frac{y}{tg\,\alpha} = -\frac{y}{y'} \text{ або } S_t = -\frac{y\,dx}{dy} \;\ldots\ldots (14)$$

[Також з Δ KMP (рис. б) маємо: $S_t = y\,ctg(180-\alpha) = -y\,ctg\,\alpha = -\frac{y}{y'} = -\frac{y\,dx}{dy}$].

Звідси, за теоремою Пітагора, маємо:

$$t^2 = y^2 + S_t^2 = y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2} = \frac{y^2}{dy^2}(dx^2 + dy^2)$$

або:

$$t = \frac{y}{dy}\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{y\,ds}{dy} \;\ldots\ldots (15)$$

Далі з Δ-ка MKN (рис. а) маємо:

$$S_n = y\,tg\,\alpha = yy' \;\ldots\ldots (16)$$

або:

$$S_n = \frac{y\,dy}{dx} \;\ldots\ldots (16^a)$$

[а з Δ MKN (рис. б) маємо: $-S_n = NK = y\,tg(180-\alpha) = -y\,tg\,\alpha$, або $S_n = yy'$].

і нарешті, за теоремою Пітагора, одержимо:

$$n^2 = S_n^2 + y^2 = y^2 y'^2 + y^2 = y^2\left(\frac{dy^2}{ds^2} + 1\right); \quad n^2 = \frac{y^2}{ds^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

$$n = \frac{y\,ds}{dx} \quad \ldots\ldots (17)$$

<u>Приклади.</u>

I. Обчислити величини сталостей еліпси:

$$x = a\cos\theta$$

$$y = b\sin\theta$$

Маємо:

$$dx = a\sin\theta\, d\theta; \quad dy = -b\cos\theta\, d\theta$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

Тому 1). $t = \frac{y\,ds}{dy} = \frac{\cancel{b}\sin\theta\,\cancel{d\theta}\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}{\cancel{b}\cos\theta\,\cancel{d\theta}} = tg\,\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$

[Виключаємо змінника θ:

$$\sin\theta = \frac{y}{b}; \quad \cos\theta = \frac{x}{a}; \quad tg\,\theta = \frac{ay}{bx}$$

$$t = \frac{ay}{bx}\sqrt{a^2\frac{y^2}{b^2} + b^2\frac{x^2}{a^2}} = \frac{y}{b^2x}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$$

(де x, y значення точки дотику). Це є відомий з аналітичної геометрії взір].

2) $S_t = -\frac{y\,dt}{dy} = \frac{\cancel{b}\sin\theta\, a\sin\theta\,\cancel{d\theta}}{\cancel{b}\cos\theta\,\cancel{d\theta}} = \frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta}$ [Виключимо θ:

$$S_t = \frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{a(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta} = \frac{a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}{\frac{x}{a}} = \frac{a^2-x^2}{x}\Big]$$

<u>Примітка</u>. Ми бачимо, що вартість піддотичної не залежить від величини малої осі еліпси, а тому можна твердити що: <u>коли на спільній горизонтній осі збудувати декілька еліпс і через яку-небудь точку цієї осі провести</u>

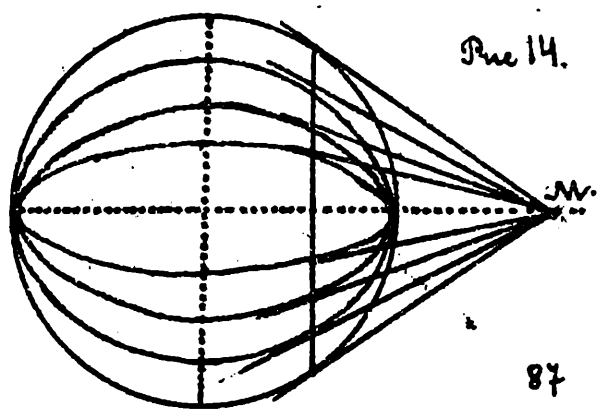


Рис 14.

прямову до неї тятиву, то дотичні поведені до всіх цих еліпс через перехрестя їх з даного тятивого збігаються в одній точці, що лежить на продовженню головної осі.

Коли цю тятиву наближати до малої осі, то точка збігу дотичних простує на безмежність і в лежеволу положенню (коли тятива простує до малої осі) всі ці дотичні є рівнобіжні. Навпаки, коли тятива віддаляється від малої осі, тоді точка збігу дотичних наближається до еліпс і в лежеволу положенню, коли ця тятива переходить через вершок еліпс стає дотичною їх, то й точка збігу дотичних зливається зі спільним вершком еліпс, а всі дотичні зливаються з цією тятивою творять одну спільну дотичну до всіх еліпс.

Очевидно, що в числі еліпс збудованих на даній великій осі буде й приміщене кола цих еліпс і дотична поведена до цього кола через перехрестя його з даною тятивою також перейде через нуж точку збігу дотичних.

Ця властивість дає змогу нам збудувати дотичну до еліпси в даній точці її обводу. Припустім, що нам дається еліпса AB (рис. 15) і точка на ній M через яку треба повести дотичну до еліпси. Будуємо приміщене кола й з точки M спускаємо прям MN на головну вісь

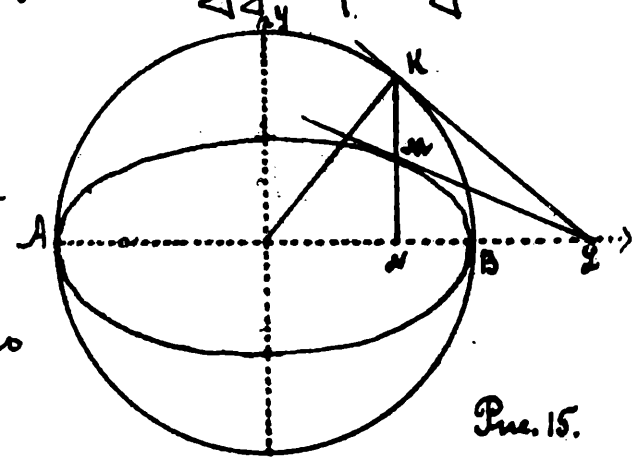


Рис. 15.

елипси. Продовжуємо цей промінь до перехрестя його з прямолінійним колом в точці K. Ми тільки-що довели, що дотичні проведені до кола в точці K і до еліпси в точці M будуть збігатися в одній точці L, а тому будуємо в точці K дотичну до кола й точку L перехрестя її з продовженням головної вісі еліпси спочатку з точкою M. Це й буде потрібна дотична

$$3)\quad n = \frac{y\,dy}{dx} = \frac{b\sin\theta\, b\cos\theta\, d\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}{-a\sin\theta\, d\theta} = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

Знак „–" тут є через те, що за додатно прямову ми вважали завжди, тоді як в даному разі будемо мати завжди внутрішню прямову. Тому за підрозвідтинну беремо лише абсолютну величину:

$$n = \frac{b}{a}\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

[після перетворення до рівняння вигляду $f(x,y)=0$ матимемо:

$$n = \frac{1}{a^2}\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}$$

що є знайомим для нас взором.]

$$4)\quad S_n = \frac{y\,dy}{dx} = \frac{b\sin\theta \cdot b\cos\theta\, d\theta}{-a\sin\theta\, d\theta} = -\frac{b^2}{a}\cos\theta$$

Тут знак „–" цілком зрозумілий, бо коли піддотична є додатньою, то підпрямова мусить бути відємною (по напряму) тому для обчислення її величини скористуємося абсолютною вартістю:

$$S_n = \frac{b^2}{a^2}\cos\theta$$

[перетворюючи: $\cos\theta = \frac{x}{a}$; тому $S_n = \frac{b^2x}{a^2}$].

II приклад. Знайти величини дотичности до параболи: $y^2 = 2px$.

Звідси: $2yy' = 2p$; $y' = \frac{p}{y}$. тому:

$$t = \frac{y\,ds}{dy} = y\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy} = y\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1} = y\sqrt{\frac{1}{y'^2}+1} = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} =$$

$$= \frac{y^2}{p}\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}} = \frac{y}{p}\sqrt{y^2+p^2}$$

або:

$$t = \sqrt{\frac{y^4}{p^2}+y^2}$$

але $y^2 = 2px$; $y^4 = 4p^2x^2$; тому:

$$t = \sqrt{4x^2+y^2}$$

2) $S_t = -\frac{y}{y'} = -\frac{y^2}{p}$ або $y^2 = 2px$, тому: $S_t = -2x$

(„–" відповідає напрямку піддотичної протилежному до напрямку осі x-ів.)

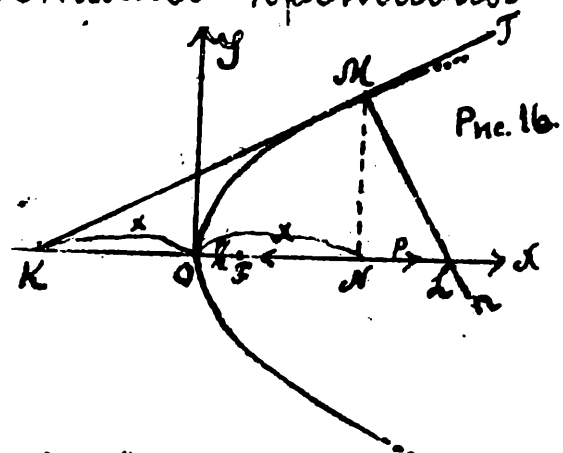


Рис. 16.

3) $n = \frac{y\,ds}{dx} = y\sqrt{1+y'^2} = y\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}} =$

$$= \sqrt{p^2+y^2}$$

4) $S_n = yy' = y\frac{p}{y} = p$ (const).

Ми ми вже знаємо, це об'єкт вкладеність параболи, що для кожної точки її обводу підпрямовання є рівна з півпараметром p.

Доведемо, що маса вкладеність належить лише параболі, а інший інший черевій.

Нехай маємо що:

$$yy' = a \text{ (const)}$$

то звідси:

$$y\,dy = a\,dx$$

Інтегруємо:

$$\int y\,dy = a\int dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = ax + c \quad \text{або} \quad y^2 = 2ax + C$$

$$y^2 = 2a\left(x + \frac{c}{a}\right)$$

Це є парабола зі змінником $2p = 2a$ й значними вершина $(-\frac{c}{a}, 0)$. Даючи довільному числу c вартости від нуля до $\pm\infty$, ми одержимо серед парабол що мають віссю вісь x-ів. В окремому випадку, коли $c=0$, маємо параболу з вершиною в початку координат.

III Приклад. Обчислити величини дотичности циклоїди: $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1-\cos\theta)$

Диференцуємо:

$$dx = a(1-\cos\theta)\,d\theta; \quad dy = a\sin\theta\,d\theta$$

Тому:

$$ds = a\,d\theta\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = a\,d\theta\sqrt{1 + 2\cos\theta + \overset{1}{\cancel{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}}$$

$$ds = a\,d\theta\sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

Отже:

1) $t = \frac{y\,ds}{dy} = \frac{a(1-\cos\theta)}{\cos\frac{\theta}{2}} = 2a\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

2) $\delta_t = -\frac{y}{y'} = -a\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta} = -2a\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}$

3) $n = \frac{y\,ds}{dx} = \frac{a(1-\cos\theta)\,2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta}{a(1-\cos\theta)\,d\theta} = 2a\sin\frac{\theta}{2}$

4) $\delta_n = \frac{y\,dy}{dx} = \frac{\cancel{a(1-\cos\theta)}\cdot a\sin\theta\,\cancel{d\theta}}{\cancel{a(1-\cos\theta)\,d\theta}} = a\sin\theta$

§8. Крива в бінуп. ових координатах.

З аналітичної геометрії ми знаємо, що кожна крива в бінупових координатах визначається певною залежністю між величиною луча-вектора ρ й величиною бінупового кута. Таким чином в загальнім вигляді рівняння такої кривої буде:

1) у визначеній формі: $\rho = f(\theta)$

або 2) в невизначеній формі: $F(\rho, \theta) = 0$

і нарешті 3) в змінниковій формі: $\rho = \psi(t)$; $\theta = \varphi(t)$

Всі ці рівнання легко перетворити одно в друге.

Візьмім якусь криву L і зорієнтуємо її, щодо біпунових координат з віссю OX і біпуном O. Хай луч-вектор її буде ρ а біпуновий кут θ. Тепер типом рівнання її можна буде написати:

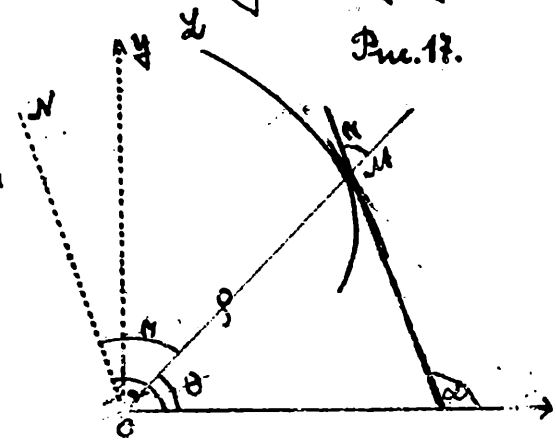


Рис. 17.

$$\rho = f(\theta) \quad \ldots \quad (a)$$

Поведемо через яку будь точку $M(x, y)$ кривої дотичну до неї MN (рис 17.)

Очевидно, що коли нам відомо напрям луча-вектора, що переходить точку M, то легко установити й напрям дотичної MN. Для цього лише треба знайти кутовачину цієї дотичної до луча вектора ρ. Цей <u>дотичний кут</u> означимо через μ й обчислимо його. Повівши через сиди O просту ON рівнобіжну до дотичної ми одержимо кут MON рівний куту μ. Коли кут спаду дотичної означимо через α, то кут:

$$\mu = \alpha - \theta$$

А звідси:

$$tg\,\mu = tg(\alpha - \theta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\theta}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\theta} \quad \ldots \quad (b)$$

Лишається лише обчислити $tg\,\alpha$ через координати ρ і φ. Кут α є кут спаду дотичної (на вісь x-ів) а тому в декартових координатах $tg\,\alpha = y' = \frac{dy}{dx}$

Тому:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx}{\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy}$$

Але взори переходу від прямокутних до біполярних координат:

$$x = \rho\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta$$

А звідси:

$$dy = \sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\varphi$$
$$dx = \cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\varphi$$

Множимо перше рівняння на $\cos\theta$, а друге на $\sin\theta$ й відніймемо його. Тоді маємо:

$$\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta = \rho\, d\theta$$

Також, помноживши перше рівняння на $\sin\theta$, а друге на $\cos\theta$ й додавши одно до другого одержимо:

$$\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\rho = d\rho$$

Таким чином:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho\, d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{\rho'} \quad \ldots\ldots (18)$$

§9. Величини дотичної і нормалі у біполярних координатах.

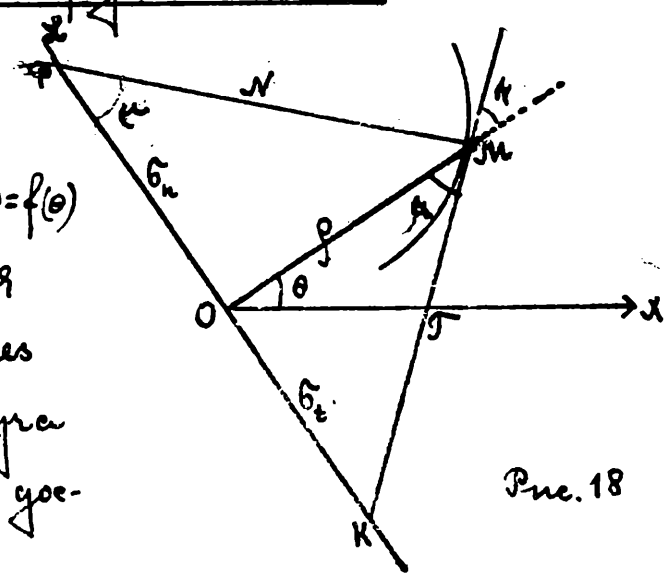


Рис. 18

Визначення.

I. Вісь метів.

Віссю метів кривої $\rho = f(\theta)$ в даній точці зветься проста поведена через біпол паралельно до луча вектора точки, що досліджується.

II Величини дотичної в біполярних координатах

1) Відтинком дотичної й прямової звуться відтинки згаданих простих від точки дотику до зустрічі їх з віссю метів. [Рис. 18 - відтинок дотичної MK; прямової - MP.]

2) Піддотичною й підпрямовою звуться відтинки осі метів від біґуна до зустрічі з відповідною простою [рис. 18: піддотична OK, а підпрямова OP.]

<u>Обчислення.</u> З Δ-ка MOK маємо:

1) $KM = T = \frac{\rho}{\cos\mu} = \rho \sec\mu = \rho = \sqrt{1+tg^2\mu}$

але $tg\mu = \frac{\rho}{\rho'}$, тому <u>відтинок дотичної</u> буде:

$$T = \frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2+\rho'^2} \quad \ldots\ldots (19)$$

2) З того ж Δ-ка <u>відтинок піддотичної</u>

$$T_t = \rho\, tg\mu = \frac{\rho^2}{\rho'} \quad \ldots\ldots (20)$$

3) Відтинок прямової: Δ-ка MOP маємо:

$$N = \frac{\rho}{\sin\mu} = \rho \operatorname{cosec}\mu = \rho\sqrt{1+ctg^2\mu}$$

або

$$N = \rho\sqrt{1+\frac{\rho'^2}{\rho^2}} = \sqrt{\rho^2+\rho'^2} \quad \ldots\ldots (21)$$

Підпрямова: з тогож Δ-а маємо:

4) $$b_n = \rho\, ctg\mu = \rho' \quad \ldots\ldots (22)$$

Далі цілі величини це інші вирази.

Диференція дуги:

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

але $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$, де $\rho = f(\theta)$

Тому:

$$dx = \cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta$$
$$dy = \sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta$$

А звідци:

$$dx^2+dy^2 = (\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\rho^2 + \rho^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

або:

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 = d\theta^2(\rho'^2 + \rho^2)$$

Таким чином:

$$ds = d\theta\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$$

Вставляючи цю вартість у вори (19) і (21) маємо:

$$T = \frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \frac{\rho\, ds}{\rho' d\theta} = \frac{\rho\, ds}{d\rho} \quad \text{----} (23)$$

$$N = \sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{d\rho}{d\rho} = \frac{\rho' ds}{d\rho} \quad (24)$$

§10. Циссоїда Діокля.

Візьмім в колі лука і поперечник і через один з його кінців B поведемо дотичну, а другий його кінець A візьмемо за біґуп проміні, що перетинають коло. Кожний з цих проміні зустріне в якійсь точці обвід кола, а далі своїм продовженням і хкадану дотичну BK.

Коли віддалення від точки зустрічі проміня з колом до зустрічі з цією дотичною будемо відкладати на тому ж самому промені від біґупа A, то геометричний осередок кінців цих відтинків є кривою, що зветься Циссоїдою Діокля.

Означимо кут між якимнебудь промінем і основним поперечником AB через θ, напр. ∠ KAB = θ й візьмім за бігунову вісь сам поперечник AB

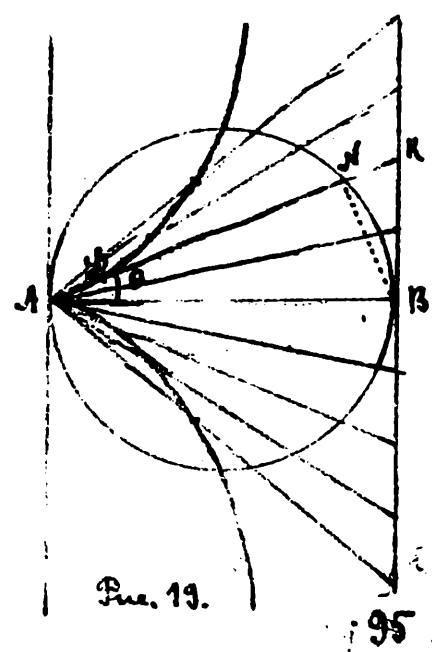


Рис. 19.

а тому A за біпол. Очевидно що для даного проміня AK луч вектор $\rho = AZ$. Але згідно умові відтинок $AZ = NK$, а тому $\rho = AZ = AK - AN$. Тепер з Δ-ка AKB маємо: $AK = \frac{2r}{\cos\theta}$, а з Δ-ка ANB: $AN = 2r\cos\theta$. Тому:

$$\rho = \frac{2r}{\cos\theta} - 2r\cos\theta = \frac{2r}{\cos\theta}\overset{\sin^2\theta}{(1-\cos^2\theta)}$$

або

$$\rho = 2r\sin\theta\,tg\theta \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Це й є біполове рівняння циссоїди.

Щоб перевести це рівняння до прямокутних координат, беремо взори відповідного переходу, а саме:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}\ ;\quad tg\theta = \frac{y}{x}\ ;\quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

і вставляємо їх у рівняння (25). Тоді маємо:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2ry^2}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

або:

$$x^3 = y^2(2r - x) \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Як спостерігаємо, рівняння циссоїди Діокля є третього ступіня.

Для аналізи рівняння визначуємо y:

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{2r-x}}$$

і бачимо, що коли x наближується до вартости $\sqrt{2r}$, то y простує на безмежність, себто крива асимптотично наближається до дотичної, поведеної через кінець B головного поперечника.

Обчислимо тепер кут, що творить дотична до кривої в який-небудь її точці з відповідним лучем вектором.

$$tg\mu = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{2r\sin\theta\, tg\theta}{\frac{2r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{2r\sin\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{tg\theta}{1+\frac{1}{\cos^2\theta}}, \text{ або } tg\mu = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+1}$$

Знайдемо ρ': диференціяя дуги:

$$\rho' = 2r\sin\theta\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right) = 2r\,tg\theta\sec\theta\left(1+\cos^2\theta\right)$$

$$ds = d\theta\sqrt{4r^2\sin^2\theta\, tg^2\theta + 4r^2 tg^2\theta\sec^2\theta\left(1+\cos^2\theta\right)} =$$

$$= 2r\,tg\theta\sec\theta\, d\theta\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta + (1+\cos^2\theta)^2} = 2r\,tg\theta\sec\theta\, d\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

1) Обчислення відтинку дотичної:

$$T = \frac{\rho ds}{d\rho} = \frac{2r\sin\theta\, tg\theta \cdot 2r\, tg\theta\sec\theta\, d\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{2r\, tg\theta\sec\theta\left(1+\cos^2\theta\right)d\theta} = \frac{2r\sin\theta\, tg\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{1+\cos^2\theta}$$

2) Обчислення відтинку прямової:

$$N = \frac{\rho' ds}{d\rho} = \frac{ds}{d\theta} = \frac{2r\, tg\theta\sec\theta\, d\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}}{d\theta} = 2r\,tg\theta\sec\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

3) Обчислення піддотичної:

$$\sigma_t = \frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{4r^2\sin^2\theta\, tg^2\theta}{2r\, tg\theta\sec\theta\left(1+\cos^2\theta\right)} = 2r\frac{\sin^3\theta}{1+\cos^2\theta}$$

4) Обчислення підпрямової:

$$\sigma_n = \rho' = 2r\,tg\theta\sec\theta\left(1+\cos^2\theta\right)$$

§11. Архімедова спіраля.

Рівняння її $\rho = a\theta$

Припустімо, що луч-вектор обертається рівномірно круг біґуна і в той самий час точка M рівномірно посувається вздовж луча вектора від біґуна (рис. 20).

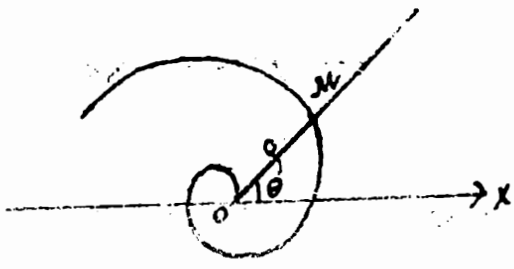


Рис. 20

Вимірюємо кут (фазу) в

кругових одиницях і припускаємо, що одиниці міри кута θ відповідає віддалення a - точки M від бігуна O. Тоді зпаслом, це віддалення ρ є пропорційним куту θ, а тому:

$$\rho = a.\theta \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

де a служить сочинником пропорційности.

Знайдемо величину стичностей:

$$\rho = a\theta; \qquad \rho' = a$$

Отже:

$$ds = d\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = d\theta\sqrt{a^2\theta^2+a^2} = a\,d\theta\sqrt{1+\theta^2}.$$

А тому:

$$T = \frac{a\theta\, \cancel{a\,d\theta}\sqrt{1+\theta^2}}{\cancel{a\,d\theta}} = a\theta\sqrt{1+\theta^2}$$

$$N = \frac{a.\,a\,d\theta\sqrt{1+\theta^2}}{a\,d\theta} = a\sqrt{1+\theta^2}$$

$$\sigma_t = \frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{a^2\theta^2}{a} = a\theta^2; \qquad \sigma_n = \rho' = a$$

Вартість підпрямової $\sigma_n = a$ незалежить від бігунового кута θ, а тому для всіх точок архимедової спіралі є величиною сталою. Цю властивість можна скористати для будування дотичної в якій бажаємо точці спіралі. А саме:

Візьмім на архимедовій спіралі яку будь точку M і поведім через неї луч вектор OM. Тоді S, пряма до ρ, поведений через бігун O буде нормовою віссю, а через те $OK = \sigma_n$ є підпрямовою, а тому рівна a. Тепер спосіб будування дотичної стає цілкою ясним, а саме:

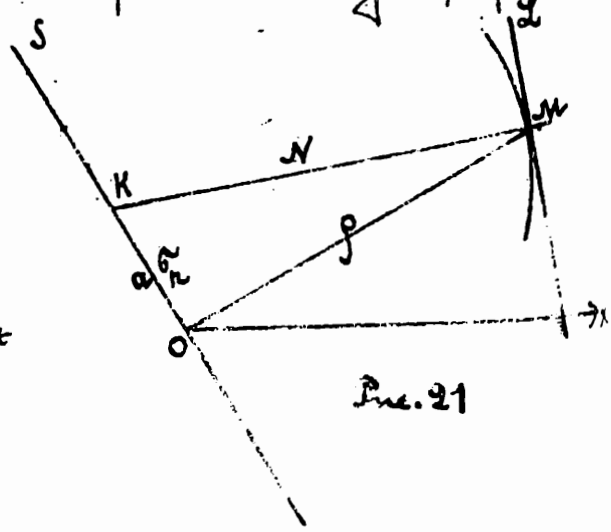


Рис. 21

1) через точку M ведемо луч вектор і будемо лінію вісь L (рис 21). 2) На цій вісі від бігуна o відкладаємо a й наміцуємо точку K. Далі 3) сполучаємо точку K з точкою M і це буде прямовою, а 4) прям поведений до KM через точку M буде потрібною нам дотичною

§11. Гіперболична спіраль.

Візьмемо бігунову координатну систему й припустім, що дана точка по мірі зростання бігунового кута наближається з безмежности до бігуна рівномірно посуваючися вздовж луча вектора. Тоді ясно, що в кожний момент, віддалення точки від бігуна буде зворотне пропорційним величині бігунового кута. Припустім, що одиниці (круговій) міри бігунового кута відповідає віддалення точки від бігуна рівна a. Тоді:

$$\rho : a = 1 : \theta$$

а звідси рівняння гіперболичної спіралі:

$$\rho\theta = a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

З аналізи рівняння видно, що коли $\theta = 0$, то $\rho = \infty$; коли θ зростає, то ρ зменшується і нарешті, коли $\theta = \infty$, то $\rho = 0$. Отже крива творить безліч оборотів навколо бігуна, все більш і більш наближаючися до бігуна, але його не досягає його ніколи і віддалення від нього точки може

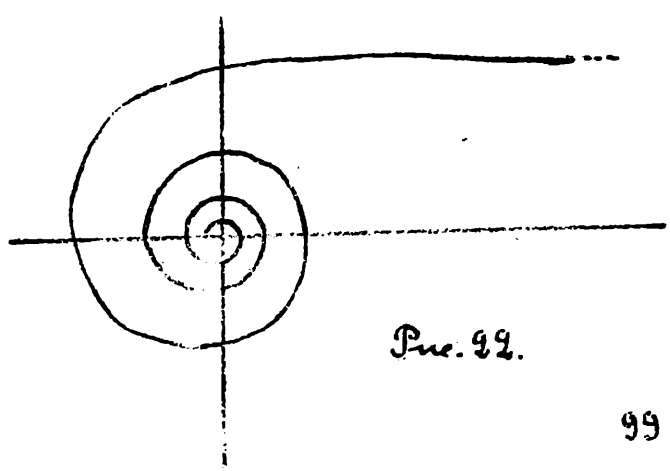


Рис. 22.

стати як бажано малим). Тому цей бігун звється асимптотичного точкою гіперболичної спіралі (рис. 22).

Ми залишаємо студіюючим для вправи обчислення всіх величин стичностей цієї спіралі, а зупинимося лише на обчисленні величини бігунової піддотичної. Отже:

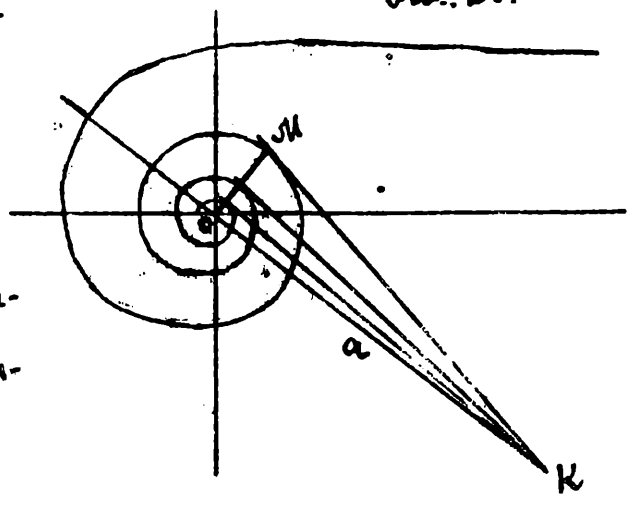
$$\sigma_t = \frac{\rho^2}{\rho'} \quad \text{але} \quad \rho' = \left(\frac{a}{\theta}\right)' = -\frac{a}{\theta^2}$$

тому:

$$\sigma_t = \frac{a^2}{\theta^2} : -\frac{a}{\theta^2} = -a$$

Таким чином бігунова піддотична для дотичних у всіх точках гіперболичної спіралі є однакової, а це дає легкий спосіб будування самої дотичної, а саме: сполучаємо точку дотику M з бігуном, і через бігун ведемо лінію вісь. Коли на цій вісі відкладемо $OK = |a|$, то проста, що сполучить точку K з даною M буде потрібною дотичною

Рис. 23.



§ 12. Логаритмична спіраль

Розглянемо властивости ще третьої спіралі, що має назву логаритмичної й виражається рівнянням:

$$\lg \frac{\rho}{a} = m\theta \quad \text{або:} \quad \rho = a e^{m\theta} \quad \ldots \quad (29)$$

де a є довільно вибране число.

Досліджимо рівняння:

1) коли $\theta \neq 0$, то $\rho \neq 0$

2) коли $\theta = 0$, то $\rho = a$

3) коли $\theta = +\infty$, той $\rho = +\infty$

4) коли $\theta = -\infty$, то $\rho = 0$

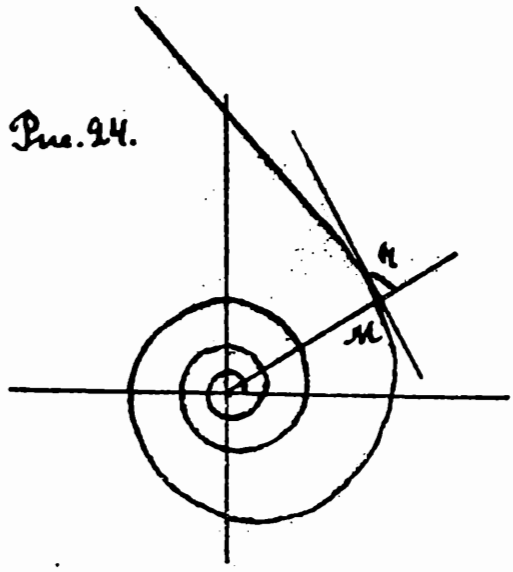


Рис. 24.

Очевидно, що точка O (біґуп) знова є асимптотичною. Лишаючи на боці обчислення величини дотичностей, ми обчислимо дотиковий кут μ. Ми знаємо вже, що $tg\theta = \frac{\rho}{\rho'}$, але

$$\rho' = ame^{m\theta}$$

а тому:

$$tg\mu = \frac{ae^{m\theta}}{ame^{m\theta}} = \frac{1}{m}\ (const)$$

Тамим чином кут нахилу дотичної не залежить від величини біґулового кута, а тому однаковий для всіх точок логарифмичної спіралі. Це є причиною того, що логарифмичну спіраль звуть рівнокутньою. Очевидно, що ця властивість також дає дуже простий спосіб будування дотичної в кожній точці спіралі, коли відома вартість $tg\mu$

§13. Форма кривої (випуклість або вмуклість).

Візьмім якусь криву AB визначену рівнянням $y = f(x)$ і на ній точку $M(x, y)$. Через цю точку веденемо дотичну L. Візьмім ще другу точку N дуже близьку

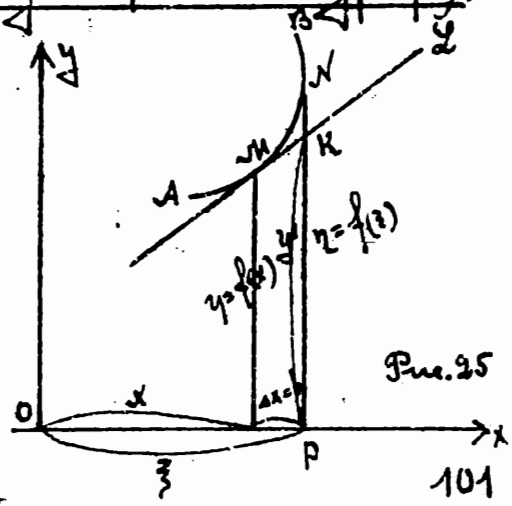


Рис. 25

до M і означимо її значини через ξ і η, при-
чому $\xi = x + \Delta x = x + h$ і $\eta = f(x+h)$

Щоб дослідити форму кривої нам треба буде знайти як вона віддалена від дотичної з обох боків її дотику. Для цього знайдемо вартість NK, віддалення точки N кривої від даної дотичної вздовж відповідної рядної. З рис. 25 ми бачимо що $NK = PN - PK$, але $NP = y = f(x+h)$ а для визначення PK уявляємо те, що точка K лежить на дотичній, а тому її значини повинні задовольняти рівняння цієї дотичної, а саме, вставляючи ці значини $x_1 = \xi = x+h$ і y_1 в загальне рівняння дотичної ми можемо мати тотожність:

$$y - y_1 = f'(x)(x - x_1)$$

або:

$$f(x) - y_1 = f'(x)(x - x - h) = h f'(x)$$

А звідси:

$$KP = y_1 = f(x) - h f'(x)$$

Отже таким чином: $NK = f(x+h) - [f(x) + h f'(x)]$.

Коб розгортуючи $f(x+h)$ в ряд Тейлора, маємо:

$$NK = \cancel{f(x)} + \cancel{h f'(x)} + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \dots - \cancel{f(x)} - \cancel{h f'(x)} =$$

$$= \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \dots \qquad (d)$$

Ми взяли точку N дуже близько до точки M і через те можемо вважати величину h так малою, що за властивостю цілих функцій маємо право твердити, що знак NK залежить лише від знаку старшого члену, себто від знаку $\frac{h^2}{2} f''(x)$. В цьому члені h є в дру-

голу ступіні, а через те знак відтинка NK залежатиме лише від знаку $f''(x)$. Звернемо увагу ще й на те, що при парному ступіні k знак його загалом не впливає на вартість величини NK. Тобто крива з обох боків точки дотику лежить лише по один бік дотичної. Умовимося звати бік кривої обернений до дотичної її <u>випуклістю</u>, а протилежний бік <u>вгнутістю</u> кривої. Тоді можна сказати що коли $f''(x) > 0$, то крива (що лежить в першій або в другій чвертках координатних осей) обернена випуклістю до осі ікс (лежить поза кутом створеним дотичною й віссю ікс), а коли $f''(x) < 0$, то крива обернена до осі ікс вгнутістю (лежить на полі згаданого кута) (рис. 26).

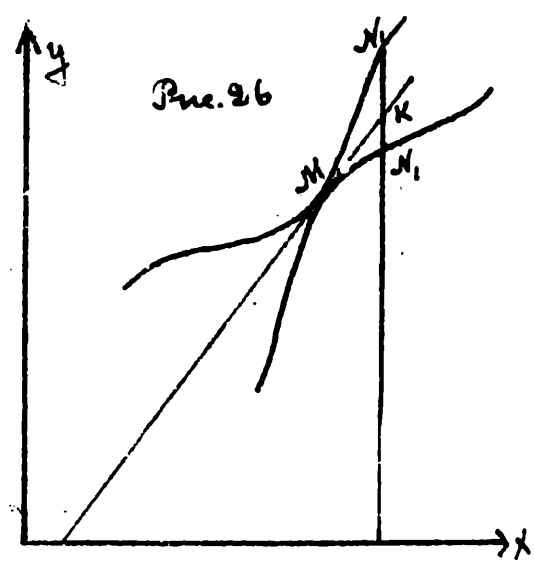


Рис. 26

Легко довести, що коли крива лежить в III і IV чвертках координат (відємні вартости рядних) то ці твердження трансформуються навпаки (бо тоді y і η є відємні і різниця (η-y) має вартість протилежну знаком відповідній вартости різниці (η-y) в першому випадку)

Щоб об'єднати обидва випадки, звернемо увагу на те, що в першому з них сама функція $y = f(x)$ має додатню вартість, себто лежить той

має знак, що $f''(x)$ при <u>випуклості кривої</u>, а у другому випадкові $y = f(x)$ – є від'ємною, але також буде мати знак однаковий зі знаком $f''(x)$ при <u>випуклості кривої</u>.

Тому можна загалом твердити, що:

<u>Коли для кривої $y = f(x)$ вартість другої похідної $f''(x)$ має знак однаковий з самою функцією $f(x)$, то крива обернена випуклістю до осі іксів, а коли ці величини функції та її другої похідної різних знаків, то крива обернена до осі іксів випуклістю.</u> Це твердження можна символічно висловити так:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f''(x)}{f(x)} > 0 \text{ – випуклість} \\[2ex] \dfrac{f''(x)}{f(x)} < 0 \text{ – випуклість} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (30)$$

Розглянемо ще й той випадок, коли вартість $f''(x)$ обернеться в нуль. Очевидно, що тоді (див. взір d):

$$NK = \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}(x) + \ldots$$

і на підставі попередніх міркувань знак NK залежатиме від вартости:

$$\frac{h^3}{3!} f'''(x)$$

Але в цьому разі зміна знаку h змінює знак NK, а через те крива лежить з обох боків дотичної. Такого роду точка (M) має назву точки <u>перегину кривої</u>. Очевидно, що тоді і $f'''(x)$ обер-

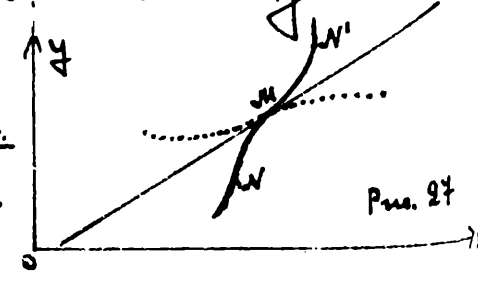


Рис. 27

тання в нуля і т.д. Тоді ми досліджуємо криву за допомогою першої по черзі $\neq 0$ похідної. Коли вона парнета, то крива лежить по один бік дотичної, коли не парнета, то маємо справу з точкою перегину.

Відношення $\frac{f''(x)}{f(x)}$ дає нам розуміння про форму кривої, але при $f''(x)=0$ взори (30) не дадуть нам критерія для пізнання форми кривої. Але в цьому разі (перегину) обидві галузі кривої (з обох боків точки M) матимуть ту, чи іншу форму й положення, що до осі іксів. З метою їх дослідження ми візьмемо на кривій з обох боків точки M допоміжні точки N і N', досить близькі до точки M, але теж щоб для значників їх друга похідна функція не була рівною з нулем. Хай відтинкові цих точок N і N' будуть $x+h$ (де h для першої й другої точки різного знаку) Тоді взір (30) матиме вигляд:

$$d = \frac{f''(x+h)}{f(x+h)}$$

а розгортуючи значника в ряд Тейльора маємо:

$$d = \frac{f''(x) + hf'''(x) + \frac{h^2}{2} f^{IV}(x) + \cdots}{f(x+h)}$$

але $f''(x)=0$, а тому обмежуючи ряд лише другим членом (бо h беремо досить малим) маємо:

$$d = \frac{h f'''(x+\theta h)}{f(x+h)}$$

Ця дуже маленька $\frac{h}{f(x+h)}$ буде з огляду на

свою тричість однакового знаку з $f(x)$, а значит числителя завжди залежить від знаку h, бо містить його в першому ступіні, в той час як $f'''(x+\theta h)$ в силу своєї тричости раз не обертається в нуль буде зберігати свій знак. Отже, коли d буде для $\pm h$ змінювати знак з $-$ на $+$ то крива переходить від випуклости до випуклости й навпаки.

Розглянемо ще випадок, коли дотична рівнобіжна до осі іксів, чи до осі ігреків:

в першому разі $f'(x) = 0$

а в другому – $f'(x) = \infty$

Ми бачимо, що в другому разі маємо розрив тричости й користуватися взором Тейльора не можемо. Але тоді визначаючи з рівняння $y = f(x)$, вартість x матимемо нову функцію $x = \varphi(y)$, для якої вже перша похідна $\varphi'(y) = 0$. Отже в обох випадках можна користатися однакових ознак.

Очевидно, що при цих умовах, коли $f''(x) = 0$ (себто $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$), то точка перегнутя має дотичну рівнобіжну до осі x-ів, а коли $f''(y) = 0$ (себто $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$) то точка перегнутя має дотичну рівнобіжну до осі y-ків (рис. 28). Загалом ознакою існування точки перегнутя є рівність $f''(x) = 0$ [або $f''(y) = 0$]

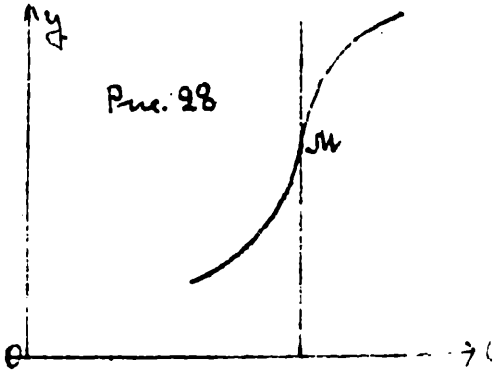


Рис. 28

Очевидно, що значимости точки M, точки перегнутя,

можна знайти, як розв'язки системи:

$$\left.\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ y &= f(x) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (31)$$

<u>Приклад 1.</u> (поміщено у Посе)

Знайти точку перегину кривої:

$$y = \frac{x^3}{a^2+x^2}$$

Диференціюючи маємо:

$$y' = \frac{x^2(x^2+3a^2)}{(x^2+a^2)^2} \qquad y'' = \frac{2a^2x(3a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^3}$$

Очевидно що рівняння $y''=0$, при умові, що $y'''\neq 0$ дає нам відтинкові потрібних точок перегину. Тому розв'язуючи рівняння $y''=0$, або $2a^2x(3a-x^2)=0$, маємо $x=0$; $x_{2,3}=\pm a\sqrt{3}$. Коли тепер ці вартости вставимо в рівність:

$$y''' = \frac{6a^2(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^3}$$

то матимемо:

$$1)\ y''' = \left[\frac{6a^2(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^3}\right]_{x=0} \neq 0 \qquad 2)\ \left[y'''\right]_{x=\pm a\sqrt{3}} \neq 0$$

Отже всі знайдені точки є перегинними. Рядні їх знайдемо вставивши наші вартости x_1, x_2 і x_3 в саме рівняння кривої.

Точок перегину з дотичною, рівнобіжною до осі y-ів немає, бо умова $y'=\infty$ дає $x^2+a^2=0$ $x=\pm ai$. Точка є уявна.

<u>Приклад 2.</u> Які точки перегину має синусоїда $y=\sin x$?

Диференціюємо рівняння $y=\sin x$ і маємо:

$$y' = \cos x\ ; \quad y'' = -\sin x$$

можливі точки перегину одержимо із сис-

$$\left.\begin{array}{l} = -\sin x = 0 \\ y = \sin x \end{array}\right\} \text{або} \quad \left.\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \quad x = k\pi \Bigg\} \text{При умові що } y''' \neq 0$$

Тому досліджуємо що третю похідну й маємо:

$$y''' = -\cos x_{(x=\pi k)} = \mp 1$$

Отже існує безліч точок $(x = k\pi,\ y = 0)$, що лежать на осі x-ів. Точок же перегину, що мають дотичну рівнобіжну до осі y-ів немає, бо $f'(x) = \cos x$ ніколи не може бути рівною 0.

<u>Приклад 3.</u> Знайти точку перегину кривої:

$$y^3 = x^2$$

Звідси $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Диференцуємо й маємо:

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}; \qquad y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$$

Точок перегину звичайних немає, бо рівняння $(y'') = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = 0$ дає розвязки $x = \infty$; а тому й $y = \infty$. Але одночасно з цим ми маємо вартість $x = 0$ для якої: $y' = \left[\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right]_{x=0} = \infty$. Отже треба дослідити, чи не буде перегину при дотичних, рівнобіжних до осі y-ів. Визначаємо з рівняння x і маємо:

$$x = \sqrt{y^3} = y^{\frac{3}{2}}$$

Звідси: $x' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$; $x'' = \frac{3}{4}y^{-\frac{1}{2}}$; тому маємо:

$$(x'') = \frac{3}{4}y^{-\frac{1}{2}} = 0; \quad y = \infty$$

Отже й такого роду точок перегину

Приклад 4. Знайти точки перегину

кривої $x^3=y$.

Диференціюємо й прирівнюємо до нуля другу похідну, тоді маємо:

$$1)\ y'=3x^2;\quad y''=6x$$

$$2)\ 6x=0;\quad x=0;\quad y=0$$

Досліджуючи третю похідну: $y'''=6\neq 0$ ми переконуємося, що точкою перегину є початок координат.

§14. Дослідження точок перегину коли рівняння кривої має инші форми

I) Коли рівняння кривої нам дається в змінниковій формі:

$$x=\varphi(t);\quad y=\psi(t)$$

то відшукуючи похідні через x і y маємо:

$$dx=\varphi'(t)\,dt;\quad dy=\psi'(t)\,dt$$

А звідси:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\left(\text{або } \frac{y'}{x'}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d(y')}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=$$

$$=\frac{\varphi'(t)\,\psi''(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}=\frac{x'y''-y'x''}{(x')^3}$$

Аналогічно ми можемо обчислити й другу похідну x:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{y'x''-y''x'}{(y')^3}$$

Отже для визначення точок перегину маємо рівняння:

$$\left.\begin{array}{l} \text{або: } x'y'' - y'x'' = 0 \\ \text{або: } y'x'' - y''x' = 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (32)$$

Дослідження подібне до попереднього й тому на ньому не зупинялося.

II). Коли криву дано в формі:

$$F(x, y) = 0$$

Тоді:

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \cdots\cdots (\alpha)$$

Знайдемо другу похідну y'' і для цього диференцюємо рівняння $F(x,y) = 0$ і маємо:

1) в першому разі:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

2) в другому разі:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + y''\frac{\partial F}{\partial y} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}y' + y'^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} =$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2y'\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + y''\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

А вставляючи вартість y' з рівности (α) одержимо:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + y''\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

або:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + y''\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3 = 0 \cdots (\beta)$$

Ми знаємо, що умовою існування точок перегину є рівність $y'' = 0$, а тому рівняння (β) ма-

тиме вигляд:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \quad (33)$$

Останнє рівняння (33) легко написати в формі детермінанта, а саме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (34)$$

Розв'язання цього рівняння нам дасть значення точок, що можуть бути перегинами і ми їх досліджуємо, як і попередні.

<u>Приклад 1.</u> Знайти точки перегину кривої $y^3 - x^5 = 0$

Відшукуємо потрібні окремі похідні і складаємо рівняння (34)

1) $\frac{\partial F}{\partial x} = -5x^4$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -20x^3$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6y$

Отже 2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \pm 20x^3 & 0 & \pm 5x^4 \\ 0 & 6y & 3y^2 \\ -5x^4 & 3y^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

А відси: $\Delta = 150x^8y - 180y^4x^3 = 0$. Тому (після скорочення) маємо спочатку:

$$x^3y(5x^5-6y^3)=0$$
$$y^3-x^5=0$$

Звідси $x^5=y^3$ і маємо $5y^3-6y^3=0$; $y=0$; $x=0$

Це є точка перегину, бо крива переходить через початок координат: по обидва боки його $y''=\frac{\Delta}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$ [див. рівн. (β)] змінює знак, бо містить непарну ступінь x.

<u>Приклад II</u>. Знайти точку перегину кривої $y=(x-a)^4$.

Диференцуємо рівняння й маємо:

$$y'=4(x-a)^3;\quad y''=12(x-a)^2,\quad y'''=24(x-a)$$

Прирівнявши до нуля другу похідну y'', одержимо:

$12(x-a)^2=0$; звідси $x=a$; але тоді $y'''=0$ а $y^{IV}=24\neq 0$

Отже першою нерівною з нулем є парна похідна, а через те точки перегину немає.

Вставляючи вартість $x=a$ в рівняння кривої матимемо $y=0$, тому сама функція y і парна перша нерівна нулю четверта похідна y^{IV} однакового знаку. Таким чином в цій точці крива вигнута в бік осі x-ів.

<u>Приклад III</u>. Знайти точку перегину кривої: $x=t^3$; $y=2t+1$.

Похідні цих функцій будуть:

$$x'=3t^2;\quad x''=6t;\quad x'''=6;\quad y'=4t;\quad y''=4;\quad y'''=0$$

Тому: $\frac{dy}{dx}=\frac{4t}{3t^2}=\frac{4}{3t}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'y''-y'x''}{(x')^3}=\frac{3t^2\cdot 4-4t\cdot 6t}{27t^6}=-\frac{12t^2}{27t^3}$

Умова існування точок перегину: $x'y''-y'x''=0$ має вигляд: $-12t^2=0$, або $t=0$. Звідси $x=0$, $y=1$ (див. рівняння кривої).

Приклад IV. Дослідити циклоїду: $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1-\cos\theta)$.
Шукаємо y' і y'' і маємо:

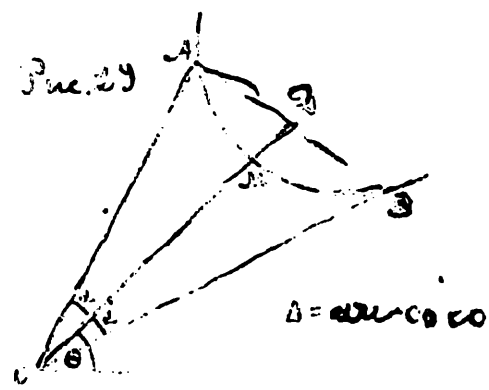
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{a\sin\theta\, d\theta}{a(1-\cos\theta)\, d\theta} = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)'\frac{1}{x'} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{a(1-\cos\theta)} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Очевидно, що $\frac{d^2y}{dx^2}$ є завжди від'ємне, а тому крива звернена до осі x-ів своєю випуклістю (загалом випуклість її завжди звернена в бік від'ємних y-ів).

§ 15. Дослідження кривої в біполярних координатах.

Нехай рівняння кривої буде $\rho = f(\theta)$. Візьмемо на кривій (рис. 29) точку $M(\rho, \theta)$ і відкладемо при біполі O з обох боків ρ досить малий кут α, тоді утворяться нові вектори з аргументами $\theta+\alpha$ і $\theta-\alpha$, що пустрінуть криву AB в якихсь точках A і B. Сполучимо ці точки тятивою AB. Очевидно, що коли крива AB буде повернена випуклістю до біполя O, то точка M буде лежати з тієї ж боку тятиви AB що й біполь і найвеличезнішим продовженням вектор ρ до зустрічі з тятивою AB тобто:



1) Коли крива звернена випуклістю до біполя то $\Delta = OM - OB < 0$

2) Коли крива обернена вгнутістю завжди до біполя то $\Delta = OM - OB > 0$ (рис. 30)

$$OM = \rho = f(\theta)$$

Обчислимо ще вартість OD з Δ OAB.

OD є симетральна Δ-ка, а тому в силу тригонометричного взору

$$\because OD = \beta_{AB} = \frac{2OA \cdot OB \cdot \cos\alpha}{OA + OB}$$

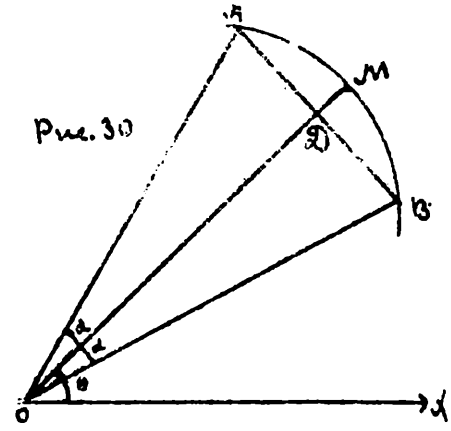


Рис. 30

Але точки A і B лежать на кривій, а тому значення її задовольняють рівняння кривої. Значення точок:

1) A будуть $OA, (\theta+\alpha)$; 2) B будуть OB і $(\theta-\alpha)$. Отже вставляючи їх в рівняння $\rho = f(\theta)$ кривої матимемо:

$$OA = f(\theta+\alpha) \; ; \qquad OB = f(\theta-\alpha)$$

Таким чином:

$$OD = \frac{2\cos\alpha \, f(\theta+\alpha) f(\theta-\alpha)}{f(\theta+\alpha) + f(\theta-\alpha)} \quad \ldots (a)$$

Отже:

$$\Delta = f(\theta) - \frac{2\cos\alpha \, f(\theta+\alpha) \cdot f(\theta-\alpha)}{f(\theta+\alpha) + f(\theta-\alpha)} \lessgtr 0$$

А звідси:

$$f(\theta)\left[f(\theta+\alpha) + f(\theta-\alpha)\right] - 2\cos\alpha \, f(\theta+\alpha) \cdot f(\theta-\alpha) \lessgtr 0 \quad \ldots (б)$$

Це й є ознака випуклости або впуклости кривої що-до бігуна в бігунових координатах.

Спростимо цей вираз:

1) Ми беремо варіяцію α досить малою, дуже близького до 0 (коли α прямує до нуля, а тому для $f(\theta+\alpha)$ і $f(\theta-\alpha)$ можемо прикладувати розгорнення в ряд Тайльора, а саме:

$$f(\theta+\alpha) = f + \alpha f' + \frac{\alpha^2}{2} f'' + \frac{\alpha^3}{3} f''' + \ldots$$

$$f(\theta-\alpha) = f - \alpha f' + \frac{\alpha^2}{2} f'' - \frac{\alpha^3}{3} f''' + \ldots$$

де символом f означено $f(\theta)$

Тоді:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ f(\theta+\alpha)+f(\theta-\alpha)=2f+\alpha^2 f'' \\ &2)\ f(\theta+\alpha)\cdot f(\theta-\alpha)=f^2+\alpha^2 ff''-\alpha^2(f')^2 \end{aligned}\right\}$$ ступінями α вищими ніж друга, при даній малості α - нехтуємо.

Вставляючи ці вартости у вираз (б) маємо:

$$2f^2+\alpha^2 ff''-2\cos\alpha\, f^2-2\alpha^2\cos\alpha\, ff''+2\alpha^2\cos\alpha\,(f')^2 \lessgtr 0$$

або:

$$2f^2(1-\cos\alpha)+2\alpha^2 ff''\left(\tfrac{1}{2}-\cos\alpha\right)+2\alpha^2\cos\alpha\,(f')^2 \lessgtr 0$$

або:

$$f^2+\frac{\alpha^2\left(\frac{1}{2}-\cos\alpha\right)}{1-\cos\alpha}ff''+\frac{\alpha^2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}(f')^2 \lessgtr 0$$

Обчислимо справжні вартости сомножників виразу при згаданій умові, що α простує до нуля.

$$1)\ \frac{\alpha^2\left(\overset{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}-\cos\alpha\right)}{1-\cos\alpha}=\frac{\alpha^2\left[(1-\cos\alpha)-\frac{1}{2}\right]}{1-\cos\alpha}=\alpha^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}}=-1$$

(бо при $\alpha\ldots 0$, маємо $\alpha=0$; $\lim\limits_{\alpha\ldots 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\lim\limits_{\alpha\ldots 0}\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}=\lim\limits_{\alpha\ldots 0}\frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$)

$$2)\ \frac{\alpha^2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\alpha^2\left[1-(1-\cos\alpha)\right]}{1-\cos\alpha}=\frac{\alpha^2}{1-\cos\alpha}-\alpha^2=2 \quad \text{(через те саме)}$$

Таким чином, ознаки випуклости або випуклости кривої що-до бігуна буде:

$$f^2-ff''+2(f')^2 \lessgtr 0 \qquad \ldots\ldots (35)$$

або:

$$\rho^2-\rho\rho''+2\rho'^2 \lessgtr 0$$

Словами: Положення кривої в бігуповіх координатах визначається так: коли для даної вартости ρ: 1) вираз $\rho^2-\rho\rho''+2\rho'^2<0$ то випуклість кривої для даної точки повернена в бігуна (рис. 29) а 2) коли цей же вираз є додатний (>0) то до бігуна обернена випуклість кривої (рис. 30) 3) коли цей вираз є рівний з нулем, то дана точка кривої є точкою перегину (рис. 31)

Приклади: I) Візьмімо спіраль Архімеда: $\rho = a\theta$ і дослідимо її положення щодо бігуна.

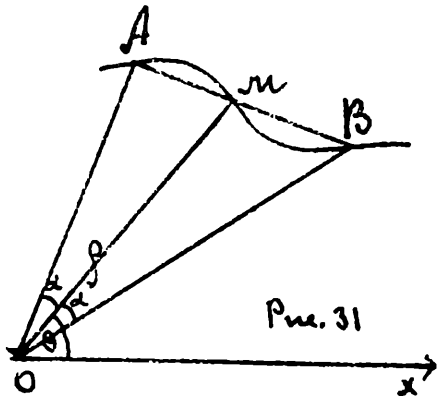


Рис. 31

Маємо:

$$\rho' = a; \qquad \rho'' = 0$$

тому:

$$\Delta = (a\theta)^2 + 2a^2 = a^2(\theta^2+2)$$

Цей вираз завжди додатний, а тому спіраль Архімеда у всіх своїх точках обернена до бігуна своєю випуклістю (рис. 32)

II Гіперболічна спіраль: $\rho\theta = a$

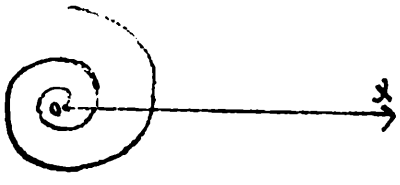


Рис. 32

1) $\rho = \frac{a}{\theta}$; 2) $\rho' = -\frac{a}{\theta^2}$; 3) $\rho'' = \frac{2a}{\theta^3}$

тому:

$$\Delta = \frac{a^2}{\theta^2} - \frac{2a^2}{\theta^4} + \frac{2a^2}{\theta^4} = \frac{a^2}{\theta^2}$$

Отже $\Delta = \left(\frac{a}{\theta}\right)^2$ також завжди додатнє і крива у всіх точках повернена випуклістю до бігуна (рис 33)

III приклад: Дослідити положення циклоїди рівняння $\rho = 2a \sin\theta \operatorname{tg}\theta$.

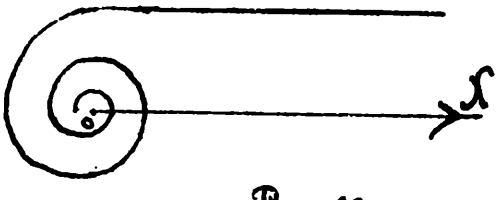


Рис. 33

Знаходячи ρ' і ρ'', ми одержимо: $\Delta = \frac{6}{\cos^2\theta}$, себто крива завжди обернена до бігуна випуклістю.

§16. Загальне розуміння про кривину (лук) кривих.

Припустімо, що нам дано якусь криву й ми хочемо дослідити міру її скривлення. Цю міру скривлення будемо звати кривиною кри-

вої при даній точці. Щоб дослідити її нам треба розглянути яку-будь дугу цієї кривої обмежену, напр., точками M і N. Вважаємо, що на цій дузі немає точок перегину, себто дуга є цілому або випукла, або вгнута. Через граничні точки дуги M і N (рис. 34) поведемо дотичні й за додатний напрямок їх будемо брати згідно з попередньою умовою, бік зростання кривої. Тоді кут між цими додатними напрямами дотичних γ будемо звати загалом міром кривини даної дуги MN (кут γ вимірюється в кругових одиницях). Хай довжина дуги MN буде Δs, тоді відношення:

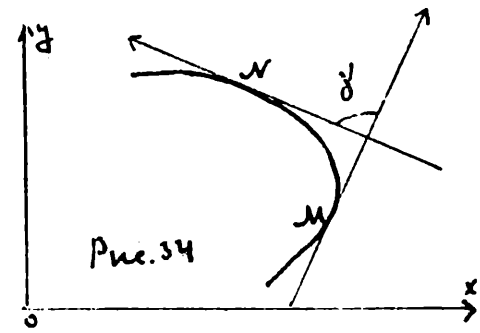


Рис. 34

$$K = \frac{\gamma}{\Delta s}$$

звуть <u>середнього кривиною даної дуги MN</u>.

Припустім, що ми зачнемо точку N поволі наближувати до точки M; в той самий час і кут γ, а разом з ним і дуга Δs будуть зменшуватися простуючи обоє до нуля. В цьому випадку межу нашого відношення K:

$$\lim_{\Delta s \ldots 0} K = \lim_{\Delta s \ldots 0} \frac{\gamma}{\Delta s} = \mathcal{K} \quad \ldots\ldots (36)$$

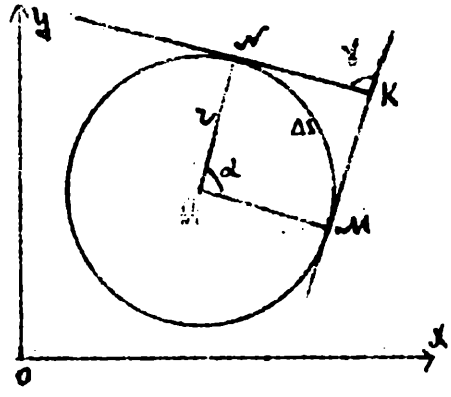
звуть (правдивою) <u>кривиною кривої</u> в точці M. При цьому кут γ стає безмежно-малим кутом між двома суміжними дотичними і тому зветься <u>кутом суміжности</u>.

Отже:

Кривиною кривої в даній точці зветься межа відношення кута суміжности до величини зближеної відповідною дотичною дуги, коли ця дуга простує до нуля.

Приклад. Знайти кривину кола.

Рис. 35



Хай кут між лучами, поведеними в точки дотику даних дотичних буде α. Тоді γ = α (кути є прямоворамені). Кут ми виміряємо кутовими одиницями, а тому дуга Δs = r.α (рис. 35)

Таким чином пересічна кривина дуги кола MN буде:

$$K = \frac{\gamma}{\Delta s} = \frac{\alpha}{r\alpha} = \frac{1}{r}$$

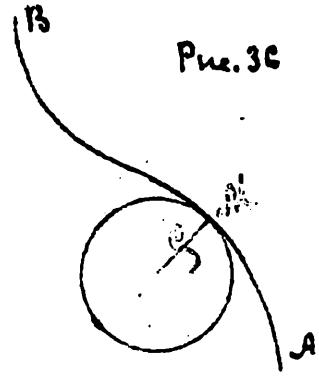
Пересічна кривина K є величиною сталою, незалежною від величини Δs, а тому й правдива кривина кола в кожній його точці буде $K = \frac{1}{r}$.

Звідци маємо:

$$r = \frac{1}{K}$$

Цю величину (луч кола) будемо звати лучем кривини (луку) кривої в даній точці і умовимося її означати через ρ.

Рис. 36



Хай точка M належить до якоїсь кривої AB і для кривини її в точці M ми одержимо вартість K (рис. 36)

Тоді луч кривини кривої в точці M:

$$\rho = \frac{1}{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

буде уявляти з себе луч того кола, що повсюдно його через точку M, так щоб він мав пересічну свою кривину однакову з кривиною кривої AB в точці M.

Очевидно, що коли:

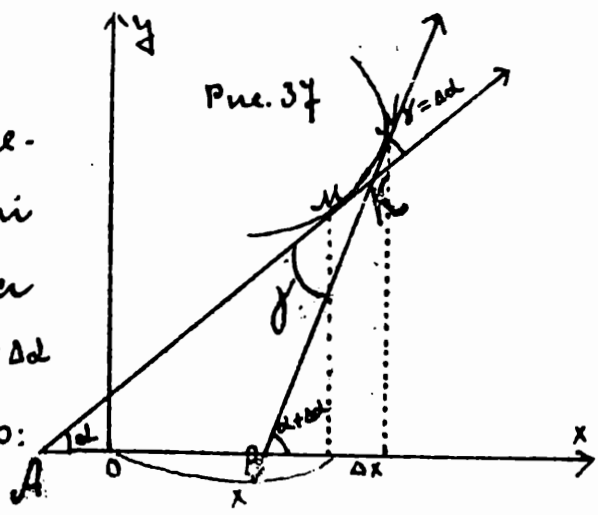
$$K = \lim_{\Delta s \ldots 0} \frac{\gamma}{\Delta s}$$

то

$$\rho = \frac{1}{K} = \lim_{\Delta s \ldots 0} \frac{\Delta s}{\gamma}$$

§17. Кривина кожної кривої.

I. Хай крива визначається рівнянням $y = f(x)$. Візьмемо на ній дві дуже близькі точки $M(x, y)$ і $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Поведемо через точку M і N дотичні і хай їх кути спаду на вісь іксів будуть: α і $\beta = \alpha + \Delta\alpha$



Тоді з Δ-ка ABK маємо:

$$\gamma = \Delta\alpha$$

де α, а разом і Δs є функціями змінної x.

А тому:

$$\rho = \lim_{\Delta s \ldots 0} \frac{\Delta s}{\Delta \alpha} = \lim_{\Delta x \ldots 0} \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\frac{\Delta \alpha}{\Delta x}} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}} \quad \ldots (a)$$

Але:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

а тому:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

Крім того відомо, що $y' = \operatorname{tg}\alpha$, а тому:

$$\alpha = \operatorname{arctg} y'$$

Звідси:

$$\frac{d\alpha}{dx} = (\operatorname{arctg} y')' = \frac{y''}{1 + y'^2}$$

Отже, вставляючи знайдені вартости у взір (a), маємо:

$$\rho = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}} = \frac{(1+y'^2)^2\sqrt{1+y'^2}}{y''} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad \ldots (38)$$

при чому беремо лише абсолютну величину цього виразу, бо вартість ρ умовимося вважати завжди додатньою.

II. Коли б рівняння кривої було задане у змінниковій формі, напр.

$$x = \varphi(t) \; ; \; y = \psi(t)$$

то

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

можна було б написати так:

$$\rho = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\alpha}{dt}}$$

Але в цьому разі:

$$ds = dt\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

або:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

Крім того, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ або $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

тому:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \left[\operatorname{arctg}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]' =$$

$$= \frac{1}{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2} \cdot \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

Таким чином:

$$\rho = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\alpha}{dt}} = \frac{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}{\varphi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)} \quad \ldots\ldots (39)$$

або залишаючи означення $\varphi(t) = x$; $\psi(t) = y$, маємо:

$$\rho = \frac{[x'^2 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}{x''y' - x'y''} \quad \ldots\ldots (40)$$

де похідні x і y взято пот.

Або ще інакше:

$$x' = \frac{dx}{dt}; \quad y' = \frac{dy}{dt}; \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$$

тому:

$$\rho = \frac{[dx^2 + dy^2]^{\frac{3}{2}}}{d^2x\,dy - dx\,d^2y} \quad \ldots\ldots (41)$$

III. Коли рівняння кривої є в невизначеній формі:

$$F(x, y) = 0$$

то:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0$$

Отже:

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$y'' = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

або, вставляючи у цей вір вартість y', маємо:

$$y'' = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}\right]$$

а звідси:

$$y'' = -\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]$$

Вставляючи ці вартости у вираз:

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

маємо:

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2} \quad \ldots (42)$$

IV. Ще дуже корисно мати мати визначення руху кривини в тому випадку, коли незалежною є сама дуга кривої, себто, коли крива визначена рівняннями:

$$x = \varphi(s) \quad y = \psi(s) \quad \ldots\ldots (a)$$

Ми вже довели, що кути, що творить дотична з осями визначаються:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\beta (= \pm\sin\alpha) = \frac{dy}{ds} \quad \ldots (б)$$

й знаємо, що:

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{\frac{d\alpha}{ds}} \quad \ldots\ldots\ldots (в)$$

А тому:

щоб знайти цю вартість $\frac{d\alpha}{ds}$, зауважимо, що s є незалежною, ми диференціюємо через s рівняння (б) і маємо:

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}$$

$$\pm\cos\alpha\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2}$$

Далі піднесемо до квадрату ці рівности і взаємно їх додамо, маємо:

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

або:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}$$

тому:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}} \quad \ldots\ldots (43)$$

або інакше:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\varphi''(s)^2 + \psi''(s)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (44)$$

V. Дуже простий вираз луча кривини в даній точці одержимо, коли визначимо його через величину прямової до кривої, поведеної через таку точку. Ми знаємо вже, що:

$$n = y\sqrt{1+y'^2}$$

а звідси:

$$n^2 = y^2(1+y'^2) \quad \text{або} \quad 1+y'^2 = \frac{n^2}{y^2}$$

Коли крива заданa рівнянням $y = f(x)$, то:

$$\rho = \frac{[1+y'^2]^{3/2}}{y''}$$

а тому:

$$\rho = \frac{n^3}{y^3 y''} \quad \ldots\ldots (45)$$

§18. Основні приклади обчислення кривини.

Приклад 1. Знайти вираз луча кривини кри-

вої 2го ступіня.

Рівняння цієї кривої:

$$y^2 = 2px + qx^2$$

а тому, диференцуючи його маємо:

$$2yy' = 2p + 2qx; \quad \text{або} \quad yy' = p + qx$$

Звідци:

$$y' = \frac{p+qx}{y}$$

Диференцуючи далі, маємо:

$$y'^2 + yy'' = q$$

й звідци:

$$y'' = \frac{q - y'^2}{y}$$

або:

$$y'' = \frac{qy^2 - (p+qx)^2}{y^3} = \frac{q(2px + qx^2) - (p+qx)^2}{y^3} = -\frac{p^2}{y^3}$$

Таким чином:

$$\rho = \frac{n^3}{y^3\left(-\frac{p^2}{y^3}\right)}$$

або:

$$\rho = \left|\frac{n^3}{-p^2}\right| \quad \ldots\ldots (46)$$

Отже:

<u>Луч кривини кривої 2го ступіня є рівний з абсолютною величиною відношення кубу прямової до квадрата півпараметра кривої.</u>

<u>Висновок.</u> <u>Луч кривини є пропорційний до кубу відповідної прямової до кривої.</u>

<u>Приклад.</u> Висловити луч кривини параболи рівняння: $y^2 = 2px$.

Маємо: $n = y^2\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right) = y^2 + p^2; \quad n = (y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$.

Таким чином:

$$\rho = \left| \frac{n^3}{-p^2} \right| = \frac{(y^2+p^2)^{3/2}}{p^2}$$

<u>Приклад 2.</u> Знайти вираз луча кривини еліпси й гіперболи, що визначаються рівняннями:

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots (a)$$

Ми знаємо що:

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2} \quad \ldots (б)$$

А тому обчислюємо елементи цього виразу із рівняння (а) окремо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2b^2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \pm 2a^2y; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2b^2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \pm 2a^2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

і вставляємо їх у задане рівняння (б) і маємо:

$$\rho = \left| \frac{(4b^4x^2 + 4a^4y^2)^{3/2}}{8a^4b^2y^2 \pm 8a^2b^4x^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{8(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}}{8a^2b^2(a^2y^2 \pm b^2x^2)} \right| = \left| \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}}{a^2b^2(\pm a^2b^2)} \right|$$

бо $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$, звідси: $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$.

Тому:

$$\rho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4} \quad \ldots (в)$$

Це буде луч кривини еліпси й гіперболи.

З рівнянь кривих:

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$$

одержимо:

$$\pm a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2 = b^2(a^2 - x^2)$$

Отже:

$$a^2y^2 = \pm b^2(a^2 - x^2)$$

Вставляючи цю вартість у рівність (в), маємо:

$$\rho = \frac{\left[b^4x^2 \pm a^2b^2(a^2-x^2)\right]^{3/2}}{a^4b^4}$$

або:

$$\rho = \frac{\cancel{b^3}\left[b^2x^2 \pm a^4 \mp a^2x^2\right]^{3/2}}{a^4b^{\cancel{4}}}$$

А звідси:

$$\rho = \frac{\left[(b^2 \mp a^2)x^2 \pm a^4\right]^{3/2}}{a^4b} = \frac{\left[\frac{b^2 \mp a^2}{a^2}x^2 \pm x^2\right]^{3/2}}{ab}$$

але $\frac{a^2 \mp b^2}{a^2} = \varepsilon^2$ (– еліпса, + гіпербола). Тому:

$$\rho_{елип} = \frac{(a^2 - \varepsilon^2x^2)^{3/2}}{ab}$$

$$\rho_{гип} = \frac{(\varepsilon^2x^2 - a^2)^{3/2}}{ab}$$

<u>Приклад 3.</u> Знайти вираз луча кривини циклоїди, що має рівняння: $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1-\cos\theta)$ Скористуємося взором (40) луча кривини кривої визначеної рівняннями, а саме:

$$\rho = \left|\frac{\left[x'^2 + y'^2\right]^{3/2}}{x''y' - y''x'}\right| \quad \ldots\ldots (d)$$

Обчислимо окремі члени взору:

$x' = a(1-\cos\theta) = 2a\sin^2\frac{\theta}{2}$; $y' = a\sin\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$; $x'' = a\sin\theta$; $y'' = a\cos\theta$

Тому:

$$\rho = \left|\frac{\left[4a^2\sin^4\frac{\theta}{2} + 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right]^{3/2}}{a^2\sin^2\theta - a^2\cos\theta(1-\cos\theta)}\right| = \left|\frac{8a^3\sin^3\frac{\theta}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{3/2}}{a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - a^2\cos\theta}\right| =$$

$$= \frac{8a\sin^3\frac{\theta}{2}}{1-\cos\theta} = \frac{8a\sin^3\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 4a\sin\frac{\theta}{2}$$

З другого боку:

$$n = \frac{y\,ds}{dx} = \frac{a(1-\cos\theta)\,d\theta\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}}{a(1-\cos\theta)\,d\theta}$$

Але після скорочення й перетворення маємо:

$$n = a\sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} = a\sqrt{2(1-\cos\theta)} = a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

Таким чином:

$$\rho = 2n$$

Луч кривини циклоїди в кожній її точці є рівний із подвійного довжиною відповідної прямової.

§19. Коло кривини й центр кривини.

Хай дано криву AB і на ній точку $M(x, y)$. Через цю точку поведемо (як ми вже надували) коло кривини. Очевидно, що це коло має такі прикмети:

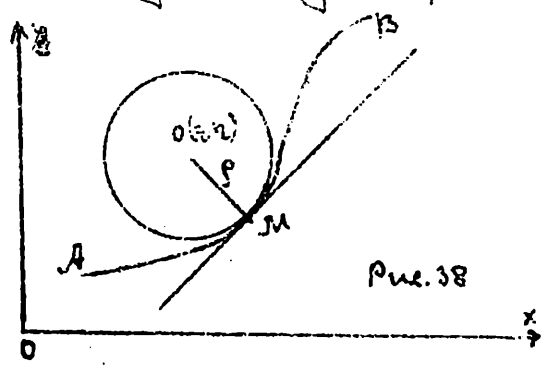


Рис. 38

1) Має спільну з кривою дотичну, поведену через точку M.
2) Луч цього кола буде ρ.
3) Центр його $O(\xi,\eta)$ лежатиме на прямовій до кривої, поведеній через точку $M(x,y)$ і на віддаленні від цієї точки рівному MO.
4) Коло це буде положене з боку випуклости кривої.

Центр $O(\xi,\eta)$ цього кола зветься центром кривини даної кривої AB в точці її M. Щоб обчислити значини цього центру, збудуємо в точці $M(x,y)$ коло кривини центру $O(\xi,\eta)$ (Рис 39).

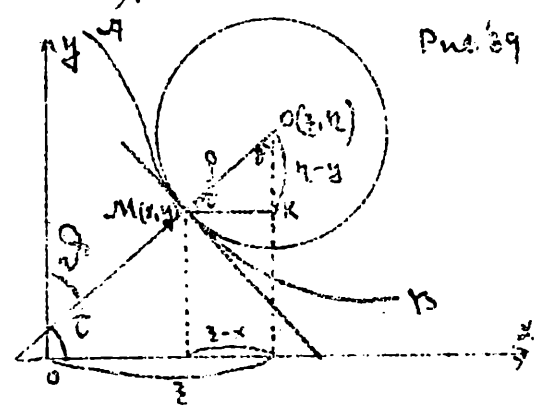


Рис. 39

Хай прямова творить з осями координат кути τ і ϑ. Тоді з ΔMOK маємо:

1) $\xi - x = \rho\cos\tau$

2) $\eta - y = \rho\cos\vartheta$

або:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + \rho\cos\tau \\ \eta &= y + \rho\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (47)$$

Але ми знаємо, що косинуси кутів прямової з осями координат визначаються:

$$1)\quad \cos\tau = \mp\frac{dy}{ds} = \mp\frac{dy}{dx\sqrt{1+y'^2}} = \mp\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$2)\quad \cos\vartheta = \pm\frac{dx}{ds} = \pm\frac{dx}{dx\sqrt{1+y'^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Тому:

$$\xi = x \mp \frac{\rho y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\eta = y \pm \frac{\rho}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Але $\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, а тому:

$$\xi = x \mp y'\,\frac{1+y'^2}{y''} \cdots\cdots (\alpha)$$

$$\eta = y \pm \frac{1+y'^2}{y''} \cdots\cdots (\beta)$$

Лишається прослаїзувати знак $\mp$.

В дробу $\frac{1+y'^2}{y''}$ чисельник завжди додатний, а тому знак самого дробу залежить від знаку знаменателя y''.

Коли $y''>0$, то відношення $\frac{y}{y''}>0$ [де $y=f(x)$ – з рівняння кривої], себто випуклість кривої обернена в бік осі x-ів (рис 40а), але тоді $\eta>y$.

Значить знаки у взорі (β) знак перед дробом мусить бути $+$.

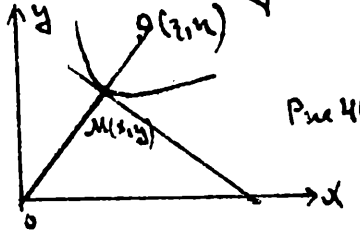


Рис 40а

Коли ж $y''<0$, то й відношення $\frac{y'}{y''}<0$. Крива обернена до осі x-ів випуклістю (рис 40б). Але тоді $\eta<y$, а тому у взорі (β) дріб $\frac{1+y'^2}{y''}$ має бути від'ємним, себто частиче знак y''. Таким чином перед дробом також треба ставити +.

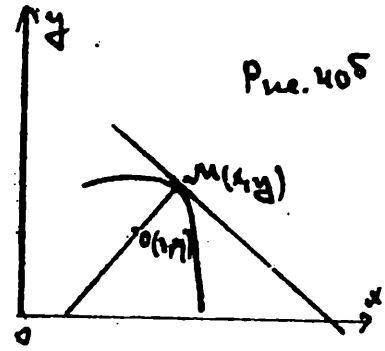


Рис. 40б

Отже маємо:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - y'\frac{1+y'^2}{y''} \\ \eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (48)$$

(бо знак перед дробом у визначенні ξ є протилежний знаку перед дробом у визначенні η.)

§20. Визначення луча кривини в біполярних координатах.

Введемо такі означення:

1) Луч кривини – ρ
2) Відповідний луч вектор – r
3) Фаза даного луча вектора – θ
4) Кут спаду відповідної дотичної – α
5) Напрямний (векторовий) кут дотичної – μ

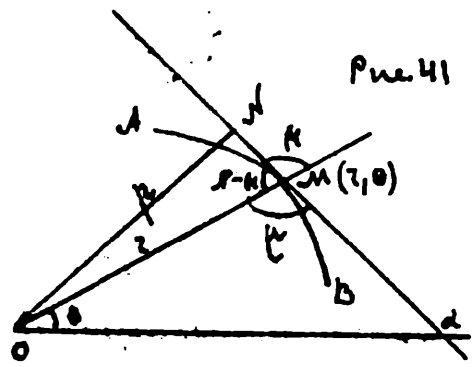


Рис. 41

Тоді можемо написати:

$$\alpha = \theta + \mu \ldots\ldots (a)$$

Перед цим ми довели, що:

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} \quad \text{де} \quad ds = d\theta\sqrt{r^2 + r'^2}$$

Треба ще обчислити вартість $d\alpha$:

Для цього диференцуємо рівність (a) і маємо:

$$d\alpha = d\theta + d\mu$$

Але $tg\mu = \frac{r}{r'}$, або $\mu = arctg\frac{r}{r'}$

а звідси:

$$d\mu = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{r'^2}} \cdot \frac{r'^2 - rr''}{r'^2} d\theta$$

або:

$$d\mu = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} d\theta$$

Отже:

$$d\alpha = d\theta + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} d\theta = \left[\frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right] d\theta$$

Таким чином:

$$\rho = \left| \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \right| \quad \ldots\ldots\ldots (49)$$

<u>Примітка.</u> До цього самого висліду дійдемо шляхом перетворення осей.

<u>Приклади.</u>

1) Обчислити луч кривини архімедової спіралі: $r = a\theta$.

Диференцуючи рівняння кривої маємо: 1) $r' = a$, 2) $r'' = 0$

Тому:

$$\rho = \frac{a^3(1+\theta^2)^{3/2}}{a^2(2+\theta^2)} = \frac{a(1+\theta^2)^{3/2}}{2+\theta^2}$$

2) Обчислити луч кривини гіперболічної спіралі: $r\theta = a$.

Також диференцуючи рівняння кривої маємо:

1) $r' = -\frac{a}{\theta^2}$; 2) $r'' = \frac{2a}{\theta^3}$. Тому:

$$\rho = \frac{a^3(\theta^2-1)^{3/2}}{\theta^6\left(\frac{a^2}{\theta^2} + 2\frac{a^2}{\theta^4} - 2\frac{a^2}{\theta^4}\right)} = \frac{a(\theta^2-1)^{3/2}}{\theta^4}$$

3) Обчислити луч кривини логарифмичної спіралі: $r = ae^{m\theta}$

Ми знаємо, що $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$, де $\alpha = \theta + \mu$, а тому: $d\alpha = d\theta + d\mu$. Але для логарифмичної спіралі $\mu = const$, себто $d\mu = 0$. Отже $d\alpha = d\theta$.

Маємо тепер:

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2} = N$$

себто: <u>Луч кривини логарифмичної спіралі є рівний з відтинком бінормальної прямової.</u> <u>Виноводи.</u> Центри кривини логарифмичної спіралі завжди лежать на осі лемніс.

§21. <u>Визначення луча кривини через віддалення відповідної дотичної від бінуса.</u>

Ми тут розглянемо ще один спосіб обчислення луча кривини, що ним дуже часто користуються в механіці.

Спустимо з бінуса O на дотичну, поведену через точку, пряму ON (рис. 41) і означимо його вартість через p.

З Δ MON маємо:

$$p = r\sin(\pi - \mu) = r\sin\mu$$

Але ми довели, що $tg\mu = \frac{r}{r'}$, а звідси $\sin\mu = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$

Тому:

$$p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

Беремо похід (диференціял) від p й маємо:

$$dp = \frac{2r\,dr\sqrt{r^2+r'^2} - \frac{r^2(2r\,dr + 2r'r''d\theta)}{2\sqrt{r^2+r'^2}}}{r^2 + r'^2} = \frac{2r\,dr(r^2+r'^2) - r^2(r\,dr + r''dr)}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

бо $r'd\theta = dr$

Виносимо rdr за дужки й робимо зведення членів:

$$dp = rdr\,\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$$

Далі користуючись взором ρ (49) ми одержимо:

$$dp = \frac{rdr}{\rho}$$

А звідси:

$$\rho = \frac{rdr}{dp} \quad \ldots\ldots (50)$$

Як переконалися в механіці цей взір через свою простоту дає великі зручности для його використання.

§22. Еволюта й евольвента (інволюта)

Припустіли, що нам дано де-яку криву AB. Для кожної її точки збудуємо відповідний їм кривини й визначимо центр кривини. Геометричний осередок всіх цих центрів має назву **еволюти** (A_1B_1) або **кривої розгортання** (рис. 42)

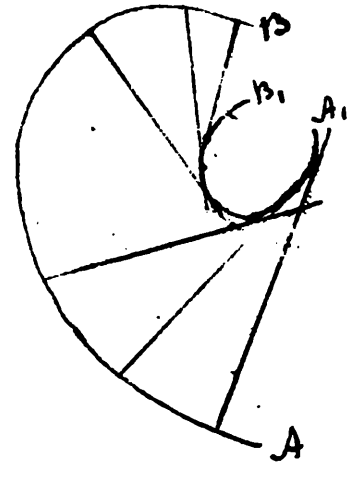


Рис. 42

Сама ж крива AB зветься **евольвентою (інволютою)** кривої A_1B_1, або розгортною кривої (еволюти) A_1B_1.

Очевидно, що кожна прямова, що проходить через відповідний центр кривини матиме лише цю одну спільну точку з еволютою, себто всі прямові евольвенти є дотичними еволюти. Так мовити, еволюта є спільно-дотичною до

всіх прямових еволювенти.

Хай рівняння кривої $y=f(x)$

Ми довели, що значники центра кривини якої-будь точки M кривої будуть:

$$\xi = x - y'\frac{1+y'^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \quad (a)$$

Очевидно, щоб одержати рівняння геометричного осередку центрів кривини, треба вилучити змінні x і y і установити звязок лише між ξ і η. Вставляючи вартости: $y=f(x)$; $y'=f'(x)$ і $y''=f''(x)$ ми маємо два рівняння, що містять серіли ξ і η лише x:

$$\xi = x - f'(x)\frac{1+f'(x)^2}{f''(x)}$$
$$\eta = f(x) + \frac{1+f'(x)^2}{f''(x)} \quad (б)$$

Вилучаючи з цих рівнянь x, ми одержимо якесь рівняння:

$$\varphi(\xi, \eta) = 0$$

що й є рівнянням еволюти кривої AB.

<u>Приклад 1.</u> Написати рівняння еволюти параболи: $y^2=2px$.

Диференцуючи рівняння маємо:

1) $2yy'=2p$, або $y'=\frac{p}{y}$ 2) $y'^2+yy''=0$, або $y''=-\frac{p^2}{y^3}$

Крім того з самого рівняння одержимо: 3) $x=\frac{y^2}{2p}$.

Тепер виключаємо з (a) змінне x і маємо:

$$\xi = \frac{y^2}{2p} - \left(\frac{p}{y}\cdot\frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}}\right); \quad \eta = y + \frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}}$$

Або:

$$\xi = \frac{y^2}{2p} + \frac{y^2+p^2}{p} = \frac{3y^2}{2p} + p$$

$$\eta = y + y\cdot\frac{y^2+p^2}{-p^2} = \frac{-yp^2+y^3+yp^2}{-p^2} = -\frac{y^3}{p^2}$$

Нарешті, коли з цих рівнянь,

$$\xi = \frac{3y^2}{2p} + p \quad і \quad \eta = -\frac{y^3}{p^2}$$

виключимо й останню змінну y, то одержимо:

$$(\xi - p)^3 = \frac{27y^6}{8p^3}; \qquad \eta^2 = \frac{y^6}{p^4}$$

а поділяючи почленно перше рівняння на друге маємо:

$$\frac{(\xi-p)^3}{\eta^2} = \frac{27p}{8}$$

або:

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3$$

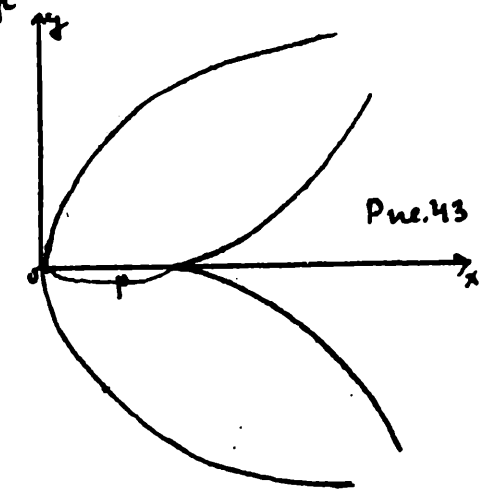


Рис.43

Ми одержали так звану <u>півкубичну параболу</u> (рис.43). Цю параболу ми ще досліджимо.

<u>Приклад 2</u>. Еволюта еліпса.

Візьмім змінникове рівняння еліпса:

$$x = a\cos\theta; \qquad y = b\sin\theta$$

і диференцуваннями їх обчислюємо y' і y''. Тоді маємо:

$$dx = a\sin\theta d\theta; \qquad dy = b\cos\theta d\theta$$

або:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\theta$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{-a\sin\theta} = -\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3\theta}$$

Отже:

$$1+y'^2 = 1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{ctg}^2\theta = \frac{\overset{1-\cos^2\theta}{\cancel{a^2\sin^2\theta}}+b^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta} = \frac{a^2-\overset{e^2}{(a^2-b^2)}\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{a^2-e^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta} = \frac{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

Тому за взором (48) маємо:

$$\xi = a\cos\theta - \left[+\frac{\cancel{b}\cos\theta(1-\varepsilon^2\cos^2\theta)\,a^2\cancel{\sin^2\theta}}{a\cancel{\sin\theta}\cdot\cancel{\sin^2\theta}\cdot\cancel{b}}\right]$$

або:

$$\xi = \cancel{a\cos\theta} - \cancel{a\cos\theta} + a\varepsilon^2\cos^3\theta.$$ Отже:

$$\xi = a\varepsilon^2\cos^3\theta \quad (*)$$

$$\eta = b\sin\theta + \frac{1-\varepsilon^2\cos^2\theta\, a^2\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cdot(-b)} = \frac{b^2\sin\theta - a^2\sin\theta + a^2\varepsilon^2\sin\theta\cos^2\theta}{b}$$

$$= \frac{\overset{-a^2\varepsilon^2}{(b^2-a^2)}\sin\theta + a^2\varepsilon^2\sin\theta(1-\sin^2\theta)}{b} = \frac{\cancel{-a^2\varepsilon^2\sin\theta} \cancel{+a^2\varepsilon^2\sin\theta} - a^2\varepsilon^2\sin^3\theta}{b}$$

Отже:

$$\eta = -\frac{a^2\varepsilon^2}{b}\sin^3\theta \quad (**)$$

Виключаємо з рівнянь (*) і (**) змінну θ і маємо:

$$\xi^{2/3} = a^{2/3}\cdot\varepsilon^{2/3}\cdot\cos^2\theta; \qquad \eta^{2/3} = +\frac{a^{2/3}\cdot\varepsilon^{2/3}}{b^{2/3}}\sin^2\theta$$

або:

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^{2/3} = \varepsilon^{2/3}\cos^2\theta; \qquad \left(\frac{\eta b}{a^2}\right)^{2/3} = \varepsilon^{2/3}\sin^2\theta$$

А звідси:

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{\eta b}{a^2}\right)^{2/3} = \varepsilon^{2/3}$$

але $\varepsilon = \frac{e}{a}$, тому:

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{\eta b}{a^2}\right)^{2/3} = \frac{e^{2/3}}{a^{2/3}} \quad \text{або} \quad (a\xi)^{2/3} + (\eta b)^{2/3} = e^{2/3}$$

А звідси:

$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{2/3}+\left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{2/3}=1 \quad \ldots\ldots (51)$$

Ця крива (рис. 44) має назву астероїди (зореподібна крива)

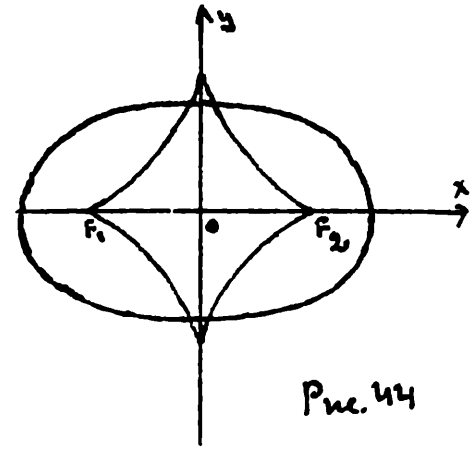


Рис. 44

<u>Приклад 3.</u> Еволюта гіперболи.

Параметричні рівняння гіперболи будуть:

$$x=\frac{a}{\sin t}\ ;\quad y=\frac{b}{\sin t}\cdot\cos t$$

тому, подібно до попереднього, матимемо:

$$\xi=\frac{a^2+b^2}{a\sin^3 t}\ ;\quad \eta=-\frac{a^2+b^2}{b\,tg^3 t}$$

або:

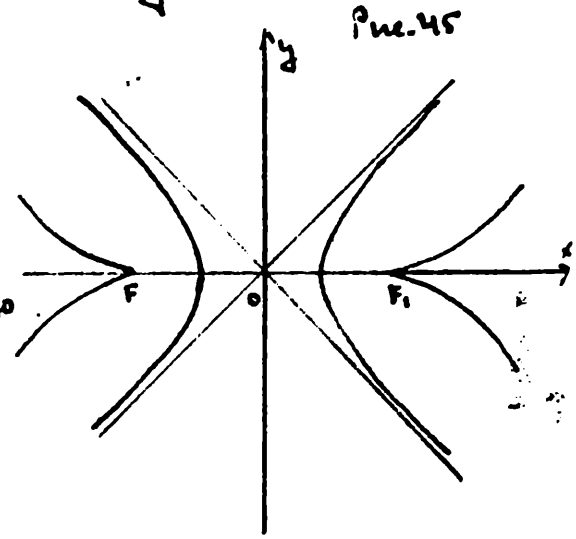
$$\xi=\frac{e^2}{a\sin^3 t}\ ;\qquad \eta=-\frac{e^2}{b\,tg^3 t}$$

Отже:

$$\operatorname{cosec}^3 t=\frac{a\xi}{e^2}\ ;\quad ctg^3 t=-\frac{b\eta}{e^2}$$

$$\operatorname{cse}^2 t=\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{2/3}\ ;\quad ctg^2 t=\left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{2/3}$$

Рис. 45



З тригонометрії відомо, що $\operatorname{cse}^2 t=1+ctg^2 t$, або $\operatorname{cse}^2 t-ctg^2 t=1$.

Тому:

$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{2/3}-\left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{2/3}=1$$

Це є рівняння еволюти гіперболи (рис. 45).

<u>Приклад 4.</u> Еволюта циклоїди.

Рівняння циклоїди:

$$x=a(\theta-\sin\theta);\quad y=a(1-\cos\theta)$$

Звідси:

$$y'=ctg\frac{\theta}{2};\quad y''=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{\theta}{2}}\ ;\quad 1+y'^2=\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

Отже:

$$\xi = x - y'\frac{1+y'^2}{y''} = a(\theta - \sin\theta) + \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,\frac{4a\sin^4\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} =$$

$$= a(\theta - \sin\theta) + 4a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = a\theta - a\sin\theta + 2a\sin\theta = a(\theta + \sin\theta)$$

Також маємо:

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = -a(1-\cos\theta)$$

Це рівняння також циклоїди. Справді, беремо $\theta = \pi + \theta_1$ і маємо:

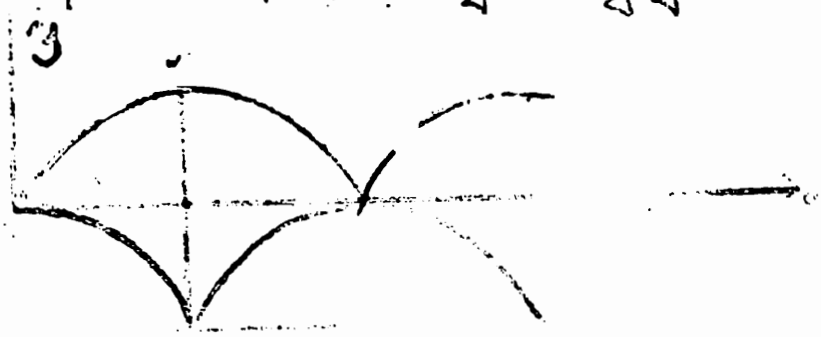
$$\xi = a[(\pi + \theta_1) - \sin\theta_1]; \quad \eta = -a(1+\cos\theta_1)$$

Пересуваємо осі координат в точку $A(\pi a, -2a)$, тоді $\xi = \pi a + \xi'$, $\eta = -2a + \eta$ і тому:

$$\xi' = a(\theta_1 - \sin\theta_1); \quad \eta' = a(1-\cos\theta_1)$$

Це знайоме рівняння циклоїди. Збудуємо її.

Рис. 46

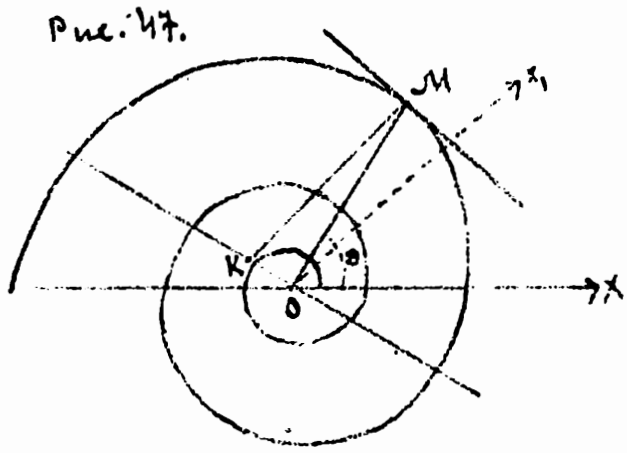


<u>Приклад 5.</u> Еволюта логарифмічної спіралі.

Рівняння спіралі:

$$\rho = ae^{m\theta}$$

Рис. 47.



Ми вже знаємо, що центр кривини буде точка $K(\rho_1, \theta_1)$. Тому значник ρ_1 буде OK (підпрямова). Але $OK = \rho'$, а тому:

$$\rho_1 = ame^{m\theta}$$

Далі, кут $\theta_1 = \angle KOA = \frac{\pi}{2} + \theta_1$, а через те:

$$\rho_1 = ame^{m(\theta_1 - \frac{\pi}{2})}$$

Це є також логарифмічна спираль.

Справді: повернемо осі координат на якийсь кут α, тоді, означивши нові координати через ρ_2 і θ_2, матимемо:

$$\rho_2 = \rho_1 \; ; \quad \theta_2 = \theta_1 - \alpha \quad \text{або} \quad \theta_1 = \theta_2 + \alpha$$

Тому:

$$\rho_2 = ame^{m(\theta_2 + \alpha - \frac{\pi}{2})}$$

або:

$$\rho_2 = ae^{m\theta_2} \cdot me^{m(\alpha - \frac{\pi}{2})}$$

Себто:

$$\lg m + m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \; ; \; \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\lg m}{m}$$

Отже, коли повернути осі координат на кут $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\lg m}{m}$, то матимемо рівняння:

$$\rho_2 = ae^{m\theta_2}$$

що є звичайним рівнянням логарифмічної спіралі

§23. Властивости еволюти.

1) Дотична до еволюти є прямовою евольвенти (себто дотична до еволюти є прямою до дотичної евольвенти)

Хай рівняння даної кривої (евольвенти) $y = f(x)$ а рівняння еволюти її буде: $\eta = \varphi(\xi)$.

Тоді кутовий зміщник дотичної до еволюти буде:

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi}$$

а кутовий зміщник дотичної до евольвенти:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Нам треба довести, що ці дотичні є взаємно прямові, себто, що $\eta' y' + 1 = 0$, або

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} + 1 = 0$$

(умова прямовости).

Рівняння прямової до даної кривої:

$$(X - x) + y'(Y - y) = 0$$

Центр кривини, себто відповідна точка еволюти, лежить на цій прямовій, а тому:

$$(\xi - x) + y'(\eta - y) = 0 \quad \ldots \quad (a)$$

Диференцуючи це рівняння, маємо:

$$d\xi - dx + (\eta - y)\, dy' + y'(d\eta - dy) = 0$$

або:

$$d\xi - dx + (\eta - y) y'' dx + y'(d\eta - y' dx) = 0$$

а звідси:

$$d\xi + y' d\eta - dx\left[1 - (\eta - y) y'' + y'^2\right] = 0$$

Але:

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

а тому:

$$d\xi + y' d\eta - dx\left[\overset{0}{\cancel{1 - \frac{1 + y'^2}{y''} y'' + y'^2}}\right] = 0$$

або:

$$d\xi + y' d\eta = 0$$

Таким чином:

$$1 + y' \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

Що й треба було довести.

2). Довід дуги еволюти через рівний з походом луча кривини евольвенти.

Хай дуга еволюти буде s, тоді:

$$ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$$

Ми знаємо, що луч кривини:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Але з другого боку квадрат того ж луча через значники кінців його буде:

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \ldots\ldots (б)$$

Тому маємо рівняння:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \ldots\ldots (в)$$

Диференціюючи його, ми після скорочення на 2 одержимо:

$$(\xi - x)d\xi + (\eta - y)d\eta - dx[(\xi - x) + (\eta - y)y'] = \rho d\rho$$

На підставі же рівности (а), вираз в квадратових дужках є рівний з нулем і через те:

$$(\xi - x)d\xi + (\eta - y)d\eta = \rho d\rho$$

Підносимо це рівняння до квадрату:

$$(\xi - x)^2 d\xi^2 + 2(\xi - x)(\eta - y)d\xi d\eta + (\eta - y)^2 d\eta^2 = \rho^2 d\rho^2$$

Далі з рівняння (б) маємо:

$$1)\ (\xi - x)^2 = \rho^2 - (\eta - y)^2$$

$$2)\ (\eta - y)^2 = \rho^2 - (\xi - x)^2$$

А тому:

$$\rho^2 d\xi^2 + \rho^2 d\eta^2 - [(\eta - y)^2 d\xi^2 - 2(\xi - x)(\eta - y)d\xi d\eta + (\xi - x)^2 dy^2 = \rho^2 d\rho^2$$

або:

$$\rho^2(d\xi^2+d\eta^2)-[(\eta-y)d\xi-(\xi-x)d\eta]^2=\rho^2 d\rho^2 \ldots (2)$$

А із першої властивости маємо:

$$1+y'\frac{d\eta}{d\xi}=0$$

або $d\xi=-y'd\eta$

Вставляючи це в рівність (2), одержимо:

$$\rho^2(d\xi^2+d\eta^2)+[\cancel{(\eta-y)y'+(\xi-x)}]^2 d\eta^2=\rho^2 d\rho^2$$

[ ] = 0 на підставі рівности (a)

Тому:

$$d\xi^2+d\eta^2=d\rho^2$$

а звідци:

$$d\rho=\pm\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}=\pm ds$$

де + відповідає одночасному зростанню і ρ, і s, а —, коли при зростанню s луч ρ спадає.

Хай дуга зростає, коли луч спадає, тоді:

$$\Delta s=-\Delta\rho$$

або:

$$\Delta(s+\rho)=0$$

себто:

$$\rho+s=const$$

Хай дано еволюту AB (рис. 48). Візьмім нитку, що не розтягується, нитку і затріпимо її кінець в якій будь точці C еволюти. Натягнемо цю нитку вздовж дотичної до еволюти CK і зріжемо нитку в точці K. Коли далі будемо експорта-

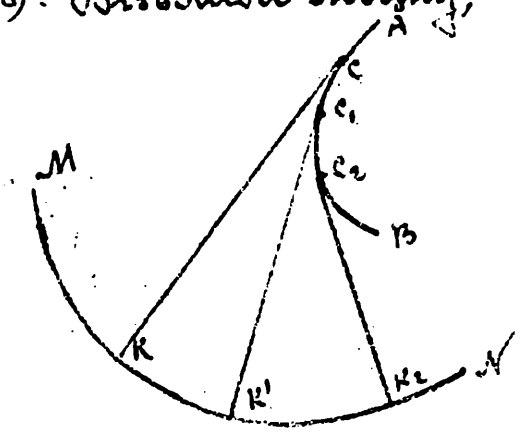


Рис. 48

ти нитку на еволюту (тримаючи її натягнутою в напрямку дотичної), тоді кінець цієї нитки K буде очеркувати евольвенту MN, бо при цьому зменшення натягнутої нитки завжди буде рівне приросценню нагорнутої на дугу нитки, себто:

$$-\Delta\rho = \Delta s$$

Теж саме одержимо, коли навертуту на еволюту нитку будемо розгортати. [Отже звідкіль створилася назва: евольвента = розгортка]

§24. Огортальні кривих.

Ми знаємо, що кожна крива визначається рівнянням:

$$F(x, y) = 0 \ldots\ldots (1)$$

Припустім, що в це рівняння введемо довільну величину α, яко довільний змінник і будемо розглядати рівняння:

$$F(x, y, \alpha) = 0 \ldots\ldots (2)$$

де x і y є певні змінні величини, а α параметр, що йому ми довільно можемо давати різні вартости.

Очевидно, що при всіх вартостях α, рівняння (2) буде визначати однакові криві (напр. всі вони будуть або еліпси, або кола і т. д.) подібні до кривої (1), для якої $\alpha = 0$

Шерег таких кривих, що визначаються рівнянням (2) при всіх можливих вартостях α зветься <u>родинною (family) кривих.</u>

А рівняння (2) є рівняння цієї родини кривих.

Хай маємо (рис. 49) дві яких-небудь криві L_0 і L_1 із родини кривих визначених рівняннями: $F(x,y,\alpha)=0$

Крива L_0 відповідає якійсь сталій вартості змінника $\alpha=\alpha_0$, а крива L_1 вартості $\alpha=\alpha_1$

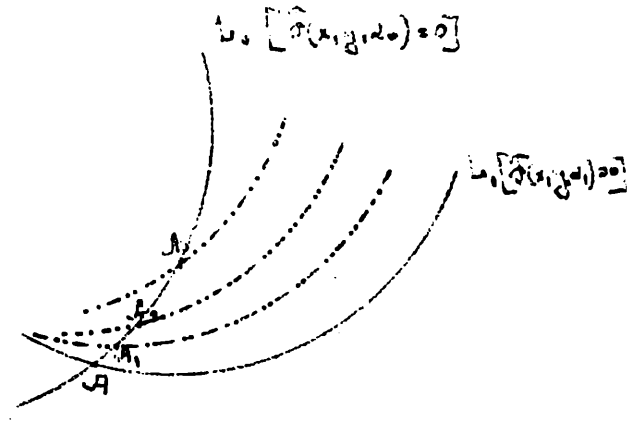


Рис. 49.

Припустім, що ми взяли вартість α_1 так близько до α_0, що різниця між цими $\alpha_1-\alpha=\Delta\alpha$ дає можливість кривим L_0 і L_1 загалом перетинатися. Кожні дві криві можуть перетинатися або в одній, або в двох, або в кількох точках. Хай одна з таких точок буде A. Очевидно, що ця точка визначається яко перетинання кривих:

$$F(x,y,\alpha)=0 \quad і \quad F(x,y,\alpha+\Delta\alpha)=0$$

Коли $\Delta\alpha$ буде зменшуватися, простуючи до нуля, то крива L_1 буде повертатися й перетворюватися так, щоб в останній момент, коли $\Delta\alpha$ зрівняється з нулем, злитися з кривою L_0. Відсе наданого процесу й точка A, перетинання цих кривих, посуватиметься (положення A_1, A_2...), тим-то в самий момент їх злиття зайняла дане граничне положення A_n. Останнє положення точки A_n буде <u>граничною точкою</u> кривої L_0.

Таким чином: <u>коли нам дано родину кри-</u>

бих, то приклетною точкою однієї з них є остаточне (лескове) положення її з безлесково-близького до неї иншою кривою з тієї же родини кривих.

Зогляду на те, що дві криві можуть перетинатися і в кількох точках, то загалом, на кожній даній кривій з родини, може бути не тільки одна, але й кілько приклетних точок.

Ясна річ, що значіння приклетної точки можуть визначатися із системи рівнянь:

$$\mathcal{F}(x, y, \alpha) = 0$$

$$\mathcal{F}(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$$

коли в останньому рівнянню $\Delta\alpha$ простуватиме до нуля. Це друге рівняння можна ще перетворити так:

1) Відіймемо з нього 1-ше рівняння, а саме:

$$\mathcal{F}(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - \mathcal{F}(x, y, \alpha) = 0$$

2) поділимо всі члени цього рівняння на $\Delta\alpha$;

Тоді маємо:

$$\frac{\mathcal{F}(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - \mathcal{F}(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0$$

Одержимо нову систему рівнянь:

$$\mathcal{F}(x, y, \alpha) = 0 \cdots\cdots (\alpha)$$

$$\frac{\mathcal{F}(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - \mathcal{F}(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0 \cdots (3)$$

Ця система є рівнолірна з першою, а друге її рівняння є вислідом рівнянь попередньої системи. Коли тепер $\Delta\alpha$ простуватиме до своєї лескової вартости, себто до нуля, то рівняння (3) обернеться в

$$F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

і через те значки нашої прикметної точки будуть розвязками системи:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, \alpha) &= 0 \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (52)$$

Очевидно, що ця прикметна точка належатиме коженій раз до певної кривої із родини їх, в залежности від заданої вартости α.

Коли же із системи (52) вилучити змінника α, то ми одержимо геометричний осередок всіх прикметних точок даної родини кривих вигляду: $\Phi(x, y) = 0$ Це буде кривою, що ми назвемо: <u>Огортальної родини кривих</u>, самі же криві цієї родини звуться <u>огорненими.</u>

Міркування цього § приводять нас до таких висновків:

Кожне рівняння вигляду:

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

може бути:

1) Рівнянням <u>родини кривих</u>, коли в ньому α є довільним змінником, що може мати які нам бажано вартости.

2) рівнянням <u>однієї з кривих</u>, що належить до даної родини, себто рівнянням якоїсь огорненої кривої, що відповідає <u>одній (окремій) сталій</u> вартості α [напр. $F(x, y, \alpha_0) = 0$]

3) рівнянням <u>огортальної</u>, коли в ньому α є змінною функцією x і y, вираженою з прикметно-

го рівняння $F_\alpha(x, y, \alpha) = 0$

Приклад: Знайти огортальну родини кол рівняння: $u = (x-\alpha)^2 + y^2 = r^2$. (1)

З форми самого рівняння ми бачимо, що це є родина кол сталого луча, звязаних умовою, що центри їх лежать на осі x-ів (рис. 50). Складаємо прилеглене рівняння:

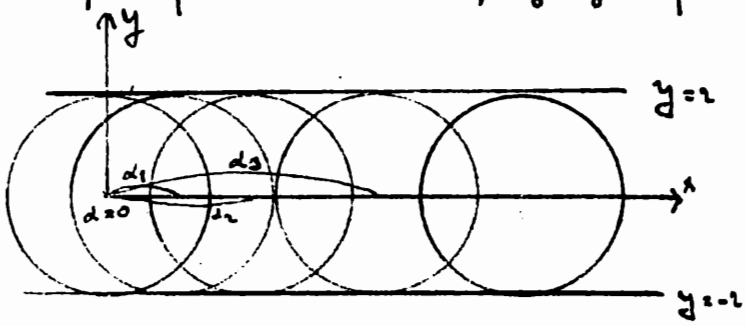


Рис. 50

$$u'_\alpha = -2(x-\alpha) = 0 \quad \text{або} \quad x-\alpha = 0 \; \cdots \; (2)$$

Щоб мати рівняння огортальної даних кол, ми виключаємо з (1) і (2) змінних α й одержуємо:

$$0^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad \text{або} \quad y^2 - r^2 = 0$$

Звідси:

$$(y+r)(y-r) = 0 \quad \text{або} \quad y = -r; \; y = +r$$

Це є система двох простих рівнобіжних до осі x-ів і в даному разі спільних дотичних до всіх кол.

§25. Основна властивість огортальних родини кривих.

Дотична до огортальної в кожній її точці є також дотичною до тієї огорненої з родини кривих, для якої згадана точка є прилеглою.

Візьмім будь яку криву з родини даних кривих. Хай вона буде L_0. Означимо одну з її прилеглих точок через $M(x, y)$. Очевидно, що ця точка буде спільною й для даної огорненої L_0 і для огортальної всієї родини S. Щоб довести, що дотична, поведена

через точку M до кривої S буде дотичною також і до кривої L_0, досить нам скласти рівняння дотичних поведених через точку M, окремо до кривої L_0 і кривої S і показати, що ці рівняння є ідентичні. Отже:

1) Рівняння дотичної до кривої L_0, що має рівняння $F(x,y,\alpha_0)=0$, де $\alpha_0=const$, матиме вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)=0 \cdots (\alpha)$$

2) Аналогічно, рівняння дотичної поведеної через ту саму точку $M(x,y)$ до огортальної S буде:

$$\frac{\partial}{\partial x}[F(x,y,\alpha)](X-x)+\frac{\partial}{\partial y}[F(x,y,\alpha)](Y-y)=0 \cdots (\beta)$$

Тепер обчислимо похідні: $\frac{\partial}{\partial x}[F(x,y,\alpha)]$ і $\frac{\partial}{\partial y}[F(x,y,\alpha)]$, беручи на увагу, що дана крива S є огортальною, а тому у рівнянні $F(x,y,\alpha)=0$ змінна α є функцією x і y, визначеною з рівняння $F'_\alpha=0$, або $\frac{\partial F}{\partial \alpha}=0$. Таким чином $F(x,y,\alpha)$ є складною й ми маємо:

$$1)\ \frac{\partial}{\partial x}[F(x,y,\alpha)]=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$2)\ \frac{\partial}{\partial y}[F(x,y,z)]=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

Але приналежне рівняння дає $\frac{\partial F}{\partial \alpha}=0$, а тому маємо:

$$1)\ \frac{\partial}{\partial x}[F(x,y,\alpha)]=\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$2)\ \frac{\partial}{\partial y}[F(x,y,\alpha)]=\frac{\partial F}{\partial y}$$

(ті самі вислідці, коли ми вважали $\alpha=const$) що й тоді,

Таким чином, рівняння (3) дотичної до огортаючої S в точці M одержує вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)=0 \ldots (8)$$

Себто рівняння (7) є ідентичним з рівнянням (4), а тому теорема є доведена.

<u>Висновок. Коли б ми мали родину з простих ліній, то її огортаючка була б крайньою, що до неї всі дані огорнені прості самі були дотичними.</u>

Очевидно, що коли ми будемо мати рівності $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ і $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, то певної означеної дотичної в даній точці M не існує, а тому такого роду точки звуться <u>особливою</u>. В цьому випадку виключення α з системи рівнянь (51) дає рівняння геометричного осередку особливих точок родини. Це питання ми будемо розглядати пізніше і удіємо для нього окремий §.

§26. <u>Інші трактування еволюти.</u>

<u>Еволюта є огортаючою всіх прямових до еволюти.</u>

Хай дана крива визначається рівнянням $y=f(x)$ (1). Тоді складаючи за загальним правилом рівняння прямової до неї в довільній точці $M(\alpha,\beta)$, одержимо:

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{d\alpha}=0 \ldots (2)$$

Прямова M називається дотичною, а тому й містить координати рівняння (1), а са-

де $z = f(\alpha)$. Отже:

$$(x-\alpha) + [y - f(\alpha)] f'(\alpha) = 0 \cdots (3)$$

Даючи α всі можливі вартости, ми одержимо рівняння всіх прямових до даної кривої (1).

Очевидно, що рівняння (3) є знаком функції x, y і довільного змінника α, а через те ми можемо його дати вигляд: $F(x, y, \alpha) = 0$. Це є рівняння родини прямових до даної кривої.

Далі, щоб знайти рівняння огортальної і цієї родини прямових (3) ми до рівняння (1) прилучимо ще приємне рівняння вигляду $F'_\alpha(x, y, \alpha)$, а саме [беручи похідну через α від рівняння (3)] маємо:

$$-1 + [y - f(\alpha)] f''(\alpha) - f'^2(\alpha) = 0 \cdots\cdots (4)$$

Очевидно, що коли з рівнянь (3) і (4) вилучити змінник α, то одержимо рівняння огортальної. Але коли ми з тих самих рівнянь (3) і (4) вилучимо вартости x і y (через α), то матимемо точки перетину огортальної з окремими прямовими з їх родини, себто їх приємні точки. Отже, визначаючи y з рівняння (4) і вставляючи його потім в рівняння (3), матимемо:

$$y = f(\alpha) + \frac{1 + f'^2(\alpha)}{f''(\alpha)}$$

$$x = \alpha - f'(\alpha) \frac{1 + f'^2(\alpha)}{f''(\alpha)}$$

Це є, як ми зазначали, значники приємних точок родини даних прямових до кривої $y = f(x)$, але разом з тим, (див. взір 48), це є значники

центрів кривини тієї же кривої. Отже, огортальна прямових до кривої $y=f(x)$, себто геометричний осередок прилеглих точок її, буде одночасно й геометричним осередком центрів кривини тієї ж самої кривої $y=f(x)$, себто її еволютою.

<u>Висновок. Центр кривини кожної кривої є межовим положенням перетину перетину двох безмежно-близьких прямових її (її прилеглого точкою!</u>

§27. Родина кривих від кількох незалежників.

I. Розглянемо попередну родину кривих, залежну від 2-х яких довільних змінників α і β.

Най, напр., родина кривих визначається рівнянням:

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0 \quad \cdots\cdots (a)$$

де змінники α і β звязано рівнянням:

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0 \quad \cdots\cdots (б)$$

Очевидно, що рівняння (б) дає змогу визначити β, як функцію α, себто:

$$\beta = \psi(\alpha)$$

Тоді:

$$F[x, y, \alpha, \psi(\alpha)] = 0$$

або:

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0$$

Ми приходимо до випадку одного змінника, а тому огортальна визначиться як вислід вилу-

α з рівнянь:

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0$$

$$\text{і} \quad \Phi'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

Ясна річ, що Φ'_α можна трактувати як:

$$\mathcal{F}'_\alpha(x, y, \alpha, \beta) = 0 \quad \text{де } \beta = \psi(\alpha)$$

А через те:

$$\Phi'_\alpha(x, y, \alpha) = \mathcal{F}'_\alpha(x, y, \alpha, \beta)_{\beta=\psi(\alpha)} = \mathcal{F}'_\alpha(x, y, \alpha, \beta) + \mathcal{F}'_\beta(x, y, \alpha, \beta)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

Щоб знайти вартість $\frac{d\beta}{d\alpha}$ диференцуємо рівняння (б) і маємо:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

або:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}}$$

Отже, ми маємо систему:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \mathcal{F}(x, y, \alpha, \beta) = 0 \\ 2) & \varphi(\alpha, \beta) = 0 \\ 3) & \mathcal{F}'_\alpha(x, y, \alpha, \beta)\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - \mathcal{F}'_\beta(x, y, \alpha, \beta)\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0 \end{array}\right\} \cdot (53)$$

Виключення з цих рівнянь α і β дає нам рівняння огортальної.

<u>Приклад 1.</u> Знайти огортальну сім'ї, визначених рівняннями:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

де α і β є довільно змінними величинами зв'язаними умовою: $\alpha + \beta = \varkappa$ (const)

Отже, наше завдання є знайти огортальну елипс зі змінними осями, що сума їх величина стала. Щоб скласти рівняння (3) системи (53) беремо:

$$F'_\alpha = -\frac{2x^2}{\alpha^3} \; ; \qquad F'_\beta = -\frac{2y^2}{\beta^3} \, .$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 1 \; ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 1$$

і тому маємо систему:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

$$\alpha + \beta = k$$

$$\frac{x^2}{\alpha^3} - \frac{y^2}{\beta^3} = 0$$

З останнього рівняння системи ми маємо пропорцію:

$$\frac{x^2}{\alpha^3} : \alpha = \frac{y^2}{\beta^3} : \beta$$

і складаємо з неї таку похідну:

$$\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}\right) : (\alpha + \beta) = \frac{x^2}{\alpha^2} : \alpha = \frac{x^2}{\alpha^3} = \frac{y^2}{\beta^2} : \beta = \frac{y^2}{\beta^3}$$

Але $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, а $\alpha + \beta = k$, тому:

$$\frac{x^2}{\alpha^3} = \frac{1}{k} \; ; \quad \frac{y^2}{\beta^3} = \frac{1}{k}$$

Звідси:

$$\alpha^3 = kx^2 \; ; \quad \beta^3 = ky^2$$

або:

$$\alpha = (kx^2)^{1/3} \; ; \quad \beta = (ky^2)^{1/3}$$

Додаючи останні рівності одна до одної, і беручи на увагу, що $\alpha + \beta = k$, маємо:

$$(kx^2)^{1/3} + (ky^2)^{1/3} = k$$

або:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3} \ldots\ldots (54)$$

що уявляє астроїду з 4-ма шпилями. (рис. 51)

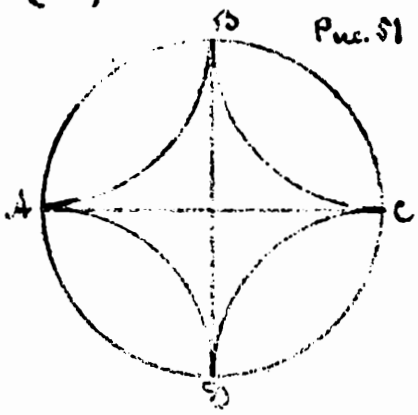


Рис. 51

<u>Задача.</u> Довести, що ту саму огортальну лінію родина простих: $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$, коли змінники α і β є прямими прямокутного Δ-ка зі сталою протипрямною, себто $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$.

<u>Приклад 2.</u> Знайти огортальну простих, що творять на осях координат відтинки сталої суми s.

Отже ми маємо рівняння простої:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

де $\alpha + \beta = s$. Обчислюємо елементи 3-го рівняння:

$$F'_\alpha = -\frac{x}{\alpha^2};\ F'_\beta = -\frac{y}{\beta^2};\ \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 1;\ \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 1.$$

і одержимо систему:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1;\quad \alpha + \beta = s;\quad \frac{y}{\beta^2} - \frac{x}{\alpha^2} = 0$$

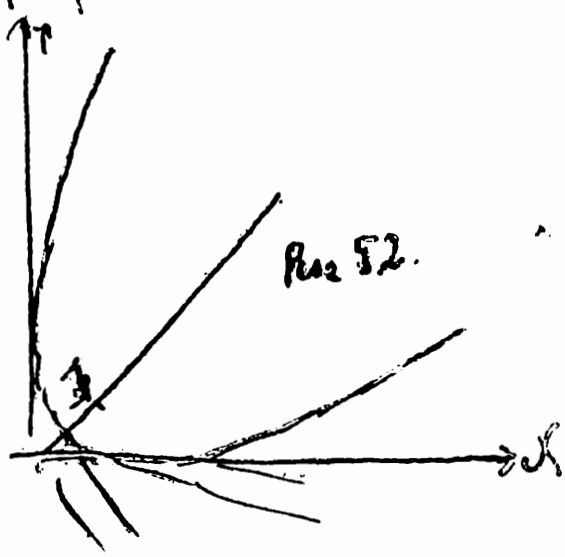


Рис. 52.

З 3-го рівняння маємо пропорцію:

$$\frac{y}{\beta} : \beta = \frac{x}{\alpha} : \alpha,\ \text{а звідси:}\ \left(\frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha}\right) : (\alpha + \beta) = \frac{x}{\alpha^2} = \frac{y}{\beta^2},\ \text{або:}$$

$$1 : s = \frac{x}{\alpha^2} = \frac{y}{\beta^2};\quad \frac{1}{s} = \frac{x}{\alpha^2};\quad \frac{1}{s} = \frac{y}{\beta^2};\quad \alpha = (xs)^{1/2};\quad \beta = (ys)^{1/2};$$

$$\alpha + \beta = s;\quad (xs)^{1/2} + (ys)^{1/2} = s^1$$

або:

$$x^{1/2} + y^{1/2} = s^{1/2}$$

Це буде парабола, що на вісі рівнобіжну

осей координат (рис.52). Справді, повернемо осі координат на кут $\frac{\pi}{4}$ і перенесемо їх в точку $\left(\frac{s}{4}, \frac{s}{4}\right)$. Тоді загальні вирази перетворення будуть:

$$x = \frac{s}{4} - \xi\cos\frac{\pi}{4} - \eta\sin\frac{\pi}{4}; \quad y = \frac{s}{4} + \xi\sin\frac{\pi}{4} + \eta\cos\frac{\pi}{4}$$

де $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Звідси:

$$x = \frac{s}{4} + \frac{\xi}{2}\sqrt{2} - \frac{\eta}{2}\sqrt{2}; \quad y = \frac{s}{4} + \frac{\xi}{2}\sqrt{2} + \frac{\eta}{2}\sqrt{2}$$

або:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{2} - \xi\sqrt{2} - \eta\sqrt{2}\right) \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{2} + \xi\sqrt{2} + \eta\sqrt{2}\right)$$

Вставляючи ці вартости в рівняння $x^{1/2} + y^{1/2} = s^{1/2}$, маємо:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{s}{2} + \xi\sqrt{2} - \eta\sqrt{2}\right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{s}{2} + \xi\sqrt{2} + \eta\sqrt{2}\right)^{1/2} = s^{1/2}$$

або:

$$\left(\frac{s}{2} + \xi\sqrt{2} - \eta\sqrt{2}\right)^{1/2} + \left(\frac{s}{2} + \xi\sqrt{2} + \eta\sqrt{2}\right)^{1/2} = (2s)^{1/2}$$

Останнє рівняння підносимо до квадрату й одержимо:

$$s = 2\xi\sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{s^2}{4} + s\xi\sqrt{2} + 2\xi^2 - 2\eta^2} = 2s$$

або:

$$\sqrt{\frac{s^2}{4} + s\xi\sqrt{2} + 2\xi^2 - 2\eta^2} = \frac{s}{2} - \xi\sqrt{2}$$

Підносимо ще раз до квадрату й маємо:

$$\cancel{\frac{s^2}{4}} + s\xi\sqrt{2} + \cancel{2\xi^2} - 2\eta^2 = \cancel{\frac{s^2}{4}} - s\xi\sqrt{2} + \cancel{2\xi^2}$$

або звідси:

$$\eta^2 = s\xi\sqrt{2}$$

або:

$$\eta^2 = 2p\xi \quad \text{де } 2p = s\sqrt{2}$$

Це, як бачимо, є рівняння параболи.

<u>Приклад 3.</u> Знайти огортальну родини еліпс, що мають центр в початку координатних осей, а осі їх лежать на осях координат. Поле не всіх цих еліпс є величина стала.

Отже маємо рівняння родини: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (1)
де α і β є довільні змінні звязані умовою:

$$\pi\alpha\beta=S \quad \text{або:} \quad \alpha\beta=k \ (2) \qquad \text{де } k=\frac{S}{\pi}$$

Замісць, щоб визначати одніні змінних через другий, ми можемо продиференцувати обидва дані рівняння через ці змінні й матимемо:

$$1)\ \frac{x^2d\alpha}{\alpha^3}+\frac{y^2d\beta}{\beta^3}=0; \quad \text{або} \quad \frac{x^2d\alpha}{\alpha^3}=-\frac{y^2d\beta}{\beta^3}$$

$$2)\ \beta d\alpha+\alpha d\beta=0 \quad \text{або} \quad \beta d\alpha=-\alpha d\beta$$

Діливши одно рівняння на друге, маємо:

$$\frac{x^2}{\alpha^2\beta}=\frac{y^2}{\alpha\beta^3} \quad \text{або скорочуючи на } \alpha\beta: \ \frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{y^2}{\beta^2}$$

Тому роблячи вставку для вартостей у рівняння (1), маємо:

$$\frac{2x^2}{\alpha^2}=1;\ \frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{1}{2};\ \alpha=\pm x\sqrt{2}$$

$$\frac{2y^2}{\beta^2}=1;\ \frac{y^2}{\beta^2}=\frac{1}{2};\ \beta=\pm y\sqrt{2}$$

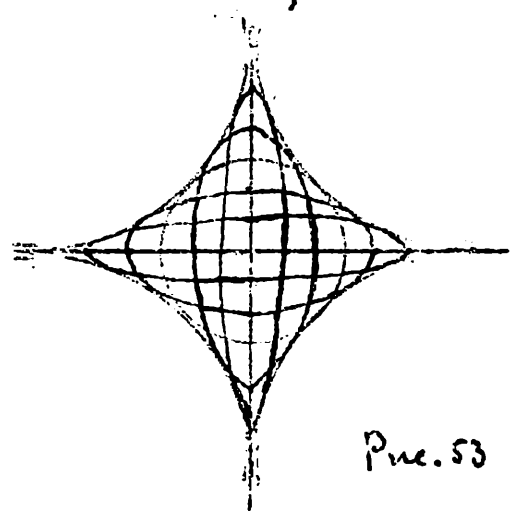


Рис. 53

Тепер вставляючи вартости α і β у рівняння (2) одержимо:

$$xy=\pm\frac{k}{2}$$

рівняння здружених прямокутних гіпербол, віднесених до осей координат, як асимптот (рис. 53).

II. Очевидно, ту саму методу вживатимемо, коли родина кривих визначається рівнянням:

$$F(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n)=0$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ – є n змінних, звязаних $n-1$ рівняннями.

Тоді маємо систему:

1) Рівняння родини кривих: $F=0$

2) $n-1$ рівняння лише змінними

і 3) Рівняння вигляду:

$$F'_{\alpha_1} + F'_{\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} + F'_{\alpha_3}\frac{d\alpha_3}{d\alpha_1} + \cdots = 0$$

де $\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}$ і $\frac{d\alpha_3}{d\alpha_1}$ і т. д. визначаються із системи рівнянь 2) через їх диференціювання. Отже маємо $n+1$ рівнянь, за якими можуть виключити n змінних $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$

§28. Дотикання кривих.

Хай на даній площі маємо дві криві L_1 і L_2. Означимо змінні значення точок першої кривої L_1 через x, y, а другої кривої L_2 через $-\xi, \eta$. Тоді рівняння цих кривих матимуть такий вигляд:

$$y = f(x)\ ; \quad \eta = \varphi(\xi) \quad \ldots\ (a)$$

Припустім, що ці дві криві мають якусь спільну точку M_0. Тоді значення її будуть

$$x_0 = \xi_0 \ \text{ і } \ y_0 = \eta_0$$

Розглянемо, як близько одна до одної лежать ці криві біля точки M_0 (рис. 54). Візьмемо на кривій L_1 безмежно-близьку точку до M_0, напр. $M'[x_0+h, f(x_0+h)]$ де h простує до нуля. Аналогічно на кривій L_2 матимемо точку $M''[(\xi_0+h), \varphi(\xi_0+h)]$ або $M''[(x_0+h), \varphi(x_0+h)]$. Віддалення між цими кривими в точках M' і M'' визначиться відтинком: $\Delta = M'M''$

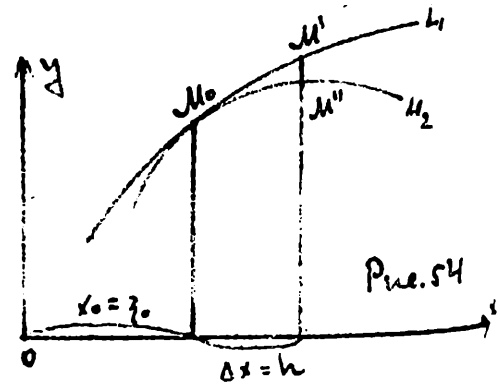


Рис. 54

тобто:

$$\Delta = f(x_0+h) - \varphi(x_0+h)$$

За взором Тейлора маємо:

1) $f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_0) + \dots \frac{h^n}{n!} f^n(x_0+\theta h)$

2) $\varphi(x_0+h) = \varphi(x_0) + h \varphi'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} \varphi''(x_0) + \dots \frac{h^n}{n!} \varphi^n(x_0+\theta h)$

де $f(x_0) = \varphi(x_0)$, бо $\eta_0 = y_0$

Звідци:

$$\Delta = h\left[f'(x_0) - \varphi'(x_0)\right] + \frac{h^2}{2!}\left[f''(x_0) - \varphi''(x_0)\right] + \dots + \frac{h^n}{n!}\left[f^n(x_0+\theta h) - \varphi^n(x_0+\theta h)\right] \dots (\delta)$$

Очевидно, що чим вищий буде ступінь h, що входить в цю різницю, тим ближче будуть лежати криві одна до одної.

1) Припустім, що вартости:

$$f'(x_0) \neq \varphi'(x_0)$$

Тоді до цих кривих в точці M_0 існуватимуть дві окремі дотичні, себто ці криві перехрещуватимуться (рис. 55)

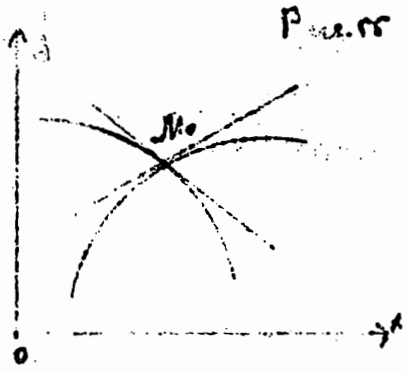


Рис. 55

Наприклад:

<u>Ці криві мають дотикання нульового порядку.</u>

2) Коли б:

$$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

себто:

$$\Delta = \frac{h^2}{2!}\left[f''(x_0) - \varphi''(x_0)\right] + \dots$$

то ці криві мали б спільну дотичну в точці M_0, бо кутові зміщення цих дотичних $f'(x_0)$ і $\varphi'(x_0)$ - є рівні. Ці криві дотикалися б в точці M_0. (рис. 56) <u>Це зветься дотиканням 1го порядку.</u>

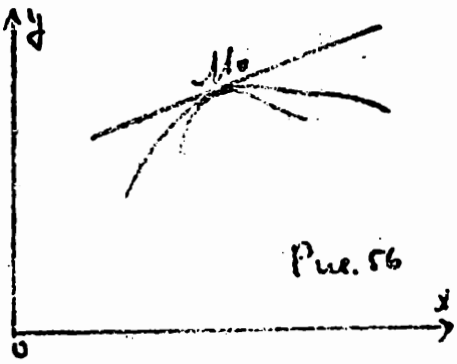


Рис. 56

3) Припустім тепер, що:

$$f'(x_0) = \varphi'(x_0) \text{ і } f''(x_0) = \varphi''(x_0) \text{ але } f'''(x_0) \neq \varphi'''(x_0)$$

Тоді:

$$\Delta = \frac{h^3}{3!}\left[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)\right] + \dots$$

<u>Це є доторкання 2го порядку.</u>

Загалом, коли k-ті похідні від рівнянь першої і другої кривої для значнів даної точки є рівні між собою, а $(k+1)^{ші}$ похідні не рівні, себто коли:

$$\Delta = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\left[f^{(k+1)}(x_0) - \varphi^{(k+1)}(x_0)\right] + \dots$$

то криві мають в даній точці доторкання $k^{го}$ порядку.

§29. <u>Геометричне трактування питання про доторкальність кривих.</u>

<u>Визначення.</u>

<u>Коли дві якісь-небудь кривих мають спільну точку, що через неї можна повести спільну до обох кривих дотичну, то загалом кажуть, що ці криві доторкаються.</u>

[Цим визначенням виключаємо звичайний перетин кривих (дві дотичних), що ми назвали доторканням нульового порядку].

Існування спільної дотичної загалом показує, що точка M є складною, а саме: можливим положенням злиття не менше 2х точок. Справді, через одну точку можна повести безліч простих. Коли же через дану спільну точку кривих можна провести лише одну просту дотичну до них, то мусить існувати хоча б без-

лежно-малий відтинок простої, себто хоч дві точки, які зазначали напряму лінії з цим відтинком дотичної. Инакше кажучи, ми уявляємо дану точку M як сукупність 2х безмежно-близьких точок. Щоб оправдати цю умову, візьмім дві яких-будь криві L_1 і L_2, що мають спільну точку M (рис. 57) і поведемо через неї спільну до обох кривих дотичну MK. Цю дотичну можна розглядати, або як межове положення січної AB, коли точки A і B безмежно наближаються одна до одної, або як межове положення січної CD при аналогічних умовах. В обох випадках точка M є злиттям точок A і B, або C і D, або точка M є сукупністю двох безмежно-близьких точок перетину січної з кривої, що простягнуть до цілковитого злиття. Коли припустимо, що точки A' і B' є ці безмежно близькі точки, що утворюють M, то відтинок A'B', що є фактично частиною дотичної MK буде цілком визначений з напряму (як проста поміж двох точок), а тому й сама дотична MK буде цілковито визначеною. Це й є доторкання першого порядку.

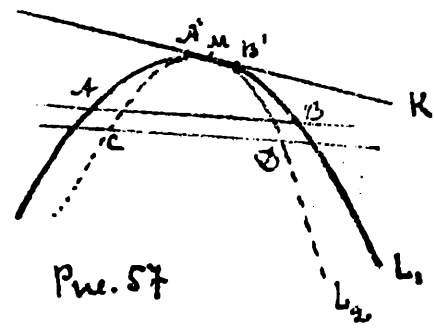


Рис. 57

Розглянемо тепер доторкання 2го порядку. Припустім, що задані криві L_1 і L_2 мають три досить близькі одна до одної спільні точки (рис. 58) A, B і C. Ми знаємо, що через кожні три точки (що не лежать на простій) завжди можне-

на повести цілком визначене коло. Коли б ці точки B і C все наближалися до A, то настав би момент, коли дуги AB і AC злетилися до нуля й ми одержали б точку зліпання M, а коло придбало якесь лежове положення й величину. Означимо через x і y біжучі координати якоїсь точки на колі, а значини центра кола означимо через a і b, тоді рівняння цього кола матиме вигляд:

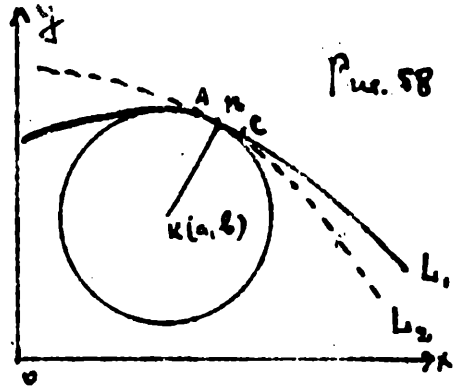


Рис. 58

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots (\alpha)$$

Означимо значини точки A через ξ і η, а значини близької до неї точки B через $\xi_1=\xi+\Delta\xi$, $\eta_1=\eta+\Delta\eta$. Аналогічно значини точки C можемо означити через: $\xi_2=\xi_1+\Delta\xi_1$ і $\eta_2=\eta_1+\Delta\eta_1$. Коли коло рівняння ($\alpha$) переходить через ці точки, то ми матимемо тотожности:

$$(\xi-a)^2+(\eta-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots (\beta)$$

$$(\xi_1-a)^2+(\eta_1-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots (\gamma)$$

$$(\xi_2-a)^2+(\eta_2-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots (\delta)$$

~~Віднімаючи~~ Віднімаючи з рівняння (γ) рівняння (β), маючи на увазі що $\xi_1=\xi+\Delta\xi$, $\eta_1=\eta+\Delta\eta$, одержимо:

$$(2\xi-2a+\Delta\xi)\Delta\xi+(2\eta-2b+\Delta\eta)\Delta\eta=0$$

або поділивши всі члени на $\Delta\xi$, матимемо:

$$(2\xi-2a+\Delta\xi)+(2\eta-2b+\Delta\eta)\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}=0$$

Коли ж точка B безмежно-наближається до A, то $\Delta\xi$, а разом і $\Delta\eta$ прямують до нуля, а через те:

$$\lim_{\Delta\xi \to 0} \left[(2\xi - 2a + \Delta\xi) + (2\eta - 2b + \Delta\eta)\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} \right]$$

матимемо вираз:

$$2(\xi - a) + 2(\eta - b)\eta' = 0$$

де $\eta' = \frac{d\eta}{d\xi}$, або:

$$(\xi - a) + (\eta - b)\eta' = 0 \quad \cdots\cdots (к)$$

Це буде умовою проходження кола через точку A і безмежно-близьку до неї точку B. Таким чином відніймуючи рівняння (γ) із рівняння (б) і беручи на увагу що $\xi_2 = \xi_1 + \Delta\xi_1$; $\eta_2 = \eta_1 + \Delta\eta_1$, одержимо:

$$(2\xi_1 - 2a + \Delta\xi_1)\Delta\xi_1 + (2\eta - 2b + \Delta\eta_1)\Delta\eta_1 = 0$$

або діливши на $\Delta\xi$ і беручи межу, коли $\Delta\xi_1 \to 0$, одержимо:

$$(\xi_1 - a) + (\eta_1 - b)\eta_1' = 0 \quad \cdots\cdots (л)$$

де $\eta_1' = \frac{d\eta_1}{d\xi_1}$. Рівняння (л) є умовою проходження кола через точки A і C, коли C безмежно наближається до A. Очевидно, що рівняння (к) і (л) разом є умовою проходження даного кола через всі три безмежно близькі точки A, B і C.

Перетворимо цю умову й. для того з рівняння (а) відніймемо рівняння (к) і після поділу на $\Delta\xi$ маємо:

$$1 + (\eta - b)\frac{f'(\xi + \Delta\xi) - f'(\xi)}{\Delta\xi} + \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} f'(\xi + \Delta\xi) = 0$$

де ξ_1 ми замінили через $\xi + \Delta\xi$. Коли $\Delta\xi$ прямує-

ме то в такій значимо:

$$1 - (\eta - b) f''(\xi) + [f'(\xi)]^2 = 0$$

А звідси значини центру кола будуть:

$$a = \xi - f'(\xi) \frac{1 + f'(\xi)^2}{f''(\xi)}$$

$$b = \eta + \frac{1 + f'(\xi)^2}{f''(\xi)}$$

Легко бачити, що в даному разі ми одержали значини центру кривини, що одійшлено в і центром нашого кола. Таким чином можна твердити, що коли дві криві мають в точці їх дотикання спільну кривину, то ця точка дотикання є потрійною

Доведемо ще, що при цьому матимемо справу з дотиканням 2го порядку.

Хай значини заданої потрійної точки для кривої L_1 будуть x, y, а для кривої L_2 – ξ і η (рис 59) і ми маємо що для даного випадку обидві криві мають спільну кривину. Тоді значини центру спільної кривини їх можна написати так: 1) Через значини кривої

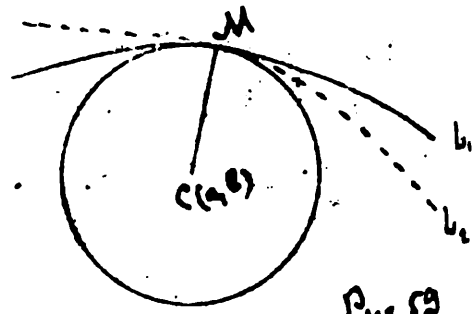


Рис. 59

$$(1) \quad a = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''} \quad \text{або:} \quad x - a = y' \frac{1 + y'^2}{y''}$$

$$b = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \qquad b - y = \frac{1 + y'^2}{y''}$$

2) Через значини кривої L_2:

$$(2) \quad a = \xi - \eta' \frac{1 + \eta'^2}{\eta''} \quad \text{або} \quad \xi - a = \eta' \frac{1 + \eta'^2}{\eta''}$$

$$b = \eta + \frac{1 + \eta'^2}{\eta''} \qquad b - \eta = \frac{1 + \eta'^2}{\eta''}$$

В кожній із систем (1) і (2) ділимо перше рівняння на друге й маємо:

$$y' = \frac{x-a}{b-y}; \quad \eta' = \frac{\xi-a}{b-\eta}$$

Але точка M є спільною для обох кривих, а тому $\xi = x$; $y = \eta$, а через те:

$$y' = \eta'$$

Далі повертаючися до рівнянь (1) і (2) маємо:

$$a = x - y'\frac{1+y'^2}{y''} = \xi - \eta'\frac{1+\eta'^2}{\eta''}$$

$$b = y - \frac{1+y'^2}{y''} = \eta - \frac{1+\eta'^2}{\eta''}$$

Коли ж для точки M: $x = \xi$, $y = \eta$ і $y' = \eta'$, то й y'' мусить бути рівним η''.

Раз ми маємо $y' = \eta'$ і $y'' = \eta''$, то дотримання 2го порядку.

Тепер перейдемо до дослідження дотримання вже бажано Кго порядку. Очевидно, що коли в цьому випадку означимо рівняння даних кривих: 1) $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$, а значення спільної точки M через x_0, y_0 то матимемо:

$$f^{(k)}(x_0) = \varphi^{(k)}(x_0)$$

а ще:

$$f^{(k+1)}(x_0) \neq \varphi^{(k+1)}(x_0)$$

Точка ж M буде $(k+1)^{ої}$ кратності.

Розглянемо два випадки: коли k є парне й коли k - непарне.

Ми довели, що на випадок дотримання Кго порядку, маємо:

$$\Delta = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\left[f^{(k+1)}(x_0) - \varphi^{(k+1)}(x_0)\right] + \frac{h^{k+2}}{(k+2)!}\left[f^{(k+2)}(x_0) - \varphi^{(k+2)}(x_0)\right] + \dots$$

Очевидно, що знак Δ залежатиме від знаку лише 1-го члену правої частини, бо h є безмежно малим.

I. Коли k є число парне, то число $(k+1)$ непарне і тому ступінь h^{k+1} буде змінювати знак в залежності від зміни знаку самого h. Разом з тим буде змінювати знак і Δ. Це свідчить (рис. 60) що коли крива L_1 з одного боку точки M лежить ближче до осі x-ів ніж крива L_2, то з другого боку тієї ж точки M навпаки. Ми переконуємося, що дотичні криві в точці дотикання перехрещуються (рис. 61)

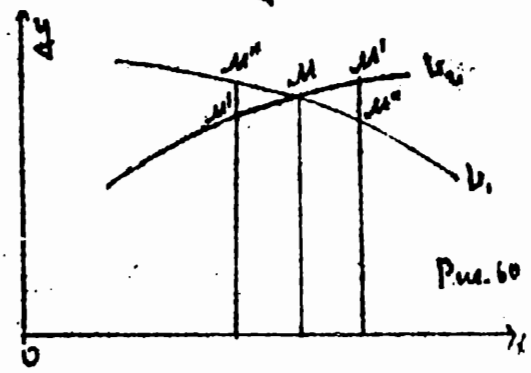


Рис. 60

Рис 61.

II Коли k є число непарне, то $(k+1)$ буде парним через те, незалежно від знаку h ступінь h^{k+1} буде додатнього, а тому Δ знаку не змінюватиме з якогоб боку M не лежачоб точка M'. Це свідчить (рис 62) що крива L_2 з обох боків точки M лежить ближче до осі x-ів ніж крива L_1. Ми переконуємося, що дотичні криві в точці дотикання є дотичними одна до одної.

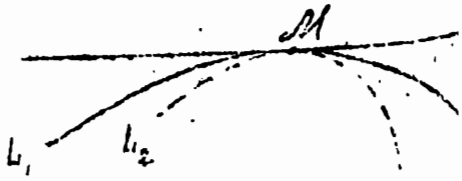


Рис. 62

Умовимося звати:

1) випадок, коли найвищий порядок рівних похідних є непарним — дотик касання 1го роду.

і 2) випадок, коли найвищий порядок рівних похідних є парним — дотик касання 2го роду.

Очевидно, що дотикання 1го роду є власним дотиком кривих, а дотикання 2го роду перехрещенням кривих в якій будь точці, що лежить на спільній їй дотичній.

§30. Дотичні криві.

Коли нам дається родина кривих, визначена рівнянням:

$$y = \varphi(x, d_1, d_2, d_3 \ldots d_n) \ldots (I)$$

і якась інша крива, що належить до цієї родини й визначається рівнянням:

$$y = f(x) \ldots\ldots (II)$$

то умовимося називати:

Дотичною до даної кривої (II) ту криву з даної родини (I), що матиме з нею дотикання можливо найвищого порядку.

Ми в попередніх §§ довели, що умовою дотикання кривої:

$$y = \varphi(x, d_1, d_2, d_3, \ldots d_n)$$

(де $d_1, d_2, d_3 \ldots d_n$ є певно заладані сталі величини) з кривою $y = f(x)$ якого будь kго порядку є рівність k перших похідних вигляду:

$$
\text{III)}\quad \begin{cases} \varphi'(x_0) = \varphi'(x_0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_n) \\ \varphi''(x_0) = \varphi''(x_0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(k)}(x_0) = \varphi^{(k)}(x_0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_n) \end{cases}
$$

(де x_0 значить точки доторкання)

Поставимо тепер задання противного характеру, а саме знайти між кривими родини (I) ту криву, що має з даною (II) доторкання $k^{го}$ порядку. Очевидно, що задача зводиться до визначення з системи (III) вартостей змінників $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ або инакше до вилучення їх з рівняння (I) за допомогою вищезаданої системи. Ми до системи (III) можемо додати ще одно рівняння, а саме:

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_n) \ldots (\text{IV})$$

й тими чином матимемо $k+1$ рівняння з n змінними. Очевидно, що коли $k < n-1$, то задача є неозначеною й у виході вилучення змінників $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ з рівняння (I) ми одержимо нову родину кривих, залежних від $n-k-1$ змінника, що задовольняють вимоги задачі. І лише в тому єдиному випадку коли $k = n-1$ ми матимемо лише одну (або кілько, залежно від числа розвязків) цілком визначену криву з родини, що буде доторкальною до даної. Кривих же, щоб мали б доторкання до даної кривої вище ніж $(n-1)$ порядку не може бути, бо тоді мали б систему з більшим числом рівнянь ніж самих змінних а тому загалом не спільно-розвязну. Правда,

ми можемо не зазначати певної точки дотикання $M(x_0, y_0)$, себто її шукати і тоді в системі (III) і (IV) мали б ще одно зміне x_0 і всіх змінних тоді було б $n+1$; очевидно, це створило необхідність додати до даних:

$$f(x_0) = \varphi(x_0)$$
$$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0)$$

ще о одно рівняння: $f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0)$ і з них ми найшли б точку (вартість x_0) в якій би до кривої (II) було дотикання вже $n^{го}$ порядку. Але це була б одна (або кілько, залежно від числа розвязків) точка, що мала б цю властивість. Ці точки будемо звати особливими.

Таким чином, найвищим порядком дотикання, що мають криві з родини (I) і заданою кривою (II) може бути $(n-1)^{й}$ (на одиницю нижчий числа змінних, від яких залежить родина). Одна крива з цієї родини, що матиме згадане найвищого порядку дотикання до даної простої і зветься дотикальною до неї

Приклад. З даної родини простих $y = ax + b$ залежної від $2^{х}$ незалежних a, b, знайти дотикальну до кривої $y = f(x)$

Означимо точку дотикання $M(x_0 y_0)$. Тоді ми маємо два змінних й тому можливе лише дотикання $1^{го}$ порядку. Складаємо систему:

$$ax_0 + b = f(x_0) \quad \text{або:} \quad ax_0 + b = y_0$$

$$(ax_0 + b)' = a = f'(x_0) \quad \text{або:} \quad f'(x_0) = y_0'.$$

Отже маємо систему:

$$ax_0 + b = y_0$$

$$a = y_0'$$

Звідси: 1) $a = y_0'$; 2) $b = y_0 - x_0 y_0'$

Вставляючи ці вартости в рівняння родини простих, одержимо:

$$y = xy_0' + y_0 - x_0 y_0'$$

або:

$$(y - y_0) = y_0'(x - x_0)$$

Це є відоме рівняння дотичної в точці $M(x_0, y_0)$. Таким чином, кожна проста доторкальна до даної кривої є її дотичною.

§31. Доторкальне коло.

Розв'язаємо задачу: Із родини кол: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ знайти коло доторкальне до даної кривої $y = f(x)$.

Ми маємо змінних a, b, r, тому найвищий можливий порядок доторкання є другий. Отже, опишемо точку дотику через $M(x_0, y_0)$ і складаємо систему:

$$1)\ \varphi(x_0) = y_0$$

або, виписавши з $\varphi(x) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$, знайшовши y:

$$(y-b)^2 = -(x-a)^2 + r^2; \qquad y = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$$

маємо:

$$b + \sqrt{r^2 - (x_0 - a)^2} = f(x_0) = y_0$$

або:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$$

(загалом одержуємо: коли $x = x_0$, то й $y = y_0$)

2) $\varphi'(x_0) = y'_0$

Виконаємо y' і дорівнюємо її вартість до y'_0:

$\cancel{2}(x-a) + \cancel{2}(y-b)y' = 0$; $y' = -\frac{x-a}{y-b}$; $\frac{x_0-a}{y_0-b} = y'_0$ або:

$$(x_0-a) + (y_0-b)y'_0 = 0$$

і 3) $\varphi''(x_0) = y''_0$

маємо

$$1 + (y'_0)^2 + (y_0-b)y''_0 = 0$$

А звідси, виставивши a і b знайдемо:

$$r = \frac{(1+y'^2_0)^{3/2}}{y''_0}$$ вартість радіуса кривини.

Таким чином, дотикальне коло є колом кривини. Це є дотикання другого порядку й тому дотикальне коло перерізує дану криву.

Доведемо тепер, що дотикальне коло в точках максимум і мінімум кривини кривої матиме дотикання 3го порядку (себто буде дотикатись кривої, а не перерізувати) (рис 63)

Хай рівняння кривої буде:

$$y = f(x) \quad \text{---} (\alpha)$$

а кола:

$$y = \varphi(x) \quad \text{---} (\beta)$$

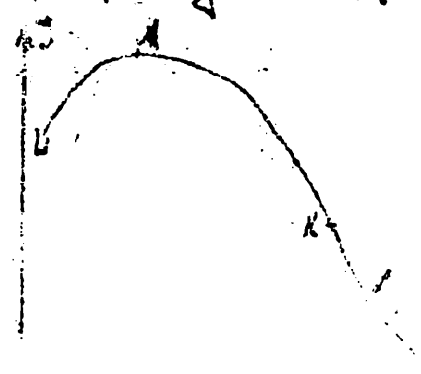


Рис 63.

Отже ми довели умови дотикання кола в точці $M(x_0, y_0)$

$$f(x_0) = \varphi(x_0)$$
$$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$
$$f''(x_0) = \varphi''(x_0)$$

Щоб дотикання було 3-го порядку необхідно також щоб:

$$f'''(x_0) = \varphi'''(x_0)$$

Доведемо, що це буде лише тоді, коли крива (d) матиме maximum або minimum кривини в даній точці $M(x_0, y_0)$

Ми знаємо, що кривина кривої має вигляд:

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Умовою, щоб ця крива мала maximum або minimum є рівність з нулем її першої похідної через x, себто:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

Отже має бути:

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2} y''' - \frac{3}{2}(1+y'^2)^{1/2} \cdot 2y'y''}{(1+y'^2)^3} = 0$$

або:

$$\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''}{(1+y'^2)^{5/2}} = 0$$

А звідси:

$$(1+y'^2)y''' - 3y'y'' = 0 \quad \cdots\cdots (8)$$

Але для даної кривої:

$$y_0 = f(x_0)$$

а тому:

$$[1 + f'(x_0)^2] f'''(x_0) - 3f'(x_0) f''(x_0) = 0$$

Але з другого боку луч кривини кола $y = \varphi(x)$ як луч заокругл кола є <u>const</u>, а тому для кожної точки і рівний для точки (x_0, y_0)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)=0$$

Отже умова (γ) задовольняється для всіх можливих вартостей $y=\varphi(x)$, а разом і для вартости $y=\varphi(x_0)$. Тому:

$$\left[1+\varphi'(x_0)^2\right]\varphi'''(x_0)-3\varphi'(x_0)\varphi''(x_0)=0$$

Звідци маємо:

$$\text{I)}\quad f'''(x_0)=\frac{3f'(x_0)\,f''(x_0)}{\left[1+f'(x_0)^2\right]}$$

$$\text{II)}\quad \varphi'''(x_0)=\frac{3\varphi'(x_0)\,\varphi''(x_0)}{\left[1+\varphi'(x_0)^2\right]}$$

Але $\varphi'(x_0)=f'(x_0)$; $\varphi''(x_0)=f''(x_0)$; тому: $\varphi'''(x_0)=f'''(x_0)$

§32. Асимптоти кривої.

I. Коли дана крива й проста мають ту властивість, що поміри віддалення якої будь точки кривої на безмежність, сама проста безмежно-наближується до неї, то ця проста зветься асимптотою кривої.

II Инакше: Асимптотою до кривої називають межове положення дотичної, точка дотику якої віддаляється на безмежність (від початку взятих малих координат)

III Асимптоту можна також розглядати і як межове положення січної (для алгебричних кривих) в яке вона приходить тоді, коли дві точки перетину цієї січної з даною кривою віддаляються на безмежність, рухаючися вздовж кривої в одному й тому самому напрямі.

В наших дослідах ми ставимо умовою, що

асимптота, якщо з кривою якусь безмежна далеку точку в той час проходить, щодо координатних осей на обмеженому віддаленню від початку їх, а тому творить на осях координат або:

1) обидва обмежені відтинки, коли ця асимптота похила до осей координат (рис. 64), або

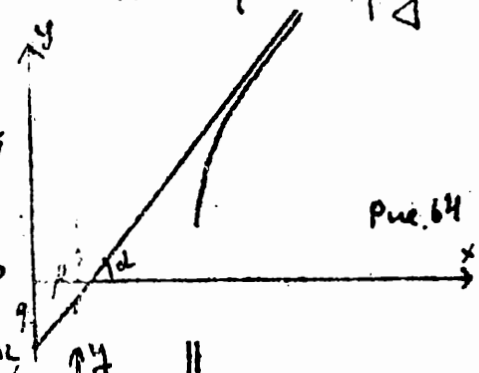


Рис. 64

2) один обмежений відтинок, коли ця асимптота є рівнобіжна до якої з осей координат (рис. 65)

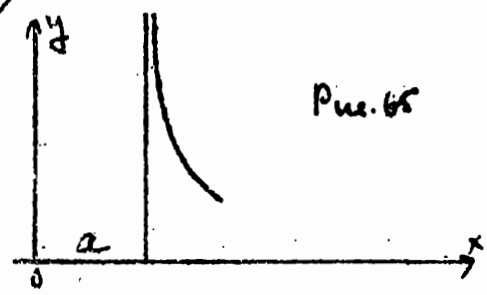


Рис. 65

Отже: Розглядаючи асимптоту як лежачове положення дотичної в точці $A_1 y_1$ (коли ця точка віддаляється на безмежність) ми зможемо:

1) Взяти за рівняння асимптоти:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad \cdots \quad (1)$$

як простої, що творить відтинки p і q на осях координат. Коли ми за допомогою рівняння кривої зможемо обчислити ці вартости p і q, то положення асимптоти буде визначене, або

2) Взявши за рівняння асимптоти канонічне рівняння простої

$$y = mx + n \quad \cdots \quad (2)$$

теж саме обчислити при цих умовах вартости m (кутового змінника дотичної) і n відтинку на осі y-ів.

Хай рівняння кривої буде:

$$y = f(x)$$

а точка дотику x, y. Тоді дотична в цій точці матиме вигляд:

$$(Y - y) = \frac{dy}{dx}(X - x) \quad \cdots\cdots (3)$$

Обчислимо її відтинки на осях:

1) На осі x-ів: беремо $Y = 0$, тоді:

$$X = p_1 = x - y\frac{dx}{dy}$$

2) На осі y-ів: беремо $X = 0$, тоді:

$$Y = q_1 = y - x\frac{dy}{dx}$$

I <u>Випадок. Асимптоти не рівнобіжні до осей координат.</u>

Тоді $x \ldots \infty$; $y \ldots \infty$ і відтинки, що утворюють асимптота на осях будуть:

$$p = \lim_{\substack{x \ldots \infty \\ y \ldots \infty}} p_1 = \lim_{\substack{x \ldots \infty \\ y \ldots \infty}} \left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = k$$

$$q = \lim_{\substack{x \ldots \infty \\ y \ldots \infty}} q_1 = \lim_{\substack{x \ldots \infty \\ y \ldots \infty}} \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = l$$

Через k і l ми можемо означити кількості вартості заданої асимп.

Вставляючи знайдені вартости k і l в рівняння (1) матимемо асимптоту:

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{l} = 1.$$

<u>Приклад.</u> Дано гіперболу:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Звідси:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y} \quad \text{або} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{a^2y}{b^2x}$$

$$\left(\text{бо } \frac{dy}{dx} = y' = \frac{b^2x}{a^2y}\right)$$

Тому:

$$p_1 = x - y\frac{a^2y}{b^2x} = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{b^2x} = \frac{a^2b^2}{b^2x} = \frac{a^2}{x}$$

$$q_1 = y - x\frac{b^2x}{a^2y} = \frac{a^2y^2 - b^2x^2}{a^2y} = \frac{-a^2b^2}{a^2y} = -\frac{b^2}{y}$$

Коли взяти межу цих вартостей при $x \ldots \infty$ і $y \ldots \infty$, то матимемо: $p = 0$; $q = 0$ Це показує, що асимптота переходить через початок координатних вісей. В цьому разі відтинкові рівняння (1) скористатися не можна і тому (і загалом) лінію скористатимо другим рівнянням (2), а саме:

$$y = mx + n$$

Відтинок $n = \lim\limits_{\substack{x \ldots \infty \\ y \ldots \infty}} q = \lim\limits_{\substack{x \ldots \infty \\ y \ldots \infty}} \left(y - x\frac{dy_1}{dx_1}\right)$, а відтинок m є межею вартости кутового зміщника дотичної (3) тобто:

$$m = \lim \frac{dy}{dx}$$

Обчислимо його для нашої задачі:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}, \text{ але } y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm b\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2}} = \pm\frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

А тому:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}$$

Звідси:

$$\lim_{x_1 \ldots \infty} \frac{dy_1}{dx_1} = \pm\frac{b}{a}$$

Як довели вище $\lim q = 0$. Тоді рівняння асимптоти:

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

З цих міркувань ми можемо мати висліди:

1) Конечною умовою існування асимптоти до кривої $y = f(x)$, нерівнобіжної до координатних осий, є обмежені вартости межі виразів:

$$(A)\quad \begin{cases} (1)\ \lim\limits_{x\ldots\infty}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \lim\limits_{x\ldots\infty}\left[f(x) - x f'(x)\right] \\ (2)\ \lim\limits_{x\ldots\infty}\frac{dy}{dx} \end{cases}$$

[Першу умову, коли вимагати обидва відтинки, відкидаємо, бо вона цілковито заступається другою, тим більш, що для обмеження вартости відтинку p перед тим можемо шукати межу першої похідної.]

Розглянемо ще одно спрощення. Ми бачимо, що на випадок існування асимптоти до кривої $y=f(x)$ рівність [A(1)] має простувати до обмеженої вартости, приміром n. Тамечи шоли, наближаючися до цієї межі маємо рівність:

$$y - x\frac{dy}{dx} = n + \varepsilon$$

де ε простує до нуля. Звідци поділивши обидві частини на x, маємо:

$$\frac{y}{x} - \frac{dy}{dx} = \frac{n+\varepsilon}{x}$$

Коли тепер взяти межу цього виразу, то матимемо:

$$\lim\limits_{x\ldots\infty}\frac{y}{x} - \lim\frac{dy}{dx} = 0$$

(бо n — є обмежена величина, а $x\ldots\infty$.)

Звідци:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{dy}{dx} = \lim \frac{y}{x}$$

Це показує, що відшукання другої умови $\lim_{x \to \infty} \frac{dy}{dx}$ завжди можна заступити відшуканням межі:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}$$

II Випадок. Асимптоти рівнобіжні до осей координат.

а) Коли асимптота рівнобіжна до осі x-ів, то очевидно, що в умові (A) вартість:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{dy}{dx} = 0$$

і тамки чином рівняння асимптоти матиме вигляд:

$$y = n$$

де $n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - x f'(x)]$

б) Коли асимптота рівнобіжна до осі y-ків, то очевидно, що в умові (A) вартість $\lim_{x \to \infty} \frac{dy}{dx}$ не має обмеженої межі, тоді нам треба буде рівняння асимптоти виразити через x, себто:

$$x = ky + l$$

В такому разі дотична, межовим положенням якої є дана асимптота, матиме рівняння:

$$X = (Y - y)\frac{dx}{dy} + x$$

[а саме: з рівняння $(Y - y) = \frac{dy}{dx}(X - x)$ маємо: $Ydx - ydx = Xdy - xdy$, а звідци:

$$X = \frac{Ydx - ydx + xdy}{dy} = (Y - y)\frac{dx}{dy} + x]$$

З цього рівняння шляхом попередніх міркувань, одержимо:

$$1)\ \lim_{y\to\infty}\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = l$$

$$2)\ \lim_{y\to\infty}\frac{dx}{dy} = k$$

де l і k є обмежені величини. У випадку асимптоти не $\parallel$ до осі y-ів $k \neq 0$, а коли асимптота є $\parallel$ до осі y-ів, то $k=0$ і ми маємо

$$x = l.$$

§33. <u>Розглянемо ще випадок, коли рівняння кривої дано в змінниковій формі:</u>

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$

і припустім, що коли вартість t наближається до якої будь певної вартости t_0 (в границях $-\infty \ldots +\infty$) то вартости y і x, або одночасно, або зокрема кожна наближається до ∞ (себто, крива має безмежно-далеку точку)

Очевидно, що при умові $\lim\limits_{t=t_0}\varphi(t) = \infty$ і $\lim\limits_{t=t_0}\psi(t) = \infty$ в разі істнування асимптоти має бути обмежена вартість межі:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{dy}{dx} = \lim_{t\to t_0}\frac{y}{x} = \lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = m$$

(кутовий змінних асимптоти).

Коли візьмемо на кривій яку-будь точку x, y то рівняння дотичної в ній буде:

$$Y - y = (X - x)\frac{dy}{dx}$$

або:

$$y - y = (X - x)\frac{y'}{x'}$$

а звідци:

$$y'X - x'Y = xy' - x'y \cdots\cdots (\alpha)$$

Коли вартість t буде наближатися до даної t_0, то точка дотику заданої дотичної буде простувати на безмежність і при $t = t_0$, ця дотична стає асимптотою. Отже, щоб така асимптота існувала, необхідно, щоб межові вартости сочинників її рівняння: y', $-x'$, і $(xy' - x'y)$ при $t = t_0$ були обмеженими величинами. Доглядніш, щоб відношення:

$$y' : (-x') : (xy' - x'y)$$

простувати при тих же умовах до певних меж. Тоді рівняння (α) виявляється потрібну асимптоту.

Розглянемо звичайний для цього випадку приклад, а саме гіперболічну спіраль. Як відомо її рівняння буде:

$$r = \frac{a}{\varphi}$$

Перейдемо від цього рівняння до рівняння в декартових координатах за допомогою взорів перетворення:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

а саме, вставляючи в них з рівняння спіралі вартість r матимемо такі залежникові рівняння спіралі:

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\varphi}\ ; \qquad y = \frac{a\sin\varphi}{\varphi}$$

де змінною є φ.

Очевидно, що коли φ наближається до нуля вартости x і y зростатимуть до безмежности. Отже, при $\varphi=0$ гіперболична спіраля має безмежно далеку точку. Дотична до цієї кривої матиме вигляд:

$$Xy' - Yx' = xy' - yx'$$

Але:

$$x' = a\frac{-\varphi\sin\varphi - \cos\varphi}{\varphi^2} = -\frac{a}{\varphi^2}(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)$$

$$y' = \frac{a}{\varphi^2}(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi) \quad і$$

$$xy' - x'y = \frac{a^2}{\varphi}(\varphi\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi + \varphi\sin^2\varphi) = \frac{a^2}{\varphi^2}$$

Таким чином рівняння дотичної буде:

$$(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)x + (\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)y = a$$

Коли ж взяти $\varphi=0$, то одержимо рівняння асимптоти:

$$y = a.$$

§34. Перейдем тепер до відшукання асимптот до кривих заданих алгебричними рівняннями в невизначеній формі:

$$f(x, y) = 0 \quad \ldots (1)$$

Після спрощень таке рівняння можно розгорнути в многочлен $n^{го}$ виміру (ступінь кривої), згідно зміної x або y. Напр.

$$f(x, y) = a_0y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots = 0$$

де $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ є функції від x.

Візьмім якусь січну кривої, напр.

$$y = mx + p \quad \ldots (2)$$

ця січна містить n точок перетину з кривою. Справді, розв'язуємо разом рівняння (1) і (2); вставивши з 2-го рівняння в 1-ше вартість y, ми одержимо:

$$f(x, mx+p) = 0 \quad \dots (3)$$

Очевидно, щодо змінної x це рівняння буде також n-го ступеня, а тому дасть n розв'язків, себто існує вистане n точок перетину. На підставі визначення (III) §31 ця січна стане асимптотою лише тоді, коли дві з цих точок для однієї й тої галузі кривої будуть на безмежності (дотикання 1-го порядку). Але це є можливим, коли рівняння (3) матиме два безмежно-великих розв'язки.

Рівняння (3) як алгебраїчному завжди можна дати вигляд:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots A_{n-1} x + A_n = 0 \quad \dots (4)$$

де $A_0, A_1, A_2 \dots A_n$ є функції m і p. З алгебраїчної аналізи ми знаємо, що коли коефіцієнт найвищого члену рівняння наближається до нуля, то один з розв'язків рівняння прямує до ∞. Коли ж до нуля наближаються коефіцієнти обох найстарших членів, то два з розв'язків рівняння прямують до нуля і т. д. Отже, щоб рівняння (4) мало два безмежно-великих розв'язки є конечним, щоб:

$$A_0 = 0; \quad A_1 = 0$$

(А те рівняння, що залишиться, буде n-2 ступеня й дасть n-2 обмежених розв'язки). A_0 і A_1 є функції m і p, а тому маємо систему рівнянь

заної визначимо потрібні вартости m і p.

<u>Приклад 1.</u> Візьмім криву, що зветься декартовим листом (рис. 66). Її рівняння буде:

$$x^3+y^3=3axy.$$

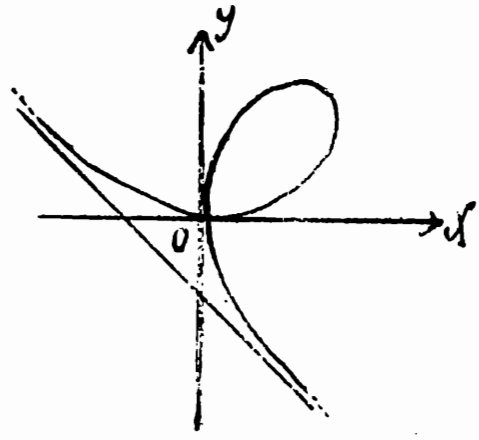


Рис. 66.

Означивши рівняння січної: $y=mx+p$ і вставляючи з нього вартість y в рівняння кривої матимемо:

$$x^3+(mx+p)^3=3ax(mx+p) \quad \text{або:}$$

$$x^3+m^3x^3+3m^2nx^2+3mn^2x+n^3-3amx^2-3anx=0$$

звідки:

$$(1+m^3)x^3+(3m^2n-3am)x^2+\ldots=0$$

Дорівнуючи з нулем сочинники при x^3 і x^2, одержимо систему:

$$1+m^3=0$$

$$3m^2n-3an=0$$

Тому:

$$m=-1 \text{ (одна реальна вартість)}$$

$$\text{і } n=-a$$

Таким чином рівняння асимптоти матиме вигляд:

$$y=-x-a$$

або:

$$x+y+a=0$$

<u>Приклад 2.</u> Знайти асимптоту Версієри Анньезі, що має рівняння (рис. 67)

$$x^2y=4a^2(2a-y)$$

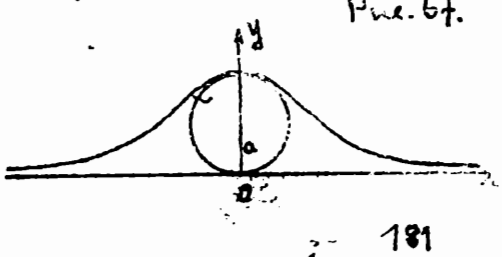


Рис. 67.

Означаючи рівняння січної $y=mx+n$, після вставки з

ного вартости y в рівняння кривої маємо:

$$x^2(mx+n) = 4a^2(2a-mx-n)$$

звідци:

$$mx^3+nx^2 = 8a^3-4amx-4a^2n$$

або:

$$mx^3+nx^2+4amx+4a^2(n-2a)=0$$

Звідци $m=0$; $n=0$. Тому рівняння асимптоти $y=0$, себто, асимптотою служить сама вісь x-ів.

<u>Приклад 3.</u> Дано циссоїду Діокля рівнянням (рис. 68):

$$y=\frac{x^3}{2a-x} \quad \cdots (a)$$

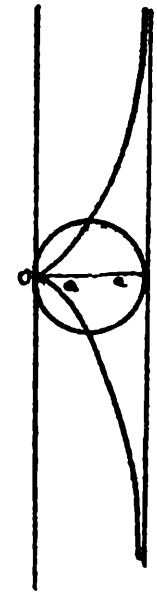


Рис. 68

Знайти асимптоти.

Коли ми візьмемо рівняння сіткої: $y=mx+n$ (б), то розв'язання системи (а) і (в) дасть рівняння $m^2+1=0$, що показує, що асимптот не рівнобіжних до осей, або рівнобіжних до осі x-ів немає.

Очевидно може виникнути думка, що існує асимптота рівнобіжна до осі y-ів. Тоді пишемо рівняння сіткої: $x=ky+p$ (в) і шукаємо реальні вартости k і p. Для цього розв'язуємо систему (а) і (в) і маємо:

$$y^2=\frac{(ky+p)^3}{2a-ky-p} \quad \text{або:} \quad y^2=\frac{(ky+p)^3}{(2a-p)-ky}$$

Звідци:

$$-ky^3+(2a-p)y^2-k^3y^3-3k^2py^2-3kp^2y-p^3=0$$

Зрівнюючи з нулем сочинники найвищих ступнів у одержаному системі:

$$k(k^2+1) = 0$$
$$2a - p - 3k^2p = 0$$

Розвязуючи цю систему, ми з 1-го рівняння маємо лише один реальний розвязок: $k=0$, а тоді з другого рівняння одержимо:

$$2p - p = 0 \quad \text{або} \quad p = 2a$$

Одже існує лише одна асимптота рівнобіжна до осі y-ів, що визначається рівнянням:

$$x = 2a.$$

Таким чином, для визначення асимптот (не рівнобіжних до осі y-ів) ми:

1) У рівняння кривої замість y вставляємо вартість $(mx+n)$ і розкриваємо многочлен через степені x.

2) Зрівнюємо з нулем сумми двох найстарших членів і розвязуємо одержані при цьому рівняння як систему, маємо m і n;

3) Коли виявіди розвязання є реальні й обмежені то асимптота існує і визначається рівнянням, що одержується, коли в рівнянні $y = mx+n$ вставити знайдені вартости m і n

[Для відшукання асимптоти, рівнобіжної до осі y-ів, проробляємо те саме, вставляючи у рівняння кривої замість x вартість $(ky+l)$]

§35. Розглянемо тепер де-які спрощення на випадок відшукання асимптот рівнобіжних до координатних осей.

Хай рівняння кривої: $f(x,y) = 0 \cdots (1)$

Розгрупуємо це рівняння по ступінях x:

$$\varphi_0(y)x^n+\varphi_1(y)x^{n-1}+\varphi_2(y)x^{n-2}+\dots\varphi_{n-1}(y)x+\varphi_n(y)=0$$

і поділимо всі члени рівняння на вищу ступінь x. Тоді:

$$\varphi_0(y)+\varphi_1(y)\frac{1}{x}+\varphi_2(y)\frac{1}{x^2}+\dots\varphi_n(y)\frac{1}{x^n}=0$$

Коли б для цієї кривої існувала б асимптота рівнобіжна до осі x-ів, то мусіла б існувати якась обмежена вартість y, напр. $y=\alpha$ для якої x зростаючо б до ∞ (рис. 69). Тоді для цієї вартости $y=\alpha$ будемо мати:

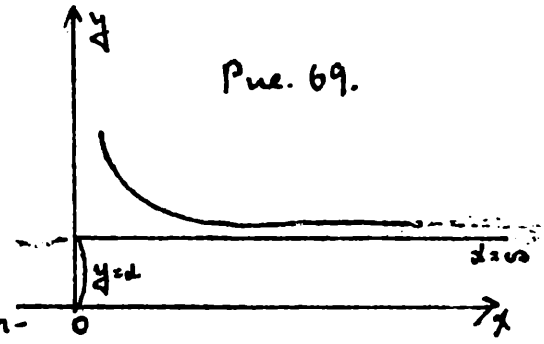


Рис. 69.

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_1(\alpha)\frac{1}{\infty}+\varphi_2(\alpha)\frac{1}{\infty^2}+\dots\varphi_n(\alpha)\frac{1}{\infty^n}=0$$

а звідси:

$$\varphi_0(\alpha)=0$$

Це показує, що потрібна вартість (α) є розвязком $\varphi_0(y)$, себто розвязком сочинника при найстаршому ступині x в рівнянню (1)

Аналогічно, (розгрупуючи $f(x,y)=0$ через ступіні y і ділячи всі члени рівняння на найвищий ступінь y^n і т. д.) ми пересвідчилися, що коли існує асимптота рівнобіжна до осі y-ів, то відповідна їй обмежена вартість значника x, буде завжди розвязком сочинника найстаршого ступіня y в рівнянню (1).

З цього маємо висновки:

<u>Щоб знайти рівняння асимптоти:</u>

1) <u>рівнобіжної до осі x-ів прирівнюємо до нуля</u>

сомножника, при найвищому ступіню x і розвязуємо його через y.

2) рівнобіжної до осі y-ів прирівнюємо до нуля сомножника при найвищому ступіні y і розвязуємо його через x.

Очевидно, що коли ці сомножники або не містять відповідних змінних, або мають уявні розвязки, то асимптот, рівнобіжних до відповідних осей координат немає. Коли ж розвязки цих рівнянь обмежені й реальні, то в першому разі:

$$y = \alpha$$

а в другому разі:

$$x = \beta$$

є рівняннями відповідних асимптот. Коли ж одержані з сомножників рівняння є вищих ступенів і дають по кілька розвязків реальних, то й асимптот існує кілька.

Приклад 1. Нехай., крива:

$$y(y^2-1)x^2 - y^2(6y-1)x + 8y^3 = 0$$

має: I) 3 асимптоти рівнобіжні до осі x-ів а саме:

$$y(y^2-1) = 0; \quad 1)\ y = 0; \quad 2)\ y-1 = 0; \quad 3)\ y+1 = 0$$

і II 2 асимптоти рівнобіжні до осі y-ів, а саме: розгорнувши рівняння по ступіням y:

$$(x^2 - 6x + 8)y^3 + y^2x - yx^2 = 0$$

одержимо:

$$x^2 - 6x + 8 = 0, \text{ а звідси: } 1)\ x = 4; \quad 2)\ x = 2$$

Приклад 2. Візьмім уже розглянені нами рів-

ирія циссоїди:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$$

Маємо:

$$(2a-x)y^2 - x^3 = 0$$

1) Асимптоти рівнобіжної до осі x-ів немає, бо сомножник при старшому ступіні x'а є (-1) - стала величина.

2) Асимптота ж рівнобіжна до осі y-ів визначається з рівняння:

$$2a - x = 0 \quad \text{або} \quad x = 2a$$

§36 <u>Асимптоти в біґупових координатах.</u>

Припустім, що криву заподано в біґупових координатах рівнянням: $\varphi(r, \theta) = 0$. Хай ця крива має якусь безмежно далеку точку і в ній асимптоту. Очевидно, що в цій точці зустрінуться луч вектор цієї точки й асимптота. Зустріч їх буде на безмежному віддаленню, а тому на близькому до біґуна віддаленню і луч вектор і асимптота будуть рівнобіжними (як дві прості, що перерещуються на безмежності) (рис. 70)

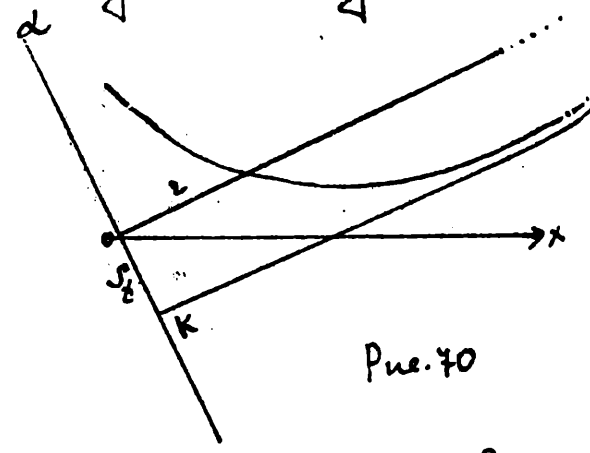


Рис. 70

Через біґуп поведемо просту прямову до заданого луча вектора. Ця проста є вісю моментів, а тому віддалення ж від біґуна до асимптоти (дотичної до кривої на безмежності) буде <u>піддотичною</u> її. Ми умовилися, що асимптота проходить на обмеженому віддаленню від початку координат

а тому задана піддотична мусить мати обмежену вартість (бо асимптота рівнобіжна до r), а піддотична прямова до r, через те вона прямова до асимптоти, себто піддотична буде віддаленням асимптоти від бігуна).

Ці міркування дають такі висновки:

1) Кут спаду асимптоти на бігунову вісь, як рівний орасі вектора, поведеного в безмежену точку, легко визначити з рівняння кривої, зміняючи в ньому r на ∞ (себто, шукаючи ту вартість θ в рівнянню кривої, що дає $r=\infty$)

2) Віддалення асимптоти від бігуна визначиться межею вартости піддотичної, коли в ній θ простує до величини, визначеної в 1). Себто:

$$d = \lim_{\theta \dots \alpha} S_t = \lim_{\theta \dots \alpha} r^2 \frac{d\theta}{dr}$$

Або визначаючи r із рівняння $\varphi(r,\theta)=0$, а саме: $r=\psi(\theta)$, маємо:

$$d = \lim_{\theta \dots \alpha} \left[\psi(\theta)\right]^2 \frac{d\theta}{dr}$$

Примітка. Коли вартість d є додатня, то асимптота лежить з правого боку згадуючи напрямку руху вектора, а коли d від'ємне, то з лівого

Приклад 1. Знайти асимптоти гиперболичної спіралі, рівняння: $r\theta = a$

Звідци:

$$\theta = \frac{a}{r}$$

Отже:

1) коли $r=\infty$; $\theta = 0$

себто асимптота рівнобіжна до бігунової осі (або прямає до неї).

2) $\frac{d\theta}{dr} = -\frac{a}{r^2}$; а тому $\lim\limits_{\theta \dots 0} r^2 \frac{d\theta}{dr} = -a$,

себто асимптота проходить з лівого боку бігунової осі на віддаленню a, а саме: (див. рис. 71)

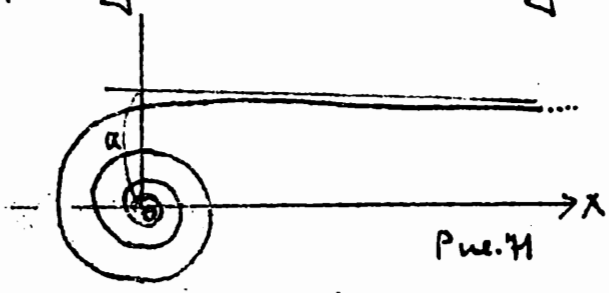


Рис. 71

Приклад 2. Знайти асимптоти Катерині (Litus) рівняння: $r^2\theta = a^2$

1) $\theta = \frac{a^2}{r^2}$; $r = \infty$; $\theta = 0$

Асимптота рівнобіжна до бігунової осі (або прямає до неї).

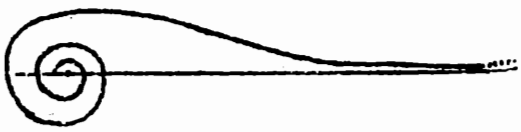
2) $\theta = \frac{a^2}{r^2}$; $\frac{d\theta}{dr} = -\frac{2a^2}{r^3}$

$\lim\limits_{\theta \dots 0} r^2 \frac{d\theta}{dr} = \lim\limits_{\theta \dots 0} \left(-\frac{2a^2}{r}\right)$ але $r = \frac{a}{\theta^{1/2}}$, тому:

$$d = \lim_{\theta \dots \infty} \left(-2a\theta^{1/2}\right) = 0$$

Отже асимптотою є сама бігунова вісь (рис. 71)

Рис. 72.



Приклад 3. Знайти асимптоти до квадратової розети рівняння: $r = a\sin 2\theta$.

1) $\sin 2\theta = \frac{r}{a}$ кут θ, щоб луч вектор був би рівний ∞ мав (sin не може бути рівний ∞), а тому асимптот немає (рис. 73).

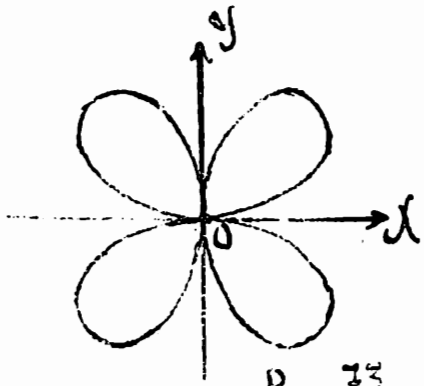


Рис. 73.

Приклад 4. Знайти асимптоти до циссоїди, визначеної рівнянням: $r = 2a\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta$.

1) $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{2a}{r}$; при $r = \infty$ $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = 0$

Звідси, або $\cos\theta = 0$, або $\sin^2\theta = \infty$, але $\sin^2\theta$ не може рівнятися ∞, а тому лишається $\cos\theta = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Асимптота є пряма до бінуової осі (себто нігдотична лише лежати на ній)

2) $\frac{dr}{d\theta} = 2a\underbrace{\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}_{\sin\theta} + 2a\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = 2a\sin\theta\left(1 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)$

Звідси:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\cos^2\theta}{2a\sin\theta(1+\cos^2\theta)}$$

Отже:

$$d = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} r^2\frac{d\theta}{dr} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{4a^2\sin^2\theta\,\mathrm{tg}^2\theta\cdot\cos^2\theta}{2a\sin\theta(1+\cos^2\theta)} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^3\theta}{1+\cos^2\theta} = 2a$$

Асимптота віддалена від бінуса на $2a$ (рис 74) і пряма до бінуової осі

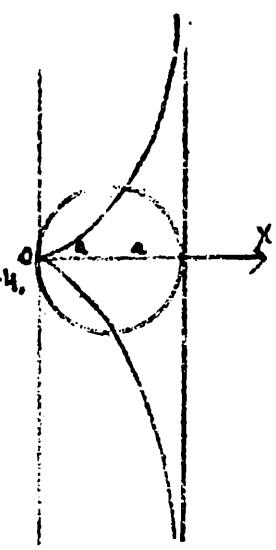


Рис 74.

Приклад 5. Знайти асимптоти конхоїди Никомеда, що має рівняння: $r = a\sec\theta \pm b$.

1) $r = a\sec\theta \pm b$; $\sec\theta = \frac{r \mp b}{a}$

при $r = \infty$ $\sec\theta = \infty$; $\theta = \frac{\pi}{2}$

Тому асимптота пряма до бінуової осі

2) $\frac{dr}{d\theta} = a\sec x\,\mathrm{tg}\,x$; $\frac{d\theta}{dr} = \frac{\mathrm{ctg}\,x}{a\sec x}$

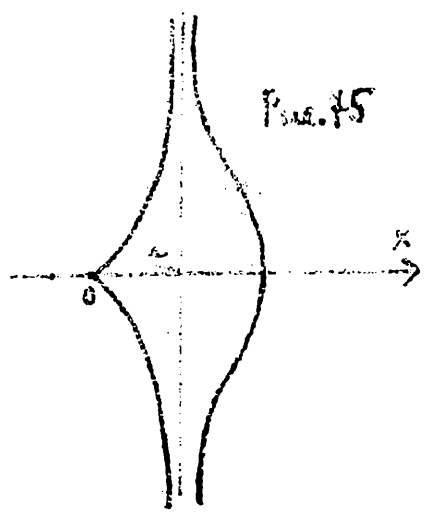


Рис. 75

Тому:

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} r^2\frac{d\theta}{dr} = a(a\sec\theta \pm b)^2\frac{\mathrm{ctg}\,x}{a\sec x} =$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{a}{\sin x} \pm 2b\,\mathrm{ctg}\,x + \frac{b^2\mathrm{ctg}\,x}{a\sec x} = a$$

Асимптота віддалена від бгуна на a (рис. 75).

§37. Особливі точки.

Визначення. Хай дано нам якусь криву $f(x,y)=0$ (рис. 76). Візьмім на ній точку P і навколо неї очерпнемо коло, як можна меншого луча. Звичайно таке коло перетрестить дану криву у двох точках M і N.

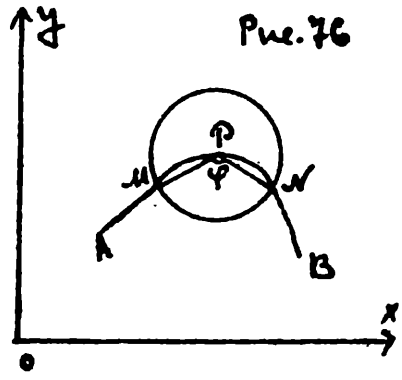


Рис. 76

В ці точки перетреста з точки P поведемо лучі PM і PN. Хай кут між ними буде φ. Цей кут буде звичайно тупий і чим менш буде коло, тим більш буде наближатися до π, тобто, що можна сказати, що кут φ простує до вартости π при зменшенню луча кола r до нуля.

Така точка, що для неї виконуються задані умови, а саме:

1) Коли коло, як бажано малого луча, очерчуте навколо даної точки P перетрещує дану криву неодмінно в двох точках і коли

2) кут скривлення точок кривої (кут φ) завжди простує до вартости π при зменшенню луча цього прикладного кола даної точки до нуля зветься звичайною точкою.

Кожна точка для якої не виконується хоч одна із заданих умов зветься особливою.

Розглянемо по черзі можливі порушення цих умов.

А) Порушення першої умови.

1) Коли прилягне коло даної точки кривої, якщо би воно малим не було зустрічає цю криву в точках більш ніж двох. Така точка зветься кратною. (рис. 77).

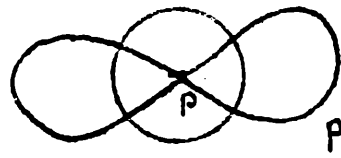


Рис. 77.

2) Коли можна взяти прилягне коло точки кривої остільки малим, що воно зустріне цю криву лише в одній точці. Така точка точкою закінчення або уриву кривої (рис. 78)

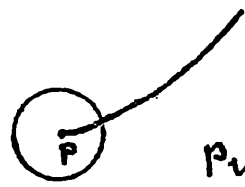


Рис. 78

3) Коли прилягне коло даної точки можна взяти таким малим, що воно не зустріне кривої, хоч значники цієї точки й задовольняють рівняння її, себто ця точка є належною до кривої. Така точка зветься відокремленою або ізольованою (рис. 79). Далі:

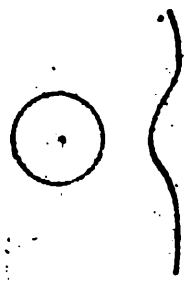


Рис. 78

Б) Порушення другої умови.

Крім випадку не існування зовсім лежні куту скривлення точок кривої (випадок, що ми його не будемо розглядати) можуть бути ще два випадки:

а) Кут скривлення простує до лежні рівній з нулем.

б) Кут скривлення простує до лежні відмінної від нуля й π.

В першому випадку:

4) Точка зветься точкою повернення або

типами поворотів. Очевидно, що коли кут скривлення простує до нуля то дотичні до обох галузів кривої будуть зливатися в спільну дотичну що й є ознакою типу поворотів. При цьому тип поворотів може бути, або 1-го роду, коли галузі кривої лежать з обох боків дотичної (рис. 80-а), або другого роду, коли обидві галузі кривої лежать по один бік дотичної (рис. 80-б). В другому випадку, коли межа кута скривлення буде відмінна від 0 і π ми матимемо:

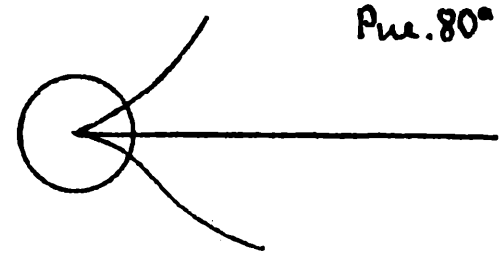


Рис. 80а

Рис. 80б

5) Кутову точку або точку злому кривої. В цьому разі через точку P переходить дві окремих дотичних до обох галузів кривої (рис. 81, а, б, в) Точки 1, 3, 4 - зустрічаються переважно в алгебраїчних кривих, а точки 2 і 5 виключно у трансцендентних кривих.

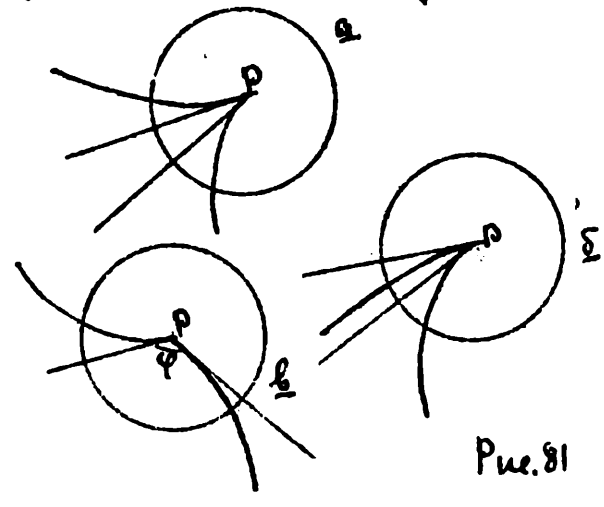


Рис. 81

§38. Визначення дотичної до алгебраїчної кривої в даній особливій точці й дослідження останніх.

Припустім, що дана алгебраїчна крива визначається рівнянням $F(x, y) = 0$ і припустім, що

в границях дослідження ця крива є тричі й має похідні, себто розгортається в ряд Тейльора. Візьмімо для дослідження якусь точку $M(x_1, y_1)$, що має обмежені значини (не безмежно-далеку точку) і в ній, як у початку збудуємо нові координатні осі $\xi\eta$ рівнобіжні до попередніх (рис. 82).

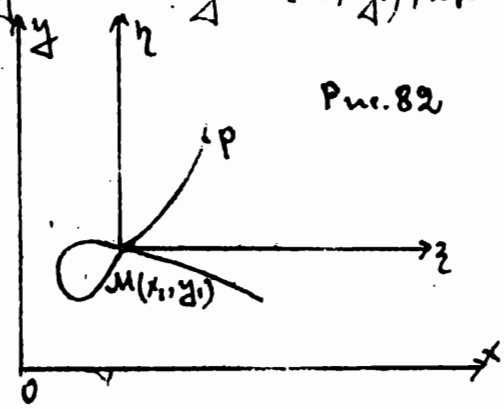


Рис. 82

Координати цього початку будуть x_1, y_1 а тому вгори перетворення є: $x = x_1 + \xi$; $y = y_1 + \eta$. Чим ближче буде якась точка кривої P до точки M, тим менше будуть вартости ξ і η і для точки M вони обертаються в $(0, 0)$; таким чином ми можемо їх розглядати як певні приросцення до x_1 і y_1, а тому:

$$F(x, y) = F(x_1 + \xi, y_1 + \eta)$$

можемо розгорнути в ряд Тейльора, а саме:

$$F(x, y) = F(x_1, y_1) + \frac{\partial F}{\partial x_1}\xi + \frac{\partial F}{\partial y_1}\eta + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\xi\eta + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\eta^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3}\xi^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^2 \partial y_1}\xi^2\eta + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial y_1^2}\xi\eta^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y_1^3}\eta^3\right) + \cdots = 0$$

Але точка (x_1, y_1) належить до кривої, а тому $F(x_1, y_1) = 0$ і ми маємо рівняння:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\xi + \frac{\partial F}{\partial y_1}\eta + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\xi\eta + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\eta^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3}\xi^3 + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^2 \partial y_1}\xi^2\eta + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial y_1^2}\xi\eta^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y_1^3}\eta^3\right) + \cdots = 0 \quad \cdots (A)$$

Поведемо через точку M (як початок координат) прости.

$$\eta = m\xi \quad \ldots \quad (B)$$

де m є довільний кутовий змінник. Даючи йому всі можливі вартости ми одержимо жмуток січних до кривої, що переходить через точку M. Щоб знайти точку перетину цих січних з кривою, нам треба розв'язати рівняння (A) і (B) як систему і ми матимемо:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + m\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)\xi + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + 2m\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} + m^2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\right)\xi^2 +$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3} + 3m\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^2 \partial y_1} + 3m^2\frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial y_1^2} + m^3\frac{\partial^3 F}{\partial y_1^3}\right)\xi^3 + \cdots = 0 \quad (C)$$

Ми бачимо, що ξ входить у всі члени рівняння, а тому перший розв'язок є $\xi = 0$ [а також $\eta = 0$ з рівняння (B) і $\eta = 0$], себто перша точка перетину простої з кривою є M. Решта розв'язків ξ (а тому й η) є не рівні нулеві, себто проста зустрічає далі криву поза точкою M.

Для того, щоб проста (B) була дотичною до кривої, треба (згідно з визначенням розуміння „дотична") щоб і друга яка будь точка перетину січної з кривою зливалася з M. Це можливе, коли б в рівнянні (C) був би двократний розв'язок $\xi = 0$, себто, щоб у всі члени першого рівняння (C) ξ входило в квадраті. Очевидно, що це є можливим, коли ми доберемо вартість m так, щоб сонимне при ξ в першому ступіню був нулем, а саме, коли:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + m\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$$

А звідси маємо:

$$m = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y_1}}$$

А тому рівняння даної простої лінії [illegible] ляд:

$$\eta = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y_1}}\xi$$

або (див. взори перетворення координат)

$$(X - x_1)\frac{\partial F}{\partial x_1} + (Y - y_1)\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$$

Це, як бачимо, є рівняння дотичної до кривої в точці $M(x_1, y_1)$ і тепер тільки точка M при цих умовах буде звичайною точкою кривої.

Для того, щоб одержати задану дотичну, ми добирали m так, щоб рівність:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + m\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$$

Але може бути, що зокрема й $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$ і $\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$ тоді очевидно при всякому m задана рівність буде рівна нулеві, а тому кожна проста, що проходитиме через точку M уявляється з певного погляду дотичну, але без зазначеного її напряму. Це дає нам право вважати точку M на сукупністю двох безмежно-близьких точок, як ми це трактували для дотичної, а просто подвійною точкою (ніби накладеної одна на одну). Така точка зветься кратною й є особливою точкою. Очевидно, щоб зі всіх цих простих, що переходять через точку M вибрати справжню дотичну, тепер

що має визначений напрям, треба мати ще одну точку безмежно-близьку M (злиту з нею). Ми знаємо, що кожна з простих, що переходить через точку M зустрічає криву ще в кількох $(n-2)$ точках, а тому за прикладом попередніх міркувань доберемо вартість m так, щоб ще одна з точок поза M злилася з M. Це може бути тоді, коли z буде трикратним нулевим розв'язком, себто всі члени рівняння (C) поділяться на z^3. Очевидно, що при умові $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$ і $\frac{\partial f}{\partial y_1}=0$ нам треба буде дібрати вартість m так, щоб і сочинник при z^2 був рівний з нулем, себто

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+2m\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}+m^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}=0 \cdots (\mathfrak{D})$$

Це рівняння квадратове, а тому дає два розв'язки для m. Отже через подвійну точку кривої можна повести загалом дві дотичні (різні, злиті в одну, або уявні).

Проаналізуємо це:

Вираз (дискримінант) рівняння буде:

$$\mathfrak{D}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}$$

I) Коли $\mathfrak{D}>0$, то m має два різні реальні розв'язки, а тому через подвійну точку M переходять дві дотичні. Така подвійна точка зветься вузлом. <u>Отже ознакою того, що точка M є вузел буде:</u>

$$1)\ \frac{\partial f}{\partial x_1}=0\ ;\ 2)\ \frac{\partial f}{\partial y_1}=0\ \ i\ \ 3)\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}>0 \cdots (54)$$

II) Коли $\mathfrak{D}=0$, то m має два однакових реальних

розвязки, себто обидві дотичні зливаються в одну. Тут може бути два випадки 1) коли обидві галузі кривої віддаляються від дотичної з обох боків точки дотику, то точка зветься точкою самодотикання кривої (рис. 83) і 2) коли обидві галузі кривої віддаляються від дотичної з одного боку точку дотику. Це є точка повернення (або шпиль повороту) (рис. 84 а, б).

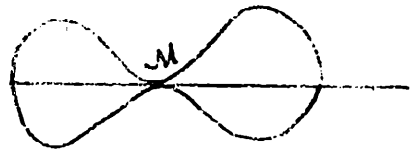


Рис. 83

Як ми казали, шпиль повороту є двох родів, але про це можна в кожному окремому випадку дізнатися звичайною ветавкою у рівняння вартостей змінної близьких до вартостей точки дотику. Отже ознакою існування точки самодотикання або шпилю повороту є:

$$1)\ \frac{\partial F}{\partial x_1}=0;\quad 2)\ \frac{\partial F}{\partial y_1}=0\quad i\ 3)\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\right)^2-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}=0 \quad \ldots (55)$$

III) Коли $D<0$, то розвязки m є уявні і тому дотична в точці M не існує (вони є також уявні). Коли б ми ветавкою досліджували вистарчально близькі точки до M, то переконалися б, що вони не задовольняють рівнянню кривої, себто точка M є відокремленою або ізольованою й ознакою її буде:

$$1)\ \frac{\partial F}{\partial x_1}=0;\ \frac{\partial F}{\partial y_1}=0\ i\ 3)\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\right)^2-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}<0 \quad \ldots (56)$$

Коли б другі похідні $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ одночасно самі по собі обертались б в нуля, то ми мали б справу уже з потрійною кратною точкою.

В цьому випадку m також мало довільну вартість і кожна проста, що проходила через цю точку була свого роду „дотичною". Щоб і в цьому випадку мати „справжню" дотичну, ми на підставі попередніх доводів зрівняємо з нулем сотинник при ξ^3 в рівнянню (C), а саме:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3} + 3m\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^2 \partial y} + 3m^2\frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial y^2} + m^3\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 0$$

і визначаємо з цього рівняння m. В останньому випадку ми мали б або 3 окремих реальних дотичних, або 2 з них злитих в одну й окрему або всі три злитих в одну, або одну реальну а дві уявних.

Продовжуючи свою своєї аналізу далі, ми можемо одержати точку якої бажаємо кратності p.

Очевидно, що це буде тоді, коли всі $p-1$ окремих перших похідних обернеться одночасно в нуля (для даних значників точки M). Але над детальним розвязком цих кратних точок ми не будемо зупинятися.

З цілої нашої аналізи ми можемо зробити такий висновок: <u>конечною умовою існування всіх особливих точок є обернення в нуля (для значників цих точок) перших окремих похідних:</u>

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \quad і \quad \frac{\partial F}{\partial y_1} = 0 \quad \cdots \quad (57)$$

Але це не є ще вистарчальною умовою, бо значники x і y знайдені із наданих рівнянь можуть і не задовольняти рівняння самої кривої, себто

знайдена точка, значить якої є розв'язнік рівняння (57) не належить до кривої, а тому не буде її особливою.

З цих міркувань очевидно, що достатньою умовою того, щоб деяка крива мала особливу точку є спільнорозв'язність всіх трьох рівнянь:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \; ; \; \frac{\partial F}{\partial y}=0 \; і \; F(x,y)=0 \; \cdots\cdots (58)$$

Крім того, щоб ми могли класифікувати знайдену особливу точку відшукуємо другі окремі похідні і коли хоч одна з них не рівна нулеві - то ця точка є другої кратности, коли й другі похідні є рівні з нулем а може третіми окремими похідними є хоч одна не рівна нулеві - то точка є третьої кратности й т. д.

§39. Скорочений спосіб аналізи особливих точок.

Візьмім рівняння (A) й опишемо сочленнями в ньому через A, B, C і т. д., себто:

$$A\xi + B\eta + (C\xi^2 + D\xi\eta + E\eta^2) + (K\xi^3 - L\xi^2\eta + M\xi\eta^2 + N\eta^3) + \cdots = 0 \quad (I)$$

Коли в це рівняння вставити вартість $\eta = m\xi$ то рівняння (C) прийме такий вигляд:

$$(A + mB)\xi + (C + mD + m^2E)\xi^2 + (K + mL + m^2M + m^3N)\xi^3 + \cdots = 0$$

З наших міркувань знаємо, що коли існує особлива точка то $A=0$, $B=0$ дають розв'язки, що задовольняють ціле рівняння. Далі, коли точка

є другої кратности, то хоч один із сочинників C або D або E не рівні з нулем, так що рівняння починається з членів другого виміру; коли точа третьої кратности, то C, D і E є рівні з нулем але хоч один із сочинників K, L, M або $N \neq 0$, себто рівняння починається з членів 3го виміру (як найнижчого) і т. д.

Отже при існуванні особливої точки $k^{ої}$ кратности рівняння перше починається з членів $k^{го}$ виміру, як найнижчого.

Коли, припустіли, існує точка 2ої кратности то рівняння:

$$C + mD + m^2E = 0 \quad \text{--} \quad (\alpha)$$

дає можливість визначити кутовий зміник m для дотичної:

$$\eta = m\xi \quad \text{----} \quad (\beta)$$

Очевидно, що вилучаючи m з рівнянь (α) і (β) ми одержимо рівняння системи дотичних (обох разом), а саме:

$$C\xi^2 + D\xi\eta + E\eta^2 = 0$$

Беручи на увагу рівняння (I) ми бачимо, що рівняння системи дотичних одержимо, коли в цьому рівнянні (I) зрівняємо з нулем алебраїчну суму членів найнижчого виміру (бо $A=0$ і $B=0$). Наприклад для точки 3ої кратности матимемо: $A=B=C=D=E=0$ і для визначення m маємо рівняння:

$$K + mL + m^2M + m^3N = 0$$

(3 розвязки) Але вилучаючи m з цього рівняння і рівняння простої $\eta = \xi m$, одержимо рівняння системи системи 3х дотичних:

$$K\xi^3 + d\xi^2\eta + M\xi\eta^2 + N\eta^3 = 0$$

І знов спостерігаємо, що рівняння цієї системи дотичних одержимо прирівнюючи до нуля алебраїчну суму членів найнижчого в даному разі виміру (бо $A = B = C = D = E = 0$)

Таксамо міркуючи, ми переконуємося, що на випадок $k^{го}$ кратности точки ми одержимо систему k дотичних, прирівнявши до нуля алебраїчну суму всіх членів $k^{го}$ виміру, що буде найнижчим виміром членів даного рівняння (бо всі попередні коефіцієнти обернуться в нуля.)

Таким чином, для практики ми одержимо значно простіший спосіб вимачення рівнянь дотичних, поведених через особливу точку, а саме:

1) Коли точка, що ми досліджуємо, не є початком координат, то систему координат перетворюємо рівнобіжним пересуванням до цієї точки, як попереду.

2) Коли після перетворення існують члени 1го виміру, то початок координат (дана точка) не є особливою.

3) Коли ж членів 1го (а можливо й 2го, 3го і т. д.) виміру не існує, то початок координат є особливою точкою тої кратности, якій найменший вимір мають члени рівняння.

4) Прирівнюючи до нуля алебраїчну суму членів

рівняння найнизького виміру, ми одержимо рівняння системи дотичних, поведених через цю точку. Після розкладення цього рівняння на рівняння 1го ступіня, матимемо рівняння окремих дотичних.

Приклад. Проаналізувати криву: $x^3-y^3+3y^2-xy-2x^2=0$

Крива не має вільного члену, тому початок координат належить до кривої. Далі це рівняння має найнизький вимір членів - другий. Тому початок координат може бути точкою 2ої кратности. Рівняння системи дотичних буде:

$$3y^2-xy-2x^2=0$$

Звідци:

$$(y-x)(2x+3y)=0 \quad \text{або} \quad y-x=0 \quad 2x+3y=0$$

Отже початок осей є точкою другої кратности. через яку переходить дві дотичних. (Рис 84)

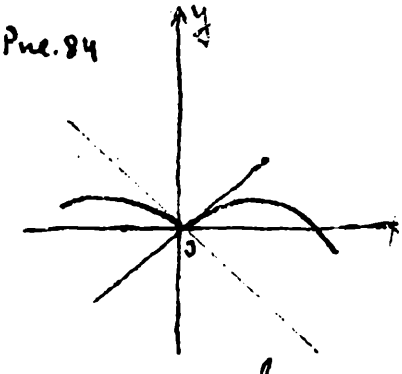


Рис. 84

§40. Дослідження окремих випадків особливих точок.

Приклад 1. Дослідити точку 0 (початок координат) Декартового листа визначеного рівнянням:

$$x^3+y^3-3axy=0$$

1) Теоретичний спосіб:

$$\text{I)}\ \frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3ay; \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3ax; \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=0$$

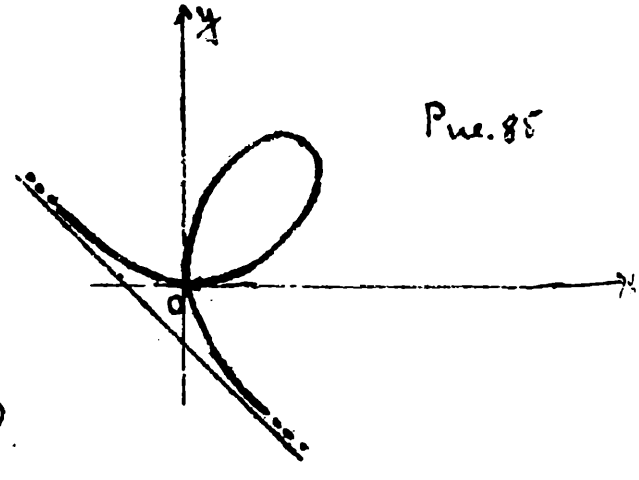


Рис. 85

Значини $x=0$; $y=0$ задовольняють рівнянню кри-

вої і як бачимо обертаються $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ в нуля. Тому точка 0 є особливою.

II) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$; $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{x=0} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$; $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{y=0} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3a$

тому: $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \neq 0$

Нерівність з нулем $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ показує, що точка є <u>подвійною.</u>

III) $D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9a^2 > 0$

Таким чином точка 0 (початок осей) є <u>вузлом</u> і має дві дотичних (рис. 85)

Для визначення m маємо:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2m\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + m^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Отже:

1) $-2m \cdot 3a = 0$ або $6am = 0$; тому $m = 0$

2) $m = \infty$ (бо обертається в нуль сполучник при m^2.

Перший вислід показує, що дотична є віссю x-ів і має рівняння $y = 0$

А другий вислід показує, що друга дотична є вісь y-ів, себто $x = 0$

<u>2 спосіб (практичний)</u>

I) Найнижчий вимір членів рівняння є другий а тому точка може бути подвійною.

II) Рівняння дотичних одержуємо прирівнюючи до нуля члени 2-го (нижчого) виміру, а саме:

$3axy = 0$, або $xy = 0$, а звідси: $x = 0$; $y = 0$

Точка 0 має дві дотичних (осі координат).

тому є подвійною, а саме вузлом.

<u>Приклад 2.</u> Дано Лемніскату: $(x^2+y)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$

Дослідити точку 0 (пог. осей)

I) 1) $\frac{\partial F}{\partial x}=2(x^2+y^2)2x-4a^2x;\ \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=0$

2) $\frac{\partial F}{\partial y}=4y(x^2+y^2)+4a^2x;\ \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=0$

Початок осей є особливою точкою, бо $x=0;\ y=0$ задовольняють рівняння кривої

II) 1) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=4(x^2+y^2)+8x^2-4a^2;\ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=-4a^2$

2) $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)+8y^2+4a^2;\ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=4a^2$

3) $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=8xy;\ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=0$

Отже точка 0 є <u>подвійною.</u>

III) $D=16a^2>0$

Точка 0 є <u>вузлом.</u> (рис.86)

Далі шукаємо кутовий коефіцієнт дотичних.

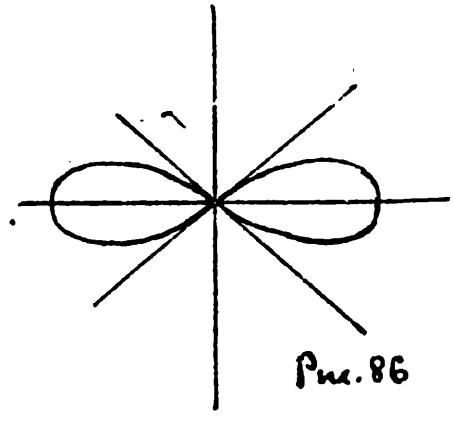


Рис.86

IV) $-4a^2+4a^2m^2=0$

$m^2=1;\quad m=\pm1$

Тому рівняння дотичних: $x\pm y=0$

<u>2° спосіб.</u>

Упорядкуємо рівняння лемніскати і матимемо:

$$x^4+y^4+2x^2y^2-2a^2x^2+2a^2y^2=0$$

Найнижчі члени другого виміру, а тому початок осей має бути подвійною точкою.

Прирівнюючи до нуля ці члени 2-го виміру, маємо:

$$2a^3x^2 - 2a^2y^2 = 0 \quad \text{або} \quad x^2 - y^2 = 0$$

Звідци рівняння дотичних: $x \pm y = 0$. Точка є вузлом.

Приклад 3. Дослідити точку O (початок координат) параболи Нейля (півкубичної) з рівняння:

$$x^3 - ay^2 = 0$$

I) 1) $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2$; $\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{x=0} = 0$; 2) $\frac{\partial F}{\partial y} = -2ay$ $\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{y=0} = 0$

Отже початок осей є особливою точкою.

II) 1) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x$ $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]_{x=0} = 0$; 2) $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2a$ $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = -2a$ 3) $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$

Отже точка є подвійною

III)

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right]^2_{\substack{x=0\\y=0}} - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Дві дотичні, що зливаються в одну.

IV) Рівняння дотичної: $2am^2 = 0$; $m = 0$; тому дотична має рівняння: $y = 0$ (вісь x-ів).

Досліджуємо положення галузей кривої. З рівняння параболи маємо:

$$y^2 = \frac{x^3}{a} ; \quad y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

При $x > 0$ y має дві однакові вартости різних знаків. Тому крива положена симетрично щодо осі x-ів. При $x < 0$, вартости y є уявні. Отже крива лежить з обох боків дотичної, але з одного боку вісі y-ів. Тому є точкою повернення 1-го роду (рис. 87)

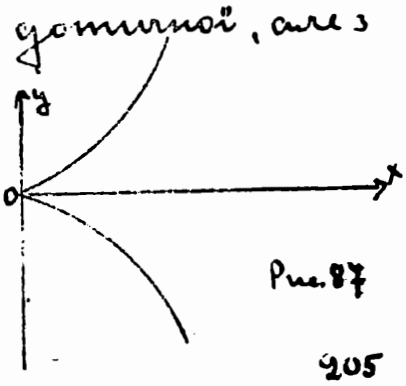


Рис. 87

2 спосіб. Найнижчий вимір членів рівняння є другий, а

тому дотична є подвійною.

Прирівнюючи до нуля члени 2-го виміру, маємо:

$$ay^2=0$$

Отже одержуємо дві злиті дотичні рівняння:

$$y=0 \text{ (вісь } x\text{-ів)}$$

Вище наведені дослідження галузей кривої свідчать, що початок осей є точкою повернення 1-го роду.

<u>Приклад 4.</u> Дано криву: $x^5-x^4+2x^2(y-2)+4y-y^2=4$. Знайти особливі точки.

Умовою існування такої точки є: $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ і $\frac{\partial F}{\partial y}=0$. Отже:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=5x^4-4x^3+4x(y-2)=0 \cdots (a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2x^2+4-2y; \quad y=x^2+2 \cdots (б)$$

З першого рівняння $x=0$; $5x^3-4x^2-4(y-2)=0 \cdots (в)$

А з другого рівняння вставка $x=0$ дає: $y=2$. Крім того вставляючи вартість y з (б) у рівняння (в) маємо:

$$5x^3-4x^2+4x^2=0; \quad 5x^3=0; \quad x=0$$

Отже маємо єдиний розв'язок: $x=0$; $y=2$. Вставляючи їх в рівняння кривої і маємо тотожність. Тому точка $M(0,2)$ є особливою.

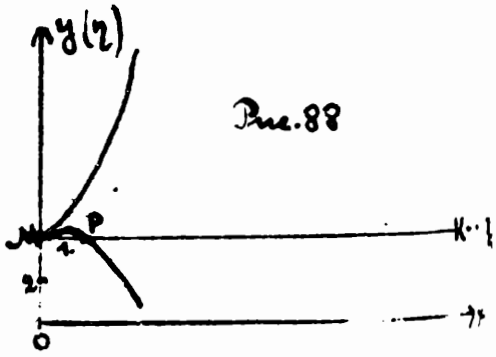


Рис. 88

Тепер перетворимо криву до нових, рівнобіжних до старих координат з початком в точці M. Взори перетворення будуть:

$$x=\xi; \quad y=\eta+2$$

Тому:

$$\xi^5-\xi^4+2\xi^2\eta+4(\eta+2)-(\eta+2)^2=4$$

або

$$\xi^5-\xi^4-2\xi^2\eta-\eta^2=0$$

Прирівнюючи до нуля члени найнижчого (себто другого) виміру, маємо:

$$\eta^2 = 0 \quad \text{або:} \quad \eta = 0$$

Отже маємо в цій точці дві дотичні $\eta = 0$ і $\eta = 0$, що зливаються. Тому точка є подвійною, що має за дотичну вісь ξ-ів.

Досліджуємо положення галузей кривої:

$$\xi^5 = (\xi^2 - \eta)^2 \quad \text{або} \quad \xi^2 - \eta = \pm \xi^{5/2}; \quad \text{або:} \quad \eta = \xi^2(1 \pm \xi^{1/2})$$

Ми бачимо що:

1) Реальні вартости η існують лише для $\xi > 0$ (бо при $\xi < 0$ $\sqrt{\xi} = \xi^{1/2}$ має уявну вартість). Отже крива має свої галузі від точки 0 вбік додатних x-ів.

2) η має дві вартости (дві галузі). При тому для вартостей (рис. 88) $\xi < 1$, обидві вартости η додатні, а тому обидві галузі кривої лежать нори над віссю ξ-ів, себто нори спільної дотичної. При $\xi = 1$; $\eta = 0$: одна галузь перетинає в точці P свою дотичну і при $\xi > 1$ - ця галузь лежить під дотичною.

Отже, ці міркування дають зрозуміти, що особлива точка $M(0,2)$ є точкою повернення (типем повороту) 2го роду.

<u>Приклад 5.</u> Дослідити особливі точки кривої:

$$a^4y^2 = x^4(a^2 - x^2)$$

$$1)\ \frac{\partial F}{\partial x} = -4x^3(a^2 - x^2) + 2x^5 = 0$$

$$2)\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2a^4y = 0$$

Розв'язуючи ці рівняння маємо: $y = 0$; $x = 0$; $x = \pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Вставляючи ці вартости в рівняння кривої, пере-

конується, що тому задовольняють вартости:

$$x=0; \quad y=0$$

Отже точка $O(0,0)$ є особливою (початок координат). Прирівнюючи до нуля члени найнизького виміру маємо:

$$a^4y^2=0, \text{ звідки: } y^2=0$$

Маємо дві дотичні злитих в одну рівняння (рис. 89)

$$y=0$$

[Спільна дотична є вісь x-ів]

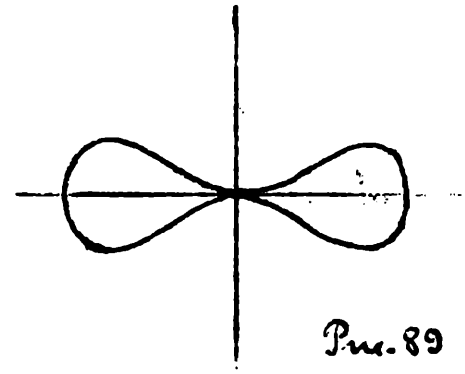


Рис. 89

<u>Перевірка.</u> Беремо другі похідні й маємо:

1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2(a^2-x^2)+8x^4+10x^4 =$

$= 30x^4-12a^2x^2$. Отже: $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$

2) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a^4 \neq 0$ 3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

Таким чином підтверджуємо, що точка є подвійною і має спільну дотичну, бо:

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Дослідимо гілки кривої:

$$y = \pm\frac{x^2}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$$

Для всіх вартостей $|x|<a$ ми маємо дійсні вартости y, себто крива лежить з обох боків вісі y-ів. Отже <u>не повертається</u> в точці O, а тому ми маємо тому <u>самодоторкання.</u> (Рис 89)

<u>Приклад 6.</u> Дослідити особливі точки кривої „Капа"

що визначається рівнянням: (рис. 90)

$$y^4 = x^2(a^2-y^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x(a^2-y^2); \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3+2x^2y$$

Звідци маємо систему:

$$2x(a^2-y^2)=0$$
$$2y(y^2+x^2)=0$$

Розв'язки її 1) $x=0$; $y=0$ 2) $y=\pm a$; $x=\pm ai$. Розв'язки 2) - відкидаємо, як уявні, а вставка 1° розв'язків в рівняння кривої дає тотожність. Отже початок координат $O(0,0)$ є особливою точкою.

$$1)\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2(a^2-y^2); \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = -2a^2$$

$$2)\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 12y^2+2x^2; \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

$$3)\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = 4xy; \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Тому:

$$\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Має дві згадані дотичні, а саме прирівнюємо до нуля члени найнижчого виміру маємо:

$$x^2a^2=0$$

Звідци: $x=0$ (два однакових розв'язки). Дотична є вісь y-ів.

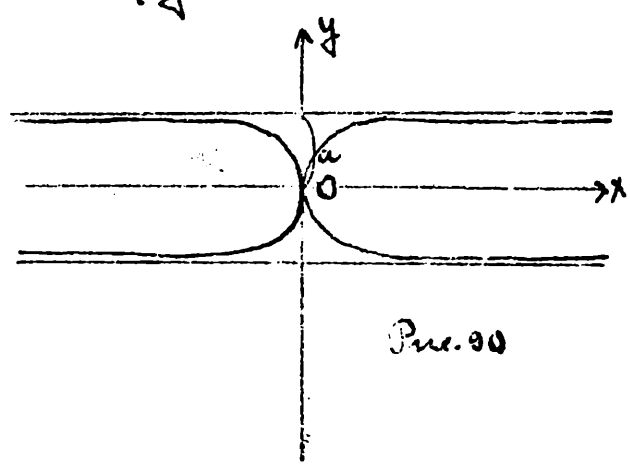


Рис. 90

Досліджуємо гілки

$$x = \pm\frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

Ми бачимо, що для вартостей $|y|<a$ (додатних і

і відємних) x має реальні вартости. Отже галузі кривої лежать з обох боків дотичної щодо точки O тому це є точкою <u>самодотикання</u>.

[Заразом ми бачимо, що при $|y| = a$, вартість $x = \infty$, отже прості $y = a$ і $y = -a$ є асимптоти кривої]

<u>Приклад 7.</u> Дослідити особливі точки кривої:

$$(y-2)^2 = x(x+1)^2$$

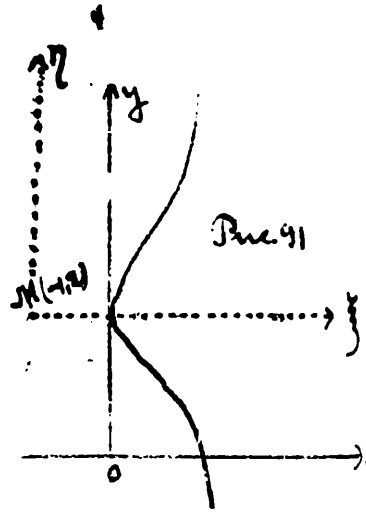


Рис. 91

Шукаємо значини особливої точки:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -(x+1)^2 - 2x(x+1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-2)$$

Отже маємо систему:

1) $(x+1)^2 + 2x(x+1) = 0$ або $(x+1)(3x+1) = 0$

2) $y - 2 = 0$

Звідци: $y = 2$; $x = -1$; $x = -\frac{1}{3}$. Вставши цих розв'язків у рівняння кривої показує, що тому рівняння задовольняють значини точки $M(-1, 2)$ Отже вона є особливою.

Перенесім координати рівнобіжно собі до точки M, як початку. Вгори перетворення: $x = \xi - 1$ $y = \eta + 2$. Тому рівняння кривої в нових координатах має вигляд:

$$(\xi - 1)\xi^2 = \eta^2$$

і має особливу точку $M(\xi = 0, \eta = 0)$

<u>1-й спосіб.</u>

1) $\frac{\partial F}{\partial \xi} = 2\xi(\xi - 1) + \xi^2$; $\left[\frac{\partial F}{\partial \xi}\right]_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = 0$ $\frac{\partial F}{\partial \eta} = -2\eta$; $\left[\frac{\partial F}{\partial \eta}\right]_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = 0$

2) $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 6\xi - 2$; $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right]_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = -2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = -2$. $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right]_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = -2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Тому:

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}\right]^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\Big|_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = -4 < 0$$

Точка є ізольованою (відокремленою). (рис 31).

<u>2й спосіб.</u>

Рівняння: $\xi^3 - \xi^2 - \eta^2 = 0$

не має членів низче 2го виміру й тому має подвійну точку. Рівняння дотичних буде:

$$\xi^2 + \eta^2 = 0 \text{ ; або } \xi = \pm \eta i$$

Дотичні є уявні, а тому точка є ізольованою. Справді, з рівняння кривої маємо:

$$\eta = \pm \xi \sqrt{\xi - 1}$$

Ми бачимо, що для вартостей $\xi < 1$, вартости η є уявні, а тому крива не переходить через початок координат (цей початок уявляє ізольовану точку) Коли $\xi = 1$, то крива перетинає вісь ξ-ів, бо $\eta = 0$

<u>Приклад 8.</u> Знайти особливі точки кривої:

$$(x^2 - y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

2й спосіб. Рівняння має членів найнизчого 2го виміру, тому існує подвійна точка в початку координат: $O(0,0)$.

Рівняння дотичних:

$$x^2 + y^2 = 0 \text{ або } x = \pm yi$$

Отже точка має бути ізольованою. Справді:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 - y^2) - 2a^2 x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = 4(x^2 - y^2) + 8x^2 - 2a^2 ; \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=0\\ y=0}} = -2a^2$$

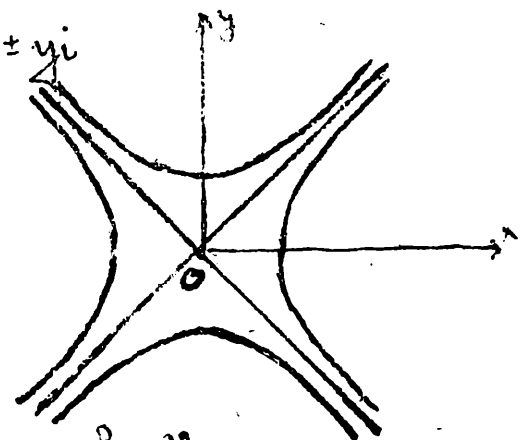


Рис. 32

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -4y(x^2-y^2) - 2a^2y$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -4(x^2-y^2) + 8y^2 - 2a^2; \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = -2a^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -8xy; \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Отже:

$$\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = -4a^2 < 0$$

§41. Особливі точки трансцендентних кривих.

Ми розглядали особливі точки, що належать до алгебричних кривих і для дослідження їх користалися розгорненням функції в ряд Тейльора. Але існує багацько й таких трансцендентних кривих, що мають також особливі точки, напр., точки зникнення, або кутові точки. Щоб ознайомлитися з ними ми розглянемо де-кілько прикладів.

Приклад 1. Хай крива має рівняння: $y = e^{\frac{1}{x}}$

Коли віддалено для x вартість 0, то y одержує невиразну вартість, а саме:

До вартости нуль x може простувати або 1) через додатні свої вартости й тоді $\lim y = \lim e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty$, або 2) через відємні вартости й тоді $\lim y = \lim e^{-\frac{1}{|x|}} = e^{-\infty} = 0$. Таким чином крива складається з 2^x окремих галузів, що підходять до осі y-ів ($x \ldots 0$), перша галузь асимптотично (бо при $x \ldots 0$, $y \ldots \infty$) а друга переходить через початок осей ($x \ldots 0$, $y \ldots 0$). Перша галузь існує лише для додатніх вартостей x,

а друга лише для від'ємних. Далі, визначаючи x з рівняння маємо: $\frac{1}{x} = \lg y$; $x = \frac{1}{\lg y}$. Це показує, що коли y наближається до вартости 1, тоді вартість x простує на безмежність, себто пряма $y=1$ є асимптотою кривої для обох галузів. З цих міркувань робимо висновки:

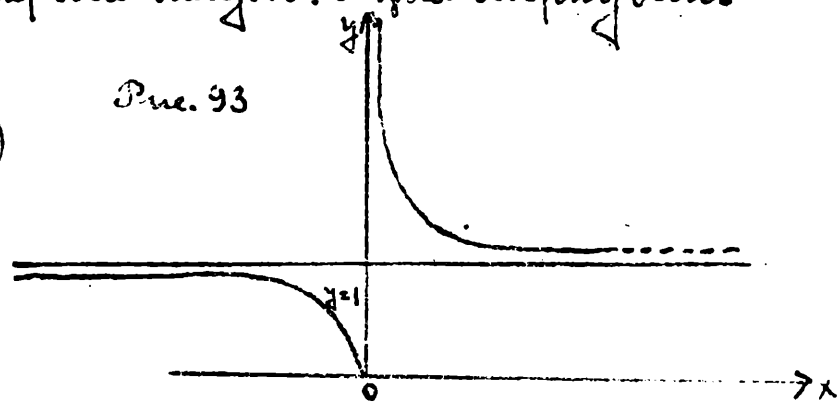


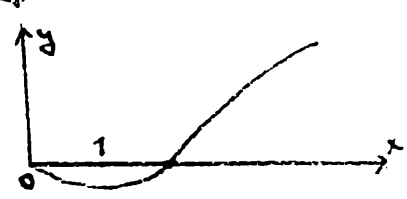
Рис. 93

1) **Перша** (додатня) галузь кривої обмежена простими $x=0$ (вісь y-ів) і $y=1$ і йдучи своїми кінцями на безмежність, асимптотично наближаються до даних простих (рис. 93).

2) Друга (від'ємна) галузь кривої одним кінцем йде на $-\infty$, асимптотично наближається до простої $y=1$, а другим кінцем вирається в точку $O(x=0; y=0)$ і далі не продовжується. Отже точка O є особливою точкою, а саме точкою закінчення (або уриву) кривої.

<u>Приклад 2.</u> Дано криву рівнянням: $y = x\lg x$

Змінна x входить у рівняння під знаком $\lg$, а тому x не може бути від'ємним, себто $x \geq 0$. Отже наша крива лежить з боку додатніх x-ів. Коли $x=0$, то і $y=0$. Отже крива вирається в початок осей і складається з одної галузі (бо кожній вартості x відповідає лише одна вартість y). Таким чином точка $O(0,0)$ є точкою закінчення кривої (рис. 94) [Ця крива для вартостей $x<1$ буде під віссю x-ів



со їд правдивих дробів <0; для вартости $x=1$ й $y=0$ крива переходить через вісь x-ів і для вартости $x>1$ і $y>0$, себто крива йде над віссю x-ів]

<u>Приклад 3.</u> Дослідити особливі точки кривої:

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

Коли візьмемо вартість $x=0$, то й $y=0$, незалежно від того як x простує до нуля чи через відємні, чи через додатні свої вартости [бо при переході x до нуля через вартости <0, чисник буде 0, а знаменатель 1 (знак вартости y буде заховуватьсяд -), а при переході до нуля x через додатні вартости, чисник буде однаково нуль, а знаменатель ∞] <u>Отже крива лежить з обох боків початку координат</u>, що-до осі y-ів, причому додатня галузь лежить в 1 чверті, а відємна в 3ій чверті координат

Далі розглянемо дотичну в точці (0,0). Очевидно її рівняння буде:

$$y=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}\cdot x$$

Знайдемо вартість $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}$:

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}},\ \text{тому}\ \frac{dy}{dx}=\frac{x(1+e^{\frac{1}{x}})+e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$$

Але беручи межу $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}$ ми мусимо завважити що вартість її буде подвійна, залежно від способу прямування до 0 вартости x. Справді, коли x буде простувати до 0 лишаючись >0, то маємо:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}=0$$

а коли x буде простувати до 0 лишаючися $\neq 0$, то:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = 1$$

Таким чином, до кривої в точці 0 буде 2 дотичні:

$$y=0 \quad і \quad y-x=0$$

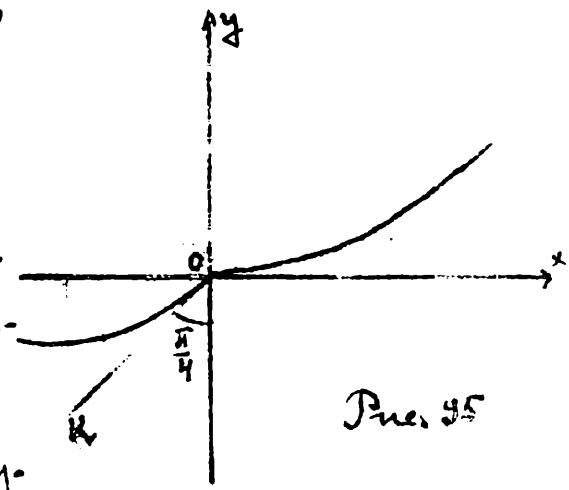


Рис. 95

Ця точка не є крайною, а тому зветься кутовою точкою або точкою злому кривої. (рис. 95). В цій точці одна дотична для додатньої галузі є вісь x-ів, а друга для від'ємної галузі є симетральною 3ої чвертини координат.

Приклад 4. Довести, що крива: $y = x\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}$ має кутову точку в початку координат.

При $x=0$ (незалежно від способу простування до цієї вартости) $y=0$ (бо $\mathrm{arctg}\,\pm\infty$ буде уявляти не більше чого $\frac{\pi}{2}$ - себто чого обмежене). Також з цього очевидно, що крива буде лежати з обох боків вісі y-ів. Поведемо січні кривої через точку 0, як початок осей; рівняння їх загалом буде: $y = mx$. Коли візьмемо на кривій яку-будь точку (x_1, y_1), то одна з цих січних, що переходитиме через дану точку матиме рівняння:

$$y = \frac{y_1}{x_1}x$$

Щоб одержати дотичну в точці 0, припустимо вартості x_1, y_1 простувати до нуля [до зливання точки $M(x_1, y_1)$ з точкою $O(0,0)$]. Тоді кутовий коефіцієнт дотичної:

$$m = \lim\left[\frac{y_1}{x_1}\right]_{x_1 \to 0}$$

Точки y_1 і x_1 належать до кривої, а тому задоволяють її рівняння й ми маємо тотожність:

$$y_1 = x_1 \operatorname{arctg} \frac{1}{x_1}$$

а звідци:

$$\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x_1}$$

тому:

$$\lim_{x_1 \to 0} \left[\frac{y_1}{x_1}\right] = \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{x_1}\right]_{x_1 \to 0}$$

Ми знова переконуємося, що ця межа має дві вартости, а саме:

1) Коли x_1 простує до нуля через додатні вартости то $\operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$;

2) Коли x_1 простує до нуля через від'ємні вартости, то $\operatorname{arctg} -\infty = -\frac{\pi}{2}$

Отже точка 0 - є кутовою точкою.

§42 Про точки перегину.

Для більшої повноти дослідження точок перегину згадаємо ще умови визначення maximum'а й minimum'а функцій, а також визначення точок перегину. Як ми вже розглядали теоретично, крива має maximum або minimum щодо осі x-ів в тих точках, для яких дотична до кривої є рівнобіжна до осі x-ів, себто, коли її кутовий зміник $f'(x) = 0$. Після переходу через maximum, рядна кривої буде спадати й тому наступна похідна $f''(x)$ буде від'ємною. Навпаки

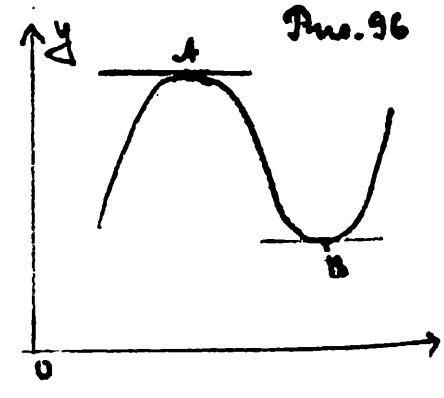


Рис. 96

після переходу через minimum рядна кривої буде зростати, а тому $f''(x)$ буде додатньою.

Більш докладно ми досліджуємо це питання розгортуючи функцію $y=f(x)$ в ряд Тейлора. В цьому разі ми можемо узгляднити випадки, коли й $f''(x)$ і $f'''(x)$ обертатимуться в нуля, а $f^{IV} \neq 0$ і т. д. Загалом коли першою нерівною з нулем буде парнета похідна

Покладавши конпективно шляхи відповідних міркувань ми робимо такі висновки:

<u>Коли криву задано рівнянням $y=f(x)$ у визначеній формі, то дана точка буде maximum'ом або minimum'ом цієї кривої, коли її значини обертають першу похідну функцію в нуля й першою нерівною з нулем похідною є парнета.</u>

Коли ця нерівна з нулем парнета похідна є:

1) <u>від'ємна</u> [себто, коли $f^{(2k)}_{k=1,2\ldots n}(x) < 0$], то дана точка є maximum кривої і

2) <u>додатня</u> [себто, коли $f^{(2k)}_{k=1,2\ldots n}(x) > 0$] то дана точка є minimum кривої.

Очевидно, відшукуючи точки maximum'а або minimum'а кривої ми:

1) Беремо першу похідну й дорівнюємо її до нуля

2) Беремо другу похідну і вставляємо розвязки рівняння, що одержали з першої похідної.

3) Коли 2-а похідна у вислідці цієї вставки $\neq 0$, то маємо при $f''(x) < 0$ maximum, а при $f''(x) > 0$ minimum

4) Коли як 2ге, а за нею й третя похідні = 0, то досліджуємо 4ту і т.д. Коли б першого не рівного з нулем була непарна похідна, то ні maximum'а ні minimum'а немає.

Коли рівняння кривої дається в невизначеній формі, себто: $f(x, y) = 0$, то тоді:

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$$

де $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, а тому має бути:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Для визначення значників x і y критичної точки (точки дослідження) маємо систему:

$$f(x, y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

[Примітка. Коли й $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, то як відомо з попереднього - ми будемо мати особливу точку)

З диференцування невизначених функцій, маємо:

$$y'' = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{при } y' = 0)$$

а тому, коли:

$$-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

1) відємна - maximum

2) додатня - minimum

Очевидно, що коли $y'' = 0$; $y''' = 0$ то досліджуємо y^{IV} і т. д.

Тепер вернемося до випадку, коли $y''=0$ й першого не рівного з нулем є непарнета похідна. В цьому випадку парнета похідна переходить через нуля і крива в даній точці змінює форму (відбувається зміна випуття кривої що до осі x-ів на вгнуття, або навпаки, в залежности від знаку найдальшої $\neq$ з нулем непарнетної похідної). Ми вже знаємо, що ці точки, де крива змінює випуклість на вгнутість або навпаки звуться точками перегину. Очевидно, що значення точки перегину визначатимуться з рівняння:

$$y''=0$$

А вставляючи розвязки цього рівняння в першу похідну y', ми одержимо вартість кутового змінника відповідної дотичної перегину.

Приклад 1. $x^3-3bx^2+a^2y=0$

$$y=\frac{1}{a^2}(3bx^2-x^3)\ ;\quad y'=\frac{1}{a^2}(6bx-3x^2)\ ;\quad y''=\frac{1}{a^2}(6b-6x)=\frac{6}{a^2}(b-x)$$

Коли існує точка перегину, то $\frac{6}{a^2}(b-x)=0$, або $x=b$ звідси $y=2\frac{b^3}{a^2}$. Беремо: $y'''=-\frac{6}{a^2}$. Незалежно від вартости x і y, ~~похідна~~ не рівного з нулем є непарнета (3я похідна), а тому точка $M\left(b, \frac{2b^3}{a^2}\right)$ є точкою перегину. Далі y''' є від'ємна, а тому крива переходить що-до осі x-ів від випуклости до вгнутости. Кутовий змінник дотичної буде:

$$y'_{(x_0,y_0)}=\frac{1}{a^2}(6b^2-3b^2)=\frac{3b^2}{a^2}\ (\text{рис. } 97)$$

об-то: $tg\alpha=\frac{3b^2}{a^2}$

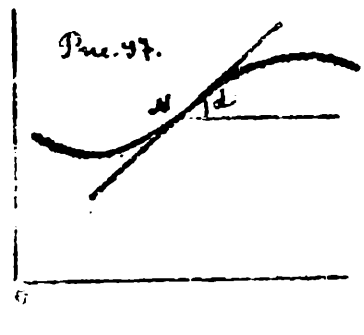


Рис. 97.

Приклад 2. $y=(x-3)^5+2x$

$y' = 5(x-3)^4 + 2$; $y'' = 20(x-3)^3$; $y''' = 60(x-3)^2$; $y^{\text{IV}} = 120(x-3)$

$y^{\text{V}} = 120$; Отже: $20(x-3)^3 = 0$; $x = 3$; $y = 6$; $\left(y'''\right)_{x=3} = 0$;

$\left(y^{\text{IV}}\right)_{x=3} = 0$; $y^{\text{V}} \neq 0$. Тому $M(3,6)$ є точкою перегину; $y' = 2$, себто $\operatorname{tg}\alpha = 2$; далі $y^{\text{V}} > 0$. Отже при точці M крива має вигляд: (рис. 98).

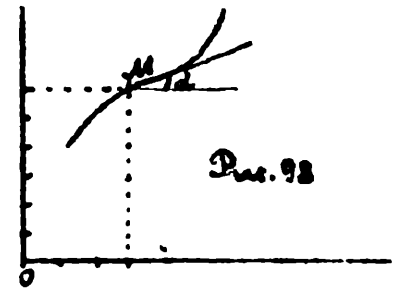


Рис. 98

Далі нашли вислідали геометричну інтерпретацію. Хай рівняння кривої буде:

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

Поведемо до неї дотичну в точці $M(x_0, y_0)$ й тоді називаємо рівняння цієї дотичної вигляду:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

де як відомо $f'(x_0)$ є вислід вставки в $f'(x)$ вартости x_0 значника точки M. Перетворене одержане рівняння має:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 = \varphi(x) \quad \ldots (\beta)$$

Дослідимо тепер порядок доторкання даної кривої (α) і її дотичної в точці M (β) і для цього розглянемо взір (б) §28 а саме:

$$\Delta = f(x_0+h) - \varphi(x_0+h) = h\left[f'(x_0) - \varphi'(x_0)\right] + \frac{h^2}{2}\left[f''(x_0) - \varphi''(x_0)\right] +$$
$$+ \frac{h^3}{3!}\left[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)\right] + \ldots \qquad (\gamma)$$

В цьому випадку, диференцюючи рівняння (β), маємо:

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0)$$

I) Друге ж диференцювання дає: $\varphi''(x) = 0$, бо при даній x_0, значника даної точки M, вартість $f'(x_0)$

є сталого. Тому, коли друга похідна функції (α) а саме $y'' = f''(x)$ при вставці в неї вартости x_0 не обернеться в нуль, себто: $f''(x)_{x_0} = f''(x_0) \neq 0$, то ми маємо:

$$\Delta = \frac{h^2}{2!}\left[f''(x_0) - \varphi''(x_0)\right] + \dots = \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$

що є доторканням першого порядку й таким чином існує дві безмежно-близькі точки, взяті в даній M (рис. 99).

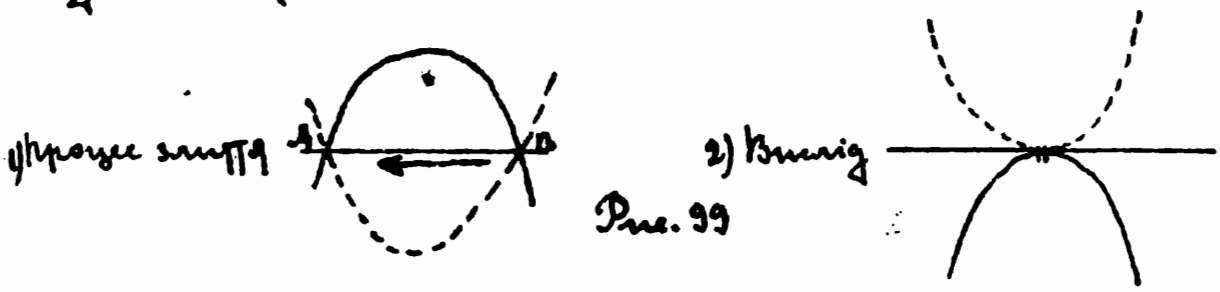


Рис. 99

II) Очевидно, що й третє диференцування функції (β) дасть:

$$\varphi'''(x) = 0 \text{ а тому й } \varphi'''(x_0) = 0$$

Тому коли при умові I) друга похідна функції (α) обернеться в нуль, себто $f''(x)_{x_0} = f''(x_0) = 0$, а саме третя похідна тієї ж функції, а саме: $f'''(x)_{x_0} = f'''(x_0)$ не буде рівна з нулем, себто $f'''(x_0) \neq 0$, то ми маємо:

$$\Delta = \frac{h^3}{3!}\left[f'''(x_0) - \varphi'''(x_0)\right] + \dots = \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}\left[f^{IV}(x_0) - \varphi^{IV}(x_0)\right] + \dots$$

Це є доторкання 2го порядку: три безмежно близьких точки взятих в точці M (рис. 100)

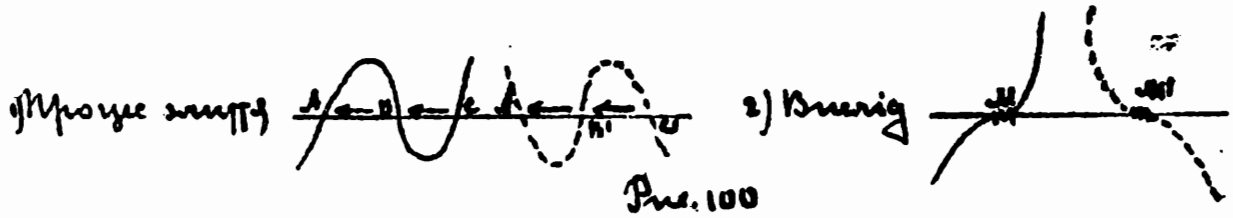


Рис. 100

Будемо цей випадок звати перепутанням 1го порядку. Ми бачимо, що починаючи з другої всі похідні

$\varphi(x)$ обертається в нуля, а тому взору (γ) можна дати вигляд:

$$\Delta = \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}(x_0) + \frac{h^5}{5!} f^{V}(x_0) + \dots \qquad (\delta)$$

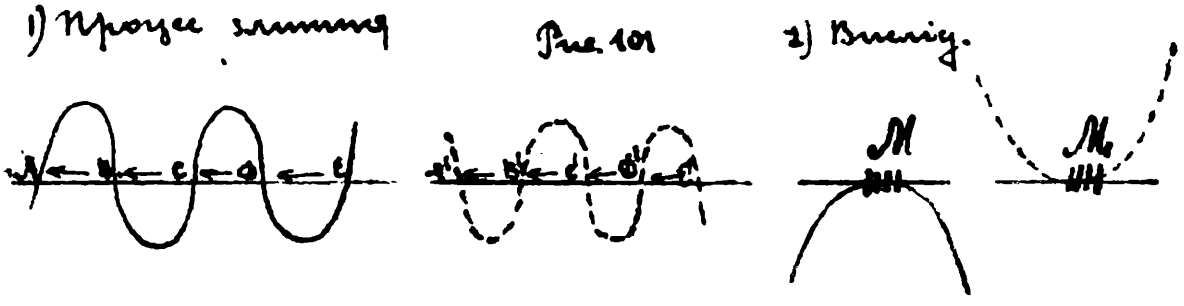
бо $\varphi'(x_0) = f'(x_0)$. Звідси буде на підставі попередніх міркувань ясно, що:

III) Коли $f'''(x)_{x_0} = f'''(x_0) = 0$, а $f^{IV}(x_0) \neq 0$, то маємо дотикання 3-го порядку (4 безмежно-близьких точки злитих в M), що дає такий геометричний образ (рис. 101)

1) Процес злиття

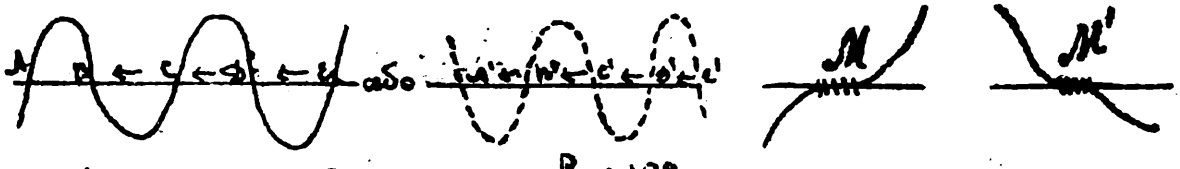
Рис. 101

2) Вигляд.



Очевидно, що в цьому разі маємо справу з <u>дотиком</u> простої (β) до кривої (α)

IV) Коли $f^{IV}(x_0) = 0$, а $f^{V}(x_0) \neq 0$, то $\Delta = \frac{h^5}{5!} f^{V}(x_0) + \frac{h^6}{6!} f^{VI}(x_0) + \dots$ Це є дотикання 4-го порядку, себто 5 безмежно-близьких точок злитих в точці M. Маємо такий геометричний образ (рис. 102).



1) процес злиття

Рис. 102

2) Вигляд.

Ми маємо знову перегину (2-го порядку). Продовжуючи міркування свої далі, ми дійдемо до висновку, що 1) коли для даної точки M першого (крім $f'(x_0)$ похідного кривої (α) нерівного з нулем буде парним, то матимемо дотик до простої (β), а у випадку, при цьому, коли $f'(x_0) = 0$, то матимемо або

мінімум, щодо осі x-ів. 2) Коли при тім же умові першою нерівною з нулем буде непарна похідна, то маємо справу з перегинтям кривої в даній точці M. Порядок цього перегинтя є завжди рівний $k=\frac{n-1}{2}$ де n є порядок першої нерівної з нулем похідної. [Це дає практично таку ознаку: коли $k=\frac{n-1}{2}$ є ціле число, то маємо перегинтя, а коли k дробове, то ніт.]

§43. Дослідження рівняння кривих.

На протязі пройденого курсу ми досліджували окремі властивости аналітичних функцій й тепер скористуємося придбаними досвідом і методом для всебічної і загальної аналізи рівнянь кривих. Це дасть нам змогу уявити їх геометричний образ, себто їх вобразити графічно.

I) Першим нашим завданням буде через дослідження даного рівняння визначити ту частину поля нашого рисунку, де ця крива міститься. Для цього треба:

1) Визначити положення початку координатних осей, щодо самої кривої. [Встановляємо в рівняння кривої значини $x=0$; $y=0$; цим досліджуємо, чи переходить крива через початок координат чи ні]

2) Знайти точки перетину кривої з осями координат, себто визначити відтинки на осях, що творить крива. [Для цього по черзі беремо або $x=0$, або $y=0$, і визначаємо ту змінну, що лишається.]

3) Дослідити криву на симетричність [рабі-

то по черзі заміну 1) x на $-x$ і 2) y на $-y$. Коли при першій заміні рівняння лишається незмінним-то крива симетрична щодо осі y-ів. Таксамо можемо переконатися (2го підставною), чи є симетрична крива щодо осі x-ів. Коли вона симетрична до обох осей, то початок є центром симетрії, або центром кривої]

4) Дослідити всякану змінність x і y, а для того визначаємо або 1) x через y, або 2) y через x і аналізуємо вартости одної в звязку зі зміною другої.

Напр. рівняння: $x^3 - x^2y + 4y = 0$

1) Крива переходить через початок осей, бо задовольняється вартостями $x=0$; $y=0$

2) Крива в першій тоці, крім початку осей, координат не перетинає, бо:

1) коли $x=0$, то $y=0$

і 2) коли $y=0$, то й $x=0$

3) Зміни x на $-x$ і y на $-y$, показують, що рівняння при цьому змінюється, а тому крива не є симетричною, щодо осей координат

4) Визначаємо y: $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

а) для вартостей $0<x<2$ — y має відємні вартости, крива лежить під віссю x-ів (в 4ій чверті)

б) для $0>x>-2$ — y має додатні вартости (лежить в 2ій чверті.

в) при $|x|=2$ $y=\infty$, себто прості $x=2$ і $x=-2$ — є асимптоти кривої;

г) при $x>2$ і y є додатне й при зростанні x ... y теж зростає до ∞ бо $y = \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{x}{1-\frac{4}{x^2}}$

д) при $x < -2$ y є від'ємне й також при зростанні x ... $-\infty$ й y зростає до ∞. Крива своїми галузями йде на безмежність.

II) <u>Аналізуємо криву щодо окремих її властивостей.</u>

1) Витягаємо першу похідну $y' = \frac{dy}{dx}$ [Це дає дослідити положення кривої в кожній окремій точці]:

а) Коли $f'(x) > 0$, то $f(x)$ зростає, а тому крива віддаляється від вісі x-ів, а коли $f'(x) < 0$ - то навпаки.

б) Коли $f'(x) = 0$, то це є <u>момент повороту</u> кривої (дотична || до осі x-ів) або коли $f'(x) = \infty$ теж [дотична || до осі y-ів]

Отже А) Шукаємо maximum або minimum кривої. Тоді: а) згідно 1), б) прирівнюємо до нуля 1ну похідну y' і з цього рівняння за допомогою рівняння самої кривої знаходимо значини точки, що мають дотичну || до осі x-ів. б) Беремо від функції рівняння кривої 2гу похідну $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ і вставляємо в неї значини знайденої точки.

коли $y''_0 \neq 0$, то, коли $y''_0 < 0$, крива в цій точці має maximum, а коли $y''_0 > 0$, то minimum;

коли $y''_0 = 0$ то досліджуємо 3ю похідну і т. д.

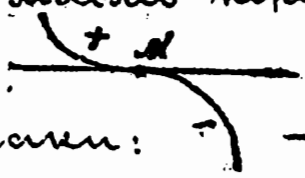
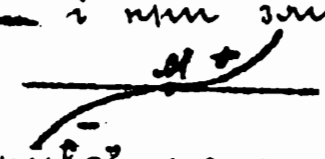
В). Знайти точки перегину.

1) Для цього прирівнюємо до нуля другу похідну й знаходимо значини тих точок (за допомогою рівняння самої кривої) для яких може бути перегинання.

2) Беремо 3ю похідну й вставляємо знайдені вартости значинків; коли для них $y''' \neq 0$, то маємо

точку перегину.

3) Вставляємо значини знайдених точок перегину у вираз y' і одержуємо кутовий зміни дотичної перегину.

4) Беремо вартости одну трохи менну, а другу трохи більшу дана значинів точки перегину і вставляємо їх у вартість другої похідної y''. Коли ці вставки дадуть зміну знаків „+" на „−", то ми маємо перехід від випуклости до випуклости:  і при зміні знаків „−" на „+" навпаки: 

III) <u>Дослідження кривої на асимптоти.</u> Спосіб цього дослідження указані **раніше в окремому §.**

IV) Дослідження кривої на особливі точки. Способи – в §§ 39, 40; 41.

V) Коли знайдених прикмет ще не досить для вмображення кривої зрасрано, ми беремо через довільних вартостей x (відтинкові) і, обчисливши відповідні рядні з розвязання рівняння кривої, наносимо кілько поличних точок. Візьмім для з'ясування кілько прикладів.

<u>Приклад 1.</u> Дослідити й накреслити криву:

$$x^3 - x^2y + 4y = 0$$

Ми вже дослідили для цієї кривої:

1) Крива переходить через 0, початок координат

2) Крива більш не перетинає осей

3) Крива не є симетричною

4) Для вартостей $0 < x < 2$ крива лежить під додатним напрямом вісі x-ів (4-а „ „ вертиса)

5) Для вартостей $0 > x > -2$ має додатні вартости y, себто лежить в 2 чвертці.

6) При $|x| = 2$, вартість $y = \infty$, себто $x = 2$; $x = -2$ асимптоти

7) При $x > 2$ - крива при зростанні x має завжди додатні вартости y (крива в 1-й чвертці)

8) При $x < -2$ має завжди $y < 0$ (в 3-й чвертці)

9) При зростанню абсолютних вартостей x в (7) і (8) до ∞ й y зростає до безмежности. Тому крива має безмежні галузі.

Отже крива положена у всіх 4х чвертях і переходить через початок осей [графічна ілюстрація (рис. 103)].

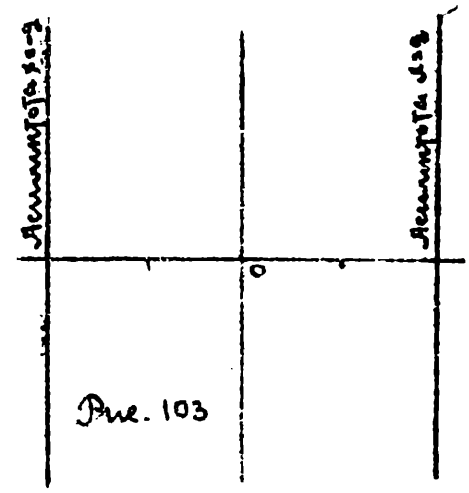


Рис. 103

II) Беремо похідну $y' = \frac{dy}{dx}$

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-4}\right)' = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

Шукаємо maximum або minimum. Для цього

$$\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = 0 \quad \text{або} \quad x_1 = 0 \; ; \; x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3} = \pm 3{,}464\ldots$$

$$y_1 = 0 \; ; \quad y_{2,3} = \pm 3\sqrt{3} = \pm 5{,}196\ldots$$

Беремо другу похідну:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

і вставляємо вартости $x_1, x_{2,3}$. Тоді:

$$1) \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0$$

Це показує, що при $x = 0$ є можливою точка пе-

рентуття. Але:

$$2)\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=-2\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \quad [\text{Maximum}]$$

$$3)\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=+2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad [\text{Minimum}].$$

Для дослідження точки $x=0$, $y=0$ ми беремо 3° похідну, вставляючо вартости $x=0$, $y=0$ й переконуємося, що: $\left(\frac{d^3x}{dx^3}\right) \neq 0$. Отже точка $O(0,0)$ є точкою перегиття. Ці дослідження дають нам такі точки (рис. 104)

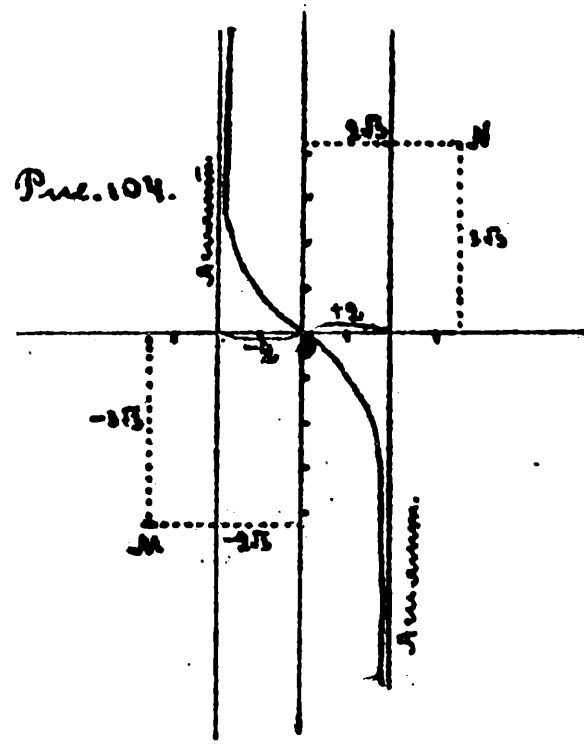


Рис. 104.

III) Досліджуємо на асимптоти. 1) Рівняння кривої: $x^3-x^2y+4y=0$ має сотинне при x^2-одиницю, тому асимптот, рівнобіжних до осі x-ів немає.

2) Сотинне при найстаршім ступіні y буде $(-x^2+4)$. Тому $x^2-4=0$; $x=\pm 2$. Себто асимптот рівнобіжних до осі y-ів є дві (вони вже знайдені раніш).

3) Шукаємо асимптоти не рівнобіжні до осей: беремо рівняння простої $y=mx+n$ і вставляємо у рівняння кривої; тоді маємо:

$$x^3-x^2(mx+n)+4(mx+n)=0 \quad \text{або}$$

$$x^3(1-m)-x^2n+4mx+4n=0$$

Тому:

$$1-m=0;\ n=0;\ \text{через те}\ m=1,\ n=0$$

і рівняння асимптот має вигляд:

$$x - y = 0$$

(є рівнобіжною першої вертикалі)

IV) Особливі точки: 1) $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2xy = 0$; $\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 + 4 = 0$ Звідси $x = \pm 2$; $y = \pm 3$. Значення цієї точки не задовольняють рівняння кривої, тому особливих точок нема. (Це очевидно ще з того, що рівняння містить члени в 1 ступені)

Переходимо тепер до графічного вгобрження кривої (рис. 105).

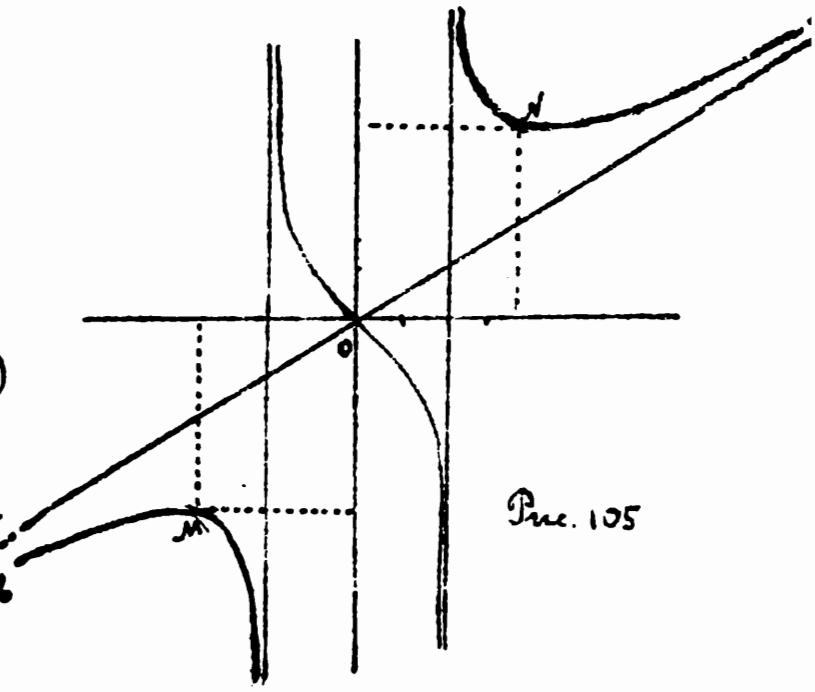


Рис. 105

Приклад 2. Дослідити криву:

$$x^3 - 2ax^2 + y^3 = 0$$

1) Крива переходить через початок (чому?) координат.

2) Крива перетинає крім початку вісь x-ів ще в точці: $[x^3 - 2ax^2 = 0]$ $x = 2a$ (рис. 105а точки через які переходить крива означено •).

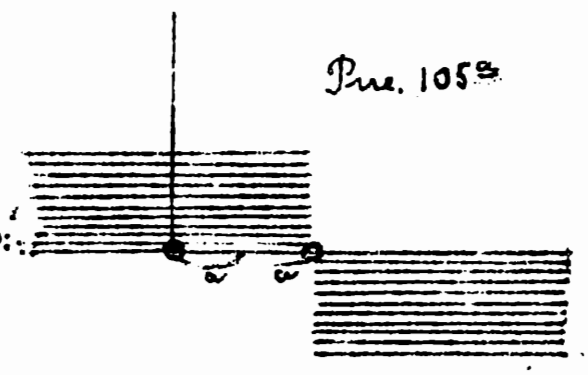


Рис. 105а

3) Крива не симетрична щодо осей координат.

4) Визначивши y, маємо:

$$y = \sqrt[3]{x^2(2a - x)}$$

а) коли x зростає до $+\infty$, то y зростає до $-\infty$, а коли x зростає до $-\infty$, то y зростає до $+\infty$, себто маємо дві безмежно далекі точки: $(\infty, -\infty)$ і $(-\infty, \infty)$

б) для додатніх вартостей $x < 2a$, $y > 0$; а для тих

ні вартостей $x>2a$, $y<0$. в) для відємних вартостей x, завжди $y>0$ (рис. 105а, заштриховані ≡ частини площі є ті де міститься крива).

5) Досліджуємо maximum і minimum (якщо невизначеної функції) Для цього:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 4ax$; тому: $3x^2 - 4ax = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{4}{3}a$. Вставляючи ці вартости в рівняння кривої, маємо:

$y_1 = 0$; $y_2 = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}a$ Але $y'' = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} : \frac{\partial F}{\partial y} = -[6x - 4a] : 3y^2 = \frac{4a - 6x}{3y^2}$.

y^2 буде завжди додатнім, а тому досить досліджити знак числителя: $u = 4a - 6x$. Отже:

а) $x_1 = 0$ не надається до дослідження, бо при тому $y_1 = 0$ і $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2$ обертається в нуль. Це є особлива точка, коли $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$ і $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$ разом рівні з нулем.

б) При $x_2 = \frac{4}{3}a$ маємо: $u = 4a - 8a = -4a < 0$. В цій точці маємо maximum (рис. 106)

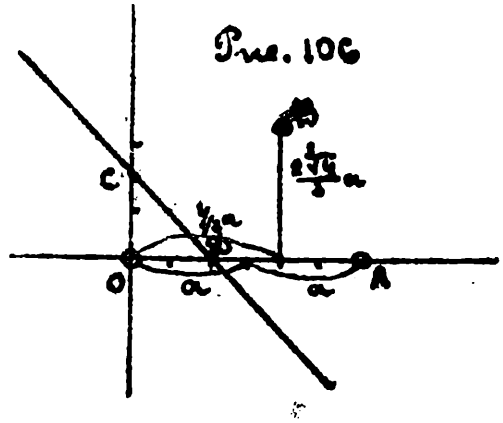


Рис. 106

6) Досліджуємо на асимптоти. а) асимптот рівнобіжних осі x-ів і y-ів немає, бо сочинники при старших ступнях x і y в рівнянні кривої є сталі величини. б) Асимптоти нерівнобіжні до осей координат: Беремо рівняння простої $y = mx + n$ і вставляємо в рівняння кривої, тоді маємо:

$$\underline{\underline{x^3}} - \underline{2ax^2} + \underline{\underline{m^3x^3}} + \underline{3m^2x^2n} + 3mxn^2 + n^3 = 0$$

$n = \frac{2}{3}a$. Рівняння асимптоти: $y = -x + \frac{2}{3}a$

(Звідси маємо $x = \frac{2}{3}a$; $y = \frac{2}{3}a$ - відтинки асимпто-

ти на осях (рис. 106, асимптота CD)

7) Досліджуємо на особливі точки. Находимо точку, що є особливою, себто беремо:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0$$

Отже:

$$3x^2-4ax=0 \; ; \; x_1=0 \; ; \; x_2=\tfrac{4}{3}a \; ; \; \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2 \; ; \; y_1=0 \quad y_2=0$$

а) Точка (x_1, y_1) обертає рівняння кривої в тотожність, а тому є особливою. б) Точка (x_2, y_2) не обертає рівняння кривої в тотожність, а тому не є особливою (не належить до кривої).

Користуємося практичним способом. Члени нижчого виміру є $-2ax^2$ прирівнюємо їх до нуля й маємо: $2ax^2=0$; $x^2=0$; $x=0$ і $x=0$. Отже маємо подвійну точку з двома злитими дотичними, що є віссю y-ів. Ми в початку дослідження (рис 105) переконалися, що гілкі кривої з обох боків точки 0 (для додатніх і відємних x-ів) лежать в бік додатніх y-ів. Це є точка повороту 1го роду (як доведено раніш) гілкі кривої йдуть з обох боків вісі y-ів (рис. 107)

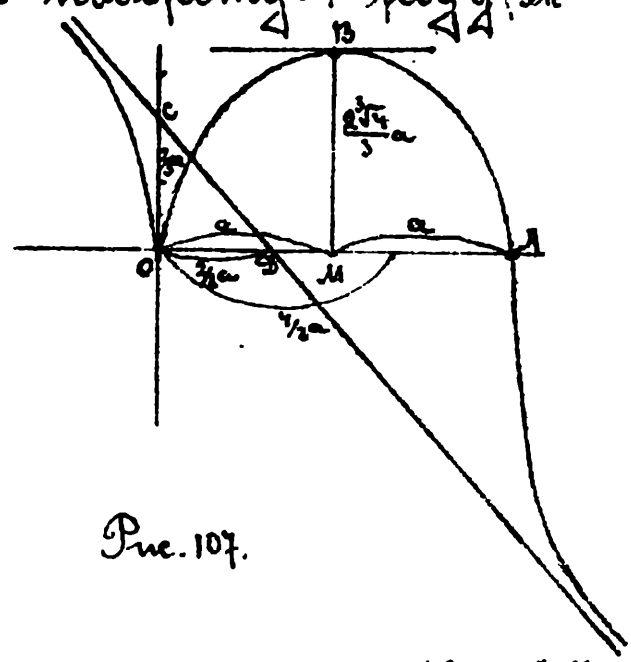


Рис. 107.

Приклад 3. Дослідити криву:

$$y=\frac{a^2x}{(x-a)^2}$$

1) Крива переходить через початок осей (чому?).

2) Крива крім початку не перетинає ні вісь x-ів, ні вісь y-ів (чому?).

3) Крива не симетрична щодо осей (чому?).

4) Досліджуємо зміни значинів: а) коли x наближається до $\pm\infty$, то y до 0, справді: $y = \frac{a^2}{\left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2}$ асимптота вісь x-ів для обох галузів). б). Коли x наближається до a, то y наближається до ∞ ($x = a$, є асимптота для обох галузів, бо x може наближатися до a як зростаючи, як спадаючи)

в) Для x додатніх і y додатнє, а для x відємні і y відємне. Отже крива міститься в 1-ій і 3 чверті координат (рис. 108)

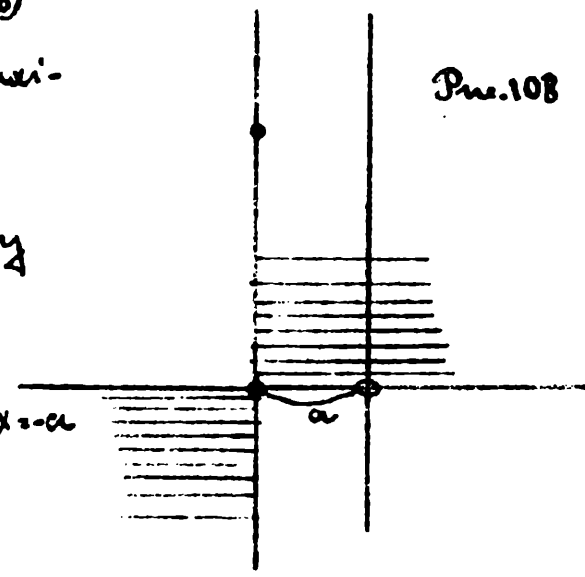


Рис. 108

г) Досліджуємо на максімум і мінімум.

$$y' = -\frac{a^2(x+a)}{(x-a)^3} \quad \text{тому}$$

$y' = 0$, коли $x = -a$

Але $y'' = \frac{2a^2(x+2a)}{(x-a)^4}$ при $x = -a$

дає: $y'' = \frac{1}{8a} > 0$

Маємо в точці $(-a; -\frac{a}{4})$ максімум.

б) Досліджуємо на асимптоти. Маємо рівняння кривої:

$$y(x-a)^2 = a^2x \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

або:

$$yx^2 - 2axy + a^2y = a^2x$$

або:

$$x^2y - (2ax - a^2)y - a^2x = 0$$

а) прирівнюючи коефіцієнт найстаршого ступіня x маємо асимптоту рівнобіжну до осі x-ів, а саме: $y = 0$ (сама вісь x-ів)

б) теж саме прирівнюючи коефіцієнт най-

старшого ступіня y маємо [див. рів(4)]

$$(x-a)^2=0 \quad ; \quad x=a$$

Асимптота рівнобіжна вісі y-ів.

е) Беруци рівняння асимптоти $y=mx+n$, маємо:

$$(mx+n)(x-a)^2=a^2x^2$$

або:

$$mx^3-(2am-n)x^2+\dots$$

Отже: $m=0$; $2am-n=0$; $n=0$ Асимптот не рівнобіжних до осей немає.

7) Особливі точки. Рівняння кривої $y(x-a)^2-a^2x=0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=2y(x-a)-a^2\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=(x-a)^2\end{aligned}\right\}\ \text{тому}\ \begin{aligned}2y(x-a)-a^2&=0\\ (x-a)^2&=0\end{aligned}$$

Рівняння не спільно-розв'язні і особливих точок немає. Отже крива має вигляд (рис. 109)

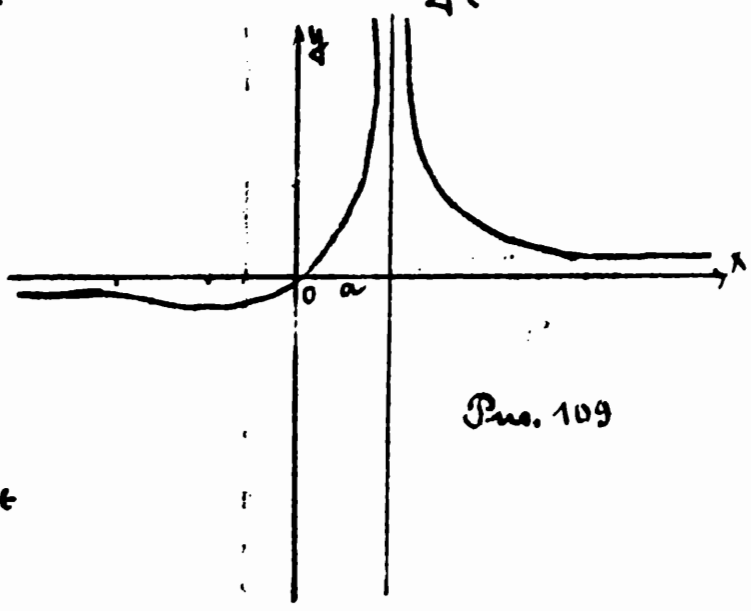


Рис. 109

Приклад 4. Дослідити криву:

$$xy^2-x^2+2x-1=0$$

1) Крива не переходить через початок (чому?).

2) Крива перетинає вісь x-ів в точці $x=1$ і центрічно вісь y-ів на безмежности, бо

$$y=\pm\frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

при $x=0$, $y=\infty$ (рис. 110)

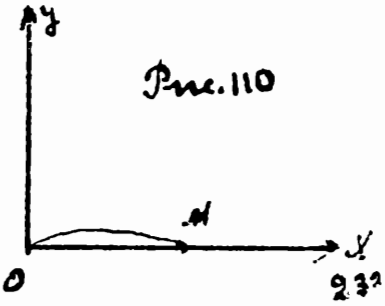


Рис. 110

3) Крива симетрична щодо осі x-ів (бо зміна y на $-y$ не змінює рівняння).

4) $$y = \pm \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

а) Коли x зростає від нуля до 1, то $|y|$ спадає від ∞ до 0; б) коли x зростає від 1 до ∞, то $|y|$ зростає від 0 до ∞; в) кривої немає в лівій частині хреста координат, бо для відємних x є уявне y.

5) Досліджуємо на maximum і minimum.

$$y' = \pm \frac{1}{2}\frac{x+1}{x\sqrt{x}}$$

тому $y'=0$; $x=-1$. Такої точки не існує, бо y для неї є уявне. Тому maximum'а й minimum'а нема.

6) Точок перегину немає, бо $y'' = \mp \frac{1}{4}\frac{x+3}{x^2\sqrt{x}}$; $y''=0$; $x=-3$. Такої точки теж нема.

7) Досліджуємо на асимптоти. а) Рівнобіжних до осі x-ів немає, бо сотинник старшого ступня x є -1; б) рівнобіжна до осі y-ів існує, а саме, сама вісь, бо сотинник при старшому ступні y буде x; отже асимптота $x=0$. в) Асимптот не рівнобіжних осям координат немає, бо маємо:

$x(mx+n)^2 - x^2 + 2x - 1 = 0$, або $m^2x^3 + (2mn-1)x^2 + \ldots$

$m^2=0$; $m=0$; $2mn-1=0$; $n = \frac{1}{2m} = \infty$ (знова маємо асимптоту вісь y-ів).

8) Особливі точки. Маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 2x + 2; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy$$

Тому $y^2 - 2x + 2 = 0$; $2xy = 0$; $y^2 = 2(x-1)$; $y = \pm\sqrt{2(x-1)}$

Отже $\cancel{2}x\sqrt{2(x-1)} = 0$; $2x^2(x-1) = 0$; $\cancel{x=0}$; $x_2 = 1$

Звідци: 1) $y^2+2=0$; y = уявна; 2) $y^2 = 2(1-1) = 0$; $y=0$

Ці значини $(1,0)$ задовольняють рівняння, а тому знайдена точка може бути особливою

Перетворимо осі координат до неї, тоді вори перетворення будуть: $x = \xi + 1$; $y = \eta$ і маємо:

$$(\xi+1)^2\eta^2 - (\xi+1)^2 + 2(\xi+1) - 1 = 0$$

або:

$$(\xi+1)\eta^2 - \xi^2 = 0 \quad \text{або} \quad \xi\eta^2 + \eta^2 - \xi^2 = 0$$

Дорівнюючи до нуля члени найнизчого виміру маємо:

$$\eta^2 - \xi^2 = 0$$

або:

$$\eta + \xi = 0; \quad \eta - \xi = 0$$

Є дотичних. Вузлова точка, де дотичні нахилені до осі x-ів під кутом 45°, 135° (рис. 111)

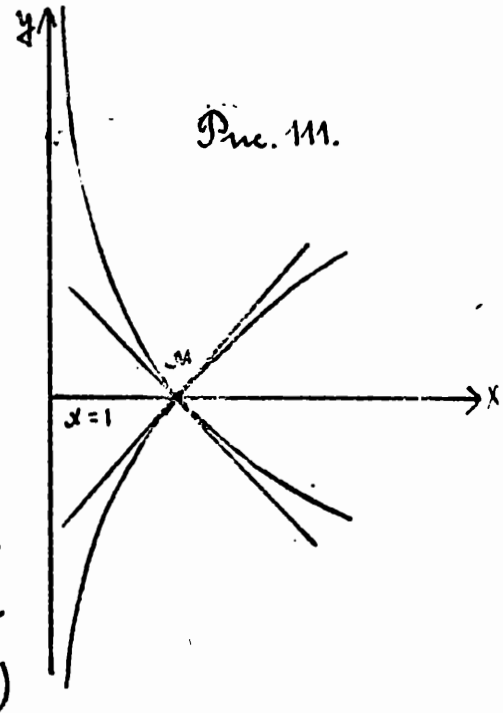


Рис. 111.

Частина II.

Розділ I

Просторові криві.

§44. Визначення кривої в просторі.

Аналітична геометрія дає 4 способи визначення кривої в просторі; а саме:

$$\text{I)} \ldots\ldots\ldots \left.\begin{aligned} f(x,y,z)&=0 \\ \varphi(x,y,z)&=0 \end{aligned}\right\}$$

Крива, як перетин двох поверхонь.

$$\text{II)} \ldots\ldots \left.\begin{aligned} f(y,z)&=0 \\ \varphi(x,z)&=0 \end{aligned}\right\} \text{або} \left.\begin{aligned} x&=\varphi(z) \\ y&=\psi(z) \end{aligned}\right\}$$

Крива, як перетин двох циліндричних поверхонь. В окремому випадку (при вилученні одного з двох змінних) ми маємо криву, як перетин циліндричної поверхні площею

$$f(x,y)=0 \ ; \ z=a \ (const)$$

$$\text{III)} \ldots\ldots x=\varphi(t) \ ; \ y=\psi(t) \ \text{і} \ z=\chi(t)$$

Рівняння (III) виражає криву утворену рухом точки в просторі, а ~~саме~~ визначає змінні її сліди на координатних осях.

Очевидно, що всі три роди рівнянь можна перетворити один з одного. Так, рівняння (II) маємо з рівняння (I) вилученням з них по черзі z і y і вираженням з одержаних виразів

певних змінних. Далі розглядаючи z, як довільну функцію змінного t, ми одержимо з рівнянь (II) рівняння (III). Навпаки, виключаючи з рівнянь (III) змінну t, одержимо рівняння (II).

При нашім дослідженням будемо мати на увазі, що всі криві, які розглядаємо, є аналітичні, себто в межах дослідження мають і їх рівняння розгортуються в ряди Тейльора (хоча би для кількох перших похідних).

§45. Дотична до просторової кривої.

I) Припустім, що рівняння кривої визначено через рівняння:

$$x=\varphi(t);\quad y=\psi(t);\quad z=\chi(t)$$

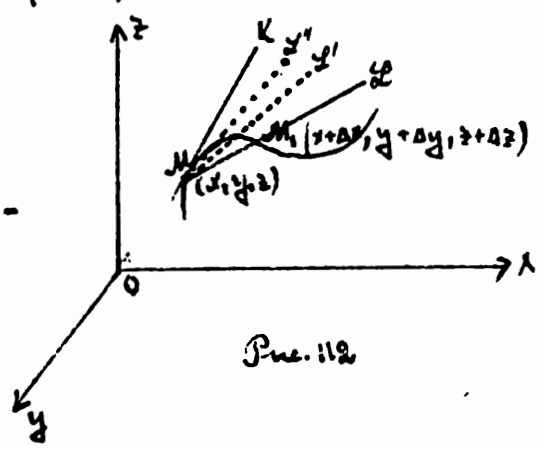


Рис. 112

Візьмім на цій кривій якубудь точку $M(x,y,z)$ і напишім безмежно близьку до неї точку M_1 так, щоб її точки були: $x_1=x+\Delta x=\varphi(t+\Delta t)$; $y_1=y+\Delta y=\psi(t+\Delta t)$ і $z_1=z+\Delta z=\chi(t+\Delta t)$. Поведемо через ці точки січну MK до кривої. Рівняння її, як простої, що переходить через дві згадані точки буде:

$$\frac{X-x}{x_1-x}=\frac{Y-y}{y_1-y}=\frac{Z-z}{z_1-z}$$

або:

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z}$$

де x, y і z залежні з функції t [в окремому випадку вартости x, y і z відповідають певній вартості $t=t_0$], а тому полиноживши всі ці рівности

на Δt, матимемо:

$$\frac{X-x}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{Y-y}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)} = \frac{Z-z}{\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)}.$$

Будемо тепер точку M_1 наближати до M аж до зливання; тоді Δt буде прямувати до нуля, а разом з тим знаменники наших рівностей до: $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ і $\frac{dz}{dt}$, або за другим означенням до x', y' і z'. Але в цьому разі січна обертається в дотичну й тому її рівняння матиме вигляд:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'} \quad \ldots\ldots (59)$$

Або після скорочення на dt:

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz} \quad \ldots\ldots (60)$$

<u>Приклад</u>. В аналітичній геометрії ми розглядали <u>гр</u>убову лінію, що має рівняння:

$$x = a\cos t; \quad y = a\sin t; \quad z = \frac{h}{2\pi}t$$

Напишемо рівняння дотичної до неї в який-будь точці $M(x_0, y_0, z_0)$ де $x_0 = \varphi(t_0)$ і т. д.

$$x' = -a\sin t; \quad y' = a\cos t; \quad z' = \frac{h}{2\pi}$$

Тому:

$$\frac{x - a\cos t_0}{-a\sin t_0} = \frac{y - a\sin t_0}{a\cos t_0} = \frac{z - \frac{h}{2\pi}t_0}{\frac{h}{2\pi}}$$

II) Розглянемо тепер випадок, коли криву задано рівняннями:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0$$

Продиференцуємо кожне з цих рівнянь і мати-

маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = 0$$

В окремому випадку для точки $M(x, y, z)$ маємо:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = 0 \end{aligned}\right\} \cdots (\alpha)$$

З рівнянь маємо:

$$dx = \frac{X - x}{\rho}; \quad dy = \frac{Y - y}{\rho}; \quad dz = \frac{Z - z}{\rho}.$$

де ρ є кратність відношень. Отже вставляючи ці вартости в (α) і скорочуючи на ρ, маємо:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0 \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(Z - z) = 0 \end{aligned}\right\} \cdots (61)$$

Покажемо, що це й буде потрібним рівнянням дотичної. Справді:

1) ці 2 рівняння є кожне зокрема рівнянням площі, (1° ступіня, щодо змінних)

2) системи цих рівнянь визначає просту (як перетин даних площ).

3) x, y і z є частинами точки, що належать до цієї простої, бо вони задовольняють рівняння (61). Отже, ця проста має бути дотичною до кривої.

Означимо тепер для скорочення так:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_1; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = F_3 \text{ й аналогічно } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_1, \text{ і т. д.}$$

Тоді маємо:

$$(X-x)F_1+(Y-y)F_2+(Z-z)F_3=0$$

$$(X-x)\Phi_1+(Y-y)\Phi_2+(Z-z)\Phi_3=0$$

Виключимо по черзі з цих рівнянь y і x і матимемо:

$$(X-x)\left[F_1\Phi_2-F_2\Phi_1\right]+(Z-z)\left[F_1\Phi_2-F_2\Phi_3\right]=0$$

або:

$$Z-z=\frac{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix}}(X-x)$$

Аналогічно:

$$Z-z=\frac{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ \Phi_3 & \Phi_1 \end{vmatrix}}(Y-y)$$

Звідси:

$$\frac{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix}}(X-x)=\frac{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ \Phi_3 & \Phi_1 \end{vmatrix}}(Y-y)=Z-z$$

або поділивши на $\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}$ маємо:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ \Phi_3 & \Phi_1 \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}}\quad\ldots\ldots\ldots(62)$$

Для цих детермінантів часто вживають таке означення, напр.

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}=\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)}$$

Тоді рівняння (62) матимуть вигляд:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(z,x)}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)}}\quad\ldots\ldots\ldots(63)$$

Це є „напрямна" форма рівняння (61).

§46. Напрямні косинуси дотичної до просторової кривої (кривої подвійної кривини)

Хай рівняння цієї дотичної буде:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

З аналітичної геометрії ми знаємо, що коли рівняння простої лінії має вигляд:

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{l},$$

то косинуси напрямних кутів (з осями координат) визначатимуться:

$$\lambda=\cos\alpha=\frac{m}{\pm\sqrt{m^2+n^2+l^2}};\quad \mu=\cos\beta=\frac{n}{\pm\sqrt{m^2+n^2+l^2}}\ \text{і}\ \nu=\cos\gamma=\frac{l}{\pm\sqrt{m^2+n^2+l^2}}$$

Таким чином в даному разі напрямні косинуси цієї дотичної будуть:

$$\lambda=\frac{dx}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};\quad \mu=\frac{dy}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\ \text{і}\ \nu=\frac{dz}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

або ділячи чисельника й знаменника на dt, маємо:

$$\lambda=\frac{x'}{\pm\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}};\quad \mu=\frac{y'}{\pm\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\quad \nu=\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

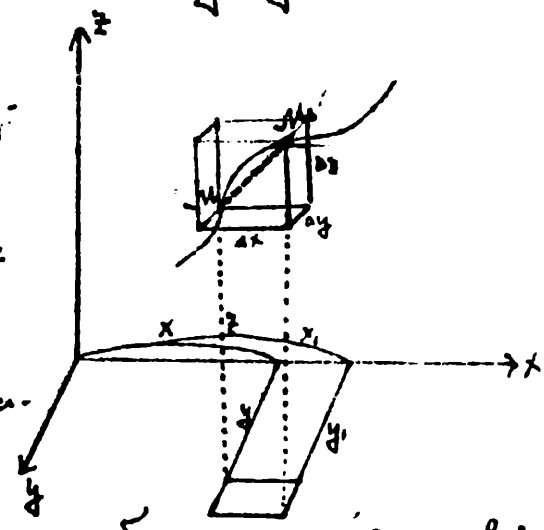
і нарешті для рівнянь (61) і (63)

$$\lambda=\frac{\dfrac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}}{\pm\sqrt{\left[\dfrac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)}\right]^2+\left[\dfrac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}\right]^2+\left[\dfrac{\partial(F,\Phi)}{\partial(z,x)}\right]^2}}\ \text{і т. д.}$$

При цьому умовляємося брати перед $\sqrt{\ }$ знак, коли дотична спрямована у бік зростання дуги кривої.

Розглянемо ще друге визначення напрямних косинусів дотичної. Візьмімо на кривій точку $M(x,y,z)$ де $x=\varphi(t)$ і т. д. і дуже близьку точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, так

що $x_1 = x + \Delta x$; $y_1 = y + \Delta y$; $z_1 = z + \Delta z$. Тоді довжина тятиви MM_1, як відомо з аналітичної геометрії буде:



$$\overline{MM_1}^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2. \text{ або:}$$

$$\overline{MM_1}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Будемо безмежно наближати точку M_1 до точки M і тоді тятива буде безкрає наближатися до відповідного елементу дуги ds і в межі матимемо:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

а звідси

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad \ldots\ldots (64)$$

Це є вислів диференціяла дуги просторової кривої. Поділивши обидві частини на dt, ми матимемо другий вислів цього диференціялу:

$$ds = \pm dt\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad \ldots\ldots (65)$$

і наперед визначаючи вартости x', y' і z' [з порівняння рівнянь (60) і (63)] для випадку, коли рівняння кривої визначене рівняннями $F(x,y,z) = 0$ і $\Phi(x,y,z) = 0$ маємо:

$$ds = \pm\sqrt{\left[\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(z,x)}\right]^2} \quad \ldots\ldots (66)$$

Тут „+" відповідає випадку, коли дуга зростає разом із зростанням відповідного змінного, від якого вона залежить. Таким чином, напрямні змінних кривої можна буде дати вигляд:

$$\lambda = \pm\frac{dx}{ds}; \quad \mu = \pm\frac{dy}{ds}; \quad \nu = \pm\frac{dz}{ds} \quad \ldots\ldots (67)$$

§47. Прямові (нормальні) площі.

В точці M, дотику якої дотичної ми можемо (як відомо з геометрії) поставити до цієї дотичної безліч прямів, всі вони очевидно є прямовими (нормалями) до кривої в цій точці. Але також нам відомо з геометрії, що всі прями лежатимуть в площі, поведеній через дану точку M прямово до даної дотичної. Цю площу називатимемо прямовою, або нормальною площею до кривої в точці M.

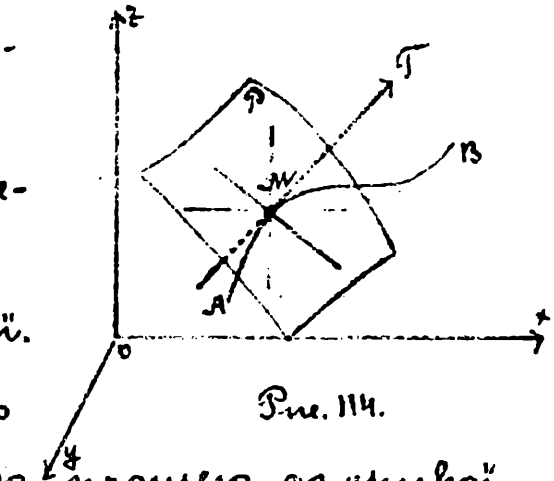


Рис. 114.

З аналітичної геометрії знаємо, що коли нам дано криву: $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{r}$, то рівняння якої-будь площі, поведеної через дану точку $M(x_0, y_0, z_0)$ прямово до цієї простої матиме вигляд:

$$m(X-x_0)+n(Y-y_0)+r(Z-z_0)=0$$

а тому в нашому випадку, коли рівняння дотичної буде: $\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$, то рівняння прямової площі, що переходить через точку дотику $M(x, y, z)$ прямово до цієї дотичної матиме вигляд:

$$(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0 \quad \ldots\ldots (68)$$

або [див. рівняння дотичної (59)]:

$$x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (69)$$

або [див. рівняння дотичної (62) або (63)]:

$$\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(y,z)}(X-x)+\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(z,x)}(Y-y)+\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(x,y)}(Z-z)=0 \quad \ldots\ldots (70)$$

Розгортуючи символи $\frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(y, z)}$ і т. д., маємо:

$$(X-x)\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix} + (Y-y)\begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ \Phi_3 & \Phi_1 \end{vmatrix} + (Z-z)\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots (71)$$

де F і Φ мають ті самі значіння що й раніш: $F_1 = \frac{\partial F}{\partial x}$; $F_2 = \frac{\partial F}{\partial y}$; $F_3 = \frac{\partial F}{\partial z}$; $\Phi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ і т. д. Звідси:

$$(X-x)\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix} - (Y-y)\begin{vmatrix} F_1 & F_3 \\ \Phi_1 & \Phi_3 \end{vmatrix} + (Z-z)\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix} = 0$$

можна взяти за розгорнений через перший рядок, визначник:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots (72)$$

Це друга форма рівняння прямової площі до кривої визначеної рівняннями: $F(x, y, z) = 0$ і $\Phi(x, y, z) = 0$

§48. Площа кривини (дотична площа).

Коли в точці $M(x, y, z)$ кривої ми маємо дотичну, то очевидно, що через неї можна повести безліч площ, що будуть проходити й через точку дотику M. Ці площі загалом можна звати дотичними площами до кривої L в точці M.

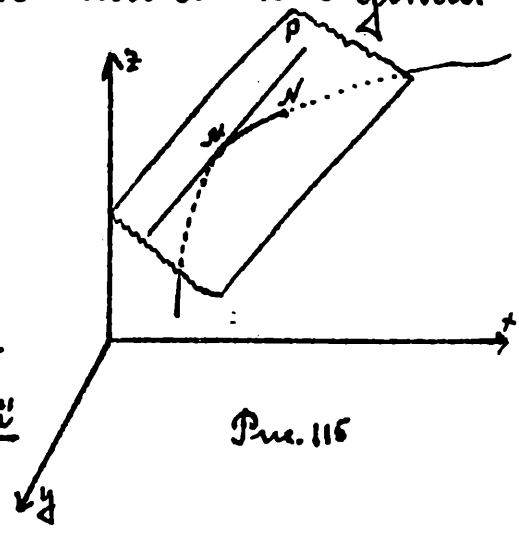


Рис. 116

Жана дотична площа неодмінно переходить через дві безмежно-близькі точки (злиті), що визначають напрям дотичної. Коли крива просторова (подвійної кривини) то дотична до неї площ де-які, або зовсім не стикаються з кривою в иншій точці, крім злитої M,

або зустрічають її ще в одній, або кількох точках. З цих площ вибираємо ту, що крім M переходить ще через яку одну точку кривої N, безмежно-близьку до M (рис. 115). Очевидно, що така площа буде одна (визначена трьома безмежно-близькими точками, взятими з двоїстого M і нового N. Коли в цьому місці крива буде плоскою, то очевидно, що задана площа зійдеться з площею рисунка (площею де лежить крива), кожне удалення кривої від площі рисунку визначає й обертання вибраної нами, площі на певний кут навколо даної дотичної. Це дає нам судити про кривину кривої в даній точці M. Тому то задана нами площа й носить назву площі кривини кривої. З другого боку, розуміння дотичности, розглянене нами раніш для плоских кривих дає підставу й в даному разі застосувати ті самі ознаки (а саме проходження площі через 3 безмежно-близькі точки кривої) й до нашої площі, а тому назвати її також і дотичною площею. Виведемо рівняння цієї площі.

Хай наша крива визначається рівняннями:

$$x = f(t)\ ;\quad y = \varphi(t)\ ;\quad z = \psi(t) \ldots (1)$$

Візьмім на ній точку $M(x, y, z)$ і поведемо через останню дотичну до кривої. Її рівняння буде:

$$\frac{X - x}{f'(t)} = \frac{Y - y}{\varphi'(t)} = \frac{Z - z}{\psi'(t)} \ldots\ldots (2)$$

[<u>Примітка.</u> Загалом точку $M(x, y, z)$ ми вважаємо довільно взятою на кривій L, а через те такими

x, y, z є змінними функціями t. В нашому окремому випадку для якоїсь певної точки M_0 її значини стануть сталими величинами x_0, y_0, z_0, що відповідають певній вартості $t=t_0$. В цьому разі кутові змінники рівняння дотичної одержують також сталі вартости: $f'(t)_{t=t_0} = f'(t_0)$; $\varphi(t)_{t=t_0} = \varphi'(t_0)$; $\psi(t)_{t=t_0} = \psi'(t_0)$ що є вислідами вставки в перші похідні зазначених функцій вартости $t=t_0$].

Щоб написати рівняння самої дотичної площі, ми звернемо увагу на те, що вона переходить через дотичну до кривої, поведену через точку M, а тому маємо виконувати умови зміщення цієї площі з простою (2). Як відомо з аналітичної геометрії ці умови дають такі рівности:

1) Умова того, що точка M належить до площі:

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0 \ldots (\alpha)$$

[де A, B і C поки-що нам невідомі сталими рівняння площі]

2) Умова рівнобіжности цієї не площі й простої (2)

$$A f'(t) + B\varphi'(t) + C\psi'(t) = 0 \ldots\ldots (\beta)$$

Згадані умови (α) і (β) показують, що дана площа переходить через дотичну до кривої в точці M.

Візьмім тепер точку N дуже близьку до точки M, так щоб значини її відповідали безмежно малому приросту τ - змінника t, себто точка N мала б значини:

$$x_1 = f(t+\tau); \quad y_1 = \varphi(t+\tau); \quad z_1 = \psi(t+\tau)$$

Очевидно, що коли б наша площа переходила й

через цю точку N, то значить останньої місіи б задовольняти її рівняння [себто рівняння (α)]. Отже:

$$A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)=0$$

або:

$$A[f(t+\tau)-f(t)]+B[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]+C[\psi(t+\tau)-\psi(t)]=0$$

Але формула Тейльора:

$$\Phi(t+\tau)-\Phi(t)=\tau\Phi'(t)+\frac{\tau^2}{2!}\Phi''(t+\theta\tau) \quad \text{де } 0<\theta<1$$

дає нам право попередню рівність написати так:

$$A\left[\tau f'(t)+\frac{\tau^2}{2!}f''(t+\theta\tau)\right]+B\left[\tau\varphi'(t)+\frac{\tau^2}{2!}\varphi''(t+\theta\tau)\right]+C\left[\tau\psi'(t)+\frac{\tau^2}{2!}\psi''(t+\theta\tau)\right]=0$$

або:

$$[Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)]\tau+[Af''(t+\theta\tau)+B\varphi''(t+\theta\tau)+C\psi''(t+\theta\tau)]\frac{\tau^2}{2!}=0$$

Коли взяти на увагу рівність (β), то ми маємо (після скорочення на $\frac{\tau^2}{2!}$) таку рівність:

$$Af''(t+\theta\tau)+B\varphi''(t+\theta\tau)+C\psi''(t+\theta\tau)=0$$

Це є третьою умовою, що звязує нашу площу, а саме умовою переходження її через точку N. Будемо тепер наближати точку N до M безмежно-близько. Тоді τ буде простувати до нуля й наша третя умова обернеться в:

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0 \quad \ldots (\gamma)$$

Ці три умови дають можливість визначити сотношення A, B і C площі. Справді, розвязуючи всі ці три рівняння (α), (β) і (γ), яко систему, маємо:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0 \quad [\text{або: } Ax'+By'+Cz'=0]$$

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0 \quad [\text{або: } Ax''+By''+Cz''=0]$$

Ці рівняння є одновимірні, що-до змінних A, B і C, а тому вони спільнорозвязані лише тоді, коли виконане вимагання змінних є рівний з нулем, себто:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f''(t) & \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots (73)$$

або:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots (74)$$

Це й буде рівняння потрібної площі кривини.

Доведемо тепер противне твердження, що кожна площа, яка переходить через три безмежно-близькі точки кривої є відповідною площею її кривини, себто переходить і через дотичну, поведені через дві з цих даних безмежно близьких точок.

Хай ми маємо на кривій три безмежно близьких точки:

$M(x, y, z)$ де $x = f(t_0)$; $y = \varphi(t_0)$ і $z = \psi(t_0)$

$N(x_1, y_1, z_1)$ де $x_1 = f(t_1)$ і т. д.

$P(x_2, y_2, z_2)$ де $x_2 = f(t_2)$ і т. д.

Ми знаємо, що загалом рівняння якої-будь площі буде:

$$F(t) = AX + BY + CZ = 0$$

[де $X = f(t)$; $Y = \varphi(t)$ і $Z = \psi(t)$] Коли ж ця площа переходитиме через точки M, N і P, то значення їх задовольнятимуть і рівняння її. А тому матиме-

по тотожности:

$$F(t_0) = Ax_0 + By + Cz + D = 0$$

$$F(t_1) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$F(t_2) = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

Отже для визначення площі маємо такі рівности:

$$F(t) = 0\ ;\ F(t_0) = 0\ ;\ F(t_1) = 0\ \text{ і } F(t_2) = 0 \ \ldots (A)$$

Розглянемо по черзі: 1) $F(t_0) = 0$ і $F(t_1) = 0$ Очевидно, що на підставі теореми Роля завжди існуватиме така вартість τ $(t_0 \leq \tau \leq t_1)$ для якої $F'(\tau) = 0$. Також розглядаючи: 2) $F(t_1)$ і $F(t_2)$ за тією ж теоремою, маємо:

$$F'(\vartheta) = 0 \quad \text{де } t_1 \leq \vartheta \leq t_2$$

і нарешті розглядаючи:

$$F'(\tau) = 0 \text{ і } F'(\vartheta) = 0$$

завжди знайдемо вартість: $\tau \leq \theta \leq \vartheta$, що:

$$F''(\theta) = 0$$

Таким чином систему (A) можна замінити через таку:

$$F(t) = 0\ ;\ F(t_0) = 0\ ;\ F(\tau) = 0\ ;\ F''(\theta) = 0$$

Коли ми будемо наближати точку N і P безмежно близько до M, то вартости t_1 і t_2 будуть простувати до вартости t_0, а тим скорш до цієї величини t_0 простуватимуть і середні між ними вартости τ і θ. Тому в останньому висліді одержимо:

$$F(t) = 0\ ;\ F(t_0) = 0\ ;\ F'(t_0) = 0 \text{ і } F''(t_0) = 0 \ \ldots (B)$$

Розглянуті ці функції і первісні вартости

ми одержимо:

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0$$

Ця система дає можливість визначити коефіцієнти A, B, C і D. Попередуючи відніманням 2 рівняння з першого й переходимо до системи:

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$$

$$Ax' + By' + Cz' = 0$$

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0$$

одновимірних рівнянь що дають:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

Ми одержали рівняння площі кривини (74).

Розгортуючи визначника через первні першого рядка, ми одержимо <u>другий вигляд рівняння площі кривини, а саме:</u>

$$(X-x)\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} + (Y-y)\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} + (Z-z)\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

або:

$$(X-x)(y'z''-y''z') + (Y-y)(x''z'-x'z'') + (Z-z)(x'y''-x''y') = 0 \ldots (75)$$

А звідси скорочуючи все рівняння на dt^2, матимемо:

$$(X-x)(dy\,d^2z - d^2y\,dz) + (Y-y)(d^2x\,dz - dx\,d^2z) + (Z-z)(dx\,d^2y - d^2x\,dy) = 0 \ldots (76)$$

Це ж рівняння можемо безпосередньо з визначника:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots (77)$$

що одержимо з виразника (74) після скорочення його на dt^3 (виносячи за знак виразника з 2-го рядка dt а з третього dt^2)

§49. Властивости площі кривих.

I) Площа кривих є лежкове положення площі, що переходить через дану дотичну рівнобіжно до дотичної, поведеної до кривої через безмежно близьку точку.

Справді, поведемо дотичну через точку $N(x_1, y_1, z_1)$ (див. вивод рівняння площі кривих). Рівняння цієї дотичної буде:

$$\frac{X-x_1}{x_1'} = \frac{Y-y_1}{y_1'} = \frac{Z-z_1}{z_1'}$$

де $x_1 = x + \Delta x = f(t+\tau)$; $y_1 = \varphi(t+\tau)$ і $z_1 = \psi(t+\tau)$. Звідси умова рівнобіжности нашої площі:

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$$

і даної дотичної буде:

$$Ax_1' + By_1' + Cz_1' = 0$$

Але за Тейльором:

$$x_1 = f(t+\tau) = f(t) + \tau f'(t+\theta\tau) \quad \text{де } 0<\theta<1$$

і аналогічно:

$$y_1 = \varphi(t) + \tau\varphi'(t+\theta\tau)$$
$$z_1 = \psi(t) + \tau\psi'(t+\theta\tau)$$

Тому умова рівнобіжности матиме вигляд:

$$A[f(t)+\tau f'(t+\theta\tau)]' + B[\varphi(t)+\tau\varphi'(t+\theta\tau)]' + C[\psi(t)+\tau\psi'(t+\theta\tau)]' = 0,$$

або:

$$Af'(t) + B\varphi'(t) + C\psi'(t) + \tau[Af''(t+\theta\tau) + B\varphi''(t+\theta\tau) + C\psi''(t+\theta\tau)] = 0$$

Згідно з умовою (другою) проходження площі через дотичну точки M маємо $Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0$, а тому попередня рівність обертається в:

$$Af''(t+\theta\tau)+B\varphi''(t+\theta\tau)+C\psi''(t+\theta\tau)=0$$

В лімітовому положенню, коли точки N наближаться безмежно до точки M, вартість τ простує до нуля, а через те умова рівнобіжности даної площі кривим й безмежно-близької дотичної має остаточно такий вигляд:

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0$$

або:

$$Ax''+By''+Cz''=0$$

Це, як бачимо, є третя умова існування площі кривим, а тому можна твердити, що площа кривим є рівнобіжною до безмежно близької дотичної.

II. <u>Коли через точку дотичну повести скінчено багато дотичних площ, то площа кривим є найблизчою до безмежно близької до дотичну точки кривої</u>, себто це віддалення буде безмежно малою величиною порівняльно найвищої ваги.

Хай безмежно близька до дотичну $M(x,y,z)$ буде точка $N(x_1,y_1,z_1)$ де $x_1=f(t+\tau)$ і т.д. Поведемо через точку M яку будь площу; тоді її рівняння мусить мати вигляд:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

Віддалення не від неї точки N (як відомо з аналітичної геометрії) буде:

$$d = \frac{A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Сотримки A, B і C є обмежені величини, що разом не обертаються в нуль, а тому чисел d залежить виключно від чисел:

$$K = A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)$$

Вставляючи в цього числителя вартість x і x_1, y і y_1, z і z_1 матимемо:

$$K = A[f(t+\tau)-f(t)]+B[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]+C[\psi(t+\tau)-\psi(t)] = 0$$

А це за взором Тейльора обертається в:

$$K = [Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)]\tau+[Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)]\frac{\tau^2}{2!}+$$
$$+[Af'''(t)+B\varphi'''(t)+C\psi'''(t)]\frac{\tau^3}{3!}+\dots$$

Для косеної площі, що переходить через дотичну маємо:

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t) = 0$$

а тому:

$$K = [Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)]\frac{\tau^2}{2!}+\dots$$

є другої малості, щодо τ. Але рівність:

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t) = 0$$

виконується лише для площі кривини й тоді

$$K = [Af'''(t)+B\varphi'''(t)+C\psi'''(t)]\frac{\tau^3}{3!}+\dots$$

є не менш 3ої малості що-до τ.

Таким чином віддалення площі кривини від безмежно близької точки N є найменше.

§50. Головна прямова (нормальна)

Ми вже говорили, що в точці M до кривої можна повести безліч прямових. З них одну, а

саме ту, що є рубом перехрестя площ прямової і кривини беруть за головну прямову (нормальну) (рис. 116)

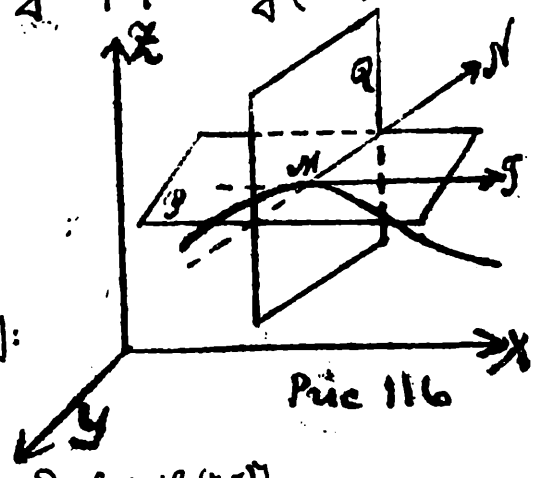


Рис 116

Таким чином за рівняння головної прямової можемо вважати систему 3:

1) [рівняння прямової площі (69)]:

$$x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0$$

2) [рівняння площі кривини - Дик. рів (75)]:

$$(y'z''-y''z')(X-x)+(x''z'-x'z'')(Y-y)+$$
$$+(x'y''-x''y')(Z-z)=0$$

Перейдемо до напрямної форми рівняння головної прямової й для цього вилучимо з наших рівнянь по черзі z і y, а саме:

$$(X-x)(Az'-Cx')+(Y-y)(Bz'-Cy')=0$$
$$(X-x)(Bx'-Ay')+(Z-z)(Bz'-Cy')=0$$

де $A=y'z''-y''z'$; $B=x''z'-x'z''$ і $C=x'y''-x''y'$

Звідси:

$$X-x=\frac{Cy'-Bz'}{Az'-Cx'}(Y-y)=\frac{Cy'-Bz'}{Bx'-Ay'}(Z-z)$$

або:

$$\frac{X-x}{Cy'-Bz'}=\frac{Y-y}{Az'-Cx'}=\frac{Z-z}{Bx'-Ay'}$$

Обчислимо тепер кутові зміщення, що є в знаменниках одержаного рівняння:

$$Cy'-Bz'=(x'y''-x''y')y'-(x''z'-x'z'')z'=x'(y'y''+z'z'')-x''(y'^2+z'^2)$$

Ми знаємо, що:

$$ds=dt\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},\ \text{або}\ \left(\frac{ds}{dt}\right)^2=s'^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

А звідси:

$$y'^2 + z'^2 = s'^2 - x'^2$$

Взявши від обох частин похідну, ми одержимо

$$2y'y'' + 2z'z'' = 2s's'' - 2x'x''$$

або:

$$y'y'' + z'z'' = s's'' - x'x''$$

Нарешті вставляючи знайдені вартости у вираз: $Cy' - Bz'$, одержимо:

$$Cy' - Bz' = x'(s's'' - x'x'') - x''(s'^2 - x'^2) = -s'(s'x'' - s''x')$$

Аналогічно:

$$Az' - Cx' = -s'(s'y'' - s''y')$$

$$\text{і} \quad Bx' - Ay' = -s'(s'z'' - s''z')$$

Тому <u>рівняння головної прямової</u> (після скорочення всіх його членів на $-s$) буде:

$$\frac{X - x}{s'x'' - s''x'} = \frac{Y - y}{s'y'' - s''y'} = \frac{Z - z}{s'z'' - s''z'} \quad \ldots\ldots (78)$$

Означивши напрямні знімники прямової через λ_n, μ_n і ν_n їм за відомим взором аналітичної геометрії: $\lambda = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ і т. д. складемо:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{s'x'' - s''x'}{\sqrt{(s'x'' - s''x')^2 + (s'y'' - s''y')^2 + (s'z'' - s''z')^2}}; \quad \mu_n = \frac{s'y'' - s''y'}{\sqrt{\Sigma(s'x'' - s''y')^2}} \text{ і} \\ \nu_n &= \frac{s'z'' - s''z'}{\sqrt{\Sigma(s'x'' - s''x')^2}} \end{aligned}\right\} \cdot (79)$$

Припустім тепер, що за знімники змінної t беремо s, тоді $t = s$; $s' = 1$; $s'' = 0$; $x' = \frac{dx}{ds}$; $x'' = \frac{d^2x}{ds^2}$; $y' = \frac{dy}{ds}$ і т. д. і таким чином:

$$\left.\begin{aligned} \frac{X - x}{\frac{d^2x}{ds^2}} &= \frac{Y - y}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{Z - z}{\frac{d^2z}{ds^2}}, \text{ або:} \\ \frac{X - x}{d^2x} &= \frac{Y - y}{d^2y} = \frac{Z - z}{d^2z} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (80)$$

де d^2x, d^2y і т. д. є другі похідні через s, як незалежнику. Через тему саме заміну ми одержимо й взори напрямних косинусів головної прямової або орудезії від дуги s, або незалежника, а саме:

$$\lambda_n = \frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}; \quad \mu_n = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{d^2y}{ds}\right)^2}}; \quad \nu_n = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{d^2y}{ds}\right)^2}} \cdots (80)$$

Рівняння головної прямової (78) можна ще перетворити так:

$$\frac{X-x}{\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dz}{dt}}$$

Скорочуючи всіх знаменників на dt^3 і ділячи їх на ds^2, матимемо:

$$\frac{X-x}{\frac{d^2x\,ds - d^2s\,dx}{ds^2}} = \frac{Y-y}{\frac{d^2y\cdot ds - d^2s\,dy}{ds^2}} = \frac{Z-z}{\frac{d^2z\,ds - d^2s\,dz}{ds^2}}$$

або:

$$\frac{X-x}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)} = \frac{Y-y}{d\left(\frac{dy}{ds}\right)} = \frac{Z-z}{d\left(\frac{dz}{ds}\right)} \cdots (81)$$

Але беручи на увагу, що напрямні косинуси дотичної:

$$\lambda = \frac{dx}{ds}; \quad \mu = \frac{dy}{ds}; \quad \nu = \frac{dz}{ds}$$

одержимо:

$$\frac{X-x}{d\lambda} = \frac{Y-y}{d\mu} = \frac{Z-z}{d\nu} \cdots\cdots (82)$$

<u>Напрямні косинуси головної прямової є рівні з диференціялами напрямних косинусів дотичної.</u>

Поведемо тепер через дотичну нову площу, прямову до головної нормалі. Ця площа має окрему назву: <u>випростальної</u>.

Очевидно, що рівняння навколишньої площі, як тої площі, що переходить через точку $M(x, y, z)$, прямово до простої (78) буде:

$$(X-x)(s'x''-s''x')+(Y-y)(s'y''-s''y')+(Z-z)(s'z''-s''z')=0 \quad \ldots \quad (83)$$

або:

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)(X-x)+d\left(\frac{dy}{ds}\right)(Y-y)+d\left(\frac{dz}{ds}\right)(Z-z)=0 \quad \ldots \quad (83a)$$

А коли за змінника береться s, то останнього рівняння випростальної площі в такім вигляді:

$$\frac{d^2x}{ds^2}(X-x)+\frac{d^2y}{ds^2}(Y-y)+\frac{d^2z}{ds^2}(Z-z)=0 \quad \ldots \quad (83b)$$

<u>Умовилося за додатний напрям головної прямової вважести напрям від точки кривої у той бік випростальної площі, з якого лежить сама крива</u>

§51 <u>Співпрямова (бінормаля)</u>

Умовилося ту прямову, що в рубом перехрестя прямової площі з випростальною звати співпрямовою (або бінормалею). Очевидно, що співпрямова є прямою до площі кривини, а тому рівняння її можна легко скласти на основі наступних міркувань, а саме: З аналітичної геометрії відомо, що рівняння простої, що переходить через точку $K(x_1, y_1, z_1)$ і прямової до даної площі $Ax+By+Cz+D=0$ буде: $\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$. Тому <u>рівняння співпрямової</u>, що переходить через точку $M(x, y, z)$ прямово до площі кривини (75) або (76) матиме вигляд:

$$\frac{X-x}{y'z''-y''z'}=\frac{Y-y}{z'x''-z''x'}=\frac{Z-z}{x'y''-x''y'} \quad \ldots \quad (84)$$

або:

$$\frac{X-x}{dy\,d^2z-d^2y\,dz}=\frac{Y-y}{dz\,d^2x-d^2z\,dx}=\frac{Z-z}{dx\,d^2y-d^2x\,dy}\quad\ldots(35)$$

Означимо вартости напрямних змінників співпрямової через λ_b, μ_b, ν_b. Очевидно, що вартости цих змінників будуть:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_b&=\frac{y'z''-y''z'}{\sqrt{\Sigma(y'z''-y''z')^2}}\qquad \mu_b=\frac{z'x''-z''x'}{\sqrt{\Sigma(y'z''-y''z')^2}}\\ \text{і}\ \nu_b&=\frac{x'y''-x''y'}{\sqrt{\Sigma(y'z''-y''z')^2}}\end{aligned}\right\}\ldots(36)$$

Таким чином через точку M кривої переходить три взаємно прямових простих: дотична T, прямова N і співпрямова B і три взаємно прямових площі: доторкальна (кривини) NMT, прямова NMB і випростальна TMB. Дуже часто ці прості й площі

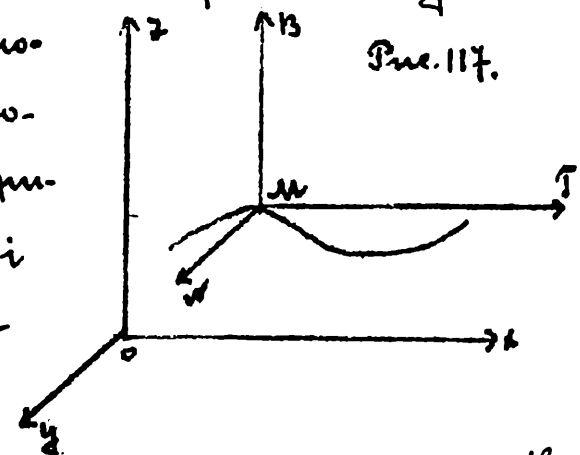


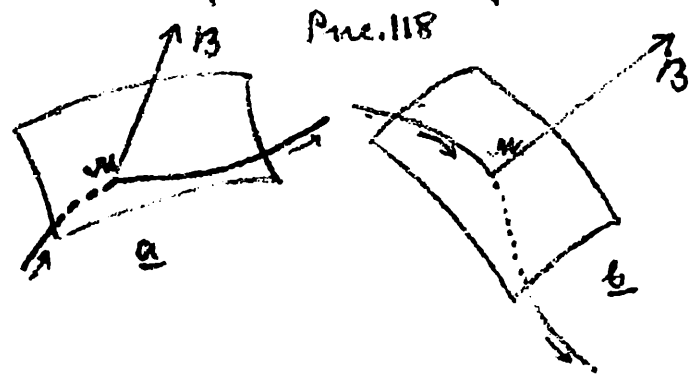
Рис. 117.

беруть за координатні, причому напрям співпрямової B вибирається так, щоб при заданих, раніш уведених умовах, напрямах T і N напрям B відповідав третій осі координат.

Звичайно, за додатний напрям співпрямової вважається той, коли перед корінем в знаменнику виразів λ_b, μ_b, ν_b стоїть знак +.

Установивши додатний напрям співпрямової, як тим самим установлюємо який бік площі кривини будемо звати додатним, а який від-

ними. А саме, коли ми рухаємося вздовж співпрямової в додатньому напрямі її, то ми переходимо з від'ємного боку площі кривини на додатний і навпаки (рис. 118 а, б).



§ 52. Кривина просторової кривої.

Нам відомо, що кривина елемента дуги кривої зветься межа відношення кута суміжности до даного елементу дуги. Ця дуга визначається колом кривини, що переходить через відповідні три безмежно близькі точки разом з даною. Але ці три безмежно близькі точки також визначають і площу кривини. Тому кожне коло кривини для якої-будь точки кривої завжди лежить на відповідній площі кривини. Коли крива (яку ми раніш досліджували) є плоскою, то площі кривини для всіх її точок будуть зливатися в одну площу, себто у площу самої кривої. Тоді для дослідження кривини кривої досить знайти відповідні лучі кривини для певних точок кривої. Инакше, коли крива просторова. Тоді площі кривини не зливаються в одну, а для кожного нового елемента дуги (для кожної нової тройки безмежно близьких точок) ми будемо мати окрему площу кривини, що лежить в просторі під

якийсь кутом до сусідньої собі площі кривини. Разом з цим і кола кривини не лежить у одній площі. Степень відхилення площ кривини (и разом і кол кривини) ми будемо звати <u>кручением</u> кривої. Очевидно, що для дослідження просторової кривої мало знати лише кривину кривої, а треба дослідити й степень кручення її при даній точці. Зупинимося попереду на більш детальному вивченню кривини й для цього візьмімо на даній кривій якусь точку $M(x, y, z)$ і досить близько до неї другу точку N, що будемо її певнішо наближувати до M. Дотичні в цих точках, и будуть вони перехрещені, ми лишобіжні створять якийсь кут φ (кут суміжности). Отже відношення кута φ до самої дуги MN будемо звати пересічною кривиною даної кривої. Коли ми візьмемо межу цього відношення, при умові що N безмежно наближається до M (себто дуга MN простує до нуля, то ця межа зветься справжньою кривиною або просто <u>кривиною</u> даної кривої. Зворотно величину кривини $k = \frac{1}{\rho}$ будемо звати лучем кривини.

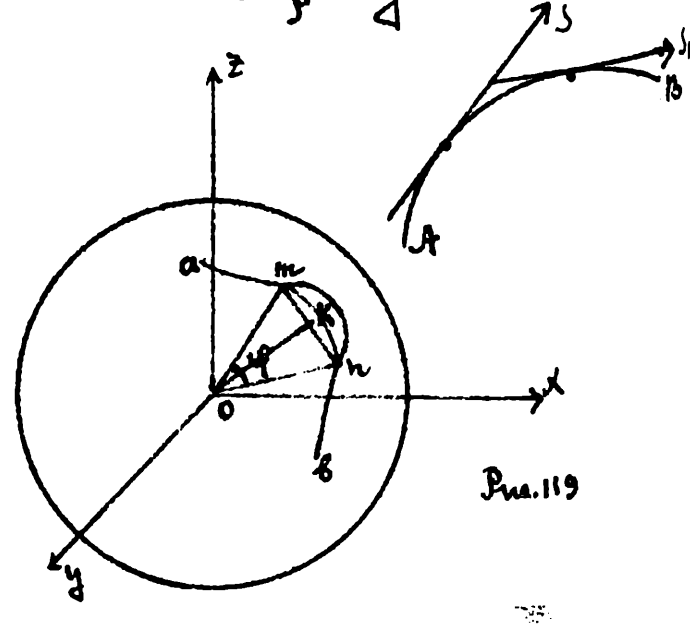


Рис. 119

Щоб визначити кут φ між дотичними суміжности, ми поведемо з початку осей лучі вектори рівнобіжні до даних дотичних. Хай вони будуть

Om і On. А далі лучи рівним лінійній одиниці окресленого навколо початку кола. Коли б ми з початку координат повели б лучі рівнобіжні до кожної дотичної в усіх точках кривої по черзі, то кінці цих лучів, утворили б на поверхні кулі криву ab (рис. 119) відповідно до даної кривої AB. Ця крива лежить вся своїми точками на поверхні даної кулі й має назву чистої, або сферичної індикатриси дотичних до даної кривої. Для кожної дуги AB кривої завжди відповідатиме дуга ab індикатриси і коли якась дуга з кривої матиме приросщення Δs, то відповідна їй дуга індикатриси б матиме приросщення $\Delta\sigma$.

Розглянемо тепер тятиву mn, що відповідає дузі її індикатриси mn. Ми маємо рівнораменний тр-к Omn; спустивши в ньому висоту Ok і розглянувши один з утворених прямокутних трикутників, одержимо:

$$\overline{mn} = 2\,Ok \sin\frac{\varphi}{2}$$

Але $Ok = r$ кулі $= 1$, а тому:

$$\overline{mn} = 2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

З другого боку означимо напрямні косинуси дотичної MS, а тому й вектора Om через λ, μ і ν. Очевидно, що точку N взято так близько до M, що напрямні косинуси дотичної в цій точці, а разом і напрямні косинуси вектора On можна вважати рівними: $\lambda + \Delta\lambda$; $\mu + \Delta\mu$ і $\nu = \nu + \Delta\nu$.

Хай початки точок m будуть x, y, z, а тоді на n – x_1, y_1, z_1. Тоді $x = Om.\lambda = \lambda$ (бо $Om = 1$); аналогічно

ино $y = \mu$; $z = \nu$; $x_1 = \lambda + \Delta\lambda$; $y_1 = \mu + \Delta\mu$ і $z_1 = \nu + \Delta\nu$

Отже:

$$mn = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = \sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta\mu^2 + \Delta\nu^2}$$

Тяжи тепер:

$$\sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta\mu^2 + \Delta\nu^2} = 2\sin\varphi/2$$

Але нам відомо, що:

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{2\sin\varphi/2}{\varphi} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin\varphi/2}{\varphi/2} = 1, \text{ або } \lim_{\varphi \to 0} \varphi = \lim_{\varphi \to 0} 2\sin\varphi/2 = \sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta\mu^2 + \Delta\nu^2}$$

А тому кривина K буде рівна:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta\mu^2 + \Delta\nu^2}}{\Delta s}$$

Δs є елемент дуги MN. Звідци ділячи чисельника й знаменника на Δt, маємо:

$$K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\mu}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{\Delta t}\right)^2}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} = \frac{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}}{s'} \qquad (a)$$

або:

$$K = \sqrt{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2} \ldots (b)$$

А звідци луч кривини буде:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2}} \ldots\ldots (87)$$

Луч кривини ρ будемо вважати завжди додатним.

Ми маємо, що $\lambda = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{x'}{s'}$; $\mu = \frac{y'}{s'}$; $\nu = \frac{z'}{s'}$, а тому:

$$\lambda' = \frac{x''s' - x's''}{s'^2} \quad \mu' = \frac{y''s' - y's''}{s'^2} \quad \nu = \frac{z''s' - z's''}{s'^2}$$

Вставляючи ці вартости у взір (a) маємо:

$$K = \frac{\sqrt{(x''s' - x's'')^2 + (y''s' - y's'')^2 + (z''s' - z's'')^2}}{s'^3} \ldots (88)$$

Перетворимо цей взір так, щоб мати вираз кривини через частини точки дотику:

Маємо:

$$\sqrt{\Sigma(x''s' - x's'')^2} = \sqrt{s'^2(x''^2+y''^2+z''^2) - 2s's''(x'x''+y'y''+z'z'') + s''^2(x'^2+y'^2+z'^2)}$$

Ми знаємо, що $x'^2+y'^2+z'^2 = s'^2$, а диференціюючи цю рівність (після скорочення на 2) маємо:

$$x'x''+y'y''+z'z'' = s's''$$

Далі вставляючи знайдені вартости в рівність (88) одержимо:

$$\sqrt{s'^2(x''^2+y''^2+z''^2) - 2s'^2s''^2 + s''^2s'^2}, \text{ або:}$$

$$\sqrt{s'^2(x''^2+y''^2+z''^2) - s'^2s''^2}$$

Тепер робимо вставку навпаки:

$$s'^2 = x'^2+y'^2+z'^2 \text{ і } s's'' = x'x''+y'y''+z'z''$$

і під радикалом одержимо:

$$(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2) - (x'x''+y'y''+z'z'')^2 = \cancel{x'^2x''^2} + x'^2y''^2 + x'^2z''^2 + y'^2x''^2 + \cancel{y'^2y''^2} + y'^2z''^2 + z'^2x''^2 + z'^2y''^2 + \cancel{z'^2z''^2} - \cancel{x'^2x''^2} - \cancel{y'^2y''^2} - \cancel{z'^2z''^2} - 2x'y'x''y'' - 2x'z'x''z'' - 2y'z'y''z'' = (x'y''-x''y')^2 + (z'x''-x'z'')^2 + (y'z''-z'y'')^2.$$

Таким чином:

$$K = \frac{\sqrt{(x'y''-x''y')^2+(z'x''-z''x')^2+(y'z''-z'y'')^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}$$

А звідси:

$$\rho = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}{\sqrt{\Sigma(x'y''-x''y')^2}} \quad \ldots\ldots (89)$$

Коли б змінна t вважати рівною s, тоді взір (a) мав би вигляд:

$$K = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} \quad \text{або} \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

або: $\cancel{x'} = \frac{dx}{ds}$, то $x' = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dx^2}{ds^2}$, а тому:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots (90)$$

Отже, приймаючи під увагу взір (88), маємо:

$$\lambda_n = \pm\rho\frac{d^2x}{ds^2}; \qquad \mu_n = \pm\rho\frac{d^2y}{ds^2}; \qquad \nu_n = \rho\frac{d^2z}{ds^2}$$

(коли незначенькою є дуга s). Ми бачимо, що луч кривини лежить на головній прямовій.

Відкладем вартість ρ вздовж головної прямової у бік додатний від точки дотику $M(x, y, z)$. Тоді ми одержимо центр кривини $O(a, b, c)$. Обчислимо значини a, b, c цього центру кривини. (рис. 120.) Відтинок $OM = \rho$ зметуємо на осі координат і матимемо:

$$\rho_x = a - x = \rho\lambda_n$$

$$\rho_y = b - y = \rho\mu$$

$$\rho_z = c - z = \rho\nu$$

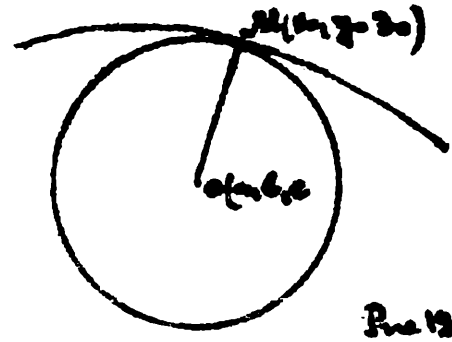


Рис. 120

А звідци:

$$a = x + \rho\lambda_n; \quad b = y + \rho\mu_n; \quad c = z + \rho\nu_n \quad \ldots (91)$$

Ми вже знаємо, що це коло кривини переходить через 3 безмежно близькі дотику точки, а ці точки також визначають площу кривини, а тому коло кривини лежить в площі кривини. Коли ми поведемо через центр пряму до площі кривини, то цей пряма називатиметься вісю кривини й буде рівнобіжний до співпрямової (до бінормалі).

§53 Кручення кривої.

Зараз ми розглядали кривину кривої в

даній точці згадно площі кривини. Иншими словами ми розглядали певний елемент дуги кривої, що лежить в даній площі кривини і вважали цей елемент за плоский. Коли б ця крива була плоского, то вона вилягалася б у спільній площі кривини й тоді всі осі кривини (а разом і співпрямова) були б рівнобіжні, як прямі до одної площі. Коли ж ми маємо просторову (не плоску криву), то для кожної нової точки її буде своя площа кривини, що складатиме з попереднього певний кут. Цей кут буде показувати, як закручується крива відходячи від площі, в якій перед тим лежала. Тому кут між двома сусідніми площами кривини будемо звати <u>кутом кручення</u> (рис. 121) кривої і означимо його через θ. Аналогічно з визначенням кривини ми будемо звати відношення кута кручення до дуги між точками M і N (точками, що досліджуємо) пересічним кручення кривої, а межу цього відношення, коли точка N наближається безмежно близько до M, себто, коли елемент дуги кривої простує до нуля ($\Delta s \to 0$), називатимемо <u>справжнім кручення</u> кривої при точці M, або просто <u>кручення кривої в точці M</u>.

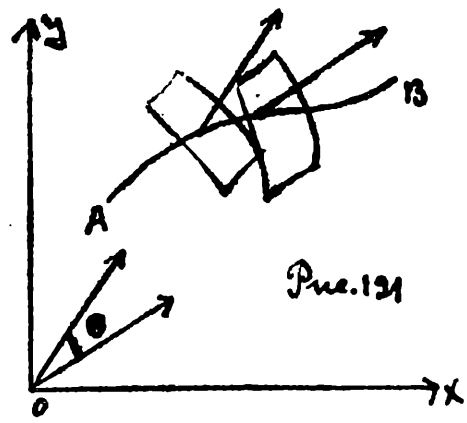


Рис. 121

Визначимо кут кручення. Поставимо до даної площі кривини прямі в точках її дотику (співпрямові). Очевидно, що кут між цими співпрямовими буде рівний із кутом між площами кривин.

а тому ми зложимо кут між цими двома площами кривини, завжди заступимо через кут між відповідними для них співпрямовими. (Рис 121)

Означимо кривину даної елементудуги через K. Тоді:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Theta}{\Delta s}$$

Поведемо тепер з початку осей лучі вектори OK і OL (рис. 122), рівнобіжні до співпрямових AB і AB_1 і лучем рівним одиниці окреслимо круг центру нуль. Очевидно, що коли в кожній точці даної кривої AB будуємо співпрямові й поведемо з початку координат рівнобіжні їм вектори, то останні утворять на кулі криву ab, як геометричний осередок кінців цих векторів. Ця крива зветься кулистою або сферичною індикатрисою співпрямових кривої. Міркуваннями аналогічними з попереднім доводом, ми дойдемо до виразу подібному (a) попереднього §, а саме:

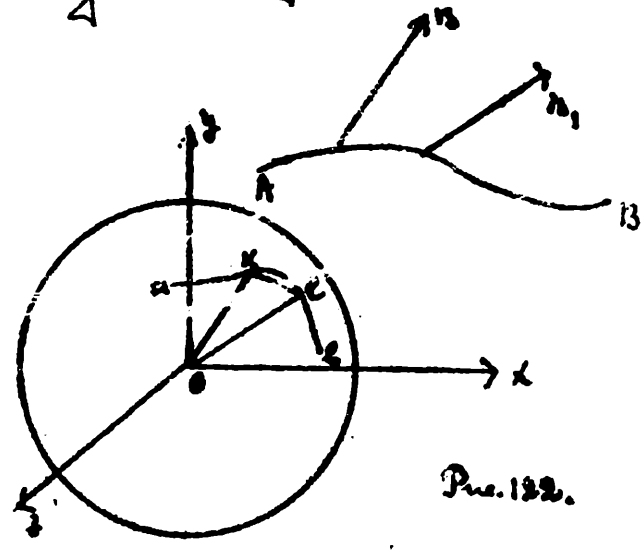


Рис. 122.

$$K = \frac{\sqrt{\lambda_b'^2 + \mu_b'^2 + \nu_b'^2}}{s'} \quad \ldots (1)$$

або:

$$K = \frac{\sqrt{d\lambda_b^2 + d\mu_b^2 + d\nu_b^2}}{ds} \quad \ldots (2)$$

Але:

$$\lambda_b = \frac{y'z'' - y''z'}{\sqrt{\Sigma(y'z'' - y''z')^2}} \quad \text{і т. д.} \quad \ldots (3)$$

де: $\Sigma(y'z'' - z'y'')^2 = (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - y'x'')^2$

Отримано для скорочення:

$y'z'' - y''z' = A$; $z'x'' - z''x' = B$; $x'y'' - y'x'' = C$. тоді:

$$\lambda_b = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \mu_b = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \nu_b = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \ldots (4)$$

А тому:

$$\lambda'_b = \frac{A'(A^2+B^2+C^2) - A(AA'+BB'+CC')}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}} \quad \ldots (5^a)$$

Аналогічно:

$$\mu'_b = \frac{B'(A^2+B^2+C^2) - B(AA'+BB'+CC')}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}} \quad \ldots (5^b)$$

і

$$\nu'_b = \frac{C'(A^2+B^2+C^2) - C(AA'+BB'+CC')}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}} \quad \ldots (5^c)$$

Отже:

$$\lambda'^2_b + \mu'^2_b + \nu'^2_b = \frac{(A^2+B^2+C^2)^2(A'^2+B'^2+C'^2) + (A^2+B^2+C^2)(AA'+BB'+CC')^2}{(A^2+B^2+C^2)^3} -$$

$$- \frac{2(A^2+B^2+C^2)(AA'+BB'+CC')^2}{(A^2+B^2+C^2)^3}.$$

Або, роблячи зведення й скорочення на $(A^2+B^2+C^2)$, маємо:

$$\lambda'^2_b + \mu'^2_b + \nu'^2_b = \frac{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2) - (AA'+BB'+CC')^2}{(A^2+B^2+C^2)^2} =$$

$$= \frac{(BC'-CB')^2 + (CA'-A'C)^2 + (AB'-A'B)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2} \quad \ldots (6)$$

Обчислимо окремо $BC'-CB'$:

$$B' = (z'x''-x'z'')' = \cancel{z''x''} + z'x''' - \cancel{x''z''} - x'z''' = z'x''' - x'z'''$$

Маємо:

$$C' = (x'y''-x''y')' = x'y''' - x'''y'$$

тому:

$$BC'-CB' = (z'x''-x'z'')(x'y'''-x'''y') - (x'y''-x''y')(z'x'''-x'z''') =$$

$$= x'z'x''y''' - y'z'x''x''' - x'^2z''y''' + x'y'z''x''' - x'z'y''x''' + x'^2y''z''' +$$

$$+ y'z'x''y''' - x'y'x''z''' = x'[x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - z'y''x''' - y'x''z''' -$$

$$-x'z''y'''] = x'\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = x'.\Delta$$

Аналогічно:

$$CA' - AC' = y'\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = y'\Delta \text{ і } AB' - BA' = z'\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = z'.\Delta$$

Отже:

$$\lambda_b'^2 + \mu_b'^2 + \nu_b'^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)\Delta^2}{[\Sigma(y'z'' - y''z')]^2} = \frac{s'^2.\Delta^2}{[\Sigma(y'z'' - y''z')]^2} \cdots (7)$$

А звідци:

$$K = \frac{s'\Delta}{s'^3\Sigma(y'z'' - y''z')^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\Sigma(y'z'' - y''z')^2}$$

Таким чином луч кола кручення буде:

$$r = \frac{\Sigma(y'z'' - y''z')^2}{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}} \cdots\cdots\cdots (8)$$

Умовилося, що коли r додатнє, то кручення кривої йде з правої руки до лівої, для спостерігача, що стоїть вздовж підпряжової й навпаки.

§54. Взори Френе (Серре).

Щоб установити залежність між напрямами дотичної, головної пряжової й співпряжової, а також установити бік (знак) кручення, ми доведемо дуже важні взори Френе.

I. Ми вже знаємо, що 1) напрямні змінних дотичної [взір (67)]: $\lambda = \frac{dx}{ds} = \frac{x'}{s'}$; $\mu = \frac{y'}{s'}$ і $\nu = \frac{z'}{s'} \cdots (1)$

2) напрямні змінних головної пряжової [взір (79)]

$$\lambda_n = \frac{s'x'' - s''x'}{\sqrt{\Sigma(s'x'' - s''x')^2}}; \mu_n = \frac{s'y'' - s''y'}{\sqrt{\Sigma(s'x'' - s''x')^2}} \text{ і } \nu_n = \frac{s'z'' - s''z'}{\sqrt{(s'x'' - s''x')^2}} \cdots (2)$$

і нарешті:

$$\rho = \frac{s'^3}{\sqrt{\Sigma(s'x'' - s''x')^2}} \quad (\text{див. взір } 92) \ldots\ldots (3)$$

Зі взорів (2) визначимо $u = \sqrt{\Sigma(s'x'' - s''x')^2}$, а саме:

$$u = \frac{s'x'' - s''x'}{\lambda_n}; \quad u = \frac{s'y'' - s''y'}{\mu_n} \text{ і } u = \frac{s'z'' - s''z'}{\nu_n}$$

і вставимо їх у вартість ρ (3). Тоді маємо:

$$1)\ \rho = \frac{\lambda_n s'^3}{s'x'' - s''x'}; \quad 2)\ \rho = \frac{\mu_n s'^3}{s'y'' - s''y'} \quad 3)\ \rho = \frac{\nu_n s'^3}{s'y'' - s''z'}.$$

Але, взявши від взорів (1) перші похідні через t, маємо:

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{s'x'' - s''x'}{s'^2}; \quad \mu' = \frac{d\mu}{dt} = \frac{s'y'' - s''y'}{s'^2}; \quad \nu' = \frac{d\nu}{dt} = \frac{s'z'' - s''z'}{s'^2}$$

А звідси:

$$s'x'' - s''x' = \lambda' s'^2; \quad s'y'' - s'y' = \mu' s'^2; \quad s'z'' - s''z' = \nu' s'^2. \text{ Тому:}$$

$$\rho = \frac{\lambda_n s'}{\lambda'}; \quad \rho = \frac{\mu_n s'}{\mu'} \quad \text{і} \quad \rho = \frac{\nu_n s'}{\nu'}$$

або:

$$\frac{\lambda'}{s'} = \frac{\lambda_n}{\rho}; \quad \frac{\mu_1}{s'} = \frac{\mu_n}{\rho}; \quad \frac{\nu_1}{s'} = \frac{\nu_n}{\rho}$$

Звідси остаточно, (скорочуючи λ' і s' і т. д на dt), маємо:

$$\lambda_n = \rho \frac{d\lambda}{ds}; \quad \mu_n = \rho \frac{d\mu}{ds} \quad \text{і} \quad \nu_n = \rho \frac{d\nu}{ds} \ldots\ldots (93)$$

<u>Це є перша низка взорів Френе.</u>

<u>II Властивість напрямних косинусів головної прямової.</u>

Ми мали рівняння головної прямової: (78)

$$\frac{X - x}{s'x'' - s''x'} = \frac{Y - y}{s'y'' - s''y'} = \frac{Z - z}{s'z'' - s''z'}$$

Вставляючи вартости s' і s'' і перетворимо це рівняння до другого вигляду:

$$s'x'' - s''x' = \frac{s'^2 x'' - s's''x'}{s'},$$

але $s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$; $s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z''$. Тому:

$$s'x'' - s''x' = \frac{1}{s'}\left[\cancel{x'^2 x''} + y'^2 x'' + z'^2 x'' - \cancel{x'^2 x''} - x'y'y'' - z'z''x'\right] =$$

$$= \frac{1}{s'}\left[y'(y'x'' - x'y'') + z'(z'x'' - z''x')\right] = \frac{M}{s'}$$

Аналогічні взори матимемо й для:

$$s'y'' - s''y' = \frac{1}{s'}\left[z'(z'y'' - z''y') + x'(x'y'' - x''y')\right] = \frac{N}{s'},$$

$$s'z'' - s''z' = \frac{1}{s'}\left[x'(x'z'' - x''z') + y'(y'z'' - y''z')\right] = \frac{P}{s'}.$$

Вставляючи ці вартости в рівняння прямової, та, скорочуючи на s', матимемо:

$$\frac{x-x}{M} = \frac{y-y}{N} = \frac{z-z}{P}$$

З другого боку ми мали, що: [взір (5) попер. §]

$$\lambda_b' = \frac{A'(A^2+B^2+C^2) - A(AA'+BB'+CC')}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}}$$

і т. д. З сих маємо:

$$\lambda_b' = \frac{\cancel{A'A^2} + A'B^2 + A'C^2 - \cancel{A^2A'} - ABB' - ACC'}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}} \text{ і т. д.}$$

а тому:

$$\lambda_b' = \frac{C(A'C - AC') - B(AB' - A'B)}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}} \text{ і т. д.}$$

Користуючися перетвореннями з попереднього §, а саме:

$$A = (y'z'' - y''z'); \quad B = z'x'' - z''x' \quad \text{і} \quad C = x'y'' - y'x''$$

$$\text{і} \quad A'C - AC = y'\Delta; \quad AB' - A'B = z'\Delta; \quad BC' - CB' = x'\Delta,$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

маємо:

$$\lambda'_b = \frac{Cy' - Bz'}{\Sigma(y'z'' - y''z')^{3/2}} \cdot \Delta = -\frac{Bz' - Cy'}{\Sigma(y'z'' - z'y'')^{3/2}} \cdot \Delta$$

Аналогічно:

$$\mu'_b = \frac{Cx' - Az'}{\Sigma(y'z'' - y''z')^{3/2}} \Delta$$

$$\text{і} \quad \nu'_b = \frac{Ay' - Bx'}{\Sigma(y'z'' - z'y'')^{3/2}} \cdot \Delta$$

А звідци:

$$\lambda'_b = -\frac{z'(z'x'' - x'z'') - y'(x'y'' - y'x'')}{K} = -\frac{y'(y'x'' - x'y'') + z'(z'x'' - x'z'')}{K} = -\frac{M}{K}$$

$$\text{де } K = \frac{\Delta}{\Sigma(y'z'' - z'y'')^{3/2}}$$

Аналогічно:

$$\mu'_b = -\frac{N}{K}; \qquad \nu'_b = -\frac{P}{K}$$

Звідци: $M = -K\lambda'_b$; $N = -K\mu'_b$; $P = -K\nu'_b$

Нарешті, вставляючи ці вартости в рівняння прямової й скорочуючи на $-K$, маємо:

$$\frac{X - x}{\lambda'_b} = \frac{Y - y}{\mu'_b} = \frac{Z - z}{\nu'_b}$$

або:

$$\frac{X - x}{d\lambda_b} = \frac{Y - y}{d\mu_b} = \frac{Z - z}{d\nu_b} \ldots\ldots (94)$$

<u>Рівняння (94) приводять нас до дуже важливого висновку</u>, а саме:

<u>Напрямні зміни головної прямової пропорційні</u>:

1) (рівн. 82) <u>похідним (диференціялам) напрямних змінників дотичної.</u>

2) (рівн. 83) <u>похідним (диференціялам) напрямних</u>

змінників співпрямової.

Тепер перейдемо до доводу другої пари взорів Серре-Френе.

III Коли ми знаємо, що напрями змінних головної прямової пропорційні диференціялам напрямних змінників співпрямової, то можемо записати:

$$\lambda_n = q\,d\lambda_b \;;\; \mu_n = q\,d\mu_b \;\text{ і }\; \nu_n = q\,d\nu_b,$$

де q невідомий нам коефіцієнт пропорційности. Щоб його визначити піднесемо до квадрату всі рівности й додамо їх. Тоді:

$$\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2 = q^2\left(d\lambda_b^2 + d\mu_b^2 + d\nu_b^2\right).$$

Але сума квадратів напрямних змінників одного й того ж вектора є рівна з одиницею, а тому:

$$1 = q^2\left(d\lambda_b^2 + d\mu_b^2 + d\nu_b^2\right)$$

а звідси:

$$q = \pm\frac{1}{\sqrt{d\lambda_b^2 + d\mu_b^2 + d\nu_b^2}}$$

або (див. взір (2) попер. §) маємо:

$$q = \pm\frac{1}{\kappa\,ds} = \pm\frac{\tau}{ds} \quad (\text{де } \tau \text{ є луг кручення})$$

Таким чином маємо другу пару взорів Френе.

$$\lambda_n = \tau\frac{d\lambda_b}{ds} \;;\; \mu_n = \tau\frac{d\mu_b}{ds} \;;\; \nu_n = \tau\frac{d\nu_b}{ds} \;\cdots\; (95)$$

При тому беремо лише (+), що вказує нам додатньою кручення.

Візьмім просторову криву й при даній точці збудуємо головний тристінний кут, що тво-

ритися площами: 1) кривим 2) прямовою й випростаною (рис. 123) і візьмемо цю систему за нову координату. Хай кути нових осей зі старими будуть:

дотичної T: λ, μ і ν

прямової N: λ_n, μ_n і ν_n

співпрямової B: λ_b, μ_b і ν_b

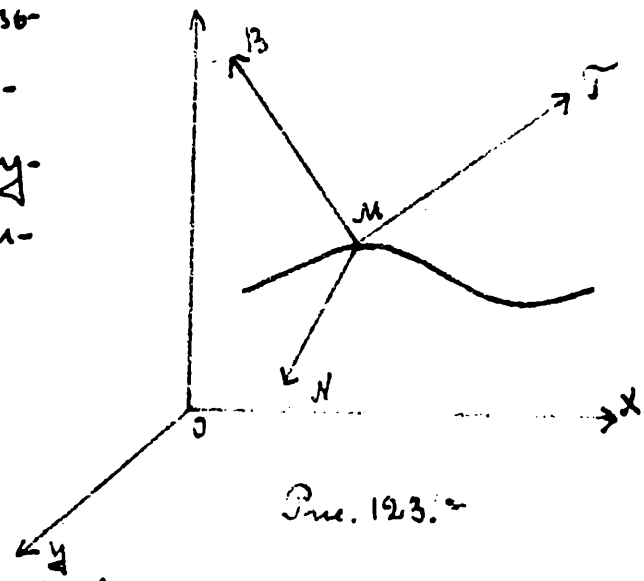


Рис. 123.

Із аналітичної геометрії відомо, що ці 9 кутів будуть звязані між собою так:

	x	y	z
T	λ	μ	ν
N	λ_n	μ_n	ν_n
B	λ_b	μ_b	ν_b

I Із властивости суми квадратів напрямних косинусів:

а) нових через старі:

1) $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$ 2) $\lambda_n^2+\mu_n^2+\nu_n^2=1$; 3) $\lambda_b^2+\mu_b^2+\nu_b^2=1$

б) старих до нових:

1) $\lambda^2+\lambda_n^2+\lambda_b^2=1$; 2) $\mu^2+\mu_n^2+\mu_b^2=1$; 3) $\nu^2+\nu_n^2+\nu_b^2=1$

II Із умови прямовости: а) нових між собою:

1) $\lambda\lambda_n+\mu\mu_n+\nu\nu_n=0$; 2) $\lambda\lambda_b+\mu\mu_b+\nu\nu_b=0$; 3) $\lambda_n\lambda_b+\mu_n\mu_b+\nu_n\nu_b=0$

б) старих між собою:

1) $\lambda\mu+\lambda_n\mu_n+\lambda_b\mu_b=0$; 2) $\lambda\nu+\lambda_n\nu_n+\lambda_b\nu_b=0$; 3) $\mu\nu+\mu_n\nu_n+\mu_b\nu_b=0$

Візьмім тепер підрозгляд головну прямову. Її напрямні косинуси звязані рівняннями:

$$1)\ \lambda_n^2+\mu_n^2+\nu_n^2=1 \quad (\text{I а, 2})$$

і (умова прямовости до дотичної й співпрямової)

$$2)\ \lambda\lambda_n+\mu\mu_n+\nu\nu_n=0 \quad (\text{II, а, 1})$$

$$3)\ \lambda_b\lambda_n+\mu_b\mu_n+\nu_b\nu_n=0 \quad (\text{II, а, 3})$$

Продиференцуємо їх і маємо:

$$\text{I)}\ \lambda_n \lambda'_n + \mu_n \mu'_n + \nu_n \nu'_n = 0$$

$$\text{II)}\ \left(\lambda' \lambda_n + \mu' \mu_n + \nu' \nu_n\right) + \left(\lambda \lambda'_n + \mu \mu'_n + \nu \nu'_n\right) = 0$$

$$\text{III)}\ \left(\lambda'_\varepsilon \lambda_n + \mu'_\varepsilon \mu_n + \nu'_\varepsilon \nu_n\right) + \left(\lambda_\varepsilon \lambda'_n + \mu_\varepsilon \mu'_n + \nu_\varepsilon \nu'_n\right) = 0$$

Але за 1-ого нашого вгорів справне (93) маємо:

$$\lambda_n = \rho \frac{d\lambda}{ds}, \text{ або } \lambda_n = \rho \frac{\lambda'}{s'},$$

а звідци:

$$\lambda' = \frac{\lambda_n s'}{\rho}$$

тому:

$$\text{II)}\ \left(\frac{\lambda_n^2 s'}{\rho} + \frac{\mu_n^2 s'}{\rho} + \frac{\nu_n^2 s'}{\rho}\right) + \left(\lambda \lambda'_n + \mu \mu'_n + \nu \nu'_n\right) = 0$$

або:

$$\lambda \lambda'_n + \mu \mu'_n + \nu \nu'_n = -\frac{s'}{\rho}\left(\overset{1.}{\cancel{\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2}}\right). \text{ Отже:}$$

$$\lambda \frac{d\lambda_n}{ds} + \mu \frac{d\mu_n}{ds} + \nu \frac{d\nu_n}{ds} = -\frac{1}{\rho} \ldots (\alpha)$$

Так само за другого нашого вгорів справне (95) маємо:

$$\lambda_n = r \frac{d\lambda_\varepsilon}{ds} = r \frac{\lambda'_\varepsilon}{s'} \text{ і т. д.}$$

а звідци:

$$\lambda'_\varepsilon = \frac{\lambda_n s'}{r} \text{ і т. д.}$$

тому (III)

$$\left(\frac{\lambda_n^2 s'}{r} + \frac{\mu_n^2 s'}{r} + \frac{\nu_n^2 s'}{r}\right) + \left(\lambda_\varepsilon \lambda'_n + \mu_\varepsilon \mu'_n + \nu_\varepsilon \nu'_n\right) = 0$$

А звідци:

$$\lambda_\varepsilon \lambda'_n + \mu_\varepsilon \mu'_n + \nu_\varepsilon \nu'_n = -\frac{s'}{r}\left(\text{бо } \lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2 = 1\right)$$

тому:

$$\lambda_\varepsilon \frac{d\lambda_n}{ds} + \mu_\varepsilon \frac{d\mu_n}{ds} + \nu_\varepsilon \frac{d\nu_n}{ds} = -\frac{1}{r} \ldots (\beta)$$

Тими чином маємо шукану:

$$\text{I)}\ \lambda_n \frac{d\lambda_n}{ds} + \mu_n \frac{d\mu_n}{ds} + \nu_n \frac{d\nu_n}{ds} = 0 \quad \text{[це рівняння поділимо на } s' \text{ і потім скоротимо на } dt = \frac{\lambda'_n}{s'} = \frac{d\lambda_n}{ds}\text{]}$$

$$\text{II)}\ \lambda \frac{d\lambda_n}{ds} + \mu \frac{d\mu_n}{ds} + \nu \frac{d\nu_n}{ds} = -\frac{1}{\rho}\ (\alpha)$$

$$\text{III)}\ \lambda_\varepsilon \frac{d\lambda_n}{ds} + \mu_\varepsilon \frac{d\mu_n}{ds} + \nu_\varepsilon \frac{d\nu_n}{ds} = -\frac{1}{r}\ (\beta)$$

де знаходимо: $\frac{d\lambda_n}{ds}$, $\frac{d\mu_n}{ds}$ і $\frac{d\nu_n}{ds}$

Множимо рівняння I) на λ_n, II на λ і III на λ_b і складаємо:

$$\cancel{(\lambda_n^2+\lambda^2+\lambda_b^2)}\frac{d\lambda_n}{ds}+(\lambda_n\mu_n+\lambda\mu+\lambda_b\mu_b)\frac{d\mu_n}{ds}+(\lambda_n\nu_n+\lambda\nu+\lambda_b\nu_b)\frac{d\nu_n}{ds}=-\left(\frac{\lambda}{\rho}+\frac{\lambda_b}{r}\right)$$

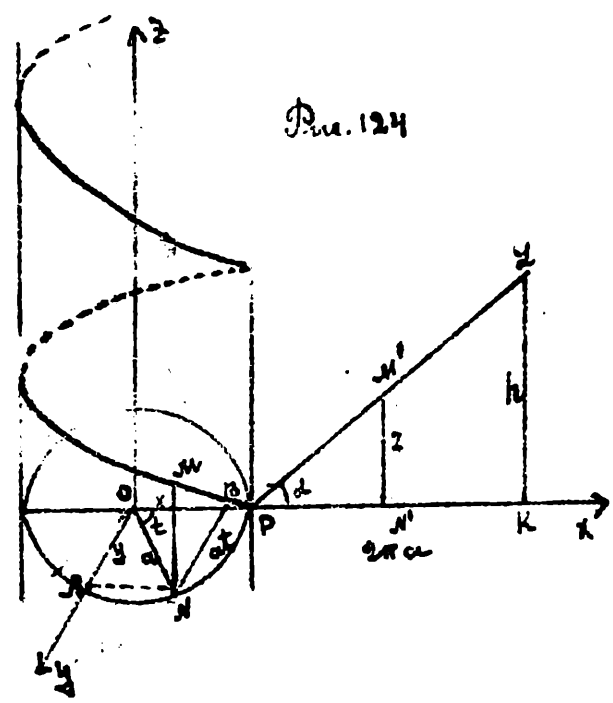
Звідси [беручи під увагу рівности: a) (I, 5, 1); б) (II, 5, 1) і в) (III, 5, 2)] маємо:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\lambda_n}{ds}&=-\left(\frac{\lambda}{\rho}+\frac{\lambda_b}{r}\right)\\ \text{Аналогічно:}\quad \frac{d\mu_n}{ds}&=-\left(\frac{\mu}{\rho}+\frac{\mu_b}{r}\right)\\ \text{і}\quad \frac{d\nu_n}{ds}&=-\left(\frac{\nu}{\rho}+\frac{\nu_b}{r}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(96)$$

Це є <u>третя низка взорів Серре-Френе.</u>

<u>Приклад.</u> Візьмім трубову лінію рівнянням такої:

$$x=a\cos t;\quad y=a\sin t;\quad z=\frac{ht}{2\pi}$$



[Внаслідок цього рівняння відомий диференціяльної геометрії: трубова лінія утворюється, коли на вальцову поверхню (валець луча a) ми будемо накортати прямокутний трикутник з прямими $PR = 2\pi a$ (обвід поперечного перерізу вальця) і $KL = h$, що звемо ходом, або кроком труби. Значить такої будь точки $M(x, y, z)$ визначатимуться з ΔBON: $x = a\cos t$; з ΔAON: $y = a\sin t$ і, нарешті, $z = MN$. Але MN на пропорції відповідає $M'N'$, а дуга NP відповідає дузі PN'. Коли луч кола a, то дуга NP в кругових мірах буде at,

тому й $PN' = at$. Отже з $\Delta PM'N'$ маємо: $z = MN = at.tg\alpha$, але з ΔZPK $tg\alpha = \frac{h}{2\pi a}$, тому $MN = z = \frac{th}{2\pi}$].

I) Визначимо попередуючі ρ — лук кривини трубової лінії. Беруги на увагу, що $\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\lambda'}{s'}$ (коли λ і s є функції t), ми скористуємося першою низкою творів ф-ли в такому вигляді:

$$\lambda_n = \rho\frac{\lambda'}{s'}\ ;\quad \mu_n = \rho\frac{\mu'}{s'}\ ;\quad \nu_n = \rho\frac{\nu'}{s'}\ \ldots\ (d)$$

де λ, μ і ν, як напрямні косинуси дотичної, є рівні:

$\lambda = \frac{x'}{s'}$; $\mu = \frac{y'}{s'}$; $\nu = \frac{z'}{s'}$, але $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$ і $z' = \frac{h}{2\pi}$.

тому:

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + \frac{h^2}{(2\pi)^2}} =$$

$$= a\sqrt{1 + \frac{h^2}{(2\pi a)^2}} = aK\ ,\ \text{де}\ K = \sqrt{1 + \frac{h^2}{(2\pi a)^2}} = (const)$$

тому:

$$\lambda = -\frac{\sin t}{K}\ ;\quad \mu = \frac{\cos t}{K}\ ;\quad \nu = \frac{\frac{h}{2\pi a}}{K}$$

А звідси:

$$\lambda' = -\frac{\cos t}{K}\ ;\quad \mu' = -\frac{\sin t}{K}\ ;\quad \nu' = 0.$$

Вставляючи ці вартости у вгори (d), ми одержимо:

$$\lambda_n = \rho\frac{-\frac{\cos t}{K}}{aK} = -\rho\frac{\cos t}{aK^2}\ ;\quad \mu_n = -\rho\frac{\sin t}{aK^2}\ \text{і}\ \nu_n = \rho.0 = 0.$$

Коли ці рівняння піднести до квадрату й додати одно до одного, то одержимо:

$$\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2 = \rho^2\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{a^2K^4} = \rho^2\cdot\frac{1}{a^2K^4}$$

Але $\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2 = 1$, а тому:

$$\rho^2\cdot\frac{1}{a^2K^4} = 1\ ,\ \text{або:}\ \rho = aK^2 = a\left[1 + \frac{h^2}{(2\pi a)^2}\right]$$

Отже кривина трубової лінії є <u>стала</u>. Крім того, маємо $\nu_n = 0$, це значить, що головна пря-

нова лежить в площі рівнобіжній до площі xy, себто рівнобіжно до лучa вальця; 2) $\lambda_n = -\rho\frac{\cos t}{ak^2}$ і $\mu_n = -\rho\frac{\sin t}{ak^2}$ є величини відємні, бо вставляючи величину ρ у вирази λ_n, μ_n і ν_n маємо:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n &= -ak^2\frac{\cos t}{ak^2} = -\cos t \\ \mu_n &= -\sin t \end{aligned}\right\} \cdots (\beta)$$

А тому головна прямова має напрям противний до напряму лучa вальця, себто вона спрямована до осі вальця.

II) <u>Обчислимо тепер луч кривини r.</u> Порівнюючи взори першої групи Френе з відповідними взорами другої групи [взори: (33) і (35)], одержимо:

$$\rho\frac{\lambda'}{s'} = r\frac{\lambda'_b}{s'} \quad \text{або:} \quad \rho\lambda' = r\lambda'_b$$

Тому:

$$r = \rho\frac{\lambda'}{\lambda'_b} \cdots (*)$$

З другого боку ми маємо, що (взір [illegible]):

$$\lambda_b = \frac{y'z'' - y''z'}{\sqrt{\Sigma(y'z'' - y''z')}},$$

де в даному випадку:

$$x' = -a\sin t;\ y' = a\cos t;\ z' = \frac{h}{2\pi}$$

$$x'' = -a\cos t;\ y'' = -a\sin t;\ z'' = 0$$

Таким чином:

$$y'z'' - y''z' = a\cos t.0 - \left(-a\sin t\frac{h}{2\pi}\right) = a\frac{h\sin t}{2\pi}$$

$$z'x'' - z''x' = \frac{h}{2\pi}\cdot -a\cos t - (-a\cos t.0) = -a\frac{h\cos t}{2\pi}$$

і $$x'y'' - x''y' = (-a\sin t.-a\sin t) - (a\cos t.-a\cos t) = a^2$$

Тому:

$$\sqrt{\Sigma(y'z'' - y''z')} = a^2\sqrt{\frac{h^2\sin^2 t}{(2\pi a)^2} + \frac{h^2\cos^2 t}{(2\pi a)^2} + 1} = a^2\sqrt{1 + \frac{h^2}{(2\pi a)^2}} = a^2 k$$

А звідси:

$$\lambda_b = \frac{\frac{h}{2\pi a}}{k} \sin t \; ; \; \mu_b = -\frac{\frac{h}{2\pi a}}{k} \cos t \; ; \; \nu_b = \frac{1}{k}$$

Далі:

$$\lambda'_b = \frac{\frac{h}{2\pi a}}{k} \cos t \quad \text{і т. д.}$$

Отже: (*)

$$\tau = \rho \frac{-\frac{\cos t}{k}}{\frac{\frac{h}{2\pi a}}{k} \cos t} = -\rho \frac{\cos t \cdot \cancel{k}}{\cancel{k} \cdot \frac{h}{2\pi a} \cdot \cancel{\cos t}} = -\rho \frac{2\pi a}{h}.$$

А вставляючи замість ρ, матимемо:

$$\tau = -a\left[1 + \frac{h^2}{(2\pi a)^2}\right] \cdot \frac{2\pi a}{h} = -\frac{2\pi a^2}{h}\left[1 + \frac{h^2}{(2\pi a)^2}\right].$$

<u>Шрубова лінія є сталого кручення.</u> Це кручення є відємне (при $h > 0$) себто крива скручується з лівої руки до правої (рис. 125)

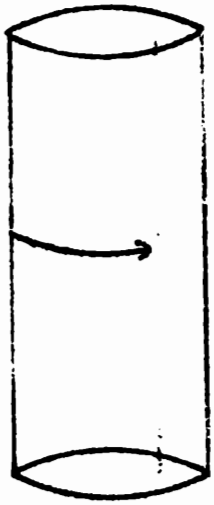


Рис. 125

Розділ II

Поверхні.

§55. Загальні їх рівняння.

Загалом рівняння поверхні устанавлює функціональний звязок поміж змінними x, y, z її точок, а тому рівняння такої поверхні можна символічно означити:

$$F(x, y, z) = 0 \quad \ldots\ldots (a)$$

Найчастіше, як найбільш зручне, це рівняння зустрічається у вираженій щодо z формі, а саме:

$$z = f(x, y) \quad \ldots\ldots (б)$$

Але цей вигляд не може охопити всіх родів рівнянь поверхні, бо не завжди можна рівняння можна розвязати що-до z (або якої иншої із змінних). Прикладом того випадку є наприклад прямі циліндричні поверхні з напрямними контурами в одній з координатних площ, напр. в площі xoy (себто з творними рівнобіжними до осі z). Ці поверхні мають рівняння вигляду:

$$F(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots (c)$$

що зовсім не містить z (або иншої відповідної змінної), а тому це z не може бути визначене з нього. Нарешті можна сказати й змішане рівняння поверхні, а саме:

$$x = \varphi(u,v) \; ; \quad y = \psi(u,v) \quad i \quad z = \chi(u,v) \; \ldots\ldots (\partial),$$

де u і v є певні довільні змінні. Коли з цих трьох рівнянь виключити задані два змінних, то одержимо перше рівняння: $F(x,y,z)=0$

Щоб одержати рівняння визначене щодо z, то досить для цього взяти за змінними u і v самі змінні x і y. Тоді третє рівняння матиме вигляд:

$$z = \chi(x,y)$$

Очевидно, що кожним окремим вартостям u і v завжди відповідає певна точка зі маткими x, y, z. Тому можна припустити існування на самій поверхні якоїсь системи координат, що для кожної точки M (на цій поверхні) визначатиме певні вартости u і v, як значники її. Ця система координат, що лежить на кривій поверхні буде загалом криволінійною, а тому й змінних u і v звуться криволінійними координатами (значниками) точки M.

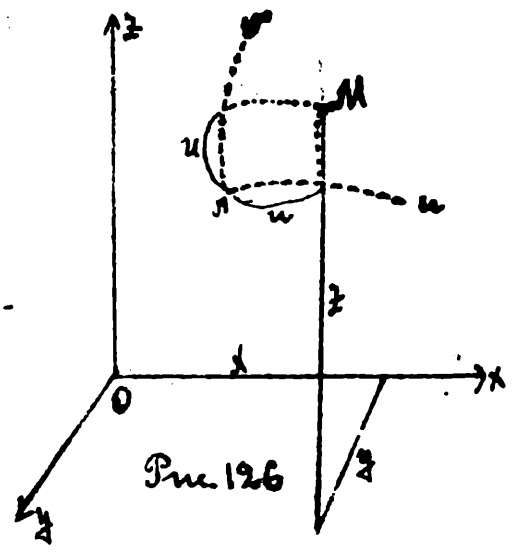


Рис. 126

Щоб мати ще більшу уяву про ці координати, припустимо, що в даній точці один із змінних, напр. u не порушує своєї вартости ($u = const$), тоді як v тоді перебігає всі можливі свої вартости. Тоді рівняння (∂) є функцією одного лише змінного:

$$x = \varphi_1(v) \; ; \quad y = \psi_1(v) \quad i \quad z = \chi_1(v) \; \ldots\ldots (e)$$

У ми одержимо рівняння певної кривої в просторі.

Коли тепер тимчасово сталій величині u будемо давати довільні вартости $u_1, u_2 \ldots u_n$, то одержимо тепер (родину) кривих, схожих поміж себе ліній. Цей процес цілком подібний до процесу пересування рядних при довільних змінах вартости відтинкової в простолінійних координатах (рис. 127).

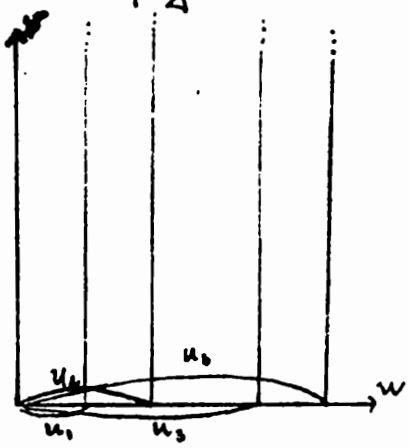


Рис. 127.

[Аналогічні міркування коли й $v = const$].

Ця схожість є причиною назви — „криволінійні координати" і дає нам можливість надавати цим криволінійним координатам всі прикмети простолінійних.

§56. Дотична проста й площа до поверхні.

Хай поверхня визначається рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Коли візьмемо на цій поверхні точку M, то через неї можна на самій поверхні повести безліч кривих і до кожної з них окремі дотичні (рис. 128). Цілком зрозуміло що кожна з таких дотичних буде одночасно й дотичною до поверхні. Коли через точку M переходить безліч кривих, то через неї пройде й безліч дотичних до кривої. Очевидно, що всі ці дотичні складуть певний геометричний

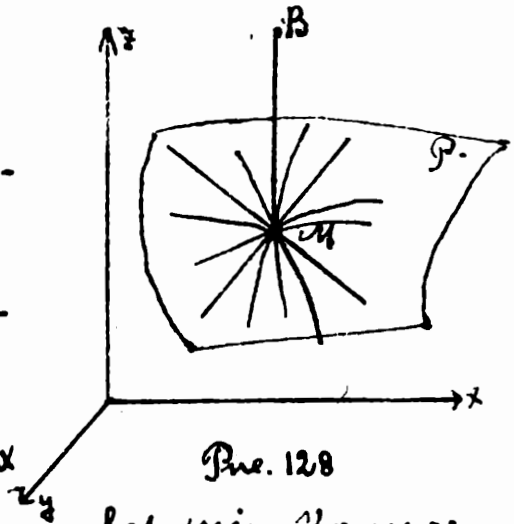


Рис. 128

осередок. Розглянемо який саме:

Перш за все, кожна крива на даній поверхні, що переходить через точку M є виліґдом перетину (в загальному випадку) даної поверхні другого, що також переходить через точку M. Таких поверхень можна повести безліч і їх рівняння будуть цілком довільні, з одного лише умовою, що значить точки M мусять їх задовольняти, бо всі згадані поверхні переходять через точку M.

Означимо рівняння такого роду довільної площі через:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \ldots (2)$$

Рівняння кожної дотичної до кривої в точці $M(x, y, z)$ матиме вигляд:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$$

або:

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz} \quad \ldots\ldots (3)$$

Лишається лише за допомогою рівнянь (1) і (2) визначити вартости dx, dy і dz. Для цього продиференціюємо дані рівняння (1) і (2) і матимемо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

Ці рівности (3) і (4) звязують між собою невідомі dx, dy і dz і дають змогу вилучити їх з рівнянь (3). Справді, означимо в рівняннях (3) сотинника пропорційности через t. Тоді маємо рівність:

$$\frac{X-x}{dx}=t\ ;\quad \frac{Y-y}{dy}=t\ ;\quad \frac{Z-z}{dz}=t$$

А звідси:

$$dx=\frac{X-x}{t}\ ;\quad dy=\frac{Y-y}{t}\ \text{і}\quad dz=\frac{Z-z}{t}$$

Вставляючи ці вартости в (4) і скорочуючи після того всі члени на t, матимемо:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0 \quad (\alpha)\\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial \varphi}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial \varphi}{\partial z}(Z-z)=0 \quad (\beta)\end{aligned}\right\}\ldots(5)$$

Ми переконуємося, що це рівняння дотичної, як вислід перетину двох площ (α) і (β)

Коли б ми взяли якусь другу поверхню $\varphi_1(x,y,z)$, що переходить через точку M, то у висліді попередніх міркувень мали б рівняння другої дотичної до даної поверхні в точці M такого вигляду:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(Z-z)=0$$

і т. д.

Ми бачимо, що для кожної нової дотичної змінюється лише друге рівняння, а перше рівняння (α) лишається незмінним. Це доводить нам, що всі дотичні до поверхні, що переходять через дану точку цієї поверхні M лежатимуть на площі (α), а через те сама площа (α) є потрібним геометричним осередком всіх даних дотичних. Таку площу звуть дотичною до поверхні площею. Вартости $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ і $\frac{\partial F}{\partial z}$ є певно визначені й загалом єдині, а тоді

й згадана площа є єдиною дотичною площею до даної поверхні в точці M. Рівняння цієї площі як уже маємо має вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0 \quad \ldots\ldots (97)$$

Коли рівняння поверхні має вигляд:

$$z=\varphi(x,y),$$

то тоді:

$$F(x,y,z)=z-\varphi(x,y)=0$$

Звідси маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial \varphi}{\partial x};\ \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial \varphi}{\partial y};\ \frac{\partial F}{\partial z}=1.$$

Введемо за Монжем менші означення: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}=p$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y}=q$ і тоді рівняння дотичної площі буде:

$$-p(X-x)-q(Y-y)+Z-z=0$$

або:

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y) \quad \ldots\ldots (98)$$

§ 57. Прямова до поверхні.

Візьмім просту, що переходить через точку M; напишем її рівняння:

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{l}$$

Коли це є прямова до поверхні, то на підставі умови прямовости простої й площі її кутові змінники є пропорційні соотношенням дотичної площі, а тому рівняння прямової ~~матимуть~~ має вигляд:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \ldots\ldots (99),$$

де $F(x,y,z)$ є рівняння відповідної поверхні.

Коли поверхня була заснована рівнянням:

$$z = \psi(x, y),$$

тоді рівняння прямової в означенням тонка мало вигляд:

$$Z - z = \frac{X - x}{-p} = \frac{Y - y}{-q} \quad \ldots\ldots\ldots (100).$$

§58. Напрямні зміщення дотичної площі.

(косинуси кутів прямової з осями)

Хай α, β і γ є кути що творить прямова даної поверхні з осями координат. Тоді введемо такі означення:

$$\cos\alpha = L \; ; \; \cos\beta = M \text{ і } \cos\gamma = N$$

I. Очевидно, що на підставі взорців (99), за аналітичною геометрією, одержимо:

$$L = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} ; \; M = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \text{ і } N = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

або означивши коротко:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \Delta F$$

Матимемо:

$$L = \pm\frac{\partial F}{\partial x}\Delta F \; ; \; M = \pm\frac{\partial F}{\partial y}\Delta F \text{ і } N = \pm\frac{\partial F}{\partial z}\Delta F \ldots (101)$$

де „+" відповідає додатньому напряму прямової (зовнішній прямовій, а „−" навпаки.

II. Аналогічно, коли поверхню заснувано рівнянням:

$$z = \psi(x, y)$$

матимемо:

$$L=\pm\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}};\quad M=\pm\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\ \text{і}\ N=\pm\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\ \ldots(102)$$

III. Нарешті, хай задана поверхня визначається рівняннями:

$$x=\varphi(u,v);\quad y=\psi(u,v)\ \text{і}\ z=\chi(u,v)$$

Візьмім на ній якусь точку M і поведемо через неї прямову до поверхні (рис. 128). Очевидно, що ця прямова є одночасно й прямовою до усіх кривих, що лежать на даній поверхні й переходять через дану точку M її. Між останніми кривими неодмінно знаходитимуться й задані раніш криволінійні координати, що визначатимуться умовами $u=const$ і $v=const$. Отже написавши рівняння довільної дотичної, що переходить через точку M, а саме:

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'},$$

Ми визначимо в цьому рівнянні кутові змінні x', y', z', так щоб задана точка була по черзі дотичною до 1ої й 2ої криволінійних координат, а для цього:

1) вважаючи в рівняннях поверхні змінним $v=const$, одержимо:

$$x'=\frac{\partial\varphi}{\partial u};\quad y'=\frac{\partial\psi}{\partial u}\ \text{і}\ z'=\frac{\partial\chi}{\partial u}$$

і 2) беручи $u=const$, маємо:

$$x'=\frac{\partial\varphi}{\partial v};\quad y'=\frac{\partial\psi}{\partial v};\quad z'=\frac{\partial\chi}{\partial v}$$

Очевидно, що дотичні:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial\psi}{\partial u}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial\chi}{\partial u}}$$

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial\psi}{\partial v}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial\chi}{\partial v}}$$

є прямові до нормалі, що переходить через точку M, а через те мають виконуватися умови прямовости, а саме:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}L + \frac{\partial\psi}{\partial u}M + \frac{\partial\chi}{\partial u}N = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}L + \frac{\partial\psi}{\partial v}M + \frac{\partial\chi}{\partial v}N = 0$$

Вилучаючи 1) M (множеннєм 1-го рівняння на $\frac{\partial\psi}{\partial v}$, а 2-го на $\frac{\partial\psi}{\partial u}$ і відлічуючи одно з одного) і 2) L (в той же спосіб) ми визначимо по черзі N через L і M, а саме:

$$1)\quad N = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}}\cdot L$$

$$\text{і}\quad 2)\quad N = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial v}}\cdot M$$

А звідси прирівнюючи вартости N маємо:

$$N = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}}L = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial v}}\cdot M$$

або:

$$\frac{L}{\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}} = \frac{M}{\frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial v}} = \frac{N}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}}$$

або:

$$\frac{L}{A} = \frac{M}{B} = \frac{N}{C},$$

де через A, B і C ми для скорочення означуємо почерзі відповідних знаменників. Підносимо ці рівности до квадрату й складаємо похідну пропорцію, а саме:

$$\frac{\cancel{L^2+M^2+N^2}^{\,1.}}{A^2+B^2+C^2}=\frac{L^2}{A^2}=\frac{M^2}{B^2}=\frac{N^2}{C^2}$$

Тому:

$$L=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ M=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ N=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

де $A=\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}$

$$B=\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}\ \text{і}\quad C=\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$$

Таким чином:

$$L=\pm\frac{\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left[\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right]^2}}\ \text{і т.д.}\ldots\quad(103)$$

Очевидно, що кожна площа, що переходить через прямову KN є також площею прямового до поверхні. Таких прямових площ буде безліч і всі вони складуть осевий жмут з віссю KN – що є дотою прямовою (рис. 129)

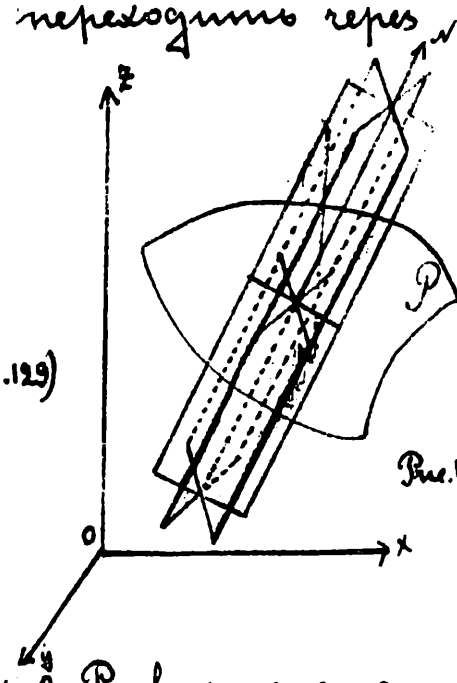


Рис. 129

§59. Кривина ліній прилеглих до поверхні, або так званих поверхньових кривих.

Припустім, що задана поверхня P визначена

рівняння (рис. 130)

$$z = f(x, y)$$

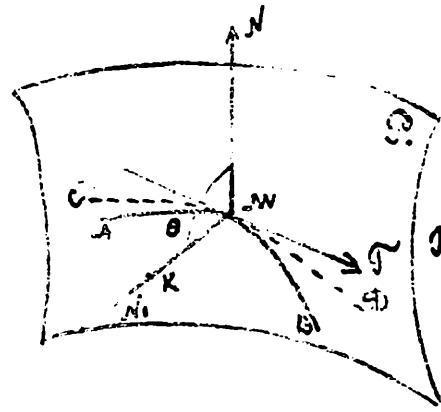


Рис. 130

Візьмім на ній довільну точку $M(x, y, z)$ і через неї поведемо на поверхні якусь криву AB. Хай дотична до неї T, поведена через точку M має напрямні косинуси λ, μ і ν. Поведемо також: 1) прямовисну N до поверхні P і 2) головну прямовисну N_1 до кривої AB і візьмім на останній точку K - центр кривини AB. Означимо тоді через ρ величину MK = = радіус кривини.

Ми знаємо, що напрямні косинуси дотичної є рівні:

$$\lambda = \frac{dx}{ds} \; ; \; \mu = \frac{dy}{ds} \; \text{ і } \; \nu = \frac{dz}{ds} \; \ldots (1)$$

де під ds означимо диференціял дуги кривої AB. Але ця крива лежить на поверхні P, а тому значини x, y і z мають задовольняти її рівнянню. Отже:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = p\,dx + q\,dy$$

(де вживаємо означення Монжа). Вставляючи це вартість у третє рівняння (1), маємо:

$$\nu = \frac{p\,dx + q\,dy}{ds} = p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds}$$

Що за допомогою перших двох рівнянь (1) дасть нам такий звязок між напрямними косинусами розглядненої дотичної:

$$\nu = p\lambda + q\mu \quad \ldots\ldots (2)$$

Тепер обчислимо кут θ між прямовою поверхні й головною прямовою даної кривої AB, щоб скористатися ним для вимагання кривини ρ цієї кривої. З аналітичної геометрії ми знаємо, що cosinus кута між двома простими в рівній сумі здобутків відповідних напрямних знімників рамен його. А тому означивши, як раніш, напрямні знімники прямової до поверхні через L, M і N, а напрямні знімники головної прямової до кривої AB через λ_n, μ_n і ν_n, матимемо:

$$\cos\theta = \lambda_n L + \mu_n M + \nu_n N$$

В попередньому § ми довели (вірш 102), що:

$$L = \frac{-p}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}; \quad M = \frac{-q}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}} \quad і \quad N = \frac{1}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

А за взорами сфрене (1-ша лінія) маємо:

$$\lambda_n = \rho\frac{d\lambda}{ds}; \quad \mu_n = \rho\frac{d\mu}{ds} \quad і \quad \nu_n = \rho\frac{d\nu}{ds}$$

Тому:

$$\cos\theta = \pm\frac{\rho\left(\frac{d\nu}{ds} - p\frac{d\lambda}{ds} - q\frac{d\mu}{ds}\right)}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \quad \ldots\ldots (3)$$

З рівности (2) маємо, що:

$$\nu = p\lambda + q\mu$$

а тому:

$$d\nu = p\,d\lambda + \lambda\,dp + q\,d\mu + \mu\,dq$$

або ділячи на ds:

$$\frac{d\nu}{ds} = \left(p\frac{d\lambda}{ds} + q\frac{d\mu}{ds}\right) + \left(\lambda\frac{dp}{ds} + \mu\frac{dq}{ds}\right)$$

Вставляючи остаточно вартість $\frac{dv}{db}$ у рівність (3) після скорочення маємо:

$$\cos\theta = \pm \frac{\rho\left(\lambda\frac{dp}{db} + \mu\frac{dq}{db}\right)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \quad \ldots\ldots (4)$$

Розглянемо тепер, що уявляють з себе диференціяли: dp і dq. Ми знаємо, що $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, а $q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Тому:

$$dp = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy$$

і аналогічно:

$$dq = d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy$$

Введемо означення Монжа й далі:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s \quad і \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t$$

і маємо:

$$dp = r\,dx + s\,dy$$

$$dq = s\,dx + t\,dy$$

Поділивши обидві частини рівности на db, одержимо:

$$\frac{dp}{db} = r\frac{dx}{db} + s\frac{dy}{db} = r\lambda + s\mu .$$

Так само:

$$\frac{dq}{db} = s\lambda + t\mu .$$

Отже вставляючи знайдені вартости в рівність в рівнім (3) маємо:

$$\cos\theta = \pm \frac{\rho\left[\lambda(r\lambda + s\mu) + \mu(s\lambda + t\mu)\right]}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

або:

$$\cos\theta = \pm \frac{\rho\,(r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2)}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \quad \ldots\ldots (104)$$

Очевидно „+" відповідає додатньому напрямку головної прямової, а „−" відьмному. Надалі ми будемо вважати напрям цієї прямової за додатний, а тому:

$$\rho = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2}\cos\theta \quad \ldots (105)$$

Тут ми констатуємо, що:

Луч кривини (а значить і сама кривина) залежить лише від величин напрямних змінників відповідної дотичної та косинуса нормального кута (кута між нормалями до поверхні й до даної кривої. Цей кутик ми умовимо, береться лише додатніми напрямами обох нормалей)

Тепер поведемо через точку M нормальний (прямовий) переріз поверхні відповідно до даної кривої AB на ній (рис. 130)

Прямовим перерізом поверхні, відповідно до даної кривої AB на ній, будемо звати криву CD перетину поверхні площею, що переходить через нормалю цієї поверхні й дотичну до даної кривої AB поведену через точку M. (Очевидно, що ця дотична буде разом одною з дотичних до поверхні, а тому буде й дотичною до самого прямого перерізу).

Зрозуміла річ, що прямовий переріз є також поверхневою кривою даної поверхні P, а тому взір (105) буде вирахом і для луча R кривини її. Лишаю-

стеся лише установити вартість θ, λ, μ і ν для цієї кривої.

1) Як розглянений раніш, так і даний прямовий переріз поверхні мають спільну дотичну T, а тому й вартости λ, μ і ν для обох кривих однакові.

2) <u>Прямовий переріз є плоска крива, а тому її головна нормаля лежить в площі перерізу й проходить через точку M прямово до дотичної T.</u> Але площа перерізу поведена (~~поведена~~) через нормалю до поверхні й дотичну T, а тому <u>нормаля до поверхні лежить в цій же площі, переходить через точку M і є прямовою до дотичної T.</u>

Таким чином нормаля поверхні й нормаля прямового перерізу поведені через дану точку поверхні є <u>пристайні</u> (рис. 131, a, b). Але в залежности від форми круг точки M самої поверхні, ці нормалі можуть бути в обох випадках (a) і (b) противних напрямів (в бік випуклости, чи випуклости поверхні). В першому випадку кут $\theta = 0$, а в другому: $\angle\theta = \pi$, а тому в першому випадку $\cos\theta = 1$, а в другому $\cos\theta = -1$; загалом $\cos\theta = \pm 1$

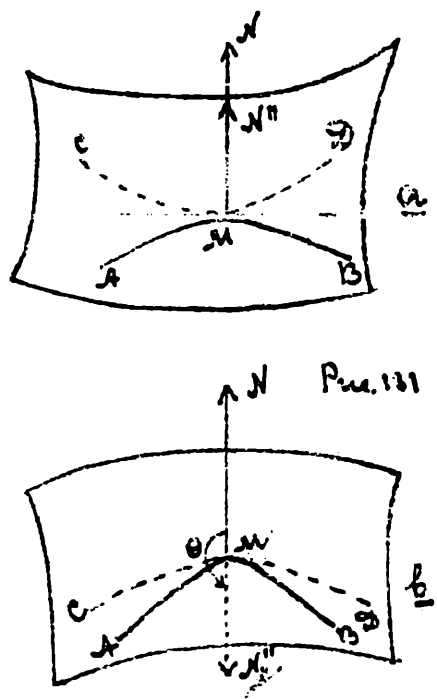


Рис. 131

Отже, вставляючи знайдену вартість $\cos\theta$ у вираз (105) для ρ, ми одержимо вартість R луча кривини прямового перерізу, а саме:

$$R = \pm \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2} \quad \ldots\ldots\ldots (106)$$

А порівнюючи взори (105) і (106) маємо:

<u>Теорему Монье:</u>

$$\rho = \pm R\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots (107)$$

Словами: <u>Центр кривини в якій будь точці поверхньової лінії є лежати центра кривини відповідного прямового перерізу (себто того, що має спільну дотичну з даною кривою) на площу кривини даної кривої.</u>

З'ясуємо це: кут θ є кутом поміж головною нормалею даної поверхньової кривої й нормалею самої поверхні (що є разом і нормалею прямового перерізу (рис. 132). Центри кривини K і K_1, даної кривої й прямового перерізу, лежить на напрямі нормалі, а тому рівність $\rho = \pm R\cos\theta$ виявляє, що луч

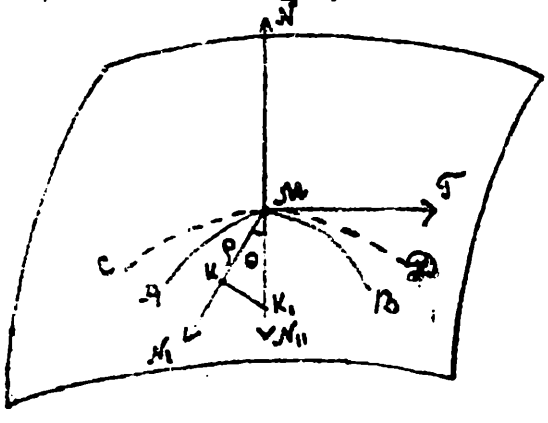


Рис. 132

Пояснення до рис 132.
N – нормаля поверхні
N_1 – нормаля кривої AB
N_{11} – нормаля прямового перерізу (D)
K центр кривини даної поверхньової кривої, а K_1 центр кривини прямового перерізу.

кривини ρ поверхньової кривої є лежати лучі кривини R прямового перерізу на головну нормалю даної поверхньової кривої (рис. 132). Але всі нормалі прямові до спільної дотичної, тому лежати лучі кривини R на головну нормалю N_1

є одночасно й метою цього луча на площу кривини ГМN, що переходить через дотичну й цю головну нормалю MN₁. Таким чином луч кривини ρ якоїсь поверхневої кривої AB є метою луча кривини відповідного прямового перерізу на площу кривини, а разом і центр K кривини цієї поверхневої кривої AB є метою центру кривини відповідного прямового перерізу на площу кривини тієї ж кривої AB. Це й є теорема Мюньє.

Висновок. Вартість cosθ не може бути більшого одиниці, а тому: Із всіх поверхневих кривих, що мають спільну дотичну відповідний прямовий переріз має найбільший луч кривини (найменшу кривину)

§60. Будування кругів кривини для всіх можливих поверхневих кривих, що переходять через точку M поверхні й мають спільну дотичну.

Хай через точку M (рис. 133) переходить через поверхневих кривих, що мають спільну дотичну T. Виберемо з них криву CD, що є прямовим перерізом відповідним до цих кривих і збудуємо центр його кривини K. Коли тепер

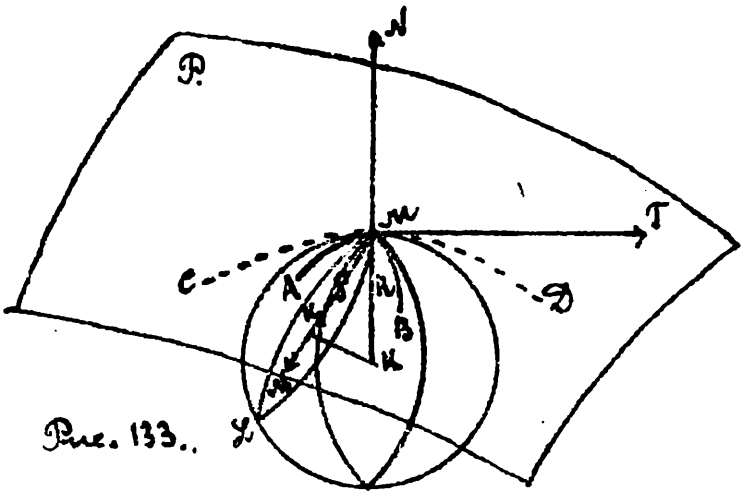


Рис. 133.

круг K, яко центра очерчено кулю кривини (кулю луча R = MK), то тоді контур малого круга цієї кулі, що переходить через точку M є кругом

кривини одній з даних поверхнових кривих. Справді: хай площа кривини якоїсь поверхнової кривої AB перетинає дану кулю по кругу MZ. Тоді центр цього кругу K_1 є лежати (як відомо з геометрії) центра кулі на площу його, а тому й є центром кривини кривої AB, що має KZ за площу кривини.

§61. Кривина прямових перерізів.

Ми вивели, що луч кривини прямового перерізу буде:

$$R = \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}{2\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2}$$

Візьмім тепер за початок координат точку M поверхні, а за вісь z нормалю до поверхні, тоді площа дотична до поверхні в точці M буде координатною площею xy. Тепер кут дотичної до прямового перерізу AB буде лежати в цій площі xy. Ми означили кут нахиленої дотичної з віссю x-ів через φ; тоді кут тієї ж дотичної з віссю y-ів буде $\frac{\pi}{2}-\varphi$ (рис. 134)

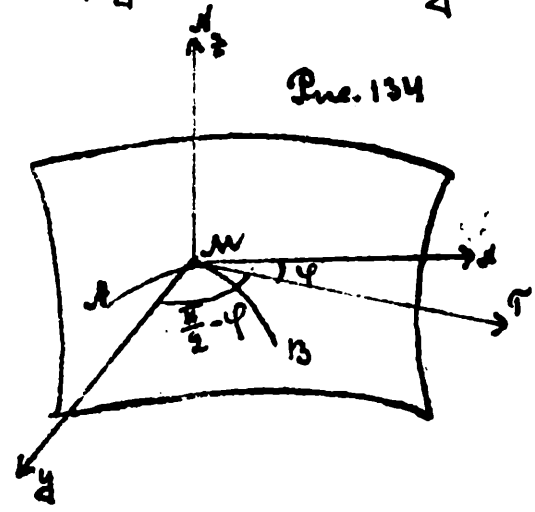


Рис. 134

Перетворимо вираз ρ до нових координат:

1) $\lambda = \cos\varphi$ (бо φ є кут дотичної з віссю x-ів)

2) $\mu = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin\varphi$

Кути ж нормалі (що взята за вісь z) з осями x-ів і y-ів будуть $\frac{\pi}{2}$, а тому λ_n і $\mu_n = 0$ (як cosinus'и цих кутів)

Але: $\lambda = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$; $\mu = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$

Маємо $p=0$ і $q=0$, бо $\sqrt{p^2+q^2+1} \neq 0$

а звідси: $\sqrt{p^2+q^2+1} = \sqrt{1} = 1$

Через те:

$$R = \frac{1}{r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi}$$

а звідси кривина:

$$K = \frac{1}{R} = r\cos^2\varphi + 2\sin\varphi.\cos\varphi + t\sin^2\varphi \quad \ldots (4)$$

Будемо шукати при яких вартостях кривина K буде maximum або minimum. Для цього, як маємо вище, прирівняємо до нуля першу похідну через φ, а саме:

$$K' = -2r\sin\varphi.\cos\varphi + 2s(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2t\sin\varphi.\cos\varphi = 0$$

або:

$$-r\sin 2\varphi + 2s\cos 2\varphi + t\sin^2\varphi = 0$$

Маємо:

$$2s\cos 2\varphi = (r-t)\sin 2\varphi$$

або:

$$2s = (r-t)\,tg\,2\varphi$$

А звідси:

$$tg\,2\varphi = \frac{2s}{r-t}$$

Отже:

$$\varphi = \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\,arctg\frac{2s}{r-t}$$

де n в даному випадку може бути або нуль, або 1. Очевидно, цей вірш не визначає φ, коли або $s=0$, або $r=t$. Ці випадки ми розглянемо окремо.

Коли б ми вставили знайдені вартости φ у другу похідну, то одержали б вартости її рівні нулю, а маємо ці вартости φ є в одному випадку maximum, а в другому minimum.

Ці прямові перерізи є взаємно прямові і звуть

ся головними.

Коли б ми одержали, що $s=0$ і $r=t$, то в вправу (d) одержали б:

$$\frac{1}{R} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

Це показує, що в цьому випадку кривина всіх прямових перерізів не залежить від кута φ, а тому однакова. Такі точки поверхні звуться пупковими або загруженими.

Геометрично точку загруження можна інтерпретувати так: Припустім, що якась точка M на даній поверхні P, має ту властивість, що навколо неї можна буде окреслити досить малу частину цієї поверхні, яка зливається з поверхнею кулі, куля кривини R. Очевидно, що для цієї точки кривини всіх прямових перерізів буде однакова й тому вона зветься точкою загруження (або пупковою точкою).

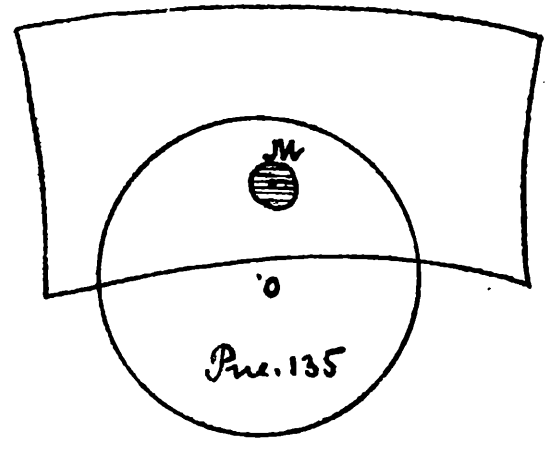


Рис. 135

Обернемо тепер вісі x-ів і y-ів так, щоб напрямі xz і yz злилися з напрямами головних перерізів. В цьому разі кут φ для одної з координатних осей стане рівним нулеві, а тому:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2s}{r-t} = 0 \quad , \text{ а звідси } s=0$$

Отже (з рівняння d) маємо:

$$\frac{1}{R} = K = r\cos^2\varphi + t\sin^2\varphi \quad \ldots (\rho)$$

Очевидно, що при такому перетворенню координатних осей головні радіуси кривини, що відповідають головним перерізам будуть відповідати вартостям $\varphi = 0$ і $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Себто:

$$k_1 = r \quad ; \quad k_2 = t$$

а звідси:

$$r = \frac{1}{R_1} \quad ; \quad t = \frac{1}{R_2}$$

де R_1 і R_2 відповідно радіуси кривини головних перерізів. Вставляючи ці вартости в (β), одержимо:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2} \quad \ldots\ldots (108)$$

Це є взір Ейлера, що устанавлює залежність між радіусом кривини якого бажаємо прямового перерізу й радіусами кривини головних прямових перерізів.

Коли взяти ще який другий прямовий переріз, площа якого була прямовою до даного перерізу, то очевидно, що його кривина буде висловлюватися рівнянням (108) з тим, що в ньому кут φ заступатиметься кутом $(\frac{\pi}{2} - \varphi)$. Отже тоді матимемо:

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin^2\alpha}{R_1} + \frac{\cos^2\alpha}{R_2} \quad \text{або}$$

додаючи це рівняння до рівняння (108), одержимо:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \ldots\ldots (109)$$

<u>Сума кривин двох прямових перерізів, що лежать взаємно прямові площі є величина стала рівна сумі кривин головних прямових перерізів. Суму $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ звуть середньою кривиною поверхні в точці M, або кривиною Ейлера.</u>

§62. Індикатриса Дюпена.

Хай маємо поверхню визначаємо рівнянням

$$z = f(x, y) \quad \ldots \quad (1)$$

Перерізаємо цю поверхню площею рівнобіжною до дотичної в даній точці M. Хай рівняння її буде:

$$z = d \quad \ldots \quad (2)$$

Розв'язуючи рівняння (1) і (2) як систему, ми одержимо рівняння перерізу поверхні площею (2), а саме:

$$f(x, y) = d \quad \ldots \quad (3)$$

Будемо вартість d без кінця зменшувати, тоді вартість x і y, що задовольняють рівняння (3) будуть зменшуватися й коли d простуватиме до нуля й x і y простуватимуть до нуля (бо початок координат є точка M, що належить до поверхні). Добираємо вартість d так, щоб x і y були безмежно малими ми зможемо розкласти $f(x, y)$ в ряд Маклорена, а саме:

$$f(x, y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^2\right) + \ldots$$

Далі вводячи означення Монжа, маємо:

$$f(x, y) = f(0,0) + (px + qy) + \frac{1}{2!}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \ldots$$

Ми взяли за початкову точку M поверхні, за віс z-ів - нормаль поверхні, а за площу xy - дотичну площу до поверхні в точці M, а тому, як довели в попередньому §-і

$$p = 0 \; ; \quad q = 0$$

і крім того:

$$f(0,0) = 0$$

Kramerius 5
Digital library

Terms of use

The library provides access to digitalized documents only for non-commercial, scientific and education purposes. Some of documents are subject to copyright. Using digital library and generating digitized copy of the document, the user agrees to comply these terms of use which must be included in each copy. Any further copying material from digital libraries is not possible without any written permission of the library.

Main title: **Dyferenc?jal'ne čyslennja**
Author: **?vanenko, Je.**
Publisher: **Vydavnyče t-vo "S?jač" pry Ukrajins'komu pedahoh?čnomu ?nstytut? ?m. M. Drahomanova**
Published in: **1925**
Pages: **301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, [374]**

Отже:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\cdot(rx^2 + 2sxy + ty^2)$$

Тамим чином рівняння перерізу площею $z = d$ буде:

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2d \quad \ldots\ldots (110)$$

Це й є індикатриса Дюпена.

Показано, що ця крива 2ого ступіня дає можливість судити про кривину даного прямового перерізу.

Виводячи вгір цієї кривої ми припустили, що даний прямовий переріз положений так, що дотична до нього в точці M творить з віссю x-ів, кут φ [а з віссю y-ів - кут $\frac{\pi}{2} - \varphi$]. Отже перетворимо рівняння (110) до біполярних координат, беручи за біполя точку M, а за біполярну вісь саму дотичну T. Тоді взори перетворення будуть:

$$x = \rho\cos\varphi; \qquad y = \rho\sin\varphi$$

де ρ є луч вектор. точки M. У висліді нашого перетворення матимемо:

$$r\rho^2\cos^2\varphi + 2s\rho^2\sin\varphi\cos\varphi + t\rho^2\sin^2\varphi = 2d$$

або (поділяючи всі члени по ρ^2):

$$r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cdot\cos\varphi + t\sin^2\varphi = \pm\frac{1}{m^2} \quad \ldots\ldots (111)$$

де $m^2 = \pm\frac{\rho^2}{2d}$ ($+m$ - залежить від знаку d). Порівнюючи це рівняння з рівнянням (4) попереднього §-а ми бачимо, що:

$$\frac{1}{R} = \pm\frac{1}{m^2} \quad ; \quad R = \pm m^2$$

Ми бачимо, що <u>квадрати лучів векторів кривої рівняння (111) взяті зі знаком „+" чи „-" пропор-</u>

чині лучам кривини прямових перерізів, що переходять через ці лучі - вектори. При тому коефіцієнтами пропорційности є $\frac{1}{2d}$, де d є змінне рівняння площі індикатриси. Тому індикатриса дає можливість судити про зміни кривини даного прямового перерізу в залежности від зміни кута φ.

Будемо досліджувати рівняння індикатриси (III):

1) Це рівняння не має членів першого виміру, а тому (аналіт. геом.) центр індикатриси лежить на осі Z-ів.

2) Вираз (дискримінант) цього рівняння є:

$$D = rt - s^2$$

тому можуть бути 3 випадки: $D \gtreqless 0$. Коли $D = rt - s^2 > 0$, то, як відомо з аналітичної геометрії, індикатриса (III) є еліпса. При тому в залежности від знаку d, ця еліпса може бути реальною, або уявною. Очевидно, ми виберемо вартість d таке, щоб еліпса була реальною. Але в цьому разі для всіх вартостей φ кривина $\frac{1}{R}$ буде або завжди $\frac{1}{R} = +\frac{1}{m^2}$, або завжди $\frac{1}{R} = -\frac{1}{m^2}$, себто одного знаку. Отже всі прямові перерізи в точці M мають однакову випуклість. З цього видно, що крім точки M вся поверхня $z = f(x)$ лежить з одного боку площі індикатриси.

При змінах φ найбільшу й найменшу вартість луча вектора еліпси індикатриси має на великій та малій осях еліпси. Очевидно, що й луч кривини прямового перерізу пропорційний лучу вектору,

буде мати найбільшу й найменшу вартість для прямових перерізів, що переходять через дотичні рівнобіжні до осей еліпса індикатриси. Ці перерізи й будуть головними прямовими перерізами.

II. Припустім тепер, що $D = rt - s^2 = 0$; тоді з рівняння індикатриси маємо:

$$r\cos^2\varphi + 2\sqrt{rt}\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi \mp \frac{1}{m^2} = 0$$

або:

$$\left(\sqrt{r}\cos\varphi + \sqrt{t}\sin\varphi\right)^2 \mp \frac{1}{m^2} = 0$$

Це рівняння розпадається на 2, а саме:

або 1) для верхнього знаку

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{r}\cos\varphi + \sqrt{t}\sin\varphi + \frac{1}{m} = 0\\ \sqrt{r}\cos\varphi + \sqrt{t}\sin\varphi - \frac{1}{m} = 0\end{aligned}\right\} \cdots (\alpha)$$

або 2) для нижнього знаку:

$$\sqrt{r}\cos\varphi + \sqrt{t}\sin\varphi \pm \frac{i}{m} = 0 \quad \ldots (\beta)$$

Отже, в цьому випадку індикатриса є системою двох простих: (α) – реальних і (β) – уявних. Тому тут ми можемо вибрати знак d так, щоб одержати лише перший випадок (α)

Це знов приводить до того, що луч кривини всіх прямових перерізів поверні, для всіх вартостей φ однакового знаку. Себто поверхня круг точки M лежить з одного боку індикатриси. Розглядаючи рівняння (α), ми бачимо, що система простих індикатриси є системою рівнобіжних. Рис центр індикатриси лежить на осі z-ів, то ці прості однаково віддалені

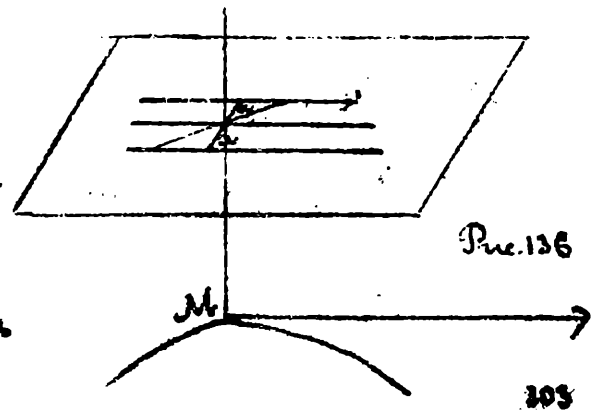


Рис. 136

на певну величину від точки N перетину площі індикатриси після Z-ів.

Коли змінювати величину, то луч вектора ρ змінюється від найменшої величини ρ=a, де a є стале віддалення простих індикатриси від точки N, до найбільшої: ρ=cs (рис. 136) Напрям цих конечних величин ρ будуть власне прямові (ρ=a є прямо до даних простих індикатриси, а ρ=cs є рівнобіжна до них)

Очевидно для прямових перерізів тих же напрямів і луч кривини R (що є пропорційне до луча вектора ρ) буде мати також найменшу й найбільшу величину (головні перерізи). При тому при R=cs кривина $\frac{1}{R}=0$, себто цей головний переріз є проста лінія.

III. Коли же D<0, себто $rt-s^2<0$, то згідно з аналітичною геометрією індикатриса є гіпербола, при тому величини ±d відповідають власне взаємно спряженій гіпербола. Отже тепер луч кривини може бути подвійний: $R=\pm m^2$

Хай головні вісі гіпербали будуть a і b (рис. 137). Тоді починаючи від A луч вектор ρ спадає від cs до a, потім від вершка K до B зростає знова до cs, далі спадає до b, знова зростає до cs, потім спадає до -a і т. д. Разом з цим і відповідний луч кривини прямових перерізів то зростає, то спадає. Тому

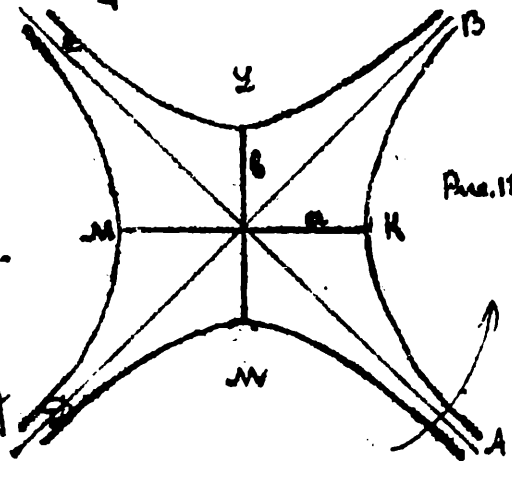


Рис. 137

й кривина $\frac{1}{R}$ змінюючися прийняла найбільшу вартість для прямових перерізів, що переходять вісь a й найменшу для вісі $b\left(-\frac{2d}{\rho}\right)$

Ті прямові перерізи, що переходять через асимптоти гіперболи індикатриси мають кривину $\frac{1}{R}=0$. В цей момент відбувається зміна знаку R, а через те прямові перерізи змінюють свою випуклість в протилежному напрямі (рис. 138).

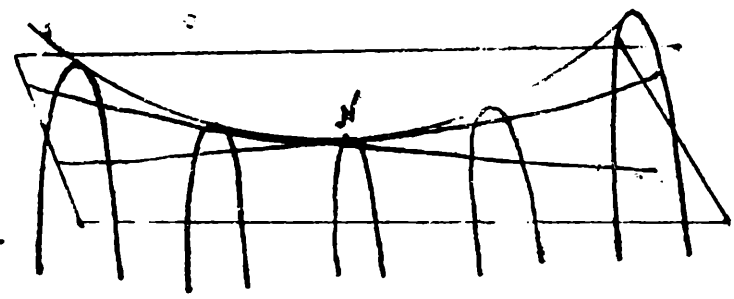


Рис. 138

На підставі попередньої аналізи поверхні можна поділити на еліптичні, параболичні й гіперболичні. Означого цього є те, що 1) для еліптичної поверхні лучі головних перерізів одного знаку, а тому їх здобуток буде:

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_1\cdot R_2}>0$$

2) для параболичної поверхні або $\frac{1}{R_1}=0$, або $\frac{1}{R_2}=0$, а тому здобуток їх:

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=0$$

і нарешті 3) для гіперболичної поверхні лучі кривин головних перерізів різнених знаків і тому здобуток їх

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}<0$$

Цей здобуток має назву <u>кривини Гауса.</u>

§63. Обчислення головних лучів кривини.

Ми знаємо, що вартість луча кривини кожного прямового перерізу в даній точці M буде мати вигляд:

$$R = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2} \quad (1)$$

Як ми зазначали, вартість цього R залежить лише від напрямних зліпників цього перерізу (властиво від напрямних зліпників відповідної дотичної, що визначає положення перерізу).

Відомо, що для головних прямових перерізів вартість R є maximum або minimum, а тому щоб знайти лучі кривини, для головних прямових перерізів, досить визначити вартости λ і μ, при яких будуть maximum або minimum луча кривини R. Але зліпника дві, а тому нам треба мати ще умову, що звязувала їх.

Такою умовою є звязок між напрямними зліпниками дотичної, виведеної при обчисленню нормального кута (себто: (2) §59), а саме:

$$\gamma = p\lambda + q\mu$$

Щоб вилучити непотрібне нам γ, ми приєднуємо вір звичайної властивости напрямних зліпників кожного вектора й рівняння дотичної, а саме:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

Звідци маємо:

$$\lambda^2 + \mu^2 + (p\lambda + q\mu)^2 = 1 \quad \text{або:}$$

$$\lambda^2(1+p^2) + 2pq\lambda\mu + \mu^2(1+q^2) = 1 \quad \ldots (2)$$

Це й є та умова, що звязує наші змінні λ і μ.

Вартість R [взір (1)] має змінні лише в знаменнику, а тому досить знайти maximum та minimum цього знаменника й тоді maximum'у знаменника буде відповідати minimum R і навпаки. Отже ми маємо задачу:

<u>Знайти maximum і minimum функції:</u>

$$f = r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2 \quad \ldots (3)$$

де λ і μ звязані умовою (2). Розвязуючи цю задачу способом Лягранжа з рівнянь (2) і (3) складаємо функцію:

$$U = r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2 + k[(1+p^2)\lambda^2 + 2pq\lambda\mu + (1+q^2)\mu^2]$$

де k є довільний множник. Далі:

1) Беремо похідну цієї функції через λ і зрівнюємо її з нулем, маємо:

$$2r\lambda + 2s\mu + 2k\lambda(1+p^2) + 2kpq\mu = 0$$

або: $$\lambda r + s\mu + k[\lambda(1+p^2) + pq\mu] = 0 \quad \ldots (\alpha)$$

2) Те саме робимо з похідною функції через μ:

$$2s\lambda + 2t\mu + 2kpq\lambda + 2k\mu(1+q^2) = 0$$

або: $$s\lambda + t\mu + k[pq\lambda + \mu(1+q^2)] = 0 \quad \ldots (\beta)$$

Щоб виключити неозначеного множника k, ми помножимо рівняння (α) на λ, а рівняння (β) на μ й додамо їх, тоді:

$$(\lambda^2 r + 2s\lambda\mu + t\mu^2) + k[\lambda^2(1+p^2) + 2\lambda\mu pq + \mu^2(1+q^2)] = 0$$

Але многочлен в дужках ( ) є рівний з f [див. (3)], а многочлен в дужках [ ] є рівний з 1 [див. (2)]. Тому:

$$f + k = 0 \quad \text{або:} \quad k = -f$$

Вставляючи тепер вартість k в рівняння (α) і (β) одержимо:

$$\lambda r + s\mu - f[\lambda(1+p^2) + pq\mu] = 0 \quad (\gamma)$$

$$\lambda s + t\mu - f[\lambda pq + \mu(1+q^2)] = 0 \quad \ldots (\delta)$$

Виключаючи звідси:

1) f, ми одержимо звязок поміж напрямними кутами головної дотичної (дотичних головних перерізів)

2) виключивши λ і μ одержимо рівняння, що визначатимуть R_1 і R_2 головних перерізів. Справді:

I) 1) визначаючи f з обох рівнянь і прирівнюючи одержані вартости, маємо:

$$\frac{\lambda r + s\mu}{\lambda(1+p^2) + pq\mu} = \frac{\lambda s + t\mu}{\lambda pq + \mu(1+q^2)}$$

А звідси після зведення до спільного знаменника й упорядкування, маємо:

$$\lambda^2[s(1+p^2) - rpq] + \lambda\mu[(1+p^2)t - (1+q^2)r] + \mu^2[tpq - s(1+q^2)] = 0 \quad \ldots (4)$$

Ці рівняння складено при виконанні умов максимум'а й мінімум'а для R, а тому умо-

ляє звязок між напрямними косинусами головної дотичної (по 2 вартости для кожної із 2х головних дотичних)

Це рівняння є однорідним, а тому з нього легко визначити відношення цих напрямних косинусів, а саме означаючи відношення:

$$\frac{\mu}{\lambda} = \psi$$

маємо:

$$\psi^2 \cdot \left[pqt - (1+q)^2 s\right] + \psi\left[(1+p^2)t - (1+q^2)r\right] + \left[(1+p^2)s - pqr\right] = 0 \quad \cdots (112)$$

де $\mu = \lambda\psi$.

Припустімо, що розв'язавши рівняння (112) ми одержимо дві вартости: ψ_1 і ψ_2. Щоб вилучити самі λ і μ ми скористуємося рівнянням (2). Справді, коли вставимо в нього вартости $\mu = \lambda\psi_1$ і $\mu = \lambda\psi_2$, то одержимо:

$$\lambda^2(1+p^2) + 2pq\lambda^2\psi_1 + (1+q^2)\lambda^2\psi_1^2 = 1$$

або $\lambda^2\left[(1+p^2) + 2pq\psi_1 + (1+q^2)\psi_1^2\right] = 1$

А звідси:

$$\lambda_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{(1+p^2) + 2pq\psi_1 + (1+q^2)\psi_1^2}}$$

Аналогічно:

$$\lambda_2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{(1+p^2) + 2pq\psi_2 + (1+q^2)\psi_2^2}}$$

Тому:

$$\mu_1 = \frac{\pm \psi_1}{\sqrt{(1+p^2) + 2pq\psi_1 + (1+q^2)\psi_1^2}},$$

$$\mu_2 = \frac{\pm \psi_2}{\sqrt{(1+p^2) + 2pq\psi_2 + (1+q^2)\psi_2^2}}$$

(113)

Знаки ± відповідають протилежним нап-

рахам від точки дотику вздовж однієї й тієї дотичної, а тому будемо далі брати лише +.

II) Упорядкуємо рівняння (γ) і (δ) і маємо:

$$\lambda[r - f(1+p^2)] + \mu(s - pqf) = 0$$

$$\lambda[s - pqf] + \mu[t - f(1+q^2)] = 0$$

Щоб вилучити λ і μ складаємо пропорції й порівнюємо їх маємо:

$$\frac{\lambda}{-\mu} = \frac{t - f(1+q^2)}{s - pqf} = \frac{s - pqf}{r - f(1+q^2)}$$

Звідци:

$$(s - pqf)^2 = [r - f(1+p^2)][t - f(1+q^2)]$$

або:

$$f^2[p^2q^2 - (1+p^2)(1+q^2)] + f[t(1+p^2) + r(1+q^2) - 2pqs] + (s^2 - rt) = 0$$

Отже:

$$-f^2(p^2+q^2+1) + f[t(1+p^2) + r(1+q^2) - 2pqs] - (rt - s^2) = 0$$

або:

$$f^2(p^2+q^2+1) - f[t(1+p^2) + r(1+q^2) - 2pqs] + (rt - s^2) = 0$$

Але:

$$R = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{f}$$

тому:

$$f = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{R}$$

а вставляючи цю вартість в наше рівняння, та зводячи його до спільного знаменника одержимо:

$$(rt - s^2)R^2 - \sqrt{p^2+q^2+1}\,[t(1+p^2) + r(1+q^2) - 2pqs]R +$$
$$+ (p^2+q^2+1)^2 = 0 \quad \ldots\ldots (114)$$

Рівняння (114) дає два розв'язки R_1, R_2 куїв кривини головних нормальних перерізів.

§64. Обчислення головних кривин поверхні: Гаусса й Ейлера.

Коли після вставки $f = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{R}$ ми не будемо вводити рівняння до спільного знаменателя [це теж, коли всі члени рівняння (114) поділимо на R^2] то матимемо:

$$(p^2+q^2+1)\cdot\left(\frac{1}{R}\right)^2 - \sqrt{p^2+q^2+1}\left[t(1+p^2)-r(1+q^2)-2pqs\right]\frac{1}{R} + (rt-s^2) = 0$$

або:

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 - \frac{t(1+p^2)-r(1+q^2)-2pqs}{(p^2+q^2+1)^{3/2}}\frac{1}{R} + \frac{rt-s^2}{(p^2+q+1)^2} = 0:$$

З властивости розв'язків квадратових рівнянь маємо:

1) Вираз Ейлерової кривини (перетинної):

$$H = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} = \frac{t(1+p^2)+r(1+q^2)-2pqs}{(p^2+q^2+1)^{3/2}} \quad \ldots (115)$$

2) Вираз Гаусової кривини.

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2} \quad \ldots (116)$$

Вірш (116) показує, що яку б систему координат ми не взяли б:

для еліптичної точки: $rt-s^2>0$ маємо: $K>0$

" параболичної " : $rt-s^2=0$ " $K=0$

" гіперболичної " : $rt-s^2<0$ " $K<0$

§65. Кривинна лінія.

Збудуємо на даній поверхні з кожній її точці головні перерізи й вибираємо з цих точок ті, що складають геометричний осередок дотичкальний до всіх головних дотичних, поведених через ці точки.

Згадані точки утворять криву, що дотичні до неї в кожній її точці будуть головними дотичними до самої поверхні. Такі криві звуться <u>кривинними лініями</u>, або <u>лініями кривини поверхні</u>

Очевидно, що через кожну точку поверхні переходить по 2 кривинні лінії відповідно двом головним дотичним в цій точці. Коли знайшлемо всі кривинні лінії, то знайшлемо й всі головні прямові перерізи в кожній точці поверхні, а тим самим можемо цілком дослідити характер самої поверхні.

<u>Знайдемо рівняння кривинної лінії.</u> Очевидно, що першим рівнянням її буде рівняння поверхні, на якій ця лінія лежить, себто:

$$z = f(x, y) \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

З другого боку дотичні до цієї кривої є одночасно й головними дотичними у різних точках поверхні, а тому напрямні змінних її мусять задовольняти рівнянню (112) попереднього §, а саме:

$$\psi^2\left[pqt - (1+q^2)s\right] + \psi\left[t(1+p^2) - r(1+q^2)\right] + \left[(1+p^2)s - pqr\right] = 0$$

де $\mu = \lambda\psi$. Але напрямні змінних λ і μ, як дотичних до даної кривої висловлюються як:

$$\lambda = \frac{dx}{d\sigma} \; ; \quad \mu = \frac{dy}{d\sigma}$$

де $d\sigma$ є диференціал дуги кривої. А звідци:

$$\psi = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{dy}{dx}$$

Таким чином остатнє рівняння матиме вигляд:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[pqt-(1+q^2)s\right]+\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\left[t(1+p^2)-r(1+q^2)\right]+\left[(1+p^2)s-pqr\right]=0 \cdot\cdot (\beta)$$

Рівняння (α) і (β) визначають потрібну кривину лінію. На жаль, ми не знаємо ще інтегрування диференційних рівнянь не зможемо оперувати рівняннями (α) і (β) в загальному вигляді й обмежимося лише окремими випадками.

Приклад. Знайти кривині лінії поверхні обороткового тіла рівняння:

$$z=f(x^2+y^2) \quad \text{або} \quad z=f(R), \text{ бо } x^2+y^2=R^2$$

Складаємо рівняння (β) і для цього обчислюємо

1) $p=\frac{\partial f}{\partial x}=f'\cdot 2x=2xf'$; 2) $q=\frac{\partial f}{\partial y}=2yf'$

3) $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2xf''+2f'=4x^2f''+2f'$

4) $t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4y^2f''+2f'$ 5) $s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xyf''$

Тому:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\left[\cancel{16xy^3f'^2f''}+8xyf'^3-4xyf''-\cancel{16xy^3f'^2f''}\right]+$$

$$+\frac{\partial y}{\partial x}\left[4y^2f''+\cancel{2f'}+\cancel{16x^2y^2f'^2f''}+8x^2f'^3-4x^2f''-\cancel{2f'}-\cancel{16x^2y^2f'^2f''}-8y^2f'^3\right]+$$

$$+4xyf''+\cancel{16x^3yf'^2f''}-\cancel{16x^3yf'^2f''}-8xyf'^3\Big]=0$$

Звідси:

$$4xy(2f'^3-f'')\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left[8f'^3(x^2-y^2)-4f''(x^2-y^2)\right]\frac{dy}{dx}-$$

$$-4xy\left[2f'^3-f''\right]=0 \quad \text{або:}$$

$$4xy(2f'^3-f'')\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4(x^2-y^2)(2f'^3-f'')\frac{dy}{dx}-4xy\left[2f'^3-f''\right]=0$$

Виносячи за дужки: $4(2f'^3-f'')$, маємо:

$$4(2f'^3-f'')\left[xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-xy\right]=0$$

А звідци:

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2-y^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

Або означивши $\frac{dy}{dx} = u$, маємо:

$$xyu^2 + x^2u - y^2u - xy = 0$$

звідци:

$$xu(yu+x) - y(yu+x) = 0 \quad \text{або:} \quad (yu+x)(xu-y) = 0$$

Тому:

$$(yu+x) = 0 \; ; \qquad xu - y = 0$$

Себто:

$$\text{I)}\; y\frac{dy}{dx} + x = 0 \qquad \text{II)}\; x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

I) зводяти до сталого значення: $ydy + xdx = 0$ й інтегруючи: $\int ydy + \int xdx = C_1$ маємо: $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_1$ або $x^2+y^2 = 2C_1 = C^2$ (const).

Отже рівняння кривиної кривої будуть:

$$z = f(x^2+y^2) \; ; \quad x^2+y^2 = C^2 = R^2 \text{ (const)}.$$

звідци:

$$z = f(C^2) = d(\text{const})$$

Себто всі кривинні лінії лежать в площах прямових до осі z (рівнобіжних до площі xoy) бо d зі зміну інтегрування є довільним. Очевидно, що ці кривинні лінії є круги, прямові до осі z-ів (рівнобіжні, або широти)

II). $x\frac{dy}{dx} - y = 0$, або: $xdy - ydx = 0$

Діливши всі члени на x^2, маємо:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

А звідци:

$$\int d\left(\frac{y}{x}\right) = C \text{ (const)} \; ; \quad \frac{y}{x} = C \; ; \quad y = Cx.$$

Таким чином одержимо такі рівняння кривинної лінії:

$$1)\ z = f(x^2+y^2) \quad і \quad 2)\ y = Cx$$

Друге рівняння є рівняння сліду площі, що переходить через вісь z-ів. При змінності вартостей C, це буде рівняння всієї площі з осевого пучку площ, що має своєю віссю вісь z-ів. Таким чином для кожної точки поверхні кривинна лінія є перетином поверхні з цією площею (меридіян).

§ 66. Огортальні поверхні.

Візьмемо рівняння поверхні:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0$$

де α є довільний змінник. Очевидно, що це буде загальним рівнянням родини поверхень. Кожній окремій вартості $\alpha = \alpha_0$ буде відповідати одна певна поверхня цілої родини. Для всіх точок такої поверхні змінник лишається сталим і змінюється лише при переході від однієї поверхні до другої.

Розглянемо дві досить близькі поверхні, що відріжняються змінниками: α і $\alpha+\Delta\alpha$, їх рівняння будуть:

$$\begin{cases} f(x, y, z, \alpha) = 0 \\ f(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha) = 0 \end{cases} \quad (A)$$

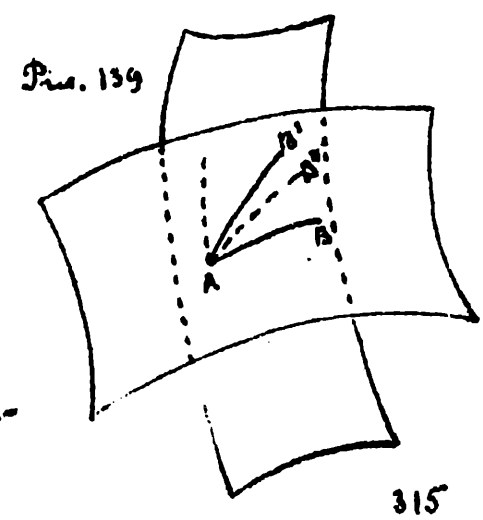


Рис. 139

Візьмемо $\Delta\alpha$ так малим, щоб ці поверхні могли перехрещуватися вздовж якоїсь кри-

вої AB' (рис. 139). Коли вартість $\Delta\alpha$ будемо змінювати, так щоб це $\Delta\alpha$ простувало до нуля, то разом з цим перехрестя цих площ AB' буде змінювати й своє положення й форму (AB'' і т. д.). Припустім, що лежкові вартості $\Delta\alpha$ відповідатиме якась лінія перехрестя AB, що її будемо звати <u>прилеглою кривою родини</u>.

Очевидно, що кожна лінія перехрестя двох поверхень родини визначатиметься рівняннями (A), яко системою. Прилегла ж крива тихож визначатиметься тією ж системою при умові, що $\Delta\alpha \ldots 0$

Складемо з рівнянь системи (A) нове рівняння, відлічуючи з 2-го рівняння 1-ше і ділячи вислід на $\Delta\alpha$, а саме:

$$\frac{f(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0$$

Це рівняння як вислідне з даних може заступити кожне із рівнянь системи (A), а тому ми створимо нову систему:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0$$

$$\frac{f(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0$$

що є еквівалентною з попередньою. Як ми вже зазначали, щоб одержати рівняння прилеглої кривої, треба взяти випадок $\lim \Delta\alpha = 0$ й ми приходимо до системи:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha) &= 0 \quad (1) \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha) &= 0 \quad (2) \end{aligned}\right\} \ldots (117)$$

Очевидно, що в залежности від вартости α, ця крива лежатиме кожний раз на певній поверхні, що складає дану родину. Отже таких кривих буде безліч і всі вони створюватимуть геометричний осередок, що ми назву <u>огортальної поверхні даної родини поверхень.</u> Самі ж окремі поверхні даної родини звуться огорненими.

Очевидно, що рівняння огортальної поверхні не залежатиме від окремих вартостей змінної α й тому одержиться шляхом виключення його з рівнянь (117). Це виключення можна зробити так: 1) виключимо α з рівняння [117,(2)] як якусь функцію від x, y, z і вставимо в рівняння [117,(1)], тоді одержимо нове рівняння:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \cdot\cdot (13)$$

що й є рівнянням огортальної поверхні. Цей спосіб дає право в деяких випадках вважати рівняння [117,(1)]:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0$$

за рівняння огортальної, при умові, що в цьому разі α – не є довільним змінним, а функцією: $\alpha = \varphi(x, y, z)$, визначеною з рівняння [117,(2)], себ-то $f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$. Це дає змогу й огортальну й огорнену поверхню визначити рівнянням цілої родини:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \cdot$$

з тією різницею:

1) Коли $f(x, y, z, \alpha) = 0$ є рівнянням самої роди-

ти, то α в цьому є довільний змінне, якому можна давати дві безмежно довільні вартости.

2) Коли $f(x, y, z, \alpha)=0$ є рівнянням одної з огорнених поверень (одної поверні з родини), то α є в цьому певною сталою величиною $=\alpha_0$.

3) Коли $f(x, y, z, \alpha)=0$ є рівнянням огортальної, то α в цьому є змінною функцією x, y, z, вираженою з допоміжного рівняння $f'_\alpha(x, y, z, \alpha)=0$

Приклад. Знайти огортальну родини куль сталого луча r, центри яких посуваються здовж осі x-ів.

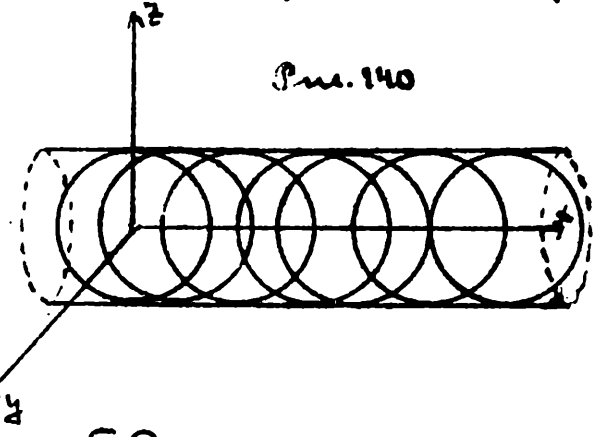


Рис. 140

Центр кулі посувається здовж осі x-ів тому значини його будуть $(\alpha, 0, 0)$, де α є довільно-змінним. Тому рівняння родини куль буде:

$$(x-\alpha)^2+y^2+z^2=r^2$$

Допоміжне рівняння: $f'_\alpha(x, y, z, \alpha)=0$ матиме вигляд:

$$-2(x-\alpha)=0 . \text{ Отже } \alpha=x.$$

Через те рівняння огортальної буде:

$$y^2+z^2=r^2$$

Це рівняння прямого циліндра, що має центральний контур на площі yz і всі вісь саму вісь x-ів. (рис. 140).

Загальна огортальні родини куль сталого луча творять так звані трубчасті поверні

§ 67. Основна властивість огинаючих поверхонь.

Огинаюча поверхня має спільну дотичну площу з кожною з огинених поверхонь у всіх точках, відповідних для цієї огиненої, приналежної кривої. (Инакше, огинаюча доторкається кожної з огинених поверхонь у всіх точках її приналежної кривої).

Хай дана огинена поверхня визначена вартістю параметра $\alpha = \alpha_0$, себто її рівняння буде:

$$f(x, y, z, \alpha_0) = 0 \quad \cdots \quad (\alpha)$$

Рівняння же огинаючої буде:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \quad \cdots \quad (\beta)$$

де α є функцією x, y, z, визначеною з рівняння

$$\frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad \cdots \quad (\gamma)$$

Напишемо рівняння площі дотичної для кожної з цих поверхонь в їх спільній точці $M(x, y, z)$. Ми знаємо, що рівняння дотичної площі до поверхні (α) буде:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0 \quad \cdots \quad (\delta)$$

бо $\alpha_0 = \text{const}$. Рівняння же дотичної площі до огинаючої поверхні (β) напишеться так:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f)(X - x) + \frac{\partial}{\partial y}(f) \cdot (Y - y) + \frac{\partial}{\partial z}(f) \cdot (Z - z) = 0$$

де символами $\frac{\partial}{\partial x}(f)$ означимо окрему похідну через x від $f(x, y, z, \alpha)$, де α є теж функцією x і т. д.

Тому:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial y}(f)=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y};\ \frac{\partial}{\partial z}(f)=\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

Отже рівняння дотичної до огортальної площі матиме вигляд:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right](X-x)+\left[\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right](Y-y)+\left[\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right](Z-z)=0$$

Або:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)\right]+$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial \alpha}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial \alpha}{\partial z}(Z-z)\right]=0$$

Але згідно умові α визначається з рівняння (γ) себто з рівности $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$, а тому другий доданок лівої частини рівняння є рівний з нулем. Отже рівняння площі дотичної в точці M до огортальної поверхні матиме вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0 \quad \ldots (\varepsilon)$$

Рівняння (ε) і (δ) цілком одинакові.

Ми брали точку M спільну й для огортальної й для огорненої поверхні, и ми знаємо з самого визначення прилеглої кривої, що ця точка мусить лежати й на ній, себто задовольняти рівняння (117). Таким чином теорема є доведеною.

§68. Огортальні поверхні 2-го роду.

Припустимо, що ми маємо родину поверхень, що порушуються двома незалежними змінними α і β. Рівняння такої системи буде вигляд:

$$f(x, y, z, \alpha, \beta)=0$$

Дамо тимчасом змінникові (β) певну вартість β_0 й візьмім дві яких будь поверхні з даної родини, що відповідають певним змінним вартостям α, напр.

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$
$$\text{і} \quad f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha, \beta) = 0$$

Вібрання $\Delta\alpha$ так малим, щоб ці поверхні перетинались, одевидно, вздовж якоїсь кривої ab. Коли $\Delta\alpha$ буде змінювати свою вартість, простуючи до нуля, то й крива ab буде змінювати свої положення й форму і у випадку $\lim \Delta\alpha = 0$ ця крива прийме якесь остаточне положення й форму. Цю криву будемо звати <u>прилеглою кривою поверхні згідно змінника α.</u>

Очевидно, що її рівняння одержимо міркуваннями попереднього § і вони матимуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0 \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0 \end{aligned}\right\} (A)$$

Таксамо одержимо рівняння <u>прилеглої кривої згідно змінника β, а саме:</u>

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0 \\ f'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0 \end{aligned}\right\} (B)$$

Змінюючи одночасно і α і β ми одержимо ряд поверхень, що матимуть загалом лише одну спільну точку (перетин прилеглих кривих (A) і (B)). Ця точка має назву прилеглої точки системи поверхень. Ясна річ, координату прилеглої точки можна визначити розв'язавши систему рівнянь:

$$\left.\begin{array}{ll} f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 & (1) \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 & (2) \\ f'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 & (3) \end{array}\right\} \ldots (118)$$

У висліді розвязання системи цієї можемо висловлюватися як функції α і β, себто:

$$x = \varphi(\alpha, \beta); \quad y = \psi(\alpha, \beta) \text{ і } z = \chi(\alpha, \beta) \ldots (C)$$

Коли α і β матимуть певні вартости, що відповідають даній огорненій поверхні, то ми одержимо певну прикмету точку. Коли же α і β будуть змінними то очевидно, ми матимемо справу з геометричним осередком прикметних точок, себто з поверхнею. Ця поверхня зветься огортальною поверхнею системи поверхонь або <u>огортальною поверхнею 2-го роду.</u>

Цю же саму поверхню можемо одержати, коли з рівнянь (2) і (3) системи (118) визначимо α і β як функції x, y, z і вставимо їх в рівняння (1) тієї ж системи (118). Таким чином рівняння (1) системи (118) можемо розглядати:

1) Як рівняння родини поверхонь, коли α і β є довільно-змінними величинами (змінниками)

2) Як рівняння окремої поверхні родини, коли α і β мають певні сталі вартости.

і 3) Як рівняння огортальної поверхні 2-го роду коли α і β є змінні величини функції x, y і z, що визначаються з рівнянь (2) і (3) системи (118).

§ 69. <u>Основна властивість огортальної поверхні 2-го роду.</u>

<u>Огортальна поверхня 2-го роду має спільну</u>

дотичну площу з коженого огорненого поверхнею в її приналежній точці.

Дано α і β певні вартости α_0, β_0. Тоді рівняння даної огорненої поверхні буде:

$$f(x, y, z, \alpha_0, \beta_0) = 0 \quad (a)$$

Візьмім приналежну точку $M(x, y, z)$ [що визначається рівняннями: $x = \varphi(\alpha_0, \beta_0)$; $y = \psi(\alpha_0, \beta_0)$ і $z = \chi(\alpha_0, \beta_0)$] і через неї поведемо площу дотичну до поверхні (a). Рівняння її буде:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0 \quad \cdots (б)$$

де α_0 і β_0 = const. Рівняння же огортальної поверхні, як доведено, буде:

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \quad \cdots (в)$$

де α і β є певні функції x, y, z визначені з рівнянь (2) і (3) системи (118). Точка M, як приналежна лежить і на огортальній площі. Загальне рівняння дотичної площі, поведеної до огортальної поверхні через цю точку M, матиме вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f) \cdot (X - x) + \frac{\partial}{\partial y}(f) \cdot (Y - y) + \frac{\partial}{\partial z}(f)(Z - z) = 0$$

Але f є функція x, y, z безпосередньо й через α і β, а тому:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y}(f) = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

$$\text{і } \frac{\partial}{\partial z}(f) = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z}$$

Таким чином рівняння нашої дотичної площі матиме вигляд:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z)\right] + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial \alpha}{\partial z}(Z - z)\right] +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\left[\frac{\partial \beta}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial \beta}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial \beta}{\partial z}(Z-z)\right]=0$$

Ми знаємо, що α і β визначаються з рівнянь (2) і (3) системи (118), а саме з рівнянь:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0 \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial \beta}=0$$

Через це, вставляючи ці вартости в попередне рівняння ми одержимо остаточно рівняння площі дотичної до огортальної поверхні в такому вигляді:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0 \quad \cdots (D)$$

Порівнюючи рівняння (B) і (D) переконуємося в правдивости нашої теореми.

<u>Приклад.</u> Знайти огортальну родини еліпсоїд сталої величини осей, що своїм центром і двома з цих осей лежить на площі XY.

Хай осі еліпсоїди будуть: a, b і c, а значить центру $(\alpha, \beta, 0)$. Тоді рівняння еліпсоїди буде:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \cdots (1)$$

Беручи похідні цього рівняння через α і β й, приєднуючи одержані нові рівняння до першого, маємо систему:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ &x=\alpha \\ &y=\beta \end{aligned}\right\} \cdots (2)$$

бо: $-\frac{2(x-\alpha)}{a^2}=0$ і $-\frac{2(x-\beta)}{b^2}=0$. Виключуючи з цієї системи змінних α і β маємо рівня-

на ортогональної поверхні, а саме:

$$z^2 = c^2 \; ; \quad z = \pm c \; . \; . \; . \; (3)$$

Рівняння (3) є системою двох площ рівнобіжних і віддалених від площі xoy на величину осі c.

§70 Рух повороту.

Хай родина поверхень визначається рівнянням:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

і залежить від одного змінника.

Візьмемо з досить близької поверхні з цієї родини такі, щоб вони відповідали вартостям змінника:

$$\alpha, \quad \alpha + \Delta\alpha, \quad \alpha + \Delta_1\alpha$$

Тепер добираємо вартости $\Delta\alpha$ і $\Delta_1\alpha$ такі, щоб ці поверхні перехрещувалися. Але кожні три поверхні перехрещуються в одній або в кількох точках і, щоб визначити значення цього перехрещення, треба розв'язати цю систему рівняння цих поверхень, а саме:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha) &= 0 \\ f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) &= 0 \\ f(x, y, z, \alpha + \Delta_1\alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; (\beta)$$

Складаємо, як і в попередньому § рівняння:

1) $$\frac{f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0$$

$$\frac{f(x, y, z, \alpha + \Delta_1\alpha) - f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha)}{\Delta_1\alpha - \Delta\alpha} = 0$$

Ці рівняння як виведені з системи (β) можуть цілком заступити дві останні її рівняння.

Коли $\Delta\alpha$ і $\Delta_1\alpha$ будуть простувати до нуля, то ми одержимо остаточне положення перехрестя поверхонь, що назвемо приналежною точкою (їх загалом буває одна, а може бути й декілька). Тоді значини цієї точки визначатимуться з системи:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha) &= 0 \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha) &= 0 \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\gamma)$$

У свою чергу ми можемо скласти нове виведене рівняння:

$$\lim_{\Delta\alpha \ldots 0} \frac{f'_\alpha(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha) - f'_\alpha(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0$$

або:

$$f''_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$$

Це рівняння, як виведене з двох останніх може заступити в системі перше рівняння, а тому остаточно маємо систему:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha) &= 0 \quad (1) \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha) &= 0 \quad (2) \\ f''_\alpha(x, y, z, \alpha) &= 0 \quad (3) \end{aligned}\right\} \ldots (119)$$

Ця система й дає визначини значини точки x, y, z, а саме:

$$x = \varphi(\alpha); \quad y = \psi(\alpha) \quad і \quad z = \chi(\alpha) \ldots (120)$$

де α стала величина, що відповідає даній он-

ремій поверхні родини.

Коли же ми α будемо давати все нові й нові вартости, то визначатимемо все нові й нові прилеглі точки, що відповідатимуть кожній раз все новій поверхні з родини.

Нарешті, коли взяти α за змінну, то рівняння (120) будуть рівняннями геометричного осередку всіх прилеглих точок. Цей геометричний осередок, як бачимо з сформи рівнянь, є крива й зветься <u>рубом повороту родини поверхень.</u>

З огляду на те, що в систему (119) входять перші два рівняння, що визначають відповідну прилеглу криву, то кожна прилегла точка лежить на відповідній прилеглій кривій, а тому й геометричний осередок цих точок, себто руб повороту цілковито лежить на огортальній поверхні.

Вилучивши α зі всіх трьох рівнянь системи (119) дасть рівняння рубу повороту у вигляді:

$$F(x, y, z) = 0 \,, \quad \Phi(x, y, z) = 0 \,,$$

як перехрестя двох поверхень. Це вилучення α можемо перевести так: вилучити α з рівняння (3) системи (119) як функцію x, y, z і знайдену вартість $\alpha = \psi(x, y, z)$ вставити а) в рівняння (1) і б) в рівняння (2) даної системи (119). Маємо таким рівняння

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha) &= 0 \\ f'_\alpha(x, y, z, \alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (121)$$

[де $\alpha = \psi(x, y, z)$ визначене з рівняння (3) системи (119)] є системою рівнянь, що визначають руб повороту.

§71. Основна властивість рубу повороту.

Руб повороту є доторкальною всіх приналежних кривих родини, себто руб повороту має спільну дотичну з відповідною приналежною кривою, що переходить через точку дотику.

Коли точка дотику є спільна й для рубу повороту й для приналежної кривої, то для знаття дотичних до обох цих кривих досить, щоб і напрямні знаменники цих дотичних були однакові.

Рівняння коженої дотичної до якої будь кривої має вигляд:

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz} \quad \ldots (d)$$

Отже напрямні знаменники пропорційні походам dx, dy і dz.

Ми знаємо, що кожена приналежна крива визначається рівняннями:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0$$
$$f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$$

де α для коженої окремої приналежної кривої має певну стану вартість α_0.

Щоб визначити dx, dy, dz треба буде проди-ференцувати ці рівняння й маємо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz &= 0 \\ \frac{\partial f'_\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial y}dy + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial z}dz &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\beta)$$

бо $\alpha = const.$

З другого боку вартости dx, dy і dz для рівняння дотичної до рубу повороту ми визначимо продиференцувавши рівняння цього рубу, а саме рівняння (121). Тоді ми

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha &= 0 \\ \frac{\partial f'_\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial y}dy + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial z}dz + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial \alpha}d\alpha &= 0 \end{aligned}\right\}$$

, де $\alpha = \psi(x, y, z)$ визначене з рівняння (3)(б)

Але з рівнянь (2) і (3) системи (119) бачимо, що $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = f'_\alpha = 0$ і $\frac{\partial f'_\alpha}{\partial \alpha} = f''_\alpha = 0$. Тому для визначення вартостей dx, dy, dz для рівняння дотичної до рубу повороту маємо систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz &= 0 \\ \frac{\partial f'_\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial y}dy + \frac{\partial f'_\alpha}{\partial z}dz &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\gamma)$$

Порівнюючи систему (β) і (γ) і ми бачимо, що вони є однакові, а тому й їх розв'язки dx, dy і dz є однакові, а це доводить що дотичні до рубу повороту й відповідної приключенної кривої зливаються в одну.

<u>Приклад</u>. Знайти огортальну поверхню й руб повороту родини куль даного сталого руху, що мають центри в одній площі й зачіпають від одного злінника.

Центри куль лежать в одній площі, якщо вісь

мемо за площу xy. Тоді значини центру можемо означити:

$$x = \alpha; \quad y = \varphi(\alpha); \quad z = 0$$

Себто центри посуваються вздовж напрямної кривої рівняння $y = \varphi(x)$. Таким чином рівняння родини куль буде:

$$(x-\alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 = r^2 \quad \ldots (\alpha)$$

Щоб знайти огортальну поверхню беремо похідну через α і маємо:

$$-2(x-\alpha) - 2[y - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) = 0$$

або:

$$x - \alpha + [y - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) = 0 \quad \ldots\ldots (\beta)$$

Вилучаючи α з рівняння (α) і (β) матимемо огортальну поверхню даної родини куль. Щоб дослідити цю огортальну, ми звернемо увагу на те, що рівняння (β) є першого ступіня, себто є рівнянням площі. Площа перетинає кулю по кругах, а тому всі прилеглі криві поверхні є круги.

Значини центру задовольняють рівняння (β), а тому прилеглі криві є великі круги кулі. Далі рівняння (β) показує, що площа (β) є площею прямового до площі xy, а тому остання є площею симетрії огортальної поверхні.

Ці дослідження показують, що огортальна поверхня має форму труби й тому зветься трубчастою поверхнею.

Диференцюючи рівняння родини удруге через маємо:

$$[y-\varphi(\alpha)]\,\varphi''(\alpha) = 1+\varphi'^2(\alpha) \quad \ldots\ldots (\gamma)$$

Рівняння (α), (β) і (γ) після вилучення з них змінника α дають рівняння рубу повороту, або теж рівняння повороту одержуємо визначивши з рівнянь (α), (β) і (γ) вартости x, y, z, а саме:

$$x = \alpha - \frac{[1+\varphi'^2(\alpha)]\,\varphi'(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$$

$$y = \varphi(\alpha) + \frac{1+\varphi'^2(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$$

$$z = r^2 - \frac{[1+\varphi'^2(\alpha)]^3}{\varphi''^2(\alpha)}$$

§72. Поверхні розгортання.

Ми знаємо, що кожна поверхня певного роду геометричний осередок точок, звязаних рівнянням вигляду $f(x, y, z) = 0$. Між цими поверхнями можуть бути й такі, що на них нів якому напрямі й положенню не може пристати проста лінія, а будуть і такі, що на них може пристати ціла сметелка простих. Тоді ці поверхні творяться рухом, згідно певного закона, простої. Напр. циліндрична поверхня або поверхня однополоної гіперболоїди і т. д. Такі поверхні звуться лінійними. Деякі з лінійних поверхень можемо розгорнути в площу, напр., циліндричну, або конічну, а деякі, напр. поверхню згаданого гіперболоїда або гіперболічного параболоїда розгорнути в площу не можемо. Першого роду лінійні поверхні мають назву прямих

лінійних поверхень або поверхень розгортання, а другого роду носять назву <u>косих лінійних поверхень</u>

Завданням нашого § є дослідження прикмет і властивостей лінійних поверхень 1го роду, себто поверхень розгортання.

Візьмім родину площ, що залежала б від одного якого змінника t. Рівняння такої родини можна написати так:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

де коефіцієнти A, B, C і D є функціями даного змінника t. Визначимо з цього рівняння z і матимемо

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

Нові коефіцієнти $-\frac{A}{C}$, $-\frac{B}{C}$, $-\frac{D}{C}$ будуть також певними функціями t. Перетворимо ці функції так: візьмім за нового змінника $\alpha = -\frac{A}{C} = f(t)$ і визначимо з нього t. Коли ми тепер вставимо вартість t в функцію $-\frac{B}{C}$ і $-\frac{D}{C}$, то перетворимо їх також в певні функції від α, а саме:

$$-\frac{A}{C} = \alpha \; ; \quad -\frac{B}{C} = \varphi(\alpha) \text{ і } -\frac{D}{C} = \psi(\alpha)$$

Таким чином рівняння родини матиме вигляд:

$$z = \alpha x + \varphi(\alpha) y + \psi(\alpha) \quad \ldots\ldots (122)$$

Рівняння (122) має окрему назву, а саме: рівняння <u>рухомої площі</u>, а змінник α зветься <u>керуючим змінником рухомої площі</u>, бо коефіц

зміна вартости α, змінює вартість сонцевих рівняння площі. З огляду на те, що напрямні змінники площі є пропорційні цим сонцевикам, то кожна зміна вартости α викликає відповідно зміну положення рухомої площі.

Щоб визначити прикмету криву, мусимо прилучити до рівняння родини площ ще диференцове рівняння, утворене прирівнянням нулеві першої похідної через змінника α лівої частини рівняння родини. Отже рівняння прикметної кривої містять вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + \varphi(\alpha) y + \psi(\alpha) &= z \quad (1) \\ x + \varphi'(\alpha) y + \psi'(\alpha) &= 0 \quad (2) \end{aligned}\right\} \cdots (123)$$

Обидва ці рівняння містять змінні x, y і z в першій ступіням, а тому система (123) визначає <u>просту</u>. Такими чином прикметна крива родини площ (залеженої від одного змінника) буде проста. Ця проста зветься <u>творчою</u> огортальної поверхні.

Сама ж огортальна поверхня одержиться з між самої системи (123) вилучення змінника α, себто огортальна поверхня містить рівнянням:

$$\alpha x + \varphi(\alpha) y + \psi(\alpha) = z$$

де α є функція x і y визначена з рівняння (2) системи (123)

Ми знаємо, що огортальна поверхня буде

геометричним осередком усіх прикметних кривих, а ці прикметні криві є простолінійні твори, а тому <u>огортальна родина площ залежних від одного змінника є лінійна поверхня.</u>

Щоб лінійна поверхня могла розгортатися, себто могла випростатися в площу, потрібно щоб всі, дотичні до поверхні, площі, поведені по черзі одній й тій самій творчій зливалися в одну, бо тоді при випростанні кожна твора приляпнеться всіма своїми точками до площі розгортання.

Отже, щоб наша лінійна поверхня, що її досліджуємо, була поверхнею розгортання, треба довести згадану властивість дотичних площ до неї.

Ми знаємо, що кожна з площ дотичних до огортальної якої-будь родини поверхень і поведених через яку-небудь точку прикметної кривої, є дотичною й до огорненої поверхні, що цій прикметній кривій відповідає (через цю прикметну криву переходить). Тому, коли на одній із творчих візьмемо точку й поведемо площу дотичну до огортальної лінійної поверхні, то вона буде дотичною й до відповідної огорненої площі, а це значить буде зливатися з нею, а разом і відповідною творчою, що лежить на ній.

Отже, кожна з площ даної родини, залеж-

ної від одного змінника α буде дотикатись своєї огортаючої лінійної поверхні вздовж точки відповідної твірної. Тому дана огортаюча лінійна поверхня є поверхнею розгортання. Таким чином всі дотичні площі до поверхні розгортання утворюють родину площ, залежних від одного якогось змінника α.

Пояснимо, що инші поверхні цієї властивости не мають.

Візьмім систему площ залежних від двох довільних змінників α і β. Рівняння такої родини (рухомої площі) буде:

$$f(\alpha,\beta)x + \varphi(\alpha,\beta)y + \psi(\alpha,\beta) = z \quad \ldots (124)$$

Щоб знайти прикмету точку ми мусимо додати 2 похідних рівняння й тоді маємо систему:

$$\left.\begin{aligned} &f(\alpha,\beta)x + \varphi(\alpha,\beta)y + \psi(\alpha,\beta) = z \quad (1)\\ &f'_\alpha(\alpha,\beta)x + \varphi'_\alpha(\alpha,\beta)y + \psi'_\alpha(\alpha,\beta) = 0 \quad (2)\\ &f'_\beta(\alpha,\beta)x + \varphi'_\beta(\alpha,\beta)y + \psi'_\beta(\alpha,\beta) = 0 \quad (3)\end{aligned}\right\} \ldots (125)$$

Коли дамо змінникові β яку окрему вартість, то рівняння (1) і (2) системи (125) будуть рівняннями системи простих, що відповідають змінкам α. Коли так само дамо змінникові α яку окрему стану вартість, то рівняння (1) і (3) системи (125) будуть рівняннями другої системи простих, залежних

від змін β.

Коли ці прості обох систем будуть реальні, то ми маємо справу з косою лінійною поверхнею, що має рівняння $\Phi(x, y, z)$ яке одержується з (125) виключенням обох змінних (напр. гіперболічного параболоїда.

Коли же ці прості є уявні, то перетин їх дасть реальну точку, а геометричний осередок останніх дасть криволінійну поверхню з рівняння також $\Phi(x, y, z)$ (напр. куля), одержаними як і попередньо.

І нарешті коли один із змінних, напр. β, буде функцією другого, напр. α), то тоді рівняння (2) і (3) системи (125) будуть висліди один другого й рівняння (3) відпаде. Ми прийдемо до однієї системи простолінійних творин, себто до поверхні розгортання, як огортальної родини площ залежних від одного змінника. Для виясненості наших твердженнь ми доведемо зворотно теорему й покажемо, що кожну довільну поверхню можна розглядати як огортальну родини площ від 2^x змінників.

Справді, хай рівняння якої будь довільної поверхні є:

$$z = f(x, y) \quad . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

Візьмім на ній точку, що має значення $[\alpha, \beta, f(\alpha, \beta)]$ і поведемо через неї площу дотичну до цієї поверхні. Рівняння такої площі, як

нам відомо, буде:

$$z - f(\alpha, \beta) = p(x - \alpha) + q(y - \beta) \ldots (\beta)$$

Даючи значинкам точки α і β різні довільні вартости, ми одержимо цілу систему дотичних площ і ці площі складуть родину, що визначатиметься рівнянням (β). Це рівняння показує, що загалом площі дотичні до якої будь поверхні складають родину площ, залежну від 2х довільних змінників. Дана поверхня буде доторкальною всіх площ заданої системи, а тому буде їх <u>огортальною.</u>

Хай рівняння (α) буде рівнянням якоїсь лінії на поверхні. Візьмім якусь точку поверхні, що лежить на творчій однієї системи й буде перехрестям з творчою із другої системи. Дотична площа поведена до поверхні через цю точку буде дотичною й до тій площі з родини, що відповідає певним вартостям змінників α_0 і β_0, які визначатимуть і прийняту точку, як перехрестя даних творчих. Очевидно, що ця дотична площа зіллється зі заданою площею з родини.

Коли ж ми візьмемо другу точку на тій же творчій першої системи, то й відповідатиме вже інша творча з другої системи (що відповідає якійсь вартості змінника β_1). А тому відповідна дотична площа до поверхні зіллється вже з другою площею родини, що відповідатиме новим змінникам, а саме α_0 і β_1 і т. д.

Отже ці міркування показують, що для кожої лінійної поверхні дотичні площі в кожній лінійній точці однієї й тої ж творчої є різні.

Тепер тепер можна сказати, що ознакою того, що дана поверхня буде поверхнею розгортання є те, що дотичні до цієї поверхні творять родину площ залежних від одного змінника.

Коли б до системи (123) додати ще й рівняння створене прирівнянням до нуля другої похідної через змінника від лівої частини рівняння сеної родини, то маємо систему:

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + \varphi(\alpha) y + \psi(\alpha) &= z \\ x + \varphi''(\alpha) y + \psi'(\alpha) &= 0 \\ \varphi''(\alpha) y + \psi''(\alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (126)$$

що визначає, як уже нам відомо, руб повороту. З цієї системи можемо визначити змінні x, y і z через α й ми одержимо рівняння рубу повороту в такім вигляді:

$$x = f(\alpha) \; ; \; y = f_1(\alpha) \; і \; z = f_2(\alpha)$$

Як було доведено, руб повороту має властивість, що дотичні до нього в кожній точці є спільні з дотичними до прилеглих кривих які через цю точку переходять. Але в даному разі ці прилеглі криві є простолінійними творчими, а тому:

Всі творчі поверхні розгортання є дотичними до рубра повороту її, себто поверхня

розгортання є геометричний осередок всіх дотичних до рубу повороту.

§73. Основна властивість поверхень розгортання.

Площі родини одного нахилення є площами кривих рубу повороту їх огортальної поверхні (розгортання).

Для доведення цієї теореми згадаємо, що коли через дану точку на кривій повести площу кривини й співпрямову, то остання буде прямою до першої. Ми знаємо, що руб повороту є геометричним осередком прямих точок, що лежать на площах родини. Тамим чином через кожну точку рубу повороту неодмінно переходить якась із площ родини. Коли ж в кожній з таких точок ми збудуємо відповідно співпрямову до рубу повороту й зуміємо довести, що вона є прямою до певної площі родини, що через цю точку переходить, то наша теорема буде доведена.

Ми одержали рівняння рубу повороту:

$$x = f(\alpha)\ ;\quad y = f_1(\alpha)\quad i\quad z = f_2(\alpha)\ \cdots\cdots (1)$$

за допомогою системи рівнянь (126):

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + \varphi y + \psi &= z \\ x + \varphi' y + \psi' &= 0 \\ \varphi'' y + \psi'' &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots (2)$$

де φ і ψ скорочене означення $\varphi(\alpha)$ і $\psi(\alpha)$. Кожній повній вартості α відповідає на рубі повороту окрема точка, що має значення $(f(\alpha), f_1(\alpha), f_2(\alpha))$

а в той час цій точці відповідає й певна площа родини, що переходить через неї й висловлюється рівнянням $\alpha x + \varphi y + \psi = z$, де α має ту саму дану окрему вартість що й точка.

Як знаємо рівняння співпрямової до рубу в даній точці при даній вартости α, матимемо вигляд:

$$\frac{x - f(\alpha)}{f_1' f_2'' - f_2' f_1''} = \frac{y - f_1(\alpha)}{f_2' f'' - f' f_2''} = \frac{z - f_2(\alpha)}{f' f_1'' - f_1' f''} \quad \ldots (3)$$

Коли вона є прямою до відповідної площі родини: $\alpha x + \varphi y + \psi = z$, що через цю точку переходить, то має задовольнятися умова прямовости, а саме пропорційність коефіцієнтів рівняння площі й кутових змінників співпрямової, себто:

$$\alpha : \varphi : -1 = (f_1' f_2'' - f_2' f_1'') : (f_2' f'' - f' f_2'') : (f' f_1'' - f_1' f'') \quad \ldots (4)$$

Щоб довести це, згадаємо що f, f_1 і f_2 одержані через вислідження x, y, z з рівнянь (2); тому, коли ці вартости f вставити в згадані рівняння системи (2), то одержимо тотожности:

$$\left.\begin{aligned} \alpha f + \varphi f_1 + \psi &= f_2 \quad (1) \\ f + \varphi' f_1 + \psi' &= 0 \quad (2) \\ \varphi'' f_1 + \psi'' &= 0 \quad (3) \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

для даної вартости α. Коли же ми будемо брати довільну точку на рубі повороту, то вартість α буде змінною й тому рівняння (5) дають нам функціональну залежність між коефіцієнтами рівняння родини площ і вартостями змінників точок на рубі. Продиференцуємо рівняння (1)

системи (5) через α, тоді матимемо:

$$\alpha f' + \varphi f_1' - f_2' + \underbrace{f + \varphi' f_1 + \psi'} = 0 \ .$$

Але сума членів $\longrightarrow$ згідно рівняння (2) є рівна з нулем, а тому:

$$\alpha f' + \varphi f_1' - f_2' = 0 \ \ldots\ldots (6)$$

Диференцуючи таким же рівняння (2) між іншим системи (5) маємо:

$$f' + \varphi' f_1' + \underbrace{\varphi'' f_1 + \psi''} = 0$$

Знова згідно рівняння (3) маємо:

$$f' + \varphi' f_1' = 0 \ \ldots\ldots (7)$$

і нарешті, диференцуючи, одержане нами рівняння (6), маємо:

$$\alpha f'' + \varphi f_1'' - f_2'' + \underbrace{f' + \varphi' f_1'} = 0$$

Але згідно рівняння (7) маємо:

$$\alpha f'' + \varphi f_1'' - f_2'' = 0 \ \ldots\ldots (8)$$

Тепер ми розв'язуємо рівняння (6) і (8) його спершу щодо α і $\varphi(\alpha)$. Для цього:

1) 1-ше й 2-е рівняння системи:

$$\left.\begin{aligned} \alpha f' + \varphi f_1' - f_2' &= 0 \\ \alpha f'' + \varphi f_1'' - f_2'' &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (9)$$

множимо: перше на f_1'', а друге на f' і відніймемо перше з другого, тоді маємо:

$$\alpha(f_1' f'' - f' f_1'') = f_1' f_2'' - f_2' f_1''$$

або:

$$\alpha = \frac{f_1' f_2'' - f_2' f_1''}{f_1' f'' - f' f_1''}$$

2) Множуючи 1ше рівняння на f_1'' а 2ге на f' і таким відніймаючи 2ге рівняння з 1ге маємо з вислідного рівняння вартість:

$$\varphi_{(x)} = \frac{f_2' f'' - f' f_2''}{f_1' f'' - f' f_1''}$$

Сотник же третьої змінної з рівняння: $\alpha x + \varphi y + \psi = z$ площі родини, як видно з самого рівняння є: -1. Складаючи відношення цих сотників, маємо:

$$\alpha : \varphi : (-1) = \frac{f_1' f_2'' - f_2' f_1''}{f_1' f'' - f' f_1''} : \frac{f_2' f'' - f' f_2''}{f_1' f'' - f' f_1''} : (-1)$$

або:

$$\alpha : \varphi : (-1) = (f_1' f_2'' - f_2' f_1'') : (f_2' f'' - f' f_2'') : (f' f_1'' - f_1' f'')$$

Що й є умовою (4). Таким чином теорема є доведеною.

<u>Приклад 1.</u> Дано родину площ, рівнобіжних до даної простої. Знайти їх огортальну.

Хай дана проста є вісь z-ів (рис. 141)

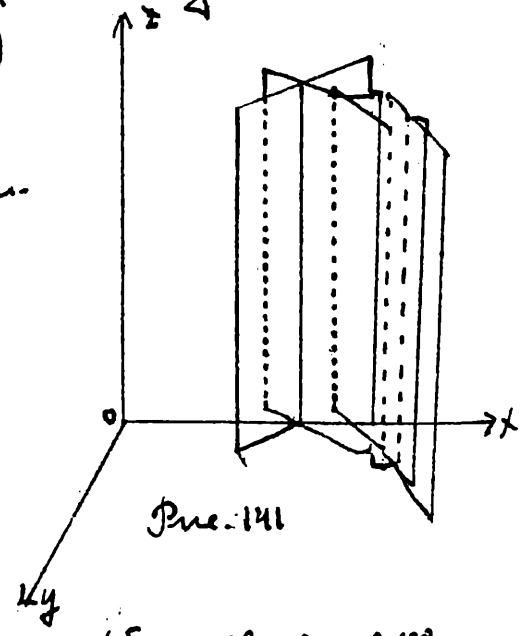


Рис. 141

Тоді рівняння рухомої площі рівнобіжної до осі z-ів має вигляд [див (122)]:

$$\alpha x + \varphi(\alpha) y + \chi(\alpha) = 0 \quad \cdots (\alpha)$$

Допоміжне рівняння вигляду $f_2' = 0$ буде:

$$x + \varphi'(\alpha) y + \psi'(\alpha) = 0 \quad \cdots (\beta)$$

Рівняння (α) і (β) виражають просту (бо рівняння 1ше ступіня) й притому рівнобіжну до осі z-ів, бо обидва рівняння не містять змінної z. Отже творні огортальної поверхні є рівнобіжні до осі z-ів

Таким чином огортальна поверхня є циліндричною. Виключивши з рівнянь (α) і (β) змінника (α) ми одержимо рівняння вигляду $f(x,y)=0$, що є рівнянням напрямного контуру, а разом і рівнянням самої циліндричної поверхні.

§73. Родина кривих.

Хай нам дано дві родини поверхень:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z,\alpha)&=0 \\ \varphi(x,y,z,\alpha)&=0 \end{aligned}\right\} \cdots (1)$$

залежних від спільного змінника α. Коли ми рівняння цих родин розглядатимемо як систему, то кожній окремій вартості $\alpha=\alpha_0$ буде відповідати дві поверхні, одна з першої родини, а друга з другої. Перетин цих поверхень дасть нам певну криву, положення якої також залежатиме від даної вартости $\alpha=\alpha_0$. Справді, даючи змінникові α нову вартість $\alpha=\alpha_1$ ми одержимо нову пару поверхень і нову криву перетину їх. Нарешті, даючи α всі можливі вартости ми одержимо й безлій зазначеного вигляду кривих, положення яких залежить від зміни вартости α. Отже система рівнянь (1) визначає родину кривих, залежну від данного змінника α. Коли з системи (1) виключимо цього змінника α, то одержимо якусь поверхню $F(x,y,z)=0$, що є геометричним осередком всіх кривих розглядженої родини. Такі поверхні звуться твірними поверхнями.

Узагальнимо це:

Хай нам дано родину кривих від n змінних, себто:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) &= 0 \\ \varphi(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Очевидно, щоб задача була означеною, нам треба мати між цими змінними ще $n-1$ залежність вигляду:

$$\psi_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) = 0, \ \psi_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) = 0 \ldots \psi_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) = 0 \ldots (4)$$

Коли сполучити рівняння (3) і (4) в систему, то матимемо $n+1$ рівняння, що дадуть можливість вилучити n змінних $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ і одержати рівняння $\Phi(x, y, z) = 0$ творчої поверхні. Рівняння (4) очевидно є довільно-заданими умовами, що установлюють залежність між деякими змінними. Отже зміна цих умов для одних і тих же рівнянь (3) родини кривих дасть все нові й нові творчі поверхні. Тому рівняння (4) називаємо напрямними.

Уявимо тепер геометрично, що визначатимуть з себе ці напрямні рівняння кожна зокрема. Візьмім $n-1$ яких будь наперед заданих кривих у просторі й поставимо собі умовою, щоб кожна з кривих родини (3) перетинала ці $n-1$ задану криву.

Візьмім одну з цих кривих L_k і хай вона визначається рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} F_k(x, y, z) &= 0 \\ \text{і} \quad f_k(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

Щоб одержати точку перетину кривих родини (3) з кривою (5) ми мусимо розвязати їх рівняння яко систему. Ці рівняння (3) і (5) дають нам можливість вилучити змінні x, y і z і ми одержимо рівність:

$$\psi_k(d_1, d_2, d_3 \ldots d_n) = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

Отже навчаємо, існування залежности між змінними (6) є ознакою або умовою того, що криві нашої родини (3) перетинатимуть криву L_k. Очевидно, що коли ми загадаємо $n-1$ кривих $L_1, L_2 \ldots L_k \ldots L_{n-1}$, що їх перетинали б криві нашої родини, то існуватиме й $n-1$ умова вигляду (6). Всі ці умови складуть через залежності між n змінними загадані рівняннями (4). Ці $(n-1)$ наперед загадані кривих $L_1, L_2 \ldots L_{n-1}$ <u>звуться напрямними кривими або напрямними контурами.</u>

Таким чином, коли ми маємо родину кривих (3) залежну від довільних змінних, то загадавши собі $n-1$ напрямну криву, ми одержимо $n-1$ умову (4) перетину кривих з цими напрямними кривими, а вилучення з рівнянь (3) $(n-1)$-ої умови (4) n змінних, нам дасть рівняння творної поверхні

§74. Лінійні поверхні.

Перейдім тепер до розгляду лінійних поверхень. Хай для цього нам дано всі можливі прості простору визначені рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x &= mz + n \\ y &= qz + r \end{aligned}\right\} \ldots (\alpha)$$

де m, n, q і r є довільно змінні величини, що характеризують ці прості, їхню родину.

На підставі попереднього § ми можемо одержати цілком виконану творну поверхню, коли введемо в розгляд 3 залежности між змінними m, n, q і r. Тому згадаймо собі якісь три напрямні криві, що умови перетину родини даних простих з ними будуть:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(m, n, q, r) &= 0 \\ \varphi_2(m, n, q, r) &= 0 \\ \varphi_3(m, n, q, r) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\beta)$$

Із рівнянь (α) і (β) вилучимо змінників m, n, q і r і тоді матимемо якусь творну поверхню $\Phi(x, y, z) = 0$. Ця творна поверхня буде геометричним осередком простих родини (α), а тому буде <u>лінійною.</u>

<u>Приклад 1.</u> Знайдемо творну поверхню рівнобіжних між собою просторових простих, напрямна крива яких лежить в координатній площі xoy і виражається рівнянням

$$f(x, y) = 0 \; ; \quad z = 0 \ldots (a)$$

Очевидно, що рівняння родини матимуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} x &= mz + \alpha \\ y &= nz + \beta \end{aligned}\right\} \ldots (\delta)$$

де $m = const$ і $n = const$, α і β є довільні змінні. Виключаємо з рівнянь (а) і (б) змінні x, y, z, а саме:

1) вставляємо $z = 0$ в рівняння (б) і маємо $x = \alpha$; $y = \beta$;

2) знайдені вартости x і y вставляємо в перше рівняння (а) й одержуємо:

$$f(\alpha, \beta) = 0 \quad - - - \quad (c)$$

Це є умова перетину простої родини з напрямною кривою.

Коли тепер виключимо α і β з рівнянь родини (б) і умови (с), то одержимо рівняння твірної поверхні, а саме:

$$f(x - mz, y - nz) = 0$$

Це є відоме з аналітичної геометрії рівняння циліндричної поверхні з напрямним контуром на координатній площі XOY (див. рів. (74) §35 курсу аналіт. геометрії в просторі).

<u>Приклад 2.</u> Знайти твірну поверхню, утворену родиною просторових простих, що переходять через заглядну точку $M(a, b, c)$ і перетинаються з даною напрямною кривою:

$$F(x, y, z) = 0 \quad - - - \quad (1)$$

Рівняння такої родини будуть:

$$\left.\begin{aligned} x - a &= \alpha(z - c) \\ y - b &= \beta(z - c) \end{aligned}\right\} \quad - - - \quad (2)$$

себто родина простих залежить від двох

змінних α і β.

Коли з рівнянь (1) і (2) виключимо змінні x, y, z то одержимо умову:

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0 \quad - - - \quad (3)$$

(Очевидно, що це є умова перетину кривими родини даної напрямної). Визначаючи з рівнянь (2) змінних α і β, а саме:

$$\alpha = \frac{x-a}{z-c}, \quad \beta = \frac{y-b}{z-c}$$

і вставляючи ці вартости в рівняння (3) одержимо рівняння творної поверхні, а саме:

$$\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$$

Це є відоме рівняння конної поверхні. (Аналітична геом. в просторі §§ 36,37)

§75. Оборотові поверхні.

Візьмемо осі координат xyz і на площі xz якусь криву рівняння: $\varphi(x, z)$; $y = 0$ - - - (a) і будемо її обертати навколо осі z, то ми одержимо певну оборотову поверхню. Всі перерізи цієї поверхні площами, що переходять через вісь оборотового тіла (вісь z-ів) носять назву полудеників або меридіянів тіла, а перерізи прямові до осі (що є кругами) мають назву рівнобіжей (широта оборотового тіла).

Очевидно, що згадану оборотову поверхню можна розглядати, як творну родини кругів, що мають свої центри на осі тіла (осі z-ів) і переходять через відповідні точки даної

кривої (а), як непрямої.

Коли ми за вісь міряв взяли вісь z-ів, то коло заданої нами родини лежить площах рівнобіжних до координатної площі xoy. Тому рівняння родини матимуть вигляд:

$$x^2+y^2=r^2; \quad z=d \quad \cdots (б)$$

Вилучивши з рівнянь (а) і (б) змінні x, y і z ми одержимо умову перетину кола родини з непрямою кривою (а), а саме:

1) З рівняння (а) маємо $y=0$

2) З першого рівняння системи (б) вставивши вартости $y=0$, одержимо $x=\pm r$ і нарешті

3) $z=d$

Вставляючи ці вартости в перше рівняння системи (а), маємо:

$$\varphi(r, d)=0 \quad \cdots (в)$$

Коли ми тепер з рівнянь (б) і (в) вилучимо змінні r і d, ми одержимо рівняння твірної поверхні:

$$\varphi\left(z, \sqrt{x^2+y^2}\right)=0 \quad \cdots \quad (127)$$

Це й є загальний вигляд обертової поверхні. Тому можна дати ще інший вигляд, а саме:

$$\left.\begin{aligned} f(x^2+y^2, z)&=0 \\ \text{або:} \quad z&=\psi(x^2+y^2) \end{aligned}\right\} \cdots (128)$$

§76. Дотичальна, випростальна й бінормальна поверхні просторової кривої.

Ми знаємо, що дотична, головна прямовисна й

співпрямова, поведені до кривої в даній точці M складають головний тригранний кут.

Припустім, що рівняння кривої буде:

$$x = f(s); \quad y = \varphi(s) \quad і \quad z = \psi(s)$$

і візьмім за початок осей точку M, для якої $s=0$. Тоді:

1) беруги $z=0$ ми одержимо площу кривини

2) беруги $y=0$ " " випростельну площу

і 3) беруги $x=0$ " " прямову площу

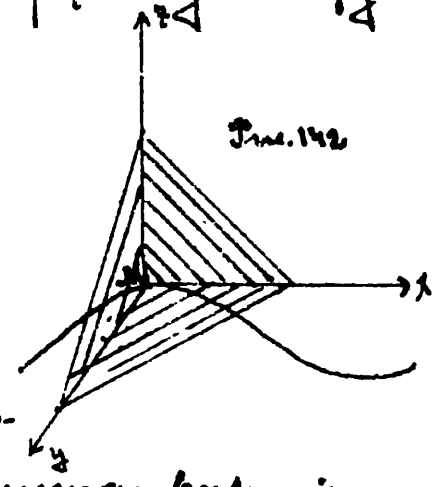


Рис. 142

Очевидно, що і вкінець точці даної кривої ми завжди зможемо збудувати головний тригранний кут, а разом з ним і три основні площі. Всі ці площі будуть відрізнятися від одноіменних другого тригранного кута вартістю змінника s, а тому ми для кожної кривої одержимо три родини площ, залежних від одного змінника s. Ми вже довели, що огортальні такого роду родини площ є поверхнями розгортання. Так:

1) Огортальна родина площ кривини, що зветься доторкального поверхнею кривої буде геометричним осередком дотичних до даної кривої (а отже крива є рубом поверхні цієї поверхні)

2) Огортальна родина прямових площ зветься бігуновою поверхнею кривої і

3) Огортальна родина випростельних площ

зветься <u>випростеленою поверхнею</u> кривої.

I. Ми вже познайомились з допоміжною поверхнею в §72, 73, а тому перейдемо до розгляду нормальної, себто бінормальної поверхні кривої.

Рівняння прямової площі (69) буде:

$$x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0 \quad \text{або:}$$

$$\frac{dx}{ds}(X-x) + \frac{dy}{ds}(Y-y) + \frac{dz}{ds}(Z-z) = 0$$

А звідси:

$$\lambda(X-x) + \mu(Y-y) + \nu(Z-z) = 0 \quad \cdots (\alpha)$$

Щоб знайти огортаючу поверхню ми за §72 (взір 123) складаємо допоміжне рівняння, диференцуючи дане рівняння (α) через змінну s. Тоді маємо:

$$\frac{d\lambda}{ds}(X-x) - \lambda\cancel{\frac{dx}{ds}}^{\lambda^2} + \frac{d\mu}{ds}(Y-y) - \mu^2 + \frac{d\nu}{ds}(Z-z) - \nu^2 = 0$$

або:

$$\frac{d\lambda}{ds}(X-x) + \frac{d\mu}{ds}(Y-y) + \frac{d\nu}{ds}(Z-z) = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

Скористувавшись 1-ним нижче взорів Френе [§54 (93)], а саме:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\lambda_n}{\rho}; \quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{\mu_n}{\rho}; \quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{\nu_n}{\rho}$$

ми зможемо цьому рівнянню дати ще другий вигляд:

$$\frac{1}{\rho}\left[\lambda_n(X-x) + \mu_n(Y-y) + \nu_n(Z-z) = 1.\right.$$

або:

$$\lambda_n(X-x) + \mu_n(Y-y) + \nu_n(Z-z) = \rho \cdots (\beta)$$

Ми знаємо, що рівняння (α) і (β), що системою, визначають твірну (прямолінійну криву) огортаючої поверхні. Ця твірна має назву бінормалі.

Щоб видешти її положення ми розглянемо рівняння (β). Це рівняння вимагає площу рівнобіжну до випростальної. Бо справді: рівняння випростальної площі (86) буде:

$$\frac{d^2x}{ds^2}(X-x)+\frac{d^2y}{ds^2}(Y-y)+\frac{d^2z}{ds^2}(Z-z)=0$$

але беруги під увагу що $\frac{dx}{ds}=\lambda$; $\frac{dy}{ds}=\mu$ і $\frac{dz}{ds}=\nu$ за взорами Френе маємо:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d\lambda}{ds}=\frac{\lambda_n}{\rho};\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\mu_n}{\rho};\quad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\nu_n}{\rho}$$

А тому рівняння випростальної площі можна дати такий вигляд:

$$\lambda_n(X-x)+\mu_n(Y-y)+\nu_n(Z-z)=0 \quad \cdots \quad (\gamma)$$

Отже, одержане рівняння випростальної площі відрізняється від рівняння площі (β) на вільного члена, тому ці площі є рівнобіжні. Через те й бінормова проста що є перетином площ (α) і (β) буде рівнобіжна до перетину площ (α) і (γ), себто площ прямовисної й випростальної. Инакше кажучи бінормова проста є рівнобіжною до спів-прямової.

Очевидно, що вона не зустрічає кривої, а отже перетинає її головну прямову. На рис. 143 бінормового є проста PK.

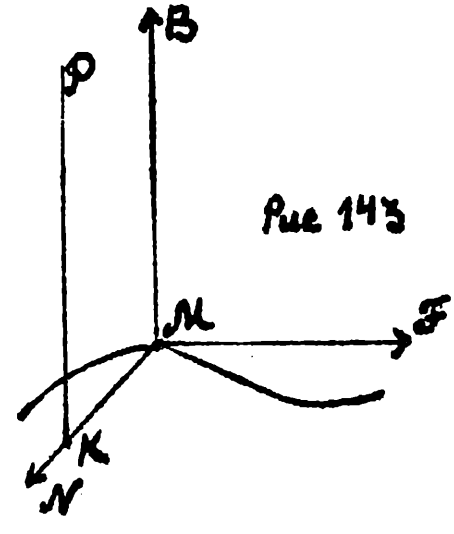


Рис 143

Візьмемо тепер значення центру кривини кривої:

$$a=x+\lambda_n\rho;\quad b=y+\mu_n\rho;\quad c=z+\nu_n\rho \cdots (\delta)$$

і вставимо їх в рівняння (α) і (β)

1) Очевидно, що рівняння прямової площі можуть задовольн

нормал вартостями (δ) бо центр кривини лежить на головній прямовій, а тому й на прямовій площі. [Таможе і безпосередня вставка цих вартостей у рівняння (α) дасть можливий вислід, а саме: $\rho(\lambda\lambda_n + \mu\mu_n + \nu\nu_n) = 0$]. Вставка вартостей (δ) в рівняння (β) дає вислідну:

$$\rho(\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2) = \rho; \text{ себто } \rho = \rho$$

Отже ці вислідки свідчать, що бінормова проста зливається з відповідною віссю кривини. А тому бінормова поверхня є геометричним осередком осей кривини даної кривої.

Висновок. З самого визначення поверхні, очевидно, що бінормова поверхня не містить в собі тої самої кривої. Яка річ, що випливає з лишника з рівнянь (α) і (β) чи одержаного рівняння самої бінормової поверхні.

II. Розглянемо, нарешті, рівняння випростальної поверхні.

Вона, як ми визначили є огортальною родини випростальних площ. Тому беремо рівняння цієї площі себто рівняння (γ) й складаємо диференціальне рівняння, диференціюючи (γ) через s і користуючись взорами Френе. А саме:

$$\frac{d\lambda_n}{ds}(X-x) - \lambda_n\frac{dx}{ds} + \frac{d\mu_n}{ds}(Y-y) - \mu_n\frac{dy}{ds} + \frac{d\nu_n}{ds}(Z-z) - \nu_n\frac{dz}{ds} = 0$$

або:

$$\frac{d\lambda_n}{ds}(X-x) + \frac{d\mu_n}{ds}(Y-y) + \frac{d\nu_n}{ds}(Z-z) = \lambda_n\lambda + \mu_n\mu + \nu_n\nu = 0$$

А за 3-ю множою взорів Френе (96), маємо:

$$-\left(\frac{\lambda}{\rho}+\frac{\lambda_0}{r}\right)(X-x)-\left(\frac{\mu}{\rho}+\frac{\mu_0}{r}\right)(Y-y)-\left(\frac{\nu}{\rho}+\frac{\nu_0}{r}\right)(Z-z)=0\text{, або:}$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)\right]+\frac{1}{r}\left[\lambda_0(X-x)+\mu_0(Y-y)+\nu_0(Z-z)\right]=0\ \cdot\cdot\ (\varepsilon)$$

Беруги рівняння (γ) і (ε) яко систему, ми одержимо рівняння твірної випростальної поверхні.

Щоб виявити положення цієї твірної, розглянемо рівняння (ε). Його можна дати вигляд:

$$\overbrace{\left[\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)\right]}^{(1)}-k\overbrace{\left[\lambda_0(X-x)+\mu_0(Y-y)+\nu_0(Z-z)\right]}^{(2)}=0$$

де $k=-\frac{\rho}{r}$. Вираз (1) в дужках є лівою частиною рівняння прямової площі, а вираз (2) – є лівою частиною рівняння площі кривим (прямової до співпрямової). Тому рівняння (ε) при змінних r і ρ є рівнянням пучка площ, що переходить через головну прямову як перетин площ (1) і (2). Для даної ж точки, коли ρ і r мають певні вартости, це рівняння одної з цих площ пучка (рис. 144). Система же рівнянь (γ) і (ε) визначає просту MK, перетину площі P з випростальною площею BT. Очевидно, що твірна MK переходить через точку M кривої, а тому й огортальна поверхня утворена цією твірною містить на собі всі точки кривої. Іншими словами дана крива лежить на випростальній поверхні. Очевидно також, що твірні (напр. MK) випростальної поверхні є прямо-

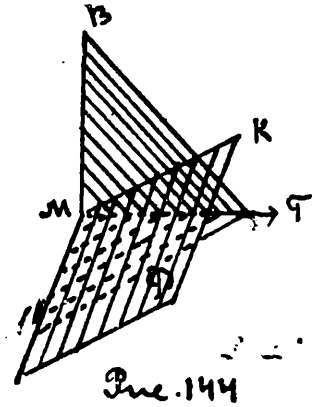


Рис. 144

ли до відповідних головних нормалей кривої. Разом з цим, випростальні площі, дотичні до випростальної поверхні, як площі даної родини будуть також завжди прямовиноі до головної нормалі. А тому головні прямові кривої є одночасно прямовиноі самої випростальної поверхні.

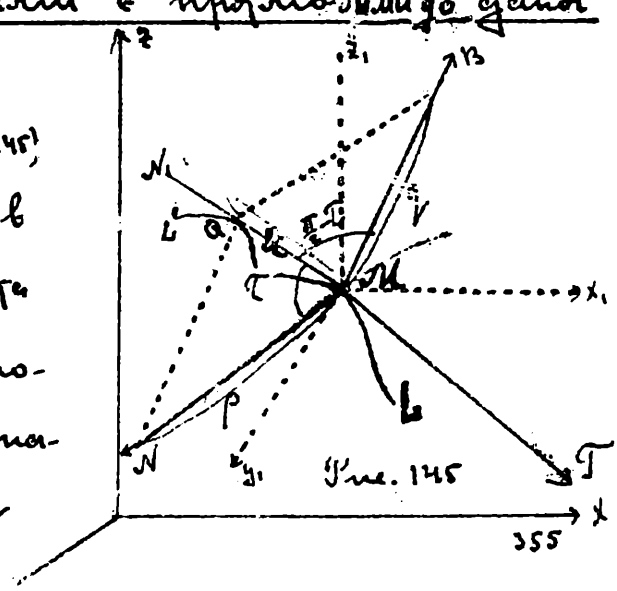
Такі криві, що лежать на даній поверхні і мають за свої головні прямові, прямові самої поверхні звуться геодезичними. Таким чином кожна крива є геодезичною для своєї випростальної поверхні.

Розгорнемо нашу випростальну поверхню на площі, тоді її прямові стануть між собою рівнобіжні, а разом з цим будуть рівнобіжні й головні прямові даної кривої, себто крива випростається у просту. Тому то розгорнені площа й поверхня мають назву випростальних.

§77. Еволюта просторової кривої.

Еволютою даної будь кривої будемо звати таку криву, що її дотичними є прямовиноі до даної кривої.

Хай дана крива L (рис. 145) має одну з прямових MN_1 в точці $M(x, y, z)$ і хай еволюта її L' дотикається цієї прямової MN_1 в точці $O(X, Y, Z)$. Означимо відтинок OM через u



тоді очевидно, що метки на осі координат будуть:

$$X - x = u\,cos(u, X) = u\,cos\varphi;\ Y - y = u\,cos(u, Y) = u\,cos\psi;\ Z - z = u\,cos(u, Z) = u\,cos\chi \quad \ldots (a)$$

Обчислимо зазначені cos кутів даної прямової з осями й для цього, взявши за осі координат МТ, MN і MB. Скористуємося відомим з аналітич. геометрії взором: $cos\varphi = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1$, де α, β і γ є cos. кутів одного з ramen даного кута з координатними осями, а α_1, β_1, γ_1 – cos. кутів другого рамена з тими ж осями. Очевидно, що:

а) косинуси осі X-ів з новими осями будуть:

1) з дотичною МТ ———— λ

2) з головною прямовою MN – λ_n

і 3) з співпрямовою MB – ——— λ_b

б) косинуси ж прямової MN_1 з тими ж осями будуть:

1) з дотичною МТ – 0 (бо MN_1 лежить в площі NMB прямовій до МТ)

2) з головною прямовою MN – $cos\tau$ (де через τ означили кут між даною прямовою до кривої й її головною прямовою)

і 3) із співпрямовою MB – $sin\tau$ (бо $\angle N_1MB = \frac{\pi}{2} - \tau$)

Отже косинуси φ, ψ і χ кутів прямової з дотичними осями координат x, y, z будуть:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ cos\varphi = \lambda_n cos\tau + \lambda_b sin\tau \\ &\text{й аналогично:} \\ &2)\ cos\psi = \mu_n cos\tau + \mu_b sin\tau \\ &\text{і}\ \ 3)\ cos\chi = \nu_n cos\tau + \nu_b sin\tau \end{aligned}\right\} \ldots (б)$$

Таким чином рівности (a) матимуть вигляд:

$$X = x + u\lambda_n \cos\tau + u\lambda_b \sin\tau$$
$$Y = y + u\mu_n \cos\tau + u\mu_b \sin\tau$$
$$Z = z + u\nu_n \cos\tau + u\nu_b \sin\tau$$

Спустимо тепер з точки Q пряму на MN і MB й одержимо лети відтинку u прямової: 1) $p = u\cos\tau$ – на головну прямову і 2) $q = u\sin\tau$ – на співпрямову. Тоді попередні рівняння перетворяться в:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + p\lambda_n + q\lambda_b \\ Y &= y + p\mu_n + q\mu_b \\ Z &= z + p\nu_n + q\nu_b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (в)$$

Це є значення точок еволюти, а полурівняння (в) можуть бути й рівняннями самої еволюти, коли б ми вибрали вартости p і q так, щоб вони задовольняли тій умові, що прямові даної кривої є дотичними до шуканої кривої (в).

Продиференцуємо через s рівняння (в) й матимемо:

$$\frac{dX}{ds} = \cancel{\frac{d\lambda}{ds}}^{\,1} + p\frac{d\lambda_n}{ds} + \lambda_n\frac{dp}{ds} + q\frac{d\lambda_b}{ds} + \lambda_b\frac{dq}{ds}$$

$$\frac{dY}{ds} = \mu + p\frac{d\mu_n}{ds} + \mu_n\frac{dp}{ds} + q\frac{d\mu_b}{ds} + \mu_b\frac{dq}{ds}$$

$$\frac{dZ}{ds} = \nu + p\frac{d\nu_n}{ds} + \nu_n\frac{dp}{ds} + q\frac{d\nu_b}{ds} + \nu_b\frac{dq}{ds}$$

Але самі похідні вартости $\frac{d\lambda_n}{ds}$, $\frac{d\mu_n}{ds}$ і $\frac{d\nu_n}{ds}$; $\frac{d\lambda_b}{ds}$, $\frac{d\mu_b}{ds}$ і $\frac{d\nu_b}{ds}$ за допомогою 3-ої низки (96) і 2-ої низки (95) взорів Френе, матимемо:

$$\frac{dX}{ds} = \lambda - \frac{p\lambda}{\rho} - \frac{p\lambda_b}{r} + \lambda_n \frac{dp}{ds} + \frac{q\lambda_n}{r} + \lambda_b \frac{dq}{ds}$$

$$\frac{dY}{ds} = \mu - \frac{p\mu}{\rho} - \frac{p\mu_b}{r} + \mu_n \frac{dp}{ds} + \frac{q\mu_n}{r} + \mu_b \frac{dq}{ds}$$

$$\frac{dZ}{ds} = \nu - \frac{p\nu}{\rho} - \frac{p\nu_b}{r} + \nu_n \frac{dp}{ds} + \frac{q\nu_n}{r} + \nu_b \frac{dq}{ds}$$

А звідси:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dX}{ds} &= \lambda\left(1-\frac{p}{\rho}\right) + \lambda_n\left(\frac{dp}{ds} + \frac{q}{r}\right) + \lambda_b\left(\frac{dq}{ds} - \frac{p}{r}\right) \\
\frac{dY}{ds} &= \mu\left(1-\frac{p}{\rho}\right) + \mu_n\left(\frac{dp}{ds} + \frac{q}{r}\right) + \mu_b\left(\frac{dq}{ds} - \frac{p}{r}\right) \\
\frac{dZ}{ds} &= \nu\left(1-\frac{p}{\rho}\right) + \nu_n\left(\frac{dp}{ds} + \frac{q}{r}\right) + \nu_b\left(\frac{dq}{ds} - \frac{p}{r}\right)
\end{aligned}\right\} \cdots (2)$$

Величини $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ і $\frac{dz}{ds}$ як нам відомо (§48 вірш 67) є кутові змінники дотичної до прямої еволюти, в точці $Q(x, y, z)$. Але відомо визначення еволюти, що дотична є прямовою MN, що через точку Q переходить, а тому дані кутові змінники мусять бути пропорційні напрямним змінникам заданої прямової MN_1, а саме:

$$\frac{dx}{ds} = m\cos\varphi\,; \quad \frac{dy}{ds} = m\cos\psi\,; \quad \frac{dz}{ds} = m\cos\chi\,.$$

де m є сталим пропорційности. Беруги $m = k.u$ за взором (б) маємо:

$$\frac{dx}{ds} = ku\cos\varphi = k(u\lambda_n\cos\tau + u\lambda_b\sin\tau) = k(p\lambda_n + q\lambda_b)$$

і аналогічно:

$$\frac{dy}{ds} = k(p\mu_n + q\mu_b)$$

$$\text{і} \quad \frac{dz}{ds} = k(p\nu_n + q\nu_b)$$

Таким чином з рівности (2) маємо:

$$\lambda\left(1-\frac{k}{\rho}\right)+\lambda_n\left(\frac{dp}{ds}+\frac{q}{r}\right)+\lambda_b\left(\frac{dq}{ds}-\frac{p}{r}\right)=\varkappa(\lambda_n p+\lambda_b q)$$

$$\mu\left(1-\frac{k}{\rho}\right)+\mu_n\left(\frac{dp}{ds}+\frac{q}{r}\right)+\mu_b\left(\frac{dp}{ds}-\frac{p}{r}\right)=\varkappa(\mu_n p+\mu_b q)$$

і $$\nu\left(1-\frac{k}{\rho}\right)+\nu_n\left(\frac{dp}{ds}+\frac{q}{r}\right)+\nu_b\left(\frac{dp}{ds}-\frac{p}{r}\right)=\varkappa(\nu_n p+\nu_b q)$$

Очевидно, що ці рівності можливі:

1) коли в лівій частині їх коефіцієнти при λ, μ і ν є нулі, себто:

$$1-\frac{k}{\rho}=0 \quad \text{а звідси:} \quad p=\rho$$

2) коли:

$$\frac{dp}{ds}+\frac{q}{r}=\varkappa p \quad \text{і} \quad \frac{dq}{ds}-\frac{p}{r}=\varkappa q$$

Себто коли:

$$\frac{\frac{dp}{ds}+\frac{q}{r}}{p}=\frac{\frac{dq}{ds}-\frac{p}{r}}{q}$$

Звідси:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{ds}-\frac{1}{q}\frac{dq}{ds}+\frac{1}{r}\left(\frac{q}{p}+\frac{p}{q}\right)=0$$

Ми знаємо, що $p=n\cos\tau$, а $q=n\sin\tau$, а тому $\frac{q}{p}=tg\tau$. Отже беручи під увагу, що $\frac{d}{ds}(lg\,p)=\frac{1}{p}\frac{dp}{ds}$ і $\frac{d}{ds}(lg\,q)=\frac{1}{q}\frac{dq}{ds}$, а тому:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{ds}-\frac{1}{q}\frac{dq}{ds}=\frac{d(lg\,p)}{ds}-\frac{d(lg\,q)}{ds}=\frac{d}{ds}[lg\,p-lg\,q)=\frac{d}{ds}\left(lg\frac{p}{q}\right)$$

можемо написати:

$$\frac{d}{ds}\left[lg\,ctg\tau\right]+\frac{1}{r}(tg\tau+ctg\tau)=0$$

А звідси переводячи диференцування, одержимо:

$$-tg\tau\cdot\frac{1}{\sin^2\tau}\cdot\frac{d\tau}{ds}+\frac{1}{r}\left(\frac{\sec^2\tau}{tg\tau}\right)=0 \quad \text{або:}$$

$$-\frac{1}{\sin\tau.\cos\tau}\cdot\frac{d\tau}{ds}+\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\tau.\cos\tau}=0$$

Отже:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{r} \quad \text{або:} \quad d\tau = \frac{ds}{r}$$

Таким чином:

$$\tau = \int \frac{ds}{r} + c \quad \cdots\cdots (3)$$

і нарешті:

$$q = \rho \operatorname{tg}\tau = \rho \operatorname{tg}\left[\int \frac{ds}{r} + c\right]$$

Тому рівняння еволюти матиме вигляд:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \rho\left[\lambda_n + \lambda_b \operatorname{tg}\left(\int \frac{ds}{r} + c\right)\right] \\ Y &= y + \rho\left[\mu_n + \mu_b \operatorname{tg}\left(\int \frac{ds}{r} + c\right)\right] \\ Z &= z + \rho\left[\nu_n + \nu_b \operatorname{tg}\left(\int \frac{ds}{r} + c\right)\right] \end{aligned}\right\} \cdots (129)$$

Як бачимо рівняння еволюти залежить від довільного змінника, а тому кожна крива має цілу родину еволют.

Вставляючи ці вартости (129) в рівняння (α) і (β) § 76 ми переконуємося, що рівняння бінормової поверхні тими задовольняється, а тому можна твердити, що вся родина еволют кривої лежить на бінормовій поверхні.

Для обчислення кутів прямової до даної кривої, що є дотичною до її еволюти маємо рівняння:

$$\cos\varphi = \lambda_n \cos\tau + \lambda_b \sin\tau$$

$$\cos\psi = \mu_n \cos\tau + \mu_b \sin\tau$$

$$\cos\chi = \nu_n \cos\tau + \nu_b \sin\tau$$

Вставляючи в них знайдену вартість τ, ми одержимо остаточно:

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \lambda_n \cos\left(\int\frac{ds}{r}+c\right)+\lambda_b \sin\left(\int\frac{ds}{r}+c\right)\\ \cos\psi &= \mu_n \cos\left(\int\frac{ds}{r}+c\right)+\mu_b \sin\left(\int\frac{ds}{r}+c\right)\\ \cos\chi &= \nu_n \cos\left(\int\frac{ds}{r}+c\right)+\nu_b \sin\left(\int\frac{ds}{r}+c\right)\end{aligned}\right\}\cdots(130)$$

Із взору (3), що визначає кут між прямовою дотичною до еволюти й головною прямовою до кривої випливає:

1) Що коли нам дано одну з еволют, то ми легко одержемо решту їх через поворот всіх прямових, що дотикаються до еволюти на певний сталий кут.

2) Що геометричний осередок центрів кривини даної кривої загалом не є її еволютою.

§78. Евольвента просторової кривої.

Евольвентою даної просторової кривої звуть криву, що її прямові є дотичними до даної кривої.

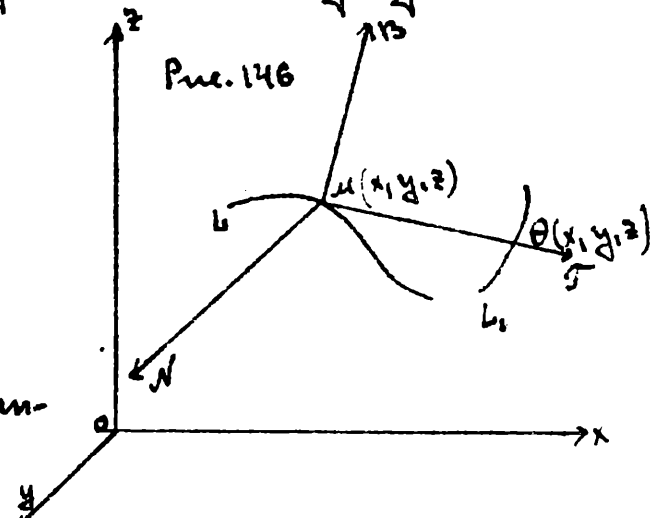


Рис. 146

Хай дана крива буде L (рис. 146). Візьмім на ній точку й поведемо дотичну MT. Припустім, що якась евольвента L_1 кривої переходить через точку $\theta(x,y,z)$ дотичної, так що MT є її прямовою. Означимо віддалі дотичної $M\theta$ через u. Тоді елементи u на осях координат будуть:

$$X-x=u\lambda;\quad Y-y=u\mu \text{ і } Z-z=u\nu\cdots(d)$$

де λ, μ і ν є косинуси кутів дотичної MT з коор-

динатними осями. А звідси:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + u\lambda \\ Y &= y + u\mu \\ Z &= z + u\nu \end{aligned}\right\} \cdots (\beta)$$

Коли вважатимемо X, Y і Z змінними, то очевидно, що рівности (β) можуть бути рівняннями евольвенти, коли ми вибираємо u так, щоб задовольнялася умова, що дотична T є прямовою кривої L_1. Для цього продиференцуємо ці рівняння (β) через s і користуючися 1-ою низкою взорів Френе, матимемо:

$$\frac{dX}{ds} = \cancel{\frac{dx}{ds}} + u\frac{d\lambda}{ds} + \lambda\frac{du}{ds} = \lambda\left(1+\frac{du}{ds}\right) + u\frac{\lambda_n}{\rho}$$

аналогічно:

$$\frac{dY}{ds} = \mu\left(1+\frac{du}{ds}\right) + u\frac{\mu_n}{\rho}$$

$$\text{і} \qquad \frac{dZ}{ds} = \nu\left(1+\frac{du}{ds}\right) + u\frac{\nu_n}{\rho}$$

Ми одержали кутові змінники дотичної до кривої (β). Коли же ця крива (β) є евольвентою даної кривої, то дотична останньої мусить бути прямовою до згаданої кривої (β), себто мусить бути прямою до її дотичної. Отже треба, щоб виконувалася умова прямовости:

$$\frac{dX}{ds}\cdot\lambda + \frac{dY}{ds}\cdot\mu + \frac{dZ}{ds}\cdot\nu = 0$$

Вставляючи сюди вартости $\frac{dX}{ds}$, $\frac{dY}{ds}$ і $\frac{dZ}{ds}$ ми матимемо:

$$\lambda\left[\lambda\left(1+\frac{du}{ds}\right) + u\frac{\lambda_n}{\rho}\right] + \mu\left[\mu\left(1+\frac{du}{ds}\right) + u\frac{\mu_n}{\rho}\right] + \nu\left[\nu\left(1+\frac{du}{ds}\right) + u\frac{\nu_n}{\rho}\right] = 0$$

або:

$$\left(1+\frac{du}{ds}\right)\overset{1}{\cancel{\left(\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right)}}+\frac{u}{\rho}\overset{0}{\cancel{\left(\lambda\lambda_u+\mu\mu_u+\nu\nu_u\right)}}=0$$

Отже:

$$1+\frac{du}{ds}=0 \quad \text{або:} \quad du=-ds$$

А інтегруючи цю рівність одержимо:

$$u=c-s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Таким чином рівняння евольвенти матимуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} x &= x+\lambda(c-s)\\ y &= y+\mu(c-s)\\ z &= z+\nu(c-s)\end{aligned}\right\} \ldots \quad (131)$$

З огляду на те, геометричний осередок дотичних до кривої є доторкальна поверхня, то евольвента даної кривої лежить в цій поверхні й перетинають під прямим кутом її твірні.

Очевидно з рівнянь (131), що евольвент є також не одна, а ціла родина, що залежить від вартостей змінника c. Вартість віддалення точки перехрестя дотичної з евольвентою від даної точки кривої M, а саме:

$$u=c-s$$

показує, що маючи одну з евольвент, ми одержимо решту, збільшуючи задане віддалення (відтинок дотичної) на довільну сталу величину.

§79. Геодезична або тангенціальна кривина.

Хай на деякій поверхні маємо криву L

(рис. 147), що переходить через точку $M(x, y, z)$. Хай T — дотична, N_0 — головна нормальна її, $MN(L, M, N)$ — нормальна поверхні; K центр кривини кривої L, а ρ луч кривини. Означимо через θ нормальний кут, через T_1 — дотичну до поверхні, нормальну до N і T

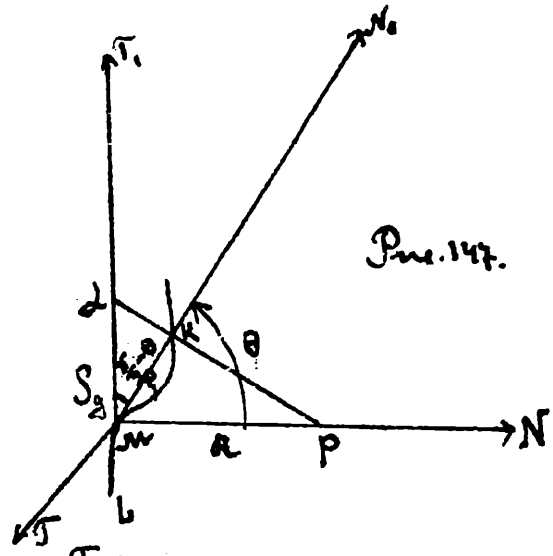


Рис. 147.

Злетушою криву L одночасно на дотичну площу TMT_1 і площу нормального перерізу. Кривину першого лету в точці M звуть геодезичною, або тангенціяльною кривиною, кривину другого лету — кривиною нормального перерізу (нормальною кривиною. Центр кривини кривої K також дасть лети L — центр геодезичної кривини и P — центр нормальної кривини. Всі три центри лежатимуть на осі кривини LP.

З ΔLKM маємо:

$$ML = \frac{MK}{\sin\theta} \quad \text{або} \quad S_g = \frac{\rho}{\sin\theta}$$

А звідси геодезична кривина буде:

$$\frac{1}{S_g} = \frac{\sin\theta}{\rho} \quad \ldots\ldots \quad (132)$$

А з ΔMKP маємо:

$$MP = \frac{MK}{\cos\theta} \quad \text{або} \quad R = \frac{\rho}{\cos\theta}$$

А звідси:

Нормальна кривина: $\frac{1}{R} = \frac{\cos\theta}{\rho}$ .... (107)

[Теорема Мієньє § 59].

§80. Обчислення луча геодезичної кривини кривення.

Поведемо площу NMT через прямову поверхні N і дотичну T даної кривої. Це як наглядно буде площею прямового перерізу. Рівняння цієї площі буде:

$$(Mz' - Ny')(X - x) + (Nx' - Lz')(Y - y) + (Ly' - Mx')(Z - z) = 0$$

де L, M і N є напрямні зліпники прямової до поверхні.

[Примітка. Це рівняння (Аналіт. геометрія в просторі §31) можна скласти як рівняння площи, що проходить через дві просторові перехресні прямі T і N]

Дотичні T_1 до поверхні, ми взяли прямово до заданої площі, а тому напрямні зліпники її будуть:

$$\lambda = Mz' - Ny' \; ; \quad \beta = Nx' - Lz' \; i \; \gamma = Ly' - Mx' \; \cdots (1)$$

де x', y', z' є кутові зліпники дотичної T, а тому рівні:

$$x' = \frac{dx}{ds} \; ; \quad y' = \frac{dy}{ds} \; i \; z = \frac{dz}{ds}$$

З другого боку головна прямова N_0 має напрямні зліпники (ми криву беремо в функції дуги):

$$\lambda_n = \frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}} \; ; \quad \mu = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}} \; i \; \nu_n = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}} \; \cdots (81, §50)$$

або беручи на увагу, що $\rho = \frac{1}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}}$ (90) маємо:

$$\lambda_n = \rho \frac{d^2x}{ds^2} \qquad \mu_n = \rho \frac{d^2y}{ds^2} \; i \; \nu_n = \rho \frac{d^2z}{ds^2} \; \cdots (2)$$

За правилом аналітичної геометрії косинус кута між двома простими є рівний сумі здобутків відповідних напрямних залишків його рамен, а тому:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta = \alpha\lambda_n + \beta\mu_n + \gamma\nu_n$$

Вставляючи ж знайдені вартости $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_n, \mu_n$ і ν_n маємо:

$$\sin\theta = \rho\left[M\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} - N\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} + N\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} - L\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} + L\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2} - M\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\right]$$

або:

$$\sin\theta = \frac{\rho}{ds^2}\left[L\,dy\,d^2z + M\,dz\,d^2x + N\,dx\,d^2y - N\,dy\,d^2x - M\,dx\,d^2z - L\,dz\,d^2y\right]$$

Отже:

$$\sin\theta = \frac{\rho}{ds^3}\begin{vmatrix} L & dx & d^2x \\ M & dy & d^2y \\ N & dz & d^2z \end{vmatrix}$$

А звідси за взором (132) маємо:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\sin\theta}{\rho} = \frac{1}{ds^3}\begin{vmatrix} L & dx & d^2x \\ M & dy & d^2y \\ N & dz & d^2z \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots (133)$$

або:

$$\rho_g = \frac{ds^3}{\Delta} \quad \text{де } \Delta = \begin{vmatrix} L & dx & d^2x \\ M & dy & d^2y \\ N & dz & d^2z \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots (134)$$

Візьмім тому M_1 досить близьку M і збудуємо до даної поверхні прямову M_1N_1, що матиме напрямними залишками:

$$L + dL;\ M + dM \ \text{ і } \ N + dN$$

Означимо кут відхилення її від площі MTN через ϑ. Тоді маємо:

$$\vartheta = \widehat{(MT_1, M_1N_1)} - \frac{\pi}{2}$$

А з аналітичної геометрії маємо:

$$\sin\vartheta = -\cos\widehat{(MT_1, M_1N_1)} = -\left[\alpha(L+dL) + \beta(M+dM) + \gamma(N+dN)\right] \text{ або:}$$

$$\sin\vartheta = (Ny' - Mz')(L+dL) + (Lz' - Nx')(M+dM) + (Mx' - Ly')(N+dN) \text{ або:}$$

$$\sin\vartheta = \cancel{NLy'} - \cancel{MLz'} + \cancel{LMz'} - \cancel{MNx'} + \cancel{MNx'} - \cancel{LNy'} - MdLz' + NdLy' -$$

$$- NdMx' + LdMz' - LdNy' + MdNx'.$$

Опісля виносячи за дужки $\frac{1}{ds}$, маємо:

$$\sin\vartheta = \frac{1}{ds}\left[LdMdz + MdNdx + NdLdy - NdMdx - MdLdz - LdNdy\right]$$

або:

$$\sin\vartheta = \frac{1}{ds}\begin{vmatrix} L & dL & dx \\ M & dM & dy \\ N & dN & dz \end{vmatrix} = \frac{\Delta_1}{ds} \quad \ldots \quad (4)$$

Ми знаємо, що кривизна кривої є: $\lim\limits_{\Delta\ldots 0}\frac{\vartheta}{\Delta s}$, але $\lim\limits_{\vartheta\ldots 0}\frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1$, а тому <u>геодезичне кривення</u> матиме вартість:

$$\frac{1}{r_g} = \lim_{\Delta s\ldots 0}\frac{\vartheta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\vartheta}{ds} = \frac{\Delta_1}{ds^2}$$

або:

$$\frac{1}{r_g} = \frac{1}{ds^2}\begin{vmatrix} L & dL & dx \\ M & dM & dy \\ N & dN & dz \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (135)$$

А звідси:

$$r_g = \frac{ds^2}{\Delta_1} \text{ де } \Delta_1 = \begin{vmatrix} L & dL & dx \\ M & dM & dy \\ N & dN & dz \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (136)$$

Очевидно, що коли крива дотикається одній з головних дотичних ($\vartheta = 0$, або $\vartheta = \frac{\pi}{2}$), то геодезичне кривення є рівне з нулем.

Кінець.

§§	Зміст	Стор
	Частина I. Розділ I	3
1	Диференцування фун-ій від кількох незалежн.	3
2	Цілий похід " " " "	4
3	Окремі похідні " "	8
4	Окремі похідні вищих порядків кількох незалежних	9
5	Незалежність висліду від порядку диференц.	10
6	Похідні вищих порядків від кількох незалежн.	14
7	" " "	18
8	" " "	20
9	Невизначені функції	20
10	Одновимірні функції.	24
11	Ряд Тейльора	27
12	Розгорнення $f(x)$, $\sin x$ в ряд.	29
13	" в ряд $f(x) = \cos x$	31
14	" " $f(x) = e^x$	32
15	" " логаритмової функції	34
16	" " ступінів x функцій	38
17	Взори Ейлера для тригонометричних функцій	42
18	Розгорнення неозначеностей за допомогою розгорнення функцій в степені ряди незалежника	43
19	Ряд Тейльора для функцій кількох незал.	44
20	Maximum і minimum невизначених функцій	47
21	" " визначених функцій від двох незалежників,	49
22	" "	
23	Умовні maximum і minimum	64
	Розділ II. Диференціяльна геометрія	70
1	Аналітичне рівняння плоскої кривої	70
2	" " простої, кола, еліпси й гіперболи.	73

§3	Дотична до плоскої кривої	76
4	Кут спаду дотичної до кривої на осі координати.	78
5	Нормаля (прямова)	82
6	Кути прямової з осями	83
7	Обчислення величини дотичної кривої	85
8	Крива в бінуових координатах	91
9	Величини дотичностей кривої у бінуових координатах.	93
10	Циклоїда Діоклія	95
11	Архімедова спіраля.	97
12	Гіперболічна и логарифмічна спіраля	100
13	Форма кривої (випуклість або вгнутість)	101
14	Дослідження точок перегнутя, коли рівняння кривої має инші форми.	109
15	Дослідження форми кривої в бін. координат.	113
16	Загальне розуміння про кривину (лук) кривих.	116
17	Кривина косеної кривої	119
18	Основні приклади обчислення кривини	123
19	Коло кривини й центр кривини	127
20	Вимірення луча кривини в бінуових коорд.	129
21	Вимірення луча кривини через віддалення відповідної дотичної від бінуна	131
22	Еволюта й евольвента (інволюта)	132
23	Властивости еволюти	138
24	Огортальні кривих	142
25	Основна властивість огортальних родин кривих	146
26	Инші трактування еволюти	149
27.	Родина кривих від кількох незалежних	150
28	Доторкання кривих	156
29	Геометричне трактування питання про доторканність кривих	158

30	Доторкальні криві.	165
31	Доторкальне коло	168
32	Асимптоти кривої	171
33	" " "	177
34	" " "	179
35	" " "	183
36	Асимптоти в бінупових координатах	186
37	Особливі точки	190
38	Визначення дотичної до алгебричної кривої в даній особливій точці й дослідження останніх.	192
39	Спрощений спосіб аналізи особливих точок	199
40	Дослідження окремих випадків особлив. точок	202
41	Особливі точки трансцендентних кривих	212
42	Про точки перегину	216
43	Дослідження рівняння кривих	223
	Частина II. Розділ I	236
	Просторові криві	"
44	Визначення кривої в просторі	"
45	Дотична до просторової кривої	237
46	Напрямні залишки дотичної до просторової кривої (кривої подвійної кривини)	241
47	Прямова (нормальна) площа	243
48	Площа кривини (доторкальна площа)	244
49	Властивости площі кривини	251
50	Головна прямова (нормаля)	253
51	Спів прямова (бінормаля)	257
52	Кривина просторової кривої	259
53	Кручення кривої	264
54	Взори Френе (Серре)	268
	Розділ II. Поверхні	279
55	Загальні їх рівняння	"

56	Дотична проста й площа до поверхні	281
57	Прямова до поверхні	284
58	Напрямні лінійки дотичної площі	285
59	Кривина лінії приналежних до поверхні або так званих поверхневих кривих	288
60	Будування кругів кривини для поверхневих кривих, що переходять через точку M поверхні й мають спільну дотичну	295
61	Кривина прямових перерізів	296
62	Індикатриса Дюпена	300
63	Обчислення головних кутів кривини	306
64	Обчислення головних кривин поверхні: Гаусса й Ейлера	311
65	Кривина лінія	"
66	Огортальні поверхні	315
67	Основна властивість огортальних поверхень	319
68	Огортальна поверхня 2го роду	320
69	Основна властивість огортальної поверхні 2го р.	322
70	Руб повороту	325
71	Основна властивість рубу повороту	328
72	Поверхні розгортання	331
73	Основна властивість поверхень розгортання	339
73a	Родина кривих	343
74	Лінійні поверхні	345
75	Оборотові поверхні	347
76	Доторкальна, випростальна й бінормальна поверхні просторової кривої	349
77	Еволюта просторової кривої	355
78	Еволювента " "	361
79	Геодезична або тангенціяльна кривина	363
80	Обчислення куга геодезичної кривини кривини	365
	Зміст	368

Українське Видавниче Товариство

СІЯЧ

1. Проф. др. Я. Ярема. **Вступ до філософії.**
2. Лєкт. др. Гончарів-Гончаренко. **Загальна гіґієна.**
3. Проф. С. Русова. **Теорія педаґоґіки на основі психолоґії.**
4. Проф Л. Білецький. **Українська народня поезія.**
5. Лєкт. Ф. Гула. **Теорія векторів.**
6. Проф. Є. Іваненко. **Пропедевтика вищого рахунку.**
7. Проф. Є. Іваненко. **Аналітична ґеометрія у просторі.**
8. Лєкт. Д. Чижевський. **Лоґіка.**
9. Проф. др А. Старков. **Загальна біолоґія.**
10. Лєкт. В. Січинський. **Історія всесвітнього мистецтва.**
11. Лєкт. І. Кабачків. **Політична економія.**
12. Проф. Є. Іваненко. **Алґебрична аналіза.**
13. Проф Є. Іваненко. **Диференціяльне числення.**
14. Лєкт. Д. Чижевський. **Вибір із творів найвизначніщих філософів.**
15. Проф. др. Сімович. **Староболгарська граматика.**
16. Проф др. Сімович. **Хрестоматія староболгарського й українського письменства.**
17. Лєкт. Гр. Омельченко. **Ввід до славянознавства.**
18. Проф. С. Русова. **Дидактика.**
19. Проф М Лорченко. **Експериментальна фізика.**
20. Лєкт. А. Животко. **Дошкільне виховання.**
21. Лєкт. П Герасименко. **Основи термодинаміки.**
22. Лєкт. др. В Кушнір. **Підручник німецької мови.**
23. Проф. др. Я. Ярема. **Психографія в школі** (Зразок психографічної схеми з коментарем).

Адреса видавництва:
PRAHA-SMÍCHOV, MALATOVA ULICE ČIS. 19. / III.