

На правах рукописи.

Проф. Е. Іваненко.

Алгебрична аналіза.

(Основи вищої алгебри).

Конспект лекцій, читання в Укр. Медич.
Інституті ім. М. Драгоманова.
в 1924/25 р.

Видавник т-во „СІДВ“ при Укр. Медич.
Інституті ім. М. Драгоманова.
Київ 1925.

Вступ.

Загальне розуміння чисел.

§1. Поступ чисел, що зростає у своїй числівності одиначу, складає так званий, мерех натуральних чисел:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \infty$

Арифметичні дії додавання, множення й степенування, що мають назву простих дій, мають свої вислідки в цьому мерехі. Спроба числа з діями оберненими. Для віднімання вимагає доповнення мереху натуральних чисел, так званих, від'ємних чисел. Для ділення таке доповнення натурального мереху числами дробовими. Мерех натуральних чисел, поповнений цілими від'ємними й дробовими числами.

$-\infty \dots -1 \dots -\frac{1}{2} \dots 0 \dots \frac{1}{3} \dots \frac{2}{5} \dots 1 \dots \infty$

складає поле раціональних, або вимірних чисел. Далі дії коренування й логарифмування вводять розуміння ще нових чисел: невимірних (ірраціональних), уявних (комплексних) і позавимірних (трансцендентних). Всі ці категорії чисел лежать уже поза полем раціональних, а тому ми мусимо знайти їм

місце взлядно заданого поля.

Візьмим, напр. $\sqrt[n]{A}$; пот A не є на- тим степенем якого-небудь цілого числа, то, як відомо з елементарної алгебри, не існуюватиме таке ж і жадного дробу, що мав би n -й ступень рівний з A .

Отже за допомогою вимірних чисел, нашу задачу ми не розв'яземо, а тому цілком зрозуміло ми примушені будемо відшукувати такі вимірні числа, що k -ті ступені їх як найближче підходили своєю вартістю до A . Себто ми маємо обшукати $\sqrt[n]{A}$ як з найбільшою докладністю.

В процесі цього відшукування ми зауважили, що про кожне раціональне число взагалі можна сказати, що n -тий ступінь його буде або більши, або менши A .

Це піддає думку, що всі раціональні числа можна поділити що-до $\sqrt[n]{A}$ на 2^й класи, з тим, що до 1^{го} класу належатимуть всі числа відповідний ступень яких менши ніж A , а до 2^{го} класу - числа, що мають той же ступінь вартості більшої ніж A .

Можна твердити, що в 1^{му} класі не буде найбільшого числа, а в 2^{му} найменшого. Останнє твердження само собою випливає з самого визначення числа, а саме:

В математиці ми розглядаємо шерег

величин, як, напр. довжина, обсяг, маса, шкідливість, час і т.д. Всі ці величини загалом є тими-ми й необхідними.

Коли ми хочемо взяти яку будь-яку вартість окремій величині, то вимірюємо її через яку-небудь умовну одиницю міри. Вислід цього вимірювання є числом. Таким чином, число є відношенням даної вартості величини до вартості вибраної нами одиниці міри.

Отже, кожне число завжди можна трактувати як певне відношення двох окремих вартостей однієї й тієї величини (з яких одна береться за одиницю виміру)

З елементарної математики відомо, що в цьому разі може бути 2 випадки: 1. дана вартість величини й її одиниця міри є співвимірними і 2. згадані вартості є неспіввимірними.

В першому випадкові процес вимірювання буде доведений до кінця й математично ми певний цілий або дробовий вислід, що уявлятиме число, яке належатиме до наших вимірних чисел. Іншими словами цей вислід буде вимірним (раціональним числом).

В другому випадкові - процес виміру не може бути закінченим - він є безмежним. Вислід виміру буде невимірним, або в де-яких випадках позавимірним числом. Очевидно

що в даному разі ми зможемо перевести лише наближений вимір з якою нам буде бажано великою наближеністю. Себто цей вимір ми можемо зробити з похибкою меншою кожного разу наперед заданого, як бажано малого числа ϵ . Це висловимо символами:

$$a < A < b$$

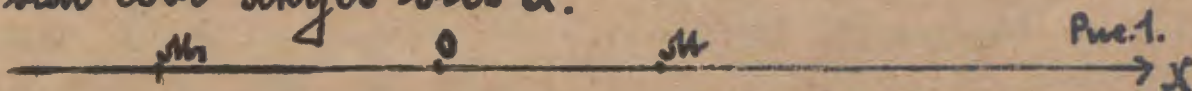
де $b - a < \epsilon$. Таким чином матимемо два наближення: з втратаю й з лишком. В першому разі справжній вислід виміру заступається раціональним числом меншим ніж він сам, а в другому разі - тем же раціональним числом більшим від справжнього вислуду. Як би довго вимірювання ми не продовжували й як би близько вартості нашого виміру до справжньої A не наближали б, все ж таки цього числа A не досягли б. Тому a завжди буде менше ніж A ; так само й b буде завжди більший ніж A , а тим скорше a буде завжди менше вартості b .

$$a < b$$

Із шерегу раціональних чисел, що будуть послідовними вартостями a ($< A$) ми ніколи не одержимо найбільшого (максимуму), бо на кожне b знайдемо таке число $d < A$, так щоб $A - d = \epsilon$, то завжди при більшій наближеності виміру одержимо нове число d_1 , для якого різниця $A - d_1 = \epsilon_1$, де $\epsilon_1 < \epsilon$.

Максимо і терену раціональних чисел більших A (типу b) ми з тих самих міркувань ніколи не одержимо найменшого числа (мінімуму). Отже, невимірне число A можна вважати як певну вартість, що переділяє ціле поле раціональних чисел на 2 класи, при чому перша класа ніколи не має найбільшого числа, а друга найменшого. Таку невимірну вартість A було зовсім звати перетином поля раціональних чисел.

§2. Щоб більш ясно уявити цей перетин дамо для трактування поля раціональних чисел наступну геометричну інтерпретацію. Уявіть собі якусь вісь X .



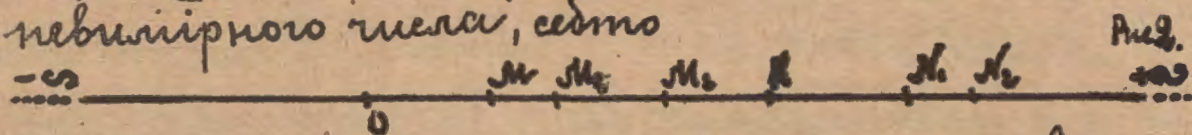
і на ній намітимо яку певну точку O , яку беремо за початок рахунку. Візьмемо який-небудь певний відрізок $\frac{1}{n}$ за одиницю довжини. Можі кожне вимірне число A що зкладемітсья з певної кількості одиниць (або частин) міри $\frac{1}{n}$, можна визначити як відрізок (напр. OM). Цей відрізок можна буде відкласти на осі X від точки O в той чи інший бік (напр. коли A число додатне - з правої руки точки O і навпаки).

Ясна річ, що відрізок OM вміщуватиме в собі стільки лінійних одиниць міри, скільки числових одиниць буде в абсолютній

величині даного числа. Вісь іксів, при цих умовах, зветься числовою лінією.

Отже, кожному раціональному числу α завжди відповідатиме певне своїм положенням на числовій лінії цілком визначена, якимсь чином M . Ця точка й буде геометричним образом даного числа α . Для чисел більших від α їх геометричні образи лежатимуть праворуч від M , а для чисел менших від α - ліворуч.

Припустимо тепер, що точка K є образом певного числа, себто



відтиском OK є неспіввідношення зі взятою нами одиницею міри. Коли візьмемо число більше або менше ніж число x виображене через відтиском OK , то образи цих чисел (точки $M, M_1, M_2, \dots, N_1, N_2, \dots$) лежатимуть на числовій лінії або праворуч ($N_1, N_2, \dots$) або ліворуч ($M, M_1, M_2, \dots$) від точки K .

Геометрична точка K переділяє пряму на 2 проміни: $K \dots -\infty$ і $K \dots +\infty$. Образи всіх чисел менших від x лежатимуть на проміні $K \dots -\infty$, а образи чисел більших від x - на проміні $K \dots +\infty$. Таким чином всі раціональні числа згідно x можна поділити на 2 класи: числа менших від x (що лежать об-рази $M, M_1, \dots$) і числа більших ніж x (що ма-ють образи $N_1, N_2, \dots$)

Таким чином образ κ числа x творить деякий перетин числової лінії (ділить її на 2 проміни) і тому саме невимірне число x зветь перетином поля раціональних чисел.

Очевидно всі раціональні числа належать або до одної, або до другої класу і саме число x (з образом κ) буде завжди більшим кожного числа першої класу і меншим кожного числа - другої, себто:

$$a < x < b \quad (\text{або } o_m < o_k < o_n)$$

Звідси також зрозуміло, що кожне число другої класу завжди більше якого будь-якого числа першої класу.

$$a < b$$

Ми ввели розуміння перетину поля раціональних чисел на випадок x - невимірного числа. Узагальнимо цей термін і на випадок, коли x буде числом вимірним



Наколиб число x було вимірним, то образ його κ також можна розглядати як перетин числової лінії на 2 проміни. Всі раціональні числа більші ніж x мали б образи ($N_1, N_2, \dots$) на правому проміні числової лінії, а вимірні числа менші від x - на лівому.

Таким чином всі числа поля раціональних чисел можна поділити на 2 класи, але в

цього раі й само тело x як раціональне мусить
бути віднесеним до якогось з цих двох класів, себ-
то вважатися або телом найбільшим в пер-
тій класі, або найменшим в другій.

§3. Всі наші міркування приводять до та-
кої класифікації чисел.

1) Кожне раціональне тело не може бути по-
за класом і дується належати до однієї з
них двох.

2) Подія раціонального числа на класи можна
мати в двох випадках:

а) Перетином поля є тело невимірне. Поді
в 1^й класі не існує найбільшого раціонального
тела, а в другій класі - найменшого.

б) Перетином поля є вимірне тело. Поді
коли перетин належить до 1^{го} класу, ця класа
має найбільше тело, а зате 2^{го} класу найменшо-
го тела не має; коли перетин належить до
2^{го} класу, то ця класа матиме найменше те-
ло, а зате перша класа найбільшого тела не
матиме. У випадку а) невимірне тело, що є
перетином поля, є більшим кожного із всіх чи-
сел, що належать до першої класу, й меншим
кожного зі всіх чисел, що належать до другої
класу. Воно є межею між класами і тому
називають, що кожне невимірне тело є замкненим
між якими-намі бачимо телами першої й
другої класу.

Таку класифікацію чисел було введено в науку математиком Дедекіндом і тому вона носить назву класифікації чисел Дедекінда.

В цій класифікації кожне невимірне число є лише символом певного перетину поля раціональних чисел.

§4. Подивимося тепер, що може бути ознакою того, що дане невимірне число A є певним перетином поля раціональних чисел. Для цього доведемо таку теорему.

Якщо дане число A є перетином поля раціональних чисел, то завжди можна вказати два таких числа: α - першої класи і β - другої, різниця між якими не буде перевищувати жодної, наперед заданої, як бажано малої величини ϵ .

Будемо вважати всі числа менші від A числами до першої класи, а числа більші за A - до другої класи. Візьмемо тоді раціональне число α з першої класи й означимо через η , яке-небудь довільне, але нам відоме, раціональне число менше ніж взате ϵ . Тоді можна буде скласти такий необмежений ряд чисел:

$$\alpha, \alpha + \eta, \alpha + 2\eta, \alpha + 3\eta, \dots \dots \alpha + n\eta$$

При досить великій вартості n цей ряд може мати за останній член число більше ніж яке бажане раціональне велике число не залежно від вартості (якою б вона не

була малою) η . Тому в цьому перелі чисел завжди знайдуться й такі, що належатимуть уже до другої класи.

Припустім, що в цьому разі останнє число, що належатиме до першої класи буде $\alpha = a + k\eta$. Тоді число $\beta = a + (k+1)\eta$ вже належатиме до другої класи. Але:

$$\beta - \alpha = [a + (k+1)\eta] - [a + k\eta] = \eta$$

Ми взяли вартості $\eta < \epsilon$, а тому $\beta - \alpha < \epsilon$.

Що й треба було нам довести.

Ця теорема також є доказом того, що кожне невимірне число можна виписати з якого нам бачилося наближеннями.

§5. Введення теорії перетини поля раціональних чисел дає нам можливість виписати кожне невимірне число, як дане, коли лише нам є відомий спосіб поділу цілого поля на класи. Як бачимо, дії над невимірними числами можна в певній мірі заступити діями над їх наближеннями (себто над вимірними числами, що замикатимуть дане невимірне). Тому ці дії можна поставити в підлеглисть тим же законам, що існують для вимірних чисел.

§6. Розглянемо деякі основні визначення:

1. Визначити невимірне число - це значить виписати відповідний перетин поля раціональних чисел.

2. Знайти невимірне число - це значить знайти відповідний йому перетин поля раціональних чисел.

3. Два невимірних числа є рівні, коли відповідні їм перетини сходяться (себто кожне раціональне число з першої класи одного невимірного числа належить також до першої класи другого невимірного числа й аналогічно, що до чисел з другої класи).

4. Два невимірні числа нерівні, коли відповідні їм перетини розходяться (себто між числами першої класи одного невимірного числа знаходяться такі, що належать до другої класи другого невимірного числа й навпаки. Напр.

1^й випадок. Істнує якесь раціональне число a , що належить до першої класи невимірного числа A і до другої класи невимірного числа B . Очевидно, що

$$A > a \text{ і } B < a$$

Отже, можна твердити, що число A більше за B , себто:

$$A > B.$$

2 випадок. Істнує якесь раціональне число b , що належить до другої класи невимірного числа A і до першої класи невимірного числа B . Тоді:

$$A < b \text{ і } B > b$$

Можу можна твердити, що й число A менше B , себто:

$$A < B$$

5. Невимірне число є додатним, коли в першій класі знаходиться хоч одно додатне раціональне число або 0.

і 6. Невимірне число є від'ємним, коли до другої його класи належатиме хоч одно від'ємне число або 0.

Визначим числову лінію й перетнемо її вартістю 0. Можі всі числа першої класи будуть від'ємними, а другої класи додатними. Сам нуль належатиме до однієї з клас. Умовимося називати такий перетин основним, а проміжні числової лінії приклами її. Праве крило зветься додатним, а ліве-від'ємним. Можі констатувати:

Додатним невимірним числом зветься те, що творить перетин в додатному крилі поля раціональних чисел, а від'ємним невимірним числом зветься те, що творить перетин у від'ємному крилі поля раціональних чисел.

§7. Ми вже вказували, що дві над невимірними числами рівномірні тілі окресляють над їх наближеннями вартостями.

Доведено це окремими теоремами.

І. Коли дано два числа: 1) A (в загальному випадку вимірне чи невимірне-однаково), що

має якісь наближення:

x — зі втратою i

y — в літиском

2) В, що має наближення: z і η , то сума цих чисел $A+B$ є рівна числу C , замкненому між наближеннями:

$$(x+z) \text{ і } (y+\eta)$$

Умова теорети твердить, що числа x і z належать до першого класу відношених перетинів, а y і η до другого класу тих же перетинів. Тому можливо припустити, що й суми $C_1: x+z$ належать до першої класу, а $y+\eta$ — до другої класу якогось нового відношених перетинів.

Отже будемо вважати в першій класі всі раціональні числа, що є рівні всім можливим окремим вартостям суми $x+z$, або є менші від них, а в другій класі також вважатимемо всі раціональні числа що є рівні всім можливим окремим вартостям суми $y+\eta$, або є більші за них. А як з умови 1) очевидно, що:

$$x < A < y; \quad z < B < \eta$$

то сума їх:

$$x+z < A+B < y+\eta$$

звідки:

$$x+z < C < y+\eta$$

Перша ознака, що $C (= A+B)$ є перетином очевидно: число C замкнене між сумами $(x+z)$ і $(y+\eta)$

Питається ще довести, що різниця поміж якимись будь-якими вартостями цих сум $(x+z)$ і $(y+\eta)$ може бути менш кожного, наперед зазначеного як бажано малого числа ε . Коли A є перетином поля раціональних чисел, то очевидно, що

$$y-x < \varepsilon,$$

де ε є таке як бажано мале, наперед зазначено, величинею. Також і для перетину B можна сказати, що

$$\eta-z < \varepsilon,$$

Взявши суму цих нерівностей, маємо:

$$(y+\eta) - (x+z) < 2\varepsilon,$$

Раз ε може бути взятим як бажано малим, то завжди цьому числу можна дати таку вартість, що здобуток 2ε буде не більшим ніж ε . А тому наше твердження можна вважати за доведене.

Нали треба ще переконатися, що між середми вартостей $(x+z)$ і $(y+\eta)$ може істнувати лише одне раціональне число (коли A і B раціональні), або ні одного (одн перетин поля, коли A і B ірраціональні).

Ми тільки-що довели, що різниця $(y+\eta) - (x+z)$ може бути менш ніж кожного наперед зазначеного, як бажано мале число ε .

Отже, наскільки між вартостями $(x+z)$ і $(y+\eta)$ вміщується б більше одного раціонального чис-

ла, напр два тіла: C і D (де, припустимо, $D > C$),
то через те що:

$$\left. \begin{array}{l} C > x + z \\ D < y + \eta \end{array} \right\} \text{ або } x + z < C < D < y + \eta$$

маємо нерівність:

$$(y + \eta) - (x + z) > D - C$$

себто $D - C < \epsilon$.

Коли ϵ може бути менш кожного наперед
заданого, як багато малого тіла, то різ-
ниця $D - C$ може бути менше нуля, себто:

$$C = D$$

Отже між 1 і 2 класами може існувати
лише одне раціональне тіло C , або ніодного, ко-
ли C невимірне.

В першому випадкові матимемо перетин
другого або третього роду, а в другому випад-
кові - перетин першого роду.

Але в обох випадках можна твердити, що
 C буде потрібною нам сумою тіл A і B . Коли
нам дано різницю $A - B$ тіл, то розкладаючи
її як суму тіл: $A + (-B)$ ми прийдемо до по-
передніх доводів. Отже теорема I є правди-
вою й для дій віднімання.

§8. Дія множення.

Хай A і B є два дані вимірні або невимір-
ні тіла, що мають наближеннями:

$$x < A < y \quad \text{і} \quad z < B < \eta$$

Будемо звати здобутком тіл A і B таке

тисла C , що буде більшим від всіх можливих
вартостей здобутку xz і меншим від усіх
можливих вартостей здобутку yn . Віднесе-
мо до першої класи всі тисла, що є рівні
з окремими вартостями здобутку xz , або
менші їх, а до другої класи всі тисла, що є рів-
ні з окремими вартостями здобутку yn , або
більші від них. Коли

$$x < A < y \quad \text{і} \quad z < B < n$$

то здобутки:

$$xz < AB < yn$$

А звідси:

$$xz < yn$$

Коли A і B є даними перетинками поля ра-
ціональних тисел, то різниці $(y-x)$ і $(n-z)$ мо-
жуть бути зроблені менш кожного довільно
взятого, наперед зазначеного, як бачимо ма-
лого тисла ε_1 , себто:

$$y - x < \varepsilon_1 ; \quad n - z < \varepsilon_1$$

звідси:

$$y < \varepsilon_1 + x ; \quad n < \varepsilon_1 + z$$

Взявши поменше здобутки цих нерівностей,
маємо:

$$yn < \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_1 z + xz$$

або:

$$yn - xz < \varepsilon_1(\varepsilon_1 + x + z)$$

Але x і z є певні обмежені вартості, а тому
і сума $\varepsilon_1 + x + z$ має обмежену вартість. Через
те, коли тисла ε_1 в своїй вартості простує

до нуля, то й здобуток $\varepsilon_1(\varepsilon_1 + x + z)$ буде просту-
вати до нуля, себто може стати не більш
кожної, довільно взятої, як би було малої, вар-
тості ε . Тому

$$yx - xz < \varepsilon$$

Отже між числами першої класи, що є вар-
тостями добутку xz (або числами менши-
ми їй) і числами другої класи, що є вартос-
тями добутку yx (або числами більшими їй)
завжди можна знайти якісь дві вартості
 α і β , що їх різниця $\beta - \alpha$ буде менш ε , якого
багато малої величини.

Доводами аналогічними доводам поперед-
ньої теоремі, ми переконуємося, що і в цьо-
му разі може існувати лише одне число ε
раціональне або ірраціональне, що буде від-
повідним перетином поля раціональних
чисел, себто буде добутком AB .

В разі дії ділення, коли ми маємо част-
ку $\frac{A}{B}$, то перетворивши її в добуток:

$$\frac{A}{B} = A \cdot B_1 \quad (\text{де } B_1 = \frac{1}{B})$$

перейдемо до доказу попередньої теоремі.

Так само не треба окремого доводу для дії
піднесення в ступінь, бо як додатня, так і від-
ємна ступінь якого числа є окремим випад-
ком дії множення, або ділення.

§ 9 Дія корінювання.

Візьмемо число A яке не буде додаттє (цим чи

Дробове і показателі ступіня n , що є числом до-
датним більшим від одиниці. Щоб визначити
вартість $\sqrt[n]{A}$ ми однесемо до першої класи всі
додатні й від'ємні числа, що мають свої n -ті
ступіні менші від вартості A , себто числа
виразу:

$$a^n < A$$

а до другої класи - всі числа, що мають n -ті
ступіні більші за A , себто:

$$b^n > A$$

Таким чином вартість $\sqrt[n]{A}$ є замкненою
між числами цих класів:

$$a < \sqrt[n]{A} < b$$

або

$$a^n < A < b^n$$

Очевидно, що між вартостями чисел a і b
завжди можна знайти такі, що різниця
їх n -тих ступінів може бути зроблена меншою
кожного наперед заданого, як бажано на-
лого числа ε :

$$b^n - a^n < \varepsilon$$

Тому на основі доведених уже теорем по за на-
сам не може бути більш одного раціональ-
ного числа (або ні одного). Таким чином ми
завжди матимемо перетин поля раціо-
нальних чисел (першого або другого роду) Цей
перетин і буде число $C = \sqrt[n]{A}$ (так званий
аритметичний корінь)

У висновку коли n є само числом невимірним

(іраціональний показатель) то поділвими цих чисел на поле раціональних чисел на 2-ї класи, ми з них можемо взяти два, досить близьких своєю wartoстю до α , числа: x ($x < \alpha$) з першої класи і y ($y > \alpha$) - з другої класи. В цьому разі для довільного числа $\epsilon > 1$ матимемо:

$$\alpha^x < \alpha^\alpha < \alpha^y$$

Щодо α^α , будемо собі вважати, що числа вигляду α^x (при різних wartoстях x) а також числа менші їх наменять до першої класи, а числа вигляду α^y і більші від них - до 2-ї класи.

Щоб довести, що в полі цих чисел є перетин, нам треба зтвердити, що між числами 1-ї і 2-ї класи можна знайти такі wartoсти: $\alpha = \alpha^{x_1}$ і $\beta = \alpha^{y_1}$, що їх різниця може бути менш кожного, поперед зазначеного, як бажано малого числа ϵ . Ця різниця є рівна

$$\beta - \alpha = \alpha^{y_1} - \alpha^{x_1} = \alpha^{x_1} (\alpha^{y_1 - x_1} - 1)$$

припустім, що ми доберемо таке число η , що буде більшим цієї різниці, а саме:

$$\beta - \alpha = \alpha^{x_1} (\alpha^{y_1 - x_1} - 1) < \eta$$

Відшукаємо тепер умови при яких би це число η стало б менше кожного, поперед зазначеного, як бажано малого числа ϵ . З попередньої нерівності маємо:

$$\alpha^{y_1 - x_1} - 1 < \frac{\eta}{\alpha^{x_1}}$$

або $\alpha^{y_1 - x_1} - 1 < \kappa$, де $\kappa = \frac{\eta}{\alpha^{x_1}}$

Звідци:

$a^{y_1-x_1} < 1+\kappa$, або $a < (1+\kappa)^z$ де $z = \frac{1}{y_1-x_1}$ (добавіть Розкладаючи праву частину за біномом [тема] Ньютона, маємо:

$$a < 1 + \kappa + \frac{2(2-1)}{1 \cdot 2} \kappa^2 + \dots$$

Різниця $\beta - \alpha = a^{y_1} - a^{x_1}$ є меншою від η , при умові, що $a < 1 + \kappa + \frac{2(2-1)}{1 \cdot 2} \kappa^2$, то тим скорше вона буде меншою від η , коли це a зменшимо, себто вважатимемо, що:

$$a < 1 + \kappa$$

(відкинемо решту доданків терену бінома)
З цього маємо:

$$\kappa > \frac{a-1}{a}$$

Або вставляючи вартості κ і a :

$$\frac{1}{y_1-x_1} > \frac{a^{x_1}(a-1)}{\eta}$$

Отже
$$y_1-x_1 < \frac{\eta}{a^{x_1}(a-1)}$$

Таким чином, різниця

$$\beta - \alpha = a^{x_1}(a^{y_1-x_1} - 1) < \eta$$

коли $y_1-x_1 < \frac{\eta}{a^{x_1}(a-1)}$. Звідси ми бачимо, що єдиною умовою, що зважає вартість η , буде:

$$\eta > (y_1-x_1)[a^{x_1}(a-1)]$$

Але вартість $a > 1$, а тому й вартість $[a^{x_1}(a-1)]$ буде великого об'єкта, в той час як різниця y_1-x_1 може бути взята меншою якою нам бажано малого числа (бо вартості x_1 і y_1 наближаються до різних класів для перетину κ).

Таким чином, в залежності від вартості

різниці $y_1 - x_1$, права частина нерівності $(y_1 - x_1)[a^{x_1}(a-1)]$, а разом з нею й вартість η можуть бути зроблені менш кожен як бажано малою величиною.

Тому вартість η можна дібрати завжди так, щоб вона стала меншою кожен поперед заданої, як бажано малою, вартості ε . В цьому разі й різниця:

$$\beta - \alpha < \eta$$

буде меншою й ε : $\beta - \alpha < \varepsilon$

Що й треба було довести.

Коли б число a було додатним меншим за одиницю, то розглядаючи вартість $(\frac{1}{a})^m$ ми прийшли б до попередніх висновків.

Нарешті, коли б A було числом від'ємним, то $C = \sqrt[n]{A}$ в разі непарної ступені має цілком реальний зміст.

До цього коріня ми можемо пристосувати всі попередні міркування, висловивши на підставі правил елементарної алгебри знак — за корінь і розглядаючи лише абсолютну вартість цього коріня.

Щоне торкається до випадку коли б ступінь n була парною, то тут справа ускладнюється й це буде нами розглянуто в наступних §§.

Загалом всі попередні твердження нами дають теоретичні обґрунтування дій над не-

вимірними числами.

Правильна переведення цих дій розглядаються окремо в елементарному курсі алгебри.

Злучно-цявні числа.

§10. Сполучність всіх додатних, від'ємних, вимірних і невимірних (дробних і цілих) чисел складає разом з нулем поле реальних чисел. До цього поля не належать внаслідок корінювання парних ступенів корні з від'ємних чисел. Справді $\sqrt[n]{-a}$ не може бути ні додатним ні від'ємним числом, бо кожен з цих чисел в парній ступені дає додатний вислід. Отже в полі реальних чисел ми вислуду такого коріня не знайдемо.

Звідси само-собой випливає думка про сповенення поля реальних чисел ще нового роду вартостями, що мають назву цявних чисел.

Вже при розв'язанні квадратних рівнянь, ми переконуємося, що вартості чисел з поля реальних чисел не завжди можуть дати зв'язки цим рівнянням. Напр., при $b^2 < 4ac$ рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, що має розв'язком $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ не має для своїх розв'язків вартостей з поля реальних чисел.

Щоб вважати квадратове рівняння розв'язним при всіх (без окремих умов) вартостях коефіцієнтів a , b і c нам треба поза полем реальних чисел ввести ще великий широту цявних чисел.

Розкладаючи вартість $b^2 - 4ac$ на 2 сочинники:
($4ac - b^2$). -1, матимемо:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-1 \cdot \sqrt{4ac - b^2}}}{2a}$$

Кали означимо симболом i , при умові що $i^2 = -1$
то матимемо:

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Симболом i має окрему назву уявної одиниці.
Означивши висліди $-\frac{b}{2a} = \alpha$ і $\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \beta$ ми роз-
в'язком квадратного рівняння даємо вираз:

$$x = \alpha \pm \beta i$$

Вартість здобутку βi (реального числа на
уявну одиницю зветься уявним числом. А числа,
що складаються в сумі або різниці реально-
го числа з уявним виразом: $\alpha \pm \beta i$ зветься злучно-
уявними, або просто злучними числами.

Кожне злучно-уявне число складається з двох
чисел: реального (реальна частина злучного
числа) і уявного (уявна частина злучного числа).

Два злучні числа, що відрізняються лише со-
бою лише знаком злучення (знаками між ре-
ального й уявного частинками) зветься друже-
ними (або взаємно-дружескими) злучними чис-
лами.

§11. Основні визначення.

1) Два злучних числа є рівні, коли реальні
частини й сочинники уявних частин є зокре-
ма рівні й одного знаку, себто:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$$

коли $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$

2). Злучне число є рівне нулю коли зокрема реальна частина і сумішня уявної частини є рівні з нулем, себто:

$$a \pm bi = 0; \text{ коли } a = 0 \text{ і } b = 0$$

3) Одно злучне число є більшим від другого, коли:

а) реальна частина і сумішня уявної 1^{го} числа є зокрема більші від реальної частини і сумішника уявної частини 2^{го} числа, себто:

$$a_1 + b_1 i > a_2 + b_2 i \text{ коли } a_1 > a_2 \text{ і } b_1 > b_2, \text{ або}$$

б) при рівності однієї з пар заданих частин друга частина першого числа більше від другої частини другого числа, себто:

$$\text{коли } a_1 = a_2 \text{ але } b_1 > b_2$$

$$\text{або коли } b_1 = b_2 \text{ але } a_1 > a_2$$

Отже порівняння двох злучних чисел зводиться до порівняння реальних складників їх.

§12. Геометричний образ злучного числа.

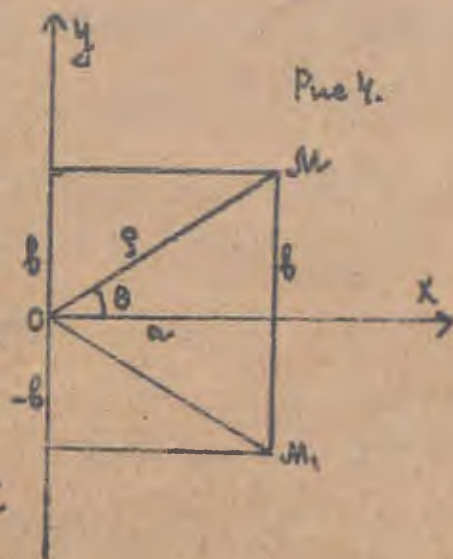
Для більш конкретного уявлення злучного числа Гаусс пропонував таке виображення його геометрично

Візьмім проанові декартові координати хоч і будемо відкладати на осі x -ів реальну частину злучного числа (напр. $a + bi$), а на вісі y -ів сумішника уявної частини. (Рис. 4)

Тоді кожному злучному числу $a + bi$ завжди відновідати певна точка площини M , що матиме значеннями відновідні реальні

смагати даного злучного числа.

З цього ми бачимо, що коли образи дійсних чисел вміщуються на простій (числовій лінії) образи уявних чисел лежать поза цією простою й належать до того ж взаємної площини.



Спосіб геометричного виображення злучних чисел нам дає переконання, що злучні числа є самими задовільними.

Справді: при $b=0$ злучне число обертається в дійсне й образ його лежатиме на вісі іксів (що є числовою лінією). 2) при $a=0$ злучне число обертається в уявне (скажемо так: в чисто-уявне) число. Образ його лежатиме поза числовою лінією, на простій перпендикулярній до неї, що проходить через нульову точку 0 (вісь у-ків). Цю пряму будемо зовати лінією уявних чисел.

Образи дійсних злучних чисел лежатимуть взаємно на площині, на простій (лучек-векторній) що проходить через нульову точку числової лінії перпендикулярно до неї. Нарешті 3) позитивні координати є числовими нулями, бо тоді $a=0$ $b=0$ й злучне число обертається в нуль.

Таким чином всі числа, що ми розглядали завжди матимуть свої образи де-

небудь на площі, а тому ця площа має назву теплової площі.

Рис. 4 показує, що здружені звучні тела мають образи симетрично положені згідно реальної осі (іксів)

§13. Нормальна форма

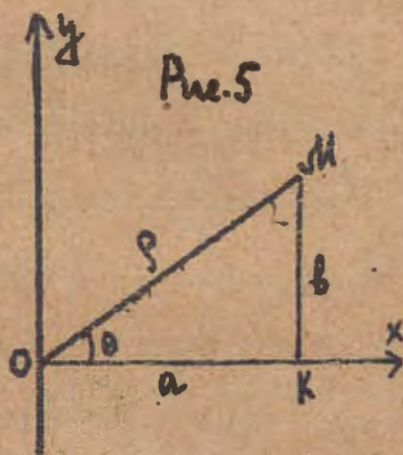
звучного тела.

Вектор OM , що сполучує образ звучного тела M з початком координат зветься геометричним образом модуля, або абсолютної вартості звучного тела. Сама вартість ρ цього вектора зветься модулем (абсолютною вартістю) звучного тела.

Обчислимо його: з $\triangle OMK$ (рис. 5)

маємо за теоремою Піфагора:

$$\rho^2 = a^2 + b^2, \text{ а звідси } \underline{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$$



Модуль звучного тела є рівний з квадратовим корінням із суми квадратів реальних складників цього тела.

Кут спадку вектора-модуля OM на вісь іксів, а саме кут θ має назву амплітуди або незалежника звучного тела.

Коли візьмемо звучне тело:

$$a \pm bi$$

ї вартості a і b обчислимо з $\triangle OMK$ (рис. 5)

а саме:

$$a = \rho \cos \theta$$

$$b = \rho \sin \theta \quad (1)$$

то матимемо:

$$a \pm bi = \rho (\cos \theta \pm i \sin \theta)$$

Форма злужного числа, що є в правій частині рівності зветься нормальною формою злужного числа (можді цю форму зуть тригонометричним обрзом злужного числа).

Ми вже обчислили вартість модуля:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\beta)$$

а з рівностей (д) можемо знайти вартості відповідних аргументів невідомого θ , а саме:

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\gamma)$$

Взори (β) і (γ) зуться взором перетворення, бо дають можливість перетворити алгебрічну форму злужного числа в нормальну. Нотр.

Обернути в нормальну форму злуже число: $x = \sqrt{3} \pm i$.

Через взори перетворення маємо:

$$1) \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2; \quad 2) \cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$3) \sin \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{\pm 1}{2}; \quad \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6} \text{ . Може:}$$

$$x_1 = \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right); \quad x_2 = \sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{або } x_2 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

Для відворотного переходу злужного числа

з нормальної форми до алгебраїчної виходить за згоди перетворення рівності (d). Напр. Для перетворення числа $x = 2(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi)$ до алгебраїчної форми, маємо:

$$a = r \cos \varphi = 2 \cos \frac{5}{6}\pi = 2 \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$$

$$b = r \sin \varphi = 2 \sin \frac{5}{6}\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1. \text{ Тому } x = -\sqrt{3} + i.$$

Модуль злужного числа завжди є число додатне, що обертається в нуль лише тоді, коли вартість самого злужного числа є нуль. Справді, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ обертається в нуль треба, щоб і $a=0$, і $b=0$, але тоді $a+bi=0$.

Для кожного злужного числа незалежними його може мати безліч вартостей, бо входять в число під знаком лише функції $\sin$ і $\cos$, а тому $x = r(\cos \theta \pm i \sin \theta) = r[\cos(\theta \pm 2\pi n) \pm i \sin(\theta \pm 2\pi n)]$

Дії над злужними числами.

§14. I Дія додавання.

Припустимо, що ми маємо два злужні числа: $x = a_1 + b_1 i$ і $y = a_2 + b_2 i$. Переводячи надцими числами дію додавання як взаємні над алгебраїчними величинами, маємо:

$x + y = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$, або виводячи спільного множника і за дужки одержимо:

$$x + y = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

Отже одержуємо, що сума двох злужних чисел є сумою реальних і уявних частин зокрема. Очевидно що модуль суми буде:

$$\rho = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

В окремому випадкові, коли доданками є здружені злучні числа, то їх сума рівна подвійній реальній частині їх, а саме:

$$+ \frac{a_1 + b_1 i + a_1 - b_1 i}{2a_1}$$

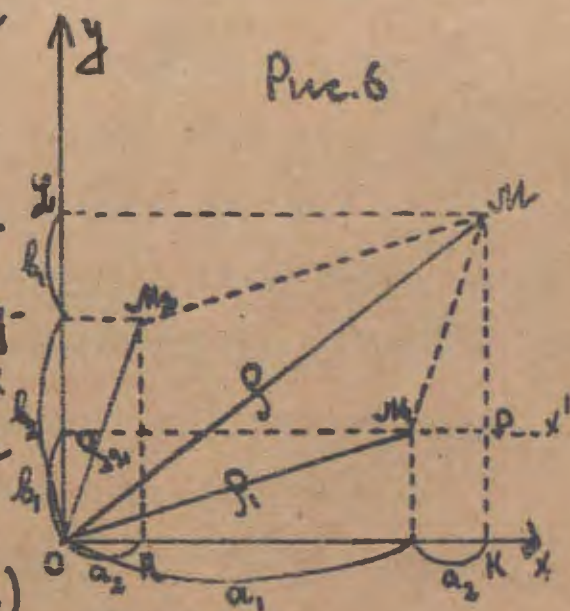
Уявимо що суму геометрично:

Хай геометричним образом злучного числа: $a_1 + b_1 i$ буде точка $M_1(a_1, b_1)$ а образом злучного числа $a_2 + b_2 i$ точка $M_2(a_2, b_2)$. Як ми пересвідчилися сумою цих злучних чисел буде також злучне число:

$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \quad (d)$$

Майши на увазі щоб збудувати геометричний образ цього висхідного числа, ми повинні на осі x -ів відкласти відтисккову $OK = a_1 + a_2$, а на вісі y -ків відкласти $OL = b_1 + b_2$. Тоді за методом Гауса точка $M(OK, OL)$ і буде геометричним образом злучного числа (d)

Визначимо положення цієї точки M що-до даних положень точок M_1 і M_2 (геометричних образів обох доданків). Сп'якуємо точки M_1 і M_2 з початком координат, а точку M з точками M_1 і M_2 (а разом і з початком координат)



ли одержимо рівнобіжність. Справді: $\Delta OM_2P = \Delta M_1MP$ (обидва прямокутні й прями: $M_1P = OP = a_2$; $PM_2 = MP = b$), а тому їх протиположні $\angle OM_2 = \angle M_1M$. Далі з рівності Δ -ів маємо: $\angle M_2OP = \angle M_1MP$, себто кути спадку на вісь ix у обох протиположних є однакові, а тому $OM_2 \parallel M_1M$. Також чина, в чотирікутнику OM_2MM_1 , протилежні бoki $OM_2 = \parallel M_1M$, а тому цей чотирікутник є рівнобіжником.

Звідси очевидно, що геометричний образ суми двох злукних чисел є вершиною рівнобіжника збудованого на модулях доданків і модуль суми є кошиною цюю рівнобіжника.

Загалом кажучи, модулі злукних чисел додаються за правилами додавання векторів.

З рівнобіжника OM_1MM_2 маємо: $r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$. Вартість $\cos(\theta_2 - \theta_1)$ може приймати граничні вартості ± 1 , а тому вартість модуля суми міститься між вартостями:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2, \text{ або } r = r_1 + r_2$$

$$\text{або } r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \text{ або } r = r_1 - r_2$$

$$\text{Звідси } r_1 - r_2 \leq r \leq r_1 + r_2$$

Звідси двох злукних чисел не більший суми їх модулів і не менший різниці тих же модулів.

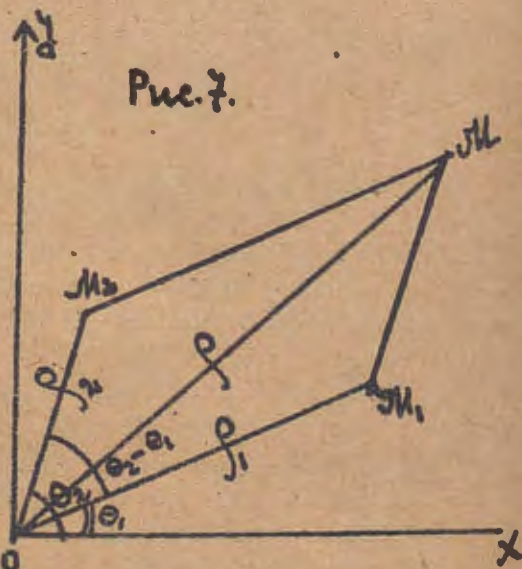


Рис. 7.

Словачи: модуль

Очевидно, що це твердження можна пошири-
ти й на суми кількох базисно зв'язних чисел.

§ 15. II Віднімання

Коли візьмемо два зв'язних числа:

$$x = a_1 + b_1 i$$

$$i \quad y = a_2 + b_2 i$$

то їх різниця алгебрично виражатиметься так:

$$x - y = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Словом: різниця двох зв'язних чисел є різни-
цею їх реальних і уявних частин зокрема.

Модуль різниці двох зв'язних чисел буде:

$$\rho = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

В окремому випадкові, різниці двох з'єд-
них зв'язних чисел матимемо у вигляді подвій-
ну уявну частину їх, а саме:

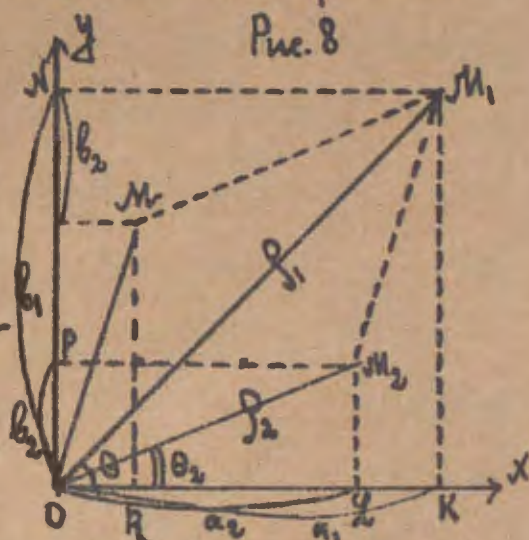
$$\begin{array}{r} a + bi \\ - a - bi \\ \hline 2bi \end{array}$$

Уявимо також і що різницю геометрично:

Хай геометричним образом
зв'язного числа: $a_1 + b_1 i$ буде
точка $M_1(a_1, b_1)$, а образом
зв'язного числа: $a_2 + b_2 i$ буде
точка $M_2(a_2, b_2)$. Як ми пере-
свідчилися, різниця цих
зв'язних чисел буде:

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \dots \dots \beta$$

Тому, щоб збудувати геометричний образ
цього висхідного зв'язного числа, ми маємо



на вісі x -ів відкласти відтиск $OK = OK - KQ = a_1 - a_2$, а на вісі y -ів відкласти радіус $OQ = ON - QN = b_1 - b_2$. Тоді точка $M(OK, OQ)$ й буде геометричним образом висхідного злучного числа (β) .

Міркуваннями, такими, як в попередньому випадкові суми, ми переконаємося, що:

Геометричний образ різниці двох злучних чисел є відповідним вершиною рівнобітника, збудованого на модулях зменшення й від'ємника за правилом відлічування векторів.
(на модуль зменшення й модуль від'ємника, як на косині й одному з боків)

Записано казати, модулі злучних чисел відлічуються за правилом відлічування векторів.

З рівнобітника OMM_1M_2 маємо:

$$\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Але таму, що граничні значення $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ будуть завжди ± 1 то міркуваннями подібними, що користаємося для суми, одержимо:

$$\rho_1 - \rho_2 \leq \rho \leq \rho_1 + \rho_2$$

що словами буде:

Модуль різниці двох злучних чисел не менш різниці модулів зменшення й від'ємника та не більш їх суми.

§16. III Здобуток злучних чисел.

Перемножимо два дані злучні числа $a_1 + b_1i$ і $a_2 + b_2i$ за звичайним правилом мно-

ження алгебричних множення, матимемо:
 $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$, але $i^2 = -1$, а
 тому: $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$
 [прикливо, при множенні двох злукних
 чисел:

$$\begin{array}{r} a_1 + b_1 i \\ \cdot a_2 + b_2 i \\ \hline \end{array}$$

у виведі матимемо злукне число, де реаль-
 ну частину матимемо як суму добутків
 членів вздовж стовбців, а софтиний уявної
 частини як суму добутків множення на-
 хрест.]

Більш злукних для дослідження буде здобу-
 ток злукних чисел дані в нормальній (три-
 гонаметричній) формі.

Хай перше злукне число має нормальну
 форму:

$$x = a_1 + b_1 i = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

а друге:

$$y = a_2 + b_2 i = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

тоді здобуток цих чисел буде:

$$xy = \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 +$$

$$+ i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2), \text{ або:}$$

$$xy = \rho_1 \rho_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

А звідси:

$$xy = \rho_1 \rho_2 [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]$$

ми переконуємося, що:

Модуль добутку двох злукних чисел є рівний
із добутком модулів самих чисел.

2) Незалежність здобутку двох злукних чисел є рівний із сумою незалежностей самих чисел.

Легко переверітися, що це правильно можна поширити на здобуток довільної кількості злукних чисел, а саме:

$$\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \cdot \rho_3(\cos \theta_3 + i \sin \theta_3) \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \rho_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n) = \rho_1 \cdot \rho_2 \dots \rho_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 \dots \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots \theta_n)]$$

В окремому випадкові, коли ми перемножимо зружені злукні числа, матимемо:

$$(a+bi)(a-bi) = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot \rho(\cos \theta - i \sin \theta) = \rho^2(\cos^2 \theta - i^2 \sin^2 \theta) =$$

$$= \rho^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho^2$$

Отже, здобуток двох зружених злукних чисел рівний з квадратом їх модуля (реальне число)

§17. IV Ділення.

Припустимо, що маємо два злукних числа: $x = a_1 + b_1 i$ і $y = a_2 + b_2 i$. Поділимо алгебраїчно одне число на одне, матимемо:

$$\frac{x}{y} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Цей вираз знов має дуже нескладний вигляд, коли візьмемо наші злукні числа в нормальній формі. А саме:

$$x = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad y = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$\text{Моді } \frac{x}{y} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}{\cos \theta_2 + i \sin \theta_2} \text{ або } \frac{x}{y} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{[\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2] + i [\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2]}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} \dots$$

Звідси:

$$\frac{x}{y} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

ми переверітимося, що:

1) Модуль частки від потігу двох злукних чисел є рівний з часткою від потігу модулів самих чисел.

2) Несамостійна частка від потігу двох злукних чисел є рівний з різницею несамостійних самих чисел.

Вправа. Довести, що відношення базисно-згрупованих злукних чисел має модуль завжди одиницю, а несамостійною подвійний несамостійних цих чисел, єто:

$$\frac{a+bi}{a-bi} = (e^{2i\theta} \pm i \sin 2\theta)$$

§18. V Степенування.

Припустимо, що треба визначити якусь n -у ступінь злукного числа: $x = a + bi = r(e^{i\theta} + i \sin \theta)$

Цю ступінь можна розглядати як здобуток n чинників вигляду $r(e^{i\theta} + i \sin \theta)$. Отже:

$$x^n = (a + bi)^n = r(e^{i\theta} + i \sin \theta) \cdot r(e^{i\theta} + i \sin \theta) \dots (n \text{ разів}).$$

Звідси маємо (за правилом множення)

$$x^n = (a + bi)^n = r^n (e^{in\theta} + i \sin n\theta)$$

Цей взір має рівність:

$$(e^{i\theta} + i \sin \theta)^n = e^{in\theta} + i \sin n\theta$$

(після скорочення на r^n). Остання рівність має певну форму Муавра (Moivre). Взір Муавра має велике приміщення в різних математичних доводах (особливо при виводі взорів тригонометрії і розв'язанні зворотних рівнянь). При степенуванні ми пере-

свідуються, що:

1) Модуль якого будь ступіня злужного числа є рівний з тим же ступінем модуля самого числа.

2) Незалежність якого будь ступіня злужного числа є рівний із здобутком незалежності самого числа на показателя ступіня.

§19. VI Корінування.

Припустимо, що вислід корінування:

$$\sqrt[n]{z(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

є якийсь нове злужне число: $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Можемо рівність:

$$\sqrt[n]{z(\cos\theta + i\sin\theta)} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Підносимо обидві частини рівності до ступіня n -го, маємо:

$$z(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$\text{або: } z(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Звідси із виведення рівності злужних чисел, маємо рівність окремо реальних частин і синусів при уявних частинах, а саме:

$$\begin{aligned} z\cos\theta &= \rho^n\cos n\varphi \\ z\sin\theta &= \rho^n\sin n\varphi \end{aligned} \quad (a)$$

Підносимо ці рівності до квадрату й взаємно додаємо їх, одержимо:

$$z^2(\overbrace{\sin^2\theta}^1 + \overbrace{\cos^2\theta}^1) = \rho^{2n}(\overbrace{\sin^2 n\varphi}^1 + \overbrace{\cos^2 n\varphi}^1)$$

$$\text{Отже: } z^2 = \rho^{2n}, \text{ або } z = \rho^n$$

$$\text{А звідси: } \rho = \sqrt[n]{z} \dots (b)$$

Тепер вставляємо вартість ρ в рівності

(а), матимемо:

$$r \cos \theta = r \cos \varphi$$

$$\text{Тому } n\varphi = m\pi \text{ або } \varphi = \frac{2\pi m + \theta}{n}$$

А звідси:
$$\varphi = \frac{2\pi m + \theta}{n}$$

Таким чином значення ρ і φ маємо:
$$\sqrt[n]{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{2\pi m + \theta}{n} + i \sin \frac{2\pi m + \theta}{n} \right)$$

Отже: 1) Модуль коріня якого б будь ступіня із злучного числа є рівний із корінем того ж ступіня із модуля підкоріного числа.

2) Незалежний коріня якого б будь ступіня зі злучного числа є рівний незалежному підкоріного числа, поділеному на показателя ступіня коріня.

§20. Приклади вживання форму Муавра.

Визначення $\sin$ і $\cos$ кратної дуги.

Ми маємо взір Муавра:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Розгорнувши ліву частину за взором бінома Ньютона, маємо:

$$\begin{aligned} \cos^n \theta + i n \cos^{n-1} \theta \sin \theta - C_n^2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta - i C_n^3 \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \\ + C_n^4 \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta + \dots = \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

Очевидно, що в цій потужності мають бути рівні зокрема реальні й уявні частини.

Тому:

$$\sin n\theta = C_n^1 \cos^{n-1} \theta \sin \theta - C_n^3 \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + C_n^5 \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta - \dots$$

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - C_n^2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + C_n^4 \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots$$

Це є загальні взори. Беремо для прикладу:

1) 2-кратну дугу, себто $n=2$. Тоді:

$$\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta - 0 \dots\dots\dots$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 0 \dots\dots\dots$$

2) 3-кратна дуга, $n=3$.

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta + 0 \dots$$

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + 0 \dots$$

i т. д.

Розділ I

§21. Ціла функція

Цілою функцією від незалежника x ми звемо многочлен вигляду:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots\dots a_{n-1}x + a_n$$

де $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ загалом є злучні числа, а в окремих випадках і реальні, а x може набирати якби бажано віртності злучні, або реальні.

Цю функцію ми зведемо n -ю ступіня, коли коефіцієнт при старшому ступіню x^n не є рівний нулю, себто $a_0 \neq 0$. Очевидно, що решта коефіцієнтів крім a_0 можуть бути в окремих випадках нуї, або де-які з них рівні нулю.

Метою вищої алгебри є студіювання розв'язків алгебричних рівнянь вигляду:

$$f(x) = 0$$

Ми з елементарної алгебри знаємо, що коли $f(x)$ буде певимірною (матиме певідомі

під корінням), або дробового (пачинне змінні в знаменателі), то шляхом піднесення до певного ступеня, зведенням до спільного знаменателя, або заміною змінної і т.д. ми зведемо алгебричне рівняння до вигляду:

$$\varphi(x) = 0$$

де $\varphi(x)$ буде деякою цілою алгебричною функцією. Тезе саме пишеться й до рівнянь від кількох багано змінних. Таким чином нам потрібно розглянути властивості переважно цілих функцій.

§22 1^{ша} властивість. В коженій цілій алгебричній функції зі збільшенням модуля змінної модуль старшого члена можна зробити більшим ніж модуль суми решти членів.

Хай дана ціла функція має вигляд:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (1)$$

Означимо: 1) модуль змінної x через ρ , себто $|x| = \rho$
 2) модулі коефіцієнтів через r , себто: $|a_0| = r_0$; $|a_1| = r_1$
 $|a_2| = r_2 \dots \dots \dots |a_n| = r_n$ і 3) найбільший з модулів коефіцієнтів означимо через R . Моді функцію (1) можна уявляти собі так:

$$f(x) = a_0 x^n + (a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n)$$

Ми знаємо, що модуль суми не більший ніж сума модулів доданків, а тому:

$$|a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| \leq |a_1 x^{n-1}| + |a_2 x^{n-2}| + \dots + |a_n|$$

$$\text{або: } |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| \leq r_1 \rho^{n-1} + r_2 \rho^{n-2} + \dots + r_{n-1} \rho + r_n$$

Коли в цій нерівності модулі $r_1, r_2, \dots, r_n$ за-

мінімум через найбільшого з них R , то нерівність не тільки не порушиться, але підміниться, а тобто:

$$|a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| < R(p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1)$$

Або уявляючи поступ в дужках, одержимо:

$$|a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| \leq R \frac{p^n - 1}{p - 1}$$

Збільшуючи вартості змінної ми завжди можемо взяти таку її вартість, щоб модуль її був більшим за одиницю, себто

$$p > 1$$

Тоді $p - 1 > 0$, а тобто й $R \frac{p^n}{p-1} > R \frac{p^n - 1}{p-1}$.

Через те можемо твердити, що:

$$|a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| < R \frac{p^n}{p-1} \dots (2)$$

Розглянемо дріб $\frac{R}{p-1}$. Вартість цього дробу залежатиме від величини p . Припустимо, що збільшуючи цю дріб модуль змінної, ми досягнемо такої вартості його, що дріб $\frac{R}{p-1}$ стане менше модуля счинника a_0 старшого члена, себто:

$$\frac{R}{p-1} < r_0$$

Звідси:

$$p > 1 + \frac{R}{r_0} \dots (3)$$

Наша нерівність (2) не порушиться, коли в ній замість $\frac{R}{p-1}$ вставимо більшу величину r_0 , а то-

$$\text{бто: } |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| < r_0 p^n$$

Але $r_0 p^n$ є модулем старшого члена, себто:

$$|a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| < |a_0 x^n|$$

Таким чином твердження нашої теореми буде правильним при існуючій умові (3)

Висновки. 1) Вартість цілої $f(x) \neq 0$, коли

модуль неаменника $|x| = \rho > 1 + \frac{\rho}{r_0}$ (де ρ найбільший з модулів коефіцієнтів, а r_0 модуль старшого члена

2) Означивши модуль цілої функції через $|f(x)|$ та із властивості модуля суми маємо:

$$|f(x)| \leq |a_0 x^n| + |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n|$$

$$\text{або } |f(x)| \leq r_0 \rho^n + |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| \dots (a)$$

Коли $\rho > 1 + \frac{\rho}{r_0}$, то на основі доведеної теореми:

$$r_0 \rho^n > |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n|$$

і коли замінимо $|a_1 x^{n-1} + \dots + a_n|$ вставимо вартість більшу ніж вона, а саме $r_0 \rho^n$, то нерівність (a) лише підсилюється. Тому:

$$f(x) < 2r_0 \rho^n$$

Світло: при достатньо великих вартостях модуля змінної, що відповідають умову $\rho > 1 + \frac{\rho}{r_0}$ модуль цілої функції є менший ніж подвійний модуль старшого члена.

Це свідчить, що при кожній обмеженій вартості ρ (модуля змінної) вартість модуля самої функції $|f(x)|$ є також числом обмеженим.

3). Коли коефіцієнти членів функції й сама змінна x можна вважати за реальні величини, то при всіх потрібних великих своїх абсолютною величиною вартостях змінної x знак цілої функції буде однаковий зі знаком її старшого члена.

Справді, при реальних вартостях x і коефіцієнтів членів функції модуль старшого

члена буде однаковий з абсолютною величиною самого члена, так само як і модулі решти членів. З теореми видно, що цей модуль при досить великих вартостях x буде більшим ніж модуль суми решти членів, а тому й старший член своєю абсолютною величиною буде більшою абсолютної величини суми решти членів. Отже знак функції залежатиме від знаку старшого члена.

§25. 2^{ге} властивість

В кожній цілій алгебричній функції зі зменшеною модуля змінної, модуль суми всіх членів, крім останнього, можна зробити менше модуля цього останнього наймолодшого члена.

Хай останній счленик нерівний нулю буде a_k . Тоді за теоремою про модуль суми матимемо:

$$|a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{k-1} x^{n-(k-1)}| \leq |a_0 x^n| + |a_1 x^{n-1}| + \dots + |a_{k-1} x^{n-(k-1)}|$$

або приєднуючи попередні означення:

$$|a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{k-1} x^{n-(k-1)}| \leq r_0 \rho^n + r_1 \rho^{n-1} + \dots + r_{k-1} \rho^{n-(k-1)}$$

Заміняючи всі модулі счлеників через їх найбільшому R ми піднімемо нерівність, а саме:

$$|a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{k-1} x^{n-(k-1)}| \leq R (\rho^n + \rho^{n-1} + \dots + \rho^{n-(k-1)})$$

або

$$|a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{k-1} x^{n-(k-1)}| \leq R \frac{\rho^{n-(k-1)} - \rho^{n+1}}{1 - \rho}$$

Зменшуючи вартість x ми завжди досягнемо тих вартостей, коли модуль $|x|$ буде мен-

шим ніж 1, себто $\rho < 1$. Можі дріб $\frac{\rho^{n-(k-1)} - \rho^n}{1-\rho}$ є додатною величиною, а тому можна твердити, що

$$\frac{\rho^{n-(k-1)} - \rho^n}{1-\rho} < \frac{\rho^{n-(k-1)}}{1-\rho}$$

Отже:

$$|a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{k-1} x^{n-(k-1)}| < K \frac{\rho^{n-(k-1)}}{1-\rho} \dots (4)$$

Ми завжди ρ можемо дібрати так, щоб вартість дробу $\frac{K\rho}{1-\rho}$ була б меншою ніж модуль коефіцієнта останнього члена, себто:

$$z_k > \frac{K\rho}{1-\rho}$$

Це буде тоді, коли:

$$\rho < \frac{z_k}{K+z_k} \dots (5)$$

Вставляючи в нерівність (4) вартість z_k замість меншої $\frac{K\rho}{1-\rho}$ ми ще підсилюємо нерівність, а тому матимемо:

$$|a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{k-1} x^{n-(k-1)}| < z_k \rho^{n-k}$$

Але $z_k \rho^{n-k}$ є модулем останнього члена $a_k x^{n-k}$, а тому

$$|a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{k-1} x^{n-(k-1)}| < |a_k x^{n-k}|$$

Таким чином твердження нашої теореми буде правильним для всіх вартостей модуля змінної менших ніж дано умовою (5). Що й треба було довести.

Висновки.

1) Колі ціла функція не має вільного члена, то її модуль просте до нуля разом із модулем змінної $|x|$.

Справді, хай

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_k x^{n-k}$$

де $n-k > 0$

тоді за теоремою модуля суми маємо:

$$|f(x)| \leq \underbrace{|a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-k} x^{n-(k-1)}|}_M + |a_k x^{n-k}| \quad (*)$$

Але на основі попередньої теореми при достатньо малих вартостях модуля x , що випливає з умови (5)

$$M < |a_k x^{n-k}| \quad \text{або} \quad M < 2\tau_k \rho^{n-k}$$

а тому наша нерівність (*) піддається від заміни M через $|a_k x^{n-k}|$. Отже:

$$|f(x)| < 2\tau_k \rho^{n-k}$$

Припустимо, що модуль змінної $|x| = \rho$ простує до нуля, тоді разом з ним простуватиме до нуля і здобуток $2\tau_k \rho^{n-k}$.

Малим чим, коли вартість x буде такою, що здобуток

$$2\tau_k \rho^{n-k} < \varepsilon \quad (**)$$

де ε є константа поперед зазначена, як бачимо мале число, то й модуль $|f(x)|$ тим більшим буде менш цього числа, себто:

$$\underline{|f(x)| < \varepsilon}$$

З рівності (**) можна визначити потрібну вартість модуля $|x|$, а саме:

$$\rho = \sqrt[n-k]{\frac{\varepsilon}{2\tau_k}}$$

Коли константи й змінна мають реальні вартості, то очевидно функція, що не має віданого члену обертається в нуль разом із змінною x (бо всі зазначені модулі є рівні з абсолютною величиною самих вартостей)

2) Коли счинили менів функцій її саму змінну x вважати реальними, то для всіх дощечок мають свою абсолютною величиною вартостей x , так цілої функції однаковий зі знаком її найменшого члену.

Це доводить ся міркуваннями подібними до міркувань висновку (3) попередньої теорем.

§24. Розв'язки цілої функції.

Розв'язком цілої функції $f(x)$ (або розв'язком рівняння $f(x)=0$) звать ту вартість змінної x що обертає дану $f(x)$ в нуль.

У вступі до вищої аналізи, ми переконалися, що цілі функції є тими ж і на підставі цієї тавтології Гаусс довів, що кожна ціла функція має хоч один розв'язок (реальний, або уявний).

Теорема. Кожна ціла функція ділиться без рештки на різницю змінної без даного розв'язка цілої функції

З елементарного курсу нам відомо теорему Безу: Рештка від поділу якої цілої функції на двочлен $(x-a)$ де a є довільне число, рівна вислідку вставки в дану функцію замість змінної x цього заданого числа.

Поділивши на різницю $(x-a)$, де a є довільне число й припустимо, що частка цього поділу буде $\varphi(x)$, а рештка κ . На основі законів алгебри, коли $f(x)$ є n -ого ступіня, то

$\varphi(x)$ має бути $(n-1)$ -го ступеня, а решта R число стали, незалежне від x (бо дільник $(x-a)$ є функцією першого ступеня. Отже:

$$f(x) = \varphi(x) \cdot (x-a) + R.$$

Коли $f(x)$ для певних wartości x є величинаю об'єденою, то й частка $\varphi(x)$ мусить бути для тих же wartości x величинаю об'єденою.

Тому, надаючи x wartość a ми одержимо, що здобуток $\varphi(a)(a-a) = 0$, в той час як R залишається з тією самою величиною. Таким чином

$$f(a) = R$$

Світло решта від поділу $f(x)$ на $x-a$ є рівна з вислідом вставки в $f(x)$ замість x wartości a .

Щоб поділ відбувся на ціло, без решти, кане треба, щоб $R=0$, а це значить, щоб:

$$f(a) = 0$$

Таким чином wartość a має бути розв'язком $f(x)$ й теорема наша є доведена

§25. Розклад цілої функції на множників за допомогою її розв'язків

Хай нам дається $f(x)$ ціла функція ступеня n

Як довів Гаус неодмінно існуватиме хочдиний розв'язок, котрий, мабуть за попереднього непереліку можна твердити, що:

$$f(x) = (x-x_1) f_1(x)$$

де $f_1(x)$ також ціла функція, але ступіня $(n-1)$ -го.
Колн вона є такою цілою функцією, то має
існувати ще один її розв'язок, напр x_2 й тому:

$$f_1(x) = (x-x_2) f_2(x)$$

де $f_2(x)$ є такою цілою функцією $(n-2)$ -го ступіня,
й тому має розв'язок, напр x_3 . Отже:

$$f_2(x) = (x-x_3) f_3(x)$$

Аналогічними міркуваннями дійдемо, що:

$$f_3(x) = (x-x_4) f_4(x)$$

$$f_4(x) = (x-x_5) f_5(x)$$

$$f_{n-2}(x) = (x-x_{n-1}) f_{n-1}(x)$$

$$f_{n-1}(x) = (x-x_n) \cdot K.$$

де K буде стала величина, бо $f_{n-1}(x)$ буде
; $n-(n-1) = 1$ -го ступіня й через те вираз похідну її
на $(x-x_n)$ має бути сталим числом

Визначимо вартість K .

Хай $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$

при похідну її на $x-x_n$ ми завжди одержимо
в $f_1(x)$ а саме старшого члена a_0 , себто:

$$f_1(x) = a_0 x^{n-1} + a_1' x^{n-2} + a_2' x^{n-3} + \dots$$

теж саме буде й при дальшому похідну. Мо-
му $f_{n-1}(x)$ матиме вигляд:

$$f_{n-1}(x) = a_0 x + q$$

де вартість q нас не цікавить.

При останньому похідні матимемо:

$$(a_0 x + q) : (x - x_n) = a_0$$

Що й мушкетєр буть, до шкєль не буде погину
без рєшєтє. Мєжєм їм, ми одержали те-
рєз рївностєй:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-x_1) f_1(x) \\ f_1(x) &= (x-x_2) f_2(x) \\ f_2(x) &= (x-x_3) f_3(x) \\ &\dots\dots\dots \\ f_{n-1}(x) &= (x-x_n) a_0 \end{aligned}$$

Перемножуючи ці рївностє, ми після скорочєннє, матимемо:

$$f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots\dots\dots(x-x_n) \quad (A)$$

Давши змїнний x по-черзі вартостє $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ми кожний раз одержували $f(x)$ в нуль.
Отже, ці вартостє $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ є розв'язками $f(x)$.
Показали, що цих розв'язків не може бути більше ніжє ступїнь функції

§26. Припустїм, що $f(x)$ - є n -ого ступїня
ї що при зазначєннє n розв'язків: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$
їснує ще $(n+1)^{\text{й}}$ розв'язок d .

В цьому разї вартїсть d має одержати
 $f(x)$ в нуль, а тому вставивши її в рївнїстє
(A), матимемо:

$$f(x) = a_0(d-x_1)(d-x_2)(d-x_3)\dots\dots(d-x_n)$$

Раз ми взяли d за розв'язок рїзний від рєш-
тє, то рїзнїсть в дужках $\neq 0$. Тому, щоб $f(x)$
була б рївна з нулем конє треба, щоб $a_0 = 0$

Але тоді $f(x)$ стає функцією $(n-1)^{\text{го}}$ ступїня

й при цьому має n розв'язків (також на одній білій ступіні), а через те згідно з попереднім міркуванням має бути $a_1 = 0$ і т.д. до кінця.

Світло, коли функція n -ого ступіня має білий ніж n розв'язків, то всі її счленики є рівні нулю.

Таким чином можна твердити, що кожна ціла функція має розв'язків не більше ніж її ступінь.

Висновок. Дві функції однакового ступіня що при більшому шлелу ніж ця ступінь вартостях змінної, стають рівними між собою є тотожні.

Вправді, хай дані функції мають вигляд:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

$$\varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n$$

Візьмемо другу функцію від першої й ма-
тимемо:

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x) = (a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + (a_n - b_n)$$

Колн згідно умові $f(x)$ і $\varphi(x)$ стають рівними при білм ніж n вартостях x , то й різ-
ниця $\psi(x)$ при тих же вартостях x має
бертатися в нуль. Світло $\psi(x)$ має білм ніж
її ступінь розв'язків, а тому, як нами було
доведено:

$$a_0 - b_0 = 0; a_1 - b_1 = 0; a_2 - b_2 = 0; \dots a_n - b_n = 0$$

$$\text{або: } a_0 = b_0; a_1 = b_1; a_2 = b_2; \dots a_n = b_n$$

Таким чином функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ є тотожні

§27. Залежність між розв'язками функції та її коефіцієнтами

Ми знаємо що:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n \quad (M)$$

можемо написати як добуток біномів ви-
разу.

$$f(x) = a_0 (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ всі n розв'язків функції. Коли те-
пер всі ці коефіцієнти ^{перемножити} введемо, як ми це робили
в елементарній алгебрі при виводі wzору
бінома Ньютона, означення:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = S_1$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_2 x_3 + \dots = S_2$$

для суми добутків членів по 3 — S_3 і т. д. то
матимемо:

$$f(x) = a_0 [x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - S_3 x^{n-3} + \dots + (-1)^n S_n]$$

А звідси:

$$S_1 = -\frac{a_1}{a_0}; \quad S_2 = \frac{a_2}{a_0}; \quad S_3 = -\frac{a_3}{a_0}; \quad \dots \quad S_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

§28. Злучні розв'язки.

Кожному злучному розв'язку цілої функції,
що має реальні коефіцієнти завжди відпові-
дає другий злучний розв'язок згруппованим з
першим.

Хай функція:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

має розв'язком $x_1 = p + qi$. Тоді

$$f(p+qi) = a_0 (p+qi)^n + a_1 (p+qi)^{n-1} + a_2 (p+qi)^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

Отже:

$$\left. \begin{aligned} & a_0(p^n + np^{n-1}qi - C_n^2 p^{n-2}q^2 - C_n^3 p^{n-3}q^3i + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \dots) \\ & a_1(p^{n-1} + (n-1)p^{n-2}qi - C_{n-1}^2 p^{n-3}q^2 - C_{n-1}^3 p^{n-4}q^3i + \dots) \\ & + a_2(p^{n-2} + (n-2)p^{n-3}qi - C_{n-2}^2 p^{n-4}q^2 + \dots) \\ & \dots \dots \dots \\ & a_{n-1}(p+qi) + \\ & a_n \end{aligned} \right\} a$$

просумувавши окремі реальні й уявні члени ми прийдемо до висновку:

$$f(p+qi) = P + Qi = 0$$

Але на підставі властивості злужних чисел матимемо: $P=0$ і $Q=0$

Якщо ж у $f(x)$ вставити замість $p - qi$

то одержимо:

$$f(p - qi) = a_0(p - qi)^n + a_1(p - qi)^{n-1} + \dots + a_n$$

Отже:

$$\begin{aligned} & a_0(p^n - np^{n-1}qi - C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^3 p^{n-3}q^3i + \dots) \\ & + a_1(p^{n-1} - (n-1)p^{n-2}qi - C_{n-1}^2 p^{n-3}q^2 + C_{n-1}^3 p^{n-4}q^3i + \dots) \\ & \text{і т.д.} \end{aligned}$$

Ми бачимо, що в цій сумі, члени, що мають і, протилежного знаку, ніж ті ж члени в першій сумі (а)

Тому можна написати:

$$f(p - qi) = P - Qi$$

Але ми довели, що $P=0$ і $Q=0$, тому:

$$\underline{f(p - qi) = 0}$$

Світло замість $(p - qi)$ є також розв'язком $f(x)$.

Висновки. Очевидно, що коли ціла функція з
реальними коефіцієнтами є непаристого ступі-
ня, то вона матиме хоч один реаль-
ний розв'язок (коли не реальних розв'язків більше
то їх буде завжди непаристе число 1, 3, 5, ...)

Можливо, коли ціла функція з реальни-
ми коефіцієнтами паристого ступіня, то
вона може й не мати реальних розв'язків, а
коли їх має, то не менш 2х, а більше, - то зав-
жди паристе їх число.

Якщо ціла функція з реальними коефіцієнтами, як ми довели, має один злущий розв'язок, то буде мати й другий йому злущений, тому при розкладанні цієї функції на реальних чинників вигляду:

$$f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2) \dots \dots \dots$$

ми в числі цих чинників матимемо здобуток вигляду:

$$[x-(a+bi)] \cdot [x-(a-bi)]$$

що нам дасть у своїй висхідній

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

або заміняючи $-2a = p$ і $a^2 + b^2 = q$, одержимо:

$$x^2 + px + q = 0$$

Майже точно, кожна ціла функція $f(x)$ що матиме крім реальних і злущі розв'язки, розкритиметься на здобуток реальних чинників такого вигляду:

$$f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2) \dots \dots \dots (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2) \dots$$

§29. Кратні розв'язки.

Очевидно, що кожна ціла функція може мати таке ж і по кількох однакових розв'язків [напр. $f(x) = x^2 + 2x + 1$]. Такі однакові розв'язки звуться кратними.

Розв'язки можуть бути:

звичайні (що не мають собі рівних)

двократні (два однакових)

k -кратні (k однакових).

Припустимо, що $f(x)$ ступіня n має k розв'язків $-x_1$; p розв'язків $-x_2$ і q розв'язків $-x_3$. Тоді:

$$f(x) = a_0 (x-x_1)^k \cdot (x-x_2)^p \cdot (x-x_3)^q \text{ де}$$

$$k + p + q = n$$

Загалом можна твердити, що кожна ціла функція ступіня n -го має n розв'язків.

§30 Властивості кратних розв'язків

І k -кратний розв'язок цілої функції n -ступіня, є розв'язком $(k-1)$ -ї кратності її похідної.

Означимо цей розв'язок через x_1 . Тоді $f(x)$ мусть ділитися на $(x-x_1)^k$ (ніж не на вищий ступінь цієї різниці)

Означимо частку від цього поділу через $\varphi(x)$. Очевидно $\varphi(x)$ ніколи не може ділитися на $(x-x_1)$

Таким чином маємо:

$$f(x) = (x-x_1)^k \varphi(x)$$

Візьмемо першу похідну цієї рівності через x і матимемо:

$$f'(x) = k(x-x_1)^{k-1} \varphi(x) + (x-x_1)^k \varphi'(x)$$

або

$$f'(x) = (x-x_1)^{k-1} \overbrace{[k\varphi(x) + (x-x_1)\varphi'(x)]}^{\psi_1(x)}$$

У дужках маємо суму, якої перший доданок не ділиться на $(x-x_1)$, а другий ділиться, тому й ціла сума не може ділитися на $(x-x_1)$.
Отже рівність:

$$f'(x) = (x-x_1)^{k-1} \psi_1(x)$$

де $\psi_1(x)$ не має розв'язком x_1 , доводить твердження подане теоремою.

II Якщо якийсь $f(x)$ має розв'язок k -ої кратності, то її перші $k-1$ похідні при вставці замість x wartości цього розв'язку обертаються в нуль, а k -та похідна завжди $\neq 0$.

Ми вже знаємо, що коли $f(x)$ має розв'язок x_1 k -ої кратності, то її похідна має той же розв'язок в $(k-1)$ -ї кратності. Міркуючи так само далі, ми переконуємося, що й 2-а похідна $f''(x)$ буде мати розв'язком x_1 , але в $(k-2)$ -ї кратності. Седмо:

$$f''(x) = (x-x_1)^{k-2} \psi_2(x)$$

далі:

$$f'''(x) = (x-x_1)^{k-3} \psi_3(x)$$

.....

$$f^{(k-1)}(x) = (x-x_1)^{k-(k-1)} \psi_{k-1}(x) = (x-x_1) \psi_{k-1}(x)$$

і нарешті: $f^{(k)}(x) = (x-x_1)^{k-k} \psi_k(x) = \psi_k(x)$

де, як знаємо, всі функції означені через ψ , не мають розв'язком x_1 .

Вставляючи у всі виведені рівності замість

х вартістю даного розв'язку, матимемо:

$$f'(x_1) = (x_1 - x_1)^{k-1} \psi_1(x_1) = 0$$

$$f''(x_1) = (x_1 - x_1)^{k-2} \psi_2(x_1) = 0$$

$$f'''(x_1) = (x_1 - x_1)^{k-3} \psi_3(x_1) = 0$$

.....

$$f^{(k-1)}(x_1) = (x_1 - x_1) \psi_{k-1}(x_1) = 0$$

але $f^{(k)}(x_1) = \psi_k(x_1) \neq 0$

До всі вартості функцій, означені через $\psi_p(x_1)$; $p=1 \dots k$ є обчислені величини не рівні з нулем, так-
же вартість x_1 була б розв'язком цих функцій,
що протиріччю є умові

Цю не саму теорему можна довести за до-
помогою теореми Майлора, а саме:

Означимо різницю $x - x_1$ через h , тоді $x = x_1 + h$
Розгорнувши в теорему Майлора різницю
 $f(x_1 + h) - f(x_1)$

матимемо:

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \frac{h}{1!} f'(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_1) + \dots +$$

$$+ \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x_1) + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_1) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_1) + \dots$$

звідси:

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \left[f(x_1) + \frac{h}{1!} f'(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1) + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x_1) \right] + h^k \left[\frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} + \frac{h}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_1) + \dots \right] (N)$$

Раз x_1 є розв'язком $f(x)$ k -ої кратності, то $f(x)$ мусить
ділитися на $(x - x_1)^k = h^k$ націло (без решти), але
поділомом рівність (N) на h^k ми спостерігаємо
що 2-й доданок правої частини цієї рівності

поділяється на h^k , а перший ні. Отже 1^й доданок є рештою від h^k поділу, а саме:

$$r = f(x_1) + \frac{h}{1!} f'(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1) + \dots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x_1).$$

Ця решта, з огляду на подільність на h^k цілої $f(x)$ має бути рівною з нулем:

$$f(x_1) + \frac{h}{1!} f'(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1) + \dots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x_1) = 0 \dots (P)$$

В цій рівності $f(x_1), f'(x_1) \dots f^{(k-1)}(x_1)$ мають певні сталі значення, але $h = x - x_1$ - є величиною змінною, що навіває собі значення в залежності від змін значень x .

Тому рівність (P) ми зможемо вважати як рівняння $(k-1)^{й}$ ступеня від змінної h .

Ми знаємо, що розв'язок x_1 - є k -ої кратності, а тому рівняння (P) має розв'язків більше ніж його ступінь, через те подоведеному раніше і всі коефіцієнти цього рівняння мають дорівнювати нулю, себто:

$$f(x_1) = 0; f'(x_1) = 0; f''(x_1) = 0; \dots f^{(k-1)}(x_1) = 0$$

Максимальним загальним розв'язком k -ої кратності даної функції є одночасно розв'язком і перших $(k-1)$ похідних цієї функції.

§31. Спільний найбільший дільник цілої функції та її похідної.

Хай ціла функція $f(x)$ матиме розв'язки k -го ступеня кратності. Позначимо ці кратності через $\alpha, \beta, \gamma \dots k$, де яка-будь з цих літер, напр. α може бути й рівна 1, тоді даний

розв'язок буде звичайним.

При цих означеннях $f(x)$ матиме такий вигляд:

$$f(x) = \alpha_0 (x-x_1)^{\alpha} (x-x_2)^{\beta} (x-x_3)^{\gamma} \dots (x-x_e)^{\kappa}$$

Як ми довели її перша похідна матиме вигляд:

$$f'(x) = (x-x_1)^{\alpha-1} (x-x_2)^{\beta-1} \dots (x-x_e)^{\kappa-1} \varphi(x)$$

Де $\varphi(x)$ вже не ділиться на $(x-x_1); (x-x_2) \dots (x-x_e)$
Поділивши $f(x)$ на $f'(x)$, матимемо:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{\alpha_0 (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_e)}{\varphi(x)}$$

Зомаяду на те, що, як сказано, $\varphi(x)$ не ділиться ні на одну з різниць в титках множителя, то, $\frac{f(x)}{f'(x)}$ є дробом, що не скорочується, а звідси збудуємо:

$$D = (x-x_1)^{\alpha-1} (x-x_2)^{\beta-1} \dots (x-x_e)^{\kappa-1}$$

Буде спільним найбільшим дільником функцій $f(x)$ та її похідної. Цей дільник завжди можна знайти за допомогою елементарної алгебри, а вислід поділу на нього даної функції $f(x)$ дає нам можливість позбавитися від кратних розв'язків, а саме:

$$\frac{f(x)}{D} = \alpha_0 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_e)$$

рівняння $\alpha_0 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_e) = 0$
дає нам всі відмінні розв'язки $f(x)$

§32. Відокремлення кратних розв'язків

Припустимо, що ми маємо $f(x)$ n -ого ступеня. Хай ця функція має які бажано: звичайні, двократні, трикратні і т.д. розв'язки.

Будемо називати множина $(x-x_k)$ - звичайною, коли x_k - є звичайний розв'язок, двократною, коли x_k - є двократний розв'язок і т.д.; взагалі $(x-x_k)$ будемо зва-
ти множиною r -кратною, коли x_k - є розв'язком такої r -кратною

Введемо означення через X_k - збудуток всіх мно-
жин k -ої кратності. Можі збудуток звичайних
множин означитиметься через X_1 , збудуток дво-
кратних множин через X_2 і т. д. Приймемо
у умовині вважати $X_0=1$, коли функція не
має розв'язків 0 -ої кратності. Користуючись
з цих означень, ми можемо написати:

$$f(x) = X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^3 \cdot X_4^4 \cdot \dots \cdot X_k^k \quad (a)$$

Похідна цієї функції буде:

$$f'(x) = X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^3 \cdot \dots \cdot X_k^{k-1} \cdot \varphi(x)$$

де $\varphi(x)$ - не містить кратних множин
Ми знаємо, що спільний найбільший діль-
ник цих функцій $f(x)$ і $f'(x)$ буде:

$$D_1 = X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^3 \cdot \dots \cdot X_k^{k-1} \quad (b)$$

Візьмемо другу похідну $f(x)$, себто першу похід-
ну $f'(x)$ і матимемо:

$$f''(x) = X_3 \cdot X_4^2 \cdot X_5^3 \cdot \dots \cdot X_k^{k-2} \cdot \varphi_1(x)$$

Спільний найбільший дільник функцій $f'(x)$
і $f''(x)$ буде:

$$D_2 = X_3 \cdot X_4^2 \cdot X_5^3 \cdot \dots \cdot X_k^{k-2} \quad (b)$$

Мим самим чином знайдемо, що:

$$D_3 = X_4 \cdot X_5^2 \cdot X_6^3 \cdot \dots \cdot X_k^{k-3} \quad (c)$$

$$D_4 = X_5 \cdot X_6^2 \cdot X_7^3 \cdot \dots \cdot X_k^{k-4} \quad (d) \text{ і т.д.}$$

Будемо тепер по черзі ділити рівності (а), б), в), г) ... і т.д. кожну попередню на свою наступну й матимемо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(x)}{D_1} &= X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_k \\ \frac{D_1}{D_2} &= X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot \dots \cdot X_k \\ \frac{D_2}{D_3} &= X_3 \cdot X_4 \cdot X_5 \cdot \dots \cdot X_k \\ \frac{D_3}{D_4} &= X_4 \cdot X_5 \cdot X_6 \cdot \dots \cdot X_k \\ &\text{і т.д.} \end{aligned} \right\} (e)$$

Тепер будемо знова по черзі ділити рівності (e) кожну попередню на свою наступну й матимемо:

$$\frac{f(x)}{D_1} : \frac{D_1}{D_2} = X_1 \quad \text{або} \quad \frac{f(x) D_2}{D_1^2} = X_1$$

Аналогічно: $\frac{D_1 D_3}{D_2^2} = X_2 ; \quad \frac{D_2 D_4}{D_3^2} = X_3$

Тепер порівнявши кожну з одержаних рівностей з нулем, ми матимемо:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0$$

тепер рівнянь, що дають нам розв'язки $f(x)$, по кожній кратності зокрема

Приклад. Дано $f(x) = x^7 - x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x - 1$
 Можемо $f'(x) = 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 6x + 1$. Спугневши діленням знайдемо: $D_1 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

Друга похідна $f''(x) = 42x^5 - 30x^4 + 60x^3 - 36x^2 + 18x - 6$

Звідси: $D_2 = x^2 + 1$

Дано $f'''(x) = 210x^4 - 120x^3 + 180x^2 - 72x + 18$; $i\mathfrak{D}_3 = 1$; $\mathfrak{D}_4 = 1$ i m.g.

тоому $X_1 = \frac{f(x)\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{D}_1^2} = \frac{(x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x - 1)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = x - 1$

$$X_2 = \frac{\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_3}{\mathfrak{D}_2^2} = \frac{(x^2 + 1)^2 \cdot 1}{(x^2 + 1)^2} = 1$$

(маємо 2^ю кратності немає)

$$X_3 = \frac{\mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_4}{\mathfrak{D}_3^2} = \frac{(x^2 + 1) \cdot 1}{1} = x^2 - 1$$

Маємо тип:

$$f(x) = (x-1)(x+1)^3$$

i має розв'язки:

$x_1 = 1$ звичайний розв'язок

$$x_2 = +i$$

$$x_3 = -i$$

} третьої кратності.

Розв'язання рівнянь.

§33. Двогленні рівняння.

Двогленним рівнянням звуться рівняння вигляду:

$$x^n + A = 0$$

де A в загальному вигляді є многочленом змінної x .
Кожне таке рівняння звичайною заміною змінних:

$$x = \sqrt[n]{A} \cdot y$$

де $\sqrt[n]{A}$ - звуться арифметичними розв'язками рівняння, зводиться до найпростішого, має два-три одиничного вигляду рівняння, а саме:

$$Ay^n + A = 0$$

або

$$y^n + 1 = 0$$

Очевидно, що нам прийдеться розглянути розв'язання цього рівняння поспереду.
Хай дається рівняння вигляду:

$$x^n \mp 1 = 0 \dots\dots (A)$$

де $n=2,3,4,5\dots$ За допомогою злукних чисел ми одержимо:

$$\pm 1 = \rho(\cos m\pi + i \sin m\pi) \dots\dots (1)$$

де $\rho=1$, а m : 1) для $+$ - є парними: $0, 2, 4\dots$

2) для $-$ - є непарними: $1, 3, 5\dots$

Означимо модуль змінної x через r , а несеєсттє, через θ , тоді

$$x = r(\cos \theta + i \sin \theta) \dots\dots (2)$$

Для визначення x , треба знайти вартості r і θ . Визначив рівняння (A), а саме $x^n \mp 1 = 0$ и не-
перенесли одитицю в праву частину.

$$x^n = \pm 1$$

Вставляючи в ці рівняння написані нами вар-
тості x і ± 1 , одержимо:

$$r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho(\cos m\pi + i \sin m\pi)$$

Звідци:

$$\left. \begin{aligned} r^n \cos n\theta &= \rho \cos m\pi \\ r^n \sin n\theta &= \rho \sin m\pi \end{aligned} \right\} (3)$$

Підносячи до квадрату ці рівняння и взаємно
додаючи их, маємо:

$$r^{2n}(\cancel{\cos^2 n\theta} + \cancel{\sin^2 n\theta}) = \rho^2(\cancel{\cos^2 m\pi} + \cancel{\sin^2 m\pi})$$

$$\rho = r^n$$

$$r = \sqrt[n]{\rho} = 1, \text{ бо } \rho = 1$$

Тут беремо лише $+$ тому, що модуль ми
вважали завжди додатним.

Вставляючи варіанти $r=1$, $p=1$ в 2^{ге} рівняння (3)

маємо:
$$\sin \theta = \sin \pi$$

Звідси:

$$n\theta = \arcsin \sin \pi = 2\pi M + \pi$$

$$\theta = \frac{2\pi M + \pi}{n}$$

Тоді маємо справу з рівнянням:

$$x^n = 1, \text{ або } x^n - 1 = 0$$

то n є парне, напр. $2p$ і тоді одержуємо:

$$\theta = \frac{2\pi M + 2p\pi}{n} = \frac{2\pi(M+p)}{n} = \frac{2\pi k}{n}$$

і розв'язок:

$$x = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \quad \text{--- (I)}$$

Де $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ (бо починаючи з $k=n, n+1$ з огляду на періодичність функцій $\sin$ і $\cos$ вартості x будуть повторюватися)

Тоді маємо справу з рівнянням:

$$x^n = -1 \text{ або } x^n + 1 = 0$$

то n є непарне, напр. $2p+1$ і тоді одержуємо:

$$\theta = \frac{2\pi M + (2p+1)\pi}{n} = \frac{\pi[2(M+p)+1]}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

і тоді:

$$x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \quad \text{--- (II)}$$

Де знова: $k=0, 1, 2, \dots, n-1$

Загальний розв'язок (I) рівняння:

$$x^n - 1 = 0$$

показує, що це рівняння має завжди один реальний розв'язок, що відповідає вартості $k=0$

тоді
$$x = \cos 0 + i \sin 0 = 1.$$

Цей розв'язок зветься арифметичним, бо одержується від безпосереднього корінювання:

$x = \sqrt[n]{1} = 1$ (до n непаристе). При n паристому
 других розв'язків немає. А при n -паристому
 маємо ще один реальний розв'язок, що відпові-
 де $k = \frac{n}{2}$, а саме:

$$x = \cos \frac{2\pi \cdot \frac{n}{2}}{n} + i \sin \frac{2\pi \cdot \frac{n}{2}}{n} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

Це теж арифметичний розв'язок, бо одержується
 за звичайним корінюванням, а саме:

$$x = \pm \sqrt[n]{1} \text{ (до } n \text{ - паристе)}$$

Решта розв'язків є парами згруповані злучні
 вартості. Розв'язок (II) рівняння $x^n + 1 = 0$ має реаль-
 ний розв'язок лише при n непаристому, тоді
 коли $k = \frac{n-1}{2}$. Справді:

$$x = \cos \frac{(2 \cdot \frac{n-1}{2} + 1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2 \cdot \frac{n-1}{2} + 1)\pi}{n} =$$

$$\cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

Це також арифметичний розв'язок, також
 одержується шляхом звичайного корінювання, а
 саме:

$$x^n + 1 = 0 \text{ або } x^n = -1; \quad x = \sqrt[n]{-1}$$

При n непаристому буде $x = -\sqrt[n]{1} = -1$, при n па-
 ристому це є уявна величина. Решта роз-
 в'язків цього рівняння є злучні парами згруповані
 числа. Розглянемо ці розв'язки в окремих ви-
 падках.

I Найпростіш для квадратного рівняння
 1) $x^2 - 1 = 0$ (арифметично $x_1 = +1$; $x_2 = -1$). Беруи загаль-
 ний розв'язок $x = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ ми бачимо, що при
 $n = 2$, вартості x можуть бути: $k = 0$; $k = 1$
 тоді:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$x_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

2) Для рівняння $x^2 + 1 = 0$

(Арифметично маємо: $x^2 = -1$; $x_{1,2} = \pm i$)

З загального розв'язку: $x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$, коли $n=2$; $k=0,1$ маємо:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = +i$$

$$x_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

II Кубичне рівняння.

1) $x^3 - 1 = 0$ або $x^3 = 1$.

Загальний розв'язок:

$$x = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$$

$$n=3; k=0;1;2$$

$$k=0; x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k=1; x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$k=2; x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

III Рівняння 4-го ступеня.

1) $x^4 = 1$

Заг. розв. $x = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$

$$n=4; k=0;1;2;3$$

$$k=0; x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k=1; x_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$k=2; x_3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$k=3; x_4 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

2) $x^3 + 1 = 0$ або $x^3 = -1$

Загальний розв'язок

$$x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

$$n=3; k=0;1;2$$

$$k=0; x_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$k=1; x_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

(Сприти розв'язок при $k=\frac{n-1}{2}=\frac{3-1}{2}=1$)

$$k=2; x_3 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

2) $x^4 = -1$

Загальн. розв. $\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$

$$n=4; k=0;1;2;3$$

$$k=0; x_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$k=1; x_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$k=2; x_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$k=3; x_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

(два аритм. корні $x = \sqrt[4]{1} = \pm 1$)

Значом розв'язки:

$$x_{1,2} = \pm 1; x_{3,4} = \pm i$$

Значом розв'язки:

$$x_{1,3} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i); x_{2,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

Коли ми маємо загальне рівняння вигляду:
 $y^n + A = 0$, то як зазначали приводимо його до вигляду $x^n + 1 = 0$, через заміну: $y = \sqrt[n]{A} x$

Отже розв'язки такого рівняння є збудженими арифметичного корня даного ступеня. із більшою члена на відповідні розв'язки одиничного збудженого рівняння. Напр. рівняння.

$$x^3 = 27.$$

Маємо вже розв'язки рівняння $x^3 - 1$, а арифметичний корінь 3^{го} ступеня з 27 буде:

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

Тому:

$$x_1 = 1 \cdot 3 = 3$$

$$x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = -\frac{3-i3\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = -\frac{3+i3\sqrt{3}}{2}$$

Рівняння 3^{го} ступеня

§34. Теорема. Кожне рівняння третього ступеня можна звести до простішого рівняння того ж ступеня, що не містить змінної в квадраті.

Візьмемо рівняння 3^{го} ступеня в загальному вигляді:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \dots (a)$$

Зробимо заміну $x = y + m$, де m довільне ве-

лишка. тоді:

$$A(y+m)^3 + B(y+m)^2 + C(y+m) + D = 0$$

або: $Ay^3 + (3Am + B)y^2 + (3Am^2 + 2Bm + C)y + (Am^3 + Bm^2 + Cm + D) = 0$

Вартість m довільна, а тому ми завжди зможемо дібрати її такого, щоб:

$$3Am + B = 0$$

або звідси: $m = \frac{B}{3A}$

Таким чином:

$$Ay^3 + \left(\frac{B^2}{3A} - \frac{2B^2}{3A} + C\right)y + \left(-\frac{B^3}{27A^2} + \frac{B^3}{9A^2} - \frac{CB}{3A} + D\right) = 0$$

або:

$$y^3 + \frac{3AC - B^2}{3A^2}y + \frac{2B^3 - 9ABC + 27A^2D}{27A^3} = 0$$

Означивши вирази $\frac{3AC - B^2}{3A^2} = p$ і $\frac{2B^3 - 9ABC + 27A^2D}{27A^3} = q$

маємо:

$$y^3 + py + q = 0$$

Це рівняння має назву упорядкованого

§35 Отже розв'язання кожного рівняння 3^{го} ступеня можна звести до розв'язання рівняння:

$$x^3 + px + q = 0$$

Беремо $x = u + v$, тоді:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

або: $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$; або

$$(u^3 + v^3 + q) + (u+v)(3uv + p) = 0$$

u і v є довільні змінні зв'язані лише умовою що їх сума $u+v=x$, а тому їх завжди можна дібрати так, що:

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

$$3uv + p = 0$$

Ця система й дасть нам можливості визначити u і v . Беремо:

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Складемо квадратові рівняння

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

а звідси:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}; \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Отже:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (A)$$

Це й є взір виведений італійським вченим Кардано і тому має назву взору Кардана. Цей взір безпосередньо дає лише одну вагність (аритметичну вагність) змінної x .

Сталося загарто вичувати певну розв'язів. Для цього звертаємо увагу на те, що u і v одержуються з двохених рівнянь:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = M; \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = N$$

З розв'язання таких рівнянь ми знаємо u і v матиме по 3 вагності, а саме:

$$u_1 = \sqrt[3]{M}; \quad u_2 = \sqrt[3]{M} \cdot \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = u_1 d; \quad u_3 = \sqrt[3]{M} \cdot \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = u_1 \beta$$

$$v_1 = \sqrt[3]{N}; \quad v_2 = \sqrt[3]{N} \cdot \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = v_1 d; \quad v_3 = \sqrt[3]{N} \cdot \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = v_1 \beta.$$

$$\text{де } d = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \quad \beta = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \text{ а звідси } d \cdot \beta = 1.$$

Комб ми для взору A довірно комбінюємо

всі ці вартоєти u і v , то одержали б 9 ком-
 бінацій: u_1+v_1 ; u_1+v_2 ; u_1+v_3 ; u_2+v_1 ; u_2+v_2 ; u_2+v_3 ;
 u_3+v_1 ; u_3+v_2 ; u_3+v_3 ; себто 9 розв'язків для змінної
 x , що не можливо, бо дане рівняння лише 3^{го} ступ-
 ніня. Але ми маємо ще одно обмеження для цих
 комбінацій, а саме: збудуток розв'язків u і v має
 бути рівний $z = -\frac{p}{3}$ (друге рівняння нашої си-
 стем). Отже кожен з розв'язків u_1, u_2, u_3 мож-
 на комбінувати з одним єдиним розв'язком v ,
 що є зв'язаний з даною рівністю:

$$v = -\frac{p}{3u_k} \quad k=1,2,3$$

Таким чином розв'язків не може бути більш 3^х.
 Лишається устатковити, які саме ці розв'язки.
 Ми бачимо, що:

$$\begin{aligned}
 v_1 = v^I &= -\frac{p}{3u_1} & (\text{до арифметичні бар-} \\
 v'' &= -\frac{p}{3u_2} & \text{тоєти знайдені, вико-} \\
 v''' &= -\frac{p}{3u_3} & \text{нуєм задану умову})
 \end{aligned}$$

Встановлюючи вартоєти u_1, u_2, u_3 , маємо:

$$v_1 = v^I = -\frac{p}{3u_1}; \quad v'' = -\frac{p}{3u_2} \quad \text{і} \quad v''' = -\frac{p}{3u_3}$$

Помножимо чисельник і знаменник v''
 на d^2 , а чисельник і знаменник v''' на
 β^2 , тоді маємо:

$$v'' = -\frac{p d^2}{3u_2 d^2} \quad ; \quad v''' = -\frac{p \beta^2}{3u_3 \beta^2}$$

Але:

$$d^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1-3-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \beta$$

$$\beta^2 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1-3+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = d$$

$$\text{Тому: } v'' = -\frac{p\beta}{3u_1\beta_1} = -\frac{p\beta}{3u_1} = v_1\beta = v_3$$

так само:

$$v''' = -\frac{p\alpha}{3u_1\alpha_1} = v_1\alpha = v_2$$

Таким чином:

$$x_1 = u_1 + v_1; \quad x_2 = u_2 + v_3; \quad x_3 = u_3 + v_2$$

Всі три розв'язки.

§36. Аналіз розв'язків в тому випадку, коли рівняння 3^{го} ступеня має реальні корни.

Очевидно, що коли довічне взате рівняння має реальні корни, то й відповідне унорядковане рівняння також матиме реальні корни. Вираз:

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$$

звуть виразником срунцій $f(x) = x^3 + px + q$. До від знаку D цілковито залежать розв'язки $f(x)$. Розглянемо випадок, коли $D > 0$. Тоді:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \quad \text{і} \quad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

є вартості цілком реальні, а через те x_1 має реальну вартість. Решта же розв'язків будуть згруповані злучні мери, а саме:

$$u_2 = u_1 \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \quad u_3 = u_1 \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$v_2 = v_1 \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \quad v_3 = v_1 \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Отже:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= u_2 + v_3 = -\frac{u_1 + v_1}{2} + i \frac{u_1 - v_1}{2} \sqrt{3} \\ x_3 &= u_3 + v_2 = -\frac{u_1 + v_1}{2} - i \frac{u_1 - v_1}{2} \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \dots (C)$$

Кришнітма. Розв'язок $u_1 \neq v_1$ бо тоді маємо δ (дуб. сучетану) $u_1^3 + v_1^3 + q = 0$, або $2u_1^3 + q = 0$; $u_1^3 = -\frac{q}{2}$. Але $u_1^3 = -\frac{q}{2} + \mathcal{D} = \mathcal{M}$. Можемо $\mathcal{D} = 0$, що суперечить умові.
2^й випадок: $\mathcal{D} = 0$.

Можемо: $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\mathcal{D}}} \quad ; \quad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\mathcal{D}}}$
 гаємо $u_1 = v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$

Можемо: $\chi_1 = 2u_1 = 2v_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$
 є розв'язком реальним.

Решту розв'язків одержимо з (C), коли вважатимемо $u_1 = v_1$, а саме:

$$\chi_2 = -\frac{u_1 + v_1}{2} + i \frac{u_1 - v_1}{2} \sqrt{3} = -u_1$$

$$\chi_3 = -\frac{u_1 + v_1}{2} - i \frac{u_1 - v_1}{2} \sqrt{3} = -u_1$$

Решта розв'язків є також реальні й однакова (маємо двократний розв'язок).

3^й випадок: $\mathcal{D} < 0$

Очевидно, що й u_1 і v_1 будуть в цьому разі з'являтися з'являтися комплексними, а саме:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{\mathcal{D}}} = d + \beta i \quad ; \quad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\sqrt{\mathcal{D}}} = d - \beta i$$

Але в такому разі:

$$\chi_1 = u_1 + v_1 = 2d$$

$$\chi_2 = u_2 + v_3 = (d + \beta i) \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + (d - \beta i) \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -d + \beta\sqrt{3} = (d + \beta\sqrt{3})$$

$$\chi_3 = u_3 + v_2 = (d - \beta i) \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + (d + \beta i) \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -d + \beta\sqrt{3} = -(d - \beta\sqrt{3})$$

Ми бачимо що всі три розв'язки є реальні (хочезир Кардана дає їх зовнішнє як з'являтися)

Обчислимо d і β .

Введемо отачення:

$$-\frac{q}{2} = \rho^3 \cos \theta ; \quad \mathcal{D} = -\rho^6 \sin^2 \theta \dots \dots (1)$$

моги:

$$(\mathcal{D}) \frac{q^2}{4} + \frac{\rho^3}{27} = -\rho^6 \sin^2 \theta$$

або:

$$\rho^6 \cos^2 \theta + \frac{\rho^3}{27} = -\rho^6 \sin^2 \theta$$

звигну:

$$\rho^6 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -\frac{\rho^3}{27}; \quad \rho = \sqrt{-\frac{\rho}{3}}; \quad \cos \theta = -\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{\rho}{3}}} = -\frac{\frac{q}{2}}{\rho^{\frac{1}{3}}}$$

Отже маємо змогу обчислити ρ , а також θ через косинус в границях $0 \dots \pi$

Вставляючи (1) у варіант u_1 і v_1 , маємо:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \mathcal{D}} = \sqrt[3]{\rho^3 \cos \theta + i \rho^3 \sin \theta} = \rho \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right)$$

Тоді саме:

$$v_1 = \rho \left(\cos \frac{\theta}{3} - i \sin \frac{\theta}{3} \right)$$

Звигну:

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2\rho \cos \frac{\theta}{3}$$

$$x_2 = u_2 + v_3 = u_1 \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + v_1 \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Але: } \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = 1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right); \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = 1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

топу:

$$\Delta \quad x_2 = \rho \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) +$$

$$+ \rho \left(\cos \frac{\theta}{3} - i \sin \frac{\theta}{3} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) =$$

$$= \rho \left(\cos \frac{2\pi+\theta}{3} + i \sin \frac{2\pi+\theta}{3} + \cos \frac{2\pi+\theta}{3} - i \sin \frac{2\pi+\theta}{3} \right) = 2\rho \cos \frac{2\pi+\theta}{3}$$

Тоді саме:

$$x_3 = u_3 + v_2 = \rho \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) +$$

$$+ \rho \left(\cos \frac{\theta}{3} - i \sin \frac{\theta}{3} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) =$$

$$= \rho \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right) \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) + \rho \left(\cos \frac{\theta}{3} - i \sin \frac{\theta}{3} \right) \left(\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3} \right) =$$

$$= \rho \left(\cos \frac{4\pi+\theta}{3} + i \sin \frac{4\pi+\theta}{3} + \cos \frac{4\pi+\theta}{3} - i \sin \frac{4\pi+\theta}{3} \right) = 2\rho \cos \frac{4\pi+\theta}{3}$$

Загальною властивістю x можна висловити так:

$$x_{1,2,3} = \left(\sqrt[3]{\rho \cos \frac{2k\pi + \theta}{3}} \right)_{k=0,1,2}$$

Висновки.

Кубичне рівняння з реальними коефіцієнтами має:

- 1) Завжди один реальний розв'язок
- 2) Два інших або обидва реальні, або обидва злітно-здружені.

Де-кілька уваг щодо розв'язків рівняння 3^{го} ступіня.

Щоб перетворити рівняння згального вигляду:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \dots (1)$$

до упорядкованого вигляду:

$$x^3 + px + q = 0 \dots (2)$$

ми замість x вставляємо $x+m$. Але тим самим ми змінювали й розв'язки рівняння, а саме: коли рівняння (2) матиме розв'язки x_1, x_2, x_3 , то рівняння (1) матиме розв'язки:

$$x' = x_1 + m; \quad x'' = x_2 + m \quad \text{і} \quad x''' = x_3 + m$$

На це ми завжди повинні звертати увагу в практиці розв'язання рівнянь 3^{го} ступіня. Для пояснення візьмемо приклад:

Дано рівняння: $x^3 - 15x^2 + 63x - 81 = 0$

Вставляючи замість x вираз $x+m$, одержимо:

$$(x+m)^3 - 15(x+m)^2 + 63(x+m) - 81 = 0$$

Переводимо гіл, одержимо:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 3mx^2 + 3m^2x + m^3 \\
 -15x^2 \quad -30mx \quad -15m^2 \\
 \quad \quad +63x \quad \quad +63m
 \end{array}$$

$$x^3 + 3(m-5)x^2 + (3m^2 - 30m + 63)x + (m^3 - 15m^2 + 63m - 81) = 0$$

Звідиш добіраючи m так, щоб $m-5=0$, одержимо $m=5$. Тоді:

$$x^3 + (3 \cdot 25 - 30 \cdot 5 + 63)x + (125 - 375 + 315 - 81) = 0$$

або $x^3 - 12x - 16 = 0$

Очевидно ми досягнемо того ж вислідку безпосередньою вставкою:

$$p = \frac{3Ac - 13^2}{3A^2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 63 - 225}{3 \cdot 1} = -\frac{36}{3} = -12$$

$$q = \frac{2B^3 - 9ABc + 27A^2}{27A^3} = \frac{-2 \cdot 15^3 + 9 \cdot 15 \cdot 63 - 27 \cdot 81}{27} = -2 \cdot 5^3 + 5 \cdot 63 - 81 = -16$$

Досягнемо розв'язки:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

У нас $p = -12$; $q = -16$. Тоді:

$$\Delta = 64 - 64 = 0$$

Тоді: $x_1 = 2u = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} = 2\sqrt[3]{8} = 4$; $x_2 = -2$; $x_3 = -2$

Отже розв'язки даного рівняння будуть:

$$x = x' + m: \quad x_1 = 9; \quad x_{2,3} = 3.$$

§ 37. Рівняння 4^{го} ступеня.

Хай маємо рівняння:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

Вставкою: $x = y + m$ ми упорядковуємо рівняння, а саме:

$$A(y+m)^4 + B(y+m)^3 + C(y+m)^2 + D(y+m) + E = 0$$

Збідум:

$$Ay^4 + (B + 4Am)y^3 + (C + 3Bm + 6Am^2)y^2 + (D + 2Cm + 3Bm^2 + 4Am^3)y + (E + 2Dm + Cm^2 + Bm^3 + Am^4) = 0$$

Добіраємо m так, щоб: $B + 4Am = 0$.

Моді:

$$m = -\frac{B}{4A}$$

Вставляючи цю ваpтiсть m ми переводимо дане рівняння до упорядкованого вигляду, а саме:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Вводимо нові змінні:

$$x = u + v + w$$

Моді підносимо обидві частини до квадрату й квадрати u, v, w переносимо в ліву частину, маємо:

$$x^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(uv + uw + vw)$$

Далі підносимо обидві частини ще раз до квадрату, одержимо:

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w)$$

Збідум:

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 - 8uvw x + [(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)] = 0$$

Порівняючи з упорядкованого формою рівняння ми маємо:

$$u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2}; \quad uvw = -\frac{q}{8}$$

$$\left(u^2 + v^2 + w^2\right)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = r$$

або:

$$u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \frac{p^2 - 4r}{16}$$

Візьмемо рівняння 3^ю ступіня:

$$z^3 + p_1z^2 + p_2z + p_3 = 0$$

Розв'язок розв'язати будемо:

$$d, \beta, \gamma$$

то ми вже знаємо, що скомпані при z^3 буде рівний:

$$\mu_1 = S_1 = -(d + \beta + \gamma)$$

при z^2 :

$$\mu_2 = S_2 = (d\beta + d\gamma + \beta\gamma)$$

вільний член: $\mu_3 = -S_3 = -d\beta\gamma$

Приймаючи $d = u^2$; $\beta = v^2$; $\gamma = w^2$, одержимо:

$$\mu_1 = -(u^2 + v^2 + w^2) = -\frac{p}{2}$$

$$\mu_2 = (u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = \frac{p^2 - 4q}{16}$$

$$\mu_3 = -u^2v^2w^2 = -\frac{q^2}{64}$$

Майже точно наші нові змінні можна вважати за розв'язки рівняння 3^{го} ступеня, а саме:

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2 - 4q}{16}z + \frac{q^2}{64} = 0$$

Розв'язки такого рівняння знайти ми зуміємо й тому означимо їх через d, β, γ . Можі матимемо:

$$u^2 = d \quad u = \pm\sqrt{d}$$

$$v^2 = \beta \quad v = \pm\sqrt{\beta}$$

$$w^2 = \gamma \quad w = \pm\sqrt{\gamma}$$

При тому знак ми маємо комбінувати так, щоб завжди виконувалася умова $u \cdot v \cdot w = -\frac{q}{8}$ (себто при $\sqrt{\text{знак}}$ стачний знак) а тому цих комбінацій буде 4, а саме:

$$x_1 = \sqrt{d} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$$

$$x_2 = \sqrt{d} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$$

$$x_3 = -\sqrt{d} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$$

$$x_4 = -\sqrt{d} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$$

Ми бачимо, що врівнянні 3^{го} ступеня здобуток розв'язків d, β, γ - є додатне число $\frac{q^2}{64}$ (бо $\mu_3 = -(u^2v^2w^2) = -(d\beta\gamma) = -\frac{q^2}{64}$). Тому можуть бути випадки:

1) або всі розв'язки додатні

або 2) Два з розв'язків вігеліні

Коли два з розв'язків будуть злучні (неодмінно здружені) то, як відомо, їх здобуток буде того ж роду (квадрат модуля), а тому й 3-й розв'язок має бути додатний.

З цих міркувань випливає:

1) Коли d, β і γ є реальні й додатні, то й всі розв'язки x_1, x_2, x_3, x_4 - є реальні.

2) Коли один з розв'язків, наприклад, додатний, а решта $(\beta$ і $\gamma)$ "] вігеліні, тоді означивши $d = a^2$, $\beta = -b^2$, $\gamma = -c^2$, матимемо:

$$x_1 = a + (b+c)i$$

$$x_2 = a - (b+c)i$$

$$x_3 = -a + (b-c)i$$

$$x_4 = -a - (b-c)i$$

Всі розв'язки є здружені парами злучні числа

3) Коли один з розв'язків, наприклад, - реальний і додатний, себто $d = a^2$, а решта розв'язків злучні, наприклад,

$$\beta = m + in \quad \gamma = m - in$$

тоді, і $\sqrt{\beta} = p + iq$, і $\sqrt{\gamma} = p - iq$ (неодмінно злучні-здружені). Тому:

$$x_1 = a + 2p$$

$$x_2 = a - 2p$$

$$x_3 = -a + 2qi$$

$$x_4 = -a - 2qi$$

Одержимо два розв'язки реальні, а 2-злучних, здружених. Таким чином рівняння 4 ступеня має:

- 1) або всі 4 реальних розв'язків,
- 2) або два реальних, а два злучених
- 3) або всі 4 злучених парами згруджені

Як довів у свій час Абель рівняння ступенів більших 4, в загальному вигляді не розв'язуються.

Покажемо ще один спосіб розв'язання рівняння 4^{го} ступеня. Цей спосіб належить уродженцю Хардана Луїджі Фєррарі.

Візьмемо упорядковану форму рівняння 4^{го} ступеня:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{--- (a)}$$

і введемо довільну змінну z так, щоб мати квадрат тричлена:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + z\right)^2 = x^4 + ax^3 + \frac{a^2x^2}{4} + 2zx^2 + axz + z^2 \quad \text{--- (б)}$$

Складаємо почленно рівності (a) і (б). Тоді маємо:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + z\right)^2 + bx^2 + cx + d = \frac{a^2x^2}{4} + 2zx^2 + axz + z^2, \text{ або}$$

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + z\right)^2 = x^2\left(\frac{a^2}{4} + 2z - b\right) + x(ax - c) + (z^2 - d) \quad \text{--- (в)}$$

Дано z таку вартість, щоб права частина рівняння (в) була цілим квадратом. Ми знаємо, що для цього має бути квадрат при невідомому в 1^{шій} ступені рівний із четвертим здобутком сочинника при квадраті невідомого на вільного члена, а тобто:

$$(ax - c)^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} + 2z - b\right)(z^2 - d) \quad \text{--- (1)}$$

Звідси:

$$a^2z^2 - 2acxz + c^2 = a^2z^2 + 8z^3 - 4bz^2 - a^2d - 8dz + 4bd, \text{ або}$$

$$8z^3 - 4bz^2 + 2(ac - 4d) + (4bd - a^2d - c^2) = 0$$

Одержимо рівняння 3^{го} ступіня, яке розв'язати зручнiше: Припустимо, що розв'язки цього рівняння будуть: α, β, γ . Можі, напр. для α маємо (підставимо в рівняння (6))

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + d\right)^2 = (kx + l)^2$$

Де k і l - є відомі сталі величини)

Звідси ми одержимо за допомогою корінювання 2. рівняння, а саме:

$$x^2 + \frac{ax}{2} + d = kx + l$$

$$x^2 + \frac{ax}{2} + d = -kx - l$$

Ці рівняння, як квадратні дадуть 2 розв'язки:

$$x^2 + \frac{a-2k}{2}x + (d-l) = 0$$

$$x^2 + \frac{a+2k}{2}x + (d+l) = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{a-2k}{4} \pm \sqrt{\frac{(a-2k)^2}{16} - (d-l)}$$

$$x_{3,4} = -\frac{a+2k}{4} \pm \sqrt{\frac{(a+2k)^2}{16} - (d+l)}$$

На дослідженні розв'язків в цьому випадкові ми зупинятися не будемо, бо врешті маємо прийти до висновків попередньої аналізу.

Розділ II

Розгорнення раціональних дробів.

§38. Відокремлення цілої частини.

Нашим завданням є розкласти, за допомогою розкладання многочленів на чинники, кожний раціональний дріб на його простіші складники.

Хай дано дріб:

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

де вважаємо, що ступінь чисельника не менше ступіня знаменника.

Тоді відокремимо цілу частину ланцюгово:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = F(x) + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

де $F(x)$ - є цілою функцією, а ступінь функції $\psi(x)$ менший від ступіня $f(x)$

Надалі при розкладі дробів на прості, ми будемо мати справу лише з правдивими дробами функцій, себто: з дробами вигляду $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$

§39. Розгорнення дробів функцій що мають реальні розв'язки.

Беремо дріб $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ де ступінь чисельника хоч би на одиницю менший за ступіня знаменника.

Припустимо що $x=a$ - є розв'язок $\varphi(x)$ якої d -кратності. Тоді, ми вже знаємо, $\varphi(x)$ можна виобразити:

$$\varphi(x) = (x-a)^d \varphi_1(x)$$

де $\varphi_1(x) \neq 0$

Доведемо теорему:

Якщо знаменатель дробу $\varphi(x)$ має якийсь розв'язок $x=a$, кратності d , то сам дріб можна розгорнути в суму:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^d} + \frac{\psi_1(x)}{(x-a)^{d-1} \varphi_1(x)}$$

де A стала величина, $\psi_1(x)$ є частка від поділу знаменателя $\varphi(x)$ на d -кратний множник $(x-a)^d$

$\varphi_1(x)$ - ціла функція, ступіня нижчого ніж ступінь збудувати $(x-a)^{d-1} \varphi_1(x)$ і яка не має спільних множників з $\varphi_1(x)$.

Визначимо рівність:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^d} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{d-1} \varphi_1(x)} \dots \dots (a)$$

і помножимо обидві частини на $(x-a)^d \varphi_1(x)$.

Тоді одержимо:

$$\frac{f(x)(x-a)^d \varphi_1(x)}{\varphi(x)} = A(\varphi_1(x) + \varphi_1(x)(x-a))$$

Але $\varphi(x) = (x-a)^d \varphi_1(x)$, тобто:

$$f(x) = A\varphi_1(x) + \varphi_1(x)(x-a) \dots \dots (b)$$

Давмо x вартість a і тоді маємо:

$$f(a) = A\varphi_1(a)$$

а звідси:

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$$

А з того цілком випливає, бо ми знаємо, що $\varphi_1(a) \neq 0$, а $f(a)$ також не нуль, бо інакше ми мали б нуль у знаменателі дробу $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, скоротили б на $(x-a)$ в певному ступені.

З рівності (b) маємо:

$$\varphi_1(x) = \frac{f(x) - A\varphi_1(x)}{x-a}$$

Вставляючи вартість A , маємо:

$$\varphi_1(x) = \frac{f(x)\varphi_1(a) - f(a)\varphi_1(x)}{\varphi_1(a)(x-a)}$$

Щоб функція $\varphi_1(x)$ була, як випливає з умовою, цілого, треба щоб різниця (числитель): $f(x)\varphi_1(a) - f(a)\varphi_1(x)$ ділилася на $(x-a)$ [бо $\varphi_1(a)$ не містить x].

Світло є конкретним, щоб рівняння:

$$f(x)\varphi_1(a) - f(a)\varphi_1(x) = 0 \dots \dots (b)$$

має розв'язком $x=a$

Це очевидно з безпосередньої заміни x на a , а саме:

$$f(a)\varphi_1(a) - f(a)\varphi_1(a) = 0$$

Отже $\varphi_1(x)$ - є цілою функцією.

Ступінь рівняння (6) не може бути вище ступеня $f(x)$, себто хоч на одиницю нижче ніж ступінь $\varphi(x)$. А тому:

$$\varphi_1(x) = \frac{f(x) - A\varphi(x)}{x-a}$$

мусить бути хоч на 1 нижчу за ступінь $(x-a)^{d-1} \cdot \varphi_1(x)$

Саме існування A і $\varphi_1(x)$, що задовольняють умові теореми доводить, що рівність:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^d} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{d-1} \cdot \varphi_1(x)}$$

є правдивою.

Далі пристосовуючи доведену теорему до $\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{d-1} \cdot \varphi_1(x)}$, що має в знаменателі функцію з розв'язком $(d-1)$ -ї кратності, ми матимемо поточність:

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{d-1} \cdot \varphi_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{d-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{d-2} \cdot \varphi_1(x)}$$

Продовжуючи так далі, матимемо:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^d} + \frac{A_1}{(x-a)^{d-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{d-2}} + \dots + \frac{A_{d-1}}{x-a} + \frac{\varphi_d(x)}{\varphi_1(x)}$$

$$\text{де } A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}, \quad A_1 = \frac{\varphi_1(a)}{\varphi_1(a)}, \quad A_2 = \frac{\varphi_2(a)}{\varphi_1(a)}, \quad \dots \quad A_{d-1} = \frac{\varphi_{d-1}(a)}{\varphi_1(a)}$$

Очевидно, що коли знаменатель:

$$\varphi(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots$$

то гріб:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots \\ &\dots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)^\gamma} + \frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}} + \dots \end{aligned}$$

§40. Розгорнення дробів функцій, знаменатель яких має уявні розв'язки.

Припустимо, що знаменатель дробу функцій: $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ має якийсь злучний розв'язок: $x_1 = \alpha + \beta i$, k -тої кратності. Можі, як ми довели, неодмінно існуватиме у тієї ж функції, $\varphi(x)$ і другий злучний розв'язок $x_2 = \alpha - \beta i$ згрупований з першим, таको ж k -ої кратності.

Таким чином $\varphi(x)$ буде націло ділитися на k ступінь чинників:

$$[x - (\alpha + \beta i)]^k \text{ і } [x - (\alpha - \beta i)]^k$$

а разом і на k -ту ступінь їх збудуємо, себто на:

$$\{[x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)]\}^k$$

або (як ми це бачили в §28) на:

$$(x^2 + px + q)^k$$

Доведемо тепер теорему:

Коли знаменатель дробу $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ділиться на якийсь чинник $(x^2 + px + q)^k$, себто:

$$\varphi(x) = (x^2 + px + q)^k \cdot \varphi_1(x)$$

де $\varphi_1(x)$ не поділяється вже на $x^2 + px + q$, то сам дріб можна розгорнути в суму:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \varphi_1(x)} \dots \quad (d)$$

де M_1 і N_1 сталі вартості, $\varphi_1(x)$ - решта від поділу знаменателя $\varphi(x)$ на k -кратний чинник $(x^2 + px + q)^k$ і $\varphi_1(x)$ - ціла функція хоч би на одиницю ступіня нижчого ніж ступінь збудуємо $(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \varphi_1(x)$ і яка не має чинників

співалим з $\varphi_1(x)$.

Полнозначно обидві частини рівності (d) на $\varphi(x) = (x^2 + px + q)^k \cdot \varphi_1(x)$ і матимемо:

$$f(x) = (M_1x + N_1)\varphi_1(x) + \varphi_1(x) \cdot (x^2 + px + q) \dots \dots \dots (\beta)$$

Дано x вартість $x = \alpha + \beta i$ і матимемо:

$$f(\alpha + \beta i) = [M_1(\alpha + \beta i) + N_1]\varphi_1(\alpha + \beta i)$$

бо: $x^2 + px + q = [x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)]$ при вставці $x = \alpha + \beta i$ обертається в нуль, а разом з цим і збудуток $[\varphi_1(x) \cdot (x^2 + px + q)]_{x=\alpha+\beta i} = 0$

Звідси:

$$M_1(\alpha + \beta i) + N_1 = \frac{f(\alpha + \beta i)}{\varphi_1(\alpha + \beta i)} \dots \dots \dots (\gamma)$$

Вислід поділу $f(\alpha + \beta i)$ на $\varphi_1(\alpha + \beta i)$ буде неодмінно якимсь злукним числом $p + qi$, а тому маємо рівність:

$$(M_1\alpha + N_1) + M_1\beta i = p + qi$$

А звідси:

$$M_1\alpha + N_1 = p$$

$$M_1\beta = q$$

або:

$$M_1 = \frac{q}{\beta} \text{ і } N_1 = \frac{p\beta - q\alpha}{\beta}$$

Раз ми припустили існування злукних розв'язків, то p не може бути рівною з нулем, а тому M_1 і N_1 є цілком визначені обчислені величини.

Той же самий вислід матимемо при вставці розв'язку $x = \alpha - \beta i$.

Спробуємо:

$$M_1(\alpha - \beta i) + N_1 = \frac{f(\alpha - \beta i)}{\varphi_1(\alpha - \beta i)} \dots \dots \dots (\delta)$$

§ 28 ми переконалися, що виследи встав-

ни $\alpha - \beta i$ (замість $\alpha + \beta i$) у цій функції має у відповіді ті самі значення з протилежними лише знаками при уявних членах, а тому можна твердити, що коли $\frac{f(\alpha + \beta i)}{\varphi_1(\alpha + \beta i)} = P + Qi$, то:

$$\frac{f(\alpha - \beta i)}{\varphi_1(\alpha - \beta i)} = P - Qi$$

Отже:

$$(M_1\alpha + N_1) - M_1\beta i = P - Qi$$

звідки:

$$M_1\alpha + N_1 = P$$

$$-M_1\beta = -Q$$

а через те:

$$M_1 = \frac{Q}{\beta} ; N_1 = \frac{P\beta - Q\alpha}{\beta}$$

З рівності (3), одержимо:

$$\varphi_1(x) = \frac{f(x) - (M_1x + N_1)\varphi_1(x)}{x^2 + px + q}$$

Згідно умови теореми ця функція має бути цілою, а тому чисельник ділиться на $x^2 + px + q$. Але останнє є можливим тоді, коли рівняння:

$$\varphi(x) = f(x) - (M_1x + N_1)\varphi_1(x) = 0 \dots (E)$$

має розв'язками: $x_1 = \alpha + \beta i$ і $x_2 = \alpha - \beta i$

Вставляємо 1^й розв'язок і маємо:

$$\varphi(\alpha + \beta i) = f(\alpha + \beta i) - [M_1(\alpha + \beta i) + N_1]\varphi_1(\alpha + \beta i)$$

Вставляючи, далі, значення $M_1(\alpha + \beta i) + N_1$ з рівності (3), одержимо:

$$\varphi(\alpha + \beta i) = f(\alpha + \beta i) - \frac{f(\alpha + \beta i)}{\varphi_1(\alpha + \beta i)} \varphi_1(\alpha + \beta i)$$

що після скорочення дає нуль, себто:

$$\varphi(\alpha + \beta i) = 0 \text{ і } x_1 = \alpha + \beta i \text{ є розв'язком } \varphi(x)$$

Аналогічно, вставляючи в рівняння (E)

вартість розв'язку $x_2 = \alpha - \beta i$ і вартість $M_1(\alpha - \beta i) + N_1$ з рівності (б), ми одержимо:

$$C\varphi(\alpha - \beta i) = 0$$

себто $x_2 = \alpha - \beta i$ - є розв'язком $C\varphi(x)$.

Таким чином функція

$$\psi_1(x) = \frac{C\varphi(x)}{x^2 + px + q}$$

є цілою функцією.

$$C\varphi(x) = f(x) - (M_1x + N_1)\psi_1(x)$$

має ступінь не більший за ступінь $f(x)$, бо $\psi_1(x)$ - є ступінь на k меншою ніж $\varphi(x)$. Отже $C\varphi(x)$ є ступінь хоч на одиницю нижчого ніж $\varphi(x)$ [бо $f(x)$ також з умови хоч на одиницю нижчого ступінь ніж $\varphi(x)$]

Вислід поділу $C\varphi(x)$ на $x^2 + px + q$, себто $\psi_1(x)$ ^{буде} ступінь не менш як на 3 одиниці нижчого ніж $\varphi(x)$, а знаменатель останнього члену рівності (д): $(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \psi_1(x)$ ^{буде} ~~лише~~ на 2 одиниці нижчого ступінь ніж $\varphi(x) = (x^2 + px + q)^k \cdot \psi_1(x)$. Тому:

$\psi_1(x)$ є функцією ступінь хоч на одиницю нижчого ніж знаменатель: $(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \psi_1(x)$

Само існування вартостей M_1, N_1 і $\psi(x)$, що задовольняють поставлені теоретичні умови свідчить, що рівність:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{\psi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \psi_1(x)}$$

є правдивою.

Дані припущення доведеної теореми до:

$$\frac{\psi_1(x)}{f(x)} = \frac{\psi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} \cdot \psi_1(x)}$$

натинемо:

$$\frac{\Psi_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} \cdot \varphi_1(x)} = \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{\Psi_2(x)}{(x^2+px+q)^{k-2} \cdot \varphi_2(x)}$$

і т.д.

Нарешті дійдемо до такої суми:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{M_3x+N_3}{(x^2+px+q)^{k-2}} + \dots$$

$$\dots + \frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q} + \frac{\Psi_k(x)}{\varphi_k(x)}$$

Очевидно, що коли знаменатель $\varphi_k(x)$ дробу $\frac{\Psi_k(x)}{\varphi_k(x)}$ має ще розв'язки та реальні, та згадані, то ми й цей дріб функцій будемо розпорятати, керуючися та першою, та другою теоремою.

Одним словом кожний дріб функцій $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ можна розпорити в суму простіших дробів вигляду:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1,2,3,\dots}^{m=1,2,3,\dots} \frac{A_{mk}}{(x-\alpha_m)^k} + \frac{M_{mk}x+N_{mk}}{(x^2+px+q)^k}$$

де α_m - є різні реальні розв'язки (в залежності від вартості індекса $m=1,2,3,\dots$), а k приймає всі можливі вартості $1,2,3,\dots$ до висоти кратності кожного розв'язку зокреми.

§41. Визначення сошників $A, B, \dots, N, M$ в

сумі розгорнення дробу функцій.

1^й спосіб.

Припустимо, що:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum \frac{A_{mk}}{(x-\alpha_m)^k} + \frac{M_{mk}x+N_{mk}}{(x^2+px+q)^k}$$

Зводимо обидві частини до спільного знаменате-

ла (що завжди буде $= \ell(x)$) і одержимо:

$$f(x) = M(x)$$

де $M(x)$ буде лінійною різницею ступенів x , коефіцієнтами яких будуть певні функції (несаме-ні від x) від wartości A_{mk} , M_{mk} і N_{mk} для всіх можливих комбінацій wartości m і k .

Якщо розгорнення було переведено правильно, то $f(x)$ повинно бути тотожне рівною $M(x)$, а через те в цих функціях коефіцієнти при одна-кових ступенях мають бути рівними. Та-ким чином одержимо систему рівнянь, потріб-ну для визначення wartości наших вели-чин A_{mk} , M_{mk} і N_{mk} .

Приклад. Дано дріб: $\frac{5x^2-3x+1}{x^3-2x+x-2}$

Розкладаємо на чинників знаменника и ма-ємо:

$$x^3-2x+x-2=(x-2)(x^2+1)$$

Маємо:

$$\frac{5x^2-3x+1}{x^3-2x+x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

Зводимо до спільного знаменника, маємо:

$$5x^2-3x+1 = Ax^2+A+Mx^2+Nx-2Mx-2N$$

$$5x^2-3x+1 = (A+M)x^2 + (N-2M)x + (A-2N)$$

тому маємо систему:

$$A+M=5$$

$$N-2M=-3$$

$$A-2N=1$$

Звідси: $A=3$, $M=2$, $N=1$.

Таким чином:

$$\frac{5x^2-3x+1}{x^3-2x+x-2} = \frac{3}{x-2} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

Цей спосіб, треба сказати, дуже трудний, особливо, коли є багато сомножників, що треба висполити (коли знаменатель високого ступіня)
Укажемо ще інші способи.

2^й спосіб. Спосіб частовки розважів.

Цей спосіб є особливо зручний, коли знаменатель має звичайні розважки, а злучні чинувачі.

В цьому способі, як і в попередньому, зводимо ^{до} спільного знаменателя і потім вставляємо по черзі вартості розважів у рівність. В цьому разі крім сомножника, якогоось A_k , що був поділений ^{різницею} на $x - a_k$, в найвищому ступіні, всі решта членів будуть містити чинниками якийсь ступінь $(x - a_k)$, а тому при вставці $x = a_k$ обертаються в нуль і ми визнаємо A_k і т.д.

Приклад:

$$\frac{4x^3 - 21x^2 + 22x - 1}{(x-2)(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-3}$$

Отже:

$$4x^3 - 21x^2 + 22x - 1 = A(x-1)(x+1)(x-3) + B(x-2)(x+1)(x-3) + C(x-2)(x-1)(x-3) + D(x-2)(x-1)(x+1)$$

1) Беручи $x=2$, маємо:

$$4 \cdot 8 - 21 \cdot 4 + 22 \cdot 2 - 1 = A(2-1)(2+1)(2-3); \text{ або } -9 = -3A; \underline{A=3}$$

$$2) \text{ Беручи } x=1, \text{ маємо: } 4 = B(1-2)(1+1)(1-3); \underline{B=1}$$

$$3) \text{ Беручи } x=-1, \text{ маємо: } -48 = C(-1-2)(-1-1)(-1-3); \underline{C=2}$$

$$4) \text{ Беручи } x=3, \text{ маємо: } -16 = D(3-2)(3-1)(3+1); \underline{D=-2}$$

Отже:

$$\frac{4x^3 - 21x^2 + 22x + 1}{(x-2)(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-3}$$

3^й спосіб (комбінований) на випадок, коли входить кратні розв'язки.

Припустимо, що $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ має розв'язок a , кратності k , тоді:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)^k \cdot \varphi_1(x)}$$

де $\varphi_1(x)$ має всі інші розв'язки, крім $x=a$. В такому разі ми маємо рівність:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-2}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + M$$

де M сума решти простіших дробів, що відповідає іншим розв'язкам $\varphi(x)$.

Зносивши знаменник, маємо:

$$f(x) = A\varphi(x) + A_1(x-a)\varphi(x) + A_2(x-a)^2\varphi(x) + \dots + A_{k-1}(x-a)^{k-1}\varphi(x) + M(x-a)^k \cdot (a)$$

де $\varphi(x)$ - є спільний знаменник множителю простіших дробів M . Цей множитель, як відомо, не містить нічого $(x-a)$

Коли тепер візьмемо $x=a$, то маємо:

$$f(a) = A\varphi(a), \text{ де } \varphi(a) \neq 0$$

тому:

$$A = \frac{f(a)}{\varphi(a)}$$

Нам знайдено перший коефіцієнт.

Перенесемо тепер в рівності (а) $A\varphi(x)$ в ліву частину і внесемо в правій $(x-a)$ за дужки. Можемо:

$$f(x) - \frac{f(a)}{\varphi(a)} \cdot \varphi(x) = (x-a) [A_1\varphi(x) + A_2(x-a)\varphi(x) + \dots + A_{k-1}(x-a)^{k-2}\varphi(x) + M(x-a)^{k-1}]$$

Ця рівність має бути тождеством, а тому праві частина має містити $(x-a)$, то й ліва повинна на неї скорочуватися, себто,

$$\frac{f(x) - \frac{f(a)}{\psi(a)}\psi(x)}{x-a} = f_1(x)$$

має бути цілою функцією.

Отже маємо:

$$f_1(x) = A_1\psi(x) + A_2(x-a)\psi(x) + \dots + A_{n-1}(x-a)^{n-2}\psi(x) + M(x-a)^{n-1}$$

З цією функцією поробляємо теж, що й з попередньою, а тоді маємо:

$$A_1 = \frac{f_1(a)}{\psi(a)}$$

Знова:

$$f_2(x) = \frac{f_1(x) - \frac{f_1(a)}{\psi(a)}\psi(x)}{x-a} = A_2\psi(x) + A_3(x-a)\psi(x) + \dots + A_{n-1}(x-a)^{n-3}\psi(x) + M(x-a)^{n-2}$$

і т.д. В цей спосіб визначимо всі вартості $A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, а потім перейдемо таким самим способом знаходити сумишки, що відповідаютимуть певним певним розв'язкам.

Приклад: Розкласти дріб: $\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{5x^4 - 7x^3 - 16x^2 + 35x - 15}{(x-1)^3(x-2)^2(x^2+1)}$

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + M$$

де M має спільного знаменателя: $(x-2)^2(x^2+1) = \psi(x)$

Отже:

$$f(x) = 5x^4 - 7x^3 - 16x^2 + 35x - 15 = A\psi(x) + A_1(x-1)\psi(x) + A_2(1-1)^2\psi(x) + M(x-1)^3$$

Беремо $x=1$.

$$\text{Обчислимо попередню } \psi(1) = (1-2)^2(1+1) = 2$$

$$f(1) = 5 - 7 - 16 + 35 - 15 = 2A; \quad \underline{A=1}$$

$$\text{Тоді } f(x) - A\psi(x) = 5x^4 - 7x^3 - 16x^2 + 35x - 15 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 4x - 4 =$$

$$= 4x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 39x - 19 \quad \left| \begin{array}{l} x-1 \\ \hline f_1(x) = 4x^3 + x^2 - 20x + 19 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 39x - 19 \\ - 4x^4 + 4x^3 \\ \hline x^3 - 21x^2 + 39x - 19 \\ - x^3 + x^2 \\ \hline -20x^2 + 39x - 19 \\ -20x^2 + 20x \\ \hline 19x - 19 \\ 19x - 19 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{Максимум минор } A_1 = \frac{f_1(1)}{\psi(1)} = \frac{4+1-20+19}{2} = 2; \quad \underline{A_1 = 2}$$

$$\text{нормы: } f_1(x) - 2\psi(x) = 4x^3 + x^2 - 20x + 19 - 2x^4 + 8x^3 - 10x^2 + 8x - 8 =$$

$$= -2x^4 + 12x^3 - 9x^2 - 12x + 11 \quad \begin{array}{r} x-1 \\ \hline f_2(x) = -2x^3 + 10x^2 + x - 11 \end{array}$$

$$\underline{-2x^4 + 2x^3}$$

$$10x^3 - 9x^2$$

$$\underline{10x^3 - 10x^2}$$

$$x^2 - 12x$$

$$\underline{x^2 \pm x}$$

$$-11x + 11$$

$$\underline{-11x + 11}$$

$$0$$

$$\text{Отсюда: } A_2 = \frac{f_2(1)}{\psi(1)} = \frac{-2+10+1-11}{2} = -1; \quad \underline{A_2 = -1}$$

$$\text{Далее: } f_2(x) + \psi(x) = -2x^3 + 10x^2 + x - 11 + x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 =$$

$$= x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 3x - 7 \quad \begin{array}{r} x-1 \\ \hline M(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 7 \end{array}$$

$$\underline{x^4 \pm x^3}$$

$$-5x^3 + 15x^2$$

$$\underline{-5x^3 + 5x^2}$$

$$10x^2 - 3x$$

$$\underline{10x^2 \pm 10x}$$

$$\underline{7x - 7}$$

$$\text{Але } \frac{M(x)}{\psi(x)} = \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

$$M = B(x^2+1) + B_1(x-2)(x^2+1) + P(x-2)^2, \text{ где } P = (Mx+N)$$

Берем $x=2$, получим:

$$\psi_1(2) = (x^2+1)_{x=2} = 5; \quad M(2) = 8 - 20 + 20 + 7 = 15$$

$$B = \frac{M(2)}{\psi_1(2)} = \frac{15}{5} = 3 \quad \underline{B = 3}$$

$$M(x) - B\psi_1(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 7 - 3x^2 - 3 =$$

$$= x^3 - 8x^2 + 10x + 4 \quad \begin{array}{r} x-2 \\ \hline M_1(x) = x^2 - 6x - 2 \end{array}$$

$$\underline{x^3 \pm 2x^2}$$

$$-6x^2 + 10x$$

$$\underline{-6x^2 + 12x}$$

$$\underline{-2x + 4}$$

нормы:

$$B_1 = \frac{M_1(2)}{\psi_1(2)} = \frac{4 - 12 - 2}{5} = -2; \quad \underline{B_1 = -2}$$

$$M_1(x) - B_1 \Psi_1(x) = x^2 - 6x - 2 + 2x^2 + 2 = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

тобто: $P(x) = Mx + N = 3x$; $M=3$; $N=0$

таким чином:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x^2+1}$$

В цю спосіб, коли знаменателі дробу $\varphi(x)$ має пару, або кілька пар злучних розв'язків, то ці після відділення дробів, створених реальними розв'язками для функції $P(x)$ вживаємо методи неокреслених множників.

Дуже часто замість поділу $f(x) - A\varphi(x)$ на $(x-a)$ де a є розв'язок $\varphi(x)$ вживають диференціювання.

тоді за першим диференціюванням відразу відходять звичайні розв'язки, а кратність решти зменшується на одиницю. За другим диференціюванням відходять два кратні розв'язки і т. д.

Приклад, той же, розв'язаний попередньою методом, але відразу вставкою всіх розв'язків.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{5x^4 - 7x^3 - 16x^2 + 35x - 15}{(x-1)^3(x-2)^2(x^2+1)}$$

Після розгорнення й зведення до спільного знаменателя, маємо:

$$f(x) = 5x^4 - 7x^3 - 16x^2 + 35x - 15 = A(x-2)^2(x^2+1) + A_1(x-1)(x-2)^2(x^2+1) + A_2(x-1)^2(x-2)^2(x^2+1) + B(x-1)^3(x^2+1) + B_1(x-1)^3(x-2)(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)^3(x-2)^2$$

Беручи 1) $x=1$; 2) $x=2$; $x=i$, маємо:

1) $5 - 7 - 16 + 35 - 15 = A(1-2)^2(1+1)$; $A=1$

2) $80 - 56 - 64 + 70 - 15 = B(2-1)^3(4+1)$; $B=3$

$$3) +5+2i+16+35i-15 = (Mi+N)(i-1)^3(i-2)^2$$

$$42i+6 = (Mi+N)(i-1) \cdot 2, \text{ або}$$

$$21i+3 = (Mi+N)(i+1) = (M+7N) + (7M-N)i$$

$$\text{тобто: } M+7N=3; 7M-N=21; \underline{M=3; N=0}$$

Маємо також:

$$\begin{aligned} 5x^4 - 7x^3 - 16x^2 + 35x - 15 - (x-2)^2(x^2+1) - 3(x-1)^3(x^2+1) - 3x(x-1)^3(x-2)^2 = \\ = A_1(x-1)(x-2)^2(x^2+1) + A_2(x-1)^2(x-2)^2(x^2+1) + B_1(x-1)^3(x-2)(x^2+1) \\ - 3x^6 + 18x^5 + 44x^4 + 60x^3 - 57x^2 + 42x - 16 = (x-1)(x-2)(x^2+1) [A_1(x-2) + \\ + A_2(x-1)(x-2) + B_1(x-1)^2] \end{aligned}$$

Поділимо обидві частини на $(x-1)(x-2)(x^2+1)$, маємо:

$$-3x^2 + 9x - 8 = A_1(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + B_1(x-1)^2$$

Беремо дві: $x=1$ і $x=2$, маємо:

$$-3 + 9 - 8 = -A_1; \underline{A_1 = 2}$$

$$-12 + 18 - 8 = B_1(2-1)^2; \underline{B_1 = -2}$$

Вставимо поділену біг обох частин рівності.
(вставивши перед ними знайдені вартості)
маємо:

$$-6x + 9 = 2 + A_2(x-2) + A_2(x-1) - 4(x-1)$$

$$7 - 6x = A_2(x-2+x-1) - 4(x-1) = A_2(2x-3) - 4(x-1)$$

Беремо $x=1$, маємо:

$$1 = A_2(2-3); \underline{A_2 = -1}$$

Приклад 2. $\frac{f(x)}{q(x)} = \frac{-2x^6 + 2x^3 + x^2}{(x^2+1)^3(x^2+x+1)^2}$

$$\frac{f(x)}{q(x)} = \frac{M_1x+N_1}{(x^2+1)^3} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2} + \frac{M_3x+N_3}{x^2+1} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{P_2x+Q_2}{x^2+x+1}$$

Збигну:

$$\begin{aligned} -2x^6 + 2x^3 + x^2 = (M_1x+N_1)(x^2+x+1)^2 + (M_2x+N_2)(x^2+1)(x^2+x+1)^2 + \\ + (M_3x+N_3)(x^2+1)^2(x^2+x+1)^2 + (x^2+1)^3 \left[\frac{P_1x+Q_1}{x^2+x+1} + \frac{P_2x+Q_2}{(x^2+x+1)^2} \right] \end{aligned}$$

Означимо, як ми це робили й в попередньо-

ну приклади вираз в квадраті $[]$ через $u(x)$,
а $(x^2+x+1)^2 = \psi(x)$. Тоді маємо:

$$f(x) = -2x^6 + 2x^3 + x^2 = (M_1x + N_1)\psi(x) + (M_2x + N_2)\psi(x)(x^2+1) + (M_3x + N_3)\psi(x)(x^2+1)^2 + u(x) \cdot (x^2+1)^3$$

Оскільки з розв'язків рівняння $x^2+1=0$ буде i
однотипно $f(i)$ і $\psi(i)$

Для зручності вставки і введемо ще такі
спрощення.

$$\psi(x) = (x^2+x+1)^2 = [(x^2+1)+x]^2$$

Це дуже зручно, бо кожна вставка розв'язку
рівняння $x^2+1=0$ обертає в нуль (x^2+1) і тому

$$\psi(i) = i^2 = -1$$

Такі саме зробимо й з функцією $f(x)$

$$f(x) = \begin{array}{r|l} -2x^6 + 2x^3 + x^2 & x^2+1 \\ \hline -2x+1 & -2x^4 + 2x^3 + 2x -1 = R \end{array}$$

$$\text{Отже } f(x) = R(x^2+1) - 2x + 1$$

Кожна вставка розв'язку $x^2+1=0$ оберне згодуюток
 $R(x^2+1)$ в нуль і тому вставка цього розв'язку
в $f(x)$ є однаково важливою зі вставкою його у
решту подину, а саме: $b: -2x+1$

$$\text{Таким чином: } f(i) = -2i + 1$$

Отже:

$$M_1i + N_1 = \frac{f(i)}{\psi(i)} = \frac{-2i+1}{-1} = 2i-1$$

Звідси через властивість рівності зручних
теж маємо:

$$\underline{M_1=2} \quad \text{і} \quad \underline{N_1=-1}$$

$$\text{Дано: } f(x) - (M_1x + N_1)\psi(x) = -2x^6 + 2x^3 + x^2 - 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 - x^2 + 1 = \\ = -2x^6 - 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 1.$$

тому:

$$f_1(x) = \frac{f(x) - (M_1x + N_1)\psi(x)}{x^2+1} = -2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$$

або гіном не рас на (x^2+1) , маємо:

$$f_1(x) = (-2x^2 - 2x + 1)(x^2+1) + 2x$$

а звичу:

$$f_1(i) = 2i$$

Маємо у нас:

$$M_2i + N_2 = \frac{f_1(i)}{\psi(i)} = \frac{2i}{-1} = -2i$$

звичу:

$$\underline{M_2 = -2}; \quad \underline{N_2 = 0}$$

Дави:

$$\begin{aligned} f_1(x) - (M_2x + N_2)\psi(x) &= -2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 + 2x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 2x = \\ &= 2x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

Маю:

$$f_2(x) = \frac{f_1(x) - (M_2x + N_2)\psi(x)}{x^2+1} = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

або поділяємо не рас на x^2+1 , маємо:

$$f_2(x) = (2x+2)(x^2+1) - 1$$

Отже:

$$f_2(i) = -1$$

Маємо у нас:

$$M_3i + N_3 = \frac{f_2(i)}{\psi(i)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Звичу:

$$\underline{M_3 = 0}; \quad \underline{N_3 = 1.}$$

Беремо:

$$\begin{aligned} f_2(x) - (M_3x + N_3)\psi(x) &= 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 - x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x - 1 = \\ &= -x^4 - x^2 = -x^2(x^2+1) \end{aligned}$$

Маю:

$$U(x) = \frac{f_2(x) - (M_3x + N_3)\psi(x)}{x^2+1} = -x^2$$

або:

$$-x^2 = (P_1x + Q_1) + (P_2x + Q_2)(x^2+x+1)$$

Різними рівняння $x^2 + x + 1 = 0$; звідси $x^2 = -(x+1)$.

Отже, означивши розв'язки рівня x_1 і x_2 , матимемо:

$x_{1,2}^2 = -(x_{1,2} + 1)$. Тому вставляючи замість x^2 -году варіантів і замість x -розв'язок рівняння $(x^2 + x + 1)$, матимемо:

$$x_{1,2} + 1 = P_1 x_1 + Q_1, \text{ а звідси } \underline{P_1 = 1}; \underline{Q_1 = 1}$$

$$\text{Можу: } -x^2 = x + 1 + (P_2 x + Q_2)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{або } -(x^2 + x + 1) = (P_2 x + Q_2)(x^2 + x + 1); P_2 x + Q_2 = -1$$

$$\underline{P_2 = 0}; \underline{Q_2 = -1}$$

Таким чином висхідного розкладання

дроби функцій має вигляд:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-1}{(x^2+1)^3} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{x^2+x+1}$$

Приклад 3.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^7 + 3x^6 + 10x^5 + 16x^4 + 23x^3 - 3x^2 + 21x - 26}{(x^2 - x + 1)^2 \cdot (x^3 + 3x + 4)^2}$$

Маємо:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{M_2 x + N_2}{x^2 - x + 1} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + 3x + 4)^2} + \frac{P_2 x + Q_2}{x^2 + 3x + 4}$$

$$\text{Означимо } (x^2 + 3x + 4)^2 = \psi(x); [P_1 x + Q_1 + (P_2 x + Q_2)(x^2 + 3x + 4)]$$

через $u(x)$, матимемо:

$$x^7 + 3x^6 + 10x^5 + 16x^4 + 23x^3 - 3x^2 + 21x - 26 = (M_1 x + N_1)\psi(x) + (M_2 x + N_2)\psi(x)(x^2 - x + 1) + u(x)(x^2 - x + 1)^2 \dots \dots \dots (a)$$

Ділячи $f(x)$ на $(x^2 - x + 1)$, матимемо:

$$f(x) = R(x^2 - x + 1) - 7x - 33$$

Так само:

$$\psi(x) = (x^2 + 3x + 4)^2 = V(x^2 - x + 1) + 40x - 7$$

Вставляючи тепер в нашу рівність (a) якийсь розв'язок x , рівняння $x^2 - x + 1 = 0$

4. матимемо:

$$-7x_1 - 33 = (M_1 x_1 + N_1)(40x_1 - 7)$$

або:

$$-7x_1 - 33 = 40M_1 x_1^2 - 7M_1 x_1 + 40N_1 x_1 - 7N_1$$

Але вважаючи, що $x_1^2 - x_1 + 1 = 0$, а звідси $x_1^2 = x_1 - 1$ матимемо:

$$-7x_1 - 33 = 40M_1 x_1 - 40M_1 - 7M_1 x_1 + 40N_1 x_1 - 7N_1$$

Тому: $-7 = 40M_1 - 7M_1 + 40N_1$; $33M_1 + 40N_1 = -7$; $-33 = -4M_1 - 7N_1$

$40M_1 + 7N_1 = 33$; звідси: $M_1 = 1$; $N_1 = -1$

Далі: $f(x) - (M_1 x + N_1)\psi(x) = x^7 + 3x^6 + 10x^5 + 16x^4 + 23x^3 - 3x^2 + 21x - 26 - x^5 - 5x^4 - 11x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = x^7 + 3x^6 + 9x^5 + 11x^4 + 12x^3 - 10x^2 + 29x - 10$

Знаходимо $f_1(x)$ і т.д.

Остання метода

дуже важлива і є єдиною найбільш зручною при віднізанні числителя дробів, що відповідають злучним розв'язкам.

Розділ III

Числові рівняння.

Числові рівняння зветься рівняння, що має сочинниками нтеред зазначені сталі числа.

Легко показати, що кожен рівняння, що має злучні сочинники можна перетворити в рівняння удвоє вищого ступіня, але з реальними сочинниками, а тому ми будемо далі розглядати числові рівняння з реальними сочинниками.

§ 42. Границі реальних розв'язків числового рівняння.

Коли ми маємо числове рівняння з реальними коефіцієнтами, то для розв'язання його нам приходится виконати 2 завдання:

1) Відокремити розв'язки, щоб знайти 2 границі між якими містяться розв'язки даного рівняння і

2) Обчислити ці розв'язки (хоч би тільки наближеного рахунку, зближуючи ці знайдені границі, поки не одержимо вартості розв'язку з наперед заданою нам наближеністю.)

Зупинимося поки-що на першому завданні. Для цього введемо такі визначення:

1) Верхньою або вищою границею додатних розв'язків зветься кожне додатне як найменше число, що є більшим за всіх додатних розв'язків даного рівняння.

2) Нижньою, або нижньою границею додатних розв'язків рівняння зветься кожне як найменше число, що є менше від усіх додатних розв'язків цього рівняння.

Такі самі границі існують і для від'ємних розв'язків. Їх визначення ясне й тому їх не подаємо.

Теорема. Кожну із трьох границь: нижню додатних розв'язків і обидві від'ємних розв'язків можна визначити тотожним методом, що й верхню границю додатних розв'язків.

Справді, припустимо, що ми знаємо спосіб відшукування верхньої границі додатних розв'язків рівняння:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \dots (1)$$

Ставимо задоволюючи знайти нижню границю тих же розв'язків і для цього вважасямо $x = \frac{1}{y}$, тоді вставляючи в рівняння (1), маємо:

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n = 0 \dots (2)$$

Припустимо тепер, що вказаною методом ми знайдемо верхню границю додатних розв'язків в рівнянні (2) і ця границя буде κ . Тоді кожний розв'язок:

$$y < \kappa$$

А звідси: $\frac{1}{x} < \kappa$, або $x > \frac{1}{\kappa}$. Це показує, що $\frac{1}{\kappa}$ є нижньою границею додатних розв'язків рівняння (1)

Будемо тепер шукати границі від'ємних розв'язків. Положимо: $z = -x$.

Тоді:

$$a_n - a_{n-1}z + a_{n-2}z^2 - a_{n-3}z^3 + \dots + (-1)^n a_0 z^n = 0 \dots (3)$$

Кали ми знайдемо вказаним способом верхню границю додатних розв'язків рівняння (3), настр. ℓ то:

$$z < \ell$$

А звідси: $-x < \ell$; $x > -\ell$

Таким чином $-\ell$ є нижньою границею від'ємних розв'язків рівняння (1), бо додатними розв'язком рівняння (3) відповідали від'ємні розв'язки рівняння (1)

Далі беручи $u = \frac{1}{z}$ ми з рівняння (3) одержимо способом попереднім нижню границю додатних розв'язків рівняння (3), настр. $\frac{1}{\ell}$.

Так що:

$z > \frac{1}{q}$ але $z = -x$, тоому

$$-x > \frac{1}{q}, \text{ або } x < -\frac{1}{q}$$

Отже $-\frac{1}{q}$ є верхньою границею додатних розв'язків рівняння (1).

Ця теорема нас переконує, що для відшукування всіх границь розв'язків теплового рівняння з реальними коефіцієнтами досить знайти спосіб обчислення верхньої границі додатних розв'язків

§43 Спосіб Нютона.

Відшукування верхньої границі додатних розв'язків.

Припустимо, що нам дано цілу функцію:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

де a_0 ми завжди можемо зробити додатним.

Визьом яку-будь вартість $x = x_0$ і дамо їй певне

додатне приращення h , тоді за теоремою Майора:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Коли $f(x)$ є функцією n ступіня, то останнього не рівною з нулем похідною буде $f^{(n)}(x)$, при чому ця похідна $f^{(n)}(x)$ буде завжди сталою величиною рівною:

$$f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x)_{x=x_0} = n! a_0$$

Але a_0 ми вважаємо за додатно величину, а тому

$$\underline{f^{(n)}(x_0) > 0}$$

Припустимо тепер, що вартість x_0 дібрано нами так, що сама функція і всі її перші

($n-1$) похідні не є від'ємні, себто:

$$f(x_0) \geq 0; f'(x_0) \geq 0; f''(x_0) \geq 0 \dots f^{(n-1)}(x_0) \geq 0$$

Ми взяли h додатним припущенням барності x_0 , а тому можна твердити, що:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) > 0$$

Цю нерівність можна вивести так:

Коли для змінної x цілої функції $f(x)$ дідрати таку барність x_0 , що сама функція і всі її $n-1$ похідні (де n ступінь функції) одержують барності не менші від нуля, то ця функція лінається додатною й для всіх барностей x більших x_0 (напр. $x = x_0 + h$)

Звідси випливає висновок.

Раз для всіх барностей більших від x_0 дана функція буде додатною, то очевидно вона не може для цих барностей стати рівною з нулем. Отже не може бути й розв'язків $f(x)$ барністю більших ніж x_0 , а тому x_0 маємо право вважати за верхню границю додатних розв'язків.

Нам линається знайти спосіб відшука-ти таку барність x_0 й при тому з умового, щоб ця барність була як може меншою.

Цей спосіб подає Нютон.

Припустімо, що ми маємо $f(x)$. Візьмімо всі її похідні, кінаючи $f^{(n)}(x)$, де n рівне зі ступінем функції. Очевидно, що ця остання похідна буде сталою величиною, поне-

редня $f^{(n-1)}(x)$ буде функцією 1^о ступіня. Коли ми цю функцію зрівняємо з нулем, то одержимо вартість $x = x_1$, що обертається $f^{(n-1)}(x)$ в нуль.

Візьмемо тепер вартість x' найближче ціле число більше x_1 (а коли x_1 - саме ціле, то користуємося для дослідження й x_1). Вставляємо це число x' замість змінної x по черзі в $f^{(n-2)}(x)$, $f^{(n-3)}(x)$... і т.д. доти, поки яка з $f^{(k)}(x)$ не стане від'ємною. Тоді збільшимо вартість x' на одиницю й знову вставляємо у $f^{(k)}(x)$, коли й ця вставка дасть таку ж від'ємну вартість, то знова збільшимо вартість x' на одиницю й так доти, поки $f^{(k)}(x)$ не стане більшою 0 (або йонау рівною). Тоді продовжимо вставку в даліші похідні, поки не дійдемо до $f(x)$; коли яка з цих досліджуваних вартостей x_k зробить і $f(x)$ додатною, то x_k й буде потрібною нам верховною границею додатних розв'язків.

Зачепаємо це на прикладі. Хай дасться:

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 1$$

Беремо всі п'ять її похідних:

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 10x$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 48x + 6$$

$$f''(x) = 20x^3 - 24x^2 + 6x - 10$$

$$f^{(iv)}(x) = 120x - 48$$

$$f^{(v)}(x) = 120$$

Зрівнюємо $f^{(iv)}(x)$ з нулем і маємо

$$120x - 48 = 0 \quad x = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

Отже $x' = 1$.

Будемо тепер вставляти вартість $x'=1$ поперш в попередні функції й для наглядності вислідів складемо таку таблицю:

x	$f^{(4)}$	$f^{(3)}$	$f^{(2)}$	$f^{(1)}$	f
1	+	+	-		
2			+	+	-
3					+

Умовимося, що коли f має для даної вставки додатню вартість ставити під нею знак $+$ і в против-

наму випадку $-$. З цієї таблиці очевидно, що вставка $x'=1$ дає вартість $f'(x')$ -від'ємну, а тому ми збільшили величину x' на одиницю собі взявши $x''=2$. Можі маємо $f''(x'') > 0$, $f'(x'') > 0$, але $f(x'') < 0$, тому величину x'' збільшили ще на одиницю й одержали $x'''=3$, що даєть $f(x''') > 0$

Малими числом $\underline{x}=3$ - є верхньою границею додатних розв'язків $f(x)$.

Теорема попереднього § показує, що цей же спосіб можна вжити й для відшукання решти границь: нижньої додатних розв'язків і обох границь від'ємних розв'язків.

§44 Спосіб Лягерра

Візьмемо функцію:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

і постараємося визначити верхню границю додатних розв'язків, на основі вартостей суми-ників функцій. Перше спостереження, яке ми можемо зробити це те, що коли всі $n+1$ коефіцієнтів не менші від нуля, то при кожній,

своего с новым методом, поэтому не будем считать $f(x)$ функцией от x , а будем считать $f(x)$ функцией от x и y , где y — значение функции $f(x)$ при x .

Введем новую функцию $\varphi(x)$, которую будем считать функцией от x и y , где y — значение функции $f(x)$ при x . Тогда $\varphi(x) = f(x) + y$.

$$\varphi(x) = f(x) + y = f(x) + f(x) = 2f(x)$$

и так, как значение $f(x)$ при x равно y , то $\varphi(x) = 2y$. Тогда $\varphi(x) = 2f(x)$.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (x-d)(b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n) + (b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n)$$

В эту формулу подставим значение x , которое равно d , и получим:

$$a_0d^n + a_1d^{n-1} + \dots + a_{n-1}d + a_n = (d-d)(b_1d^{n-1} + b_2d^{n-2} + \dots + b_{n-1}d + b_n) + (b_1d^{n-1} + b_2d^{n-2} + \dots + b_{n-1}d + b_n)$$

Вспомогательная формула $b_1, b_2, \dots, b_n$ имеет вид:

$$b_1 = a_0; b_2 = a_1 + da_0; b_3 = a_2 + da_1 + d^2a_0; b_4 = a_3 + da_2 + d^2a_1 + d^3a_0; \dots; b_n = a_{n-1} + da_{n-2} + d^2a_{n-3} + \dots + d^{n-1}a_0$$

(эту формулу можно записать так)

З цього ми одержуємо й варіант лемми.

$$b_{n+1} = a_n + a_{n-1}d + a_{n-2}d^2 + a_{n-3}d^3 + \dots + a_3d^{n-3} + a_2d^{n-2} + a_1d^{n-1} + a_0d^n$$

Ця варіант цілком відновлює доводку Бету.

[лемма відносно $f(x)$ на $(x-d)$ є рівна з вислідом вставлення у функцію d замість x]

Розглянемо тепер можливість (А) й припустимо, що в ній всі счленики $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ не менші від нуля (себто деякі рівні з нулем, а деякі лише більші його).

Взявши певні $d > 0$ (достатньо великий) ми матимемо, що для всіх $x > d$ миме $(b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n) > 0$; різниця $x-d > 0$, а тому функція $f(d+h)$, де $h > 0$ буде завжди додатною й розв'язків її більших d не існуватиме. Отже d можна буде вважати за верхню границю додатних розв'язків $f(x)$. Це правильно можна сформулювати так:

Коли для якоїсь додатної вартості $x=d$ всі счленики частини відносно даної функції $f(x)$ на різницю $(x-d)$ і лемма від цього відношення є додатні, то d є верхньою границею додатних розв'язків цієї функції

Нали лишається знайти спосіб відшукати таку вартість d й при тому з умовою, щоб ця вартість була якомога меншою.

Малий спосіб дає Лягерр.

Перш за все звернемо увагу ще на таку особливість відшукування вартості d . В кожному рівнянні зміною знаків на зворотні можна

завжди зробити перший (найстарший) додан-
ком.

Припустимо тепер, що $(k+1)$ перших членів є до-
датні. Тоді k перших членів можна відки-
нути й розкласти функцію складену з
тих членів.

Справді, припустимо, що члени:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{k+1} x^{n-k} + a_{k+1} x^{n-k-1}$$

мають додатні коефіцієнти, то й сума їх буде
додатною при позитивній додатній вартості x ,
а значить і при $x=1$ (бо згідно зовні $x > 0$). Отже:
отримавши суму решти членів через $\varphi(x)$, себто:

$$\varphi(x) = a_{k+1} x^{n-k-1} + a_{k+2} x^{n-k-2} + \dots + a_n x^0 + a_n$$

Маємо:

$$f(x) = [a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k}] + \varphi(x)$$

Коли, як ми довели, для кожної вартості $x(>0)$
сума в дужках буде додатною, то очевидно,
що завжди $f(x) > 0$, коли буде $\varphi(x) > 0$. А тому
дослідження над коефіцієнтами $f(x)$ можна
замінити аналогічним дослідженням $\varphi(x)$

Таким чином при вживанні правила Ла-
герра будемо вважати що другий (за старшим)
й член є від'ємний

За взором:

$$b_{k+1} = a_k + d a_{k-1} + d^2 a_{k-2} + d^3 a_{k-3} + \dots \quad (C) \text{ Беремо } k=1$$

обчислимо вартість b_2 й зрівняємо її з нулем,
себто беремо рівняння:

$$b_2 = a_1 + d a_0 = 0$$

а звідси маємо: $d = -\frac{a_1}{a_0}$

[В практиці за d беремо відноше відношення со-
тинників другого мену (ниже n_0) до першо-
го (старшого), попередь від n кувати всі додат-
ні старші мену, крім одного].

Коли вартість d є дробова, то беремо най-
ближче ціле, більше d , і мено n за допомогою його
обчислюємо [користуючись вгором (13)] всі по черзі
вартості $b_3, b_4, b_5, \dots, b_{n+1}$. Коли яка з цих вар-
тостей стає меншою нуля, то так само в спо-
соді Нютона збільшуємо d на одиницю і встав-
ляємо дані. Взагалі процес той же самий, що
і в способі Нютона. Скористуємося тим
самим прикладом, що і для способу Нютона.

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 1$$

$$d = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{-2}{1} = 2. \text{ Отже } b_1 = 1; b_2 = 0$$

Беремо взір (13): $b_{k+1} = a_k + db_k$ і обчислюємо реше-
ту сотинників.

$$1) b_3 = a_2 + db_2 = 1; \quad 2) b_4 = -5 + 2 = -3; \quad 3) b_5 = 1; \quad b_6 = 1 + 1 \cdot 3 = 4$$

$$b_4 = -5 + 3 \cdot 4 = 7; \quad b_5 = 0 + 3 \cdot 7 = 21; \quad b_6 = 1 + 3 \cdot 21 = 64.$$

Складаємо таблицю
Так само знаходимо,
що верхньою границею
додатних розв'язків $\bar{x} = 3$.

d	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
2	0	+	-		
3	+	+	+	+	+

Дуже часто для функцій
невисоких ступенів обчислення за вгором
сотинників $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ застосовують безпосеред-
ній поділ функції на $x-d$, що иноді дає скор-
ті висліді. Напр. у нашої прикладі:

$$d = 2$$

Отже:

$$\begin{array}{r} x^5 - 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 1 \mid x - 2 \\ \underline{-x^5 + 2x^4} \\ x^3 - 5x^2 + 1 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ -3x^2 + 1 \end{array}$$

Можливо припустити поділ бо маємо суми-
ника - 3. Беремо $d=3$.

$$\begin{array}{r} x^5 - 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 1 \mid x - 3 \\ \underline{x^5 + 3x^4} \\ x^4 + x^3 \\ \underline{x^4 + 3x^3} \\ 4x^3 - 5x^2 + 1 \\ \underline{4x^3 + 12x^2} \\ 7x^2 + 1 \\ \underline{7x^2 + 21x} \\ 21x + 1 \\ \underline{21x + 63} \\ 64 \end{array}$$

Ще одне зауваження: ми змінюємо варіанти
 d з 2 на 3 повернувшись назад обчислюючи знов
 b_2, b_3 і т.д. Це незручно особливо при функці-
ях великих ступенів, коли, напр. яке-небудь
 b_n стає від'ємним.

Щоб уникнути цього, треба для обчислення
відразу b_n скористатися взором (С)

$$b_{n+1} = a_n + da_{n-1} + d^2a_{n-2} + \dots + d^na_0$$

Напр. для нашого випадку: ми знайшли, що
для $d=2$; $b_4=-3$. Беремо $d=3$ і тоді:

$$b_4 = a_4 + a_3d + a_2d^2 + a_1d^3 + a_0d^4 = -5 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 9 + 1 \cdot 27 = -5 + 3 - 18 + 27 = 7.$$

Маючи варіанти b_4 далі знов користуємо-
ся взором (В).

Ми подали обидва способи знаходження
верної границі додатних розв'язків тобто,

що в деяких випадках значно, але порівнявши способи Лоперра і Ньютона, а саме, напр., коли велика кількість старших членів в ряд додатка. Візьмемо приклад:

$$f(x) = 2x^9 + 3x^8 + x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 8x^2 + x - 36$$

Отже в способі Ньютона нам припадало б брати 9 похідних і досліджувати їх, тоді як у способі Лоперра ми відкидаємо перші п'ять членів, досліджуємо лише функцію:

$$\varphi(x) = 2x^4 - 8x^2 + x - 36$$

і маємо: $d = -\frac{8}{2} = 4$; $b_1 = 2$; $b_2 = 0$; $b_3 = 1$; $b_4 = -36 + 4 = -32$

Беремо $d_1 = 5$.

$$b_4 = a_4 + a_3 d_1 + a_2 d_1^2 + a_1 d_1^3 = -36 + 5 + 8 \cdot 25 + 2 \cdot 125 = -36 + 5 - 200$$

Отже $\bar{x} = 5$.

Але ми такими скороченнями праці розмирюємо границі. Справді і метода Ньютона і Лоперра (коли поділимо $f(x)$ на $(x-2)$) дають $\bar{x} = 2$.

Число розв'язків цілої функції.

Ми справилися з першою частиною нашого завдання, а саме найшли спосіб визначити границі в яких літають розв'язки цілої функції. Тепер постараємося знайти способи визначення числа їх.

§ 45 Теорема Декарта.

Припустимо, що маємо якусь цілу функцію $f(x)$. В цій функції коефіцієнти можуть бути додатні і від'ємні.

Умовимося звати:

1) випадок коли два, що стоять в ряду, теж мають однаковий знак, повторенням (знаку), а коли вони мають різний знак - оберненням (знаку).

Напр., візьмемо функцію:

$$\underbrace{x^5 + 2x^4}_{\text{повт.}} - \underbrace{3x^3}_{\text{об.}} + \underbrace{4x^2}_{\text{об.}} + \underbrace{3x}_{\text{повт.}} + \underbrace{2}_{\text{повт.}}$$

Вона має 3 повторення й 2 обернення.

Тепер доведемо таку теорему:

Кількість додатних розв'язків цілої функції $f(x)$ не більша ніж обернень (знаку) в самій функції й коли менш, то завжди на тій парості.

Колі ми маємо яку $f(x)$, напр, n ступіня, то вона буде рівна:

$$f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n)$$

Очевидно, що цю функцію можна скласти так:

візьмемо перший розв'язок x_1 і творимо різницю $x-x_1$, тоді функція першого ступіня буде:

$$f_1(x) = a_0(x-x_1)$$

Далі уможваляючи цю функцію на різницю $x-x_2$ (де x_2 другий розв'язок), ми одержимо:

$$f_2(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)$$

В такий спосіб ми одержимо:

$$f_3(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

і т.д. поки не дійдемо до:

$$f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots\dots(x-x_n)$$

Очевидно, що ця остання функція може

одержатися з попередньої:

$$f(x) = f_{n-1}(x) \cdot (x - x_n)$$

Отже ми маємо чергу функцій:

$$f_2(x) = f_1(x) \cdot (x - x_2)$$

$$f_3(x) = f_2(x) \cdot (x - x_3)$$

$$f_4(x) = f_3(x) \cdot (x - x_4)$$

$$\vdots$$

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) \cdot (x - x_n)$$

Очевидно, що де-які з цих розв'язків $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ можуть бути й однакові, напр., $x_n = x_2 = x_r$ (кратні розв'язки)

Розглянемо тепер, яка зміна відбуватиметься в таких функціях від множення її на $(x-d)$, де $d > 0$ (є додатним розв'язком) і доведемо, що при цьому число обернень в цій функції зміниться на непаристе число.

Припустимо, що наша функція має k обернень, тоді отримаємо групу членів, що мають між собою однаковий знак (від обернення до обернення) через $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$

Напр., у функції:

$$\underbrace{x^8 + 2x^7 + 3x^6 - 4x^5 - x^4 + 6x^3 + 8x^2 + x - 4}_{\varphi_0(x)} \underbrace{-}_{\varphi_1(x)} \underbrace{+}_{\varphi_2(x)} \underbrace{-}_{\varphi_3(x)}$$

Тоді матимемо для k обернень:

$$f(x) = \varphi_0(x) - \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \varphi_3(x) + \dots + (-1)^k \varphi_k(x)$$

Помноживши цю функцію на $(x-d)$ де $d > 0$, тоді матимемо:

$$f_1(x) = x\varphi_0(x) - x\varphi_1(x) + x\varphi_2(x) - x\varphi_3(x) + \dots + (-1)^k x\varphi_k(x) - \\ - d\varphi_0(x) + d\varphi_1(x) - d\varphi_2(x) + \dots + (-1)^k d\varphi_{k-1}(x) + (-1)^{k+1} d\varphi_k(x).$$

Очевидно, що крайні члени кожної з нових функцій:
 $(-1)^m \cdot [x\varphi_m(x) + d\varphi_{m-1}(x)]$ зберігають свій однаковий між
 собою знак, бо старший член цієї функції одер-
 житься із старшого $\varphi_k(x)$ множеннями на додат-
 ню величину x , а наймолодший одержиться з най-
 молодшого члена $\varphi_{k-1}(x)$ (протилежної знамені φ_k) мно-
 женням на $-d$ (де $d > 0$) і крім того ці члени не
 матимуть собі схожих, але до них додано-
 ся ще одна функція, а саме: $(-1)^{k+1} d \cdot \varphi_k(x)$, що зав-
 жди матиме протилежний знак між у попе-
 редньої функції, себто: $(-1)^k [x\varphi_k(x) + d\varphi_{k-1}(x)]$.

Таким чином в новій функції $f_1(x)$ мати-
 мемо мінімум $k+1$ обернень (замість k), але
 крім того може припустити, що при зведен-
 ню членів зміниться знак перед одним чи кількома
 середніми членами яких будь-
 з нових функцій: $[x\varphi_1(x) + d\varphi_0(x)]$; $[x\varphi_2(x) + d\varphi_1(x)]$ і т.д.
 Тоді число змін буде парне, напр. 2р.
 Справді: крайні члени цих нових функцій
 будуть однакового знаку

Тепер для ілюстрації візьмемо 3 члени з'ясу:

+ - + або - + -

і введемо ще обернень знаків, але так, щоб край-
 ні знаки були однакові, тоді маємо:

+ - + - + або - + - + -
 + - + - + - + або - + - + - + - і т.д.

Ми з цього бачимо, що для того, щоб у функції
 крайні знаки були однакові кожному новому
 оберненню знаків у середніх членів, може має

вигнати друге обернення йому протилежне.

Таким чином, коли в кожній з нових функцій преїїні члени задовжують однакові знаки, то між середніми членами може відбутися тільки парне тало обернення значу, що ми й визначили через $2p$ (разом для всіх функцій)

Отже загальне тало обернення в нашій функції, одержаної з попередньої множенням на $(x-d)$ де $d > 0$, буде:

$$N = K + 2p + 1$$

Седто зміна в оберненнях, порівняючи з попередніми їх талом $f(x)$ буде:

$$n = 2p + 1$$

Що й треба було довести.

Ми вже бачили, що почина $f(x)$ поступіно складається тлаком $n-1^{\text{е}}$ множення на $(x-x_k)$, але в талі розв'язків x_k можуть бути 1) від'ємні розв'язки $x_k < 0$ і злучні розв'язки, що дадуть тиника: $(x-d-\beta i)(x-d+\beta i) = [(x-d)^2 + \beta^2]$. Таким чином функцію $f(x)$ можна записати так:

$$f(x) = P(x-x_k) \varphi(x)$$

де P - є знак множення, а $\varphi(x)$ є рівна:

$$\varphi(x) = P(x+x_2) \cdot [(x-d_2)^2 + \beta_2^2] \cdot a_0$$

$\varphi(x)$ завжди матиме парне тало обернення, бо здобуток біномів з додатними членами виразу $(x+x_2)$ не введе обернення, а множення здобутку $P(x+x_2)$ на суми виразу $[(x-d_2)^2 + \beta_2^2]$

де $(x-x_1)^2$ і β_2^2 - є додатні величини таке ж дає крайні члени однакового знаку. Отже в крайньому випадку $\varphi(x)$ може мати паристе число обернень, але множення $\varphi(x)$ кожний раз на $(x-x_k)$ ^{де x_k додатне} змінює кількість обернень на непаристе число. Отже:

Кожн означити число обернень у $\varphi(x)$ через $2p_0$, то множення на $(x-x_1)$, що відповідає першому додатному розв'язку, додає непаристе число обернень, а саме: $2p_1+1$, друге множення на $(x-x_2)$ додає обернень $2p_2+1$ і т.д. Кожн додатних розв'язків є k , то ми будемо додавати k разів по $2p_m+1$, де $m=1, 2, \dots, k$. Таким чином все число обернень буде:

$$\begin{aligned} M &= 2p_0 + (2p_1+1) + (2p_2+1) + \dots + (2p_k+1) = \\ &= 2(p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_k) + k = 2p + k \end{aligned}$$

(де p не від'ємне).

А звідси: $k = M - 2p$

Отже при $p=0$, число розв'язків рівне числу обернень функції, а при $p>0$ число розв'язків менше числа обернень, але на паристе число, що й твердить теорема Декарта.

Зміною x на $-x$ ми, розглядаючи функцію $f(-x)$ доведемо, що від'ємних розв'язків у $f(x)$ буде, або число рівне з числом обернень $f(-x)$, або менше його на число паристе, себто $k' = M' - 2p'$
напр.

$$1) f(x) = x^6 - 2x^4 + x - 3$$

має 3 обернення, себто $M=3$, тобто вона має

не більш 3^х додатних розв'язків (або 3, або 1)

$$f(x) = \underbrace{x^6 - 2x^4 - x - 3}_{M'=1}$$

Отже $f(x)$ мусть мати один від'ємний розв'язок.

$$2). f(x) = x^4 + x^3 + x - 1$$

$M=1$ (функція мусть мати 1 додатний розв'язок).

$$f(-x) = x^4 - x^3 - x - 1$$

$M'=1$ (теж мусть мати 1 від'ємний розв'язок).

Ми бачимо, що теорема Декарта не дає нам точної відповіді (крім деяких окремих випадків), а тому ми примушені шукати ще інших засобів визначення числа розв'язків функцій.

Висновок.

§ 46 Колі всі розв'язки даної функції $f(x)$ є реальні, то число додатних розв'язків функції є рівне з числом її обернень, а число від'ємних розв'язків є рівне числу обернень $f(-x)$.

Візьмемо $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$, то найбільше число обернень ^{в ній} буде n , коли функція буде чергуючою (+ - + - ...), але в тому разі $f(-x)$ не матиме ні одного обернення (бо всі непарні ступені x , що йдуть через один мен змінять знаки). Таким чином, в даному випадку число всіх обернень і $f(x)$ і $f(-x)$ є рівне з n , себто з числом розв'язків

В той самий час ми довели, що число розв'язків:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ додатних } n = M - 2p, \text{ де } p \geq 0 \\ 2) \text{ від'ємних } n' = M' - 2p', \text{ де } p' \geq 0 \end{array} \right\} (A)$$

Мут M і M' відповідні члени обернень у $f(x)$ і у $f(-x)$

Досліджуємо два які-будь членів $f(x)$, наспр.,

$$a_2 x^{n-2}, a_p x^{n-p}$$

Коли показателі цих членів відрізняються лише на одиницю, то обернення, що буде у $f(x)$ зникає для $f(-x)$ і навпаки. Коли ж різниця цих показателів більша за одиницю, то наші члени можуть мати обернення й для $f(x)$ і для $f(-x)$, але разом їх член буде не більшою вартістю ніж різниці між показателями.

Одно слово, що $M + M' \leq n$

Додаючи вартості члени розв'язків (A), ми маємо:

$$n + n' = M + M' - 2(p + p'), \text{ де } p \geq 0 \text{ і } p' \geq 0$$

Звідси:

$$n + n' + 2(p + p') = M + M'$$

Тому можемо написати:

$$n + n' + 2(p + p') \leq n$$

але $n + n' = n$, тому:

$$2(p + p') \leq n - n, \text{ або}$$

$$2(p + p') \leq 0, p + p' \leq 0 \quad (B)$$

Але ні p ні p' не можуть, згідно умови, бути менші від нуля, а через те рівність (B) можлива, коли $p = 0, p' = 0$

Далі, вставляючи знайдені значення μ і μ' у рівності (A), маємо:

$$\kappa = M; \quad \kappa' = M'.$$

Що й треба було довести.

Доведений вище теорема Декарта ніби розв'язує питання, коли $f(x)$ має лише реальні розв'язки, але ми не маємо того критерію який би нам поперед завідив, що всі розв'язки даної f -ції є реальні. Тому все-таки приходиться шукати інших же засобів визначення числа розв'язків. Перед тим як перейти до них доведемо наступну основну теорему.

§47. Основна теорема реальних розв'язків цілої функції.

Колі x_0 - є який бажано, реальний розв'язок цілої функції $f(x)$, то для значень x , вистарчально близьких, але менших x_0 сама функція та її перша похідна матимуть протилежні знаки, навпаки для значень x , також вистарчально близьких, але більших x_0 , ці $f(x)$ і $f'(x)$ матимуть однакові знаки.

Припустимо, що ми маємо розв'язок x_0 кратності κ , тоді, як вже відомо нам:

$$f(x_0) = 0; \quad f'(x_0) = 0 \dots \dots f^{(\kappa-1)}(x_0) = 0, \text{ але } f^{(\kappa)}(x_0) \neq 0$$

Беручи значення x вистарчально близьку до x_0 , так що $x = x_0 + h$, де h може бути взято як бажано малим, ми маємо $h = x - x_0$, а звідси розгорнувши $f(x)$ через теорему Майнора

і беремо на збачу, що перші $n-1$ похідні $= 0$ ма-
тимо:

$$f(x) = f(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \dots \quad (1)$$

Тоді перша похідна $f(x)$ буде: (змінна h)

$$f'(x) = \frac{n h^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(n+1) h^n}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) \dots$$

або:

$$f'(x) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0) + \dots \quad (2)$$

Виводимо в рівностях (1) і (2) за допомогою відноше-
но $\frac{h^n}{n!}$ і $\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}$, маємо:

$$f(x) = \frac{h^n}{n!} \left[f^{(n)}(x_0) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(x_0) + \dots \right]$$

$$f'(x) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \left[f^{(n)}(x_0) + \frac{h}{n} f^{(n+1)}(x_0) + \dots \right]$$

Взявши відношення:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{h}{n} \frac{f^{(n)}(x_0) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(x_0) + \dots}{f^{(n)}(x_0) + \frac{h}{n} f^{(n+1)}(x_0) + \dots}$$

$$\text{або: } \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{h}{n} \cdot M \text{ де } M = \frac{f^{(n)}(x_0) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(x_0) + \dots}{f^{(n)}(x_0) + \frac{h}{n} f^{(n+1)}(x_0) + \dots}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} M = 1$, а тому для всіх wartości x вистар-
чайно близьких до x_0 (сбто для wartości x , щоб
різниця $x - x_0 = h$ була досить близька до 0) варті-
стість M , в силу своєї мажоранти буде близькою до
одиної одиниці, а тому завжди добутися.
Таким чином знає відношення:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{h}{n} M$$

Буде цінковито зазначити від значу h .

Отже: 1) коли $h > 0$, сбто $x > x_0$, то $\frac{f(x)}{f'(x)} > 0$

2) коли $h < 0$, сбто $x < x_0$, то $\frac{f(x)}{f'(x)} < 0$

тому при даних умовах, коли $x > x_0$, $f(x)$ і $f'(x)$ одного знаку, а коли $x < x_0$, $f(x)$ і $f'(x)$ різного знаку.

З цього можна твердити, що:

Корисна функція при переході wartości x через її звичайний розв'язок лугить змінювати свій знак.

Справді, коли дана wartość x_0 є звичайний розв'язок функції $f(x)$, то нами вже було доведено що перша похідна цієї функції $f'(x)$ не має вже своїм розв'язком зазначеної wartości x_0 , себто $f'(x_0) \neq 0$. Але $f'(x)$ є талом, а тому буде заховувати свій знак і для всіх wartości x досить близьких до x_0 . Раз відношення $\frac{f(x)}{f'(x)}$ при переході через wartość x_0 змінює свій знак, а при цьому $f'(x)$, як ми показали, заховує свій знак, то можна з цілковитого певністю твердити, що при переході через x_0 , ако свій розв'язок, функція $f(x)$ змінює свій знак на протилежний.

§48 Теорема Ролля.

Між двома послідовними розв'язками функції завжди міститься непарне число розв'язків її похідної.

При доведенні основної теорем, ми одержали, що коли x_0 є розв'язок $f(x)$, то для wartości $x < x_0$ (і вистаргально близьких) $\frac{f(x)}{f'(x)} < 0$, а для wartości $x > x_0$ (і вистаргально близьких) $\frac{f(x)}{f'(x)} > 0$.

Колн α і β два розв'язки $f(x)$, що зростає від α

до β то після переходу через $x = \alpha$: $\frac{f(x)}{f'(x)} > 0$,
але при наближенні до розв'язку $x = \beta$ це
відношення $\frac{f(x)}{f'(x)} < 0$

Зовняду на тавність $f(x)$ між розв'язками
 α і β знаку не змінює, то має змінювати
знак $f'(x)$, а це означає, що $f'(x)$ має перехо-
дити через свій розв'язок один, три, п'ять і
т.д. непарне число раз.

§49. Теорема Сруріє-Бюдана.

Число розв'язків цілої функції $f(x)$ між гранич-
ми α і β ($\alpha < \beta$) вагностей x є рівне, або менше
на парне число всього числа степенів обер-
нені в межах, що складено із цієї функції, та
всіх її похідних.

Хай мер Сруріє буде:

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x) \dots \dots f^{(n)}(x)$$

де $f^{(n)}(x)$ є стала величина зі сталим знаком.
Будемо досліджувати всі можливі зміни в
числі обернені цього меру.

(1) Припустим, що $x = \alpha$ - є звичайний розв'язок
 $f(x)$, тоді на підставі висновку основної тео-
реми змінюється лише знак самої функції,
коли як всі похідні її заховують свій знак. Ко-
ли x набуває цієї вагності і зростає,
то відношення $\frac{f(x)}{f'(x)}$ з від'ємного стає додатним,
адто $f(x)$ стає одного знаку із похідною $f'(x)$. От-
же протитьсся одно обернення.

(2) Коли жаксь β є розв'язком $f(x)$ k -ої кратнос-

ти, то очевидно, що в буде розважати і всіх f -цій
 $f'(x), f''(x) \dots \dots f^{(k-1)}(x)$

тому, коли x набудуть певної вартості роз-
важув в зростаючому, то, на підставі основної
теоремі відношення:

$$\frac{f(x)}{f'(x)}, \frac{f'(x)}{f''(x)} \dots \dots \frac{f^{(k-1)}(x)}{f^{(k)}(x)}$$

змінюватимуть знак, — на знак +, себто ці
функції $f(x), f'(x), f''(x) \dots f^{(k)}(x)$ мають перед цими на-
рами різні знаки, стають однаковими зна-
ків. Таким чином між: $f(x)$ і $f'(x)$; $f'(x)$ і $f''(x) \dots$
 $\dots f^{(k-1)}(x)$ і $f^{(k)}(x)$ трітяться по одному оберненьку,
а всіх обернень між $(k+1)^{ою}$ функцією втретиться-
ся $-k$.

і (3) Коли γ , якась вартість x , є розважком лише
одної середньої функції терену функції, напр. функ-
ції $f^{(m)}(x)$, то може бути кілька втретених
обернень. Але попередня $f^{(m-1)}(x)$, що для неї γ не є
розважком, зовладу на свою тавлість не зміню-
ватиме знаку; також не змінюватиме зна-
ку й остання $f^{(n)}(x) = \text{const}$. А тому, як край-
ні функції терену:

$$f^{(m-1)}(x), f^{(m)}(x) \dots \dots f^{(n)}(x)$$

заховують свій знак, то як було доведено раніш, чис-
ло обернень може бути лише парним, напр., 2, 4, 6.
Перехід через 0, розважком якої буде похідної $f^{(k)}(x)$ (а не
самої $f(x)$) так само має дати парне число
обернень, напр., 2, 4, 6, і т. д.

Коли б такого роду розважків було б t , то ми

одержати в суму обернень, скомпанувати з доданків, а саме:

$$2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + \dots + 2p_n = 2p$$

Малими чинами, коли $f(x)$ рівна:

$$f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

(випадком сюди й кратні розв'язки, на випадок коли $x_1 = x_2 = x_3 = \dots$), то ми на підставі міркувань (1) і (2) матимемо n обернень (що визначаються n розв'язками $f(x)$) і на підставі (3) - матимемо $2p$ обернень. Отже вся обернень в мері групи буде:

$$M = n + 2p$$

А звідси:

$$n = M - 2p \quad \text{де } p \geq 0$$

Що й треба було довести.

Примітка 1. Очевидно, що теорема Декарта є частковим випадком теорем групи. Справді, будемо намі границі a і b вважати: $a=0$, а $b=\bar{x}$ (верхній границі додатних розв'язків). Тоді, при $x=0$ мері групи

$$f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

обернеться в мері:

$$a_n, 1! a_{n-1}, 2! a_{n-2}, \dots, (n-3)! a_3, (n-2)! a_2, (n-1)! a_1, n! a_0(1)$$

[бо $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ при $x=0$ даєть відповідний член: $f(0) = a_n$; $f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots + 2 a_{n-2} x + 1! a_{n-1}$; тож $f'(0) = 1! a_{n-1}$; $f''(x) = n(n-1) a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3} + \dots + 2! a_{n-2}$; тож $f''(0) = 2! a_{n-2}$ і т.д.]

Але $1!, 2!, 3! \dots n!$ є додатні, а через те мері (1)

матиме такі самі такі що й мер:

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_3, a_2, a_1, a_0 \quad (2)$$

складений із суминок функцій.

Коли $b = \bar{X}$ - верхній границі додатних розв'язків, то всі додатні розв'язки матимуться між $a=0$ і $b=\bar{X}$. Але при $x=b=\bar{X}$ сама $f(x)$ і всі її похідні матимуть додатню вагність, а тому цього оберненя меру суминок (2) є також оберненя втретиння між $a=0$ і $b=\bar{X}$, що сповнює теорему Оруре.

Ми бачимо, що спосіб Оруре-Бюдана такий не досконалий, як і Декарта, але він кращий від Декартового тим, що дає можливість зближувати границі a і b .

Справді, завжди можна взяти таку різницю $b-a$ щоб при переході x від a до b в мері Оруре тратилося лише одне обернення, що дає переконання, що в цій інтервалі $a \rightarrow b$ існує лише один розв'язок $f(x)$.

[Так само коли одержимо, що для вагностей x в інтервалі $a \rightarrow b$ не відбудеться ні одної втра-ти оберненя в мері Оруре, то можна твердити, що в даному інтервалі $a \rightarrow b$ не має собі розв'язків $f(x)$]

Примітка 2. Раз теорема Декарта є частковим випадком теорем Оруре, то очевидно висновок теорем Декарта про реальні розв'язки також належить і до теорем Оруре - Бюдана.

Тепер узагальнимо теорему Рунге-Бюдана й
тим самим дамо можливість ввести де-
які спрощення в її пристосування в прак-
тиці.

Сам довід теорему показує, що найголовні-
ше значіння має те, що $f^{(w)}(x)$ при переході від
 x від вартості a до b не змінює свого знаку

Припустимо тепер, що в теоремі:

$$f(x), f'(x), f''(x) \dots f^{(w)}(x)$$

якась $f^{(m)}(x)$ не має розв'язків в інтервалі $a \rightarrow b$,
себто ні для одної вартості x $a < x < b$ не стає
рівною з нулем, тоді вона не змінює й свого
знаку. Тоді ми зможемо скористатися
лише теоремою:

$$f(x), f'(x), f''(x) \dots f^{(m)}(x)$$

і знайти число втрачених обернень в ньому при
переході x через вартості від a до b , бо число втра-
чених обернень в теоремі $f^{(m)}(x) \dots f^{(w)}(x)$ буде зав-
жди парним (знаки $f^{(m)}(x)$ і $f^{(w)}(x)$ стали) й в
суті теорема не відобрає 1-ролі. Таким чи-
ном теорему Рунге-Бюдана узагальнити може-
мо так:

Якщо дана ціла функція $f(x)$ така, разом
зі своїми похідними в границях a і b ($a < b$)
і коли існує якась похідна $f^{(w)}(x)$, що не оберта-
ється в нуль ні для одної вартості x в ін-
тервалі $a \rightarrow b$, то число розв'язків $f(x)$ в цьому
інтервалі є або рівне числу обернень втра-
чених в теоремі $f(x), f'(x) \dots f^{(w)}(x)$, або менш його

на цю картину.

Таке узагальнення теорем дає можливість користатися нею й для трансцендентних функцій.

Приклад. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 38x^2 + 3x - 54$.

$$f'(x) = 8x^3 - 51x^2 + 76x + 3$$

$$f''(x) = 24x^2 - 102x + 76$$

$$f'''(x) = 48x - 102$$

$$f^{(4)}(x) = 48.$$

Можна відразу відокремити додатні розв'язки від від'ємних, вставлюючи $x = +\infty$; $x = 0$; $x = -\infty$. Отже

додатних розв'язків не більше 3х (або 3, або 1), від'ємних не менше одного розв'язок.

x	f	f'	f''	f'''	$f^{(4)}$	обертень	Розв'язків
$+\infty$	+	+	+	+	+	0	Додатних не більше 3
0	-	+	+	-	+	3	
$-\infty$	+	-	+	-	+	4	Від'ємн. 1

Щоб зблизити границі скористуємося функціями орудь для методу Ньютона, щоб визначити верхню границю додатних розв'язків.

$$48x - 102 = 0; x = \frac{102}{48} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$$

Тепер вставляємо значення 5, 4, 3, 2, 1.

x	$f^{(4)}$	f'''	f''	f'	f	
3	+	+	-			
4			+	+	-	
5					+	$\bar{x} = 5$

Отже додатних розв'язків 3.

	f	f'	f''	f'''	$f^{(4)}$	
5	+	+	+	+	+	0 } 1 розв'язок
4	+	-	+	+	+	
3	0					1 розв'язок
2	0					1 розв'язок
1	-	+	-	-	+	3 } немає
0	-	+	+	-	+	

Як практичну пораду дамо:

при вставках у функції ступенів великих
чисел, добре зробити таке спрощення: вино-
сити за дужки функції приблизно $x^{\frac{n}{2}}$, або $x^{\frac{n+1}{2}}$.

Напр. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 38x^2 + 3x - 54 = x^2(2x^2 - 17x + 38 + \frac{3}{x} - \frac{54}{x^2})$

При вставці $x=5$ нам немає рації зверта-
ти увагу на вартість x^2 , бо справа йде
про знак, а тому:

$$2 \cdot 25 - 17 \cdot 5 + 38 = 3$$

Решта вартостей порівнюють з 3 на вартість ^{оскільки малі, що}
функції не вплинуть, а тому ними нехтує-
мо.

Найбільш теоретично досконалим спосо-
бом, що визнає не тільки число розв'язків,
але й їх відокремлює, є спосіб Штурма. Але
він дуже морудний, бо визнає попередньої
праці визначення кратних розв'язків і дуже
довгого процесу складання функцій Штурма.

§50 Функції Штурма.

В цю ж разі ми будемо мати справу з
функціями, що не мають кратних розв'яз-
ків. Ми вже знаємо, що кожену функцію: $F(x)$
можна звільнити від кратних розв'язків
і як вислід цього будемо мати $f(x)$ - що має
всі розв'язки звичайними. Такого роду функцію
ми й будемо розглядати.

Означимо $f(x) = u$, а $f'(x) = v$, і упорядкуємо їх
по спаданням ступенів x . Будемо тепер

ти u на u_1 ; у висліді цього поділу мати-
мемо функцію ступіня меншого ніж ступі-
ня функції u_1 . В цій функції ми змінимо
знак на протилежний і означимо її через u_2 .
Це буде третього (крім u і u_1) функцією Штур-
ма.

Ми поділимо u_1 на u_2 і решта від цього поділу
дасть нову функцію, яка також матиме
ступінь менший за ступінь u_2 . В цій
функції змінимо знак на протилежний і
означимо її через u_3 (четверта функція Штур-
ма).

В такий спосіб продовжуємо поділ далі.
Ми бачимо, що процес поділу є однаковий з
аритметичними способами відшукування най-
більшого спільного дільника ступневими ді-
леннями, з того лише різницею, що після коне-
чного нового поділу: у решті змінюємо знак.
З огляду на те, що розважки $f(x)$ є звичайні,
то ми не матимемо такого ^{спільного} дільника і
завжди ^{держимо} матимемо решту. Але в кожен раз
наступній решті ступінь x понижасть-
ся, а тому ми остаточно зупинимо діяти
до такої функції v , що є сталою величиною,
незалежною від x . Коли змінимо в ній знак і
означимо через u_k , то це й буде останньою
($k+1$)-^{ою} функцією Штурма.

Закон складання цих функцій має за-
гально такий вигляд:

$$u_{k-1} = u_k \cdot Q_k - u_{k+1}$$

$$u_{k-2} = u_{k-1} Q_{k-1} - u_k$$

$$u_{k-3} = u_{k-2} Q_{k-2} - u_{k-1}$$

$$\vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots$$

$$u = u_1 Q_1 - u_2$$

[де $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ - є віднобідні частки, а знак - перед $u_2, u_3, \dots, u_k, u_{k+1}$, взято тому, що конена функція Штурма є рівна з віднобідного функцією, але її взято з протівним знаком]
Значьно ці залежності можна виписати так:

$$u_{n-1} = u_n Q_n - u_{n+1} \text{ де } n = 1, 2, 3, \dots, k \quad (A)$$

§57. Основні властивості функцій

Штурма.

1) Остання функція Штурма, що є сталою величиною ніколи не є рівна з нулем.

Бо коли б $u_{n+1} \equiv 0$, то тоді (див. рівн. (A)) Q_n було б найбільшим дільником $f(x)$ і $f'(x)$, що показувало б, що $f(x)$ має кратні розв'язки, а це протирічить умові.

2) Ні для одної вартості x , дві сусідні функції Штурма не обертаються одночасно в нуль.

Справді, коли б $u_k = 0, u_{k+1} = 0$, то тоді на підставі рівності (A), маємо:

$$0 = 0 \cdot Q_k - u_{k+1}$$

або: $u_{k+1} = 0$

Отже маємо: $u_k = 0; u_{k+1} = 0$

а тоді: $u_k = u_{k+1} Q_{k+1} - u_{k+2}$ маємо б вигляд:

$$0 = 0 \cdot a_{k+1} - u_{k+2}$$

адто:

$$u_{k+2} = 0$$

Продовжувати ці міркування для функцій $u_{k+1} = 0$
 $u_{k+2} = 0$ й далі ми дійшли б, що й остання функ-
 ція Штурма $u_{k+1} = 0$, що протиречить першій
 властивості. Тому припущення, щоб сусід-
 ні функції Штурма разом оберталися в
 нуля є неможливим.

3) Якщо якась з функцій Штурма оберта-
ється для певної вартості x в нуля, то її су-
сідні функції мають для тієї ж вартості x -
знаки протилежні.

Справді, хай $u_k = 0$, тоді рівність

$$u_{k-1} = u_k a_k - u_{k+1}$$

має вигляд:

$$u_{k-1} = -u_{k+1}$$

що й треба було довести.

§52 Складаємо тепер для якоїсь даної функ-
 ції $f(x)$ через Штурмових функцій:

$$u, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$$

і припустимо, що змінній x , ми даємо якусь
 окрему вартість x_1 , тоді функції $u, u_1, u_2, \dots$
 одержать певні додатні, або від'ємні вартості.
 Будемо, як і раніше, для окремих членів функцій
 вважати в даному черезі Штурмових функ-
 цій:

$$u, u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$$

сусідні два однакові знаки функцій за пов-

торення, а два сусідні фізичні знаки за
обернення. Моді в кожному терезі Штурма
ми завжди зможемо обчислити число обер-
нень для даної вартості x .

§53. Теорема Штурма.

Число реальних розв'язків функції $f(x)=0$ (з
реальними коефіцієнтами), що міститься між
двома якими б то були границями a і b є рівне
з різницею обернень в терезі Штурма при
вартостях $x=a$ і $x=b$. (Це означає, як сказати,
що число реальних розв'язків в границях $a \rightarrow b$
є рівне з числом придбання, або втрати обер-
нень в терезі Штурма під час переходу вар-
тості x від a до b).

Припустимо, що $a < b$. Миємо терез Штурма
й вставляємо в нього $x=a$. Хай число обернень
знаку буде в них M_a . Будемо тепер збільшувати
вартості x . З огляду на те, що всі функ-
ції Штурма є цілі, то вони можуть зміню-
вати знак лише при переході через нуль.
Отже зміна в числі обернень в терезі Штурма
може наступити лише тоді, коли одна з цих
функцій перейде через нуль (себто в змінна
буде переходити через вартість x_0 — розв'язок якої
н-ї функції Штурма).

Розглянемо попередню перехід вартості x через
 x_0 якої функції Штурма U_k — середньої в терезі
(причому першої й останньої, себто U_1 і U_{n+1})

Із властивості функцій Мінурна ми знаємо, що:

1) дві сусідні функції однаксно не обертаються в нуль, тому x_0 не є розв'язком ні u_{k-1} , ні u_k

Отже, коли при $x = x_0$:

$$u_k = 0, u_{k-1} \neq 0, u_{k+1} \neq 0$$

2) через властивість (3) функцій u_{k-1} і u_{k+1} протилежних знаків, сьомо:

коли $u_{k-1} > 0$, то $u_{k+1} < 0$, або

" $u_{k-1} < 0$, " $u_{k+1} > 0$

і 3) висновок з останньої теореми каже, що кожна функція при переході через x_0 її зведений розв'язок змінює свій знак, сьомо в даному випадку:

коли при $x = x_0$ $u = 0$, то при $x = x_0 + h$ ^{функція} $u_k \geq 0$
але при $x = x_0 - h$ ^{функція} $u_k \leq 0$. Складаємо таблицю:

x	u_{k-1}	u_k	u_{k+1}		x	u_{k-1}	u_k	u_{k+1}
$x_0 - h$	$\pm$	$+$	$\mp$	є 0	$x_0 - h$	$\pm$	$-$	$\mp$
x_0	$\pm$	0	$\mp$		x_0	$\pm$	0	$\mp$
$x_0 + h$	$\pm$	$-$	$\mp$		$x_0 + h$	$\pm$	$+$	$\mp$

Ми бачимо, що число обернень знаку в терезі цих трьох функцій лишається і до й після переходу x через x_0 однаковим. Сьомо перехід вартості x через розв'язок якої середньої функції число всіх обернень в терезі Мінурна не змінює.

Розглянемо тепер крайні функції u і u_{k+1} .
 u_{k+1} - є сталою величиною, а тому має ста-

ний знак. Щодо n то тут маємо справу лише з однією сусідньою функцією.

n_1 , як $\neq 0$ зберігає знак, а з останньої теореми ми бачимо, що відношення $\frac{f(x)}{f'(x)}$, коли x зростають, переходить через розв'язок x_0 змінює свій знак, а тому має ліпати знак $f(x)$. Отже маємо таблицю:

x	n	n_1	x	n	n_1	
$x_0 - h$	+	-	$x_0 - h$	-	+	$\frac{n}{n_1} < 0$
x_0	0	-	x_0	0	+	
$x_0 + h$	-	-	$x_0 + h$	+	+	$\frac{n}{n_1} > 0$

Таким чином при переході x через x_0 (розв'язок) відбувається збільшення, чи

збільшення на одне обернень вперези Штурма. Скільки буде мати розв'язків $f(x)$, на стільки й обернень збільшиться, або зменшиться, а загалом, зміниться число всіх обернень функції Штурма. Що й треба було довести.

Увага. При користуванні методом Штурма ми звертаємо увагу лише на знаки цих функцій, а не їх вільну частину. Отже при обчисленню з f і f' решти функцій ми можемо помножити кожну з решт від поділу на доданок число, що зменшує працю, бо уникатимуться дробові висліди. Напр., візьмемо функцію:

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 1$$

Способом Ньютоніа ми вже знайшли верхню границю додатних розв'язків $\bar{x} = 3$ $\underline{x} = -1$

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 10x$$

$$\begin{array}{r|l}
 5x^5 - 10x^4 + 5x^3 - 25x^2 + 5 & 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 10x \\
 \underline{5x^5 - 8x^4 + 3x^3 - 10x^2} & x - 2 \\
 -2x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 5 & \\
 \underline{-10x^4 + 10x^3 - 75x^2 + 25} & \\
 -10x^4 + 16x^3 - 6x^2 + 20x & \\
 \underline{-6x^3 - 69x^2 - 20x + 25} &
 \end{array}$$

$$U_2 = 6x^3 + 69x^2 + 20x - 25$$

$$\begin{array}{r|l}
 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 10x & 6x^3 + 69x^2 + 20x - 25 \\
 \underline{30x^4 - 48x^3 + 18x^2 - 60x} & 5x - 132 \\
 30x^4 + 345x^3 + 100x^2 - 125x & \\
 \underline{-393x^3 - 82x^2 + 65x} & \\
 -786x^3 - 164x^2 + 130x & \\
 \underline{-786x^3 - 9108x^2 - 2640x + 3300} & \\
 8944x^2 + 2770x - 3300 &
 \end{array}$$

i m. d.

2^й приклад. $U = x^4 + x^3 + x - 1.$

$$U_1 = 4x^3 + 3x^2 + 1.$$

$$U_2 = 3x^2 - 12x + 17$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + x^3 + x - 1 & 4x^3 + 3x^2 + 1 \\
 \underline{4x^4 + 4x^3 + 4x - 4} & x + 1 \\
 4x^4 + 3x^3 + x & \\
 \underline{x^3 + 3x - 4} & \\
 4x^3 + 12x - 16 & \\
 \underline{4x^3 + 3x^2 + 1} & \\
 -3x^2 + 12x - 17 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 4x^3 + 3x^2 + 1 & 3x^2 - 12x + 17 \\
 \underline{12x^3 + 9x^2 + 3} & 4x + 19 \\
 12x^3 - 48x^2 + 68x & \\
 \underline{57x^2 - 68x + 3} & \\
 57x^2 - 228x + 323 & \\
 \underline{160x - 320} & \\
 x - 2 &
 \end{array}$$

$$U_3 = -x + 2$$

$$\begin{array}{r|l}
 3x^2 - 12x + 17 & -x + 2 \\
 \underline{3x^2 - 6x} & \\
 -6x + 17 & \\
 \underline{-6x + 12} & \\
 5 &
 \end{array}$$

$$U_4 = -5$$

Отже:

$$U = x^4 + x^3 + x - 1$$

$$U_1 = 4x^3 + 3x^2 + 1$$

$$U_2 = 3x^2 - 12x + 17$$

$$U_3 = -x + 2$$

$$U_4 = -5$$

За потоновим способом ми знайдемо границі: верхню (+)х-в: 1, нижню (-)х-в: -2. Додатні місця: між 1 і 0, а від'ємні між 0 і -2. Вставляємо бортовості 1, 0 і -2 й складаємо таблицю:

x	u	u_1	u_2	u_3	u_4	число обертень	число розв'язків
1	+	+	+	+	-	1	} 1. ---
0	-	+	+	+	-	2	
-2	+	-	+	+	-	3	

Можна цілком іт не користуватися зі спо-
собу Ньютона, а брати за верство додатню
границю $+\infty$, а нижню від'ємну $-\infty$. Напр.,
дамо функцію: $u = x^2 - 7x^2 + 2 = 0$

$u = x^2 - 7x^2 + 2$ Складаємо таблицю:

$$u_1 = x^6 - 2x$$

$$u_2 = 5x^2 - 2$$

$$u_3 = 25x - 4$$

$$u_4 = 234.$$

x	u	u_1	u_2	u_3	u_4	число обертень
$-\infty$	-	+	+	-	+	3
0	+	0	-	-	+	2
$+\infty$	+	+	+	+	+	0

Отже, додатних 2 розв'язки, а від'ємних один.
Того вислідку досягнемо знайшовши грани-
ці за методом Ньютона, або шляхом під-
бiрання вартостей.

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$

x	u	u_1	u_2	u_3	u_4	число обертень	Додатних розв. $1 < \alpha < 2$ $0 < \beta < 1$ Два розв'язки. Від'ємних розв. $0 > \gamma > -1$ один розв'язок.
+2	+	+	+	+	+	0	
+1	-	-	+	+	+	1	
0	+	0	-	-	+	2	
-1	-	+	+	-	+	3	

Обчислення розв'язків цілої функції

Метр, коли першу задану виконано, себто
ли тільки намітити границі розв'язків

функцій і їх відокремити, ми перейдемо до другої задачі, обчислення самих розв'язків, в першу чергу вимірних (раціональних), а потім і невимірних (наближене обчислення їх wartości).

Обчислення реальних розв'язків.

§54 Обчислення раціональних розв'язків.

Будемо розкладати функції з реальними коефіцієнтами і вдобавок з цілими, бо коли коефіцієнти є дробові, то зведення їх до спільного знаменателя рівняння дасть нам його з цілими коефіцієнтами.

Доведемо цю саму теорему:

В кожній цілій функції коефіцієнт при старшій ступені змінної можна так само ви-
мірних перетворень звести до одиниці, при
чому решта коефіцієнтів лишиться цілими.

Хай маємо цілу функцію з реальними коефіцієнтами:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

Замінивши x через $\frac{y}{k}$, де k довільне ціле число.
могі:

$$a_0 \frac{y^n}{k^n} + a_1 \frac{y^{n-1}}{k^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{y}{k} + a_n = 0$$

Поділимо все рівняння на $\frac{a_0}{k^n}$, тоді:

$$y^n + \frac{a_1 k y^{n-1}}{a_0} + \frac{a_2 k^2 y^{n-2}}{a_0} + \dots + \frac{a_n k^n}{a_0} = 0$$

Коли k брати рівним з a_0 , то асно, що всі коефіцієнти стануть цілими. В окремих

випадку це можна перевірити короче: потр.

$$16x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 1 = 0$$

тут можна взяти $x = \frac{y}{4}$, тоді маємо:

$$\frac{16y^4}{256} - \frac{4y^3}{64} + \frac{2y^2}{16} - 1 = 0$$

а звідси: $y^4 - y^3 + 2y^2 - 16 = 0$

Теорема 2. (Гауса)

Кожне рівняння з цілими коефіцієнтами й
коефіцієнтом старшого члена рівним з оди-
ною ніколи не має дробових розв'язків.

Цей рівняння

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

де $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ цілі вибірні числа, мати-
ме свій розв'язок $x_0 = \frac{p}{q}$ (де p і q не мають
спільних множників).

Вставляючи цю вагність в рівняння (1) одер-
жимо:

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = 0$$

Помножимо всі члени на q^{n-1} , тоді маємо:

$$\frac{p^n}{q} = - (a_1 p^{n-1} + a_2 q p^{n-2} + \dots + a_{n-1} q^{n-2} p + a_n q^{n-1})$$

Але при цілих $a_1, a_2, \dots, a_n$ права частина є ці-
лою, а ліва точно є дробом (бо p і q не ко-
процуються). Ми маємо рівність неможливу,
а тому й припущення є також неможли-
вим.

Можлимо також кожне рівняння з цілими ра-
ціональними коефіцієнтами можна звести

до обчислення цілих раціональних розв'язків (для цього треба лише перетворити його так, щоб константи при старшому члені був одиниця).

Теорема 3. Коли рівняння має цілі вибірні константи й констаткою старшого члену одиницю, то його цілі розв'язки є дільниками вільного члену.

Припустимо, що $x = x_0$ є розв'язком рівняння:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ - є цілі вибірні числа. Тоді маємо тождество:

$$x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + a_2 x_0^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

або:

$$x_0^{n-1} + a_1 x_0^{n-2} + a_2 x_0^{n-3} + \dots + a_{n-1} = -\frac{a_n}{x_0}$$

Ліва частина є ціле число, то й права частина повинна бути цілим числом, себто a_n повинна ділитися на x_0 , що й треба було довести.

Приклад. Візьмемо рівняння:

$$16x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 1 = 0$$

ми вже перетворили його в рівняння:

$$y^4 - y^3 + 2y^2 - 16 = 0, \text{ де } y = 4x$$

На підставі останньої теореми, ми можемо сказати, що цілі вибірні розв'язки, коли вони є, будуть лише дільниками числа 16, а тому будуть одиниці з таких чисел:

$$16: +1, -1, +2, -2, +4, -4, +8, -8, +16, -16$$

Вставивши ціє вартостей в наше рівняння покаже, що одним з таких розв'язків буде $y = 2$, а тому

$$x = \frac{1}{2}$$

В даному разі можна ввести спрощення (бо x в першому ступені немає), а саме:

$$y^4 - y^3 + 2y^2 = 16$$

$$y^2(y^2 - y + 2) = 16$$

Крім y -цілих, то й в дужках має бути ціле число, а тому не може мати wartości більші ± 4 (могі $y^2 = 16$ і множених у дужках є рівний з одиницею). До цього всього треба зробити ще такі зауваження.

Крім великий член є дуже великий, що дає багато дільників, то моги в першу чергу треба за способом Евкліда з'ясувати верхню границю додатних розв'язків і нижню границю від'ємних розв'язків. Цим зменшиться число дільників, що ми досліджуємо.

§55 Це число дільників, що є до дослідження, можна скоротити ще з таких міркувань:

Крім d є розв'язок $f(x)$, то $f(x) = (x-d)\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ - є цілих, а тому й внаслідок вставки в цілі цілих чисел будуть також цілі. Припустимо, що в рівність:

$$f(x) = (x-d)\varphi(x)$$

вставимо по черзі $x=1$ і $x=-1$, моги мати також:

$$f(1) = (1-d)\varphi(1) = -(d-1)\varphi(1)$$

$$f(-1) = (-1-d)\varphi(-1) = -(d+1)\varphi(-1)$$

А звідси:

$$\varphi(1) = -\frac{f(1)}{d-1}$$

$$\varphi(-1) = -\frac{f(-1)}{d+1}$$

Внесли вставку цілих чисел у функцію $\varphi(x)$, як ми вже говорили, мають бути цілі, а тому й дробні в правих частинках мають бути цілі. Отже, коли x є розв'язок даної цілої (з ви- мірними коефіцієнтами) функції, то 1) вставка в цю функцію $x=1$ має ділитися на $(x-1)$ і 2) вставка в ту ж функцію $x=-1$ також має ділитися й на $(x+1)$.

Отже:

Всі дільники вільного члену функції, що не сповнюватимуть цю умову не є розв'язками функції.

Спосіб виведення цих отак показемо безпосередньо на прикладі:

Хай дано рівняння:

$$6x^5 + 19x^4 - 13x^3 - 37x^2 + 31x - 6 = 0$$

Ми виразу помітили, що вставка $x = \frac{4}{6}$ для перетворення рівняння з коефіцієнтами однієї старшого члена нам дає дуже великий вільний член (а саме: $-6 \cdot 6^4 = -7776$). Очевидно дільників буде сила, а тому виразу за способом Нютона шукаємо частині розв'язків даного рівняння (значити, що розв'язки перетвореного будуть $y = 6x$)

Отже:

$$I. \quad u = f(x) = 6x^5 + 19x^4 - 13x^3 - 37x^2 + 31x - 6$$

$$u' = 30x^4 + 76x^3 - 39x^2 - 74x + 31$$

$$u'' = 120x^3 + 228x^2 - 78x - 74$$

$$u''' = 360x^2 + 456x - 78$$

$$u^{IV} = 720x + 456$$

$$x = -\frac{456}{720}; 0, 1, 2, 3.$$

x^*	$u^{\bar{v}}$	$u^{\bar{w}}$	$u^{\bar{v}}$	$u^{\bar{v}}$	u
0	+	-			
1		+	+	+	0

Отже $x_1=1$ є верхньою межою розв'язків, а одночасно найбільшим розв'язком $f(x)$. Це дає

нам змогу знизити ступінь самого рівняння.

$$\begin{array}{r}
 6x^5 + 19x^4 - 13x^3 - 37x^2 + 31x - 6 \mid x-1 \\
 \underline{6x^5 - 6x^4} \\
 25x^4 - 13x^3 \\
 \underline{25x^4 - 25x^3} \\
 12x^3 - 37x^2 \\
 \underline{12x^3 - 12x^2} \\
 -25x^2 + 31x \\
 \underline{-25x^2 + 25x} \\
 6x - 6 \\
 \underline{6x - 6} \\
 0
 \end{array}$$

Таким чином далі маємо справу з рівнянням:

$$6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$$

що має верхню границю $\bar{x} = 1$

Можливо низку границю відеємних розв'язків

$$v = f(-1) = 6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6$$

$$v' = 24x^3 - 75x^2 + 24x + 25$$

$$v'' = 72x^2 - 150x + 24$$

$$v''' = 144x - 150$$

$$x = \frac{150}{144} = 1\frac{1}{24}; 2, 3, 4, \dots$$

$-x$	v'''	v''	v'	v
2	+	+	-	
3			+	0
4				

Знову переконаємося, що $-x_2 = 3$; $\underline{x_2 = -3}$

Таким чином $x = -3$ є нижньою межою відеємних розв'язків і одночасно най-

меншим відеємним розв'язком, що також знижує ступінь рівняння

Можу:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + 95x^3 + 12x^2 - 25x + 6 & x+3 \\ \hline 6x^4 + 18x^3 & \\ \hline 7x^3 + 12x^2 & \\ 7x^3 + 21x^2 & \\ \hline -9x^2 - 25x & \\ -9x^2 - 27x & \\ \hline 2x + 6 & \end{array}$$

Ми діємо до рівняння:

$$6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = 0$$

II перетворення рівняння.

Покладаючи $x = \frac{y}{6}$, маємо:

$$\frac{y^3}{36} + \frac{7y^2}{36} - \frac{2y}{6} + 2 = 0$$

або:

$$y^3 + 7y^2 - 54y + 72 = 0$$

Графіки розв'язків будуть:

$$\underline{y} = 6x = 6; \quad \underline{y} = 6x = -18 \quad (\text{сбто } -18 \leq x \leq 6)$$

В цих границях гімнерами 72 будуть:

$$-18, -12, -9, -8, -6, -4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4, +6.$$

Визначаємо собі гімнери.

$$\text{III. } f(1) = 26; \quad f(-1) = 132.$$

x	-18	-12	-9	-8	-6	-4	-3	-2	-1	+1	2	3	4	6
$x-1$	-19	-13	-10	-9	-7	-5	-4	-3	-2	0	1	2	3	5
$x+1$	-17	-11	-8	-7	-5	-3	-2	-1	0	2	3	4	5	7
$f(x)$	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+	+	-	-
$f(x)$	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+	+	+	-	-

Кому не
гімнери
на ціло
—
Кому гі-
мнери
+

Як бачимо з цих гімнерів сповнюють умову
(3) лише числа: -12, 2, 3. Можу вставити їх в рівнян-
ня перевіряючи, чи вони є потрібними розв'язками.

$$-1728 + 1008 + 648 + 72 = 0$$

$$8 + 28 - 108 + 72 = 0$$

$$27 + 63 - 162 + 72 = 0$$

Отже розв'язки даного рівняння будуть:

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{2}; x_3 = \frac{1}{3}; x_4 = -2; x_5 = -3$$

Примітка. Спробу виділення розв'язків треба не-
проводити, бо може статися, що якийсь буде діль-
ником $f(x)$ і $f(-1)$ й не буде це розв'язком. Непр. рівняння:

$$x^4 - 6x^3 - 15x^2 - 150x - 1000 = 0$$

має розв'язки в границях $-5 < x < 19$

$$d = -5, -4, -2, -1, +1, +2, +4, +8, +10$$

d	-5	-4	-2	-1	+1	+2	+4	+8	+10
$d-1$	-6	-5	-3	-2	0	1	3	7	9
$d+1$	-4	-3	-1	0	2	3	5	9	11
$\frac{f(d)}{d-1}$	+	+	+	+	-	+	+	-	+
$\frac{f(-1)}{d+1}$	-	+	+	-	+	+	-	-	+

$$f(1) = -1170$$

$$f(-1) = -858$$

Отже відокремлені дільники:

$$-4, -2, +2, +10$$

Вставка їх показує, що випірнати розв'язком
є лише: $x_1 = -4; x_2 = 10$ $[(x-10)(x+4) = x^2 - 6x - 40]$

$$\begin{array}{r|l} \text{Діючи:} & x^4 - 6x^3 - 15x^2 - 150x - 1000 \quad | \quad x^2 - 6x - 40 \\ & \underline{x^4 - 6x^3 - 40x^2} & \quad | \quad \underline{x^2 + 25} \\ & 25x^2 - 150x - 1000 & \\ & \underline{25x^2 - 150x - 1000} & \end{array}$$

у нас лишається рівняння:

$$x^2 + 25 = 0, \text{ звідки } x_{3,4} = \pm 5i$$

Ми бачимо, що ці таблички не дають можливість
ти робити спробу на розв'язки $x = \pm 1$, але коли
ми одержуємо $f(1)$ і $f(-1)$, то тоді обернення $f(1) = 0$,
або $f(-1) = 0$ дає нам можливість твердити, що
або $x = 1$, або $x = -1$ є розв'язком оригінальн. Моги по-

ділити всю функцію на $x \neq 1$ ми отримаємо ступінь її й будемо розкладати далі більш просту функцію

Обчислення невизірних розв'язків.

1 спосіб

§56 Нікоорне правило (regula falsi)

Припустимо, що ми вже відокремили розв'язки даного рівняння, себто знайшли границі поміж яких лежить кожний окремий розв'язок цього рівняння. Хай один з таких розв'язків x_0 лежить в границях α і β , де $\beta > \alpha$. Визначимо через h різницю між розв'язком і нижньою границею, себто:

$$x_0 = \alpha + h$$

Так само означимо через k різницю між розв'язком і верхньою границею, себто:

$$x_0 = \beta + k \quad (\text{де } k \text{ від'ємне})$$

Тоді за теоремою Тейлора, маємо:

$$f(x_0) = f(\alpha + h) = f(\alpha) + h f'(\alpha) + \frac{h^2}{2!} f''(\alpha) + \dots$$

$$f(x_0) = f(\beta + k) = f(\beta) + k f'(\beta) + \frac{k^2}{2!} f''(\beta) + \dots$$

Але $f(x_0) = 0$, бо x_0 є її розв'язок, а тому заміною h -через $(x_0 - \alpha)$ і k -через $(x_0 - \beta)$, матимемо:

$$f(\alpha) + (x_0 - \alpha) f'(\alpha) + \frac{(x_0 - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \dots = 0$$

$$f(\beta) + (x_0 - \beta) f'(\beta) + \frac{x_0 - \beta}{2!} f''(\beta) + \dots = 0$$

Помножимо перше рівняння на $(x_0 - \beta)$, а друге на $(x_0 - \alpha)$ й віднімемо одне рівняння з другого, тоді матимемо:

$$(x_0 - \beta) f(\alpha) - (x_0 - \alpha) f(\beta) + (x_0 - \alpha)(x_0 - \beta) [f'(\alpha) - f'(\beta)] +$$

$$+ \frac{(x_0 - \alpha)(x_0 - \beta)}{2!} [(x_0 - \alpha) f''(\alpha) - (x_0 - \beta) f''(\beta)] + \dots = 0$$

ми вважати наближення α і β дуже близькими до розв'язку x_0 , а тому збудуємо $h, k = (x_0 - \alpha)(x_0 - \beta)$ і різні ступені h і k будуть остільки малі, що ними можна нехтувати. Через те можна наближено вважати:

$$(x'_0 - \beta) f(\alpha) - (x'_0 - \alpha) f(\beta) = 0$$

де x'_0 - означає нову наближену вартість x_0 .

Звідси:

$$x'_0 [f(\alpha) - f(\beta)] = \beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)$$

або

$$x'_0 = \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{f(\alpha) - f(\beta)}$$

Додаючи до чисельника й віднімаючи від нього $\alpha f(\alpha)$, маємо:

$$\begin{aligned} x'_0 &= \frac{\alpha f(\alpha) - \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) - \alpha f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\beta)} = \\ &= \frac{\alpha [f(\alpha) - f(\beta)] + (\beta - \alpha) f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\beta)} \end{aligned}$$

або

$$x'_0 = \alpha + \frac{(\beta - \alpha) f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\beta)} = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{1 - \frac{f(\beta)}{f(\alpha)}}$$

[Так само додаючи й віднімаючи $\beta f(\beta)$ ми одержимо: $x'_0 = \beta + \frac{(\beta - \alpha) f(\beta)}{f(\alpha) - f(\beta)} = \beta - \frac{\beta - \alpha}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}$]

Нам лишається ще показати, що наше нове наближення буде більш близьким до правдивої вартості x , ніж попереднє.

Взявши

$$x'_0 = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{1 - \frac{f(\beta)}{f(\alpha)}} \dots (a)$$

ми звертимо увагу на те, що розв'язки лежать

між вартостями α і β , а тому $f(\alpha)$ і $f(\beta)$ мають
бути різних знаків і відношення $\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}$ - є від'єм-
не, що означимо через: $-\varepsilon^2$. З (а) маємо:

$$x'_0 - \alpha = \frac{\beta - \alpha}{1 + \varepsilon^2}$$

Коли ми від знаменателя правої частини від-
кинемо ε^2 , то вартість цілого дробу збільшиться
і тому:

$$0 < x'_0 - \alpha < \beta - \alpha$$

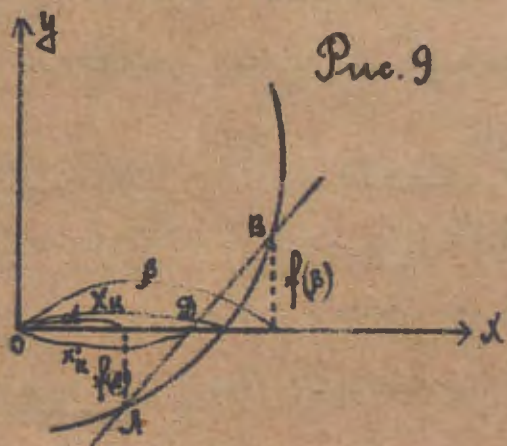
Перенесемо α в праву частину і вліву цієї пог-
дійної нерівності і матимемо:

$$\alpha < x'_0 < \beta$$

що і треба було довести.

Щоб з'ясувати раніше цього наближення, ми
розглянемо геометричне його значіння.хай дана
функція $f(x)$ уявляє з себе якусь криву в прямокут-
ній системі координат (Рис. 9). Ця крива ле-

жить з обох боків вісі x -ів,
бо при одній з вартостей
відмінкової x_0 має вартість
 $y = f(x_0) = 0$. Цей точ-
ка A і B , що відповідають
вартостям відмінкової
 $x = \alpha$ і $x = \beta$. Можі значення



цього можна будуть: $A[\alpha, f(\alpha)]$ і $B[\beta, f(\beta)]$. Напише-
мо рівняння січної, що переходить через точки
 A і B і маємо:

$$y - f(\alpha) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} (x - \alpha)$$

звідси:

$$y = f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} (x - \alpha)$$

Знайдемо тепер точку D перетину цієї січної з віссю X-ів. Очевидно, що для цього треба вважати $y=0$. Отже:

$$f(d) + \frac{f(\beta) - f(d)}{\beta - d} (x - d) = 0$$

$$x - d = - \frac{f(d)(\beta - d)}{f(\beta) - f(d)} = \frac{(\beta - d) f(d)}{f(d) - f(\beta)}$$

і звідси:

$$x = d + \frac{(\beta - d) f(d)}{f(d) - f(\beta)}$$

Як бачимо, ми одержали вираз неми наближення x' , в той час як справжньою вартою x буде значення точки C (перетин кривої з віссю X-ів). Отже, взате в цей спосіб наближення, є змінною кривої через відновідну просту.

Але в цьому разі ми припускаємо, що прирощення аргументу є пропорційні прирощенням самих незалежних (властивість аргументу 1^о ступіня), що є інтерполяцією варіацій змінної через пропорційні частини.

2^о спосіб обчислення невідірних розв'язків.

§57. Спосіб Ньютона.

Хай наближена варіація розв'язку $x=d$, а справжня варіація x_0 . Може означимо $x_0 - d = h$, звідси $x_0 = d + h$. За зором Тейлора маємо:

$$f(x_0) = f(d+h) = f(d) + h f'(d) + \frac{h^2}{2!} f''(d) + \dots = 0$$

(бо x_0 - є розв'язок $f(x)$, а тому $f(x_0) = 0$)

Коліма в наближенні h дуже мала, так що ступінцями її більш першої можна нехтувати, а тому:

$$f(d) + h f'(d) = 0$$

де n' є нова різниця між новим наблизженням d_1 розв'язку першого д. Збигну:

$$n' = (d_1 - d) = - \frac{f(d)}{f'(d)}$$

або:

$$d_1 = d - \frac{f(d)}{f'(d)}$$

Очевидно, що можна одержати ще нове наблизження, повторивши над d_1 ті ж самі міркування, що й над d , себто:

$$d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(d_1)} \text{ потім: } d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(d_2)} \text{ і т.д.}$$

Але цей спосіб викликає деяких зауважень, а саме: в деяких випадках цим способом замість наблизження до справжньої вартості, буде від неї віддалятися. Щоб в цьому переконатися, дамо цю потому спосіб геометричну інтерпретацію: Візьмемо ві-

сі координат і криву AB , що визначається рівнянням $y=f(x)$

Точка C буде відповідати

справжньому розв'язку $f(x)$, а саме $y=0=f(x_0)$. Візьмемо яку точку $K(d, f(d))$, що відповідає потому наблизженню.

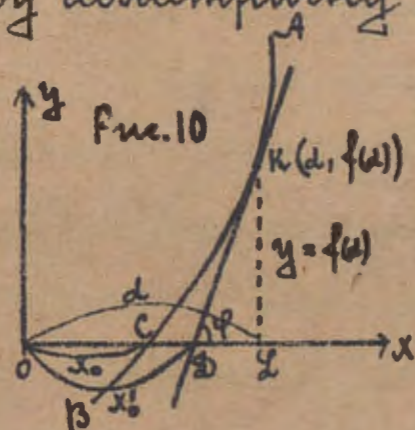
Тоді $f(d)$ - буде радією цієї точки, $f'(d)$ як нам відомо є кутовий змінний дотичної KD до кривої в точці K , себто $f'(d) = \tan \varphi$. Отже, з Δ -ка KDL маємо:

$$\frac{f(d)}{f'(d)} = y \cot \varphi = DL$$

тому:

$$d_1 = d - \frac{f(d)}{f'(d)} = OL - DL = OD$$

Маючи цим ми в даному разі зустрічаємо



справжній розв'язок (відповідну точку перетину кривої з віссю x -ів) через наближення (відтінкову перерізку з віссю x -ів дотичної до кривої, побудованої з точки K , дуже близької до осі x -ів. На рис. 11 дано дані наближення $d_1, d_2, d_3, \dots$

Розглянемо тепер ще такі випадки (рис. 12). Тут ми бачимо, що перші припущення були означені точками K і L , дотична в точці K зустрічає вісь x -ів у точці D по-за межами відтинка KL , себто дає менше наближення ніж d і β .

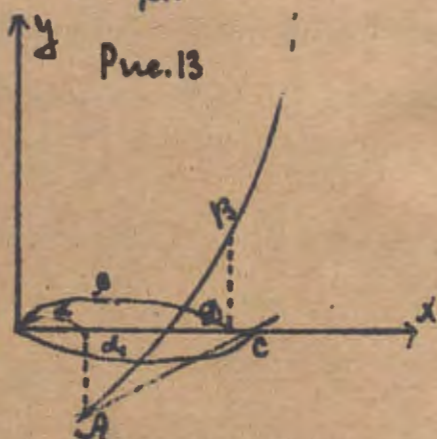
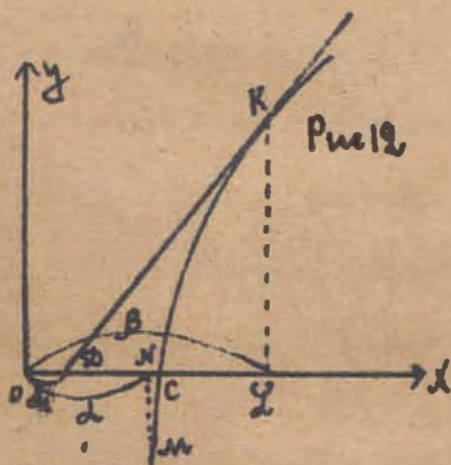
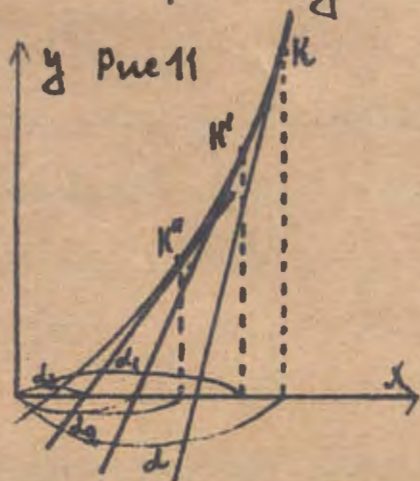
Так само й на рис. 13 дотична AC .

Не будемо тутати геометричних ознак непридатності способу Ньютона, а перейдемо безпосередньо до вивчення цих умов аналитично.

Хай дані наближення розв'язку x_0 будуть d і β . $d < \beta$, при чому між цими границями крім x_0 нічого розв'язку нема. Може за способом Ньютона нові наближення будуть:

$$d_1 = d - \frac{f(d)}{f'(d)} \quad \text{і} \quad \beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

ми знаємо, що $d < x_0$ [x_0 - справжній розв'язок $f(x)$],



а $\beta > x_0$, а тому на підставі основної теореми біж-
номента $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} < 0$, а біжнотента $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} > 0$. Отже:

$$d_1 = d - \left(- \left| \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right| \right) > d \quad \text{або} \quad d_1 > d$$

Тем савно:

$$\beta_1 = \beta - \left(+ \left| \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \right| \right) < \beta \quad \text{або} \quad \beta_1 < \beta$$

Таким чиним нові наближення мають бути
ближче до справжньої вартості, але лише в то-
му разі, коли d змінюється все не так меншою
 β_1 все не так близько x_0 .

Означимо різницю:

$$x_0 - d = h \quad \text{і} \quad \beta - x_0 = k$$

тоді:

$$x_0 = d + h = \beta - k$$

Розпортуном $f(d+h)$ і $f(\beta-k)$ через теорему Тейлора,
маємо:

$$f(d+h) = f(d) + h f'(d) + \frac{h^2}{2!} f''(d+\theta h) \dots = 0, \quad \text{де } 0 < \theta < 1$$

$$f(\beta-k) = f(\beta) - k f'(\beta) + \frac{k^2}{2!} f''(\beta-\vartheta k) \dots = 0, \quad \text{де } 0 < \vartheta < 1$$

Зовнаду на те, що h і k є доцить мали, то ми
зможемо зупинити теорему лише на другому члені.
тоді поділивши наше рівняння на $f'(d)$, а
друге на $f'(\beta)$, маємо:

$$\frac{f(d)}{f'(d)} + h + \frac{h^2}{2!} \frac{f''(d+\theta h)}{f'(d)} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - k + \frac{k^2}{2!} \frac{f''(\beta-\vartheta k)}{f'(\beta)} = 0$$

Замінюючи в наших рівняннях ці одити h і k
через їх вартості: $h = x_0 - d$ і $k = \beta - x_0$, маємо:

$$\frac{f(d)}{f'(d)} + x_0 - d + \frac{h^2}{2!} \frac{f''(d+\theta h)}{f'(d)} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \beta + x_0 + \frac{k^2}{2!} \frac{f''(\beta-\vartheta k)}{f'(\beta)} = 0$$

А збідни:

$$x_0 = d - \frac{d_1}{f'(d)} - \frac{h^2}{2!} \frac{f''(d+th)}{f'(d)} \quad \text{і} \quad x_0 = \beta - \frac{\beta_1}{f'(\beta)} - \frac{k^2}{2} \frac{f''(\beta-\vartheta k)}{f'(\beta)}$$

або:

$$x_0 - d_1 = -\frac{h^2}{2} \frac{f''(d+th)}{f'(d)} ; \quad \beta_1 - x_0 = +\frac{k^2}{2} \frac{f''(\beta-\vartheta k)}{f'(\beta)}$$

Ми будемо розглядати випадок, коли $f''(x_0) \neq 0$ і пра-
вими d і β так близькі, що для всіх wartości x
в цих межах $f''(x)$ збереже сталий знак.

[Бо коли б $f''(x_0) = 0$, то тоді ми мали б знову такий-
ти ступеневий ділення найбільшого спільного
ділителя функцій $f(x)$ і $f'(x)$. Цей спільний діли-
тель по доведеному ранім місцям би і розва-
зок x_0 , а тому прирівняли нулеві цього найбіль-
шого ділителя, ми мали б значно простіше
рівняння для однієї розвазки x_0].

Позначимо тепер числителя і знаменате-
ля правих частин: 1^а рівності на $f(d)$, а другої
на $f(\beta)$ і матимемо:

$$x_0 - d_1 = -\frac{h^2}{2} \cdot \frac{f''(d+th)}{f(d)} \cdot \frac{f(d)}{f'(d)}$$

$$\beta_1 - x_0 = +\frac{k^2}{2} \frac{f''(\beta-\vartheta k)}{f(\beta)} \cdot \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

Але на підставі основної теореми, коли $d < x_0$, то
 $\frac{f(d)}{f'(d)} < 0$ і тому ми можемо означити це від-
ношення через $-m^2$, себто $\frac{f(d)}{f'(d)} = -m^2$. Так само
 $\beta < x_0$, тому $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} > 0$, що означимо $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = n^2$

Отже наші рівності матимуть вигляд:

$$x_0 - d_1 = +\frac{h^2 m^2}{2} \cdot \frac{f''(d+th)}{f(d)} ; \quad \beta_1 - x_0 = +\frac{k^2 n^2}{2} \cdot \frac{f''(\beta-\vartheta k)}{f(\beta)}$$

Ми бачимо, що знак різниці $x_0 - d_1$ і $\beta_1 - x_0$ ця-

коли залезити від знаку відповідних відношень вартостей
 той дрітх похідних до срукції. Ми вже бачили, що
 для того, щоб Нютоніві наближення були підхо-
 дили до правдивого розв'язку, треба, щоб нове на-
 ближення α , було все ж таки менше x_0 , а β , - більше x_0 .
 Тому треба, щоб різниці $x_0 - \alpha$ і $\beta - x_0$ були додатні.
 Але, як бачимо, можливе тоді, коли математичні
 значення відношень в правих частинях рів-
 ностей були однакового знаку. Седто, коли:

$$\begin{aligned} f''(\alpha + \theta h) & \text{ буде однакового знаку з } f''(x) \\ \text{і } f''(\beta - \kappa h) & \text{ " " " з } f''(\beta) \end{aligned}$$

ми ставили умовою, що $f''(x)$ зберігає сталий
 знак в границях $\alpha \rightarrow \beta$, то очевидно, що знаки
 вартостей 1) $f''(\alpha + \theta h)$ і $f''(\alpha)$ 2) $f''(\beta - \kappa h)$ і $f''(\beta)$ мають
 бути однакові й тому нашу умову можна за-
 писати так:

Коли за способом Нютона ми з якоюсь на-
 ближення з одержимо нове, то воно буде ближ-
 чим до справжнього розв'язку тоді, коли висліди
 втевок $x = \xi$ у саму функцію та її дрітх по-
 хідну будуть однакового знаку.

I Якщо умова зазначена вище не викону-
 ватися, то приймосьби користатися під-
 борного правила.

II Ми при виводі варту Нютона користули-
 ся тим, що вважали границі α і β дуже близь-
 кими до розв'язку. Якщо цього не було, то ці
 межі завжди можна зближити в такий спо-
 сіб.

Хай α і β є нижня і верхня границі. Вставивши цю границю у функцію маємо завжди дані різні знаки. Візьмемо їх середнє арифметичне $\frac{\alpha+\beta}{2}$ і вставимо його у функцію, тоді може бути три випадки:

- 1) коли $f(\alpha) < 0$; $f(\beta) > 0$; $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) = 0$ знайти розв'язок $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$
- 2) коли $f(\alpha) < 0$; $f(\beta) > 0$; $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) > 0$, тоді розв'язок міститься між вартостями α і $\frac{\alpha+\beta}{2}$, це є нові границі.
- 3) коли $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$, $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) < 0$, тоді розв'язок міститься між вартостями $\frac{\alpha+\beta}{2}$ і $f(\beta)$, це тоді є нові границі.

Отже ми границі намі зближимо. Коли цього мало, то беремо нове середнє арифметичне, напр., для границь:

$$\alpha \text{ і } \frac{\alpha+\beta}{2} = \gamma, \text{ маємо } \frac{\alpha+\gamma}{2} = \delta$$

тоді, або δ - є розв'язок, або маємо ще ближні границі:
або α і δ , або δ і γ і т.д.

Приклад. $x^3 + x - 5 = 0$

Легко переконатися самого вставлюючи, що рівняння має один з розв'язків в границях 1 і 2.

$$f'(x) = 3x^2 + 1; \quad f'(1) = 4; \quad f'(2) = 13$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 6x \\ f'(1) = -3 \\ f''(1) = 6 \end{array} \right\} \text{різні знаки} \quad \left. \begin{array}{l} f(2) = 5 \\ f''(2) = 12 \end{array} \right\} \text{однакові знаки}$$

Отже способом Ньютона можна скористатися лише для верхнього наближення, а для нижнього будемо користатися підбором правих.

$$\text{I } \alpha_1 = \alpha + \frac{(\beta - \alpha) f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\beta)}$$

$$\text{II } \beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

$$\alpha_1 = 1 + \frac{1 \cdot (-2)}{-3 - 5} = 1 + \frac{2}{8} = 1,375$$

нові границі $\alpha_1 = 1,375$, $\beta = 2$

$$f(\alpha_1) = -1,0254, \quad f(\beta) = 5$$

$$\alpha_2 = 1,375 + \frac{0,625 \cdot -1,0254}{-1,0254 - 5} = 1,48384$$

$$f(\alpha_2) = -0,24916, \quad f(\beta) = 5$$

до нові границі $\alpha_2 = 1,48384$, $\beta = 2$

$$\alpha_3 = 1,48384 + \frac{0,51616 \cdot -0,24916}{-0,24916 - 5} = 1,50834$$

$$f(\beta) = 5, \quad f'(\beta) = 13$$

$$\beta_1 = 2 - \frac{5}{13} = 1,615385 \dots$$

$$f(\beta_1) = 0,60355, \quad f'(\beta_1) = 8,82840$$

$$\beta_2 = 1,54707$$

$$f(\beta_2) = 0,24989$$

$$f'(\beta_2) = 8,18033$$

$$\beta_3 = 1,51652$$

і т.д. Поки-що ми одержали наближення до 0,01.

Візьмемо ще приклад (задач. Бертрама)

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

$$\text{Мут } \alpha = 2; \beta = 2,1; \quad f'(x) = 3x^2 - 2; \quad f''(x) = 6x$$

$$f''(x) - \text{ в переміненні } \alpha \text{ і } \beta - \text{ додатна, а } f(x)_{x=\alpha} = 8 - 4 - 5 = -1;$$

$$f(x)_{x=\beta} = 9,261 - 4,2 - 5 = 0,061. \text{ Отже для нижньої границі}$$

користуємося підборною правилом, а для верхньої способом Ньютона й маємо:

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{(\beta - \alpha) f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\beta)} = 2 + \frac{0,1}{1,061} = 2,0942; \quad \beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = 2,1 - \frac{0,061}{11,23} = 2,0945$$

Корівностей обидва наближення, ми можемо твердити, що вагтість: $x = 2,094$ є наближеною вагтістю x з наближеністю до 0,001.

Обчислення сум одночленів ступінів розв'язків рівняння.

§58. Основні симетричні функції.

В §27 ми довели терез рівностей:

$$S_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n = (-1)^2 \frac{a_2}{a_0}$$

$$S_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_5 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = (-1)^3 \frac{a_3}{a_0}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_n = x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Цей терен рівностей (функцій) має особливу важливість, що не змінює свої вартості, коли будемо переставляти одні змінні на місця других. Такі функції звуться симетричними.

Всі наведені функції ще складено й так, що в кожному їх член окреме змінне входить не вище як у першому ступені. Такі симетричні функції звуться основними.

Очевидно, що перший же член кожної функції цілком визначає її характер, а тому основні симетричні функції умовилися скоротено записувати так:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots = \sum x_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = -A_1$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots = \sum x_1 x_2 = (-1)^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_0} = (-1)^2 A_2$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots = \sum x_1 x_2 x_3 = (-1)^3 A_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n A_n$$

де $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ відповідно рівні з: $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \frac{\alpha_3}{\alpha_0}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_0}$.

§59. Первісні симетричні функції й розкладення на них кожної симетричної функції.

Хай дано якусь симетричну цілу функцію від змінних $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Якийсь один з її членів буде:

$$P x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$$

Наша функція є симетричною, то разом з цим членом в неї увійдуть всі ті, що одержуються від усіх можливих переставок по три з даних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$. Між цими членами ми зможемо відібрати й такі, що одержуються з даного члену $P x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$ шляхом також всіх можливих переставок, а саме:

$$P(x_1^4 x_2^6 x_3^8 + x_2^4 x_1^6 x_3^8 + x_3^4 x_2^6 x_1^8 + \dots)$$

Ця нова функція, яку ми відокремимо, є такою симетричною й має назву первистої

Максимо взавши якийсь другий, мен даної ф-ції, напр.

$$Q x_1^4 x_2^6 x_3^8$$

ми також відокремимо нову первисту функцію і т.д. Продовжуючи такі відокремлення первистих функцій далі, ми можу цілу симетричну функцію зложити розкладати як суму первистих симетричних функцій.

Очевидно, що всі члени коїсної первистої симетричної функції містять однакове число змінних і є виразами однакового ступіня. Отже кожна первиста симетрична функція є однорівнірною й кожна з таких функцій відрізняється від інших ступінем і числом змінних, що її складають. Напр.

$$x_1^3 x_2^2 x_3 + x_2^3 x_1^2 x_3 + \dots \quad (a)$$

є первистою функцією трьох змінних 6^{го} ступіня.

Ми вже бачили, що знаючи один з членів первистої функції ми знаємо можливі переставки маємо всі члени її. Тому кожен первисту функцію можна записати так, як основну, при чому за основний член її вибирають той, що має 1) індекси в порядку зростаючих натуральних чисел, а 2) коєний показатель наступної змінної не більший попереднього. Напр., дану первисту функцію (a) можна записати так: $\sum x_1^3 x_2^2 x_3$

Знаючи одиницю степенів розв'язків цілої функції.

Хай $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ є розв'язки даної цілої функції:

[illegible]

Ці взори мають назву взорів Ньютона й дають можливість визначити значення сум $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ через счленики $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ й навпаки. Напр.

$$f_1 = -\frac{a_1}{a_0} ; f_2 = (-1)^2 \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{a_0^2} ; f_3 = (-1)^3 \frac{a_1^3 + 3a_0a_1a_2 - 3a_0^2a_3}{a_0^3} \quad \text{i m. d.}$$

Пример. $x^3 - 3x + 1 = 0$

Мы найдем: $a_0=1$; $a_1=0$; $a_2=-3$; $a_3=1$. Тогда:

$$J_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0} = 0; \quad J_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2} = 6; \quad J_3 = x_1 x_2 x_3 = 3$$

§ 61. Взаємні протона дають можливість однесено-
вати суми ступнів розв'язків не вище $(n-1)$ го.

Знайдемо ще спосіб обчислення сум білих ви-
соких ступнів. Розкладемо функцію (II) на x^k , де
 $k=0, 1, 2, \dots$, тоді матимемо:

$$a_0 x^{n+k} + a_1 x^{n+k-1} + a_2 x^{n+k-2} + \dots + a_{n-1} x^{k+1} + a_n x^k = 0$$

Будемо вставляти по черзі розв'язки рівняння $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ і одержимо через нестугинні тождествностей, які взаємно додаємо, а саме:

$$\begin{aligned} & a_0 x_1^{n+k} + a_1 x_1^{n+k-1} + a_2 x_1^{n+k-2} + \dots + a_{n-1} x_1^{k+1} + a_n x_1^k = 0 \\ + & a_0 x_2^{n+k} + a_1 x_2^{n+k-1} + a_2 x_2^{n+k-2} + \dots + a_{n-1} x_2^{k+1} + a_n x_2^k = 0 \\ & \vdots \\ & a_0 x_n^{n+k} + a_1 x_n^{n+k-1} + a_2 x_n^{n+k-2} + \dots + a_{n-1} x_n^{k+1} + a_n x_n^k = 0 \end{aligned}$$

$$a_0 s_{n+k} + a_1 s_{n+k-1} + a_2 s_{n+k-2} + \dots + a_{n-1} s_{n+1} + a_n s_n = 0 \quad \therefore (\bar{V})$$

Це рівняння дає можливість визначити суму
($n+k$)-их ступінів розв'язків через суми менших

Значит.

$$\text{Можно } k=3. \quad \delta_6 - 3\delta_4 + \delta_2 = 0; \quad \delta_6 - 3 \cdot 18 - 3 = 0 \quad \delta_6 = 57$$

$$\text{Можно } k=2. \quad \delta_7 - 3\delta_3 + \delta_2 = 0; \quad \delta_7 + 9 + 6 = 0 \quad \delta_7 = -15$$

$$\text{Можно } k=1. \quad \delta_4 - 3\delta_2 + \delta_1 = 0; \quad \delta_4 - 3 \cdot 6 + 0 = 0 \quad \delta_4 = 18$$

$$\text{монотонно: } \delta_1 = 0; \quad \delta_2 = 6 \quad \delta_3 = -3$$

$$\text{Можно } k=0; \quad \delta_2 - 3\delta_1 - 3 = 0 \quad (50 \delta_0 = n = 3). \quad \delta_1 \text{ монотонно}$$

$$\delta_{3+k} - 3\delta_{k+1} + \delta_k = 0$$

$$\text{линейное уравнение: } x^{3+k} - 3x^{k+1} + x^k = 0. \quad \text{Значит:}$$

$$\text{линейное уравнение: } x^3 - 3x + 1 = 0$$

Минимум. Обозначим сумму $4,5 \pm 6$ суммируя про-

и м.д.

$$\text{а значит: } \delta_{n+1} = \delta_1 \delta_n + \delta_2 \delta_{n-1} + \dots + \delta_{n-1} \delta_2 + \delta_n \delta_1$$

$$a_0 \delta_{n+1} + a_1 \delta_n + a_2 \delta_{n-1} + \dots + a_{n-1} \delta_2 + a_n \delta_1 = 0$$

$$\text{Значит: } k=1, \text{ значит:}$$

$$\text{В } \delta_1 = -\frac{a_1}{a_0}; \quad \delta_2 = -\frac{a_2}{a_0}; \quad \dots \quad \delta_n = -\frac{a_n}{a_0}$$

$$\delta_n = \delta_1 \delta_{n-1} + \delta_2 \delta_{n-2} + \dots + \delta_{n-1} \delta_1 + n \delta_n$$

тогда получим соотношение между δ_n , а значит:

В то же время δ_n обозначим как δ_n , то есть

$$\text{В } \delta_0 = x_0^3 + x_0^2 + x_0 + \dots + x_0 = n$$

$$a_0 \delta_n + a_1 \delta_{n-1} + a_2 \delta_{n-2} + \dots + a_{n-1} \delta_1 + a_n \delta_0 = 0$$

$$\text{Итак, при } k=0, \text{ значит:}$$

значит, что δ_n может быть $k=0, 1, 2, 3, \dots$

§§	Зміст.	Сторінка
	Вступ	
1	Загальне розуміння числа.	3
2	" " "	4
3	" " "	10
4	" " "	11
5	" " "	12
6	" " "	12
7	" " "	14
8	Дія множення.	17
9	Дія корінювання.	19
10	Злучно-числі числа.	24
11	Основні висновки.	25
12	Геометричний образ злучного числа.	26
13	Нормальна форма злучного числа. Дії над злучними числами.	28
14	Дія додавання.	30
15	" віднімання.	33
16	Здобуток злучних чисел.	34
17	Ділення.	36
18	Степенювання.	37
19	Корінювання.	38
20	Критеріуми вживання вказу мюавра.	39
	Розділ I	
21	Ціла функція.	40
22	" "	41
23	" "	44
24	Розклад цілої функції.	47
25	Розклад цілої функції на множників за допомогою її роз.	48
26	" " "	50
27	Залежність між розкладами функції та її множників	52
28	Злучні розклади.	52
29	Кратні розклади.	55
30	Властивості кратних розкладів.	55
31	Спільний найб. дільник цілої функції та її нахилої	58
32	Відокремлення кратних розкладів.	59
33	Розв'язання рівнянь. Двоженні рівняння.	62
34	Рівняння 3 ^{го} ступеня	67

35	"	"	"	68
36	Аналіза розв'язків в тій же випадкові, коли рівняння 3 ^о ступіня має реальні корені.			71
37	Рівняння 4 ^о ступіня.			75
	Розділ II			80
	Розкриття раціональних дробів			"
38	Відокремлення цілої частини.			"
39	Розкриття дробів функцій, що мають реальні розв'язки.			81
40	Розкриття дробів f-ї, таменатель яких має уявні розв.			84
41	Визначення коренів в сумі розкриття дробу f-ї.			88
	Розділ III			99
	Тілові рівняння			"
42	Уявні реальних розв'язків тілового рівняння.			100
43	Спосіб Ньютона відокремлення верх. гран. додатних роз.			102
44	Спосіб Ламбера.			105
	Тіло розв'язків цілої функції.			111
45	теорема Декарта.			"
46	"	"		117
47	Основна теорема реальних роз. цілої функції.			119
48	теорема Ролля.			121
49	теорема О'Р'є-Бюданса.			122
50	функції Штурма.			128
51	Основні властивості функцій Штурма.			130
52	"	"	"	131
53	теорема Штурма.			132
	Обчислення розв'язків цілої функції.			136
54	Обчислення раціональних розв'язків.			137
55	"	"	"	140
	Обчислення невцілюваних розв'язків.			145
56	Підборне правило (regula falsi).			146
57	Спосіб Ньютона.			148
	Обчислення сум однакових ступенів роз. рівняння.			155
58	Основні симетричні функції.			155
59	Первісні симетричні функції й розкладення на них кожної симетричної функції.			156
60	Суми однакових степенів розв'язків цілої функції.			157
61	"	"	"	159
	Зміст			161

Українське Видавниче Товариство

СІЯЧ

-
1. Проф. др. Я. Ярема. Вступ до філософії.
 2. Лект. др. Гончарів-Гончаренко. Загальна гігієна.
 3. Проф. С. Русова. Теорія педагогіки на основі психології.
 4. Проф. Л. Білський. Українська народна поезія.
 5. Лект. Ф. Гуля. Теорія векторів.
 6. Проф. Є. Іваненко. Пропедевтика вищого рахунку.
 7. Проф. Є. Іваненко. Аналітична геометрія у просторі.
 8. Лект. Д. Чижевський. Логіка.
 9. Проф. др. А. Старков. Загальна біологія.
 10. Лект. В. Січовський. Історія всевітнього мистецтва.
 11. Лектор І. Кабачків. Політична економія.
 12. Проф. Є. Іваненко. Алгебрична аналіза.
 13. Проф. Є. Іваненко. Диференціальне числення.
 14. Лект. Д. Чижевський. Вибір із творів найважливіших філософів.
 15. Проф. др. Сімович. Староболгарська граматика.
 16. Проф. др. Сімович. Хрестоматія староболгарського й українського письменства.
 17. Лект. Гр. Омельченко. Ввід до словознавства.
 18. Проф. С. Русова. Дидактика.
 19. Проф. М. Лорченко. Експериментальна фізика.
 20. Лект. А. Животько. Домашнє виховання.
 21. Лект. П. Герасименко. Основи термодинаміки.
-

Адреса видавництва:

PRAHA-SMÍCHOV, MALATOVA ULICE ČIS. 19./III.