

Ч. 133

На правах рукопису.

[515(02)].

О. ВІЛІНСЬКИЙ.

Інженер, професор Української Господарської Академії в Ч. С. Р.

Курс Нарисної Геометрії

читаний в Українській Господарській Академії в Ч. С. Р.



1925.

ПОДЄБРАДИ.

Видання „Видавничого Т-ва при Укр. Госп. Академії в Ч.С.Р.“

Накладом Укр. Госп. Академії та „Вид. Т-ва при У. Г. А.“

676

36624

Ч. 133

На правах рукопису.

[515(02)].

О. ВІЛІНСЬКИЙ.

Інженер, професор Української Господарської Академії в Ч. С. Р.

КУРС НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

читаний в Українській Господарській Академії в Ч. С. Р.

1925.

ПОДЄБРАДИ.

Видання „Видавничого Т-ва при Укр. Госп. Академії в Ч.С.Р.“

Накладом Укр. Госп. Академії та „Вид. Т-ва при У. Г. А.“

§1. ВСТУП.

Подібно до кожної грамотної людини, що добре читає літери, або музики, що розбирає ноти, кожний техник мусить розбиратись у викресах, уміти добре "читати" їх.

Малюнок, зроблений маляром, яскраво і вірно уявляє собою предмети його оточення, його барви, але не дає того, що найголовніше для техника — не дає розмірів самого предмета. А коли нема розмірів, то не можна побудувати й предмета. Цю важливу для техника частину дає викрес, азбука техника, без якої він не може виконати свого завдання. Викрес вимагає уяви. Бо викрес не дає відразу точного уявлення про самий предмет. Виробити в собі геометричну уяву, а також вивчитись складати самі викреси, вчить нас НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ. Вона вчить нас як викреслюються предмети на аркуші паперу, користуючись правилами геометрії на площі та в просторі /планіметрія та стереометрія/.

Коли порівнювати нарисну геометрію та викрес, як це ми тільки що робили в дисциплінах для інших фахівців, то можна сказати, що викрес для техника все одно, що ноти для музики, письмо для письменника, а нарисна геометрія все одно, що теорія музики, або теорія словесности. Як і в цих обох науках в нарисній геометрії є, на перший погляд, де що дрібязкове; або зайве, але кожна дрібниця необхідна для висвітлювання більш важливого; без тих дрібниць не буде ясно все, що необхідно для витворення викресів.

Нарисна геометрія походженням своїм сягає в далеке минуле. Усі древні будівничі уживали при своїх працях викресів, а для вироблення їх несвідомо користались засадами нарис. геом. В середніх віках вже появились де-які праці в цій галузі науки, але перший, хто зібрав весь матеріал, та звів її в струнку систему, був професор математики француз Сазаргд Монпе /1786-1816/. З того часу багато вчених поширили обсяг цієї науки й довели її до сучасного стану.

Перед тим як почати викладати правила нарисної геометрії, пригадаємо собі де-які закони геометрії, що будуть необхідні нам для точного висвітлення самих законів нарисної геометрії.

Головним чином це торкається точки, прос-

тої, та площі та їх взаємного положення.

Через кожні дві точки можна повести тільки одну просту /1/

Кожні три точки, що не лежать на одній простій, знаходяться на одній площі /2/

З цього висновки: проста та точка по-за нею, завжди лежать у одній площі /3/

або дві прості, що перехрещуються в одній точці, лежать завжди в одній площі /4/

Те саме відноситься й до двох рівнобіжних простих - вони завжди лежать в одній площі . . /5/

Правила 2,3,4 та 5 можна висловити ще так:

Одна і тільки одна площа може бути поведена:

а/ через три точки, що не лежать на одній простій /6/

в/ через просту та точку по за нею /7/

с/ через дві перехрещені прості /8/

д/ через дві рівнобіжні прості /9/

Коли прості лежать в одній площі, то вони можуть:

а/ перехрещуватися тільки в одній площі. /10/

в/ бути між собою рівнобіжними.

Коли ж прості не лежать в одній площі, то вони не перехрещуються, але можуть бути або рівнобіжні, або мимобіжні.

Найкоротшим віддаленням між такими простими буде прям до обох простих /11/

Взаємне положення простої, та площі можуть бути такі:

а/ проста перетинає площу і в такому випадкові маємо тільки одну точку перетину /спільну в площі/ /12/

в/ проста рівнобіжна з площею /не має спільних точок/

с/ проста лежить на площі /усі її точки спільні з площею/

Відзнака рівнобіжності простої з площею є та, що в площі мусить лежати проста, рівнобіжна з даною /13/

Відзнакою пряма до площі є те, що він рівночасно є прямом не менше як до двох простих, що поведені на площі через точку перетину пряма та площі /14/

Взаємне положення двох площ може бути таким:

а/ дві площі перетинаються між собою, і мають одну, і тільки одну просту перетину /15/

в/ дві площі рівнобіжні між собою і не мають спільних ні точок, ні простих.

Дві площі прямі між собою тоді, коли обидві площі мають прості, прямі між собою . . . /16/

Три площі, як що вони перетинаються, мають

одну і тільки одну спільну точку, через яку проходять всі три прости перетину площ між собою /17/

Дві рівнобіжних площі перетинаються третьою по прости рівнобіжних /18/

Дві площі, прямих між собою, перетинаються третьою, прямою хоч би до однієї з площ, по прости прямих між собою /19/

Кут по між простою та площею вимірюється так: з довільної точки A простої спускаємо прям на площу /рис. I, таб. A /, знаходимо точки перетину B - простої та площі і C , - пряма та площі, тоді $\angle ABC = \angle \alpha$, який уявляє собою кут нахилу простої до площі; $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$ /20/

Двостінний кут, створений двома площами, що перетинаються між собою, вимірюється кутом, створеним простими перетину цих площ з площею прямою до простої перетину даних площ. /21/

Перед тим, як розпочати викладати самі закони нарисної геометрії, дуже корисно буде нагадати ще де-які способи геометричного креслення.

а/ Поділ відтинку AB простої на n частин робиться так /рис. II, табл. A / з точки A /або B / під довільним кутом ведеться проста AS , на якій відкладається n /5/ довільних, але рівних між собою відтинків / $A1, 12, 23, 34, 45$ і т.д. / остання точка /5/ сполучається з B /а/ і ведеться через точки $1, 2, 3, 4, 5$ і т.д. прості рівнобіжні з $5B$ /5а/ Точки перехрестя цих рівнобіжних з простою AB - точки C, D, E, F і будуть точками поділу простої AB на n /5/ рівних частин.

в/ Повести просту через дану точку A та через точку B перехрестя двох прости, коли B лежить поза площею рисунку /рис. III, табл. A / . Через точку A ведемо дві довільних прости AC , та AD і з довільної точки E /або F /, що лежать на даних прости - $EF \parallel CD$, та $EG \parallel AC$ і $FG \parallel AD$. Проста AG проходить через точку B .

Де можна викреслити ще в другий спосіб /рис. IV, табл. A /: з точки A спускаємо прям CD , та EF на дані прості. Проста, що поведена через точку A - пряма до FD , проходить також через точку B .

с/ Повести через точку B перехрестя двох даних прости / B лежить по-за межами рисунку / просту рівнобіжну з даною простою AC /рис. V, табл. A / . Ведемо довільну просту DE і через точку D ведемо просту $DE \parallel AC$ і просту $EF \parallel 3.4$. Через точку F ведемо просту $FG \parallel AC$. На простій DE знаходимо точку K при умові, що $DE = KE$. і проста $KL \parallel AB$ буде проходити через точку B .

д/ Сполучити між собою точки перехрестя A і B прости 1.2 та 3.4 /А / та 1.5 та 3.6 /В /, коли

A і B лежать по-за межами рисунку /рис. VI, табл. A /.

Через довільну точку C простої I.3 ведемо прості $CE \parallel 1.2$ та $CD \parallel 1.5$. Проста AB проходить через точку $G \parallel DE$. Точка G знаходиться в пропорції $1.G : 1.F = 1.3 : 1.C$. Як що C переполовинює відтинок I.3, то точка F переполовинює відтинок 1.G

е/ Переполовинити кут, вершина якого A лежить по-за межами рисунку /рис. VII, табл. A /.

Ведемо до бока 1.2 рівнобіжні прості 4.5 та 6.7, а до другого боку 3.4, на тих самих віддаленнях / a та b / рівнобіжні прості 4.8 та 6.9. Проста 4.6 проходить через вершок A та переполовинює даний кут.

ф/ По даному боку " a " нарисувати правильний многокутник /рис. VIII, табл. A /. З точок A і B , як з осередків, закреслюємо дуги $A6$ та $B6$, лучем $AB = a$. Ділимо дугу $A6/B6$ на шість рівних частин і відкладаємо ці частини від точки 6 на прямі спущеному з точки 6 на просту AB . Точки 6, 7, 8, 9, 10, 11 та 12 будуть осередками кол, описаних коло правильних: шестикутників, сьомикутників, восьмикутників, дев'ятикутників, десятикутників, одинадцятикутників та дванадцятикутників боки яких рівні " a ".

з/ По даному боку " a " нарисувати правильний п'ятикутник /рис. IX, табл. A /; з точки A або B боку a ставимо прям AF і відкладаємо $AF = \frac{a}{2}$; сполучаємо точки F з B і від точки F відкладаємо $FG = AF = \frac{a}{2}$. З точки B/A на продовженні AB відкладаємо $BH = BG$. Тоді $АН$ буде косиною правильного п'ятикутника, бік якого $= a$. Викреслення самого многокутника ясно в рисунку, при чому треба мати на увазі, що $AD = AC = BE = BD = AH$ і $AB = BC = CD = DE = EA = a$.

При студіюванні нарисної геометрії треба мати на увазі, що уся подія при розв'язанні задач, ведеться у простороні. Тому треба виробити собі добру здібність уявлення всієї події, як вона відбувається у простороні. Спочатку, коли нема ще потрібної для того звички, треба накреслити розв'язок всієї задачі у простороні, а вже потім приступати до рисунку. З часом таке попереднє викреслювання буде зайвим, а залишиться лише уява. Без попереднього розв'язання задачі /за допомогою викреса, або уяви/ студіювання нарисної геометрії буде утрудненим.

§2. ПРЕДМЕТ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Як що ми маємо яку небудь площу, то вона може бути нам корисною для визначення точок, простих, площ та тіл, що знаходяться у простороні.

Через точку, наприклад, можна провести довільну просту і точкою перетину цієї простої з площею можна користуватися для визначення самої точки. Дійсно, при данному нам напрямі простої та положенню площі кожній точці у простороні відповідає тільки одна точка на площі /42 §1/.

Будемо надалі називати ту площу, відносно якої фіксується положення предмету у простороні - площею мету, ті прості, що визначають самі предмети - метовими простими, а точку перетину метових простих з площею мету - метами.

Як що кут нахилу метових простих до площі мету різниться від 90° , то маємо метод скосного метування.

Коли ж цей кут рівняється 90° і всі метові прості будуть прямі до площі мету, то матимем метод прямого або ортогонального метування. Метові прості переходять тут у метові прямі.

При метуванні системи точок можна уживати двох засобів. Або усі метові прості будуть рівнобіжні між собою, або вони збігатимуться в одній точці. Перший метод можна рахувати як окремий випадок другого, бо можна прийняти, що точка до якої збігаються усі метові прості, лежить на безконечно далекому віддаленню.

Таким чином маємо ще два методи метування: метод рівнобіжного метування, та метод осередкового, або центрального метування.

При одній площі мету, як це ми бачили вище, кожній точці у простороні відповідає тільки один мет. Але, коли маємо мет, то при одній площі мету, йому відповідає багато точок у простороні. Дійсно, як що з мета точки провести метову просту /прям/, то на цій простій лежить багато точок, а де саме наша-ми не довідаємося, поки не матимемо додаткових даних.

При метуванні котами, себ-то при одній площі мету, дається додатково віддалення точки від площі мету, себ-то висота її положення.

Другий засіб ясного уявлення точного положення точки у простороні - це користування не одною, а кількома площами мету, взаємне положення яких точно усталене.

Найясніший рисунок ми маємо при двох, або трьох площах мету - взаємно прямих. Більш точний

рисунок, який дає точні розміри усіх трьох вимірів предмета, матимемо при трьох площах мету; у більшості ж випадках вистарчить двох площ мету.

З рівнобіжним метуванням на одну площу мету ми ознайомимся в відділі котів /пряме метування/, аксонометрії /скосе, та пряме метування/.

Осередкове метування на одну площу мету, це перспектива, або центральне метування.

Головна частина цього курсу складається з рівнобіжного, прямого метування на дві, або три площі мету: загальний відділ, перетин тіл, теорія тіней /почасти також осередкове метування/.

При прямому метуванню найчастіше уживається двох взаємно прямих площ мету: поземі / H / та доземі / V /; проста їх перетину / OX /, по положенню своїйому позема, називатиметься віссю метів. При визначенню її ставитимемо зліва літеру O , справа

X .

Приймемо такі визначення: точки у просторі будемо визначати через великі літери латинського альфавету / A, B, C, D, E і т.д./, поземі їх мети малими літерами того-ж альфавету / a, b, c, d, e і т.д./, а доземі мети тими самими літерами, що й поземі мети, тільки з індексами 1 / a', b', c', d' і т.д./.

Прості у просторі дві великими літерами латинського альфавету / AB, CD, EF ... і т.д./, а мети маленькими літерами того-ж альфавету: поземі без індексів / ab, cd, ef ... і т.д./, а доземі з індексами 1 / $a'b', c'd', e'f', g'h'$... і т.д./.

Площі визначатимемо у просторі останніми великими літерами латинського альфавету / P, Q, R, S, T, U, X, Y /.

Як визначатимемо мети елементів площ - про те скажемо нижче.

У наступному, коли це не буде окремо зазначено, будемо викладати пряме метування на дві площі мету, взаємне положення яких визначено вище.

Як що в нарисній геометрії говориться, що маємо точку, просту, або площу, то це визначає, що данні мети цих елементів, а коли треба знайти ці елементи, то треба відшукати їх мети.

A. ПРЯМЕ МЕТУВАННЯ

§ 3. ТОЧКА.

Коли ми зметуємо точку A /рис. I, табл. I/ на дві площі мету, то одержимо два мети: поземий a та доземий a' . Метові прями Aa, Aa' в залежності від того, на яку площу мету вони метують точку, називатимемо: поземим метовим прямом / Aa /, та доземим метовим прямом / Aa' /.

Коли ми маємо тепер два мети точки, то можемо з певністю сказати, що цим двом метам відповідатиме в простороні тільки одна точка, бо дві простиhi /метові прями/ перехрещуються тільки в одній точці /10, §1/. Таким чином система двох метів точно установлює положення точки у простороні.

Поведемо через два метових прями площу /метову/, яка повинна бути прямою до обох площ мету /16, §1/, а тим самим і до простої перетину OX . Метова площа перетне площі мету по простиhi na та na' . Не важко побачити, що $na \parallel na'$, бо проста aa' до H , і тим самим $\parallel$ з V , а понеже aa' і na лежать в одній площі /метовій/, то вони повинні бути рівнобіжними. Теж саме відноситься і до простої aa' та na' . Виходить, що $aa'na'$ є прямокутник і що $aa' = na'$ та $aa' = na$.

Користуватися таким рисунком, який уявляє з себе рис. I, табл. I, не зручно, бо усе тут показане, як воно відбувається у простороні, показано у зміненому вигляді, а тому не всі виміри відповідають дійсності. Тому припускається у нарисній геометрії де яка умовність, а саме обертають одну з площ мету навкруги вісі OX до того, щоб та площа злилася з продовженням другої площі мету. Тоді весь рисунок буде лежати в одній площі, площі рисунку, і весь він буде ясний. Або опускають площу V вниз, як це показано стрілками на рис. I, табл. I. Ми будемо триматися другого засобу, будемо обертати позему площу мету H до того, щоб вона прийшла в положення H' , і утворила б з площею V одну площу рисунку. Разом з площею H' повертається й все, що на ній нарисовано, всі мети та метові прями. Потім зовсім опускають контури метових площ, а залишають на рисунку вісь мету OX , метові прями та мети. Такий взірець викресу звється рисунком, або епюром.

Коли ми переведемо мет a , та просту na на площу H' , то з одної точки n будемо мати дві простиhi na та na' . Проста na' пряма до площі H' себто до вісі OX , яка лежить в цій площі. З другого боку проста na пряма до площі V , і до простої OX , яка лежить теж і в цій площі. З цього висновок, що в злитому положенню площ мету VH' простиhi na та na' творять одну просту aa' , що сполучує обидва мети точки і є прямою до OX .

Де ґрунтовне правило нарисної геометрії можна висловити так: ОБИДВА МЕТИ РОЗНОЇ ТОЧКИ ЛЕЖАТЬ НА ПРЯМІ ДО ВІСІ МЕТУ.

Що собою уявляють ці прями, на яких лежать мети точки?

Прям $na' = aa'$, себ-то поземо-метовому прямую, а прям $na = aa'$, себ-то доземо-метовому прямую, і ми

*або площу H'

маємо, що над віссю буде лежати поземо-метовий, а під віссю доземо-метовий прям.

Рис. 3, табл. I уявляє собою рисунок, або епюр. Тут ми маємо вісь мету OX , та мети точок, сполучених метовими прямими. Як би взяти цей рисунок та зігнути по вісі OX так, щоби верхня та нижня частини його стали під прямим кутом, то мали би дійсне положення метів, та площ мету у простороні.

Уявимо собі, що наші площі мету продовжені /рис. 2, таб. I/, тоді вони поділяють просторинь на чотири частини, себ то на чотири двостінних кута: I, створений площами V та H ; II, між площами V та H_1 ; III, між площами H_1 та V_1 та IV - між площами V_1 та H . Ті чотири кута рахують розміщеними у простороні так, що око глядача знаходиться у першому куті.

Можна метувати точки, що знаходяться у кожному куті, рисунок же випрацюується при умові, що наша позема площа HH_1 обертається навкруги OX у той спосіб, що площа H зливається з площею V_1 , а площа H_1 з V . На рисунку ми одержимо тоді для II, III та IV кутів положення метових прямих зворотнє тому, на що було зауважено вище, себ то поземі метові прямі перейдуть у низ, під вісь OX , а доземі над вісь OX .

Умовимося рахувати напрямок метових прямих додатним тоді, коли поземий відкладається ввєрх над OX , а доземий - коли він одкладається вниз під OX і від'ємним, коли поземий відкладається вниз під OX а доземий ввєрх над OX .

Це має особливе значіння у тих випадках, коли точки даються цифрами, напр. точка $A /6,4/$ - це визначає, що поземо-метовий прям повинен бути відкладений ввєрх над OX і мати 6 лінійних одиниць, а доземо метовий прям відкладається вниз + 4 одиниці. Точка $B /6,-4/$ має обидва прямі над віссю, точка $C /-6,-4/$ має прямі з протилежним напрямком /поземий вниз, доземий догори/ і точка $D /-6,4/$ має обидва прямі внизу, під віссю. Цей метод дуже полегчить уяснення положення точок у всіх чотирьох двостінних кутах.

Рис. 3, табл. I уявляє собою епюр, де визначені положення точок у всіх чотирьох кутах рис. 2, таб. I.

Перші чотири точки A, B, C, D - це точки, які лежать в середині кутів. Для них можна скласти таку таблицю:

/Див. табл. на стор. II/.

Табл. I.

Точка	Кут, де вона знаход.	Н а п р я м о к	
		поземо-мето- вого пряма	доземо-ме- тового пря- ма.
A	I	+	+
B	II	+	-
C	III	-	-
D	IV	-	+

З цього ясно, що знак при метовому прями, зразу дає вказівку до якого саме кута належить точка.

Коли точка лежить на площі мету, то сама вона уявляє з себе і мет на ту площу, а довжина відповідного метового прями буде 0. Другий мет буде лежати на прями до другої площі мету, який весь лежить у першій площі мету, таким чином другий мет повинен знаходитися на частині спільній обом площам мету, а саме на вісі мету OX .

Мети таких точок E, F, G, K показані на рис. 3, таб. I і для них можна скласти таку таблицю:

Табл. I.

Точка	На якій площі мету.	Кути	Напрямок мет. прями	
			Поземого	Доземого
E	позем.	I, IV	0	+
F	дозем.	I, II	+	0
G	позем.	II, III	0	-
K	дозем.	III, IV	-	0

Точка L лежить на вісі мету OX , себ-то відразу на обох площам мету, тому вона уявляє собою обидва мети, а обидва метові прями будуть 0.

§ 4. ПРОСТА.

Мети простої AB можна знайти таким чином. Ведемо через неї /рис.4, табл.І/ метові площі: позему P , та дозему Q . Позема метова площа перетне площу мету H по простій ab /І5 § І/. Це й буде поземий мет простої AB . Також одержимо й доземий мет $a'b'$, як просту перетину площ Q та V .

Кожна точка A, B і т.д., що лежить на простій, матиме метові прямі у тій же самій метовій площі / P або Q /, що метують просту, тому зрозуміло, що МЕТИ ТОЧОК, ШО ЛЕЖАТЬ НА ПРОСТИХ, ЛЕЖАТЬ НА ВІДПОВІДНИХ МЕТАХ ПРОСТИХ, ТА НА ОДНОМУ ПРЯМІ ДО ОЖ.

Коли ми умістимо прості в чотирьох двостінних кутах, то матимемо те саме правило знаків напрямку метових прямих, що й для точки. Для більшої ясности, введемо ще одну умову. Будемо приймати, що наші геометричні /з двома вимірами/ площі мету не прозорі і що око глядача знаходиться у першому куті. Тоді все, що знаходиться у II, III та IV кутах буде для глядача закрите площами V та H . Ми будемо бачити, таким робом, всі мети що відбиваються на площах V та H , а все що відбито на площах V , та H , буде для нас закрите. Те, що бачимо, будемо рисувати тяглими лініями, а що закрите - крапкованими. Іншим словом мети простих, що мають напрямки метових прямих ДОДАТНІ, рисуватимемо ТЯГЛИМИ, а мети з ВІД'ЕМНИМ напрямком метових прямих - КРАПКОВАНИМИ.

На рис.5,6,7,8 таб.І показані мети простих; що знаходяться в різних двостінних кутах, та в різних положеннях відносно площ мету. На рис.5 показаний I кут, рис.6 - II, рис.7-III та рис.8 -IV кут. Для ясности на всіх рисунках мети простих, що знаходяться в однаковому положенню відносно площ мету, вазначені тими самими літерами.

Проста AB має довільне положення у просторі. У першому куті /рис.5/ метові прямі усіх її точок мають знак $+$, тому поземий мет лежить під, а доземий над віссю і нарисовані тяглими лініями. Для другого кута /рис.6/, поземий її мет має знак у метових прямих /доземних, див.табл.І/ — і тому його треба нарисувати крапкованою лінією. Дійсно, мет цей лежить на площі H , яку ми умовились уявляти невидимою. Доземий мет лежить на площі V , має додатній напрямок метових прямих, та рисується тяглим. Проста AB у третьому куті /рис.7/, аналогічно точці C /рис.3, табл.І/, що теж лежить у тому самому куті, має обидва напрямки метових прямих

від'ємні /див.табл.І/, тому мети її рисуються крапкованими, поземий над, та доземий під віссю OX . Нарешті у четвертому куті /рис.8/ проста AB має, зворотньо до другого /табл.І/ напрямки метових прямих: поземого - від'ємний /доземий мет крапкований/ і доземого - додатний /поземий мет тяглий/.

Коли проста рівнобіжна з однією з площ мету, то одна з метових площ теж буде рівнобіжна з тою самою площею мету, а понеже дві рівнобіжні площі /метова, та площа мету/ перетинаються третьою /другою площею мету/ по простих рівнобіжних /І8, § 1/, то один з метів простої повинен бути рівнобіжним з віссю OX . Як що проста рівнобіжна з $POZEMOY$ площею мету, то $DOZEMII$ мет є рівнобіжний з OX , коли проста рівнобіжна з $DOZEMOY$ площею мету, то $POZEMII$ її мет рівнобіжний з OX .

На рис.5,6,7 та 8 проста CD рівнобіжна з доземом, а проста GH з поземом площами мету, а тому поземі мети простої CD , а також доземі мети простої GH рівнобіжні з віссю OX .

Коли проста лежить у площі мету, то вона сама уявляє один з метів, а другий мет, як це було у випадку з точками /точки E, F, G, H рис.3, таб.І/, лежить на вісі мету OX . Проста EF лежить на поземій площі мету, /рис.5 у I та IV кутах, рис.7 у II та III кутах/, або на доземій площі мету /рис.6 у I та II кутах, рис.8 у III та IV кутах/.

Проста JK РІВНОБІЖНА З ВІССЮ МЕТУ, тому обидва її мети РІВНОБІЖНІ З OX . /Рис.5,6,7 і 8/.

Коли проста ПРЯМА ДО ЯКОЇ НЕБУДЬ ПЛОЩІ МЕТУ, то МЕТ ІЇ НА ТУ ПЛОЩУ ПОВИНЕН ЗБІГТИСЯ У ОДНУ ТОЧКУ, А НА ДРУГУ ПЛОЩУ МЕТУ ЦЯ ПРоста ЗМЕТУЄТЬСЯ ПРЯМОМ ДО ОСІ OX . Такий випадок маємо на рис.5,6,7 та 8, де проста MN пряма до поземої площі мету, а проста PS до доземої.

Проста ПРЯМА ДО ВІСІ OX метується на обидві площі мету ПРЯМАМИ ДО OX . Такий випадок маємо представлений на рис.9, таб.ІІ; при чому обидві прості мають однакові літери тільки в ріжним порядком. /Уявіть собі напрям обох простих у простороні./

Проста AB метується /рис.30, табл.V/ на площу H метом ab . Як що ми через точку A поведемо просту $AD \parallel ab$, а тим самим $AD \perp BV$, то матимемо прямокутний Δ , де

$$AD = AB \cdot \cos \alpha$$

$$AD = ab$$

$$ab = AB \cdot \cos \alpha$$

Це значить, що мет певного відтинку простої ab рівен самому відтинку AB помноженому на $\cos$ кута нахилу простої до площі мету.

В загальному випадкові $\cos \alpha < 1$; тому ^{мет} відтинку простої завжди менше самого відтинку, і він не визначає цю дійсну довжину самого відтинку.

Щоб $AB = ab$ треба щоб $\cos \alpha = 1$, себ-то другими словами треба, щоб проста була рівнобіжна з площею мету. Як довести просту до такого положення буде сказано у дальшому.

З виразу $ab = AB \cos \alpha$, при $\cos \alpha = 0$ ($\alpha = 90^\circ$) себ-то коли проста пряма до площі мету, виходить, що $ab = 0$, мет не є проста, а точка, як це ми бачили на рис. 5, 6, 7, 8 таб. I.

§ 5. СЛІДИ ПРОСТОЇ.

Слідом простої будемо називати ТОЧКУ ПЕРЕТИНУ її з ПЛОЩЕЮ МЕТУ.

Довільна проста MN має два сліди /рис. 10, табл. II/, бо вона перетинає обидві площі мету: по-тому в точці A - ПОЗЕМНИЙ СЛІД ПРОСТОЇ, та дозему в точці B - ДОЗЕМНИЙ СЛІД ПРОСТОЇ.

Поземний слід простої лежить на поземній площі мету, тому він уявляє собою також й поземний мет сліда, доземний мет цього сліда повинен лежати на вісі мету OX . З другого боку слід простої це є одна з точок самої простої, тому мети її повинні лежати на метах самої простої. Те що тільки що було сказано про поземний слід, цілком стосується й до доземного сліда простої.

Як що треба знайти сліди простої CD /рис. II, табл. II/, то розв'язання цієї задачі таке:

Спочатку знайдемо поземний слід A .

Доземний мет цього сліду лежить на вісі OX , та на доземному меті простої $C'a'$, себ-то на перехресті a' мета $C'a'$ з віссю OX . Поземний мет /а також і сам слід/ сліда лежить на поземному меті ca а також на прямій до OX , спущеному з точки a' , бо два мети однієї точки завжди лежать на прямій до OX . Тому поземний мет сліду буде точка, а перехрестя поземного мета простої ca та пряма до OX - $a'a$. Поземний мет A є разом і поземний слід A .

Доземний слід B простої CD має поземним метом точку, що одночасно лежить на поземному меті ca простої, та на вісі OX , /бо ця точка лежить на доземній площі мету, тому має поземний мет на OX /. Це буде точка перехрестя ca та OX ; точка B . Доземний мет цього сліда лежить одночасно на доземному меті простої $C'a'$, та на прямій до OX з точки B . Це буде точка перехрестя цих протих, точка

. θ' , яка разом з тим й є доведеним слідом B .

Довільна проста перетинає площі мету, себ-то має свої сліди, або у одному двостінному куті, або в двох, в залежності від напрямку самої простої. Проста CD рис. 11, табл. II має сліди у першому двостінному куті, бо вона перетинає площі мету у цьому куті. Проста CD рис. 12, табл. II спочатку зустрічає дозему площу V , а потім вже позему площу H у другому куті, тому доземий слід її B лежить у першому, а поземий слід A у другому двостінних кутах.

Проста CD рис. 13, табл. II, навпаки: спочатку зустрічає позему площу мету H у першому куті, а потім вже дозему площу мету V у четвертому куті, тому поземий слід її A лежить у першому, а доземий B у четвертому двостінних кутах. Розв'язання задачі рис. 12 та 13 табл. II аналогічно розв'язанню задачі рис. 11 табл. II.

Якщо проста рівнобіжна з якою небудь площею мету, то зрозуміло, що перетину простої з цією площею не може бути, тому нема у такої простої двох слідів, а тільки один.

Коли проста рівнобіжна з ПОЗЕМОЮ площею мету /проста GH рис. 5, 6, 7, 8, табл. I/, то поземого сліду нема, а існує лише один слід ДОЗЕМИЙ; коли ж проста рівнобіжна з ДОЗЕМОЮ площею мету /проста CD рис. 5, 6, 7, 8, табл. I/, то доземого сліду не існує, а є лише ПОЗЕМИЙ слід простої.

Проста рівнобіжна з віссю мету Ox , себ-то рівнобіжна з обома площами мету, зовсім їх не перетинає; тому така проста слідів зовсім немає.

Проста пряма до одної з площ мету, тим самим рівнобіжна з другою площею мету, тому така проста має лише один слід, який збігається з точкою, що уявляє собою другий мет такої простої /прості MN та PS рис. 5, 6, 7 і 8, табл. I/.

Сліди простих AB рис. 9 табл. II, котрих ці прості мають по два, знаходяться за допомогою засобів, про які буде сказано нижче.

§6 ВЗАЄМНЕ ПОПОЖЕННЯ ПРОСТИХ

У простороні прості можуть бути рівнобіжні між собою, перехрещуватись в одній точці, та бути мимобіжними.

Якщо поведемо через рівнобіжні прості метові площі, то матимемо дві рівнобіжні площі /метові/ перетяті третьою /площею мету/. Такі площі перетинаються по простих, рівнобіжних /18 § I/. Прості перетину метових площ з площею мету, то-ме-

ти простих; тому можна висловити таке положення: РІВНОБІЖНІ ПРОСТІ МАЮТЬ ОДНАКОВІ МЕТИ РІВНОБІЖНИМИ, або зворотно РІВНОБІЖНІСТЬ ОДНАКОВИХ МЕТІВ ПРОСТИХ ВИЗНАЧАЄ РІВНОБІЖНІСТЬ ПРОСТИХ У ПРОСТОРОНІ.

Зрозуміло, що ця відзнака має слухність тоді, коли і поземі мети рівнобіжні між собою, і доземі мети теж рівнобіжні між собою, рівнобіжність поземих /або доземих/ метів, сполучена з мимобіжністю доземих /або поземих/ метів не є відзнака рівнобіжності тих простих у простороні.

На рис. 14 табл. II прості AB та CD рівнобіжні, бо і поземі й доземі мети рівнобіжні, проста E не рівнобіжна з ними, хоча доземі мети й рівнобіжні, але поземі мимобіжні.

Коли прості перехрещуються у простороні, спільна їх точка належить кожній простій, тому виходить, що мет цієї точки лежить одночасно на обох метах простої, себ-то на їх перехресті. Понеже мети однієї точки повинні лежати на одному прямі до OX , то одержуємо таку відзнаку перехрестя простих у простороні: ТОЧКИ ПЕРЕХРЕСТЯ ОДНАКОВИХ МЕТІВ ПРОСТИХ ЛЕЖАТЬ НА ПРЯМІ ДО OX .

Якщо та відзнака не виконана на рисунку, то прості мимобіжні, вони не перехрещуються у простороні.

Прості AB та CD /рис. 15, табл. II/ перехрещуються у простороні, бо перехрестя їх метів, точки e і e' лежать на прямі до OX і уявляють собою мети спільної для обох простих точки E , яка є точкою перехрестя простих AB та CD . Прості KI та ML мимобіжні, бо точка перехрестя, напр. поземих метів уявляє собою поземий мет не одної спільної точки, а двох точок R та T , що лежать на обох простих; теж саме відноситься і до спільної точки доземих метів, - це є доземий мет двох точок Q та S .

Перехрещені прості створюють між собою кут, який метується взагалі не в дійсному свому вигляді. Кут гострий може мати метами кути гострі, або тупі, так само тупий кут може метуватись або гострим, або тупим кутом, в залежності від положення його боків у простороні.

Прямий кут НІКОЛИ НЕ МЕТУЄТЬСЯ НА ОБОХ ПЛОЩАХ МЕТУ ПРЯМИМ КУТОМ. Коли його боки рівнобіжні з площами мету, та на цю площу він метується прямим кутом, а на другу простою /рис. 33, 34, табл. V/. Якщо один з боків прямого кута рівнобіжний з площею мету, то на ту площу він аметується прямим кутом, на другу гострим або тупим, при чому один з боків рівнобіжно з OX . Дійсно, якщо через боки нашого кута поведемо метові площі, то ці дві площі будуть прямі між собою, бо поведені через два взаєм-

них пряма /16 § I/, то такі площі, перетинені третьою /площею мету/, дають у перетину прості прями між собою /19 § I/.

На рис. 31, табл. У маємо випадок, коли один з боків прямого кута рівнобіжний з площею мету, а саме: бік АВ рівнобіжний з поземою площею мету, на рис. 32, табл. У бік АВ рівнобіжний з доземою площею мету. В обох випадках один з метів прямого кута буде прямим.

§7. ДІЙСНА ДОВЖИНА ВІДТИНКУ ПРОСТОЇ.

В § 4 було сказано, що мет відтинка завжди менше самого відтинка і не уявляє його дійсної великості. Є кілька засобів знаходити по даних метях дійсну великість відтинку, що має велике значіння для розв'язання багатьох задач нарисної геометрії. Про деякі засоби буде сказано нижче; зараз звернемо увагу на один з них.

З рис. 30, табл. У видно, що відтинок простої, метові прями, та мет відтинка творять фігуру трапес, елементи якого, необхідні для його збудування, ми маємо на рисунку. Дійсно $\angle A\alpha\beta = \angle \alpha\beta B = 90^\circ$, мет $\alpha\beta$, та метові прями $A\alpha$ та $B\beta$ єсть на рисунку; тому ми можемо побудувати самий трапес і одержати бік АВ, себ-то дійсну довжину відтинку. На рисунку можна користуватися поземим метом, та поземотетовими прямими, або доземим метом та доземо-метовими прямими.

Рис. 54, табл. VIII дає розв'язання цієї задачі, причому розв'язано і для поземих і для доземних метів, та прямих. Зрозуміло, що при обох розв'язках дійсна довжина повинна бути однаковою.

Геометрично це робиться так: до одного з метів відтинку, напр. $\alpha\beta$, ставляться в точках α і β прями до $\alpha\beta$, та відкладається $\alpha A = \alpha'n$ та $\beta B = \beta'm$; відтинок АВ є дійсна величина. Для доземого мету $\alpha'\beta'$, відкладаються на прямих $\alpha'A = n\alpha$ та $\beta'B = m\beta$.

Можна полегшити розв'язання цієї задачі, рисуючи не трапес $\alpha A B \beta$ /рис. 30, таб. У/, а прямокутний трикутник ABD де $AD = \alpha\beta$ - метові, BD - різниці метових прямих $B\beta - A\alpha$. Протипрямка такого трикутника, обидві прямки якого можна взяти з рисунка, уявляє собою дійсну довжину відтинка.

На рис. 55, таб. VIII розв'язана ця задача. Тут $\alpha'A \perp \alpha'\beta$; $B\beta \perp \alpha\beta$; $\alpha'A = \beta m = \beta\zeta - \alpha\zeta$; $B\beta = \alpha'n = \alpha'\zeta - \beta\zeta$; A - дійсній довжині відтинка. На тому ж рисунку прямокутний трикутник ABD /рис. 30, таб. У/ побудований у інший спосіб. Продовжена проста $\alpha m (\beta n)$, відкладено відтинок $\alpha\zeta = \alpha'\beta'$ ($\beta'\zeta = \alpha\beta$); з точки ζ поведений прям до $\alpha\beta - \beta B$ (βA), а з точки β (α)

проста $B_0B_1(A_0A_1)$ рівнобіжна з OX . $AB_0(B_1A_0)$ - це буде дійсна довжина відтинку, бо тут побудований той самий прямокутний трикутник, що й раніш, тільки у інший спосіб.

§ 8. ПЛОЩА.

З геометрії відомо, що через кожну точку, через кожну просту можна провести площу, але через ці елементи можна провести безліч площ; тому ні точка, ні проста не дають точного визначення для даної площі.

Одну і тільки одну площу можна провести: через три точки, що не лежать на одній простій /6 § I/ через просту, та точку по за нею /7 § I/, через дві перехрестні прості /8 § I/, та через дві рівнобіжні прості /9 § I/.

Ці чотири способи визначення площі дійсно визнають тільки одну дану площу; вони й вживаються для цієї мети. Можна до них додати ще, що кожна плоска геометрична фігура теж може бути взята для визначення площі.

Ці способи визначення даної площі часто ускладняють виконання задач, а також і самий рисунок; тому введемо ще один засіб визначення даної площі.

Довільна площа P /рис. 16, таб. II/ перетинається з кожною площею мету по простих і, аналогічно тому, як це робилося вже у простих, називатимемо просту перетину даної площі з площею мету, слідом площі. Таким чином кожна довільна площа матиме два сліда: поземий P_p /проста перетину площі з поземою площею мету/, та доземий P_v /проста перетину площі з доземою площею мету/.

Площа P та дві площі мету мають спільну точку M , в яку сходяться усі три простих перетину /17 § I/, а саме обидва сліда, та вісь OX . Це є необхідна відзнака визначення площі слідами, а саме, що сліди даної площі збігаються в точку, що лежить на осі OX .

Поземі сліди площ ми визначатимемо великими літерами, як й саму площу, тільки з індексом h , а доземий з індексом v . поземий

Тут теж треба зазначити, що кут β , який творять сліди площі на рисунку, не відповідає дійсному куту α , що творять ті сліди у простороні, і завжди $\angle \beta > \angle \alpha$.

Площа P може бути продовжена на всі чотири двостінні кути і тут не трудно уявити собі, що вона перетинає позему площу мету у другому куті по продовженню поземого сліда P_p , а дозему площу мету у четвертому куті по продовженню доземого сліда P_v .

Ці сліди і на рисунку будуть творити дві простих $P_h P_h$ та $P_v P_v$ /рис. I7, табл. III/, які мають з віссю OX спільну точку M . Тут треба ужити знаків напрямку метових прямих, як це робилося для точок та простих і рисувати поземий слід площі у другому куті крапковою лінією, а також й доземий слід площі у четвертому куті.

Площі прямі до одної з площ мету мають другий слід прямим до осі OX . Це не трудно довести на засаді твердження I9 § I, а саме: площа пряма до поземої /доземої/ площі мету перетинається третьою доземою /поземою/ площею по простих прямих між собою, а ці прості будуть: вісь мету OX , та доземий /поземий/ слід площі.

Такі площі характерні тим, що все що лежить на ній, метується на ту площу, до якої вона пряма, на слід площі. Тому їх називають **МЕТОВИМИ** площами. Це площі Q та R рис. I7 таб. III / $Q \perp$ до поземої, $R \perp$ до доземої площ мету/. Кут α для цих площ рівен 90° а кут $\beta > 90^\circ$.

Площі рівнобіжні з площами мету теж можна назвати метовими, бо вони теж метують все на свій слід. Тільки у цих площ нема перетину з тією площею мету, з якою вони рівнобіжні і вони мають лише один слід. Такі площі S /рівнобіжна з поземою площею мету/ та T /рівнобіжна з доземою площею мету/ показані на рис. I7, табл. III, мають один слід рівнобіжний з віссю метів. Чому те так, виходить з того, що площа S / T / рівнобіжна з поземою /доземою/ площею мету перетинається третьою площею /доземою, або поземою площею мету/ по простих рівнобіжних, себ-то по простих S_v / T_h / та OX .

Площа U /рис. I7, табл. III/ рівнобіжна з віссю метів OX . Ця площа не може мати спільних точок з рівнобіжною з нею простою OX , тому сліди не можуть перехрещуватися з OX , а повинні бути з нею рівнобіжні.

Площа Y проходить через вісь OX і обидва її сліди зливаються з OX . Таке визначення подібної площі не дає точного уявлення про дану площу, бо через просту /вісь OX /, як це було сказано раніше, можна провести безліч площ. Тому у такому випадку додають ще одну точку, через яку проходить така площа. Точка a , a' та сліди Y_h , Y_v /рис. I7 таб. III/ вже точно установлять про яку саме площу йде мова.

Коли така площа переполовинює кут, створений площами мету, то вона зветься **СІМЕТРАЛЬНОЮ** і характерна її риса та, що метові прямі точки, яка визначає цю площу, рівні між собою. Сіметральна площа, що переполовинює перший та третій двостінні кути зветься **ПЕРШОЮ**, а та, що переполовинює другий та че-

твертий, ДРУГОЮ сіметральними площами. Перша та друга сіметральні площі прямі між собою.

Площа пряма до обох площ мету, а тим самим і до вісі мету OX , звється ПРОФІЛЬНОЮ площею. Вона теж метова площа. Сліди такої площі Z /рис. 17 таб. III/ прямі до вісі OX і творять одну просту. Кут α для таких площ $= 90^\circ$, а кут $\beta = 180^\circ$.

§9. ПРОСТА Й ТОЧКА НА ПЛОЩІ.

Коли проста AB лежить на площі P /рис. 18 таб. III/, то це визначає, що усі точки простої лежать на цій площі, а також й сліди простої. Разом з тим ці сліди, по самому розумінню поняття слідів, повинні знаходитися на площях мету, а коли точка знаходиться одночасно на двох площях, то вона повинна лежати на простій перетину тих площ P та H , або P та V /, у нашому випадку слідах P_h, P_v площі P .

Маємо таке твердження: СЛІДИ ПРОСТОЇ, ЩО ЛЕЖИТЬ У ПЛОЩІ, ОБОВ'ЯЗКОВО ЛЕЖАТЬ НА ВІДПОВІДНИХ СЛІДАХ ПЛОЩІ.

Це твердження дає нам змогу упевнитись у тому, що проста дійсно лежить на площі. На рис. 19 таб. III прості AB, CD, GH лежать на площі P , бо сліди цих простих лежать на відповідних слідах площі, проста-ж KL не лежить на площі, бо слід L не лежить на сліді P_h площі.

Коли повести площу Q рівнобіжну з доземою /поземою/ площею мету, то площа P перетне їх по простих рівнобіжних /18 § I/, себ-то $CD \parallel P_v$ / $EF \parallel P_h$ /. Проста CD (EF лежить в площі P і ми бачимо, що рівнобіжність з слідом P_v (P_h) тягне за собою рівнобіжність з доземою /поземою/ площею мету. Такі прості, користування якими полегшує у де-яких випадках розв'язання задач, називаються ГОЛОВНИМИ ЛІНІЯМИ ПЛОЩІ. Головну лінію рівнобіжну з поземою площею мету, а разом з тим з P_h називатимемо ПОЗЕМОМ площі, а головну лінію рівнобіжну з доземою площею мету, а разом з тим з P_v - ДОЗЕМОМ площі.

Один з метів головних ліній площі, якої простої рівнобіжної з площею мету, повинен бути рівнобіжний з віссю мету OX , другий мет, як простий рівнобіжний з слідом площі, повинен бути рівнобіжним з цим слідом. /Метами сліда площі, якої простої, що лежить на площі мету будуть: сам слід, та вісь мету/.

На рис. 20 таб. III нарисовані головні лінії площі P , а саме позем AB ($a'b, a'e'$), та дозем CD ($cd, c'd'$). Головні лінії площі, якої простої рі-

внобіжні з площами мету мають тільки один слід, який повинен лежати на відповідному сліду площі.

Часто необхідно мати напрямок слідів, або і самі сліди площі, коли вона визначена іншим способом. Напрямок слідів однаковий з напрямком головних ліній площі, а один з метів цих ліній рівнобіжний з OX . Це дає змогу легко розв'язати такі завдання.

Коли маємо площу визначену двома перекрещеними простими AB та CD /рис.21 таб. III/, то беремо на одній з простих AB точку $F(f, f')$ та ведемо через доземий мет ii f' просту рівнобіжну з віссю OX . Це буде доземий мет позема. Цей мет перекрещується з доземним метом $c'd'$ простої CD у точці Q , а поземий мет Q лежить на cd . Сполучивши точки f з Q , одержимо мети позема $fQ, f'Q'$, а напрям позема і сліда площі, буде однаковий з напрямком fQ . Дозем цієї площі cd, cd' знаходиться аналогічним способом.

В разі коли площа визначена двома рівнобіжними простими /рис.22 таб. III/, або плоскою фігурою /рис.23, табл. III - трикутником/ розв'язання завдання проводиться тим самим способом і ясне з рисунків.

Якщо треба визначити самі сліди, а не тільки їх напрямки, то це виконується так.

У випадку визначення площі двома перекрещеними простими AB та CD /рис.25 таб. IV/ треба пам'ятати, що сліди простих, які лежать на площі, знаходяться на відповідних слідах площі.

Знаходимо сліди простих AB та CD . Поземі сліди їх будуть $A(a, a')$ та $B(b, b')$, а доземі сліди $C(c, c')$ та $D(d, d')$; сліди площі повинні пройти через сліди простих; P_h через a і d , а P_v через b' та c' . Ці сліди P_h і P_v повинні перекреститися з віссю OX в точці M . Це буде перевірка чи вірно нарисована задача. Можна трохи полегшити виконання, а саме: знайти поземі /доземі/ сліди простих, провести P_h і через точку M та один з доземних слідів /поземних/ провести слід P_v .

У випадку, коли площа визначена простою CD / $cd, c'd'$ / та точкою $F(f, f')$ /рис.25 таб. IV/, то розв'язання завдання приводиться до попереднього. Вибираємо на простій CD довільну точку $E(e, e')$, сполучаємо F з G і через дві прості CD , та FE визначаємо сліди.

У випадку визначення площі двома рівнобіжними простими AB / $ab, a'b'$ / та CD / $cd, c'd'$ / /рис.26 таб. IV/, - або простою AB / $ab, a'b'$ / та точкою $F(f, f')$ /рис.26, таб. IV/, - виконання задачі зовсім аналогічно з попереднім.

Коли точка лежить на площі, то через неї

можна завжди повести просту, яка теж лежить в тій самій площі. Це єдиний засіб упевнитись, що точка лежить на площі.

Точка $E/e, e'$ /рис. 19, таб. III/, - лежить на площі P , бо мети f та f' лежать на відповідних метях cd та $c'd'$ простої CD , яка лежить у площі P .

Для упевнення того, що точка лежить на даній площі, беруть один з метів точки і шукають другий, при умові, щоб обидва мети лежали на метях простої, яка лежить у даній площі. Можна повести довільну просту, але далеко простіше вести одну з головних ліній площі.

На рис. 24, таб. III/ показано як по одному мету $a'(a)$ знайти другий мет $a(a')$ точки, що лежить на площі P , за допомогою довільної простої ED , позема AB , або дозема CA .

§ 10. ВЗАЄМНЕ ПОПОЖЕННЯ ПЛОЩ ТА ПЛОЩІ Й ПРОСТОЇ.

Площі у простороні або перетинаються, або розположені рівнобіжно одна до другої.

Перший випадок докладно буде розглянутий у § 11, тут зупинимось лише над ознакою рівнобіжності площ.

Площі рівнобіжні перетинаються третьою площею /площею мету/ по простих рівнобіжних /18, § I/ Такими простими перетину будуть сліди площ, тому **ОЗНАКОЮ РІВНОБІЖНОСТІ ПЛОЩ Є РІВНОБІЖНІСТЬ ОДНАКОВИХ СЛІДІВ ПЛОЩІ.**

Зворотньо, коли однакові сліди площ на рисунку рівнобіжні, то ці площі мію собою рівнобіжні у простороні.

Площі P і Q рис. 29, таб. IV рівнобіжні, бо $P_h \parallel Q_h$ та $P_v \parallel Q_v$. у твердженню 13 § I сказано, що проста рівнобіжна з площею мусить мати просту, яка лежить у площі та рівнобіжна з даною.

Для того, щоб переконатися, що це твердження здійснення-треба в даній площі повести просту рівнобіжну з даною. Це виконано на рис. 56 таб. VIII у випадку визначення площі слідами. Проста AB рівнобіжна з площею P , бо остання має на собі просту EF рівнобіжну з AB / $ab \parallel ef, a'b' \parallel e'f'$, e лежить на P_h , f' -на P_v . Проста CD не рівнобіжна з P , бо рівнобіжна з нею проста FG ($fg \parallel cd$ та $f'g' \parallel c'd'$) але ця проста не лежить у площі P / f на P_v , g -не на P_h /

На рис. 57, таб. VIII показане те саме, в разі визначення площі двома перехрещеними простими AB та AC . Проста KL рівнобіжна з площею, бо $KL \parallel BD$

$/kl||bd$ та $k'l' || b'd'/$, а проста BD лежить у площі, бо проходить через точки B та D , що лежать на площі. Проста MN не рівнобіжна з площею, бо рівнобіжна з нею проста EF не лежить на площі $/f'$ не лежить на ac /.

Коли проста не рівнобіжна з площею, то вона перетинається з нею у точці. Це дуже важливе питання про перетин площі з простою буде розглянуте у § 12, тепер зупинимось теж на важливій питанні — ознаці пряма до площі.

Маємо площу P , площу мету H і просту AB пряму до площі P .

Ведемо через прям AB метову площу S . Для площі пряма до H , а також до P , бо поведена через прям AB . Дві площі прямі між собою $/S \perp P/$ перетинаються третьою, прямою хоча до одної з них $/H \perp S/$ по простих прямих між собою $/H \perp S/$. Перетин P з H є слід площі P , а перетин S з H є мет ab пряма AB . Тому: ПРЯМ ДО ПЛОЩІ МАЄ МЕТИ ПРЯМИМИ ДО ВІДПОВІДНИХ СЛІДІВ ПЛОЩІ.

Ця ознака є дуже важлива, бо вона дає можливість повести прям до кожної даної площі. Крім того не треба забувати, що це є єдиний випадок, коли на обох площах мету мети простих творять прямий кут.

Коли ми знаємо напрямом метів пряма до площі, то можемо з кожної точки по за площею спустити, а з точки на площі поставити прям до площі.

На рис.27 таб.IV до даної площі P , визначеної слідами P_h, P_v з точки $A/a, a'/$ спущений прям $AB/a'b \perp P_h$ та $a'b' \perp P_v$, а з точки $C/$ по даному мету $c/$ за допомогою позема CD знайдений другий мет $c'/$, що лежить на площі P , встановлений прям $CF/c'f' \perp P_h$ та $c'f' \perp P_v$. На рис.28 таб.IV розв'язане те саме завдання у випадку, коли площа P визначена трикутником $ABC/a'bc, a'b'c'/$. Тут нам треба раніш знайти напрямом головних ліній площі P /позем $ae, a'e'$; дозем $cf, c'f'/$ і тоді повести прям $DG/dg \perp ae, d'g' \perp c'f'$; як що треба встановити прям з точки, що лежить на площі P , то по одному мету $/e/$ точки, за допомогою простої $JK/ik, i'k'/$ знаходимо другий мет $i'i/ e'/$ і встановлюємо прям $LM/lm \perp ae, l'm' \perp c'f'$.

Користуючись тим, що було сказано, розв'яжемо дві задачі, а саме: через дану точку поведемо площу рівнобіжну з даною, або пряму до даної простої.

Маємо площу P /рис.5I, таб.VII/ і точку $A(a, a')$ по за площею. Треба через точку A повести площу Q рівнобіжну з P . Коли площа Q поведена через точку A , то та точка повинна лежати на простій, що лежить у площі Q . Ведемо через точку A таку просту, найпростіше головну лінію, бо згори вже відомо напрямом метів тих головних ліній. На рисунку поведе-

ний позем, мети якого $a'b' \parallel P_h$, $a'b' \parallel ox$. Знаходимо слід B/b' цього позема, і через цей слід повинен пройти доземий слід Q_v площі Q . Площі Q та P рівнобіжні, тому однакові сліди повинні бути рівнобіжними. Через точку b' ведемо $Q_v \parallel P_v$, а через точку M ведемо $Q_h \parallel P_h$, задача розв'язана.

Хай маємо /рис.53, таб.VII/ просту $AB(a'b, a'b')$ та точку $C/c, c'$ по за нею і треба нам провести через ту точку C площу P пряму до простої AB . Так само, як і в попередньому випадку, через точку C ведемо одну з головних ліній нашої майбутньої площі P . Тут поведений теж позем, поземий мет якого $cd \perp a'b$, бо проста пряма до площі має мети прямі до відповідного сліда площі; доземий мет позема $c'd' \parallel ox$.

Знаходимо слід позема D і через нього d' ведемо слід $P_v \perp a'b'$, а через точку M слід $P_h \perp a'b \parallel cd$.

Площа P проходить через дану точку C /слід P_v через слід d' позема/ та пряма до простої $AB/a'b' \perp P_h$; $a'b' \perp P_h$.

§11. ПЕРЕТИН ПЛОЩ.

Дві площі перетинаються по простій /І5 § I/. Знайти просту - це знайти її сліди.

Площа P та Q /рис.35, таб.V/ перетинаються по простій AB . Попробуємо в'яснити де лежать і як знайти ці сліди.

Проста AB лежить на площі P , себ-то усі її точки, в тому числі й сліди, лежать на цій площі. З другого боку ми знаємо вже, що коли площа лежить на площі, то сліди такої простої лежать на відповідних слідах площі. Виходить, що сліди простої AB лежать на P_h та P_v .

Проста AB належить також і на площі Q , себ-то сліди цієї простої лежать на відповідних слідах площі P -на Q_h та Q_v .

Виходить, що поземий /доземий/ слід простої перетину площ P та Q лежать одночасно і на P_h/P_v і на Q_h/Q_v , себ-то він буде точкою A/B перехрестя тих слідів.

Маємо правило: СЛІДАМИ ПРОСТОЇ ПЕРЕТИНУ ДВОХ ПЛОЩ, БУДУТЬ ТОЧКИ ПЕРЕХРЕСТЯ ВІДПОВІДНИХ СЛІДІВ ПЛОЩ.

Користуючись цим правилом не трудно знайти просту перетину двох довільних площ P та Q /рис.36, таб.V/. Точка перехрестя A поземих слідів P_h та Q_h обох площ - це поземий слід простої перетину.

х/ Площа Q проходить через дану точку A /слід Q_v через слід b' позема/, та рівнобіжна з площею $P/P_h \parallel Q_h$; $P_v \parallel Q_v$.

Цей слід буде разом з тим поземим метом a сліда A ; доземий мет лежить на вісі OX - це точка a' . Перехрестя доземних слідів P_v та Q_v обох площ, точка B буде доземим слідом простої перетину, а разом з тим й доземим метом b' цього сліду, поземий його мет лежить на вісі мету OX - це точка b . Тепер ми маємо мети двох точок простої перетину AB , а тим самим й мети самої простої - це поземий ab , та доземий $a'b'$.

Обидва сліди простої перетину AB у цьому випадку лежать в першому двостінному куті, - можливий випадок, коли сліди знаходяться у інших кутах.

Такий випадок представлений на рис. 41, таб. VI. Доземий слід простої перетину лежить у першому куті, а для того, щоб знайти поземий слід треба продовжити поземі сліди P_h та Q_h поверх вісі OX , /напрямок від'ємний рисуємо крапками/ і тоді цей слід буде мати поземий мет з від'ємним напрямком, себ-то лежати у другому двостінному куті. Сполучаємо b з a / ba - від'ємний напрямок від b до a крапками, далі, тягло/, це буде поземий мет простої перетину, $b'a'$ - буде доземий мет цієї простої.

Площі рівнобіжні з площами мету, як ми вже раніш бачили, і, як це видно з рис. 35, таб. V, перетинає площу довільну по головних лініях цих площ. Тому, коли маємо довільну площу, перетяту площею рівнобіжною з поземою /доземою/ площею мету, то проста перетину буде позем /дозем/ площі.

Рис. 37, таб. V показує просту перетину площі P з площами рівнобіжними з поземою площею мету F та з доземою площею мету S . Для першого випадку простою перетину буде позем AD / $ad, a'd'$ / площі P , слід якого буде точка A перехрестя слідів P_h та T_h . Для другого випадку простою перетину буде дозем BC / $bc, b'c'$ / площі P , слід якого буде точка C перехрестя слідів P_v та S_v .

Проста перетину довільної площі P /рис. 43, таб. VI/ з площею Q , прямою до доземної площі мету, /доземо-метова площа/ знаходиться так, як це було тільки що показано; єдина різниця тут та, що доземий мет $a'b'$ простої перетину збігається з доземим слідом Q_v площі Q . Як що площа Q була б прямою до поземної площі мету, то збіг мета та сліда площі Q відбувся б на поземній площі мету.

Коли маємо випадок, показаний на рис. 42, таб. VI, себ-то коли поземі сліди двох площ рівнобіжні між собою, то матимемо в такому випадку тільки один слід простої перетину; другого сліду не буде, бо рівнобіжні сліди не перехрещуються. Проста, яка має тільки один слід, та лежить на даних площах, - проста їх перетину, - це може бути тільки одна з головних ліній площ.

На рис. 42, таб. VI $P_h \parallel Q_h$, а точка перехре-

стя P_v з Q_v - точка a' є єдиний доземий слід простої перетину. Це буде спільний позем обох площ AB / $a_b \parallel P_b \parallel Q_b$; $a'b' \parallel Ox$ /.

Можна висловитись так: ДВІ ПЛОЩІ, ПОЗЕМІ /ДОЗЕМІ/ СЛІДИ ЯКИХ РІВНОБІЖНІ, ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ ПО СПІЛЬНОМУ ДЛЯ ОБОХ ПЛОЩ ПОЗЕМУ /ДОЗЕМУ/.

Тепер перейдемо до більш складних випадків перетину двох площ, коли зразу на рисунку не можна знайти слідів простої перетину і коли треба замість того шукати які небудь інші точки цієї простої. Тут прийдеться користуватися третьою допомогою площею, користування якою полегшується тим, що ці три площі мають одну спільну точку, через яку проходять усі три простих перетину /17 § I/.

Такими допоможними площами найчастіше беруть площі прамі до площ мету /метові/, але у деяких випадках можна користуватися й іншими площами.

Наприклад маємо дві площі, одні з слідів яких не перехрещуються на площі рисунку. Це завдання можна розв'язати двома способами.

а/ На рис. 38, таб. VI маємо випадок, коли сліди P_b та Q_b не перехрещуються на площі рисунку. Одну точку перетину, - доземий слід $A/a, a'$ маємо; щоб нарисувати просту перетину, треба мати ще одну точку. Беремо допоможну площу S -, метову, рівнобіжну з доземою площею мету і знаходимо прості перетину її з площами P та Q . Це будуть доземи CD / $ca, c'd'$ / та EF / $ef, e'f'$ / площ Q та P . Прості CD та EF перехрещуються у точці G / g, g' / яка є спільною точкою для двох простих перетину /площ S та P і S та Q /, то через неї повинна проходити і третя проста перетину /площ P та Q / . Маємо таким чином дві точки $A(a, a'$ та $G(g, g')$ простої перетину площ P та Q , можемо нарисувати вже й мети її / $ag, a'g'$ /.

Можна взяти допоможну площу також рівнобіжну з поземою площею мету, але й тут можливі випадки не перехрещення поземів площ на площі рисунку; тому для даного випадку краще брати допоможну площу таку, як показано на рисунку. Коли доземі сліди площ не перехрещуються на площі рисунку, то допомогою площею краще вибрати площу рівнобіжну з поземою площею мету.

б/ Можна, користуючись тим, що рівнобіжні площі перетинаються третьою площею по простих рівнобіжних /18 § I/ взяти допоможну площу, рівнобіжну з однією з площ, так щоби сліди її перехрещувалися в слідами другої площі, знайти просту перетину двох останніх площ, та через відому вже точку повести просту рівнобіжну.

Маємо площі P та Q /рис. 39, таб. VI/ доземі сліди яких не перехрещуються на площі рисунку.

Одна точка /поземій слід/ простої перетину цих площ є точка $A/a, a'$. Для того, щоб знайти напрямок простої перетину, ведемо допоможну площу S рівнобіжну з Q / $Sb \parallel Qb, Sv \parallel Qv$ /. Знаходимо перетин площ P та S ; це буде проста $CD/cd, c'd'$, яка повинна бути рівнобіжною з простою перетину площ P та Q . Ведемо через a просту рівнобіжну з cd , і через a' рівнобіжну з $c'd'$. Проста $AB/ab, a'b'$ - це проста перетину площ P та Q .

Замість того, щоб вести площу S рівнобіжну з площею Q , можна повести її рівнобіжно з площею P ; вислідок буде однаковий.

Коли на площі рисунку обидві пари слідів площ не перекрещуються, то приходить ся користуватися двома допоможними площами, за допомогою кожної з тих площ знаходимо по одній точці простої перетину, а тим самим й саму просту. Тут можна користуватися або двома площами рівнобіжними з площами мету /знаходимо дві точки простої перетину/, або одною площею рівнобіжною з площею мету, а другою площею рівнобіжною з однією з даних /знаходимо одну точку та напрямок простої перетину/.

На рис.40, таб. VI ужито цього останнього способу. Перша допоможна площа S , рівнобіжна з площею мету дає нам точку $A/a, a'$ простої перетину площ P та Q . Друга допоможна площа R , рівнобіжна з площею Q / $Rb \parallel Qb, Rv \parallel Qv$ / дає напрямок простої перетину. Проста перетину площ P та Q , проста $AB/ab, a'b'$ є рівнобіжна з простою $EF/ef, e'f'$ перетину площ R та F / $ab \parallel ef, a'b' \parallel e'f'$ /

Площі рівнобіжні з віссю мету перетинаються по простій, теж рівнобіжній з віссю OX , так що тут напрямок простої перетину відомий згори; треба знайти одну тільки точку, через яку вона проходить. Найпростіше користуватися тут допоможними площами, прямими до площ мету.

На рис.44, таб. VI маємо дві площі P та Q , рівнобіжні з OX . Ведемо допоможну площу S , пряму до поземі площі мету і знаходимо прості перетину площ S та P - проста - $AB(ab, a'b')$ та площ S і Q - проста $DC(cd, c'd')$. Спільна для цих простих точка $E(e, e')$ буде також точкою, через яку проходить й третя проста перетину $EF(ef, e'f')$ площ P та Q / $ef \parallel e'f' \parallel OX$ /

На рис.52 таб. VII маємо випадок, коли точка $E(e, e')$ спільна для двох простих перетину площ S та P / $cd, c'd'$ / та площ S та Q / $ab, a'b'$ / лежить у другому двостінному куті /напрямок метових прямих від'ємний/ і сама проста перетину EF площ P та Q теж лежить у другому двостінному куті.

На рис.50, таб. VII маємо перетин площі P , рівнобіжної з віссю метів OX , та площі Q , рів-

нобіжної з поземою площею мету. Напрямок простої перетину буде рівнобіжний з віссю OX , а доземий мет ii , понеже площа Q є доземою метою, зіл'ється з Q_v . Для того, щоби знайти одну з точок простої перетину, користуємося допоможною площею S , прямою до поземої площі мету. Перетин площ S та P буде проста $AB / a'b'$; перетин площ S та Q буде проста $EF / e'f'$; спільна для всіх трьох простих перетину-точка $C / c, c' / i$ проста перетину площ P та Q проста $CD / c'd', c'd'$.

У випадку, коли усі сліди двох перетинених площ збігаються на вісі OX в точці M , то й проста перетину цих площ повинна пройти через точку M бо ця точка є спільними слідами цієї простої.

Для знаходження другої точки перетину двох подібних площ P та Q /рис.45, таб. VI/ користуємося допоможною площею S , прямою до поземої площі мету. Перетин площ S та P буде проста $AC / ac, a'c'$; а площ S та Q - проста $BD / bd, b'd'$; точка $E / e, e'$ буде спільною для всіх трьох простих перетину площ P, Q та S . Проста $EM / em, e'm'$ є простою перетину площ P та Q .

§ 12. ПЕРЕТИН ПЛОЩІ З ПРОСТОЮ.

Розв'язання цього питання має велику вагу для наступного викладу нарисної геометрії. Майже нема ні одного відділу, де б воно не вживалося.

Метод, яким розв'язується це питання такий:

Коли треба знайти перетин площі з простою, то через просту ведеться допоможна площа, найкраще пряма до площі мету, знаходиться перетин допоможної площі з даною. Проста перетину цих площ та дана проста лежать у одній /допоможній/ площі і повинні перехреститися. Точка їх перехрестя й буде точкою перетину площі з простою.

Дійсно ця точка лежить одночасно на даній простій і на даній площі, бо належить до простої перетину даної, та допомогової площі, а ця проста лежить у даній площі.

Пояснимо це на прикладах.

На рис.46, таб. VII маємо площу P , визначену слідами P_h, P_v і простою $AB / ab, a'b'$; треба знайти їх перетин.

Ведемо через просту AB допоможну площу. Цю площу треба вибрати так, щоб рисунок був найзручніший. Як що повести через просту AB поземо-метову площу, то поземі сліди допоможної та даної площ не перехрещуються на площі рисунку, тому простіше буде повести через просту AB допоможну площу S , пряму

до дозової площі мету /доземо-метову/. Перетин площ P та S буде проста $CD/cd, c'd'$. Прості CD та AB лежать в одній площі S , перекрещуються між собою у точці $E/e, e'$. Що таке точка E ? Мети її лежать на метах простої AB , тому вона належить до цієї простої. Одночасно точка E лежить на простій $CD/cd, c'd'$ перетину площ P та S ; тому ця точка належить також і площі P . Таким чином це є спільна точка для площі P та простої AB ; це є точка їх перетину.

Для випадку рис.59, таб.VIII допоможна площа S вибрана прямою до дозової площі мету, бо площа пряма до дозової площі мету дасть більш складний рисунок. Різниця по між тим рисунком та попереднім та, що один з слідів $D/d, d'$ простої перетину $DC/dc, d'c'$ площ P та S лежить у другому двустінному куті. Точка $E/e, e'$ є точкою перетину площі P простою $AB/ab, a'b'$.

Перетин площі P , рівнобіжної з віссю мету OX /рис.60 таб.VIII/ з простою $AB/ab, a'b'$ знайдений, користуючись допоможною площею S , прямою до дозової площі мету. Проста перетину площ P та S проста $CD/cd, c'd'$ перекрещується з даною простою $AB/ab, a'b'$ в точці $E/e, e'$ яка й буде точкою перетину площі P та простої AB .

Перетин довільної площі P /рис.61, таб.VIII/ з простою $AB/ab, a'b'$ рівнобіжною з віссю OX треба шукати, користуючись допоможною площею S або R рівнобіжною з дозовою /поземою/ площею мету. Перетин площ P та S буде дозем площі $P - CE/se, c'e'$; точкою перетину площі P та простої AB буде точка $E/e, e'$. Перетин площ P та R буде позем площі $P - DE/de, d'e'$.

Тепер перейдемо до випадків, коли площа визначається не слідами, а іншим засобом.

Коли площа P /рис.47, таб.VII/ визначена двома перекрестними простими $AB/ab, a'b'$ та $AC/ac, a'c'$, то хід розв'язання завдання такий самий. Ведемо через просту $KL/kl, k'l'$ допоможну площу S , пряму до дозової площі мету /поземий слід її нам не потрібний, тому ми його не рисуємо/. Ця площа перетинається з простою $AB/ab, a'b'$ в точці $D/d, d'$, а з простою $AC/ac, a'c'$ в точці $E/e, e'$. Проста $ED/ed, e'd'$ є простою перетину площ P та S , і точка $F(f, f')$ є точкою перетину площі P з простою KL .

Для розв'язання цього завдання можна користуватися також допоможною площею R , прямою до дозової площі мету. Площа R перетинається з площею P по простій $GH/gb, g'b'$, а точка $F(f, f')$ є точкою перетину площі P з простою KL .

На рис.48, таб.VII площа P визначається трикутником $ABC/abc, a'b'c'$, треба знайти точку перетину

ii з простою $DE/de, d'e'$. Ведемо через просту DE допоможну площу S , пряму до поземої площі мету, та знаходимо перетин цієї площі з боками AC /точка g, g' / та BC /точка f, f' / трикутника; проста $GF/gf, g'f'$ /це перетин площ P та S і точка $h/k, k'$ /є точкою перетину площі P з простою DE . Те саме одержимо користуючись допоможною площею R , прямою до доземої площі мету. $MN/mn, m'n'$ / - це проста перетину площ P та R ; $k/k, k'$ / - це точка перетину площі P та простої DE .

На рис. 48, таб. VII площа P визначена двома рівнобіжними простими $AB/ab, a'b'$ / та $CD/cd, c'd'$ / Треба знайти точку перетину площі P з простою $EF/ef, e'f'$ /.

Ведемо через просту EF допоможну площу S , пряму до доземої площі мету. Перетин цієї площі S з простою AB буде точка $h/k, k'$ /, а з простою CD точка $l/l, l'$ /; проста перетину площ P та S буде проста $KL/kl, k'l'$ /, а точкою перетину площі P з простою EF , буде точка $m/m, m'$ /.

Коли користуватися для розв'язання цієї задачі допоможною площею R , прямою до поземої площі мету, то одержимо точку $G/g, g'$ / перетину площі R з простою AB , точку $h/h, h'$ / перетину площі R з простою CD , просту $GH/gh, g'h'$ / перетину площ R та P і нарешті точку $m(m, m')$ перетину простої EF з площею P .

§13. ВИДИМІ ТОЧКИ.

Часто при користуванні метів многостінників повстає питання які частини їх покривають другі, себ-то питання про те, які частини видні, а які не видні. Многостінник може мати в простороні таке положення, що одна й та сама частина його на одній площі мету може метуватися, яко видима, а на другу навпаки. Тому треба розглядати окремо випадки для поземого, та окремо для доземого метів. Для вся праця зводиться до вияснення які з окремих точок видимі, себ-то до вияснення яка з точок закриває, мовляв, другу.

Ми приймемо, що при розгляданні метів наше око знаходиться на безконечно-далекому віддаленні від самої площі, а проміння зору мають напрям ПРЯМИЙ до площі мету. Так для поземої площі мету, око лежить НАД нею, а промінь зору падає сторч з гори на низ, для доземої площі мету око знаходиться ПЕРЕД площею, а промінь зору йде поземо, прямою до неї.

Як виявляються прикмети цього з'явища на сунку, можна побачити на рис. 62, таб. IX.

Спочатку розберемо поземі мети. Маємо точки A та B , промінь зору S_1 йде сторч з гори на низ. Ці точки лежать на одному прями до поземі площі мету, тому їх поземі мети одна спільна точка a та b , але одна з них закриває другу, а яка саме, то видно ясно з того, що маємо на доземій площі мету. Точка A має довший поземо-метовий прям ніж точка B , з чого можемо зробити висновок, що точка A у простороні лежить вище точки B , себ-то точка A закриває точку B . Мет a лежить на меті b , а не навпаки, тому ми бачимо a , а не бачимо b .

Для поземого мету можемо висловити таке правило: З ДВОХ ТОЧОК, ЩО ЛЕЖАТЬ НА ПРЯМІ ДО ПОЗЕМОЇ ПЛОЩІ МЕТУ, ВИДИМИЙ ПОЗЕМІЙ МЕТ МАЄ З НИХ ТА, ПОЗЕМО-МЕТОВИЙ ПРЯМ ЯКОЇ ДОВШИЙ.

Мет a /рис.63, таб. IX/ буде видимий, а мет b невидимий, бо $a'n > b'n$.

Як що звернутися до доземого мету, та його видимости, то розберемо положення точок C та D . /рис.62, таб. IX/.

Промінь зору S_2 має тут напрямок прямий до доземі площі мету і тут вже не трудно уявити, після попереднього пояснення, що точка C перекриває точку D . Тому для доземих метів можна висловити: З ДВОХ ТОЧОК, ЩО ЛЕЖАТЬ НА ПРЯМІ ДО ДОЗЕМОЇ ПЛОЩІ МЕТУ, ВИДИМИЙ ДОЗЕМІЙ МЕТ МАЄ З НИХ ТА, ДОЗЕМО МЕ-ТОВИЙ ПРЯМ ЯКОЇ ДОВШИЙ.

Для точок C і D /рис.63, таб. IX/, мет c' буде перекривати мет d' , бо $cm > dm$.

Все що було тільки що висловлено, в де-яких випадках полекшує нам розв'язання задач, та дає більш ясний рисунок. Користуючись тим можна з'ясувати як лежить проста, що перетинає площу, відносно тієї площі. Це все зроблено на рис.47,48,49, таб. VII. Напр. рис.47; візьмемо точки 5 та H /5 лежить на простій KL , H на AB / і ми бачимо, що $5'6 < h'6$; тому точка H для поземого мета перекриває точку 5. Так само точка 4 /простої AC / перекриває точку 3 /простої KL /, бо $4'8 > 3'8$. Можемо висловитися: відтинок FL простої KL лежить під площею, яка визначена простими AB та AC . Той самий метод приводить до висновку, що й для доземого мету цей відтинок FL /себ-то мет $f'c'$ / лежить під площею, бо $27 > 1.7$. На рис.48 такі самі міркування привели до висновку, що площа, визначена трикутником ABC закриває відтинок KE на поземому меті, а на доземому, навпаки цей відтинок закриває площу. На рис.49 на обох метах відтинок MF лежить під площею.

Цей метод полекшує розв'язання задач, ще й в такому напрямку. Маємо дві площі /рис.64, таб. IX/, з яких одна визначена трикутником ABC / $abc, a'e'c'$ /, а друга чотирикутником $EFGH$ / $efgh, e't'e'h'$ /; треба знайти перетин цих площ.

Для розв'язання цієї задачі треба знайти перетин боків однієї фігури з другою, а потім навпаки боків другої фігури з першою. Аби уникнути зайвої праці, варто з'ясувати які з боків лежать так, що не перетинають другої фігури.

З рисунку ясно видно, що бік EH не перетинає трикутника, але про боки HG, GF, AB та AC , цього відразу сказати не можна. І тільки принципи цього параграфу дадуть нам змогу з'ясувати, що для певного мету бік $HG/bg/$ лежить під, а бік $GF/gf/$ лежить над трикутником; для доведеного мету маємо те саме, себ-то виходить, що ці боки чотирикутника не перетинають трикутник. Те саме знайдемо й для боків AB та AC . Але для бока EF , маємо для доведеного мету, що точка $N/n'/$ боку AB лежить нижче боку EF , бо $34 > n.4/$, а точка $M/m'/$ боку AC лежить вище боку EF бо $m.6 > 5.6/$; висновок, що EF перетинає трикутник ABC . Те саме маємо й для боку HG чотирикутника.

Перетин двох фігур є проста $PL/p'l, p'2/$.

§14. ОБЕРТАННЯ НАВКРУГИ ОДНОЇ ВІСІ, ПРЯМОЇ ДО ПЛОЩІ МЕТУ.

Для розв'язання деяких задач, необхідно знати дійсну довжину відтинка простої, або просту поставити в зручне для того положення. Це можна зробити кількома способами, один з яких є обертання системи навкруги вісі прямої до площі мету.

Спочатку розберемо випадок обертання навкруги одної вісі, а потім перейдемо до більш складного обертання навкруги двох вісей.

Уявимо собі точку A у простороні /рис.55, таб. IX/ і будемо обертати цю точку навкруги вісі BC , прямої до певної площі мету H . Для точки при обертанні буде посуватися в площі, прямій до вісі обертання BC , - в площі R , яка буде прямою до BC , а також прямою до доведеної площі мету U /бо $BC \perp H$, тим самим $BC \parallel U/$, та рівнобіжною з певною площею мету H . Точка A у простороні на площі R буде посуватися по колу, луч якого рівен віддаленню точки A від осі обертання BC , себ-то AD . Як що нам треба пересунути точку A в певному напрямку на кут α , то ця точка опише у простороні дугу кола, луча AD , та прийде у положення A_0 .

Подивимось по яких шляхах у той же час будуть посуватися мети точки A . Сама точка A посувається в площі R . Понеже ця площа рівнобіжна з певною площею мету /тим самим доведено-метова/, то все що лежить на цій площі метується певною у дій-

сному вигляді, а доземо на слід R_v рівнобіжний з віссю OX .

Шлях точки A у площі R є дуга кола /або коло, коли $\angle \alpha = 360^\circ$ /, він повинен метуватися поземо у своєму дійсному вигляді, себ-то теж дугою кола. Який же буде осередок, та луч цього кола? Осередок D кола шляху метується поземо в точці ϵ , а луч AD є рівнобіжний з поземою площею мету, тому мет його $ad = AD$. Висновок з цього: ПРИ ОБЕРТАННІ ТОЧКИ НАВКРУГІ ОСІ, ПРЯМОЇ ДО ПОЗЕМОЇ ПЛОЩІ МЕТУ, ПОЗЕМІЙ МЕТ ЇЇ БУДЕ ПОСУВАТИСЯ ПО ДУЗІ КОЛА, ОСЕРЕДОК ЯКОГО ЗЛИВАЄТЬСЯ З ПОЗЕМІЙ МЕТОМ ВІСІ ОБЕРТАННЯ, а луч є проста, що сполучає мет точки з метом ОСІ.

Доземий мет шляху зіл'ється з доземим слідом R_v , себ-то буде простою, поведеною через доземий мет точки, рівнобіжно вісі OX . Так що тільки що висловлене твердження про поземий мет шляху точки, можна ще доповнити так: ДОЗЕМІЙ МЕТ ТОЧКИ ПОСУВАЄТЬСЯ ПО ПРОСТІЙ РІВНОБІЖНІЙ З ВІССЮ OX .

Мети точки A у новому положенні A' підлягають основному закону про сполучення їх прямою до вісі OX і тому, коли відложимо на поземій площі мету дугу, що відповідає куту α , на який обертаємо точку, та знайдемо поземий мет ϵ' нового положення, доземий мет цього нового положення буде лежати на одному прями та на простій, рівнобіжній з OX , що поведена через попередній доземий мет.

Тут розглянуте обертання навкруги вісі, прямої до поземої площі мету. Як що ми мали б вісь, пряму до доземій площі мету, то для пояснення цієї події треба було би повторити усе вже висловлене, тільки поняття поземий замінити доземим, а доземе - поземим.

На рис. 66, таб. IX показане обертання точки A / a, a' / на кут α навкруги вісі BC / b, b' /, прямої до поземої площі мету.

Поземий мет a точки перейде по дузі aa' , кола з осередком ϵ , та лучем $a\epsilon$ в положення a' , в той же час доземий мет посувається по простій $a'a'$ рівнобіжної з віссю OX . Обидва мети повинні бути на одному прями до вісі OX , що дасть можливість по знайденому a' визначити a .

На рис. 67, таб. IX показано обертання на кут α системи двох точок A / a, a' /, B / b, b' / навкруги осі CD / c, c' / прямої до доземой площі мету.

Усе, що виконувалося у попередній задачі на поземій площі мету, тут треба перенести на дозему, і навпаки. Розв'язання задачі ясно з рисунку, причому треба прийняти під увагу, що для того, щоб не порушити системи, необхідно обертати обидві точки на однаковий кут, себ-то $\angle a'd'a = \angle b'd'b$. Точка B

перейде у нове положення до четвертого двостінного кута.

Коли треба обернути просту, то обертають дві довільних її точки, та сполучають нові положення цих точок; це й буде проста у новому положенню. На рис. 68, таб. IX показано обертання простої AB (a, b, a', b') на кут α навкруги вісі CD (c, d, c', d') прямої до поземної площі мету.

Взято дві довільних точки $A/a, a'$ та $B/b, b'$ на простій AB , та обернуто систему точок A і B на кут α , як це робилося у попередній задачі. Проста $A.B./a.b., a'.b'./$ уявляє собою просту AB повернену на кут α .

На рис. 69, таб. IX проста $AB/a, b, a', b'./$ за допомогою обертання навкруги вісі CD (c, d, c', d') прямої до поземної площі мету, приведена до положення рівнобіжного з поземною площею мету.

Тут взято під увагу те, що мет пряма $c'e'i$ в новому положенню буде прямий до мета $a'.b'$, а тому, що $a'.b'$ повинно бути рівнобіжним з віссю ox , то мет пряма $c'e'$ повинен бути прямим до ox . Як що переведемо $c'e'$ в положення $c'e_0$, то через точку e_0 ведемо просту, рівнобіжну з віссю ox , та від точки e_0 відкладаємо $a'e_0 = a'e'$, та $b'e_0 = b'e'$; тоді $a'.b'$ буде новий доземий мет простої AB . Поземий її мет у новому положенню буде $a_0.b_0$.

Для зменшення праці при обертанні простих, беруть вісь обертання сполучену з простою, себ-то цю вісь ведуть через якусь точку самої простої. Ця точка простої лежить на вісі обертання, тому вона й в новому положенні простої залишиться на місці, а нам треба знайти нове положення вже не двох, а одної точки простої.

Завдання попередньої задачі, тільки відносно доземної площі мету показано на рис. 70, таб. IX. Тут вісь обертання поведена через точку $A/a, a'$ самої простої $AB/a, b, a', b'./$.

Ново положення простої AB буде $AB./a, b., a', b'./$. Як що нам треба площу $P/P_h, P_v$ привести за допомогою обертання в положення пряме до поземної площі мету /рис. 71, таб. X/, то беремо вісь $AB/a, b, a', b'./$ яка лежить в поземній площі мету. Нам треба привести P_v до положення прямого до вісі ox ; слід P_h пройде й у новому положенню через точку b , бо ця точка лежить на вісі обертання. З точки a'/b' спускаємо прям на P_v і переводимо цей прям $a'b'$ в положення $c'a'$ та ведемо $S.P_v \perp ox$; це буде доземий слід P_h площі P у новому положенні. Поземий слід P_h пройде через точки S та b . Площа P в положенні прямому до поземної площі мету визначається слідами P_h, P_v .

На рис. 72, таб. X це саме зроблено для площі P , у випадку, коли площа визначена трикутником

$ABC/abc, a'b'c'$. Треба площу P перевести в положення пряме до дозової площі мету.

Поземий слід, а разом з тим усі поземі площі P повинні бути прямі до вісі ox . Знаходимо позем площі P ; це буде проста $CG/cg, c'g'$. Беремо за вісь обертання просту $DE/de, d'e'$ поведену через точку $C/c, c'$. Приводимо позем CG у положення пряме до дозової площі мету $cg \perp ox$ при чому його треба обернути на кут α , і на той самий кут обернемо точки A та B . Тоді нове положення трикутника ABC буде $A_0B_0C_0/a_0b_0c_0, a'_0b'_0c'_0$ і площа P буде прямою до дозової площі мету.

§15. ОБЕРТАННЯ НАВКРУГИ ДВОХ ОСЕЙ, ПРЯМИХ ДО ПЛОЩ МЕТУ.

Як що обертання навкруги одної вісі не вистарчає для повного вияснення питання, то уживають цей спосіб двічі: перший раз обертють навкруги вісі, прямої до одної з площ мету, а потім навкруги вісі, прямої до другої площі мету. Це сполучення поширює межі вияснення питання і в деяких випадках воно буває дуже влучно.

Подивимось на прикладах.

Маємо дві мимобіжних простих $AB/ab, a'b'$ та $CD/cd, c'd'$ /рис. 73, таб. X/; треба привести їх у таке положення, щоб проста AB була пряма до дозової площі мету. Спочатку приводимо усю систему в положення, при якому проста AB була рівнобіжна з поземою площею мету. Для того обертємо усю систему навкруги вісі, прямої до дозової площі мету. Цю вісь ведемо через точку A простої AB /на рисунку ця вісь не показана/, систему обертємо на кут α та приводимо мет $a'b'$ в положення рівнобіжне з віссю ox . Після цього першого обертання маємо такі нові положення $A_1B_1/a_1b_1, a'_1b'_1$, рівнобіжне з поземою площею мету, та $C_1D_1/c_1d_1, c'_1d'_1$.

Тепер обертємо нову систему навкруги вісі, прямої до дозової площі мету, що поведена через точку B , /теж на рисунку не показано/, на кут β і приводимо в положення $A_2B_2/a_2b_2, a'_2b'_2$ та $C_2D_2/c_2d_2, c'_2d'_2$.

Таким чином маємо просту A_2B_2 пряму до дозової площі мету, та другу просту C_2D_2 .

Цей випадок може бути корисним, як що треба знайти найкоротше віддалення поміж двома нерівнобіжними, та не перехрещеними простими. Як це зобразити, буде показано нижче /рис. 120, таб. XVII/.

Маємо просту перетину двох площ P та Q /рис. 74, таб. X/ $AB/ab, a'b'$ і по одній точці площі $P - C/c, c'$

та площі $Q-D / d, d' /$; треба привести площі в положення пряме до поземої площі мету.

Для виконання цього завдання треба привести просту AB , разом з точками C та D в положення пряме до поземої площі мету. Обертаємо попереду усю систему навкруги віссі, прямої до поземої площі мету /вісь на рисунку не показана/ на кут α до положення рівнобіжного з доземою площею мету. Нове положення усієї системи буде $A_1B_1 / a_1b_1, a'_1b'_1 /$ рівнобіжне з доземою площею мету, та точки $C_1 / c_1, c'_1 /$ та $D_1 / d_1, d'_1 /$.

Потім обертаємо усю нову систему навкруги віссі прямої до доземої площі мету /на рисунку не показана/ на кут β і приводимо просту A_1B_1 в положення пряме до поземої площі мету. Остаточне положення системи буде: проста $A_2B_2 / a_2b_2, a'_2b'_2 /$ пряма до поземої площі мету, та точки $C_2 / c_2, c'_2 /$ та $D_2 / d_2, d'_2 /$. Слід P_h площі P повинен пройти через слід простої перетину a_2 та через мет c_2 , а слід Q_h через b_2 та d_2 . Доземі сліди P_v та Q_v будуть прямі до вісі OX .

Ця задача дає відповідь на питання який кут створюють площі P та Q . Цей кут вимірюється лінійним кутом поміж простими перетину цих площ площею прямою до простого їх перетину /21 § 1/. В нашому випадку такою площею, прямою до простого перетину буде позема площа мету і $\angle Q_h a_2 P_h$ вимірює кут створений площами Q та P .

§ 16. ОБЕРТАННЯ ПЛОЩ НАВКРУГИ ГОЛОВНИХ ПІНІЙ.

Маємо площу, визначену трикутником ABC /рис. 75, таб. X/, у якого бік BC рівнобіжний з поземою площею мету, себ-то метується на цій площі у дійсну свою величину. Як що ми зможемо, користуючись рисунком, нарисувати геометрично трикутник ABC , то це допоможе нам в де-яких випадках.

Для того, щоб нарисувати трикутник треба мати три елементи його. Ми маємо тут основу BC - її поземий мет. Коли б ми знали ще висоту трикутника, та точку D приложення цієї висоти, то змогли б нарисувати весь трикутник.

Висота AD метується поземо метом ad . Поземо метові площі, що поведені через прості BC та AD прямі між собою, бо $BC \perp AD$; ці площі перетинаються третьою площею, поземою площею мету, прямою до обох плещ, по простих прямих між собою /19 § 1/; тому виходить, що $BC \perp ad$. Це дає нам змогу знайти мет точки D , точку d , спустивши прям з точки a на мет bc .

Залишається знайти ще третій елемент, необхідний для збудування трикутника ABC , себ-то дій-

сну довжину висоти AD . З трикутника ADE бачимо, що дійсна довжина висоти AD це протипрямка прямокутного трикутника, де одна прямка $AE = ad$ - мету висоти, а друга $DE = Dd - Ed = Dd - Aa$ - різниці метових прямих точок D і A . Все це маємо на рисунку і можемо геометрично нарисувати спочатку трикутник ADE а потім і трикутник ABC .

Напр. треба знайти кут, створений двома простими $AB/a\bar{b}, a'\bar{b}'/$ та $AC/a\bar{c}, a'\bar{c}'/$. Ведемо в площі цих протистих /рис. 76, таб. X/ позем площі, себ-то просту $BC/b\bar{c}, b'\bar{c}'/$, що буде рівнобіжна з поземою площею мету, та обертаємо трикутник ABC навкруги BC до положення рівнобіжного з поземою площею мету.

Спустимо з точки a прям на просту $b\bar{c}$ і ad буде метом висоти, а d - точкою її приложення. Тепер будемо прямокутний трикутник, прямками якого будуть: мет висоти ad , та різниця поземо метових прямих $a\bar{E} = a'n - d'm$. Протипрямка $d\bar{E}$ цього трикутника є дійсною довжиною висоти AD . На рисунку цей трикутник побудований на ad , але його рисування можна винести куди завгодно. Тепер рисуємо дійсний трикутник ABC . Бік $BC = b\bar{c}$, точка D має те саме віддалення у простороні від точок B та C , як точка d від точок b та c ; залишається відложити на прямі ad від точки d дійсну величину висоти AD , себ-то $d\bar{E}$. Сполучаємо точку A з b , та c й маємо трикутник Abc , що уявляє наш трикутник ABC , обернений навкруги BC до положення рівнобіжного з поземою площею мету.

Кут BAC уявляє собою дійсний кут, створений простими AB та AC .

Тепер буде зрозуміла і задача, що розв'язана на рис. 77, таб. XI: знайти дійсний вигляд трикутника ABC .

Обертаємо цей трикутник навкруги позема його площі $BD/b\bar{d}, b'\bar{d}'/$ до положення рівнобіжного з площею мету. Точки $B/b, b'/$ та $D/d, d'/$ лежать на вісі обертання; тому залишаються на місці і це полегшує виконання завдання, бо залишається знайти нове положення лише двох точок A та C .

Обертаємо трикутник ABD та CBD , навкруги вісі BD способом показаним у попередній задачі і маємо трикутник A_0bc , який уявляє собою дійсний трикутник ABC .

Наведені приклади обертання навкруги позема площі ясно показують весь хід розв'язання, але можна також обертати й навкруги дозема, приклад цього показаний на рис. 78, таб. XI.

Маємо п'ятикутник $ABCDE/a\bar{b}c\bar{d}e, a'\bar{b}'c'\bar{d}'e'/$ треба на ньому нарисувати правильний трикутник з боком 1,8 см.

Для виконання цього завдання приведемо наш п'ятикутник, за допомогою обертання навкруги дозема його площі, до положення рівнобіжного з доземою площею мету; нарисуємо тоді на ньому задану фігуру, та обернемо п'ятикутник разом з нарисованою фігурою у первісне положення.

Перша частина виконується так, як про це говорилося в попередніх задачах. Одержимо дійсний вигляд п'ятикутника a, b, c, d, e , рисуємо на ньому трикутник $1, 2, 3$, і переводимо все назад.

Боки нашого трикутника лежать на простих I, II, III, IV, V, VI , $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Коли ми знайдемо мети точок I, II, III і т.д., то знайдемо мети простих I, II, III, IV, V, VI , а перехрестя цих метів дасть нам мети точок $1, 2$, та 3 .

При зворотньому обертанні п'ятикутника, точки I, II, III і т.д. будуть посуватися по прямих до вісі обертання a, p і упадуть на мети боків п'ятикутника, себ-то в точки III', II', I' і т.д. Це будуть доземі мети точок, а поземі мети лежать на прямих до вісі ox , та на відповідних метах боків п'ятикутника. Це будуть точки I, II, III і т.д. Сполучаємо їх простими і одержимо мети трикутника $1, 2, 3$ та $1', 2', 3'$. На рис. знайдено лише поземий мет $1, 2, 3$; доземий $1', 2', 3'$ не показаний.

§ 17. ЗПИТТЯ ППОЩ.

Коли площа визначена слідами, то обертати цю площу можна також й навкруги її слідів, аж поки ця площа не зільється з площами мету.

Такий спосіб обертання звється злиттям площ. Площа P /рис. 79, таб. XI/ зливається з поземою площею мету за допомогою обертання навкруги її поземого сліду P_h . Віссю обертання виходить тут слід P_h , який і у злитому своєму положенні не порушиться з місця. Треба знайти ще злиття доземого сліду P_v , і тоді уся площа перейде в нове злите положення.

Одна точка злитого сліду P_v - це спільна з поземим слідом P_h - його точка M , яка залишиться теж на місці. Бо лежить на вісі обертання. Довільна точка $A/a, a'$ сліду P_v при обертанні буде посуватися у площі R , прямій до вісі обертання P_h , а тим самим й до поземої площі мету /бо P_h лежить у тій площі/. Мет a лежить теж у площі R і буде теж посуватися у тій самій площі. Шляхи, по яких посуваються точка A та її мети a й a' будуть такі: точка A і її доземий мет посувається по дузі кола, з осередком у точці o та лучем oA ; поземий мет a посувається по пряму до вісі обертання, себ-то

до поземого сліду P_b , і точка перехрестя цих двох шляхів й буде злита точка A_0 .

Ми можемо, користуючись висловленим у § 16 знайти дійсну довжину луча $n-A$, але тут можна полекшити виконання завдання.

Віддалення AM / або $a'M$ / не зміниться у злитому положенні площі, а тому це віддалення можна просто взяти з рисунку та на прямій $a'n$ знайти точку A_0 . Віддалення якої від точки M виносить AM / або $a'M$ /.

Як що маємо точку A_0 , та точку M , то злитим доземим слідом P_v буде проста поведена через ті дві точки.

Все що говорилося про злиття площ з поземою площею мету, можна пристосувати й до злиття з доземною площею мету, тільки у поясненнях поняття поземий треба замінити поняттям доземий та навпаки.

На рис. 80, таб. XI площа P злита з доземною площею мету. Беремо довільну точку B / b, b' / на поземому сліді P_b і ведемо той шлях, по якому прямує її доземий мет b' . Де буде прям до вісі обертання P_v , спущений з точки b' ; потім з точки M , як з осередку закреслюємо дугу лучем Mb і перехрестя цієї дуги з прямом, що поведений до вісі P_v з точки b' , дасть точку B_0 , через яку проходить змитий слід P_b .

Проста, що лежить у площі, має свої сліди на слідах площі. Як що ми знайдемо злиті сліди простої, то тим самим ми маємо й злите положення простої.

Слід B / b, b' / простої AB / рис. 80, таб. XI / лежить на сліді P_b , а у злитому положенні цього сліду він лежатиме на віддаленні $MB_0 = Mb$ від точки M . Слід A / a, a' / лежить на сліді P_v , - вісі обертання, - при злитті він залишиться на місці. Тому злите положення простої AB буде AB_0 .

Кожна головна лінія площі має тільки один слід, але за те ясно визначений напрямом, який вони зберігають й у злитому положенні.

Щоб знайти злите положення точки C / c, c' / що лежить на площі P / рис. 80, таб. XI / , то треба через ту точку повести з площі довільну просту і тоді перехрестя злитого положення цієї простої шляхом доземого мета / прям до вісі обертання P_v / й буде злите положення точки.

Менш забарне вести через точку C одну з головних ліній, як це зроблено на рисунку, де поведений позем CD . Злите положення цього посема DC_0 повинно бути рівнобіжним з злитим положенням сліду P_b .

Площа P / рис. 81, таб. XI / , пряма до поземої площі мету, має кут по-між слідами $\alpha = 90^\circ$, тому вирисовування її злитого положення ще більше просте. Треба до вісі обертання у спільній площі M .

встановити прям і це буде злитий слід.

На рисунку показано два злиття: одне з поземою площею мету $/P_v \perp P_h/$ а друге з доземою площею мету $/P_h \perp P_v, P_h \text{ зливається з віссю } OX/$. Там показане теж для обох випадків злиття простої AB , та точки C за допомогою позема CD .

Рис. 82, таб. XI показує злиття двох простих $AD/ad, a'd'/$ та $CB/cb, c'b'/$, що перекрещуються у точці $E/e, e'/$.

Через ці прості ведемо площу P та зливаємо її з поземою площею мету. Знаходимо злите положення простих - це будуть $A.D.$ та $C.B.$ Як що один з слідів одної з простих вийде за межі рисунку, то злите положення другої простої, точки їх перекрестя, та другий слід простої дадуть змогу нарисувати злите положення обох простих.

Як що треба нарисувати яку небудь фігуру на даній площі P /рис. 83, таб. XI/, то зливаємо цю площу з площею мету /на рис. з доземою/, рисуємо дану фігуру /трикутник/ і повертаємо площу разом з фігурою назад.

Точки $A.$ та $B.$ лежать на простій $E.D.$, яку легко знайти у первісному положенні площі P . Слід $E.$ буде разом з тим своїм доземим метом e' ; поземий мет e лежить на вісі OX . Точка $D.$ лежить на злитому сліді P_h , на віддаленні MD від точки M ; , тому й на сліду P_h вона сама, а разом з тим й її поземий мет d , лежатиме на тому ж віддаленні $MD = MD$; доземий її мет d' буде на вісі OX . Мети простої AB будуть ed та $e'd'$. Мети точок A та B лежать на відповідних метах простої ED , а поземі мети a' та b' цих точок при повороті площі зі злитого свого положення, посуватимуться по прямим до вісі обертання. Перекрестя цих прямих з метом $e'd'$ дасть мети a' та b' точок A та B . Поземі мети лежатимуть на перекресті мета ed з прямими до вісі OX , в точках a та b . Мети точки C знайдені за допомогою позема CF .

§ 18. ЗМІНА ОДНОЇ ПЛОЩІ МЕТУ

Засобом найпростішим, що дуже полегшує розв'язання задач, є зміна одної, або обох площ мету.

Ми можемо вибрати наші площі мету довільно з однією тільки умовою, щоб вони були прямі між собою. Ми можемо також, коли це нам зручно, викинути одну з площ мету, замінити її новою, з обов'язковою тільки умовою, щоб НОВА ПЛОЩА МЕТУ І ТА, ЩО ЗАЛИШАЄТЬСЯ, БУЛИ ПРЯМІ МІЖ СОБОЮ.

Коли маємо систему площ мету $\frac{v}{H}$ /рис. 84, таб.

XII/ і в цій системі точку $A/a, a' /$, то можемо викинути площу мету V та замінити її площею S прямою до площі H . Нова система площ мету $\frac{S}{H}$ буде мати нову вісь мету O, X_1 , яка є простою перетину площ S , та H і яка, як що нема відповідних умов, не знаходиться у ніякому звязку з старою віссю.

Ми так само при зміні площ мету для нових вісей будемо утримувати чергу літер O та X , так, щоб нові доземі мети були згори /додатній напрямок/ а нові поземі знизу /теж додатній напрямок/ нової вісі мету.

Зметуємо точку A у новій системі мету $\frac{S}{H}$. Поземий мет a залишиться старий, а доземий мет вже на площу S , буде a' . Для нової системи площ мету, як і взагалі для прямого метування, на рисунку обидва мети точки лежать на одному прями до вісі мету.

Положення точки A відносно поземої площі мету H і в новій системі площ мету залишається старе; тому й поземо-метові прями для обох систем будуть однакової довжини $/Aa = a'n = Aa_1 = a'_1m /$.

Площу S зливаємо з поземою площею мету H і тоді маємо рисунок з віссю мету O, X_1 та метами a_1 і a'_1 , причому $a'_1m = a'_1n$.

Коли ми хочемо замінити позему площу мету H /рис.85, таб.XII/ новою площею мету R , то все що було висловлено при зміні доземі площі мету стосується й тут.

В новій системі площ мету $\frac{R}{H}$, залишається старий доземий мет $a / a' /$, та доземо-метові прями $/an = a_1m /$; маємо лише нову вісь мету O, X_1 , та новий поземий мет a_1 /на одному прями відносно O, X_1 з метом $a'_1 /$.

Зрозуміло, що нова площа мету R повинна бути прямою до площі мету V .

На рис.86, таб.XII переведена зміна доземі, а на рис.88, таб.XII - поземої площ мету. В обох випадках черга літер O та X показує положення доземі та доземих метів відносно вісі O, X ; у першому випадку для нової системи метів залишаються старий поземо-метовий, а у другому випадку старий доземо-метовий прями.

Зміною площі мету можна привести просту у відповідне положення зручним вибором нової площі мету.

На рис.87, таб.XII проста $AB/a, b, a', b' /$ за допомогою зміни доземі площі мету приведена в положення рівнобіжне з новою доземою площею мету.

Нову площу мету ведемо через саму просту, себ-то ця площа буде поземою метова. Тоді вісь мету O, X_1 пройде через поземий мет a, b , а новий доземий мет буде a'_1, b'_1 .

На рис.89, таб.XII зміною поземої площі мету

проста $AB/a\beta, a'\beta'$ приведена в положення рівнобіжне з новою поземою площею мету. Нова площа мету взята на де-якому віддаленні від самої простої, а нова вісь мету O, x , повинна бути рівнобіжною з доземим метом.

Коли зміною площ мету треба дану площу P привести в положення пряме до площі мету, то тут згори дається напрямок нової вісі.

Рис. 90, таб. XIII показує як привести площу P до положення прямої до доземної площі мету.

Нова площа мету S , дозема в даному випадку, повинна бути прямою і до старої поземної площі мету H і до площі P , - це буде поземою метою, площа, поземий слід якої S_h /нова вісь мету O, x / буде прямою до сліда P_h /бо в новій системі площ мету $P_h \perp O, x$.

Старий поземий слід площі P залишається й у новій системі, а новим слідом, доземим, буде проста перетину площі P з новою площею мету S . До просту перетину AB /на рис. не показана/ зливаємо з поземою площею мету H /разом з площею S / і проста BA буде новим доземим слідом P_s у системі S .

Рис. 91, таб. XIII переводить площу P в положення пряме до поземної площі мету, за допомогою зміни поземної площі мету H новою R , прямою і до P і до V . Нові сліди будуть P_2 та $P_h \perp O, x$.

На рис. 92, таб. XIII площа P визначена трикутником $ABC/a\beta c, a'\beta'c'$. Для приведення площі P в положення пряме до поземної площі мету, треба знайти дозем $BE/\beta c, \beta'c'$ /площі, та вибрати нову вісь мету $O, x, \perp \beta'c'$. Уся дальша праця провадиться як й раніш.

Зміни площ мету дає змогу визначати сліди прости, прямих до вісі мету Ox .

На рис. 93, таб. XIII зміною доземної площі мету можна знайти поземий слід $C/c, c'$, а зміною поземної площі мету доземий слід $D/d, d'$ /простої $AB/a\beta, a'\beta'$ прямої до вісі мету Ox .

§ 19. ЗМІНА ДВОХ ПЛОЩ МЕТУ.

У де-яких випадках заміна одної площі мету не достаточна для повного та зручного розв'язання питання, тоді вживають подвійної спочатку одної - поземної, або доземної, а потім другої - доземної або поземної, другими словами спочатку переходять від системи $\frac{V}{H}$ до системи $\frac{S}{H}$, а потім від останньої до системи $\frac{S}{R}$.

Як при зміні одної площі мету, так і при подвійній, положення нашого об'єкта у простороні

не змінюється, змінюються лише їх мети, а нові площі мету, дають нам змогу більш виразного та ясного зметування.

На рис. 94, таб. XIII показано для точки $A/a, a'$ перехід спочатку від системи $\frac{S}{H}$ до системи $\frac{S}{H}$, а потім до системи $\frac{S}{H}$.

При подвійній зміні площ мету **ОБОВ'ЯЗКОВО** притримуватись того, щоб у кожній новій системі, обидві площі мету були **ПРЯМІ** між собою.

На рис. 95, таб. XIII проста $AB/a\bar{b}, a'\bar{b}'$ заміною площ мету приведена в положення пряме до позомої площі мету. Спочатку, заміною доземої площі мету V площею S , приводимо просту в положення рівнобіжне з доземою площею мету $S / O_1 x_1 \parallel a\bar{b}$, потім, заміною позомої площі мету H , площею R , приводимо цю просту у положення пряме до позомої площі мету $/O_2 x_2 \perp a'\bar{b}'/$.

На рис. 96, таб. XIII площа P , за допомогою подвійної зміні площ мету, переведена в положення профільної площі. Заміна системи $\frac{S}{H}$, на систему $\frac{S}{O_1 x_1 \perp R}$ приводить площу P в положення пряме до доземої площі мету, а перехід від системи $\frac{S}{H}$ до системи $\frac{S}{O_2 x_2 \perp R}$ приводить ту площу в положення пряме й до позомої площі мету, себ-то в положення площі профільної.

Коли вимагається знайти кут по-між двома простими $AB/a\bar{b}, a'\bar{b}'$ та $AC/a\bar{c}, a'\bar{c}'$ то нам треба привести їх /їх площу/ в положення рівнобіжне з однією з площ мету. Спочатку заміною системи $\frac{S}{H}$ на систему $\frac{S}{O_1 x_1 \perp R}$ /рис. 97, таб. XIII/ приводимо площу цих простих до положення прямого до доземої площі мету $/O_1 x_1 \perp S$ -дозем площі простих/, а потім у системі $\frac{S}{O_2 x_2 \parallel}$ або злите з $a'\bar{c}'$ /наші прості будуть рівнобіжні з позомою площею мету і відповідь на запитання задачі буде кут $\alpha = C_2 a_2 \bar{c}_2$.

Нарешті рис. 98, таб. XIV переводить дві дані площі P та Q в нову систему площ мету, в якій одна площа мету пряма до P , а друга пряма до Q .

Спочатку переходим до системи $\frac{S}{H}$, де S пряма до $P /O_1 x_1 \perp R$, знаходимо сліди P_s та Q_s , як прості перетину площ S з площами P та Q в системі $\frac{S}{H}$, потім переходимо до системи $\frac{S}{R}$, причому площа $R \perp Q /O_2 x_2 \perp O_s$ причому знову знаходимо R_s та Q_s як прості перетину площі R з площами P та Q в системі $\frac{S}{R}$.

В системі $\frac{S}{R}$, площа P пряма до доземої площі мету $/R_s \perp O_2 x_2$, а площа Q пряма до позомої площі мету $/O_s \perp O_2 x_2$.

§20. Розв'язання задач.

Все, що було висловлено в попередніх §§ дає нам змогу розв'язати на рисунку багато питань геометрії у простороні. Перед розв'язанням кожної задачі на рисунку, треба конче уявити усю подію у простороні. Спочатку навіть було б корисним зробити викрес усіх подій у простороні. Тільки коли задача розв'язана геометрично у простороні, можна приступити до виконання її на рисунку.

Багато задач вже розв'язано разом з поясненням попереднього, але де-які ще можна виконати.

ЗАДАЧА I. /Рис. IIО, таб. XV/. Маємо точку A / a, a' /, та один мет точки B . Знайти другий мет точки B , як що віддалення між обома точками виносить 3 ст.

Дійсне віддалення AB виносить 3 ст. і як що ми переставимо цю просту в положення рівнобіжне з одною з площ мету, то воно зметується на ній у дійсній своїй величині.

Маємо тільки поземий мет a в прості AB . Обертаємо її навкруги вісі, прямої до поземої площі мету, поведеної через точку A /на рис. не показана/. Тоді поземий мет буде рівнобіжний з віссю ox , а доземий мет a' точки B лежатиме на одному з точкою a' прямих до вісі ox . З точки a' закреслюємо дуги лучем 3 ст., які перехрестяться в прямому у точках B та C . Це й буде обернуте положення доземних метів точок C та B . Вертаємо їх у попереднє положення і одержимо мети b' та c' . Виходить, що існує дві точки B та C , які мають поземим метом точку a / a' / які лежать на віддаленні 3 ст. від точки A .

Задача 2. /Рис. III, таб. XV/. знайти кут поміж двома простими AB / a, a' / та AC / a, a' /.

Ця задача вже кілька разів була розв'язана раніш /рис. 76, таб. X, рис. 82, таб. XI, рис. 97, таб. XIII/, але тут розв'язуємо її ще одним способом.

Коли візьмемо на наших простих довільні точки D / d, d' / та E / e, e' /, сполучимо їх простою DE / d, e, d' /, то матимемо трикутник ADE / a, d, e, a', d', e' /, кут ADE якого й буде той, що ми шукаємо. Для вибудовування трикутника потрібні три елементи, напр. три боки. Тому за допомогою обертання навкруги вісей, прямих до поземої площі мету приводимо прості AD , AE та DE до положення рівнобіжного з доземною площею мету. Відтинки $a'd'$, $a'e'$ та ed' і будуть тими дійсними величинами боків AD , AE та DE . Тепер будемо геометрично, де завгодно трикутник $a'e'd'$, в якому $\angle a'd'e'$ дає відповідь на запитання задачі.

ЗАДАЧА 3. Знайти кут по-між двома площами.

Кут утворений даною площею з площами мету знайдений вже у всіх випадках, де площа приводилась в положення пряме до площі мету.

Кут, створений двома площами теж був вже знайдений на рис. 74, таб. X, тут дамо ще кілька способів розв'язання цієї задачі.

а/ Рис. II2, таб. XV.

Двостінний кут, утворений двома площами вимірюється лінійним кутом між простими перетину цих площ з площею, прямою до простої перетину даних площ /21 § I/.

Виконаємо все те, що тут сказано.

Знайдемо просту перетину $AB / a'b' /$ площ P та Q . Ведемо площу S пряму до простої $AB / S_h \perp a'b'$ і $S_v \perp a'b'$; перетин цієї площі S з площею P буде проста $CD / c'd' /$, яка має з простою AB спільну точку $E / e, e' /$. Прості перетину трьох площ мають одну спільну точку /17 § I/; тому через точку $E / e, e' /$ повинна пройти і проста перетину площ S та Q ; це буде проста $EF / e'f' /$. Зливаємо тепер площу S разом з простими CD та EF з домогою площею мету та знаходимо злите положення самої площі $S / S_v, S_h /$ та простої $CD / C.D. /$, потім точки $E / e, e' /$ і S вісі обертає і нарешті простої $EF / E.F. /$. Кут α вимірює кут, утворений площами P та Q .

в/ Перетнемо наші площі P та Q /рис. II3, таб. XV/ площею S прямою до простої AB перетину площ P та Q .

Площа S перетне площу P по простій KE , а площу Q по простій KD і ми маємо трикутник DKE , в якому $\angle DKE$ є той, що нам треба.

Щоб побудувати трикутник DKE ми маємо основу DE ; подивимося чи не має ще яких необхідних для цього елементів. Поведемо через просту AB позовемо метову площу R , яка перетинає площу S по простій KF .

Метова площа R пряма до площі S , бо площа S пряма до простої AB , яка лежить у площі R . Площа R також пряма до H . Маємо дві прямі між собою площі R та H , що перетинаються площею S , прямою до R . Прості перетину у цьому випадку /19 § I/ мусять бути прямими між собою, себ-то $KF \perp DE$. Виходить, що KF є висотою трикутника DKE , а точка F — точкою приложення висоти. Залишається знайти дійсну величину висоти KF /бо DE і точку F маємо на рисунку/ і тоді задача розв'язана.

Проста AB пряма до площі S і перетинає її у точці K , тому кожна проста, що лежить у площі S та поведена через точку K буде прямою до AB /14 § I/. Виходить, що $KF \perp AB$. Переходимо до розв'язання задачі на рисунку /рис. II4, таб. XV/.

Проста перетину площ P та Q буде проста $AB/a'b'$. Ведемо площу S пряму до AB для нас досить мати слід $S_v \perp a'b'$. Основою трикутника DKE є відтинки $d'e'$, а точка f' є точкою приложення висоти.

Для того, щоб знайти висоту FK зливаємо площу S з доземою площею мету і злите положення простої AB буде A_0b' . Висота $KF \perp AB$, тому з точки f , спускаємо прям на просту A_0b' і f, K_0 буде висотою трикутника DKE . Будуємо на основі $e'd'$ трикутник $d'Ke'$ і кут $d'Ke'$ буде відповіддю задачі.

с/ Можна привести площі P та Q /рис. II5, таб. XV/ в положення пряме до одної з площ мету /поземої/, тоді сліди площ /поземі/ утворять бажаний нам кут.

Спочатку заміняємо систему $\frac{P}{H}$ системою $\frac{S}{H}$, де площа S рівнобіжна простій AB перетину площ P та Q / $O, x, \parallel a'b'$ /. Потім систему $\frac{S}{H}$ заміняємо системою $\frac{R}{H}$, де площа R пряма до AB / $O_2x_2 \perp a'b'$ /. Кут α є відповідь на запитання задачі.

ЗАДАЧА 4. Через точку A простої AB повести площу під кутом α до простої.

Як що повести площу P /рис. II6, таб. XVI/ пряму до простої AB та збудувати стіжок, творчі якого утворюють з простою AB кут α , то відповіддю на запитання задачі буде кожна площа, що поведена через дотичну до основи стіжка, та через творчу, що сполучує точку A з відповідною точкою дотику. Як бачимо маємо тут безліч площ, що відповідають завданню, себ-то проходять через точку A та утворюють з простою AB кут α .

На рис. II7, таб. XVI це завдання виконано на площі.

Ведемо площу P пряму до простої AB / $P_b \perp a'b'$; знаходимо точку $B/3, b'/$ перетину простої AB з площею P .

Тепер нам треба знайти луч кола основи стіжка, себ-то побудувати прямокутний трикутник ABC /рис. II6, таб. XVI/, де маємо пряму AB , та кут α при ній.

Тому нам треба знайти дійсну довжину відтинка AB /рис. II7, таб. XVI/, що й виконуємо користуючись зміною площ мету на систему $\frac{S}{H}$ / O, x , злите з $a'b'$ /, а потім будуємо трикутник $b_1c_1a_1$ по даній прямій b_1a_1 та куту α ; b_1c_1 буде лучем кола основи стіжка.

Зливаємо площу P з поземою площею мету, знаходимо злите положення B_0 точки B , та закреслюємо з точки B_0 , як з осередка коло лучем b_1c_1 .

Кожна дотична цього кола разом з простою, що проходить через точку дотику та дану точку, визначають площу, що відповідає на запитання задачі.

Беремо дотичну $D.E.$ з точкою дотику F , та повертаємо їх назад, Одержимо мети дотичної $ed, e'd'$ та точки дотику f, f' . Сполучаємо точку F з точкою A , та ведемо площу через прості DE та AF . Це буде площа T , одна з тих, що проходить через точку A під кутом α до простої AB .

ЗАДАЧА 5. Маємо площу P та точку $A/a, a'/$ на ній. Через точку A повести площу під кутом α до площі P /рис. II 8, таб. XVI/.

У стіжка, що має потрібні нам площі дотичними, у цьому випадку, буде вершком точка A , творчі цього стіжка нахилені до вісі його під кутом $90 - \alpha$, а до площі P під кутом α . Тому розв'язок цієї задачі подібний до розв'язку задачі 4, з деякими відмінностями.

З точки A становимо прям до площі $P/a, a'/$ ведемо довільну площу Q рівнобіжну з площею $P/Q_v \parallel P_r$ і $Q_v \parallel P_r$ /; знаходимо перетин площі Q з прямою AB . Допоможна площа S не вистарчає, бо S_h та Q_h не перехрещуються на площі рисунку. Тому спробуємо знайти перетин площ S та P , бо проста перетину площ S та P буде рівнобіжна з першою /бо $Q \parallel P$ /. Проста перетину площ P та S повинна пройти через точку A , спільну для обох площ; тому проста ця буде $CA/ca, c'a'/$ проста $DB \parallel CA$ буде простою перетину площ S та Q . Точка $B/b, b'/$ є точка перетину площі Q з прямою AB .

Знаходимо дійсну довжину луча кола основи стіжка /як й в попередній задачі/, зливаємо площу Q з площею площею мету і зі злитого положення B . Точки B рисуємо коло, луча b, c . Дотична DE та проста AG де G точка дотику визначають одну з площ T , яка проходить через точку A і утворює з площею P кут α .

ЗАДАЧА 6. Переполовинити кут, утворений двома площами /рис. II 9, таб. XVI/.

Знаходимо перетин $AB/a, a'/$ площ P та Q , ведемо площу $S \perp AB/S_h \perp ab; S_r \perp a'b'$. Знаходимо прості перетину $DE/de, d'e'/$ площ S та P і $FE/fe, f'e'/$ площ S та Q . Зливаємо площу S з доземою площею мету, переполовинюємо кут $D.E.F.$ і вертаємо назад просту $E.G.$, яка переполовинює цей кут. Площа поведена через прості $AB/a, a'/$ та $EG/eg, e'g'/$ площа $T/T_h, T_r/$ є відповіддю на запитання задачі.

ЗАДАЧА 7. Знайти віддалення по-між двома мимобіжними простими.

Цю задачу майже розв'язано на рис. 73, таб. X, тільки не закінчено.

Найкоротше віддалення двох мимобіжних простих вимірюється спільним прямом до обох простих.

Як ми бачили вище /§ 5/ прямий кут метується на одній з площ мету теж прямим кутом, як що хоч

один з боків його буде рівнобіжним з площею мету. Тому нам треба привести наші прості в таке положення, щоби спільний прям був рівнобіжний з якою не - будь площею мету, що може бути тоді, коли одна з простих буде прямою до тої самої площі мету.

На рис. 73, таб. X все це зроблено за допомогою обертання навкруги восел, прямих до площ мету, на рис. 120, таб. XVII ужито методу зміни площ мету.

Спочатку переходимо від системи $\frac{1}{H}$ до системи $\frac{2}{H}$, при чому площа S рівнобіжна з однією з простих, напр. $CD/O_1x_1 \parallel cd/$. Потім переходимо до системи $\frac{3}{H}$, де площа R пряма до $CD/O_2x_2 \perp c_1d_1/$. Поземого мета простої CD/c_2ab_2 спускаємо прям на просту $AB/$ це буде поземий мет спільного пряму $FE/f_2e_2/$ бо FE рівнобіжно з R , а тому прямий кут FED метується теж прямим кутом поземо. Доземо цей прям метується простою рівнобіжною з віссю O_2x_2 , що дає нам можливість знайти доземий мет f'_2 точки F .

Вертаємось до попередньої системи площ мету $\frac{1}{H}$ і знаходимо у цій системі мети точок $F/f, f'/E/e, e'/$ та спільного пряму $FE/f_e, f'_e'/$. Дійсну довжину цього пряму, себ-то найкоротшого віддалення поміж мимобіжними простими AB та CD можна легко знайти.

ЗАДАЧА 8. Знайти осередок, та луч кулі, що поведена через чотири даних точки.

Перед розв'язанням цієї задачі треба з'ясувати як відбивається на метах простої поділ її на рівні частини, або у даному відношенню.

Проста AB /рис. 121, таб. XVII/ точкою C поділяється у відношенню $m:n$. Зметуємо точки A, C і B на площу P ; це будуть точки a, c та b . Через точки B і C поведемо прості BE та CD рівнобіжні з ab . Кут ACD рівний куту CBF . З трикутника DAC маємо $DC = AC \cos \alpha$; так само з трикутника FCB маємо $FB = CB \cos \alpha$; поділивши обидва рівенства одержуємо:

$$\frac{DC}{FB} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n};$$

DC , як видно з рисунка, рівно ac ; $FB = cb$; тому маємо остаточно:

$$AC : CB = ac : cb = m : n$$

Висновок: ПОДІЛ ПРОСТОЇ У ПРОСТОРОНІ В ЯКОМУ НЕБУДЬ ВІДНОШЕННЮ, ПОДІЛЯЄ МЕТИ ПРОСТОЇ У ТОМУ САМОМУ ВІДНОШЕННЮ.

Напр. проста MN поділена на 5 рівних частин, мет їх m, n точками k, l, o, z поділяється теж на п'ять рівних частин.

Тепер переходимо до розв'язання задачі. Маємо /рис. 122, таб. XVII/ чотири точки

$A/a, B/b, C/c, D/d$. Щоб знайти осередок кулі треба переполовинити віддалення AB, BC, CD і повести через точки поділу площі, які матимуть одну спільну точку /точку перехрестя простих перетину/. Дійсно в площі, прямій до простої AB , та поведеної через її середину, лежать точки, рівно віддалені від точок A і B . Те саме можна сказати й про площу, що поведена через середину простої BC , а точки, що лежать на простій перетину тих простих, лежать на рівних віддаленнях від точок A, B та C і т.д.

Виконаємо це на рисунку.

Через середину простої $AB/a'b'$ точку $E/e, e'$ ведемо площу P пряму до простої $AB/P \perp ab$ і $P \perp a'b'$; те саме зробимо з просток $BC/bc, b'c'$ ведемо через середину її $G/g, g'$ площу Q пряму до $BC/Q \perp bc, Q \perp b'c'$. Знаходимо просту перетину тих площ P та Q ; це буде проста $LN/l'n'$.

Ведемо таку саму площу S пряму до простої $CD/S \perp cd, S \perp c'd'$ та знаходимо точку перетину цієї площі S з простою LN . Ця точка $M/m, m'$ є осередком кулі, бо вона знаходиться на однаковому віддаленні від точок A, B, C та D . Луч цієї кулі можна легко знайти сполучивши точку M з однією з точок A, B, C або D і способами, що показані вище, знайти дійсну його величину.

ЗАДАЧА 9. Повести площу рівновіддалену від трьох даних точок.

Розв'яжемо цю задачу у простороні /рис. 123, таб. XVII/. Маємо три точки B, C та D . Через точку A треба повести площу, рівновіддалену від точок B, C, D .

Проста AF рівновіддалена від точок B та C . Це дуже просто можна довести. Віддалення точки від простої вимірюється прямими, спущеними з точки на просту; це будуть прямі BN та CM . Маємо два прямокутних трикутника CFM та BNF рівних між собою $\angle FB = \angle FC, \angle MFC = \angle BFN$; тому і $MC = BN$.

Так само прості AG та AE теж рівновіддалені від даних точок. Прості F, G, E, G та E, F рівнобіжні з площею P трикутника BCD , теж лежать на рівному віддаленні від цих точок.

Площі поведені через дві з тих простих відповідають нашій задачі; тому виходить, що таких площ можна повести чотири: 1/ площа поведена через прості AF та AE ; 2/ через прості AG та AF ; 3/ через прості AE та AG і 4/ площа поведена через точку A рівнобіжно з площею P .

Тепер знайдемо одну з тих площ на рисунку. Маємо три точки $B/b, b', C/c, c'$ та $D/d, d'$; треба через точку $A/a, a'$ повести площу, рівновіддалену від даних точок /рис. 124, таб. XVII/. Переполовинюємо прості BC та CD , сполучуємо точки поділу $1/3$.

та $G/a, a'/$ з точкою $A/a, a'/$ та ведемо через ті прості $AF/af, a'f'/$ та $Aa/aa, a'a'/$ площу P . Це й буде один з чотирьох відповідів на запитання задачі.

ЗАДАЧА 10. Через дану точку $A/a, a'/$ повести просту, що перекрещується з двома даними простими $HG/hg, h'g'/$ та $LM/lm, l'm'/$.

Через дану точку A /рис. 125, таб. XVIII/ та одну з простих LM ведемо площу, яку визначаємо двома простими $LM/lm, l'm'/$ та $Ac/ac, a'c'/$ та знаходимо перетин цієї площі з другою простою GH . Точка перетину буде точка $D/d, d'/$. Проста поведена через точки A та D відповідає завданню, бо вона проходить через точку $A/a, a'/$, просту GH , /точка D лежить на цій простій/, лежить у площі A, LM /тому перекрещує й просту LM в точці $B/b, b'/$.

ЗАДАЧА 11. Знайти точку, віддалену на 2,5 ст. від даної площі P . /Рис. 126, таб. XVIII/.

Площа P визначена двома рівнобіжними простими $AB/ab, a'b'/$ та $CD/cd, c'd'/$.

З довільної точки $J/j, j'/$ спускаємо прям на площу P . Напрям пряма прямий до головних ліній площі $EF/ef, e'f'/$ та $EG/eg, e'g'/$. Знаходимо точку $P/p, p'/$ перетину цього прямої з площею P , та знаходимо дійсну його довжину iP . Від точки P відкладаємо 2,5 ст. до точок M та N та повертаємо ці точки назад.

Точки $M/m, m'/$ та $N/n, n'/$ відповідають на запитання завдання.

ЗАДАЧА 12. Маємо площу P /рис. 127, таб. XVIII/ на цій площі точку $A/a, a'/$ та просту $BC/bc, b'c'/$. Повести у площі P просту рівнобіжну з простою BC та віддалену на 0,5 ст. від точки A .

Зливаємо площу P разом з точкою A та простою BC з поземою площею мету. З зли того положення A , точки A , як з осередку, рисуємо коло дугам 0,5 ст. Потім ведемо дотичні до цього кола рівнобіжні з злитим положенням B, C простої BC та вертаємо ці прості D, E та D, E назад.

Прості $DE/de, d'e'/$ та $D, E/d, e, d', e'/$ будуть відповідати вимогам завдання.

ЗАДАЧА 13. Дана площа P /рис. 128, таб. XVIII/ точка $A/a, a'/$ на ній. В площі P через точку A повести просту на віддаленню 3,5 ст. від точки $F/f, f'/$.

Прості, що відповідають на запитання задачі, будуть дотичними до основи стіжка, що має своїм вершком точку F , творчими 3,5 ст., а коло основи лежить у площі P . Таких простих дві, одна, або ні одної. Коли дана точка лежить по за колом, то маємо дві дотичних до нього, коли на самому колі, то одну, а коли в середині кола, то ні одної.

Для розв'язання задачі з точки $F/f, f'/$ спускаємо прям на площу $P/fb \perp Ph, f'b' \perp Pv/$, знаходимо точку їх перетину, точку $B/b, b'/$, зливаємо площу P , разом з точками A та B з поземю площек мету.

Знаходимо луч кола основи стіжка. Для того знаходимо дійсну довжину $b'F$, відтинка $B'F$ та будуємо прямокутний трикутник $b'JF$, де JF , це творча, довжиною 3,5 ст., а $b'J$ -луч кола основи.

У злитому положенні площі P , беремо точку B , за осередок кола основи і рисуємо лучем $b'J$ саме коло; потім через точку A ведемо дотичні D_0A та D_0A і повертаємо їх назад.

Прості $AD/ad, a'd'/$ та $AD_1/ad_1, a'd'_1/$ відповідають вимогам задачі.

ЗАДАЧА 14. Маємо площу P /рис. 129, таб. XVIII/ та один мет, а точки A , яка знаходиться на віддаленні 1 см. від площі P . Знайти другий мет точки A .

Ведемо через точку A площу S пряму до поземої площі мету та до площі P . Поземий слід $S_n \perp P_n$ повинен проходити через a . Той прям, яким виміряється віддалення точки A від площі P теж лежить у площі S , і він буде прямим до простої $BC/bc, b'c'/$ перетину площ P та S .

Зливаємо площу S з поземю площею мету та ведемо прості E_0L_0 та K_0F_0 рівнобіжно з B_0C_0 на віддаленні від неї 1 см. / $C_0L_0 = C_0K_0 = 1 \text{ см.}$ /. Зли-те положення точки A буде A_0 /або A_{01} /. Вертаємо площу S разом з точками A_0 та A_{01} назад і маємо до-земі мети a' та a'_1 двох точок, що відповідають на запитання задачі.

ЗАДАЧА 15. Маємо поземий слід P_n площі P /рис. 130, таб. XIX/ та точку $A/a, a'/$, що лежить на віддаленні 1 см. від площі P . Знайти P_n .

Ведемо через точку A площу S пряму і до поземої площі мету і до даної площі $P/S_n \perp P_n/$ злива-ємо площу S з доземю площею мету і знаходимо зли-те положення A_0 та B_0 точок A та B . З точки A_0 , як з осередка, лучем 1 см. рисуємо коло, а з точки B_0 ведемо до нього дотичні B_0C_0 та B_0E_0 . Де бу-дуть прості перетину площі S з площею P /таких площ може бути дві: P та $P_1/$, а точки C_0 та F_0 бу-дуть доземі сліди цієї простої перетину, через які проходять доземі сліди площ P та P_1 .

Сполучаємо точку M з точками C_0 та F_0 і маємо сліди двох площ $P/P_n, P_1/$ та $P_1/P_n, P_1'/$ які відповідають на запитання задачі.

ЗАДАЧА 16. Маємо площу P /рис. 132, таб. XIX/ та просту $AB/ab, a'b'/$ по за нею. Знайти на простій AB точку, що лежить на віддаленні 3 см. від площі P .

З точки $C/c, c'/$, що лежить на площі P ста-вимо прям $CE/ce, c'e'/$ до площі $P/ce \perp P_n, c'e' \perp P_n/$ знахо-

димо дійсну величину E . цього пряма, та від точки C відкладаємо до точки E . 3 см. Вертаємо точку F назад і ведемо через неї площу P рівнобіжну з площею $P/R_h \parallel R_h, P_v \parallel R_v$. Перетин площі R з простою AB , точка $M/m, m'$ є відповідь задачі.

ЗАДАЧА 17. Маємо дві площі P та Q /рис.132, таб. XIX/. Треба повести просту, яка б лежала на віддаленні 1,5 см. від площі P та 1 см. від площі Q .

Така проста повинна бути рівнобіжна з обома площами, себ-то з простою перетину $AB/ab, a'b'/$ цих площ. Виходить що необхідно знайти тільки одну точку цієї простої, бо напрямок її відомий.

З довільної точки $C/c, c'$ на простій AB спускаємо прями на площі P та Q , та показаними вище способами знаходимо точки $H/h, h'$, що лежать на 1 см. від площі Q , та $F/f, f'$, що має віддалення 1,5 см. від площі P .

На рисунку даліше розв'язання задачі провадиться так: через точку F ведеться площа T рівнобіжна з $P/T_h \parallel P_h, T_v \parallel P_v$, а через точку H площа R рівнобіжна з $Q/R_h \parallel Q_h, R_v \parallel Q_v$.

Проста їх перетину 1.2 /1.2, 1'. 2'/ є відповідь задачі.

Коли ми маємо точки F та H та прямий кут FSH , то можемо доповнити його до прямокутника і точка цього прямокутника, протилежна точці S , буде точкою, через яку проходить бажана нам проста.

Радимо перевести це на рисунку.

ЗАДАЧА 18. Через данну просту $AB/ab, a'b'/$ повести площу, пряму до даної площі P /рис.133, таб. XIX/.

Беремо на простій AB довільну точку $C/c, c'$ спускаємо з неї прям CD на площу $P/cd \perp P_h, c'd' \perp P_v$ та ведемо через дві прості $AB/ab, a'b'/$ та $CD/cd, c'd'$ площу R , яка проходить через дану просту AB та пряма до P , бо проходить через прям CD до площі P .

ЗАДАЧА 19. Через точку $A/a, a'/$, що лежить в даній площі P /рис.134, таб. XIX/ повести в цій площі просту пряму до даної простої $CD/cd, c'd'$.

Через просту CD ведемо площу R , пряму до площі P та знаходимо просту $HJ/hj, h'j'$ перетину площ P та R . Зливаємо площу P , разом з точкою A та простою HJ , з доземою площею мету, та з злитого положення A спускаємо прям AN на просту HJ .

Вертаємо точку N назад, сполучаємо точку A з точкою N простою $AN/an, a'n'/$, яка буде відповіддю задачі, бо вона лежить в площі P поведе- на через точку A , та пряма до CD бо $AN \perp HJ$ а HJ лежить у площі R , де лежить і проста CD .

Ще раз даємо пораду при розв'язанні прикладів, розв'язувати їх спочатку у простороні /на ескізі, або уявленні/, а потім вже переходити до рисунку, до метів.

Не треба вибирати положення метів подібне до рисунків цього курсу, бо це не вивчить працювати самостійно, треба старатися виходити з усякого затруднення, що не трудно, коли добре уявити, та засвоїти попередні параграфи.

§ 21. ТРЕТЯ ПЛОЩА МЕТУ.

Де які питання нарисної геометрії не можна зовсім ясно освітити двома метами, тому для повного з'ясування питання вводиться ще третя площа мету.

Цією третьою площею мету можна взяти всяку профільну площу і поставити їх там де для кожного випадку буде найвигідніше.

Для з'ясування питання ми розберемо випадок, показаний на рис. 99, таб. XIV.

Третя площа мету W поставлена праворуч площ мету V та H .

Три площі мету утворюють тристінний кут, з оу трьома вісями мету OX /перетин площ V та H /, OY /перетин площ H та W / та OZ /перетин площ V та W /

Точка A зметується на площу H в точці a , на площі V в точці a' і на площі W в точці a'' .

Коли розрізати трьохстінний кут по вісі OY та відхилити площу W назад, а площу H вниз, то матимемо всі мети на одній площі рисунку, матимемо рисунок, або епюр.

Поземо метовий прям Aa в бруса $Aa1a'2a''3O$ буде рівний таким бокам:

$$Aa = 1.a' = 3a'' = 0.2.$$

Те саме маємо для першого доземо-метового пряму:

$$Aa' = 1.a = 2.a'' = 0.3$$

та другого доземо-метового пряму

$$Aa'' = 3.a = 2.a' = 0.1.$$

На далі при користуванні трьома площами мету, визначатимемо метові прямі тими літерами, рівнобіжно з якими вісями вони лежать, тому

$$Aa = 0.2 = Z;$$

$$Aa' = 0.3 = Y;$$

$$Aa'' = 0.1 = X;$$

Будемо визначати додатними прямими доземо-метові - вліво від осередка O , перший доземо-метовий -

вправо від O , та другий доземо-метовий - в гору від O . Напрямки зворотні визначатимемо від'ємними. Тому, як що будемо розглядати усі чотири двостінні кути, то для точки матимемо таку таблицю 3.

Т а б л и ц я 3.

Двостінний кут.	Поземо-метовий прям Z	Перший доземо-метовий прям Y	Другий доземо-метовий прям X
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	-
IV	-	+	+

Найчастіше об'єкти становляться у першому двостінному куті; тому на наступних рисунках показаний лише перший кут.

Рис. 100, таб. XIV показує три мети довільної точки A у першому куті; рис. 101, таб. XIV дає мети точки B , що лежить на поземій площі H ; рис. 102, таб. XIV, точка C лежить на першій доземій площі мету V , а рис. 103, таб. XIV - точку D , що лежить на другій доземій площі мету W .

Рис. 104, таб. XIV показує три мети довільної простої $AB/a'b', a''b''$.

Рис. 105, таб. XIV - мети прости: $CD/cd, c'd', c''d''$ рівнобіжної з доземою площею мету V , та $GH/g'h', g''h''$ рівнобіжної з поземою площею мету H .

Рис. 106, таб. XIV - мети прости: $EF/ef, e'f', e''f''$ що лежить на доземій площі мету V , $E_0F_0/e_0f_0, e'_0f'_0, e''_0f''_0$ що лежить на поземій площі мету H .

Рис. 107, таб. XIV: проста JK , рівнобіжна з віссю OX , проста LM пряма до поземої площі мету H ; PS - пряма до першої доземної площі мету V , а прости RS і R_0S_0 прямі до вісі OX /рівнобіжні з другою площею мету W /.

Радимо для вправ доповнити рис. 105 та 106, таб. XIV простими рівнобіжними та належними другої доземної площі мету.

Площа, за допомогою слідів, в де-яких ви-

падках показана на наступних рисунках.

На рис. 108, таб. XIV площа P довільна, площа Q рівнобіжна з віссю OX /пряма до W /, площа M рівнобіжна з поземою площею мету H /пряма до W /, площа N рівнобіжна з доземою площею мету /пряма до W /, площа R , поведена через вісь OX та точку $A/a, a', a''$, - теж пряма до W .

Площі прямі до площ мету в різних випадках показані на рис. 109, таб. XV. Площі P та Q прямі до H , площі R та S прямі до V .

В наступних параграфах на прикладах буде показано користування третьою площею мету.

§ 22. БУДУВАННЯ МНОГОСТІННИКІВ.

Кожний многостінник складається з стінок /площ/, кожна стінка з простих /рубів/ та точок /вершків/ тому метування многостінників зводиться до метування точок, простих та площ, методами, що були пояснені раніше.

По більшості ми будемо ставити многостінник у першому куті, тому поземий мет його буде уявляти собою вигляд цього многостінника, при умові, що на нього дивляться згори, доземий мет, як би дивитись з боку, а другий доземий мет теж з боку.

Поземий мет іноді називають пляном, доземі мети бічними виглядами многостінника.

Поширимо поняття про сліди й на многостінники, а саме будемо називати слідом многостінника, фігуру - плоский многокутник. - перетину його з площами мету. Це буде нам зручно у тих випадках, коли многостінник стоїть на площі мету; тоді та стінка, на якій він стоїть й буде його слідом.

Мети многостінників це плоскі фігури, які не зовсім ясні для невправлених. Треба розвинути в собі добре уявлення, щоби по метах з'ясувати собі як самий многостінник, так й його положення у простороні.

Аби трохи полекшити це уявлення, умовимось, що стінки многостінника непрозорі і ті руби та вершки, що лежать поза іншими стінками, будемо вважати невидимими, та рисувати крапками.

Для вияснення, які стінки перекривають другі, себ-то які руби видні, а які ні, тут у пригоді може стати те, що було вже висловлено у § 13. На всіх наступних рисунках невидимі руби показані крапками. Радимо для вправи скористуватися методом § 13, та довести чому вони так зазначені.

Як рисувати мети многостінників буде ясно видно з наведених прикладів. В перших трьох прик-

ладах нарисовані три мети, в решті лише два; радимо нарисувати для кожного рисунку ще третій мет.

Коли нам треба нарисувати три мети піраміди, що стоїть на поземій площі мету, та руб' якої нам дані, то робимо це так.

На поземій площі мету /рис. 135а, таб. XX/ рисуємо дану нам основу $abcd$ многобінника; це буде її поземий мет /а також і слід/, а доземий мет лежатиме на вісі ox в точках a', b', c', d' .

Потім рисуємо на боках ad , dc та cb стінки піраміди /розміри рубів нам дані/. Це будуть трикутники aS_2d , dS_3c та cS_4b ; вони уявляють собою дійсний вигляд цих стінок, і ми їх як би зляли з поземою площею мету, обкручуючи навкруги рубів ad , dc та cb .

Тепер повертаємо ці стінки у своє дійсне положення, знову обкручуючи навкруги рубів. Зробимо це для стінок aS_2d та dS_3c . При цьому обертанні точка S /вершок піраміди/ для обох стінок піде по пряму до вісі обертання, то зрозуміло, що поземий мет цього вершка S буде на перехресті цих прямих. Зараз нам вже зайва решта стінок, бо коли б ми схотіли обертати ще й решту стінок, то мет вершка піраміди повинен був би злитися з точкою S .

Маємо поземий мет піраміди $abcd$. Перейдемо до доземоного.

По-перше доземі мети повинні лежати на одному прямі до вісі ox з поземими метами. Доземі мети точок a, b, c, d лежать, як вже було сказано, на вісі ox ; залишається знайти точне положення доземоного мета S' точки S .

З § 7 знаємо, що дійсна довжина простої є протипрямою прямокутного трикутника, де прямками будуть мет її та різниця метових прямих. Понеже одна з точок наших рубів лежить на площі мету, то тут другою прямою буде не різниця, а самий метовий прям.

Будуємо прямокутний трикутник на одному з метів рубів / sc /, яко прямці, з протипрямою рівною дійсній довжині цього руба / $cS_4 = CS$ /, тоді друга протипрямка / sC_4 / буде поземо-метовим прямом точки S /для нашого випадку також й висотою піраміди/. Відкладаємо на прямі, спущеним з точки S на вісь ox від точки n відтинок $nS' = sC_4$ тоді точка S' буде доземим метом точки S . Сполучаємо точку S' з точками a', b', c' та d' і одержуємо доземий мет $S'a'b'c'd'$ нашої піраміди $SABCD$.

Тепер поставимо піраміду $SABCD$ / $abcd, S'a'b'c'd'$ / в таке положення, щоб площа її основи утворила б з поземою площею мету кут α .

Для виконання цього обкрутаємо всю нашу піраміду навкруги вісі, прямої до поземої площі мету

на кут α . Цю працю можна виконати на тому самому рисунку, але щоб не затемнювати його, радимо винести на новий.

Рисуємо /рис. 135, таб. XX/ доземий мет піраміди $s'a'b'c'd'$, так щоб основа $a'b'c'd'$ з віссю OX утворила б кут α , себ-то обернемо піраміду навкруги руба $BC/bc, b'c'$ прямого до доземної площі мету.

Поземні мети усіх точок, згідно § 14, посуватимуться по простих, рівнобіжних з віссю OX та перейдуть з точок s, a, b, c, d рис. α , в точки s, a, b, c, d рис. δ .

Тепер поставимо нашу піраміду в таке положення, щоб руб BC відхилився на кут β , для чого обертаємо усю піраміду навкруги вісі, прямої до доземної площі мету, та поведеної через точку $B/b, b'$; ця вісь на рисунку не показана.

Знову переносимо всю працю на рис. 135, таб. XX, та одержуємо мети піраміди у новому положенні і нарешті, користуючися методами § 21 рисуємо третій її мет.

На рис. 136, таб. XX зроблено те саме тільки для призми.

Полекшення тут маємо те, що коли знайдено один мет /поземий f / одного вершка, то ведемо прості рівнобіжні $fe \parallel ad, ae \parallel df, eh \parallel ab, bh \parallel ae, hg \parallel bc, cg \parallel bh$, бо ці прості у простороні рівнобіжні між собою, то й їх мети теж мусять бути рівнобіжними.

Правильними многостінниками називають такі многостінники, стінки яких уявляють собою правильні многокутники.

Найчастіше уживаються такі правильні многостінники:

а/ Тетраедр, створений з чотирьох рівнобоких трикутників. Тут маємо чотири стінки, чотири вершка, шість рубів та чотири трьохстінних кута.

б/ Куб, створений з шести квадратів. Стінок - шість, вершків вісім, рубів дванадцять, трьохстінних кутів вісім.

в/ Октаедр, створений з шести рівнобоких трикутників. Маємо тут вісім стінок, шість вершків, дванадцять рубів, та шість чотирестінних кута.

г/ Додекаедр, створений з дванадцяти правильних п'ятикутників. Стінок дванадцять, вершків - двадцять, рубів - тридцять, трьохстінних кутів двадцять.

д/ Ізокаедр, створений з двадцяти рівнобоких трикутників. Стінок - двадцять, вершків - двадцять, рубів тридцять, п'ятистінних кутів - двадцять.

Покажемо як рисувати мети правильних многостінників.

На даній площі P /рис. 137, таб. XXI/ треба

поставити тетраедр. Нарисувати усі три мети.

Зливаємо площу P з поземою площею мету, рисуємо основу $A.B.C.$ тетраедра, а також точку L_0 , з якої виходить висота його. Вертаємо площу P разом з трикутником $A.B.C.$ та точкою L_0 назад.

Висота тетраедра пряма до площі P , тому мети висоти прямі до відповідних слідів P_h та P_v . Повертаємо висоту $LR / l_r, l'_r /$ в положення рівнобіжне з доземою площею мету, відкладаємо відтинок $l's_1 = s_0 S_1$ висота тетраедра та повертаємо точку S_1 назад; одержимо мети S, s_1 вершка тетраедра S . Сполучаємо точки S та S_1 з точками a, b, c та a', b', c' і маємо два мети тетраедра $SABC$, що стоять на площі P .

Рисування третього його мету $s''a''b''c''d''$ ясно з рисунку та не потребує пояснень.

Нарисуємо мети кубу, косина якого пряма до поземої площі мету. Спочатку розв'яжемо цю задачу загальним способом, а потім полекшеним.

Як що косина пряма до поземої площі мету /рис. 138, таб. XXI/, то куб стоїть на ній трьохстінним кутом, стінки якого похилені всі три під однаковим кутом до поземої площі мету.

Ці три стінки, злиті з поземою площею мету будуть квадрати $ABCD, BCFG, FCDE$. Повертаємо їх в первісне положення і одержуємо мети точок D, B, F / d, b, f /, сполучаємо ці мети з точкою C - та маємо мети трьох рубів куба $cb / CB, cd / CD, cf / CF$. Стінки куба квадрати, тому боки цих квадратів будуть метуватися рівнобіжними простими. Ведемо $b_3 \parallel cf, cf \parallel cb, ce \parallel cd, ed \parallel cf, ad \parallel cb, ab \parallel cd$, сполучаємо точки a, b, c, d, e і маємо поземий мет куба.

Понеже усі руби куба похилені в нашому випадку, то однаковим кутом до поземої площі мету та поземі мети усіх рубів будуть рівні між собою $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ і таким чином поземий мет куба, косина якого $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ пряма до поземої площі мету буде правильний шестикутник з боком $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ /приблизно $0,8a$ /.

Перейдемо до доземого мету куба.

Знайдемо поземо-метові прямі точок B, D, F / dD /, та точок A, E, G / a, g / та рисуємо по тих даних доземий мет $a'b'c'd'e'f'g'h'$ куба.

Руби $AD, AH, ED, EH, BG, BC, CF$ та FG мають однаковий кут нахилу до доземої площі мету тому мети їх повинні бути рівними; те саме відноситься й до рубів AB, CD, EF, GH ; тому можна зробити висновок, що поземо-метові прямі вершків B, D, F рівні $1/3$, вершків A, G, E - $2/3$, а вершка H - косині куба.

На рис. 139, таб. XXI показано менш забарний спосіб рисування кубу, косина якого пряма до площі мету.

Спочатку по даному рубу a знаходимо косину

стілки $/a\sqrt{2}/$, потім косину куба $/a\sqrt{3}/$, ставимо цю косину прямо до вісі OX , та поділяємо її на три частини. На простих поведених через точки поділу рівнобіжно з віссю OX будуть лежати доземні мети вершків куба.

Для збудування поземного мету, рисуємо рівнобокий трикутник з боком $a\sqrt{2}$, описуємо навколо нього коло, та вписуємо в це коло правильний шостикутник. Коли сполучаємо вершки шостикутника з осередком, матимемо поземний мет куба. Доземний мет нарисувати вже легко.

Треба нарисувати мети октаедра, що лежить на поземній площі мету.

Рисуємо основу $AFD/afd/$ октаедра /рис. 140, таб. XXI/ та зливаємо усі стінки його, /крім верхньої основи/ з поземою площею мету. При повертанні цих стінок назад одержимо мети точок $A, B, C/a, b, c/$ сполучивши які з метами вершків основи, одержимо поземний мет октаедра.

Можна і не знаходити за допомогою зворотнього повертання усі три мети a, b та c ; вистачить знайти лише одну з тих точок і це буде одна з вершків трикутника верхньої основи, рівного та розположеного зворотньо з трикутником нижньої основи.

Доземний мет легко вже нарисувати, як це видно з рисунку.

Нарисуємо ще мети додекаедра та ізокаедра.

Маємо основу додекаедра /рис. 142, таб. XXII/ та злите положення двох стінок 1.6.7.8.5 й 5.8.9.10.4. Вертаємо їх назад, та знаходимо поземний мет 8 вершка 8, а разом мет 5.8 куба 5.8. Руби 5.8, 1.6, 2.14, 3.12 та 4.10 мають однаковий нахил до площі мету, тому мети їх будуть рівні між собою, а разом з тим вони переполовиняють кути у вершків. Таким робом можемо нарисувати мети цих рубів, а саме 1.6, 2.14, 3.12, 4.10.

Тепер треба знайти мети вершків 6, 14, 12, 10 та 8. Продовжуємо в злитому положенні руби 5.1 та 7.6 до перехрестя в точці M . При зворотньому обертанні, точка M залишиться на місці і проста

M 7. терейде у просту M 7 /проходить через точку $b/$. Нахил рубів 7.17, 15.16, 13.20, 11.19, 9.8 до площі мету однаковий з тими рубами, що раніш нарисовані; тому величина їх метів, а також розположення відносно основи /пряме до рубів основи/ буде те саме. Таким робом мети усіх точок додекаедра.

Для того, щоб нарисувати доземний мет додекаедра треба знайти поземо-метові прями p та t .

Прям p знаходиться в трикутника 3.12.12, де протипрямка це дійсна довжина руба 3.12, прямками мета цього руба, та поземо-метовий прям p вершка 12.

Прям ℓ знаходиться в трикутника 9.21.9. де протипрямкою дійсна довжина пряма 9.21, прямками мет 9.21 цього пряма та поземо-метовий прям ℓ вершка 9.

Ізокаедр має три частини: нижню піраміду, з основою правильний п'ятикутник, бік якого рівен рубу, середньої частини, та верхньої піраміди однакової з нижньою.

Тому рисування поземого мету ізокаедра в разі коли косина його пряма до поземої площі мету /рис. 141, таб. XXII/, дуже просто.

Рисуємо правильний п'ятикутник 2.3.4.5.6, бік якого рівен рубу ізокаедра. Осередок кола, описаного навколо цього п'ятикутника, точка 1, буде метом нижнього вершка; сполучимо точку 1 з точками 2, 3, 4, 5 та 6 і будемо мати поземий мет нижньої піраміди ізокаедра.

Верхня піраміда має свій вершок у тій самій точці 1 /12/, а п'ятикутник основи її, обернений відносно основи нижньої піраміди на 180° . Рисуємо правильний п'ятикутник з осередком кола, описаного навколо нього, в точці 1 /12/, сполучаємо точки /висоти вершків/ 7, 8, 9, 10, 11 з точкою 12, мети вершків 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 між собою і маємо повний поземий мет ізокаедра.

Поземо-метові прямі p та ℓ , без яких не можна нарисувати доземого мету ізокаедра, знаходимо: прям p в трикутника 3.1.3. де протипрямка 1.3. - це дійсна довжина руба, прямка 1,3 - мет цього руба, а друга прямка 3.3. - поземо-метовий прям вершка 3 /а також вершків 2, 4, 5 та 6/; прям ℓ /вже не відносно поземо-метової площі, а площі основи нижньої піраміди/ в трикутника 5.10.10. де протипрямка 5.10. - це дійсна довжина руба 5.10, прямка 5.10 - мет цього руба, а друга прямка 10.10. - прям ℓ .

§ 23. СПОРІДНЕНІСТЬ.

Як що ми маємо дві площі P та P_1 й напрямки, який не буде рівнобіжним ні з площею P , ні з площею P_1 , то кожна проста, того ж напрямку перетинає площі P та P_1 , в точках напр. A та A_1 , /рис. 143, таб. XXII/. Можна прийняти або A за мет A , або навпаки, в залежності від того, яку з площ взяти за площу мету. Точки A та A_1 знаходяться виходить в такому відношенні, що кожна з них відповідає другій. Такі точки відповідні між собою, підлягають трьом законам, а саме:

1/ Точка зливається з відповідною їй точкою тільки тоді, як що вона лежить на простій перетину двох площ.

2/ Як що одна з точок рисує на площі просту, то те саме діється з відповідною їй точкою, себ то кожній простій в одній площі є відповідна їй проста в другій площі.

3/ Рівнобіжні між собою прості одної площі відповідають теж рівнобіжним простим другої площі.

Тепер візьмемо дві перетяті площі P та P_1 /рис. 143, таб. XXII/, але ми не маємо певного напрямку. Постараємося розглянути відношення точок обох площ у загальному випадку.

Виберемо довільну пару точок A і A_1 , себ-то припустимо, що точці A на площі P відповідає точка A_1 на площі P_1 . Ми можемо користуючись трьома висловленими законами для кожної точки M площі P знайти відповідну точку M_1 на площі P_1 .

Ведемо просту AM ; вона перекрещує просту перетину площ в точці B . Друга довільна проста поведена через точку A_1 , перекрещує просту перетину площ в точці C , а проста $MD \parallel AC$ в точці D .

По першому закону точки B, C, D злиті з відповідними їм точками B_1, C_1, D_1 площі P_1 ; по другому закону простим AB та AC площі P відповідають прості A_1B_1 та A_1C_1 , а по третьому закону рівнобіжним простим AC та MD відповідають рівнобіжні прості A_1C_1 та M_1D_1 . Висновок з цього, що точка M_1 площі P_1 відповідає точці M площі P .

Таке відношення точок простих та фігур двох площ називається СПОРІДНЕНІСТЬ або АФІНІТЕТ /лат. *affinitas*/; самі точки прості, або фігури звуться СПОРІДНЕНИМИ, або афінними, а проста перетину обох площ ВІССЮ СПОРІДНЕННЯ або ВІССЮ АФІНІТЕТУ.

Подивимось на де-які випадки спорідніности що може бути нам у пригоді надалі, але коча цей метод нарисної геометрії зараз поширюється, за браком часу, на жаль, довше на ньому зупинятися не будемо.

Маємо вісь споріднення xx /рис. 144, таб. XXII/ чотирикутник $ABCD$, та споріднену з точкою A точку A_1 . Треба знайти споріднені для $ABCD$ чотирикутник.

Продовжуємо AB до точки 1, та AD до точки 4. Споріднені прості будуть A_11 та A_14 . Через точку D ведемо просту $D6 \parallel A_11$ тоді через точку 6 повинна пройти споріднена проста $6D \parallel A_14$, яка визначить точку D_1 . Прості 3. B та споріднена 11 3. B_1 визначать точку B_1 і нарешті прості 5. B_1 та 2. D_1 дадуть точку C_1 .

Маємо чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ споріднений з чотирикутником $ABCD$

Фігури не кінче повинні знаходитися на

обидва боки вісі споріднення. Можна мати споріднені фігури й для випадку рис. 145, таб. ХІІІ.

Маємо трикутник BCD та споріднену з точкою D точку D_1 .

Продовжуємо BD до точки I , та CD до точки 2 і маємо споріднені прості $1.D$ та $2.D_1$. Через точку B ведемо просту $3.B \parallel 2.D$; споріднена проста $3.B_1 \parallel 2.D_1$ визначить точку B_1 . Проста $4.C \parallel 1.D$ має споріднену просту $4.C_1 \parallel 1.D_1$, яка дасть точку C_1 , а з рештою й спорідненим трикутником $B_1C_1D_1$.

Вісь споріднення може перетинати дану фігуру /рис. 146, таб. ХІІІ/ і тоді, коли маємо одну споріднену точку A_1 , можемо нарисувати усяк споріднену фігуру.

Точки F та E будуть самі з собою споріднені, тому споріднена з простою AB проста A_1B_1 пройде через точку F , а споріднена з простою CD проста пройде через точку E .

Споріднена з простою AD буде проста $1.A_1$. Через точку D ведемо просту $3.D \parallel AB$; споріднена проста $3.D_1 \parallel A_1B_1/A_1F$ дасть точку D_1 . Споріднена з простою DB проста $4.D_1$ в продовженні дасть точку B_1 , а перекрестя споріднених простих $3.B_1$ та $4.D_1$ дасть точку C_1 , а разом з тим й всю споріднену фігуру $A_1B_1C_1D_1$.

§ 24. ПЕРЕТИН МНОГОСТІННИКІВ З ПЛОЩЕЮ.

Щоб перейти до знаходження перетину многостінників, треба спочатку уміти знаходити:

- а/ перетин простої з площею
- в/ перетин многостінника з площею
- с/ перетин многостінника з простою.

Перша частина була розглянута в § 12, тепер перейдемо до наступних.

Перетин многостінника з площею, це перетин площі з коьним рубом многостінника, себ-то зводиться до методів § 12.

Точки перетину рубів з площею будуть вершками многокутника перетину; залишиться тільки сполучити ці вершки боками. При тому обов'язково треба звернути пильну увагу, аби боки многокутника перетину лежали на стінках многокутника, а не пробивали його.

Розберемо це на прикладах.

Маємо правильну піраміду $SAB CDE F / s a b c d e f$, $s a' b' c' d' e' f'$; треба знайти многокутник перетину її з площею $P / P_h, P_v$; поведемо до дозимої площі мету /рис. 147, таб. ХІІІІ/.

Площа P є доземо-метова, тому все, що в ній лежить, а також і многокутник перетину мету - ється доземо на слід P_r . Доземий мет многокутника перетину буде $1'2'3'4'5'6'$.

Поземі мети цих точок - вершків многокутника перетину лежатимуть на одному прямі з своїм доземим метом, одночасно і на поземих метах відповідних рубів, це будуть точки 1, 2, 3, 4, 5 та 6.

При сполученні вершків треба звертати увагу, як це було висловлено на те, аби боки многокутника перетину обов'язково лежали на стінках многостінника, тому, напр. точку 1 можна сполучити з точками 2 та 6, бо бік 1.2 лежить на стінці SAB , а бік 1.6 на стінці SAC ; але сполучити напр. 1 з 3 не можна, бо проста 1,3 проб'є многостінник.

Таким робом знайшли шостикутник 1.2.3.4.5.6 /1.2.3.4.5.6; 1'2'3'4'5'6'/ перетину даної піраміди з даною площею.

Для того, щоб мати дійсний вигляд многокутника перетину переходимо до системи площ мету $\frac{P}{H}$, в якій поземий мет 1.2.3.4.5.6 є дійсний вигляд цього многокутника.

Нехай треба знайти перетин тієї самої піраміди з площею прямою до поземої площі мету /рис. 148, таб. XXIII/.

Поземий мет многокутника перетину буде 1.2.3.4.5.

Доземий мет його вершків лежить на одних прямых та на доземих метах відповідних рубів. Для вершків 1,3,4 та 5 доземі мети знайдуться відразу, а для вершка 2 цього відразу зробити не можна, бо руб SAE лежить в профільній площі.

Переїдемо до нової системи площ мету, а саме системи $\frac{P}{H}$. За браком місця, новий мет піраміди нарисований частково. Точка 2', є доземий мет точки 2 в системі $\frac{P}{H}$, але поземо-метовий прям 2'1,2 дійсний й для системи $\frac{P}{H}$, і це дає нам змогу визначити доземий мет 2' точки 2.

Многокутник перетину буде 1.2.3.4.5. /1.2.3.4.5. ; 1'2'3'4'5'./.

Для того, щоб знайти дійсний вигляд цього многокутника зливаємо площу P з доземою площею мету, тоді многокутник 1.2.3.4.5. й буде цим дійсним виглядом.

Перетин похилої призми $ABCD/a'b'c'd'/$ з довільною площею $P/P_h, P_r/$ показаний на рис. 149, таб. XXIII.

Тут треба знайти точки перетину усіх рубів призми з площею P ; ці точки будуть вершками многокутника перетину.

Допоможіть площі, що ми ведемо для цього через руби призми, будуть між собою рівнобіжні, бо поведені через рівнобіжні прості - руби; тому про-

сті перетину цих допоможних площ з площею P теж будуть рівнобіжні між собою. Це полегшує працю, бо вистачить знайти тільки одну з простих перетину, а напромак вже буде відомий.

Таким способом знайдена точка $3/3, 3'/$ перетину руба $CC_1/cc_1, c'c'_1/$ з площею P , користуючись допоможною площею Q та простою $EF/ef, e'f'/$ перетину площ Q та P . Для решти точок маємо допоможні прості перетину $G.2, H.4$ та $J.1$ - усі рівнобіжні з простою EF .

Многокутник перетину буде чотирикутник $I.2.3.4./I.2.3.4, I'2'3'4'/$. Для того, щоб мати його дійсний вигляд треба зняти площу P разом з многокутником перетину з одною з площ мету.

Спорідненість дає нам спосіб полегшити усю цю працю, та знаходити далеко швидче, та зручніше, многокутник перетину.

Дійсно основа - слід многостінника, як що він стоїть на площі мету, та многокутник перетину лежать в двох площях, що перетинаються по простій - сліду площі, - тому можна розглядати ті два многокутника, яко споріднені та способами, показаними в § 23, знаходити споріднену фігуру. Для того треба мати найменш хоча одну споріднену точку. Покажемо це на прикладі.

Маємо піраміду $SAB CDE F/sab cdef, s'a'b'c'd'e'f'/$. Треба знайти її перетин з довільною площею $P/P_h, P_v/$.

Віссю споріднення для даного випадку буде поземий слід P_h площі P /рис. 150, таб. XXIV/. Знаходимо, користуючись допоможною площею S , одну з точок перетину, а саме перетин руба $SD/s'd, s'd'/$ з площею P ; це буде точка $4/4, 4'/$.

Будемо рахувати точку 4 спорідненою точкою для d ; тоді прості $cd/cd/$ та $ed/ed/$ будуть мати споріднені прості $4.II$ та $4.I2$, які в перетині з рубами sc та se дають точки 3 та 5, споріднені з точками c та e . Проста $bc/bc/$ має споріднену просту $3.I0$, яка дасть точку 2 споріднену з точкою b . Проста af не дає на площі рисунку перетину з віссю споріднення. Можна через точку b провести просту, що проходить через точку перехрестя простих af та P_h , користуючись методами § 2 /рис. III та рис. IV/, але далеко простіше скористуватися деякими другими простими. Напр. проста $ac/ac/$ має споріднену просту $3.I4$, яка й дасть нам точку 1, споріднену з точкою a .

Таким робом маємо усі точки - вершки многокутника перетину, себ-то маємо поземі їх мети; доземі мети знаходяться по загальному правилу.

Цей спосіб зручніший, та простіший за другі, і його можна вживати з користю тоді, як ясно визначена вісь споріднення.

Тут були розглянуті випадки перетину багатогранників, що стоять на площі мету. Як що багатогранник висить у просторі, то хід праці залишається той самий і не викликає ніяких труднощів.

§25. ПЕРЕТИН БАГАТОГРАННИКІВ З ПРОСТОЮ.

Через просту ведемо метову площу, знаходимо перетин цієї площі з багатогранником. Багатокутник перетину та дана проста знаходяться в одній /допоможній/ площі. Точки їх перехрестя одночасно лежать і на простій і на стінках багатогранника, себто будуть точками перетину простої з багатогранником.

Покажемо примінення цього способу на прикладах.

Маємо піраміду $SABCD /sabc, s'a'b'c'd' /$; треба знайти перетин її з простою $МN (m'n, m'n' /$.

Через просту $МN$ ведемо /рис. 151, таб. XXIV/ додемо метову площу S та знаходимо перетин її з пірамідою.

Це буде чотирикутник $3456 /3.4.5.6, 3'4'5'6' /$, який перехреститься з простою $МN$ в точках $1 /1, 1' /$ та $2 (2, 2')$, що й будуть точками перетину. Точка 1 лежить на боці 3.6 чотирикутника перетину, себ-то вона тим самим лежить на стінці SAD , яка для обох метів уся видна, тому частина простої до точки 1 закриває піраміду, - $М1$ буде на обох метях видна.

Точка 2 лежить на боці 3.5, себ-то на стінці SBC , яка видна на поземому меті і закрита другими стінками на доземому меті. Тому частина $2N$ на поземому меті видна, а на доземому еті частково закрита пірамідою.

Частина 1.2 простої $МN$ увійшла в тіло піраміди: ця частина закрита на обох метях пірамідою. Одну з точок 1 або 2 називають точкою входу, а другу точкою виходу простої з багатогранника.

На рис. 152, таб. XXIV показано перетин простої з багатогранником, стінки якого уявляють з себе метові площі.

Проста KL перетинає даний брус в точках $3 /3, 3' /$ та $4 /4, 4' /$, мети яких знаходяться на перехресті відповідних метів простої з метями бруса.

Тут вже не треба користуватися допоможними площами.

Перетин простої $МN (m'n, m'n' /$ теж не викликає труднощів. Поземі мети точок перетину 1 і 2 ле-

жать на перехресті відповідних метів простої та бруса, а доземі мети на одному з доземим метом прямим, та на метам простої.

На рис. 153, таб. XXV, показаний перетин піраміди $S A D E / s a d e, s' a' d' e' /$ з простою $A B / a b, a' b' /$ прямою до доземної площі мету.

Поземні мети точок перетину зіл'ються з доземним метом простої $A B / a b /$. Для того, щоб знайти доземний мет цих точок поведемо через просту профільну допоміжну площу P , знайдемо перетин тієї площі з пірамідою - трикутник $H F G / h f g, h' f' g' /$ та перейдемо до нової системи площ мету H . В цій системі H , трикутник перетину $H F G$ буде мати мети $f g h$ та $f' g' h'$, а проста $A B - a b, a' b'$.

Точки перехрестя метів $a' b'$ та $f' g' h'$ - точки 1 , та 2 , будуть доземними метами точок перетину простої $A B$ з пірамідою $S C D E$ в системі площ мету H .

Перейдемо до системи площ мету V і маємо доземні мети $1'$ та $2'$ точок 1 та 2 .

Точка 1 лежить на боці $H F$, себ-то на стінці $S C D$; вона на обох метам закривається самою пірамідою, а точка 2 лежить на рубі $G F$, себ-то на стінці $C D E$ й буде на обох метам видима.

На рис. 154, таб. XXV показаний перетин простої $M N / m n, m' n' /$, прямої до вісі $O X$ з призмою $A B C D A_1 B_1 C_1 D_1 / a b c d a_1 b_1 c_1 d_1, a' b' c' d' a_1' b_1' c_1' d_1' /$

Допоміжною площею теж беремо профільну площу P , знаходимо багатокутник перетину площі P з призмою - $3 4 5 6 7 / 3 4 5 6 7, 3' 4' 5' 6' 7' /$ та зливаємо площу P , разом з простою $M N$ та багатокутником $3 4 5 6 7$ з певною площею мету.

І злитому положенню проста $M N / m n, m' n' /$ перехреститься багатокутником $3, 4, 5, 6, 7$ в точках 1 , та 2 , які й будуть злитими точками перетину простої з призмою.

Повернення площі P назад визначить мети цих точок, а саме $1, 1'$ та $2, 2'$.

Точка 1 лежить на боці $3, 7$, себ-то на стінці $B C B_1 C_1$, яка видна на поземному меті, а не видна на доземному. Точка 2 лежить на боці $5 6$, себ-то на стінці $A D D_1 A_1$ видній доземно, та не видній поземно. Це разом з тим дає нам відзнаку, які з метів точок $1, 2$ та простої $M N$ видні, а які ні.

§ 26. ПЕРЕТИН МНОГОСТІННИКІВ

МІЖ СОБОЮ.

Знаходження перетину многостінників між со-

бою зводиться до знаходження перетину рубів одного многостінника з другим, потім рубів другого многостінника з першим, та сполучення точок перетину.

Виходить, що ця праця є знаходження точок перетину простої з многостінником.

Найтрудніше в цій праці це сполучення точок перетину, бо головне правило тут таке, що ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ ПОВИННІ ЛЕЖАТИ на стінках обох многостінників і ні в якому разі не проходити через тіло самих многостінників. Це найкраще вясниться на прикладах.

Спочатку розберемо випадки, коли обидва многостінники висять у простороні, потім поставимо один з них на площу мету, потім поставимо обидва на різні площі мету, і нарешті поставимо їх на одній площі мету.

Маємо куб $ABCDEFGH$ / $abcdefgh, a'b'c'd'e'f'g'h'$ / та піраміду $SMNL$ / $smnl, s'm'n'l'$ /; треба знайти їх перетин /рис. 155, таб. XXVI/.

Знаходимо перетин рубів SM, SN, SL піраміди з кубом, бо з рисунку ясно видно, що руби ML, LN, MN не перетинаються з кубом.

Допоможна площа поведена через руб SM дасть у перетині чотирикутник 10.11.12.13 /довезмі мети не визначені аби не затемнювати рисунку, / який дасть точки 1 /1,1'/ та 2 /2,2'/ перетину руба SM з кубом. Так само руб SN перетинається з кубом в точках 3 /3,3'/ та 4 /4,4'/, а руб SL - в точках 5 /5,5'/ та 6 /6,6'/.

З рубів куба перетинають піраміду тільки руби CH в точках 9 /9,9'/ та 10 /10,10'/ і DE в точках 7 /7,7'/ та 8 /8,8'/; решта рубів куба не перетинає піраміду, у чому можна переконатися, користуючись методами § 13, або нарисувавши, напр. для руба EF многокутник перетину 21.22.23.24; ясно що перетину нема.

Сполучення точок перетину можна починати з довільної точки. Візьмемо напр. точку 1. Вяснимо на якій стінці куба знаходиться та точка. Вона лежить на простій 10.11, себ-то на стінці $ABGF$, на якій ця проста лежить. На цій самій стінці лежать також точки 3 та 5. Відносно стінок куба точку 1 можна сполучити з точками 3 або 5.

Тепер подивимось як ці точки лежать відносно піраміди. Точка 1 лежить на рубі SM , точка 3 на рубі SN і точка 5 на рубі SL , так що кожна проста 1.3, 1.5 та 3.5 лежить на відповідній стінці піраміди.

Таким робом маємо одну фігуру перетину, а саме трикутник 1.3.5 /1.3.5, 1'3'5'/.

Тепер почнемо з точки 4 /4,4'/ . Вона лежить на ^{стінці} $ACDEH$ куба, на якій лежать теж точки 7, 8, 9 та

10. Так що відносно куба точку 4 можна сполучити з усіма тими точками.

Відносно піраміди точка 4 лежить на рубі, так що її можна сполучити лише з точками, що лежать на стінці SNL /точка 7/ та на стінці SNM /точка 9/, а з точками 8 та 10 сполучити не можна, бо вони лежать на стінці SML .

Таким робом можемо написати

$$9 + 4 + 7.$$

Перейдемо до точки 7. Вона лежить на рубі DE куба; відносно куба її можна сполучити з 6 та 8, але відносно піраміди сполучити з точкою 8 не можна, бо точка 8 лежить на стінці LMS /на простій $2I.24$ /, а точка 7 на стінці SNL /на простій $2I.22$ /.

Маємо:

$$9 + 4 + 7 + 6.$$

Точку 6 відносно обох многостінників можна сполучити з точкою 8 /лежать обидві на стінці DEF куба, та SML піраміди.

Пишемо:

$$9 + 4 + 7 + 6 + 8.$$

Точку 8 можна, відносно куба сполучити з точками 9 та 10, бо всі ці точки лежать на стінці $CDEH$ /як це ми з'ясували раніш/, але відносно піраміди точка 8 /проста $2I.24$ / та точка 10 /проста 25.27 /, лежать на одній стінці SML , а точка 9 на стінці SMN .

Маємо:

$$9 + 4 + 7 + 6 + 8 + 10.$$

Точку 10 можна сполучити з точкою 2 /стінка $BCNH$ куба, та SMN піраміди, а точку 2 з точкою 9 /лежать теж на одних стінках многостінників/.

Нарешті маємо:

$$9 + 4 + 7 + 6 + 8 + 10 + 2 + 9$$

Тепер треба з'ясувати які з метів боків многокутників перетину будуть видні, а які закриті стінками многостінників.

Тут треба взяти під увагу таке правило: **ВИДНИМИ БУДУТЬ ТІ З МЕТІВ БОКІВ МНОГОКУТНИКІВ ПЕРЕТИНУ, ЯКІ ЛЕЖАТЬ НА СТІНКАХ ВИДНИХ ДЛЯ ОБОХ МНОГОСТІННИКІВ.**

Для поземого мету мети 1.3, 1.5 та 3.5 лежать на стінці $ABGF$ яка не видна; тому вони не видні. Проста 2.9 лежить на видних поземо стінках

АСВГ та АММ піраміди: те саме відноситься й до простих 24 та 47, решта метів боків многокутника перетину пожемо невидні.

Доведемо видними будуть мети $1'3'$, $3'5'$ та $6'7'$, бо лежать на видних стінках обох многостінників; решта метів хоча лежить на видних стінках одного многостінника, але на невидній стінці другого; тому їх не видно.

Для нашого випадку маємо два многокутника перетину: один 2.9.4.7.6.8.10.2 - многокутник входу, другий 1.3.5 многокутник виходу. Загально ці многокутники фігури не плоскі, але як виняток вони можуть бути й плоскими /трикутник 1.3.5/.

Як це бачимо далі можливо, що обидва многокутника перетину переходять в один загальний.

Перетин піраміди $SAB CDE /sabcde, s'a'b'c'd'e'/$ яка стоїть на поземній площі мету з призмою $FGHJ /fghj, f'g'h'i'/$, що висить у повітрі показаний на рис. 156 таб. XXVI.

Спочатку, як у попередньому випадку, знаходимо перетин рубів призми з пірамідою.

Руб HN дасть точки $1 /1, 1' /$ та $2 /2, 2' /$; руб J -точки $3 /3, 3' /$ та $4 /4, 4' /$. Решта рубів призми з пірамідою не перетинаються.

Руби піраміди з призмою перетинаються: руб SA - точка $1 (1, 1')$, руб SB точки $7 /7, 7' /$ та $8 /8, 8' /$ та руб SE точки $5 /5, 5' /$ та $6 /6, 6' /$; руби SD та SE з призмою не перетинаються.

При сполученні точок перетину можна написати послідовно

$$1 + 3 + 7 + 7 + 4 + 2 + 5 + 8 + 1$$

Радимо перевірити чи послідовність сполучення точок відповідає положенню їх на відповідних стінках призми та піраміди.

На поземному меті будуть видні мети 1.8.8.5 та 5.2; на доземному $2'4'$ та $4'6'$.

Тут маємо один спільний многокутник перетину.

На рис. 158, таб. XXVII показаний перетин двох призм: I-ої $ABCD /abcd, a'b'c'd' /$, що стоїть на поземній площі мету та стінки прями до поземної площі мету /брус/ з призмою II-ою $EFGH /efgh, e'f'g'h' /$, руби якої рівнобіжні з поземною площею мету.

Точки 1, 2, 10, 6 та 5 знаходяться просто: поземні мети їх лежать в перехресті метів рубів $AB /ab /$ та $CD /cd /$ з рубами $GG_1 /g_1g_1 /$, $HH_1 /h_1h_1 /$ та $FF_1 /f_1f_1 /$, а доземні мети на прямих до вісі OX та метал відповідних рубів призми II.

Руб AA_1 призми I перетне призму II в точках 3 та 9; також руб DD_1 - в точках 4 та 7. Поземні їх мети збігаються з метами рубів AA_1 , та DD_1 точками

а та 6. Щоб знайти доземі мети цих точок, поведемо через поземі їх мети мети творчих призми II, на яких лежать ці точки. Для точки 3 та 9 це буде: творчі 3.13 та 9.12, а для точок 4 та 7 - творчі 4.11 та 7.10. Мети цих творчих будуть рівнобіжні з метами рубів призми II. Знаходимо доземі мети точок 10, 11, 12 та 13, ведемо доземі мети творчих та знаходимо доземі мети точок 3, 9, 4 та 7.

Послідовність сполучення точок перетину буде така:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 1$$

На поземому меті мет многокутника перетину зливаються з поземим метом бруса, а на доземому меті видними будуть боки: 3' 4', 4' 5' та 8' 9'.

На рис. 161, таб. XXIX показаний аналогічний випадок, тільки на місто бруса взята піраміда $SABC$ / $sabc$, $s'a'e'e'$.

Ми бачимо, що руб HH_1 перетинає піраміду в точках 1 та 6, які лежать на творчих $S12$ та $S11$. Ці творчі визначаються, коли ми перейдемо до системи площ мету $\frac{H}{H}$, в якій ясно видні мети цих творчих. Це саме робимо для рубів EE_1 та GG_1 призми, що дає точки 3/3, 3'/5/5, 5'/7/7, 7'/9/9, 9'/9/9. Руб FF_1 призми не перетинає піраміду.

З метів системи $\frac{H}{H}$ видно, що руб SC піраміди призму не перетинає. Та ж сама система дає точки 4 та 8 перетину рубів SB з призмою. Що торкається точок 2 та 10 перетину рубів SA , то система $\frac{H}{H}$ дає поземо метові прями цих точок і визначити їх доземі мети вже можна. Але можна ці мети знайти також іншим шляхом, шляхом рисування доземих метів творчих призми / 2.17' та 10.18' /, на яких лежать ці точки.

Послідовність сполучення точок многокутника перетину буде така:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 1$$

На поземому меті видимі боки будуть 1.10, 10.9, 9.8, 8.7 та 7.6, а на доземому меті боки 4' 2', 5' 6', 6' 7' та 10' 1'.

Якщо наші многостінники стоять один по поземій, а другий на доземій площі мету, то можна користуванням допоможних площ полегшити виконання завдання.

Коли ми маємо дві піраміди, то ведемо допоможні площі так, щоб вони проходили через вершки пірамід. Ці допоможні площі перетнуть многостінники по творчих, перехрестя яких дасть точки многокутника перетину.

У випадку піраміди та призми допоможні пло-

мі ведемо через вершок піраміди рівнобіжно з рубами призми; у випадку двох призм допоможні площі рівнобіжні з рубами призми.

В разі коли наші многостінники стоять на одній площі мету, то метод розв'язання той самий; тут маємо де-які полекшення, які побачимо на прикладах.

На рис. 157, таб. XXVII маємо дві піраміди: I-а $SABCD/sabcd, s'a'b'c'd'/$, яка стоїть на поземній площі мету, та II-га $TEFGH/tefgh, t'e'f'g'h'/$, що стоїть на доземній площі мету.

Через вершки S та T ведемо просту ST та знаходимо її сліди: поземний $M/m, m'/$ та доземний $N/n, n'/$. Кожна площа, сліди якої проходять через сліди M та N , проходить через просту MN а також через вершки S та T .

Ведемо такі площі через руби піраміди II.

Площа P поведена через руб TE , має доземним слідом P_v просту, що проходить через точку n' та e' - доземний слід руба TE . Поземний слід P_h проходить через точку m , та перехрещується в слідом P_v на вісі ox .

Площа P перетинає піраміду II по рубу TE , а піраміду I по творчих $S.4$ та 3.10 , перехрестя яких визначає точки $1/1,1'/$ та $6/6,6'/$ многокутника перетину.

Площа T , що поведена через руб TH визначає точки $2/2,2'/$ та $5/5,5'/$; площа S /через руб TP дає точки $7/7,7'/$ та $10/10,10'/$. Площа, яка проходить через руб TC , піраміду I не перетинає; це показує, що руб TC не перетинає піраміду I.

Тепер ведемо так само допоможні площі через руби піраміди I.

Руби SA та SD не перетинають піраміду II, площа R , поведена через руб SR дає точки $3/3,3'/$, $10/10,10'/$, площа Q /через руб SC / дає точки $4/4,4'/$ та $8/8,8'/$.

Послідовність сполучення точок буде:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 1.$$

На поземному меті маємо видимими боки: 1.10, 10.9, 9.8, а на доземному $n'5', 5'6', 6'7'$ та $7'8'$.

Для визначення слідів, через які проходять допоможні площі, у випадку піраміди та призми /рис. 159, таб. XXVIII/ ведемо через вершок $S/s, s'/$ піраміди просту $SN/sn, s'n'/$, рівнобіжну з рубами призми, та знаходимо її сліди $N/n, n'/$ та $M/m, m'/$.

Дальше виконання зовсім подібне до задачі рис. 157, таб. XXVII, тому зупинятися на тому не будемо.

Тут маємо випадок, коли один многостінник чинить основу другого.

Руб $B/6,6'$ призми має дві точки перетину з пірамідою $3/3,3'$ та точку $9/9,9'$, яка вже лежить по за пірамідою; так само руб $SF/sf, s'f'$ має один з точок перетину, точку $10/10,10'$, що лежить по за пірамідою.

При сполученню точок перетину ці точки треба взяти під увагу, але многокутник перетину T/t перетне й основу піраміди.

Порядок сполучення точок многокутника перетину буде такий:

$$I + 8 + 5 + 6 + 2 + 3 + 7 + 4 + 10 + 9 + I$$

Ту точку, де бік 4.10 перетинає основу, треба сполучити з точкою, в якій бік 9.1 теж перетинає основу, і це сполучення включити в многокутник основи так, що він буде такий:

$$I + 8 + 5 + 6 + 2 + 3 + 7 + 4 + 2 + R + I$$

На поземому меті будуть видні боки: 5.8, 8.1 та а на доземому боки $2'6', 6'5'$ та $5'8'$.

Як що маємо дві призми /рис. 160, таб. XXVIII/ з яких I стоїть на поземій площі мету $ABCD, a b c d, a' b' c' d'$, а II на доземій площі мету $EFG, e f g, e' f' g'$, то допоможну площу ведемо в такий спосіб:

Беремо довільну точку $M(m, m')$ ведемо через неї прості рівнобіжні з рубами обох призм, та знаходимо сліди площі, що проходить через ці прості. Це буде площа рівнобіжна з рубами обох призм; тому всі площі з нею рівнобіжні перетнуть ці призми по творчих.

Ведемо такі площі спочатку через всі руби призми I-ої; це будуть площі T, R, S, U , сліди яких повинні перехреститися на вісі ox /на рисунку не показано/, а потім через руби призми II ведемо площу Q , яка проходить через руб $F/f, f'$. Зрозуміло, що ці площі рівнобіжні з площею P .

Ці площі визначають, як й у попередніх прикладах, точки перетину обох призм, при чому знову точка $6/6,6'$ лежатиме по за призмою I, а тому в многокутник перетину вийдуть точки $R/r, r'$ та $S/s, s'$ основи призми.

Многокутник перетину сполучаємо так:

$$I + 4 + 5 + 10 + 7 + 9 + I$$

Це буде многокутник виходу I призми у другу; утнік входу складеться так:

$$2 + 3 + 6 / S + r / + 8 + 2$$

та доземому метам не буде ні одного ви-

димого боку, а в багатокутнику виходу на поземому меті видні боки: 1.9, 9.7, 7.10 та 10.5; на доземому ж меті видні боки: 9.7 та 7.10.

У випадках, коли обидва многостінники стоять на одній з площ мету, то спосіб ведення допоможних площ той самий, що був тільки що показаний; тільки для розв'язання задач важні не два сліда допоможних площ, а один, - той, на якій площі мету вони стоять.

Маємо дві піраміди /рис. 162, таб. XXIX/ I-а $SABCD/sabed, s'a'e'c'd'/$ та II-а $TEFG/tefg, t'e'f'g'/$, що стоять на поземій площі мету.

Через вершки пірамід $S/s, s'/$ та $T/t, t'/$ ведемо просту, та знаходимо поземий її слід $M/m, m'/$. Кожна площа поведена через просту ST перетне обидві піраміди по творчих, а поземий слід кожної такої допоможної площі пройде через точку m .

Ведемо такі допоможні площі через усі руби піраміди II /поземі сліди P_h, R_h та $Q_h/$, потім через руби піраміди I, тут тільки одна площа S поведена через руб SB перетне другу піраміду, площі поведені через решту рубів II піраміди, першу піраміду не перетнуть.

По напрямку слідів допоможних площ, а головним чином через виявлення на яких стінках лежать ті творчі, що визначають точки перетину можна з'ясувати згори чи буде два багатокутника перетину, чи один спільний.

Творчі, по яких перетинається допоможними площами піраміда I лежать на стінках $SCD/s.10, s.12, s.14/$, $SBC/s.10, s.13/$ та $SAB/s.15/$, руби SC, SD та SA , а також стінка SAD точок перетину на собі не мають, так що сполучити точки перетину, що лежать на стінці SCD з точками стінок SAB та SBC не можна. Висновок з того, що повинно бути два багатокутника, один входу піраміди II в I-шу /лежить на стінці $SCD/$, а другий виходу лежить на стінках SAB та SBC .

Цей метод можна пристосовувати й до попередніх прикладів, що радимо виконати за для вправи.

Многокутник входу складається так:

$$1 + 2 + 3 + 1$$

На поземій площі мету видимими будуть мети 1.3 та 3.2, на доземій площі мету весь багатокутник закритий стінкою SAD піраміди I.

Многокутник виходу буде такий:

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 4$$

на поземій площі мету мети 4.5, 5.6, 5.6 та 6.7 бу-

дуть видимі, а на доземій площі мету весь многокутник теж буде закритий тою самою стінкою

У випадку призми та піраміди /рис. 163, таб. XXX/ ведемо через вершок піраміди $S/s, s'/s'$ просту рівнобіжну з рубами призми, слід цієї простої буде точка $M/m, m'/m'$.

Далі ведемо поземі оліди допоможних площ, що проходять через просту $MS/ms, m's'/s'$, та руби призми та піраміди.

Тут знову маємо випадок двох многокутників перетину, що ясно видно з розположення творчих на стінках призми, а саме многокутник входу лежить на стінках BC, CD, DA , а виходу на стінці AB ; рубу A та B піраміду не перетинають.

Многокутник входу піраміди в призму:

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 4$$

На поземому меті цього многокутника боки 4.5 та 5.6 будуть видимі, а на доземому меті видимими боками будуть 7'. 8' та 8'. 9'.

Многокутник виходу:

$$1 + 2 + 3 + 1.$$

має на поземому меті видимим бік 2.3, а на доземому меті він /його мет/ лежить на невидимих стінках.

Щоб закінчити цей параграф знайдемо ще перетин двох призм /рис. 164, таб. XXX/, що стоять на поземій площі мету.

Беремо довільну точку $M(m, m')$, ведемо через неї прості, рівнобіжні з рубами обох призм, знаходимо поземі сліди $K/k, k'/k'$ та $N/n, n'/n'$ цих простих, та ведемо поземий слід P_h , площі P , що проходять через наші прості.

Вся дальша праця зовсім подібна до попередніх задач.

Поземі сліди допоможних площ поведених через руби обох призм, визначають творчі, які в свою чергу будуть точки перетину.

Тут матимемо один многокутник перетину, що лежить на стінках AB, AD, DC та CD призми I та GE та EF призми II, руб B призми I та руби G і F призми II в перетині участі не беруть.

Многокутник перетину складеться:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 1$$

На поземому меті видимими маємо боки 1.2 та 4.5, на доземому меті увесь многокутник закритий стінкою GF призми II.

§ 27. КРИВІ ЛІНІЇ.

Криві лінії поділяються на дві групи: а/ пласкі криві, б/ криві не пласкі.

Кривою пласкою будемо називати таку криву, усі точки якої лежать на одній площі.

З безліччя таких кривих, тільки де-які уживаються в техніці, а саме коло, еліпс, гіпербола, парабола, циклоїда, епіциклоїда та гіпоциклоїда; решта кривих для техника особливої ролі не грає, тому й не будемо над ними зупинятися.

Кривими непласкими будемо називати ті криві, точки яких лежать не на одній, а на де-кількох площях. Такі криві називаються ще кривими подвійної кривизни. Для техника найбільшу увагу звертає шрубова або гвинтова лінія, до розглядання якої ми перейдемо нижче.

Взагалі обмежений час не дає нам змоги розглянути детально усі прикмети кривих, залишаємо це для інших дисциплін; тут звернемо увагу на рисування кривих, їх метів, та на знаходження дотичних і нормалей до них.

Довільна крива $AB C D E F G H$ /рис. 165, таб. XXXI/ може бути зметована на дану площу H в той спосіб, що через поодинокі її точки поведемо рівнобіжні прості, або прями при прямому метаванню, та знайдемо перетин цих простих /прямів/ з площею H . Сполучивши точки перетину плавкою кривою одержимо мет $abcdefgh$ даної кривої на площу H .

Тепер розберемо один випадок, що торкається як пласких, так і не пласких кривих.

Поведемо тятиву FJ . Ця тятива має дві спільних з кривою точки F та J ; тому мет цієї тятиви повинен мати з метом кривої теж тільки дві спільних точки, а саме точки f та i ; мети точок F та J .

Як що ми будемо посувати тятиву FJ навколо точки E , то мет її теж буде посуватися навколо точки f і в кожному момент тятива буде мати дві спільних з кривою точки; рівночасно й мет тятиви теж буде мати дві спільних з метом кривої точки.

Коли ці дві спільні точки зіллються в одну точку F , тоді тятива перейде у дотичну до кривої просту JK з точкою дотику F . Зрозуміло, що одночасно й на меті тятиви також обидві точки зіллються в одну точку f , і мет цієї тятиви буде дотичною до мету кривої.

Відсіля маємо таке твердження:

Як що проста дотикається у простороні до кривої лінії /пласкої, або непласкої/, то, при

КОЖНОМУ СПОСОБІ МЕТУВАННЯ, МЕТ ПРОСТОЇ ДОТИКАЄТЬСЯ МЕТУ КРИВОЇ У ТОЧЦІ, ЯКА Є МЕТОМ ДОЧКИ ДОТИКУ У ПРОСТОРОНІ.

Иноді треба знати довжину кривої. Графічно це можна зробити приблизно у такий спосіб.

Розбиваємо криву 1.20 /рис.166, таб. XXXI/ на частини, які уявляли б з себе відтинки простої, потім ведемо просту, або довільно, або через довільну точку кривої, та відкладаємо на цій простій поспідовно усі частки 1.2, 2.3, 3.4 і т.д. кривої. Відтинок простої, напр. 1.15 дасть нам довжину частини 1.15 даної кривої.

Для того, щоб графічно випростувати дугу кола даного луча, існує два способи: Кардінала Миколи Кузи та п. Коханського.

Роздивимося спочатку спосіб кардінала М.Кузи.

Як що нам треба випростовати $\cup AB$ кола луча γ /рис.167, таб. XXXI/, то ведемо тятиву AB , спускаємо з осередка O на тятиву прям OC , та через точку C ведемо дотичну до $\cup AB$. Відкладаємо на прямі OC відтинок $CD = 3\gamma$, сполучаємо точку D з точками A і B та знаходимо перетин протих DC та DB з дотичною в точках E та F . Відтинок EF рівний $\cup AB$.

Доведемо це для половини CF відтинка EF ; з трикутника CDF маємо:

$$\text{або, позаяк } CD = 3\gamma \quad CF = CD + \alpha\beta$$

$$\text{з трикутника } MDB \text{ маємо:} \quad CF = 3\gamma \cdot \tan \beta$$

$$\text{відкіля:} \quad MB = MD \cdot \tan \beta$$

$$\tan \beta = \frac{MB}{MD};$$

Крім того маємо:

$$MD = MO + OD = MO + 2\gamma.$$

З трикутника MOB маємо:

$$MB = OB \cdot \sin \alpha$$

$$MO = OB \cdot \cos \alpha$$

або, позаяк $OB = \gamma$,

$$MB = \gamma \cdot \sin \alpha$$

$$MO = \gamma \cdot \cos \alpha$$

тому

$$\tan \beta = \frac{\gamma \cdot \sin \alpha}{2\gamma + \gamma \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}$$

Відтинок CF , таким чином, є рівний

$$CF = \frac{3 \cdot \sin \alpha}{2 + \cos \alpha} \cdot \gamma;$$

Дуга $CB = \frac{AB}{2}$ виносить:

$$CB = \frac{2\pi r \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180} r$$

Якщо ці останні дві формули вставляти на місцях послідовно значіння $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ$ та 90° , то одержимо такі величини для відтинка CF та CB в частках луча r даного кола

α	CB	CF	$CB - CF$
10°	0,1745	0,1745	0
20°	0,3491	0,3490	0,0001
30°	0,5236	0,5234	0,0002
40°	0,6981	0,6972	0,0009
50°	0,8727	0,8696	0,0031
60°	1,0472	1,0392	0,0080
90°	1,5708	1,5000	0,0708

Користуючись способом М. Кузи можна виконати й зворотню задачу, а саме кожному просту перевести в дугу кола даного луча.

Дійсно, як що маємо просту EF /рис. 167, таб. XXXI/, то з середини C , цієї простої встановлюємо прям, відкладаємо відтенок $CD = 3r$, сполучаємо точку D з точками E та F , і наша дуга обмежується цими простими DE та DF .

Спосіб М. Кузи уживається для кутів α не більше 40° , бо при більших кутах помилка виносить вже досить поважну величину. Як що маємо для випростовлення велику дугу, то поділяють її на частини так, щоб $\alpha \leq 40^\circ$ і тоді випростовують окремі частини, та складають окремі знайдені відтинки.

По способу Коханського випростовання дуг робиться так.

Маємо коло з осередком O , луча r /рис. 168, таб. XXXI/. Ведемо довільний поперечник AB , в точці A -дотичну до кола та zakresлюємо лучем r точку E на колі. Сполучаємо точки A та E тятивою AE і з осередка O спускаємо на цю тятіву прям OF . Цей прям з нарисованим поперечником AB утворює кут $\alpha = 30^\circ$.

Від точки O , перехрестя прямих OF з дотичною до кола, відкладаємо по цій дотичній відтенок $CD = 3r$ та сполучаємо точку D з точкою B .

Відтинок DB є випростоване півкола.
Дійсно в трикутника ABD маємо:

$$\overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = /DC - AC/^2 + \overline{AB}^2 = \\ = /3r - r \cdot \tan 30^\circ/^2 + /2r/^2 = [(3 - \tan 30^\circ)^2 + 4]r^2,$$

тому

$$DB = r \sqrt{(3 - \tan 30^\circ)^2 + 4}$$

Півкола

$$\cup AB = \pi \cdot r = 3,14159r$$

Як що підставимо значіння для $\tan 30^\circ$ та матимемо

$$DB = 3,14169r$$

тому

$$DB - \cup AB = 0,0001r$$

Часто при кресленню кривих виникають питання де точно лежить точка дотику дотичної, або треба повести дотичну, нормаль до кривої і такі питання в загальних випадках можна розв'язати користуючись допоміжними кривими.

Треба наприклад визначити точно точку E дотику дотичної CD до кривої AB /рис. 169, таб. XXXI/

Ведемо тятиви кривої рівнобіжні з дотичною CD . Кількість тятив, та взаємне їх віддалення одної від одної довільне. З точок перетину тятив з кривою ведемо довільні рівнобіжні між собою прості з одної частини кривої /від початку до точки дотику/ в одному напрямку, а з другої частини кривої у протилежному.

На цих простих відкладаємо відповідні довжини тятив, як показано на рисунку, а саме: $A_1I_3 = A_1I_3$, $I_1I_2 = I_1I_2$, $2.II_1 = 2.II_1$, $3.II_1 = 3.II_1$, $4.9_1 = 4.9_1$, $5.8_1 = 5.8_1$, $6.7_1 = 6.7_1 = 7.6_1$, $8.5_1 = 8.5_1$, $9.4_1 = 9.4_1$ і т.д. Точки A_1 , I_1 , 2_1 , 3_1 , і т.д. сполучаємо пласкою кривою, яка перехреститься з даною кривою AB в точці E . Ця точка E буде точкою дотику, бо довжина відповідної тятиви для цієї точки буде нуль.

Як що нам треба через дану точку C кривої AB повести дотичну /рис. 170, таб. XXXI/, то робимо так:

Намічаємо на даній кривій довільні точки A , $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ та B . Ведемо просту DE , яка буде приблизно пряма до майбутньої дотичної. Сполучаємо точку C з точками кривої, що раніш намічено, та від точок $/8, 9, 10$ і т.д./ перетину цих простих з простою DE відкладаємо відтинки $8B_1 = CB$, $9.7_1 = C.7$, $10.6_1 = C.6$, $11.5_1 = C.5$ в даному напрямку, а в протилежному $12.4_1 = C.4$, $13.3_1 = C.3$, $14.2_1 = C.2$ і т.д. Потім сполучаємо точки $B_1, 7_1, 6_1, 5_1, 4_1, 3_1$ і т.д. кривою, що перехреститься з простою DE в точці F , яка по-

винна лежати на дотичній до кривої, бо усі інші точки допоможної кривої відповідають тятивам даної кривої, а точка F тятіві рівної нулю, себ-то дотичної. Проста CF буде дотичною до кривої AB .

Як що треба з даної точки C повести нормаль до даної кривої AB /рис. 171, таб. XXXII/, то описуємо довільними лучами з точки C , як з осередка дуги 1.2, 3.4, 5.6, 7.В. Ведемо тятиви 1.2, 3.4, 5.6 та 7.В, з кінцевих точок кожної тятиви ставимо прямі /в протилежних напрямках/ та відкладаємо на них відповідні довжини тятив. Коли ми сполучимо знайдені точки плавкою кривою, то ця допоможна крива перехреститься з даною кривою AB в точці D , яка належитиме нормалі, бо довжина відповідної для неї тятиви буде нуль. Проста CD нормалью до кривої AB .

§ 28. Коло.

Як що коло знаходиться в площі, рівнобіжній з площею мету, то на ту площу воно метується колом, а на другу площу простою. Коло, що лежить в площі прямої до площі мету, метується на ту площу простою.

Взагалі коло метується еліпсом.

Завжди в площі кола можна знайти один поперечник, що буде рівнобіжний з поземою, і один поперечник рівнобіжний з доземою площами мету. Ті поперечники метуються на відповідні площі мету у свою дійсну величину і будуть великими вісями еліпса.

Єсть де-кілька способів полекшити метування кола, на яких ми зараз зупинимось.

Маємо коло, /рис. 172, таб. XXXII/, описуємо навколо нього квадрат $EFGH$ і ведемо косини EG та FN ; зауважимо точки перетину тих косин з колом, а саме точки J, Q, X, Y та спробуємо в'яснити положення тих точок.

Трикутники AEQ та KJO подібні один одному; тому

$$JO : EO = JK : AE$$

Але $AE = CO = JO = r$ -лучеві кола, тому

$$\frac{JO}{EO} = \frac{JK}{JO}$$

в трикутника KJO , в якому кут $KOJ = 45^\circ$, маємо:

$$JK = JO \cdot \sin 45^\circ \quad \frac{JK}{JO} = \sin 45 = 0,70711 \approx 0,7$$

тому

$$\frac{JO}{EO} = 0,7; \quad JO = 0,7 \cdot EO$$

Таке відношення дійсне й для решти точок Q, X, Y воно, як це раніш говорилося, дійсне й для метів тих простих. Це дає нам можливість знайти де-кілька точок еліпса.

Прості Lm, SR , рівнобіжні з косиною FN , та

проті NP , UT рівнобіжні з EG , будуть дотичними до кола з точками дотику J, X, Q, Y , а мети цих протих будуть дотичними до еліпса.

Маємо площу P /рис. 173, таб. XXXII/, на ній точку $O(o, o')$, яка є осередком кола, з лучем γ , що лежить у площі P . Треба нарисувати мети цього кола, за допомогою способу, що тільки що був освітлений.

Поперечник кола, рівнобіжний з поземою площею мету піде по позему площі P поведеному через точку O . Відкладаємо на поземому меті цього позема від точки O луч кола γ /бо такий поперечник метується поземо у дійсну свою величину/ і матимемо мети двох крайніх точок еліпса / d, e /, доземі їх мети будуть точки d' і e' .

Тепер знайдемо мети поперечника прямого до DE . Дій поперечник метується поземо прямою до de , то буде проста CB / $cb, c'b$ / . Проста CB лежить у площі P : тому сліди її лежать на відповідних слідах площі.

Зіслемо цю просту CB з поземою площею мету; точка b залишиться на місці, точка O матиме віддалення $O_o o = So o'$ на прямі $O_o o$ до ab , і злиття положення буде в O_o . Від точки O_o відкладаємо відтинки $O_o F_o = O_o G_o = \gamma$ та повертаємо всю просту разом з точками F_o та G_o назад і одержимо мети точок F / f, f' / та G / g, g' / які будуть метами точок кола.

Рисуємо тепер квадрат $JKLM$, який поземо метується прямокутником $iklm$, а доземю рівнобіжником $i'k' l'm'$ проводимо косини JL / $il, i'l$ / та KM / $km, k'm'$ / і нарешті знаходимо точки N / n, n' /, Q / q, q' /, T / t, t' / та S / s, s' / при умові, щоби $on = o, toi$; $o'n' = o, to' i'$; $oq = o, tok$; $o'q' = o, to' k'$; $ot = o, to l$; $o't' = o, to' l'$; $os = o, to m$; $o's' = o, to' m'$.

Сполучаємо одержані 8 точок плавкими кривими, одержимо мети кола луча γ , осередка O , що лежить у площі P .

Коли ми поділимо боки описаного квадрата та поперечники кола на однакове рівне число частин, наприклад три /рис. 174, таб. XXXII/, перенумеруємо частини на боці квадрата від вершка E через 1, 2 і т. д., а на поперечнику кола від осередка O через 1, 2, 3 і т. д. та сполучимо точки 1, 2 з точкою D , а точки 1, 2, 3 з точкою C , то перехрестя цих протих, точки L та K будуть точками кола.

Доведемо це для точки L .

Кут LDC рівен куту EDC без кута LDE , себ то

$$\angle LDC = 90^\circ - \angle LDE.$$

Трикутники EDL та OCM , рівні між собою, бо $ED = oc$, $\angle E = \angle c$; $\angle 1. ED = \angle 1. OC = 90^\circ$ тому й

$$\angle EDL = \angle 1. CO, \text{ а кут } \angle DC = 90^\circ - \angle 1. c. o.$$

Кут $DL C$ рівен 180° без двох кутів трикутни-

ка $\angle DC$, а саме:

$$\begin{aligned}\angle DLC &= 180^\circ - (\angle LDC + \angle LCD) = \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \angle LCD + \angle LCD) = \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ\end{aligned}$$

Виходить, що точка L , а також й M , лежать на колі.

На рис. 175, таб. XXXII показано пристосовання цього способу до лівої половини метів кола, що лежить у площі P .

Якщо ми впишемо в дане коло /рис. 176, таб. XXXII/ квадрат $ABCD$, поведемо довільну просту EG при умові, щоб вона була рівнобісна з косиною квадрата AC , сполучимо точку перетину простої EG з боком DC квадрата, точку F з вершком B квадрата, а точку G , перетину простої EG з боком BC квадрата, з протилежним вершком квадрата D , то перетин цих останніх прямих, точка H буде лежати на колі.

Дійсно, для трикутника BGD проста EG уявляє висоту відносно бока BD /бо $EG \parallel AC \perp BD$ / проста BC - висоту відносно бока BG / $BC \perp BG$, як боки квадрата/. Через точку F перехрестя цих висот проходить проста BH , яка повинна бути висотою трикутника BGD відносно бока GD , себ-то $\angle DBH = 90^\circ$.

На рис. 175, таб. XXXII показано пристосовання цього способу для рисування метів кола, що лежить у даній площі P , - права частина метів.

§ 29. Еліпс.

Еліпс є замкнута крива, кожна точка якої: 1/ має постійну суму віддалень від двох постійних для кожного еліпса точок-вогнищ, 2/ відношення віддалень кожної точки еліпса до вогнища та до простої /діректриси/ теж величина постійна.

Еліпс має дві вісі, прямих між собою, одна з них велика, це є найбільший поперечник еліпса / $2a$ /, а друга мала, це найменший поперечник еліпса / $2b$ / Точка перехрестя де вони переполовинюються називається осередком еліпса. Вогнища лежать на великій вісі з двох боків осередка, на віддаленні від цього осередка $a = \sqrt{a^2 - b^2}$; директриси рівнобісні малою віссю і мають віддалення від осередка $d = \frac{a^2}{b^2}$

Відношення $e = \frac{a}{d}$ називається ексцентриситетом еліпса, і ця величина менше за одиницю.

Кожний еліпс ми на взагалі розглядати як мет кола на площу, що поведена через поперечник кола яка утворює з площею кола кут α що ми на знайти з виразу $\cos \alpha = \frac{b}{a}$

де b - половина малої вісі еліпса, а a - половина великої осі еліпса, та луч кола.

Коли $\alpha = 0$ себ-то обидві площі зливаються, та $a = b$, і еліпс перейде у коло, колиж $\alpha = 90^\circ$, то $b = 0$, і еліпс переходить у просту довжиною $2a$.

При даних $2a$ та $2b$ можна визначити усі елементи еліпса таким способом.

Рисуємо дві прямих між собою прості /рис. 177 таб. XXXIII/ і відкладаємо на них $OA = OB = a$; $OC = OE = b$; Це будуть головні вісі еліпса. З точки C лучем a за-креслюємо дуги до перетину з AB в точках F_1 та F_2 , які будуть вогнищами еліпса.

Дійсно з трикутника F_2OC або F_1OC маємо

$$OF_1 = OF_2 = \sqrt{F_1C^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Вогнища можна знайти ще таким способом.

Рисуємо коло луча a з осередку O , ведемо через точку C /або E / просту рівнобіжну з AB /це буде дотична до еліпса рівнобіжна з головною віссю/ з точок перетину цієї простої з колом G, G_1 спускаємо прямі на велику вісь, і ці прямі упадуть у вогнища F_1 та F_2 еліпса.

Для того, щоби знайти директриси еліпса, ведемо через точки G та G_1 дотичні до кола, луча a , і через точки H і H_1 перетину цих дотичних з великою віссю, прості DD_1 і DD_2 рівнобіжні з малою віссю CE . Це й будуть директриси.

Дійсно з трикутника H, G, O маємо:

$$ed = c^2 + b^2 = a^2 - b^2 + b^2 = a^2;$$

$$d = \frac{a^2}{c};$$

Найпростіший спосіб рисування еліпса, це встромити у вогнища по булавці, нав'язати на них кінці нитки, довжина якої виносить $2a$; тоді олівець, що натягає нитку буде рисувати еліпса.

На рис. 178, таб. XXXIII показаний спосіб рисування еліпса, коли відомі його головні вісі.

Рисуємо з точки O , як з осередка два кола, одно лучем a , друге лучем b . Ведемо довільний луч цих кол, напр. OB , який перехреститься з великим колом в точці D , а з малим в точці C . З точки B спускаємо прям на велику вісь /рівнобіжно з малою/, а з точки C на малу вісь /рівнобіжно з великою/. Точка A перехрестя цих прямих буде точкою еліпса.

Якщо за вісь X -ю взяти велику вісь, а за вісь Y -ю малу, то з трикутника OB, D маємо:

$$OD = OB \cos \alpha; x = a \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{a}$$

з трикутника OCE маємо:

$$CE = OC \sin \alpha;$$

понеже $CE = AD = y$, а $OC = b$ - буде

$$y = b \sin \alpha;$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{b};$$

Візьмемо в квадрат ці рівенства, та додамо один до другого

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

нарешті

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Це рівняння еліпса, а тому й точка A належить до нього.

Можна, користуючись цим способом, знайти кілька потрібно точок еліпса, та потім за допомогою лекала нарисувати самий еліпс.

Другий не менш точний спосіб показаний на рис. 179, таб. XXXIII.

Беремо пасьму паперу та відкладаємо на ньому $ML = a$ і $MN = b$. Як що ми будемо посувати цю пасьму так, щоб точка L завжди знаходилася на малій вісі, а точка N одночасно з тим на великій, то точка M для кожного такого положення пасьми дасть точку еліпса.

Візьмемо знову за вісь x -і велику вісь, а за вісь y -і малу вісь; ді з трикутників ABC та COD матимемо:

$$AB = AC \sin \alpha;$$

$$BC = AC \cos \alpha;$$

$$CO = CD \cos \alpha;$$

Понеже $AB = y$; $AC = b$; $BC + CO = BO = x$; $DC = a - b$, то матимемо:

$$y = b \sin \alpha; \sin \alpha = \frac{y}{b}; \sin^2 \alpha = \frac{y^2}{b^2};$$

$$x = b \cos \alpha + (a - b) \cos \alpha = (b + a - b) \cos \alpha = a \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{a}; \cos^2 \alpha = \frac{x^2}{a^2}$$

Знову одержуємо рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ а тому точка A буде належати еліпсу.

Як що маємо мети двох прямих між собою поперечників кола /рис. 180, таб. XXXI / AB та CD , і точку O перехрестя цих метів, то можемо нарисувати еліпс таким способом.

На вісі AB опишемо коло $AEBF$, поділяємо

його на довільну кількість рівних частин, сполучаємо точки $1, 1, 2, 2, 1$ т.д. Через точки перехрестя прости $11, 22, 33, 1$ т.д. з віссю AB точки $5, 7, 8$ і т.д. ведемо прости рівнобіжні з CD .

Сполучаємо точку C з E, A, B, D, F та через точки $1, 1, 2, 2, 3, 3, 1$ т.д. ведемо прости рівнобіжні з CE, DF . Точки F, G, H, J, K, L, M і т.д. будуть точками еліпса.

Графічний спосіб рис. 179 можна пристосувати і до випадка двох зв'язаних вісей еліпса.

Зв'язаними вісями еліпса називаються дві його вісі, які будуть метами двох прямих між собою поперечників кола, метом якого є даний еліпс.

З точки C /рис. 181, таб. XXXII / спускаємо прям CM на вісь AB . Від точки C відкладаємо $CA = CB$.

Якщо взяти пасьму паперу довжиною LM , на-несемо на ній точки M, C і L , на віддаленнях пряма LM і будемо пересовувати її так, щоб точка L весь час була на протії NO , а точка M у той самий мент на вісі AB , то точка C дасть точку еліпса.

На рисунку таким способом визначені точки C_1, C_2, C_3 еліпса.

Можна те саме зробити трохи инакше.

Спускаємо з точки C /рис. 182, таб. XXXIII / прям на вісь AB , відкладаємо $CA = CB$.

Пасьма паперу тут теж мусить посуватися так щоб точка L трималася простої NO , а точка M вісі AB ; тоді точка C визначить точки еліпса.

На рисунку визначені точки C_1, C_2, C_3 еліпса.

Скористувавшись тим, що еліпс є метом кола, можна дати ще один спосіб рисування еліпса.

Візьмемо довільну просту PQ /рис. 183, таб. XXXIII / та знайдемо точки перетину з майбутнім еліпсом.

Коло, метом якого є наш еліпс, о'кручуємо навкруги вісі AB до злиття з площею рисунку. Тоді точки E, C, M, K, D та H перейдуть в точки E, C, M, K, D та H , а коло буде на площі рисунку у своїй дійсній величині. Рахуємо просту PQ теж метом якогось простої, що лежить у площі кола та знаходимо її злите положення N, R . /точка R простої при злитті перейде у R , а N в N /.

Проста N, R має дві точки перехрестя з колом точки 1. та 2.; перехід від злитого положення до дійсного дасть на протії PQ точки 1 та 2. - точки перетину її з еліпсом, себ-то точки самого еліпсу.

Таким способом можна знайти де-кілька точок еліпса та нарисувати його.

Цей самий спосіб дає нам змогу через дану точку P /рис. 184 таб. XXXIV / повести дотичну до еліпса.

знаходимо злите положення кола, метом якого є наш еліпс, та за допомогою двох простих PN та PR через їх злите положення знаходимо й саме злите положення точки P . З точки P ведемо дотичні PQ та PU до кола і повертаємо їх назад.

Прості PQ та PU будуть дотичними до еліпса з точками дотику Q та U .

Другим способом рисування дотичної та нормалі до еліпса показаний на рис. 178, таб. XXXIII.

Сполучаємо точку з еліпса з вогнищами, переполовинюємо кут F_2ZF_1 ; це буде нормаль до еліпса, а проста TT' пряма до нормалі ZN буде дотичною до еліпса з точкою дотику Z .

§ 30. ГИПЕРБОЛА.

Гіпербола це крива, яка для кожної своєї точки P має різницю віддалень від двох точок /вогнищ/ постійною $2a$ і $2b$ відношення віддалень до вогнища та до простої прямої до головної вісі /діректриси/ теж постійна величина.

Гіпербола не має реальної малої вісі $2b$ але по аналогії з еліпсом ведуть через осередок гіперболи просту, пряму до головної вісі, та звуть її малою віссю. Теж по аналогії з еліпсом для b дають реальне значіння, а саме величина пряма, встановленого з вершка гіперболи до асимптоти, приймається за b .

Тоді при однакових визначеннях з еліпсом маємо:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d = \frac{a^2}{c}$$

ексцентрітет рівен c/a , але тут він більший за одиницю.

Асимптотами гіперболи звуться дотичні, що поведені через осередок O , до точок гіперболи, безкесечно віддалених.

На рис. 185, таб. XXXIV показано як нарисувати усі елементи гіперболи.

Коли з вершків гіперболи B_1 та B_2 встановимо прямі до головної вісі, знайдемо перехрестя цих прямих з колом, осередка O , луча c /коло проходить через вогнища/. Прості A_1A_1 та A_2A_2 будуть асимптотами.

Точки дотику дотичних поведених з вогнищ гіперболи до кола осередка O та луча a /коло проходить через вершки/ точки D_1, D_1, D_2, D_2 дадуть директриси D_1D_1 та D_2D_2 .

Як що нам відомі вогнища гіперболи F_1 та F_2 і вершки її B_1, B_2 , то нарисувати саму гіперболу можна так:

На головній вісі /рис. 186, таб. XXIV/ вправо /або вліво/ від вогнища визначаємо довільні точки $I, 2, 3, 4$ і т.д. З вогнища F_1 описуємо кола лучами $B_1, 1, B_1, 2, B_1, 3$ і т.д., а з вогнища F_2 - лучем $B_2, 1, B_2, 2$ і т.д.; точки перекрестя дадуть точки гіперболи. Те саме робимо й для вогнища F_2 - ведемо коло лучем $B_1, 1$, а з вогнища F_1 - лучем $B_2, 1$.

Точки T_1, T_2, T_3 і т.д. сполучаємо плавкими кривими та маємо дві галузі гіперболи.

Рис. 187, таб. XXXIV дає спосіб рисування точок гіперболи, коли відомі асимптоти і одна з точок T гіперболи.

Ведемо через точку T довільну просту /напр. T_1 /, яка перетинає асимптоти в точках 1 і 1_1 . Від точки 1_1 на прості T_1 відкладаємо відтинки $1_1 T_1 = 1 T$, і точка T_1 належить тій гіперболі. На рисунку знайдені точки T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 гіперболи, при чому для більшої ясності відтинки показані грубшими лініями.

Якщо ми маємо асимптоти $A_1 A_1$ і $A_2 A_2$ та ще вершки гіперболи B_1 та B_2 /рис. 188, таб. XXXI /, то спосіб рисування гіперболи такий.

Через осередок O гіперболи ведемо прям до головної вісі. На ньому прямі визначаємо довільні точки $1, 2, 3$ і т.д., через які ведемо рівнобіжні з головною віссю до перекрестя їх з асимптотами.

Далі рисуємо трикутники, у яких одна пряма буде $a / QP = a /$; другою прямою буде віддалення точок $1, 2, 3, 4$ і т.д. до асимптот $QR = 5.9; QS = 6.10; QT = 7.11; QU = 8.12$, а протипрямою - віддалення точок гіперболи від точок $1, 2, 3$ і т.д.

Відкладаємо на прості 5.9 відтинки $5.1V = PR$ на прості $6.10 - PS = 6.11$, на $7.11 - PT = 7.11$, на $8.12 - PU = 8.12$.

Точки I, II, III, IV , а також симетричні з ними точки з індексами $1, 2, 3$ будуть точками гіперболи.

Точка дотику дотичної до гіперболи переполовинює відтинки дотичної обмежовані асимптотами.

Це твердження дає спосіб рисування дотичних до гіперболи.

Якщо треба повести через точку T_1 /рис. 187 таб. XXXIV/ дотичну до гіперболи, то ведемо через точку T_1 прості $T_1 E = T_1 O$ рівнобіжні з асимптотами, та відкладаємо, або $E F = E O$ або $T_1 H = C O$.

Сполучивши точки T_1 з точкою F /або H / маємо дотичну $F H$, бо, як не трудно довести $T_1 F = T_1 H$.

§ 34. ПАРАБОЛА.

Парабола це крива, кожна точка якої має однакове віддалення від точки, що зветься вогнищем, та від простої, що називається директрисою.

Парабола має одне вогнище, та одну дирек-

трису, проста пряма до директриси, та поведена через вогнище називається головною віссю параболі, а та точка параболі, що лежить на головній вісі, це вершок параболі.

Параболу можна рисувати так.

Як що відомі: вершок, вогнище та напрям головної вісі, то беремо на цій вісі /рис. 189, таб. XXIV/ вправо за вогнищем F довільні точки 1, 2, 3, 4 і т.д., та з вогнища F , як з осередка лучами $OF, OF_1, OF_2, OF_3, OF_4$ і т.д. рисуємо кола, а з точок F_1, F_2, F_3, F_4 і т.д. ставимо прямі до головної вісі. Точки перехрестя цих прямих з відповідними колами дадуть точки параболі.

Тут треба зауважити, що вершок параболі лежить на рівному віддаленні від директриси та вогнища; тому для кожної параболі маємо:

$$OV = VF = \frac{p}{2};$$

Як що з вогнища F вставити прям до головної вісі /рівно іжно з директрисою/, то відтинок цього прями від вогнища до параболі зветься параметром і він рівний віддаленню самого вогнища до директриси.

Частина параболі коло вершка є дугою кола осередок якого лежить на головній вісі, на віддаленні від вершка рівному параметру параболі.

Як що маємо директрису DD , та вогнище параболі F /рис. 190, таб. XXXIV/, то параболу можна нарисувати так.

Беремо довільну точку A на директрисі, сполучаємо її з вогнищем F , в середині простої AF ставимо до неї прям TE , а з точки A ведемо просту рівнобіжну з головною віссю /прям до директриси/; тоді точка перехрестя прямих TE та AT дасть точку T параболі. Як що знайти кілька точок, то лекалом можна сполучити їх плавкою кривою, а частина коло вершка B буде дуга кола, осередка M та луча $MB = FO = p$.

Коли маємо вершок B параболі /рис. 191, таб. XXXV/, головну вісь BD /або напрям директриси/, та ще одну точку T параболі, то рисуємо прямокутник $BSTD$, ділимо боки ST та DT на однакову кількість рівних частин /5 на рисунку/, при чому на боці ST починаємо нумерувати з вершка найближчого до вершка B параболі, а на боці DT від вершка, найближчого до головної вісі. Потім сполучаємо точки, що лежать на боці ST з вершком B , а через точки поділу боку DT ведемо рівнобіжні з головною віссю. Точки перехрестя цих прямих /з однаковим індексом/ дадуть точки параболі.

Коли відомі дві точки параболі T та T_1 /рис. 192, таб. XXXV/ та дотичні, пла дні через ті точки,

то усі елементи параболи знаходяться так.

Від точки A перекрестя дотичних, на дотичній AT_1 , відкладається $AC = AT_1$, а на дотичній AT_2 відтинок $AD = AT_1$; сполучаємо точку T з C , а D з T_1 . Зрозуміло, що прості CT та DT_1 , рівнобіжні між собою, і вони дають напрям головній вісі параболи.

З точки A спускаємо прям на прості CT та DT_1 , і сполучаємо точку F з T , а E з T_1 ; точка B перекрестя прямих ET та FT_1 буде вершком параболи, проста BM рівнобіжна з CT та DT_1 , - головною віссю параболи.

Дотична GH через вершок параболи B /пряма до головної вісі/ перекреститься з дотичною AT_1 у точці G , а з дотичною AT_2 в точці H . Перекрестя прямих до дотичних AT_1/GT_1 та AT_2/HT_2 дасть вогнище параболи.

Щоб через точку T параболи /рис. 190, таб. XXXIV/ провести до неї дотичну, треба з точки T спустити прям до директриси, сполучити точку A з вогнищем, та з точки T спустити прям на просту AF . Це й буде дотична до параболи у точці T .

Для того, щоб провести дотичну до параболи через довільну точку K /рис. 190, таб. XXXIV/ треба з точки K лучем KF зачеркнути директрису у точці M , та спустити прям на просту FM . Прям KM буде дотичною до параболи.

§ 32. Ціклоїди.

Ціклоїди це криві, що описані точкою кола, яке котиться без ковзання по даному шляху.

Якщо коло котиться по прямій, то утворюється ціклоїда; якщо воно котиться по колу з'овкола його, то маємо епіціклоїду, коли ж воно котиться по колу, в середині його, то одержується гіпоціклоїда.

Ціклоїди витворені точками самого обводу кола звуться звичайними, витворені точкою, звязаною з колом, та що лежить по за колом - здовженими, нарешті точкою, звязаною з колом та, що лежить в середині кола - скороченими.

Нормаль до ціклоїд завжди проходить через точку ціклоїд, та через точку дотику кола до шляху, яка відповідає цій точці ціклоїд. Дотична пряма до нормалі.

Звичайна ціклоїда рисується так.

Знаходимо довжину AC /рис. 193, таб. XXXV/ півкола, що котиться, та відкладаємо її на дотичній в точці A .

Ділимо півколом $A12$ та дотичну AC на одна-

кову кількість рівних частин /шість на рисунку/. Через точки поділу кола /7, 8, 9, 10, 11, 12/ ведемо тятиви, рівнобіжні з дотичною A_6 , а через точки дотичної /1, 2, 3, 4, 5, 6/-прями до дотичної. Від точок перехрестя цих простих відкладаємо відповідні довжини полутятив /17. $A_1 = 7.13$; 18. $A_2 = 8.44$; 19. $A_3 = 9.0$; 19. $A_4 = 10.15$; 20. $A_5 = 11.16$.

Точки $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ та A_6 будуть точками півоборота звичайної циклоїди; їх треба сполучити за допомогою лекала, плавкою кривою.

Для того, щоб знайти точки здовженої та скороченої циклої, визначаємо спочатку осередки кола, яке котиться відповідно усіх його положень, а саме O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 та O_6 . Потім сполучаємо кожну точку циклоїди з відповідним їй осередком, та відкладаємо кожний раз відтинки, що відповідають здовженої /OZ/ та скороченої /OS/ циклоїд. Одержані точки сполучуємо плавкою кривою.

Нормалью у точці A_5 буде проста $A_5 O_5$, у точці Z_4 - проста $Z_4 A_4$, а дотичними прості $DD \perp A_4 A_5$; $DD \perp Z_4 A_4$.

Епіциклода, яка що луч кола, що котиться, визначимо через τ , а луч кола, по якому котиться визначимо через R , рисується так /рис. 194, таб. XXXV/ взяте $\tau = 3 \text{ см}$; $R = 9 \text{ см}$.

Рисуємо півкола, осередка O , луча τ , та дотичне до нього у точці A чверть кола, осередка O' , луча R .

На великому колі відтинаємо дуг $A12$, що відповідає куту $\alpha = 180^\circ / R / 180^\circ = 60^\circ$ і ділимо пів малого кола A_1 те дугу $A12$ великого кола на однакове число рівних частин /шість/.

З точки O' , як з осередка, ведемо дуги через точки поділу малого кола, а точки поділу великого кола сполучаємо лучами з точкою O' .

Від точок перехрестя цих лучів з дугами на цих дугах відкладаємо відтинки $A_1 A_1 = 1a$, $2, A_2 = 2a$.

$3, A_3 = 3a$; $4, A_4 = 4a$; $5, A_5 = 5a$

Точки $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ та A_6 належать звичайній епіциклоїді.

Точки Z, Z_1, Z_2 і т.д - здовженої, та точки S, S_1, S_2 , і т.д скороченої епіциклоїди знаходяться таким самим способом, як і точки здовженої та скороченої циклоїди, так само як нормаль та дотична для точки A_4 /нормаль $A_4 O_4$, дотична $DD \perp A_4 O_4$./

Рисування гіпоциклоїд зовсім подібне до рисування епіциклоїд: уся різниця полягає у тому, що мале коло лежить в середині великого. На рис 195 таб. XXXVI нарисована гіпоциклоїда для випадку $\tau = 2.5 \text{ см}$; $R = 10 \text{ см}$; $\alpha = 180^\circ / R = 180^\circ / 4 = 45^\circ$. Звичайна гіпоциклоїда буде крива $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, здовжена $Z, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6$ а скорочена - $S, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$. Епіциклоїда рис. 194 таб. XXXV, та гіпоциклоїда

іда рис. 195, таб. XXXVI це тільки одна з часток тих кривих, повна крива матиме їх $\frac{360}{4}$, а саме епіциклоїда рис. 192 $\frac{360}{60}=6$, а гіпоциклоїда рис. 190 $\frac{360}{45}=8$. Так само циклоїда рис. 193 уявляє собою тільки її половину.

Розгорткою кола називається крива, що рисується кожною точкою простої, що котиться без ковзання по обводу кола.

Розгортка кола рисується так /рис. 196, таб. XXXVI/.

На дотичній до даного кола від точки дотику 6 відкладається випростована довжина півкола до точки 12.

Пів кола 6.С та відтинок 6.12 ділимо на однакове число рівних частин /шість/. З точок 1, 2, 3, 4, 5, 6 ведемо дотичні до кола, та відкладаємо на них відтинки $1C_1=6.7$, $2C_2=6.8$, $3C_3=6.9$, $4C_4=6.10$, $5C_5=6.11$. Точки С, С₁, С₂, С₃, С₄, С₅ та С₆ будуть точками розгортки кола.

Нормаль до розгортки кола є дотична до кола /напр. $4C_4$ /, а дотична до розгортки DD14C₄.

§33. ВАЛЬЦОВА ГВИНТОВА ПІНІЯ.

З кривих подвійної кривизни, розглянемо найбільше вживання у техніці вальцову гвинтову лінію, але перед тим скажемо декілька слів про метування взагалі тих ліній.

При метуванні кривих подвійної кривизни, треба обов'язково визначати точки кривої літерами, бо инакше мети не будуть відповідати дійсному положенню кривої у просторі. Напр. як би мети кривої рис. 198, таб. XXXVII не визначити літерами, то зовсім невідомий дійсний вигляд самої кривої.

На практиці буває потрібно знати дійсну довжину кривої, що визначена своїми метами. Це можна зробити з достаточною для практики точністю таким способом.

Знайдемо дійсну довжину кривої ABCDE, що визначена на рис. 198, таб. XXXVII метами a b c d і a' b' c' d'.

Поділяємо поземий мет кривої a b c d на частини, що мало чим відрізняються від простої, себ то випростовуємо криву a b c d по способу, показаному раніш /рис. 168, таб. XXXI/.

Ведемо просту a e /рис. 193, таб. XXXVII/ і відкладаємо на ній послідовно відтинки a₁, a₂, a₃, a₄ і т. д. рівні відтинкам поземого мету a b c d кривої рис. 198, таб. XXXVII.

З точок a₁, a₂, a₃, a₄ і т. д. встановлюємо

прями і на них відкладаємо поземо метові прями то-
чок $A, I, 2, 3, 4, 5$ і т.д. Коли сполучимо одержані
точки $A, 1, 2, 3, 4, 5$ і т.д. плавкою кривою, то
одержимо криву $ABCD$ розгорнуту на площі рисунку,
яко пласку вже криву, дійсну довжину якої вже не
трудно знайти за допомогою способу, показаного на
рис. 166, таб. XXXI.

Вальцовою гвинтовою лінією зветься така
крива, що утворена обертанням точки навкруги вісі
 OO_1 /рис. 197 таб. XXXVI/, при чому ця точка має ще
поступ, рівнобіжний з віссю OO_1 , так, що посування
точки рівнобіжні з віссю OO_1 пропорційні кутовим
переміщенням навкруги цієї вісі

Проста OO_1 зветься віссю гвинтової лінії.

Віддалення точки гвинтової лінії від осі
буде лучем гвинтової лінії.

Крива витворена по такому закону лежить на
поверхні вальця, тої ж самої вісі та луча. Точка,
що утворює гвинтову лінію робить повний оборот на-
вкруги вісі вальця та приїде на ту саму творчу, з
якої вона почала свій шлях.

Довжина гвинтової лінії поміж точками 11 ,
що лежать на тій самій творчій, буде довжиною од-
ного обороту гвинтової лінії. Відтинок творчої по-
між точками гвинтової лінії буде кроком гвинтової
лінії.

Нарисуємо мети вальцової гвинтової лінії,
коли знаємо луч r , крок h та вісь OO_1 11 .

Якщо вісь OO_1 /рис. 197 таб. XXXVI/ пряма
до поземої площі мету, то гвинтова лінія, як це
ясно з самого 11 визначення, метується поземо по
колу, осередка o , луча r .

Положення, з якого творча точка починає по-
суватися хай буде $1/1,1/$

Поділимо обвід кола, та крок $1/13 = h$ гвинто-
вої лінії на однакове число n рівних частин $1/12/$.

У той час коли поземий мет точки 1 переїде
в положення 2 доземий мет підніметься на висоту
 $1/n$ коли поземий мет переїде у 3 , то доземий
мет підніметься на висоту $2/n$ і т.д. і це дає мож-
ливість нарисувати доземні мети точок $1, 2, 3, \dots$
 $12, 13$ гвинтової лінії.

Знайдемо рівняння цієї кривої, як що за ві-
сі координат взяти вісь мету та гвинтової лінії

Наприклад для точки $3/3,3/$ маємо

$$x = r \cdot \sin \varphi; \quad y : h = 2\pi : \varphi;$$

з останнього

$$\varphi = \frac{2\pi}{h} y;$$

Тому

$$x = r \cdot \sin \frac{2\pi y}{h};$$

а це, як відомо, є рівняння синусоїди.

Точка, що утворює гвинтову лінію, може посуватися навкруги вісі, або в напрямку руху стрілки годинника, або в напрямку зворотньому, як що дивитися у напрямку посування самої точки, у першому випадку одержуємо праву гвинтову лінію, у другому ліву. Найчастіш уживається в техніці права гвинтова лінія /рис. 197 а, таб. XXXVI/.

Переріжемо валець по творчій 1.13 та розгорнемо його на площі.

Тоді матимемо чотирикутник з основою 1.13 /рис. 197 б, таб. XXXVI/ рівною довжині кола луча e , а висотою $13.13 = h$ кроку гвинтової лінії.

З рисунка 197 таб. XXXVI та законів утворення гвинтової лінії маємо

$$\frac{y}{e} = \frac{h}{2\pi} \quad ; \quad \text{або} \quad \frac{y}{1.3} = \frac{h}{2\pi e}$$

На рисунку 197 в, таб. XXXVI - Г.3 визначається відтинком 1.3, основи прямокутника розгортки.

А, що на розгортці вальця визначити розгортку самої гвинтової лінії, то для кожної її точки мусить бути дійсним наведене рівенство, що показує, що гвинтова лінія у розгортці уявляє собою косину 1.17, прямокутника розгортки.

Довжина цієї косини є дійсна довжина одного обороту гвинтової лінії, а кут нахилу цієї косини до основи рівен куту нахилу гвинтової лінії до творчих вальця.

Відомо з геометрії, що кут по-між гвинтовою лінією та творчою вальця рівен куту по-між дотичною до гвинтової лінії, та творчою, що несе точку дотику.

Тому усі дотичні до гвинтової лінії похилені однаково до творчих вальця, а тому кут нахилу їх до поземної площі буде теж однаковий та рівний

α нахилу косини прямокутника розгортки до його основи /рис. 6/.

Маємо дотичну $DE/de, d'e'$ до гвинтової лінії /рис. 6/ з точкою дотику $3/3, 3'$. Точка $D/d, d'$ є поземним слідом цієї дотичної.

У простороні відтинок D_3 дотичної DE є протипрямою прямокутного трикутника. Одна з прямих якого є поземний мет d_3 цього відтинка, а другою, поземо метовий прям $3'n'$ точки 3. Поземний мет d_3 називають піддотичною дотичної D_3 .

Довжина піддотичної буде рівнятися

$$d_3 = y \cdot \operatorname{ctg} \alpha;$$

З рис 195 в, таб XXXVI маємо

$$1.3 = y \cdot \operatorname{ctg} \alpha;$$

тому виходить що $d_3 = 1.3$.

себ-то довжина піддотичної рівняється випростованій дузі кола поземого мета гвинтової лінії від початкової точки до мета точки дотику.

Це твердження дуже полегшує рисування дотичних до гвинтової лінії.

Напр., для того, щоб повести дотичну до точки $З / 3, 3' /$ гвинтової лінії /рис. 197а, таб. XXXVI/, то ведемо на поземому меті через точку $З$ дотичну до кола, відкладаємо відтинок $3a$ рівний випростованій дузі $1.3.i$ маємо поземий мет сліда /також і самий поземий слід/ дотичної. Сполучимо доземий мет a з точкою $З$ - то одержимо доземий мет дотичної до гвинтової лінії у точці $З / 3, 3' /$. Як що будемо обертати гвинтову лінію навкруги вісі, яка поведена через точку $В / 6, 6' /$, поземий слід дотичної у точці $7 / 7, 7' /$, та пряма до доземної площі мету, то доземий мет залишиться без зміни, а поземий буде змінити свій вигляд, а саме: при обертанню на кут $90 - \alpha$ /дотична AB пряма до поземної площі мету/ поземий мет гвинтової лінії матиме дві галузі /рис. с /, при обертанню на кут менший за $90 - \alpha$, вигляд поземих метів показаний на рис. d та e , як що кут обертання більший за $90 - \alpha$, то мет матиме вигляд кривої рис. f , при обертанню на 90° , поземий мет гвинтової лінії матиме вигляд синусоїди.

§ 34. КРИВІ ПОВЕРХНІ.

Кривою поверхнею в нарисній геометрії, розуміють поверхню, що утворилася як послідовне положення довільної лінії, яка посувається у просторі по даному закону.

Та лінія, що утворює своїм посуванням криву поверхню називається творчою поверхні.

Криві поверхні можна поділити на два розділи:

1/ Поверхні з простими творчими, себ-то ті, що утворені посуванням простої лінії.

2/ Поверхні з кривими творчими, себ-то ті, що утворені посуванням кривої лінії.

Якщо суміжні прості творчі рівнобіжні між собою, або перехрещуються, то такі поверхні можуть бути розгорнуті на площі, а тому звуться ще розгортаємі.

Поверхні, що не мають собі творчих, які відповідали б попереднім умовам, звуться нерозгортаємі, або скосі.

При метуванні кривих поверхнів часто треба

буде користуватися контурами тих частин поверхнів які видимі відносно кожної площі мету.

Як що треба зметувати яку небудь криву поверхню, напр. кулю, то треба обгорнути цю поверхню метовими прямими, себ-то повести поверхню обгортаючу, яка буде дотичною до даної поверхні. Лінія дотику обгортаючої поверхні до даній буде контуром даної поверхні. Тому то куля метується колами, бо це є контур - лінія дотику з обгортаючою поверхнею.

В де-яких випадках обгортаюча метова поверхня переходить в площі, як напр. при метуванні стіжка, що метується своїм контуром - трикутником.

Перейдемо тепер до де-яких найбільш уживаних в техніці кривих поверхней.

а. Поверхні циліндричні, або циліндри.

Такі поверхні утворюються посуванням простої AB , яка у всіх своїх положеннях залишається рівнобіжною з даним напрямком M , причому один з кінців простої посувається по даній кривій BC /рис. 200, таб. XXXVII/, що називається керуючою лінією поверхні.

На рис. 201, таб. XXXVII показані мети керуючої $AB/ab, a'b'$ /циліндричної поверхні, та напрямки M, m, n' /творчих. Візьмемо на керуючій довільні точки 1, 2, 3 і т.д. і поведемо через них творчі, - тоді одержимо мети самої поверхні. Аби ясніше уявити собі поверхню знайдемо сліди цих творчих /на рис. знайдено поземі сліди/. Сполучаємо ці сліди кривою, тоді матимемо слід кривої циліндричної поверхні. На рис. 201, таб. XXXVII знайдений поземий слід 10.11 19.20 даної циліндричної поверхні, також можна знайти її доземий слід.

Як що ми перетнемо циліндричну поверхню площею прямою до творчих, то одержимо нормальний перекрій поверхні. В залежності від вигляда кривої нормального перекрою циліндричні поверхні, або циліндри бувають: колові, еліптичні, параболічні і ин.

На рис. 202, таб. XXXVII показані мети колового циліндра - вальця.

Циліндричні поверхні широко уживаються у техніці, напр. в трибах, ложиськах, фланцевих рурах, сводах, водоводних рурах, парових котлах, машинах і т.ин.

б. Коничні поверхні, або конуси.

Коничні поверхні утворені посуванням простої SA /рис. 203, таб. XXXVII/, при чому кінець A тої простої весь час котиться по даній кривій SC /керуючий конуса/, а проста при всіх своїх проходить через точку S /вершок конуса/.

Мети конуса показані на рис. 204, таб. XXXVIII. Керуюча конуса є крива $AB/ab, a'b'$, а вершок його

го точка $S/3, S/4$.

Як й при циліндрах, для більш ясного уявлення конусів бажано користуватися їх слідами. На рис. показаний спосіб рисування дозеного сліду конуса.

Як що керуючою лінією конуса буде коло, а вісь симетрії цього конуса пряма до площі кола, то маємо прямий коловий конус стіжок. Коли керуючою буде еліпс, то матимемо еліптичний конус.

Мети стіжка показані на рис. 203, таб. XXXIII.

Коничні поверхні уживаються в техніці для арок, коничних трибів і т.и.

в. ПОВЕРХНІ З РУБОМ ЗВОРОТУ.

Поверхні з рубом звороту утворюються простою, яка посувається по кривій, при чому ця проста /творча/ весь час дотикається до кривої.

Дотичну можна продовжити в оба боки, а тому такі поверхні мають дві частини, або поли, що лежать по обидві сторони керуючої кривої, яка для даного випадку має назву руб зворота, від чого одержали й самі поверхні цю назву.

Ці поверхні можна розгорнути, бо кожна пара сумежних творчих перехрещується між собою.

Як що за руб звороту виберемо гвинтову лінію, то одержимо поверхню, що називається розгортаємий гелісоїд.

На рис. 206, таб. XXXVIII показані мети розгортаемого гелісоїда.

Для того, щоб нарисувати ці мети, рисуємо спочатку гвинтову лінію, та ведемо до всіх її точок дотичні. Ці дотичні й створять криву поверхню розгортаемого гелісоїда. Не трудно знайти поземий слід цього гелісоїда, це буде, як видно з рисунку, повна розгортка кола луча гвинтової лінії.

Як що розгортаємий гелісоїд перетяти вальцем вісь якого злита з віссю гвинтової лінії, а луч основи більше луча цієї лінії, та коли цю гвинтову лінію приймемо за руб зворота, то одержимо розгортаємий гелісоїд, обмежений поверхнею вальцевою. Це буде кільцевий розгортаємий гелісоїд.

г. ГИПЕРБОЛИЧНІ ПАРАБОЛОЇДИ, АБО СКОСІ ПЛОЩІ.

Як що маємо дві мимобіжних прости, які перехрещують постійно третю просту, що весь час залишається рівнобіжною з даною площею, то посування цієї третьої простої утворить криву поверхню, яка носить назву гіперболичеського параболоїда, або скосої площі.

Проста, що перетинає постійно дві дані мимобіжні прости /керуючі прости/, носить назву творчої, а площа, з якою рівнобіжна творча - площею рівнобіжності.

Така поверхня показана на рис. 207, таб. XXVIII в положенні у просторі.

Ця поверхня може бути створена: 1/ посуванням по керуючих AB та BC творчої AD , що весь час посування буде рівнобіжна з площею P , або 2/ посуванням по керуючих AD та BC творчої AB , що весь час посування буде рівнобіжна з площею.

Якщо площі P і Q прямі між собою, то одержимо пряму поверхню; при випадку, коли площі P і Q мають нахил не прямий, то поверхня називається похилою.

На рис. 208, таб. XXXVIII показаний в метал похилий гіперболічний параболоїд, творча якого буде проста $AB/ab, a'b'$, або проста $AD/ad, a'd'$ керуючими простими $BC/bc, b'c'$ та $AD/ad, a'd'$ або прості $AB/ab, a'b'$ та $CD/cd, c'd'$, площами рівнобіжності площі P та Q /показані поземі сліди P_h та Q_h / прямі до поземі площі мету.

д. ЦІЛІНДРОЇДИ.

Циліндроїд це крива поверхня, яка створена посуванням простої /творчої/, що весь час посування скочується по двох даних кривих /керуючих ліній/, та яка весь час рівнобіжна з даною площею /площею рівнобіжності/.

При рисуванні метів циліндроїда корисно привести, за допомогою змін площ мету, площу рівнобіжності до положення прямого до одної з площ мету, тоді легше виконати усю працю.

На рис. 209, таб. XXXIX маємо площу $P/P_h, P_v/$, якою площу рівнобіжності, криві $AB/ab, a'b'$ та $CD/cd, c'd'$ якою керуючі лінії циліндроїда. В даному випадку усі поземі мети творчих повинні бути рівнобіжними з поземим слідом.

Циліндроїди можуть бути також створені посуванням простої рівнобіжно з площею рівнобіжності при чому ця проста дотикається до двох кривих поверхней, або дотикається до одної кривої поверхні, та перехрещується з кривою лінією.

На рис. 210, таб. XXXIX маємо один з прикладів циліндроїда, а саме гвинтовий циліндроїд, який створився від посування простої рівнобіжно з поземною площею мету /площа рівнобіжності/, при чому ця проста перехрещує весь час гвинтову лінію $AB/ab, a'b'$ та дотикається до вальця, вісь якого злита з віссю гвинтової лінії.

Зрозуміло, що творчі гвинтового циліндроїда на поверхні вальця нарисують теж гвинтову лінію одної вісі, та кроку з даною

е. КОНОЇДИ.

Коноїд це крива поверхня, що утворюється посуванням простої /творчої/ рівнобіжно з даною площею /площею рівнобіжності/, при чому проста весь

час перехрещує одну криву лінію, та одну просту

На рис. 211, таб. XXXIX маємо мети коноїда, площа рівнобіжності котрого є позема площа мету, кривою керуючою лінією - лінія $CD/cd, c'd'$, та керуючою простою - прям $AB/ab, a'b'$.

На рис. 212, таб. XXXIX маємо гвинтовий, або нерозгортаємий коноїд, що має керуючими: гвинтову лінію $AB/ab, a'b'$ та вісь $OO/os, o'o'$ цієї гвинтової лінії, площею рівнобіжності позему площу мету.

Як що перетнемо гвинтовий коноїд вальцем, що має ту ж саму вісь, як і керуюча гвинтова лінія, то одержимо кільчастий гвинтовий коноїд, показаний на рис. 213, таб. XXXIX.

Гвинтові коноїди дуже часто уживаються для будування гвинтових сходів, а також для шруб з квадратною нарізкою.

ж. СКОСИ ЦІЛІНДРИ З ТРЬОМА ЛІНІЯМИ.

Ці поверхні утворюються посуванням простої /рис. 214, таб. XXXIX, яка перехрещує три лінії CD, EF, HG , що не лежать в одній площі, та з яких хоча б одна повинна бути кривою лінією.

Щоби знайти положення якої небудь творчої такої поверхні, беремо довільну точку A на кривій CD та сполучаємо цю точку з точками кривої HE . Конічна поверхня, що утвориться в наслідок такого з'єднання, перетне криву EF у точці M . Проста AMB і буде бажаною творчею, бо вона перехрещує усі три керуючі.

Одним з прикладів сконого ціліндра буде скосий гелісоїд /рис. 215, таб. XL/, який утвориться від пересування простої, що перехрещує гвинтову лінію $AB/ab, a'b'$, її вісь $FD/fd, f'd'$ та рівнобіжна з творчими стіжка $SEC/sec, s'e'c'$.

Скосий гелісоїд уживається при шрубах з трикутною нарізкою.

Скосий кільчастий гелісоїд утворюється посуванням простої /рис. 216, таб. XL/, яка перехрещує гвинтову лінію $AB/ab, a'b'$, дотикається поверхні вальця, одноосного з гвинтовою лінією, та весь час рівнобіжна з творчими стіжка $SCD/scd, s'c'd'$.

На рис. 217, 218, таб. XL показано уживання сконого гелісоїда при будуванні сводів.

На рис. 217, таб. XL маємо криву поверхню, що утворена посуванням простої по двох рівних та рівнобіжних між собою колах $CD/cd, c'd'$ та $EF/ef, e'f'$, при чому ця проста весь час перехрещує просту $AB/ab, a'b'$ пряму до доземої площі мету.

На рис. 218, таб. XL маємо так званий марсельський свод, поверхню, яка утворилася від посування простої по дузі $CD/cd, c'd'$ кола осередка $O_1/o_1, o'_1$, дузі $AB/ab, a'b'$, кола осередка $O/o, o'$ та простої

.EF/ef, e'f'/ . Площі обох дуг рівнобіжні між собою.

з. ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ.

Поверхні обертання утворюються від обертання якої небудь творчої /кривої або простої/ навкруги довільної вісі.

На рис.219, таб.XL маємо поверхню, яка утворилася від обертання кривої MNPKL /mnpk'l, m'n'p'k'l'/ навкруги вісі OO' /o'o, o'o'/.

Валець, стіжок, куля, - то приклади поверхней обертання, причому для утворення вальця обертається чотирекутник, стіжка - трикутник, а кулі - коло або півкола.

На рис.220, таб.XL маємо приклад, коли чверть кола АВ/ab, a'b'/ разом з дотичною АС/ac, a'c'/ обертаються навкруги вісі MN /mn, m'n'/ і утворюють так звану нішу.

Рис.2.1, таб.XL дає приклад обертання кола ABCD /abcd /a'b'c'd'/ навкруги вісі MN /mn, m'n'/, яка лежить в площі кола, але по-за ним; рис.222, таб.XL дає приклад, коли вісь MN /mn, m'n'/ перетинає саме коло.

В першому випадку маємо кільце, у другому поверхню, що носить назву тор.

На рис.223, таб.XL маємо еліпсоїд, який утворився від обертання еліпса /або півеліпса/ навколо його великої вісі.

На рис.225, таб.XL показаний гіперболоїд обертання, що утворився від обертання простої I.I3 /i.i3, i'i3'/ навколо вісі MN /mn, m'n'/ мимобіжної з простою I.I3.

При обертанні точка творчої, найближча до вісі опише коло, яке буде найвузчим місцем поверхні.

і. КРИВІ ЦІЛІНДРИ З ТВОРЧИМИ ПОСТІЙНОГО ВИГЛЯДУ.

Кривим циліндром називається така крива поверхня, що утворилася посуванням кривої лінії, або кривої поверхні по кривій керуючій лінії.

Розглянемо де-які приклади цих поверхней, що найчастіше уживаються у техніці, при чому допустимо, що крива творча не міняє своєї форми.

Криві циліндри з плоскими керуючими - це будуть сполучуючі частини рур, або кільце ланцюга.

На рис.224, таб.XL маємо кривий циліндр у пристосованні до свода. Творчою тут буде чверть кола АВ/ab, a'b'/, осередка О/о, о'/, а керуючою дуга кола АС/ac, a'c'/, при чому творча весь час посування рівнобіжно доземній площі мету, луч АО весь час рівнобіжний з поземною площею мету, а точка А пересувається по АС.

Гелісоїдальний циліндр постійного, плаского поземого перекрою витворюється посуванням пласкої кривої лінії, звичайно сіметричної відносно свого осередка, яка сковзає по вальцовій гвинтовій лінії з доземною віссю. Площа кривої творчої весь час утримує поземе положення.

На рис. 226, таб. XLII маємо приклад гелісоїдального циліндра постійного поземого перекрою, крива - творча якого-коло, посувається так, що осередок його $O/O, O'/$ йде по гвинтовій лінії $AB/aб, а'б'/$ при чому площа цього кола весь час рівнобіжна з поземою площею мету.

Такі гелісоїдальні циліндри уживаються часто для колон.

На рис. 227, таб. XLII показаний гелісоїдальний циліндр нормального круглого перекрою, який утворюється посуванням кола, осередок якого весь час йде по гвинтовій лінії, а площа кола пряма до цієї лінії. Цю криву поверхню можна також утворити за допомогою кулі, осередок якого посувається по гвинтовій лінії.

к. ПОВЕРХНІ З КРИВИМИ ТВОРЧИМИ ЗМІННОГО ВИГЛЯДУ.

Такі поверхні утворюються посуванням творчих /кривих ліній, або поверхней/ по довільній керуючій, при чому вигляд творчої під час посування змінюється до даному закону.

Триосевий еліпсоїд /рис. 228, таб. XLIII / утворився на засаді таких тверджень: 1/ осередок еліпса посувається по простій $AB/aб, а'б'/$, прямій до його площі, 2/ творчий еліпс перехрещує в двох точках другий керуючий еліпс, площа якого проходить через вісь $AB/aб, а'б'/$ і 3/ творчий еліпс весь час міняє свої виміри, але весь час залишається подібним та рівнобіжним з своїм початковим положенням.

Однополий еліптичний гіперболоїд /рис. 229, таб. XLIII /, утворений на засаді таких тверджень: 1/ творчий еліпс весь час залишається рівнобіжним, подібним та однакового положення з своїм початковим положенням, 2/ творчий еліпс весь час перехрещує гіперболу, площа якої пряма до площі еліпса, при чому осередок еліпса посувається по вісі $AB/aб, а'б'/$ гіперболи.

Утворення цього однополого гіперболоїда можна собі уявити ще таким чином: проста змінної довжини посувається при таких умовах: проста перехрещує два еліпси /контури нижньої та верхньої основи гіперболоїда/, та дотикається поверхні еліптичного циліндра, вісь якого поведена через осередки еліпсів основ.

На рис. маємо низку положень творчої.

л. ГРАФІЧНІ ПОВЕРХНІ.

Як що утворення кривої поверхні не підлягає ніякому закону, як що вона була випадковою, то така поверхня носить назву графічної поверхні.

Визначається вона за допомогою шеругу ліній, що лежать на ній. Найчастіше за такі лінії беруть лінії перетину тих поверхней з площами рівнобіжними з площею мету.

Такий спосіб визначення графічних поверхней уживається в топографії, тому й площі ці носять ще назву топографічних.

Більш докладно про графічні площі буде сказано нижче.

§ 35. ПЕРЕТИН КРИВОЇ ПОВЕРХНІ З ПЛОЩЕЮ.

Перетин кривих поверхней по між собою, подібний до перетину многостінників. Принцип розв'язання завдання той самий, а навіть й методи по більшості залишаються ті самі.

Далі на прикладах це виявиться ясно, а також виясняться й ті зміни в методах, які полегшують виконання завдання.

Все питання перетину кривих поверхней можна розбити на такі відділи:

- 1/ перетин кривої поверхні з площею,
- 2/ перетин кривої поверхні з простою,
- 3/ перетин кривої поверхні з многостінником,
- 4/ перетин кривої поверхні з кривою поверхнею,
- 5/ перетин кривої поверхні з кривою лінією.

В цьому параграфі приступимо до розглядання першого відділу.

Для того, щоб знайти перетин кривої поверхні з площею, треба користуватися допоміжними площами, які перетиналиб криві поверхні, й дану площу, або по протих, або по кривих, що легко нарисувати. Коли та яку допоміжну площу треба вибрати, залежить від різних умов і наступні приклади будуть поясненням для цього.

Циліндри обертання перетинаються площами рівнобіжними з віссю циліндра по чотирекутнику, взагалі ж циліндри обертання, а також циліндри, що мають керуючими коло, або еліпс, перетинаються довільними площами /не рівнобіжними з творчими/ по еліпсу.

Для визначення цього еліпсу перетину можна використати також спорідненість сліда циліндра з еліпсом перетину, як це показано на рис. 230, таб. XLIII

Маємо циліндр, поземий слід якого уявляє собою коло осередка $O/o, o'$; треба знайти перетин його з площею $P/P_h, P_v$.

Можна, аналогічно з перетином призми з довільною площею, брати довільні творчі циліндра і знаходити перетин їх з площею P . Коли будемо мати досить таких точок, то сполучаємо їх плавкою кривою й це буде крива перетину.

Цей забарний спосіб можна полекшити, користуючись методом споріднення.

Сполучимо осередки кол двох основ O з O_1 ; на цій простій лежать осередки усіх кол, рівнобіжних з слідом циліндра, а також і осередок циліндра перетина площею P . Цим осередком буде точка $O_o/o_o, o'_o$ / перетину простої $OO_1/o_o, o'_o$ /з площею P .

Ведемо через осередок O поземого сліду циліндра довільну просту ab , яка перетинається з віссю спорідненості P_h в точці a . Сполучаємо

a з O_o ; на цій простій повинні лежати точки 1 та 2 перетину площі P з циліндром. Ці точки уявляють собою перетин творчих 6.2 та $a.1$ з простою CO_o . Точки 1 та 2 лежать на творчих циліндра, себ-то це точки поверхні даного циліндра, вони лежать одночасно на простій CO_o , себ-то на площі P /бо CO_o лежить на тій площі/, тому належать й площі P .

Тому точки 1 та 2 дійсно уявляють собою точки перетину циліндра з площею P .

Коли ми знайдемо таким способом потрібну кількість точок, то сполучимо їх плавкою кривою й це буде крива перетину.

Видимі точки кривої лежатимуть на видимих творчих циліндра.

Ми знайшли поземий мет кривої перетину. До земі мети точок перетину лежать на доземих метях відповідних творчих циліндра та на прями до вісі з поземого мета. На рисунку показано як знайдені доземі мети 1', 2', 3', 4' точок 1, 2, 3, 4.

Стіжок перетинається кожною площею, що перетинає його вісь й не є рівнобіжною з творчими стіжками по еліпсу. Як що площа рівнобіжна з двома творчими стіжками, то кривою перетину буде гіпербола, а як що вона рівнобіжна тільки з однією творчею, - то парабола.

Треба мати на увазі, що ці правила відносяться не тільки до конусів обертання а також й до конічних поверхней, керуючими лініями яких будуть коло, або еліпс.

На рис 231, таб XLIV показано перетин подвійного стіжка вершка $S/s, s'$ вісі $MN/mn, m'n'$ з площею $P/P_h, P_v$, яка рівнобіжна з творчими $EN/en, e'n'$ та $FG/fg, f'g'$, себ-то з двома творчими, а такою кривою перетину буде гіпербола.

Площа P пряма до доземої площі мету, тому на її доземий мет метується крива перетину, що дає нам можливість зразу мати де-кілька точок гіперболи.

Вершки гіперболи лежать на творчих SA та SD ; доземо вони метуються в точках перехрестя доземних метів цих творчих з доземним слідом площі, а поземо на поземому меті творчих та на одному прями з доземними метами самих точок. Це будуть точки $1/1, 1'/$ та $2/2, 2'/$.

Площа P перетинає нижню основу стіжка в точках $3/3, 3'/$ та $4/4, 4'/$, а верхню в точках $5/5, 5'/$ та $6/6, 6'/$. Маємо кілька вже точок гіперболи і користуючись способами, показаними в § 29 можна вже нарисувати усю гіперболу.

Щоб ще полегшити справу, можна знайти осередок $O/0, 0'/$ гіперболи $01=02, 0'1'=0'2'/$ та через поземий мет O цього осередка провести прості рівнобіжні з метами ef та $f'g$ творчих. То будуть асимптоти гіперболи.

Коли ж буде бажано знайти ще де-кілька точок гіперболи, то треба користуватися допоможними площами.

На рисунку поведена допоможна площа Q рівнобіжна з поземою площею мету. Така площа перетне стіжок по колу, поперечника $KJ/ki, k'i'/$ осередка $2/2, 2'/$, а площу P по позему $3/10, 6/10, 6'10'/$; точки перехрестя цих позема та кола будуть точками $7/7, 7'/$ та $8/8, 8'/$ кривої перетину стіжка з площею P .

На рис. 232, таб. XLIV маємо випадок перетину стіжка площею P , рівнобіжною з однією тільки творчею $SA/sa, s'a'/$ стіжка, себ-то випадок параболи.

Вершок $3/3, 3'/$ параболи, напрям її головної вісі sa та ще дві точки $1/1, 1'/$ та $2/2, 2'/$ знаходяться легко й пояснень не вимагають.

З цима точками вже можна нарисувати параболу по вказівкам § 30, але коли бажано знайти ще кілька точок, то можна це зробити за допомогою способу, показаному на попередньому прикладі, або трохи иначе.

Поведемо через вершок S стіжка допоможну площу пряму до доземої площі мету, площу Q . Така площа перетне стіжок по трикутнику $SEF/sef, s'e'f'/$ а площу P по простій $4/5, 4'5'/$. Перехрестя цієї простої з боками трикутника дасть точки $4/4, 4'/$ та $5/5, 5'/$ кривої перетину стіжка з площею.

Допоможна площа R не дає відразу точок перетину, бо поземі мети трикутника перетину та простої перетину зливаються в одну просту; тому тут треба знайти їх третій мет, а за треттю площу мету ваяти площу R . Таким способом знайдені точки $7/7, 7'/$ та $8/8, 8'/$.

На рис. 233, таб. XLV, показано перетин кулі довільною площею P .

Кожна площа перетинає кулю по колу, яке, як про це було вже сказано в § 27, зметується еліпсом.

Для того, щоби знайти точки цього еліпсу, беремо допоможну площу рівнобіжну з однією з площ мету; така площа перетне кулю по колу, яке на відповідну площу зметується теж колом, а з даною площею перетнеться по головній лінії. Перехрестя цих кола з головною лінією дасть точки перетину кулі з площею.

Таким способом на рис. використано допоможну площу Q , рівнобіжну з позомою площею мету. Площа Q перетне кулю по колу, осередка $S/s, s'/s'$ поперечника $BD/bd, b'd'/b'd'$ і зметується позомо теж колом. Площі Q та P перетнуться по позому $CD/cd, c'd'/c'd'$. Перехрестя їх дасть точки $1/1, 1'/1'$ та $2/2, 2'/2'$ кривої перетину.

Коли знайдена задовольняюча кількість точок, то сполучають їх плавкими кривими.

Тут повстає питання які точки на метах кривої перетину будуть видимі, а які ні.

Щоб переконатися у цьому ведемо до кулі проміння зору прямі до площі мету, ці проміння створюють валець, що обертає кулю, і частини кривої, що лежать на півкулі, звернуті до глядача будуть видимі.

Практично на позомому меті будуть видимі ті точки кривої, доземі мети яких лежать на верхній півкулі доземого мета кулі, а на дозомому меті та частина, поземі мети якої лежать на нижній півкулі доземого мета кулі.

§36. ПЕРЕТИН КРИВОЇ ПОВЕРХНІ З ПРОСТОЮ.

Перетин кривої поверхні з простою знаходиться тим самим способом, як і перетин многостінника з простою, а саме через просту ведуть допоможну площу, а перехрестя кривої перетину цієї площі з даною кривою поверхнею та даної простої дасть бажані точки перетину.

Ріжниця уся полягає в тому, що раніш ми брали допоможні площі прямі до площ мету, тепер нам треба вибирати ці площі так, аби перетин їх з даною кривою поверхнею був проста, або якась проста крива - коло.

На рис. 234, таб. XLV показаний перетин стіжка з простою.

Зє допоможну площу візьмемо площу, поведену через дану просту, а також через вершок стіжка. Така площа перетне стіжок по трикутникові два

боки якого будуть творчими стіжка.

На даній простій беремо довільні точки $C/c, c'/$ і $D/d, d'/$, сполучаємо їх з вершком $S/s, s'/$ простими $CS/cs, c's'/$ і $DS/ds, d's'/$, знаходимо сліди цих простих, - поземі $F/f, f'/$ і $E/e, e'/$ та ведемо поземий слід Ph допоможної площі, яка проходить через вершок стіжка.

Площа P перетне стіжок по трикутнику $SGH/sgh, s'gh'/$, а точки перехрестя творчих $SG/sgh, s'gh'/$ та $SH/s'h, s'h'/$ з даною простою будуть бажаними точками перетину. Дійсно точки $M/m, m'/$ та $N/n, n'/$ будуть тими точками, бо вони лежать одночасно на творчих SG та SH стіжка, себ-то на самому стіжкові, а також й на даній простій $AB/ac, a'b'/$.

Як що дана проста $KL/k'l, k'l'/$ пряма до вісі мету OX , то згадана допоможна площа не дасть змоги розв'язати завдання, бо трикутник перетину, а також сама проста, вірніше мети цих фігур зливаються в одну просту. Тому тут треба використати третю площу мету, а третій мет і стіжка й даної простої, як це ясно видно з рисунку, відразу визначають мети точки перетину.

Яка з точок перетину видима на відповідній площі мету, залежить від того, чи творча, на якій ця творча лежить видима на даній площі мету чи ні.

У випадку циліндра /рис.235, таб. XLV/ ведемо допоможну площу так, щоб перетин її з циліндром був чотирикутник; тому ця площа ведеться рівнобіжною з творчими циліндра.

На даній простій $KL/k'l, k'l'/$ беремо довільні точки $A/a, a'/$ і $B/b, b'/$, ведемо через них прості рівнобіжні з творчими циліндра, знаходимо поземі сліди $C/c, c'/$ і $D/d, d'/$ цих простих; тоді Ph буде поземим слідом допоможної площі P , поведеної через дану просту KL рівнобіжною з творчими циліндра.

Площа P перетне циліндр по чотирикутнику $FEMN/femn, f'm'e'n'/$ - верхня його частина не нарисована/ і точки $M/m, m'/$ і $N/n, n'/$ уявляють собою бажані точки перетину циліндра з простою.

Для того, щоб уявити собі, які з метів цих точок будуть видимі, треба звернути увагу на яких творчих циліндра вони лежать, як що ці мети творчих будуть видимі, то й мети точок теж будуть видимі.

Перетин кулі з простою /рис.236, таб. XLV /, знаходити вказаним способом досить забарне, бо допоможні площі, поведені через дану просту, хоча й дають в перетині з кулею - коло, але те коло метується еліпсом, рисування якого досить складне. Тому тут не рисують метів еліпса, а переходять до зміни площ мету.

Через дану просту $KL/k'l, k'l'/$ ведемо допо-

можну площу пряму до доведеної площі мету, беремо цю площу за нову позему площу мету та переходимо до системи $\mathcal{U}/\mathcal{P}$.

Тоді перетин площі $\mathcal{P}$ з кулею поземо метується колом, осередка $\mathcal{O}$, а проста $\mathcal{KL}$ - метується метом k, l , і точки m і n будуть мети точок перетину.

Вертаємося до старої системи площ мету і маємо точки $\mathcal{M}/m, m'/$ та $\mathcal{N}/n, n'/$ перетину кулі з простою.

Для уявлення які мети точок перетину будуть видимі, а які ні, треба користуватися правилом, згаданим при розв'язанні завдання про перетин кулі з площею /§ 34/. Для даного прикладу мети точки $\mathcal{M}$ на обох площах мету видимі, тоді як мети точки $\mathcal{N}$ на обох площах мету не видимі.

На рис. 237, таб. XLVI маємо приклад перетину поверхні обертання з простою $\mathcal{KL}/k, l/$.

Допоможна площа $\mathcal{P}$, поведена через дану просту, прямою до поземої площі мету перетне поверхню обертання по кривій лінії, перехрестя якої з даною простою й дасть бажані точки перетину.

Для того, щоб знайти цю криву перетину користуємося допоможними площами, рівнобіжними з поземою площею мету, які перетнуть поверхню обертання по колах та визначать в перехрестю з метом даної простої точки кривої перетину.

На рисунку показано користування одною з таких площ, площею $\mathcal{Q}$. Площа $\mathcal{Q}$ перетне дану криву поверхню по колу, осередка $\mathcal{O}_1/o_1, o_1'/$, поперечника $\mathcal{FG}/f, g/$ і дасть точки $3/3, 3'/$ та $4/4, 4'/$ кривої перетину.

Не треба знаходити всієї кривої перетину; вистарчить знайти ті її частини, які знаходяться навколо доведеного мета даної простої.

Перехрестя доземих метів тієї кривої з доземим метом даної простої дасть доземі мети $1'$ та $2'$ точок перетину простої з даною поверхнею; поземі мети цих точок лежать на прямих до вісі $\mathcal{OX}$ та на поземому меті даної простої.

§ 37. ПЕРЕТИН КРИВОЇ ПОВЕРХНІ З МНОГОСТІННИКОМ.

Виконання цього завдання аналогічно з виконанням знаходження перетину многостінників, тільки тут треба розглядати творчі, як руби, та ще треба користуватися більшою кількістю творчих, ніж рубів при многостінниках.

В де-яких випадках треба користуватися та-

кими допоможними площами, які в перетині з кривою поверхнею дають найпростіші криві або прості.

Прикладом цього є перетин кулі з похилою призмою, показаний на рис. 238, таб. XLVI.

Спочатку знаходимо перетин цих рубів призм з кулею способом показаним в § 36.

На рисунку показано як знайти перетин руба $D/d, d'/$ з кулею, це будуть точки $7/7, 7'/$ та $8/8, 8'/$. Для нашого прикладу усі руби призми за винятком руба $C/c, c'/$ перетинають кулю.

Тепер треба знайти криві перетину стінок призми з кулею, для чого можна користуватися допоможними площами, рівнобіжними з площею мету, які перетинають кулю по колу, а призму по чотирекутнику, спільні точки яких й будуть точками перетину кулі з призмою.

На рисунку, користуючись допоможною площею Q , яка перетне кулю по колу осередка $O_2/o_2, o_2'/$ та луча $O_2H/o_2h, o_2'h'/$, а призму по чотирекутнику $JPTs/jpts, p'i'st'/$ перехрестя яких дасть точки $2(2, 2'/$ та $10/10, 10'/$ перетину кулі з призмою.

При сполученню точок кривих перетину, так як це було й при випадку перетину многостінників, треба звертати особливу увагу на те, аби сполучені точки лежали на одній стінці многостінника, а також були сусідніми на поверхні кулі.

§ 38. ПЕРЕТИН КРИВОЇ ПОВЕРХНІ З КРИВОЮ ПОВЕРХНЕЮ.

Перетин циліндричних і конічних поверхней, сліди яких лежать на площах мету, знаходяться по тому самому принципу, що й перетин многостінників, які стоять на площах мету. На місце рубів тут маємо творчі, на місце многокутників перетину - замкнуті криві.

На рис. 239 та 240, таб. XLVII показаний перетин двох циліндрів, що стоять на одній площі мету та двох конусів, що стоять на різних площах мету.

На кожному рисунку показано як знайти точки перетину, користуючись допоможною площею Q . Таким способом знаходимо чотири точки перетину $1/1, 1'/$, $2/2, 2'/$, $3/3, 3'/$ та $4/4, 4'/$. Дальші допоможні площі дадуть змогу знайти потрібну кількість точок, які потім сполучаємо плавкою кривою. При сполученню треба звертати особливу увагу на те, щоб крива перетину лежала одночасно на обох поверхнях, а не пробивала їх.

При перетині кривих поверхней взагалі треба користуватися, як про це була мова й раніше, та-

кими допоможними площами, які б у перетині давали б найпростіші криві, або прості.

Иноді одної допоможної площі не вистарчає, приходить ся уживати ще додаткові і не тільки площі, але навіть криві поверхні, тільки знову такі, які легко визначити на рисунку.

Маємо еліптичний циліндр /рис. 241, таб. XLVIII/; треба знайти перетин його з кулею.

Ведемо допоможну площу Q рівнобіжну з поземною площею мету. Площа Q перетне кулю по колу $O_1 O_1'$, $O_1 a$, $O_1' a'$, а циліндр по еліпсу. Перехрестя поземних метів цих кривих дасть точки кривої перетину, але для цього треба нарисувати коло та еліпс. Еліпс рисувати трохи забарно, тому беремо ще одну допоможну криву поверхню, а саме через коло перетину площі Q з кулею, як керуючу, ведемо циліндричну поверхню, творчі якої будуть рівнобіжні з творчими даного циліндра. Така циліндрична поверхня перетинається з даною по творчих /бо мають рівнобіжні творчі/, а з кулею у неї буде спільним коло /керуюча лінія/; перехрестя їх дасть точки кривої перетину.

Допоможна крива поверхня буде мати своїм поземним слідом коло, однакове з колом перетину кулі з площею Q ; осередком цього кола буде поземний слід $D/d, d'$ простої, поведеної рівнобіжно з творчими даного циліндра через осередок $O_1/O_1', o_1/o_1'$. Рисуємо поземний слід допоможної кривої поверхні /коло осередка b , луч $O_1' a'$ / - самої поверхні не рисуємо, - та знаходимо точки c і a перехрестя слідів даного та допоможного циліндрів. Через ці точки ведемо творчі даного циліндра, які в перехрестю з колом перетину кулі з площею Q дадуть чотири точки $1/1, 1'/1'$, $2/2, 2'/2'$, $3/3, 3'/3'$, $4/4, 4'/4'$ кривої перетину кулі з циліндром.

Таким самим способом можна знайти потрібну кількість точок кривої перетину, сполучивши їх павкою кривою, при чому треба мати під увагою правило про те сполучення, що було висловлене вище.

У випадку перетину кулі з еліптичним конусом /рис. 242, таб. XLVIII/ початок розв'язання задач той самий, що й попередньому випадку. Далі ведемо допоможний конус, який має керуючою лінією коло перетину кулі з площею Q , а вершок спільний з вершком $S/s, s'$ даного конуса.

Слід допоможного конуса буде коло, осередок якого буде поземний слід простої поведеної через вершок $S/s, s'$ даного конуса, та осередок $O_1/O_1', o_1/o_1'$ осередка кола перетину кулі з площею Q . Лучем цього кола сліду буде $bc = b'c'$. Перехрестя цього кола з слідом даного конуса дасть точки $D/d, d'$ і $E/e, e'$; далі дістаємо творчі конуса $SD/sd, sd'$ і $SE/se, se'$, які в перехрестю з колом перетину кулі з площею Q , визначають точки $1/1, 1'/1'$, $2/2, 2'/2'$, $3/3, 3'/3'$

та $4/4,4'/$ кривої перетину кулі з конусом.

Допоможна площа P не дає точок перетину, бо слід допоможного циліндру не перехрещується з слідом даного.

Дальші точки кривої перетину можна знайти таким самим способом, користуючись ще допоможними площами та допоможними конічними поверхнями.

Іноді положення кривих поверхней полекшує розв'язання завдання.

Наприклад, коли маємо знайти перетин двох еліпсоїдів обертання /рис. 243, таб. XLIX/, осі яких рівнобіжні з доземою площею мету та перехрещуються у точці $A/a, a'/$, можна користуватися допоможними кулями з осередком в $A/a, a'/$.

Така допоможна куля перетне еліпсоїди по колах, площа яких буде пряма до поземої площі мету, тому доземо вони метуються простими. Перехрестя цих простих дасть доземий мет точок кривої перетину еліпсоїдів.

Поземі мети цих точок лежать на перехрестю кол перетину еліпсоїдів з допоможною кулею. Але одно з тих кол рівнобіжне з доземою площею мету і буде поземо метуватися колом, а друге похиле і метується еліпсом.

Аби уникнути зайвого рисування еліпса, рисуємо тільки коло, а поземі мети точок кривої перетину знаходимо, користуючись законом, що два мети точки лежать на прямі до OX .

На доземому меті у даному випадку дві частини кривої перетину зливаються між собою.

На рис. 244, таб. XLIX показано, як знайти криву перетину гвинтового коноїда та скосої площі.

Гвинтовий коноїд має керуючими: гвинтову лінію та вісь II , а творчі його рівнобіжні з доземою площею мету; скоса площа визначається двома парами творчих, площі рівнобіжності прямі до поземої площі мету.

Ведемо через довільну творчу гвинтового коноїда допоможну площу Q пряму до поземої площі мету.

Площа Q перетне коноїд по творчій $AB/a, b, a', b'/$ а скосу площу по кривій лінії, знайти яку можна в такий спосіб.

Слід Q площі Q перехрещується з творчими скосої площі у точках 1, 2, 3, 4 і т.д., які доземо метуються на відповідних творчих скосої площі та утворюють криву лінію. Перехрестя цієї кривої лінії з a', b' дасть доземий мет точки кривої перетину даних кривих поверхней. Поземий мет цієї точки лежить на a, b та на одному прямі до OX .

Дальші точки кривої перетину можна знайти тим самим способом.

§39. ПЕРЕТИН КРИВОЇ ПОВЕРХНІ З КРИВОЮ ЛІНІЄЮ.

Для того, щоб знайти перетин кривої поверхні з кривою лінією, ведемо через цю лінію допоможну криву поверхню, циліндричну, або коничну, знаходимо криву перетину цієї допоможної кривої поверхні з даною, і нарешті перехрестя знайденої кривої перетину з даною кривою дасть бажані точки перетину.

Коли маємо знайти перетин циліндра з кривою лінією /рис.245, таб. L /, то через дану криву, як керуючу лінію, ведемо допоможну циліндричну поверхню, творчі якої рівнобіжні з творчими даного циліндра.

Знаходимо поземий слід $сз$ цієї допоможної кривої поверхні і точки перехрестя цього сліду з слідом даного циліндру. Творчі $M1/m1, m'1'/$ та $N2/n2, n'2'/$ будуть простими перетину двох циліндрів: даного та допоможного, а точки $1/1, 1'/$ та $2/2, 2'/$ будуть точками перетину даної кривої з даним циліндром.

Що торкається того які мети цих точок будуть видимі, то це питання розв'язується тут зовсім так, як й при перетині кривої поверхні простою /§ 36/. Для даного випадку точка 1 поземо видима, доземо - ні, а точка 2 і поземо, і доземо - невидима.

У випадку перетину коничної поверхні з кривою лінією /рис.246, таб. L / допоможною площею буде теж конична поверхня, що має керуючою лінією дану криву і творчі якої мають за вершок - вершок $S/s, S'/$ даного конуса.

Слід цієї допоможної коничної поверхні буде крива $CH/ch, c'h'/$, перехрестя якого з слідом даного конуса визначить творчі $SE/se, s'e', SB/sk, sk'/$ даного конуса, по яких він перетинається з допоможним.

Перехрестя цих творчих з даною кривою буде бажаними точками перетину даного конуса з даною кривою лінією.

При розв'язанні завдання перетину кулі з кривою лінією /рис.247, таб. L / ведемо через дану криву допоможну циліндричну поверхню, творчі якої будуть прямі до поземої площі мету.

Для того, щоб знайти перетин цього допоможного циліндра з кулею, користуються ще другими допоможними площами, рівнобіжними з поземою площею мету. Тут не треба шукати повної кривої перетину кулі з допоможним циліндром, вистарчить найти ті її частини, що лежать навколо доземого

мету даної кривої.

Точки перехрестя цих частин кривої перетину допоможного циліндру з кулею з даною кривою лінією визначають точки перетину даної кривої лінії з даною кулею.

Відзнака видимости метів точок перетину та сама, про яку говорилося вже в § 36.

§ 40. ДОТИЧНІ ПЛОЩІ

Площею дотичною до даної кривої поверхні в даній точці дотику називається така площа, яка несе на собі дві простих, дотичних в точці дотику до двох кривих ліній кривої поверхні, які перехрещуються у тій же точці дотику.

Дотичні площі можуть мати з кривою поверхнею або точку дотику /напр. куля, еліпсоїд/, або просту дотику /циліндри, конуси/, іноді дотичні в точці площі перетинають поверхню або по двох простих /скоса площа/, або по простій та кривій лініях /циліндроїд/ або по двох кривих лініях.

Усі питання про дотичні до кривої поверхні площі можна привести до таких:

а/ Повести площу дотичну до кривої поверхні в даній точці.

б/ Повести площу дотичну до кривої поверхні по даній творчій.

в/ Повести через дану по за кривої поверхні точку, площу дотичну до цієї поверхні.

г/ Повести площу дотичну до даної поверхні рівнобіжну з даною простою.

д/ Повести дотичну до кривої поверхні площу через дану просту.

е/ Повести дотичну до кривої поверхні площу, рівнобіжну з даною площею.

Розглянемо кожне з цих питань окремо.

а. ПЛОЩІ ДОТИЧНІ ДО КРИВОЇ ПОВЕРХНІ В

ДАНІЙ ТОЧЦІ.

В загальному вигляді це питання у просторі розв'язується так: через дану точку ведемо дві площі, що перетинають дану криву поверхню по двох кривих, які мають спільною дану точку; до тих кривих, через дану точку ведемо дотичні прості, які і визначають дотичну площу.

На рис. 248, таб. L цей метод пристосований до кривої поверхні обертання

Через дану точку C ведемо площу P рівнобіжну з поземною площею мету. Площа P перетне поверхню обертання по колу /воно потрібне також для визначення поземного мета C точки C до даному доземому мету C' /.

Через точку C ведемо дотичну до кола перетину площі P з кривою поверхнею.

Ця дотична $EF/ef, e'f'$ лежить в дотичній до кривої поверхні площі; для повного ж визначення цієї площі треба мати ще одну просту.

Ведемо тепер площу Q через точку C та через вісь $AB/ab, a'b'$ обертання кривої поверхні. Щоб не рисувати кривої перетину цієї площі з кривою поверхнею, обернемо площу Q навкруги вісі AB до положення рівнобіжного з доземною площею мету. Тоді крива перетину доземс зілється з творчою кривою поверхні, а точка C перейде в положення $C_0/c_0, c'_0$ /.

Ведемо через точку C_0 дотичну $DC_0/dc_0, d'_c'_0$ до злитого положення кривої перетину, та повертаємо цю дотичну разом з точкою C_0 назад. Точка D лежить на вісі обертання, тому мети другої дотичної пройдуть через точку D .

Проста $DC/dc, d'_c'$ разом з простою $EF/ef, e'f'$ визначають дотичну до даної кривої поверхні площу з точкою дотику $C/c, c'$ /.

Дійсно ця площа несе на собі дві простих DC і EF / дотичних до двох кривих даної поверхні, причому ці криві перехрещуються в точці C , точці дотику площі.

Площа дотична до кулі /рис. 249, таб. L / повинна бути прямою до луча кулі, поведеного через точку дотику.

По перше треба визначити точку, що лежить на кулі.

Для того через один з метів точки A/a' ведемо площу рівнобіжну з другою площею мету /поземною, - сліди площі на рисунку не показані/ та знаходимо на спільному до вісі OX прямі і колі перетину другий мет A/a цієї точки.

По умові дотична площа повинна бути прямою до луча $OA/oa, o'a'$; тому напрям головних ліній цієї площі вже відомий. Позем DE має мети $dc \perp oa$ і $d'e' \parallel OX$; дозем BC має мети $bc \parallel OX$, $b'c' \perp o'a'$.

Прости BC та DE визначають площу дотичну до даної кулі в точці A .

Для того, щоб повести дотичну площу до гвинтового коноїду /рис. 250, таб. LI / в даній точці $C/c, c'$ ведемо через точку $C/c, c'$ дві лінії: творчу $CB/cb, c'b'$ коноїда, та гвинтову лінію, одної вісі з коноїдом; потім через цю точку ведемо дотичну до нової гвинтової лінії.

Творча $CB/cb, c'b'$ коноїда, та дотична DC

$/ac, d'e'/$ визначають дотичну площу.

б. ПЛОЩІ ДОТИЧНІ ДО КРИВОЇ ПОВЕРХНІ ПО ЇЇ ТВОРЧІЙ.

Такі площі можливо повести лише до такої кривої поверхні, яка має творчими просту.

При розв'язанні таких задач дана творча може замінити одну з кривих ліній, про які говорилося в попередньому уступі, залишається знайти другу просту.

На рис. 251, таб. L1 маємо розв'язання завдання: повести дотичну до циліндра площу по творчій $AB / a'b' /$ його.

Через слід $A/a, a' /$ творчої AB ведемо дотичну P_h до сліду циліндра. Ця проста P_h разом з творчою AB визначають бажану дотичну площу, при чому P_h буде поземим слідом цієї дотичної площі. На рис. 252, таб. L1 це завдання виконано для конуса. Тут дотична по творчій $SM / sm, s'm' /$ площа визначається самою творчею, а також простою P_h дотичною до сліду конуса з точкою дотика M , слідом творчої SM . Проста P_h є разом з тим поземим слідом дотичної площі.

Иноді розв'язків задачі буває безмежна кількість, як наприклад при скосих площах, в яких через кожену точку даної творчої можна повести дотичну площу, яка б дотикалася б поверхні по даній творчій.

в. ПЛОЩІ ДОТИЧНІ, ПОВЕДЕНІ ЧЕРЕЗ ДАНУ ТОЧКУ ПО ЗА КРИВОЮ ПОВЕРХНЕЮ.

Для розв'язання цього завдання у простороні дану точку приймають за вершок коничної поверхні, що обертає дану криву поверхню. Кожна площа дотична до допоможної коничної поверхні буде дотичною теж до даної та буде проходити через дану точку.

Цей допоможний конус иноді може перетворитися у площі, дотичні до даної поверхні, тому відповідів може бути або безліч, або де-скільки, або в окремому випадку одно.

Напр. на рис. 253, таб. L1 маємо безліч розв'язків.

Як що точка $A/a, a' /$ не лежить на простій $AO/a_o, a'o' /$ прямій до одної з площ мету, то за допомогою зміни площ мету це завжди можна зробити.

Через точку $A/a, a' /$ ведемо допоможну коничну поверхню, що обертає дану кулю.

Поземний слід цієї коничної поверхні буде коло осередка $O_1/o_1, o'_1 /$ луча $DE / d'e, d'e' /$

Кожна площа дотична до допоміжного конуса, буде дотичною й до кулі, як напр. площа P визначена простою $AE/ae, ae'$ та поземим слідом P_h .

Рис. 254, таб. LI дає відповідь на питання: через дану точку $A/a, a'$ повести дотичну площу до даного циліндра.

Через точку A ведемо просту $AB/ab, a'b'$ рівнобіжну з творчими циліндра, знаходимо поземий слід $B/b, b'$ цієї простої, і через цей слід ведемо дотичні прості до сліду даного циліндра.

Розв'язків маємо два: одна площа визначається творчою $DE/de, d'e'$, та своїм поземим слідом P_h ; друга площа творчою $CE/ce, c'e'$ та слідом Q_h .

Якщо керуючою лінією циліндра буде довільна крива, то розв'язків може бути більше як два.

Коли маємо коничну поверхню /рис. 255, таб. LI/ то сполучаємо дану точку $A/a, a'$ з вершком конуса $S/s, s'$ простою $SA/sa, s'a'$, знаходимо поземий слід $B/b, b'$ цієї простої і кінчаємо розв'язання так, як це зроблено в попередньому прикладі.

г. ПЛОЩІ ДОТИЧНІ, РІВНОБІЖНІ З ДАНОЮ ПРОСТОЮ.

Загально це завдання розв'язується так: обертаємо дану криву поверхню допоміжним циліндричною поверхнею, творчі якої були б рівнобіжні з даною простою. Кожна площа дотична до допоміжного циліндра буде розв'язком питання. Тому цих розв'язків може бути безліч.

В окремих випадках допоміжний циліндр переходить у дотичні до даної кривої поверхні площі і тоді кількість розв'язків зникається до одного, двох або кількох.

Маємо стіжок /рис. 256, таб. LII/ треба повести дотичні до нього площі, рівнобіжні з простою $AB/ab, a'b'$.

Через вершок $S/s, s'$ стіжка ведемо просту $SC/sc, s'c'$ рівнобіжну з AB , знаходимо поземий слід $C/c, c'$ цієї простої і з точки c ведемо дотичні до сліду стіжка.

Творча $SD/sd, s'd'$ разом з простою $CD/cd, c'd'$ визначають один розв'язок задачі /проста cd є поземий слід P_h площі P /. а творча $SE/se, s'e'$ разом з простою $CE/ce, c'e'$ другий /проста ce є поземий слід Q_h площі Q /.

У випадку циліндра /рис. 257, таб. LII/ через довільну точку його висі /напр. O_1 / ведемо просту $O_1C/o_1c, o_1c'$ рівнобіжну з даною простою $AB/ab, a'b'$. Знаходимо поземий слід $C/c, c'$ цієї про-

стої і сполучаємо його з осередком сліду даного циліндра.

Ведемо дотичні до сліду даного циліндра, рівнобіжні з простою os і це будуть поземі сліди P_b та Q_b дотичних площ, які крім того визначаються творчими $DF/df, d'f'$ для площі P/i $EG/eg, e'g'$ для площі Q /.

Коли нам треба повести дотичну площу до кулі /рис. 258, таб. LII/, рівнобіжну з простою AB / $ab, a'b'$ /, то для розв'язання завдання міняємо площі мету, причому нову дозему площу мету вибираємо так, щоби проста AB була рівнобіжна з нею / $ab \parallel o, x$ /. Нову площу мету ведемо через осередок $O/o, o'$ даної кулі.

Ведемо до нового мета кулі дотичні рівнобіжні з a', b' ; тоді d', c' буде те коло, на якому знаходяться точки дотику площ дотичних до кулі та рівнобіжних з простою AB .

Визначимо одну з таких точок, напр. точку M . Перехсдимо ще раз до нової системи площ мету, причому нова площа мету поведена через коло D, C ; тоді беремо довільну точку m , це буде поземий мет, доземий її мет m' , лежить на вісі O, x .

Переходом до старої системи площ мету знайдемо мети m та m' точки M , точки дотику площі рівнобіжної з простою AB .

Прості $EF/ef, e'f'$ та $GH/g'h, g'h'$ визначають цю площу, причому одна з цих простих може бути заміненою простою рівнобіжною з AB .

д. ПЛОЩІ ДОТИЧНІ ДО КРИВОЇ ПОВЕРХНІ,

ПОВЕДЕНІ ЧЕРЕЗ ДАНУ ПРОСТУ.

Розв'язання цього питання не завжди можливе. Для кулі воно можливе тільки тоді, коли проста не перетинає її.

Для циліндричних поверхней воно можливо у випадку, як що проста abc рівнобіжна з творчими, або при продовженні дотикається циліндра.

Для коничних поверхней воно можливо тоді, коли проста або проходить через вершок, або при продовженні дотикається конуса.

е. ПЛОЩІ ДОТИЧНІ ДО КРИВОЇ ПОВЕРХНІ І

РІВНОБІЖНІ З ДАНОЮ ПЛОЩЕЮ.

Розв'язок не завжди можливий.

Для правильних циліндрів він буде можливий, як що дана площа рівнобіжна з його віссю.

Для правильних конусів він буде можливий як що дана площа несе на собі прості рівнобіжні лише з одною /а не двома/ його творчими.

В таких випадках обертають навкруги даної кривої поверхні допоможний циліндр, творчі якого були б рівнобіжні з одною з простих даної площі. Площі дотичні до допоможного циліндру будуть розв'язком завдання.

На рис. 259, таб. LII треба повести дотичну площу, рівнобіжну з площею P .

Дотична до кулі площа, в точці дотику має луч кулі прямим до себе; понеже ми маємо напрямок цієї площі $||P$, то можемо повести луч прямий до площі P , знайти точку дотику і повести бажані площі.

Ведемо такий луч $DB / db \perp P_h; db' \perp P_v /$; щоб знайти перетин його з кулею, переходимо до нової системи площ мету, та знаходимо точки $C / c, c' /$ і $D / d, d' /$, через які повинні бути поведені дотичні площі.

На рисунку через точку $C / c, c' /$ поведена одна така площа $Q / q_h || P_h; q_v || P_v /$, яка буде дотикатися кулі в точці C та буде рівнобіжною з даною площею P .

Коли маємо тор /рис. 260, таб. LIII/, то для розв'язання задачі обертаємо дану площу P разом з тором навкруги вісі $MN / mn, m'n' /$ до положення, при якому площа P стала б прямою до дозимої площі мету.

Тоді ведемо до тору дотичну $E, F / e, f' || P_v /$, яка визначить точку $D / d, d' /$ дотику. Вертаємо цю точку назад в положення $D / d, d' /$ і через цю точку ведемо площу $Q || P$.

Проста E, F визначала дотичну до тору площу, рівнобіжну з оберненим положенням площі $P / P_h, P_v /$, при чому точка D була для цього випадку точкою дотику тієї дотичної площі.

Коли ж ми повернемо тор, площу P та точку D в старе положення, то точка D буде зрозуміла точкою дотику, а площа Q - відповідає на запитання.

§ 41. РОЗГОРТКА МНОГОСТІННИКА ТІ КРИВОЇ ПОВЕРХНІ.

Розгорткою многостінника, або кривої поверхні зветься пласка фігура, що одержується, як що усі стінки або частини кривої поверхні віддемо з площею одної з стінок, обертаючи їх послідовно навкруги рубів.

Розгортка уявляє собою дійсний вигляд повер-

хні многостінника, або кривої поверхні; вона часто буває необхідною для збудування моделі якої небудь частини машин.

Розгортка правильних многостінників, визначених метами, виконується дуже просто; над цим зупинятися не будемо, розглянемо більш складні приклади.

Розгортка похилої піраміди /рис 61, таб. LIII/ виконується так.

Спочатку треба знайти усі необхідні елементи для будування стінок піраміди. Ці стінки будуть трикутниками, для збудування яких треба мати три елементи, - три боки. Один з цих елементів роби основи $AB/ab, a'b'/, BC/bc, b'c'/, CD/cd, c'd'/$ і $DA/da, d'a'/$ нам відомі, бо основа лежить на поземній площі мету, тому поземній її мет - це дійсна величина, та вигляд цієї основи.

Треба знайти виходить дійсну довжину рубів $SA/sa, s'a'/, SB/sb, s'b'/, SC/sc, s'c'/, SD/sd, s'd'/$.

Для цього приводимо ці руби, за допомогою обертання навкруги вісі, прямої до площі мету /доземної, на рисунку не показана/, до положення рівнобіжного з одною з площ мету /поземної/.

Мети рубів у новому положенні будуть $s'a_0, s'b_0, s'c_0, s'd_0$; поземні мети рубів - це дійсна їх довжина.

Якщо на одній з стінок маємо трикутник ETG / $etg, e't'g'$ /, то для того, щоб нарисувати його на розгортці треба мати точне положення вершків на стінці.

Вершки лежать на творчих $SK/sk, s'k'/, SJ/sj, s'j'/$ та $SH/sh, s'h'/$, які можна нарисувати, бо відтинки ak, ki та ih уявляють собою їх дійсну величину; залишається знайти дійсну величину віддалень вершків трикутника від вершка S піраміди. Це зроблено на рис. 259, таб. LIII за допомогою обертання.

Тепер рисуємо саму розгортку піраміди /рис. 262, таб. LIII/.

Рисуємо трикутник SAD де $AD = ad$ /попереднього рисунку/, $SA = s'a_0, SD = s'd_0$. Це буде одна з стінок SAD піраміди. Потім на боці SD яко на основі рисуємо трикутник SDC де $SC = s'c_0$ і $DC = dc$; це буде друга стінка SDC ; рисуємо на боці SC трикутник SCB де $SB = s'b_0$ і $CB = cb$ - це третя стінка; далі на боці SB трикутник $SB A$ де $SA = s'a_0$ і $BA = ba$ і нарешті на одному з боків основи рисуємо чотирикутник $BADC$ основи.

Маємо повну розгортку даної піраміди. Як би вирізати одержану фігуру, зігнути її по рубал, та склеїти, то одержали б дійсну піраміду, що визначена метами рис. 259, таб. LIII.

Для того, щоб нанести на стінку SAD трикутник ETG , рисуємо творчі $SK/sk = ak, SJ/sj = ki$.

і $SH/JH = ih/$ та відкладаємо на них відтинки $SE = sE_0$, $SF = sF_0$, $SG = sG_0$. Одержимо дійсний вигляд та положення трикутника EFG

Розгортка бруса не викликає труднощів, бо стінки його уявляють собою прямокутники, для будування яких потрібні два елементи - боки.

Розгортка похилої призми більш складна, бо стінки її будуть рівнобіжники, для будування яких потрібні вже три елементи - два боки та кут поміж ними, або два боки та косина.

На рис. 263, таб. LIII маємо похилу призму, що стоїть на поземній площі мету; треба нарисувати розгортку її.

Один з елементів будування рівнобіжників, а саме руби основи $ABCD/a'b'c'd'$ маємо на рисунку; другий елемент для всіх чотирьох рівнобіжників однаковий, бо $AE = BF = CG = DH$, тому знаходимо дійсну довжину одного з цих рубів, напр. $AE/a'e'$; залишається для кожного з рівнобіжників знайти ще дійсну довжину косин $AF/a'f'$, $AN/a'n'$, $CF/c'f'$, та $CH/c'h'$, дійсні довжини косин будуть $a'f'_0$, $a'n'_0$, $c'f'_0$, $c'h'_0$.

Переходимо до рисування самої розгортки.

Рисуємо трикутник $A'FE'$ /рис. 264, таб. LIII/, де $A'E = a'e'_0$, $A'F = a'f'_0$, $EF = f'e'$; доповнюємо цей трикутник до рівнобіжника $A'FE'B'$, $AB \parallel EF$; маємо одну стінку $ABFE$ призми. Далі будуємо трикутник $B'CF'$, $BC = b'c'$, $CF = c'f'_0$; доповнюємо його до рівнобіжника $B'CF'G'$, $GF \parallel CB$; і т. д. аж поки не одержимо послідовно усіх стінок призми. На довільному боці рисуємо основи $ABCD$ і $EFGH$ і розгортка готова.

Це завдання можна розв'язати ще другим способом.

Ведемо через вершки $C/c, c'/$ та $E/e, e'/$ площі P та Q , прямі до рубів призми, та до поземної площі мету /рис. 265, таб. LIV/

Частина бруса, яка вміщується по між площами P та Q , уявляє собою брус з нижньою основою $C456/c456$, $a'4'5'6'$, верхньою основою $E123/e123$, $e'1'2'3'$; дійсний вигляд цих основ буде чотирекутник $c4.5.6$. /знайдено за допомогою злиття площі з поземною площею мету/, а дійсна довжина рубів $s2$. /обертання до положення рівнобіжного з поземною площею мету/

Крім того знайдемо дійсну довжину цього рубу призми sG_0 , - та відтинків $H3/h3_0$, $F4/f4_0$.

Нарисуємо спочатку розгортку тої частини призми, яка уявляє собою брус

На простій CC /рис. 266, таб. LIV/ відкладаємо відтинки $C4 = c4_0$, $4.5 = 4.5_0$, $5.6 = 5.6_0$, $6.C = 6.c_0$; в точках поділу ставимо прями, відкладаємо на них відтинки $C2 = 43 = 5E = 61 = 62 = e2_0$. Маємо розгортку

бруса.

Від точки E відкладаємо дійсну довжину цього руба $/CG = cG_0/$ до точки G ; від точки G відкладаємо вгору відтенок $3H = h_3$. Потім від точки H вниз відтенок $HD = cG_0$, від точки E вниз $EA = cG_0$, від точки I вгору $IF = f_1$, вниз $FB = cG_0$. сполучаємо усі одержані точки між собою, і розгортка стінок призми готова. Залишається додати дві основи /нижня на рисунку не показана/ і маємо повну розгортку даної призми.

Розгортка вальця уявляє собою прямокутник де основою буде випростоване коло основи, висотою висота вальця. До цього знизу та зверху треба дорисувати кола основи.

Для рисування розгортки стіжка треба обвід кола основи перевести на дугу кола іншого луча.

Це можна зробити обрахунком.

ЛIV / Як що луч кола основи буде τ /рис.267, таб. φ , то маємо:

$$\begin{aligned} \cup ABA &= 2\pi \tau; \varphi \\ \cup ABA &= 2\pi l \frac{\varphi}{360}; \end{aligned}$$

тому

$$2\pi \tau = 2\pi l \frac{\varphi}{360};$$

$$\varphi = \frac{\tau}{l} 360.$$

Завжди по даних τ та l можна знайти φ і нарисувати розгортку стіжка, як це й зроблено на рис.267, таб. LIV.

Розгортка циліндричної поверхні знаходиться на засаді тих самих міркувань, що й призми; тільки тут на місто стінок призми беруть довільні частини поверхні, при чому стараються вибрати такі частки сліду, щоб вони не дуже відрізнялися від простої.

З цього ясно, що великої точності розгортка кривої поверхні дати не може, але при де-яких випадках це вистарчає для практики.

На рис. 269 і 270, таб. LV маємо ще другий спосіб рисування розгортки циліндричної поверхні.

Перетинаємо /рис.269, таб. LV / циліндр площею P прямою до творчих циліндра і до доведеної площі мету, знаходимо спочатку мети еліпса перетину площі P з циліндром, а потім, злиттям площі P доведеною площею мету, дійсний вигляд цього еліпсу /на рисунку маємо лише половину його/

Положення циліндра /творчі рівнобіжні з доведеною площею мету/ відразу визначає дійсну довжину творчих - це їх доземий мет.

Розбиваємо еліпс $A_0C_0B_0$ на частини так щоб вони дуже мало відрізнялися від простих

На рис. 270, таб. LV маємо вже будування розгортки.

Ведемо просту $BCADB$ і відкладаємо на ній починаючи з точки B частин дуг еліпса, на які він був поділений.

Через ці точки ведемо прями до простої BV , потім від точки B вгору відкладаємо відтинки $BF = b'f'$, а вниз $FG = f'g'$, на другій творчій вгору $8J = 8'j'$, вниз $JM = j'm'$, на третій вгору $7H = 7'h'$, вниз $HN = n'h'$, на четвертій вгору $6L = 6'l'$, вниз $LP = p'p'$ і т.д., аж поки не придемо до творчої другої точки.

Знайдені точки сполучаємо плавкою кривою, та додаємо ще знизу та зверху кола нижньої та верхньої основи.

Як що на розгортці треба визначити положення кривої $BCADB$, то це виконується зовсім так, як було зроблено для піраміди /рис. 261 - 262, таб. LIV/.

Розгортка конусів рисується зовсім так, як це зроблено для піраміди.

Розбивають слід конуса /рис. 271, таб. LV/ на частини, що мало відрізняють від відтинків простої сполучають точки поділу з вершком, та знаходять усі три елемента, необхідні для будування трикутників.

Тоді будують ці трикутники, як це показано на рис. 272, таб. LV. Точки 1, 2, 3 і т.д. сполучають плавкою кривою та додають коло основи.

Найкоротшим віддаленням /геодезійною лінією/ поміж двома точками поверхні конуса буде та крива лінія, яка у розгортці визначена простою.

Як що нам треба знайти таке віддалення /рис. 271, таб. LV/ для точок $A/a, a'/i B/b, b'/$, то переносим ці точки на відповідне місце на розгортку /рис. 272, таб. LV/, сполучаємо точки A і B простою AB і переносимо цю просту зворотньо на мети конуса.

Крива $AB/ab, a'b'/$ буде геодезійною лінією для точок $A/a, a'/i B/b, b'/$.

Як вже було сказано раніш не всі криві поверхні можна розгорнути; напр. куля не може мати розгортки, але практика иноді вимагає дати приблизну розгортку кулі, яку можна виконати так.

Розбиваємо кулю /рис. 268, таб. LIV/ на декілька частин, та описуємо навкруги кожної частини циліндричну поверхню, творчі якої рівнобіжні з площею мету.

Як що розгорнемо ці циліндричні поверхні то матимемо приблизну розгортку кулі.

Для того відкладаємо на простій відтинки $AB = ab$ /найбільшої творчої лінії/ перпендикулярно до AB і з точки P ставимо перпен.

Півколо $t's'$ ділимо на рівні частини /12 на
рисунку/, відкладаємо на прямі від точки P вверху
та вниз ці частини /точки 5, 4, 3, 2, 1, T , 7, 8, 9, 10,
11, 5/, потім з точок 1, 2 і т.д. спускаємо прямі,
які визначають на посемому меті циліндричної повер-
хні відповідні творчі.

На прямих до простої TS , поведених через точ-
ки 1, 2, 3 і т.д. відкладаємо відтинки $Sc = SD = cd/2, 4E =$
 $= 4f = e/2$ і т.д.

Сполучаємо одержані точки плавкими кривими
і маємо приблизну розгортку кулі.

На рисунку виконана праця для півкулі.

АКСОНОМЕТРІЯ.

§ 42. ВСТУП.

Викрес, зроблений на засаді законів нарис-
ної геометрії в двох, або трьох метак, дає повну
можливість вибудувати об'єкт рисунка, але не завж-
ди дає ясну уяву про його вигляд.

Візьмемо напр. куб, поставлений на площу ме-
ту з стінками рівнобіжними з метовими площами.

Меті цього куба будуть квадрати, які не да-
ють відразу уяви про те, що це є многостінник, а
не пласка фігура.

Для того, щоб осягнути цього ясного вигля-
ду, приходится користуватися де-якими засобами,
напр., обертанням до положення, коли стінки утво-
рюють з площами мету кути відрізані від 90° /див.
§ 22/.

При таких положеннях многостінника один з
метів його відразу дає змогу ясно уявити будову
цього многостінника, але для того, щоб дійти до
цього треба витратити багато часу та праці.

Дати такий ясний вигляд одному з метів пред-
мета, можна далеко про тішим способом і цьому у-
чить нас метод метування на одну мету, АКСОНОМЕТ-
РІЯ АБО РІВНОБІЖНА ПЕРСПЕКТИВА.

Як що ми маємо систему трьох площ мету, то
положення кожного предмета у простороні ясно визна-
чається трьома метовими прямими x, y, z /див. § 21/.
Поведемо площу P похилу до всіх площ мету і буде-
мо метувати на цю площу наш предмет. Одержимо ак-
сонометричний рисунок.

Площу P будемо називати площею відбитку.

Можна при рисуванні аксонометричних рисун-
ків уживати пряме метування або скоге

В першому випадку маємо пряму аксонометрію,
у другому скосу

Поділ прямої аксонометрії на різні типи буде вказаний нижче.

§43. ВИБІР АКСОНОМЕТРИЧНОГО ХРЕСТА.

Площа відбитку P /рис. 273, таб. LVII/ перетинає площу H по простій AB , площу V по простій AC і площу W по CB .

Три площі, що перетинаються, мають одну спільну точку, в якій збігаються три простих перетину /17 § I/: тому спільна для простих AB і CB точка A лежить на вісі OX , точка B на OY і точка C на OZ .

Таким чином прості перетину площі картини P з площами мету утворюють трикутник ABC , через вершки якого проходять осі мету.

Трикутник ABC будемо називати ТРИКУТНИКОМ СЛІДІВ.

Площі H , V і W прямі між собою, тому можемо написати такі три вирази:

$$/3 \triangle AOB/ \quad \bar{AB}^2 = \bar{AO}^2 + \bar{BO}^2;$$

$$/3 \triangle AOC/ \quad \bar{AC}^2 = \bar{AO}^2 + \bar{OC}^2$$

$$/3 \triangle BOC/ \quad \bar{BC}^2 = \bar{BO}^2 + \bar{OC}^2$$

Або

$$\bar{AB}^2 + \bar{BC}^2 = \bar{AO}^2 + \bar{BO}^2 + \bar{BO}^2 + \bar{OC}^2 = 2\bar{BO}^2 + \bar{AO}^2 + \bar{OC}^2 = 2\bar{BO}^2 + \bar{AC}^2$$

З цього ясно видно, що

$$\bar{AB}^2 + \bar{BC}^2 > \bar{AC}^2$$

Таким самим способом можна довести, що

$$\bar{BC}^2 + \bar{AC}^2 > \bar{AB}^2;$$

$$\bar{AC}^2 + \bar{AB}^2 > \bar{BC}^2$$

Це відзначає того, що ТРИКУТНИК ABC ЗАВЖДИ БУДЕ ОСТРОКУТНИМ.

Зметуємо зсередок O прямим метуванням, на площу P в точку O_1 / $OO_1 \perp P$ /, сполучимо точку O_1 з вершками трикутника A, B, C , продовжимо ці прості сполучення до точок D, E, F і ці останні сполучимо з точкою O .

Проста AO_1 , разом з простими OO_1, OD і віссю OX лежать в одній площі прямій до P / $OO_1 \perp P$ /; тому просту AO_1 можемо вважати за мет вісі OX на

площу відбитку P .

Те саме можна сказати й про прості O_1B /мет OY / і O_1C /мет OZ /.

Проста OD лежить в площі W перпендикулярно до OX , тому $OD \perp OX$ і трикутник AOB буде прямокутний, з якого маємо

$$OO_1^2 = AO_1 \cdot O_1D \dots \dots \dots (a)$$

$$AO_1^2 = AO_1 \cdot AD \dots \dots \dots (b)$$

Те саме можна сказати й про інші прості, а саме:

$$OO_1^2 = BO_1 \cdot O_1F; OO_1^2 = CO_1 \cdot O_1E \dots \dots \dots (a)$$

$$BO_1^2 = BO_1 \cdot BF; CO_1^2 = CO_1 \cdot CE \dots \dots \dots (b)$$

З виразів /а/ маємо:

$$OO_1^2 = AO_1 \cdot O_1D = BO_1 \cdot O_1F = CO_1 \cdot O_1E \quad /в/$$

Далі маємо дві площі: W та площу $\triangle AOD$, між собою перпендикулярні; ці площі перетинаються третьою P , прямою до площі $\triangle AOD$; тому /Із § 1/, площа P перетинає задані площі по простих прямих між собою.

Відсіля висновок: проста CB /перетин площі W і P / перпендикулярна до простої AD /перетин площі P з площею $\triangle AOD$ / . Виходить, що AD є висота $\triangle ACB$ відносно основи CB .

Так само можна довести, що $CE \perp AB, BF \perp AC$.

Понеже AD, BF, CE — це мети висей мету /координат/ на площу відбитку P , то можна висловити таке положення: ВІСІ КООРДИНАТ /мету/ МЕТУЮТЬСЯ ВИСОТАМИ ТРИКУТНИКА СЛІДІВ /перетину площі відбитку P з площами мету/. А ОСЕРЕДОК КООРДИНАТ МЕТУЮТЬСЯ В ТОЧЦІ ПЕРЕХРЕСТЯ ВИСОТ.

Взагалі, як що ми маємо довільний трикутник, то завжди можна уважати його за трикутник слідів, а висоти його за мети координат.

Кут нахилу метів осей координат до самих осей визначимо через α, β, γ , себ-то $\alpha = \angle OAD, \beta = \angle OBF, \gamma = \angle OCE$. Спробуємо в'яснити зв'язок поміж цими величинами:

Площа $\triangle ACB$ складається з площ трьох трикутників AOB, BO_1C, CO_1A .

$$\triangle ACB = \triangle AO_1B + \triangle BO_1C + \triangle CO_1A.$$

$$2\triangle ACB = AB \cdot O_1E + BC \cdot O_1D + AC \cdot O_1F.$$

Перетворюємо один з виразів правої частини, решта їх перетворюється по тому ж зразку.

Помножимо та поділимо його на вираз $CE \cdot CO_1$; тоді маємо:

$$\frac{AB \cdot O_1E \cdot CE \cdot CO_1}{CE \cdot CO_1};$$

Здобуток $AB \cdot CE$ рівен $2\triangle ABC$, здобуток $CO_1 \cdot O_1E = OO_1^2$.

/з виразу а /, а здобуток $CE \cdot CO_1 = CO_1^2$ /з виразу б /
тому маємо:

$$AB \cdot O_1 E = 2 \Delta ABC \cdot \frac{OO_1^2}{CO_1^2} = 2 \Delta ABC / \frac{OO_1}{CO} /^2$$

з ΔCOO_1 / $\angle OO_1 E = 90^\circ$ маємо

$$OO_1 = CO \cdot \sin \gamma ;$$

або

$$\sin \gamma = \frac{OO_1}{CO} ;$$

тому

$$AB \cdot O_1 E = 2 \Delta ABC \cdot \sin^2 \gamma.$$

Таким самим способом одержимо:

$$BC \cdot O_1 D = 2 \Delta ABC \cdot \sin^2 \alpha ;$$

$$CA \cdot O_1 F = 2 \Delta ABC \cdot \sin^2 \beta ;$$

Нарешті маємо:

$$2 \Delta ABC = 2 \Delta ABC \sin^2 \alpha + 2 \Delta ABC \sin^2 \beta + 2 \Delta ABC \sin^2 \gamma.$$

або

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1.$$

Як що на місто $\sin^2$ поставимо $1 - \cos^2$, то одержимо:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2.$$

Для кожного трикутника слідів маємо по між кутами нахилу метів осей координата до самих осей такий зв'язок: СУМА КВАДРАТІВ СИНУСІВ ЦИХ КУТІВ РІВНА ОДИНИЦІ, А СУМА КВАДРАТІВ КОСІНУСІВ РІВНА ДВОМ.

Як що маємо трикутник ABC , то можемо вважати його, як це було вже сказано, за трикутник слідів якоїсь картинної площі P , при якійсь системі площ мету.

Дійсно, висоти AD, BF, OE /рис. 274, таб. LV / цього трикутника дають напрям метів осей координат /АКСОНОМЕТРИЧНИЙ ХРЕСТ/, а точка O_1 перехрестя цих висот мет осередка O .

Для того, щоб уявити собі ясно положення вісей координат знайдемо кути нахилу α, β, γ , а також віддалення OO_1 .

AD є протипрямою прямокутного трикутника AOD /див. попередній рис. 273, таб. LV /, де одною з прямих є вісь Ox .

Обертаємо цей трикутник навкруги вісі AD /рис. 274, таб. LV / аж поки він не ляже на площу рисунку. Тоді $\angle O_1 AD = \angle \alpha$, а відтиск $O_1 O$ рівен дійсному віддаленню осередка вісей координат від осередка хреста.

Таким самим способом можна визначити й ку-

ти β і γ .

Виходить, що $\triangle ABC$, вибраний зовсім довільно дійсно уявляє собою трикутник слідів, а висоти його утворюють аксонометричний хрест, що відповідає системі вісей координат у просторі.

Один і той самий трикутник слідів відповідає двом двостінним кутам: першому, як що взяти напрям осей Ox, Oy, Oz і третьому при напрямі осей Ox_1, Oy_1, Oz_1 .

На злитому положенні AO, D трикутник AOD відложимо від точки O_0 на вісі Ox / проста O_0A / відтинки $O_0R_0 = l$. Коли перенедемо до аксонометричного хреста, то точка R_0 перенде в положення R і відтинки $O_0R_0 = l$, у відтинки $O_1R = lx$.

Знайдемо залежність між l, lx і $\angle \alpha$. Через точку R_0 поведемо просту $R_0M \parallel AD$; тоді $\angle O_0R_0M = \angle O_0AD = \alpha$; $R_0M = R_0O_1 = lx$. З цього трикутника маємо

$$R_0M = R_0O_0 \cdot \cos \alpha.$$

або

$$lx = l \cos \alpha$$

Таким самим способом одержимо

$$ly = l \cos \beta;$$

$$lz = l \cos \gamma;$$

З цих виразів маємо

$$\cos \alpha = \frac{lx}{l}; \cos \beta = \frac{ly}{l}; \cos \gamma = \frac{lz}{l};$$

Якщо вставити ці вирази у вираз /2/, одержимо:

$$\left(\frac{lx}{l}\right)^2 + \left(\frac{ly}{l}\right)^2 + \left(\frac{lz}{l}\right)^2 = 2;$$

або

$$lx^2 + ly^2 + lz^2 = 2l^2;$$

Відношення lx, ly, lz до l , що завжди менше одиниці, звуть скороченням по вісі x -ів, y -ів або z -ів, і визначають їх через C_x, C_y, C_z , так що

$$C_x = \frac{lx}{l}; C_y = \frac{ly}{l}; C_z = \frac{lz}{l};$$

Ці скорочення, як видно з попереднього, рівні косінусам кутів α, β, γ ; тому маємо такий вираз:

$$C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = 2;$$

Відтинки lx, ly і lz будемо звати мірилом x -ів, y -ів та z -ів. Ці мірила можна визначити ще в такий спосіб.

Обертаємо $\triangle AOB$ і $\triangle AOC$ навкруги протипрямок цих трикутників до того, щоб вони злилися з площею рисунку. Від точок O_0 злитого їх положен-

ня, відкладаємо відтинки $O_0 R_0 = O_0 S_1 = O_0 S_2 = O_0 T_1 = O_0 T_2 = O_0 R_1$ та повертаємо ці трикутники у початкове положення.

Одержимо $O_0 R_0 = l_x$; $O_0 S_1 = l_y$; $O_0 T_1 = l_z$.

Як що мірила вісей усі рівні, то маємо так звану триметричну аксонометрію. Як що два з тих мірил рівні між собою $l_x = l_y$, або $l_x = l_z$, або $l_y = l_z$, то маємо діаметричну аксонометрію, нарешті коли $l_x = l_y = l_z$, то буде ізометрична аксонометрія.

Спочатку вибудуємо аксонометричний хрест, при даних α, β, γ або l_x, l_y, l_z , а потім зупинимось над де-якими окремими випадками.

Як що кути α, β та γ задані, то беремо просту CO_1 /рис. 275, таб. LVI/, становимо прям $O_1 O$ і приймаємо віддалення $O_1 O$ за віддалення осередка координат від осередка хреста. Зміна віддалення $O_1 O$ дасть нам другу площу відбитку P_1 , але ця площа буде рівнобіжна з раніш вибраною, а трикутники слідів будуть подібні між собою.

З точки O ведемо прості OM, ON, OS під кутами β, α, γ до простої CO_1 . З точки O ставимо прям OE до простої OS і через точку E перехрестя OE з продовженням CO_1 ведемо просту $AB \perp CE$.

З точки O_1 , як з осередка ведемо дуги лучами $O_1 K$ і $O_1 M$ до перехрестя з простою AB в точках A і B .

Трикутник ABC буде трикутником слідів при даних кутах α, β, γ та прийнятому OO_1 .

Аксонометричний хрест буде визначений вісями: $O_1 x$ /проста AD /, $O_1 y$ /проста BF / і $O_1 z$ /проста CE /, при чому обов'язково повинно бути $AB \perp O_1 z$; $BC \perp O_1 x$; $AC \perp O_1 y$.

Не конче потрібно, щоб були задані усі три кути α, β, γ ; для визначення хреста стачить двох кутів.

Дійсно, як що маємо кути, напр. α і γ , то початок визначення залишається попередній.

Знаходимо точку C, K, E , просту $AB \perp CE$, точку A . Сполучаємо точку A з O_1 , та з точки C спускаємо на цю просту прям CD і знаходимо точку B . Весь трикутник вже визначений.

Далі треба знайти мірила для осей хреста.

Для того вистарчить обертати лише два трикутника.

Обертанням $\triangle AOC$ й $\triangle BOC$, злитим їх положенням $AO_1 C$ і $BO_1 C$, нанесенням лінійної одиниці l /напр. 1 см/, та повертанням цих трикутників назад, визначимо мірила l_x для $O_1 x$, l_y для $O_1 y$ і l_z для $O_1 z$.

Як що задані не кути α, β, γ , а мірила l_x, l_y, l_z , то для збудування самого хреста, та визначення l , без чого не відоме буде скорочення, робимо так

Будуємо /рис. 276, таб. LVI/ прямокутний трикутник $СAB$, де прямки $AB=l_x$ і $AC=l_y$. На боці CB будуємо, як на прямці, прямокутний трикутник $СDB$, де друга прямка $BD=l_z$ і нарешті на боці CD , як на протипрямці, будуємо рівнобедрений прямокутний трикутник $СED$, де прямками $CE=ED$ уде вимір l .

Дійсно в $\triangle CED$, маємо

$$CE^2 + ED^2 = CD^2, \text{ або } 2ED^2 = CD^2;$$

з $\triangle CBD$ маємо

$$CD^2 = CB^2 + BD^2, \text{ або } CD^2 = CB^2 + l_z^2;$$

з $\triangle CAB$ маємо

$$CB^2 = AC^2 + AB^2, \text{ або } CB^2 = l_x^2 + l_y^2;$$

тому

$$CD^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 2ED^2.$$

Виходить, що

$$ED = l.$$

Для визначення кутів α, β, γ будуємо прямокутні трикутники

$\triangle AKB$, де $AB=l_x$, $BK=l$; $\angle AKB = \angle \alpha$;

$\triangle CАН$, де $CA=l_y$, $CH=l$; $\angle ACH = \angle \beta$;

$\triangle GDB$, де $BD=l_z$, $DG=l$; $\angle GDB = \angle \gamma$;

Дальша праця по визначенню ведеться так, як показано на рис. 275, таб. LVI.

Що торкається вибору кутів α, β і γ то на практиці виявилось, що найгарніший рисунок одержимо, як що $\angle \gamma$ будемо брати не більше 20° .

Крім того завжди рисунок має кращий вигляд, коли вісь O, z поведена доземо, а основа AB трикутника слідів поземо.

На практиці иноді задаються розмірами мірил l_x, l_y, l_z і виявилось, що найкращі рисунки маємо при таких числах.

Міріло	l_x	5	9	7	17
Міріло	l_y	4	5	6	6
Міріло	l_z	6	10	8	18
Скопичені	C_x	0.806	0.387	0.811	0.9457
Скопичені	C_y	0.615	0.193	0.695	0.353
Скопичені	C_z	0.967	0.985	0.927	0.99925

Користуючись цими цифрами можна побудувати хрест ще так:

Візьмемо, напр. $l_x = 5$; $l_y = 4$; $l_z = 9$; тоді $l_x^2 = 25$; $l_y^2 = 16$; $l_z^2 = 36$.

Будуємо трикутник ABC з бокami $AB = 36$; $AC = 16$; і $CB = 25$ /рис. 278, таб. LVII/. Переполовинюємо кути цього трикутника; сіметральні будуть вісями O_x /проти $CB = l_z^2$ /; O_y /проти $AC = l_y^2$ / і O_z /проти $AB = l_x^2$ /; а точка перехрестя сіметральних осередком O хреста.

В де-яких підручниках дають ще розміри боків трикутника слідів, що разом з даними скороченнями, полегшує справу знаходження аксонометричного хреста.

У наступній таблиці бік CB трикутника слідів визначений через a_x , бік AC через a_y і бік AB через a_z .

Можна брати для трикутників слідів цифри кратні наведеним у таблиці.

a_x	a_y	a_z	C_x	C_y	C_z
193.65	200	100	0.806	0.645	0.967
243.75	254.95	100	0.887	0.493	0.985
136.36	143.61	100	0.811	0.695	0.927
795.80	800.69	100	0.9437	0.333	0.99923
105	110	100	0.8158	0.7672	0.8458
110	115	100	0.8151	0.7611	0.8697
110	120	100	0.8372	0.7226	0.8815
75	80	70	0.8275	0.7525	0.8654
105	115	100	0.8412	0.7367	0.8658
110	130	100	0.8853	0.6202	0.9119

Для того, щоб не ускладняти справу відшукуванням графічно скорочень C_x, C_y, C_z подаємо тут вирази для їх вираховування.

$$C_x^2 = \cos^2 \alpha = \frac{2 l_x^2}{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2};$$

$$C_y^2 = \cos^2 \beta = \frac{2 l_y^2}{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2};$$

$$C_z = \cos^2 \gamma = \frac{2l_z}{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2};$$

Діаметрична аксонометрія дає на гарніші рисунки, коли прийняти $l_x = l_z$ і коли для l_y взяти $1/\sqrt{2}$ або $1/3$, себ-то коли відношення мірил l_x, l_y, l_z виносить

$$1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1 \quad ; \quad 1 : \frac{1}{3} : 1, \quad \text{або числа}$$

кратні наведених.

Для першого випадку скорочення виносять $C_x = 0.943$, $C_y = 0.471$, $C_z = 0.943$, $\alpha_x = \alpha_z = 100^\circ$, $\alpha_y = 132.3^\circ$; для другого випадку $C_x = 0.913$, $C_y = 0.324$, $C_z = 0.973$; $\alpha_x = \alpha_z = 100^\circ$, $\alpha_y = 137.4^\circ$.

Для загального випадку діаметричної аксонометрії можна рисувати хрест так, як це показано для триметричної на рис. 278, таб. LVII; тільки тут матимем рівнобокий трикутник. Скорочення вираховуються по виразах, наведених вище.

Для випадку $l_x : l_y : l_z = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$ хрест рисується так /рис. 279, таб. LVII/.

Від точки А на двох промах / $BC \perp AO$ / відкладаємо відтинки $BA = 1$ одиниці, $AC = 7$ одиниць і $AO = 8$ одиниць. Сполучаємо точку О з точкою С - це буде вісь O_y , з точкою В - продовження буде вісь O_x і промія з точки О, до простої ОА буде вісь O_z .

Для відношення $1 : \frac{1}{3} : 1$ хрест рисується так /рис. 280, таб. LVII/.

Беремо дозему просту 0 18, наносимо на ній 18 одиниць, з точки 1 ставимо промія і закреслюємо дугу з осередка О лучем 0.18 до перехрестя з промієм 1.0, в точці О.

Сполучаємо точку О з точкою 18 - вісь O_y , з точкою О - продовження вісі O_x і промія з точки О до простої ОА - вісь O_z .

Цей спосіб рисунка хреста можна вживати й для попереднього випадку /і навпаки/, але тільки треба для кожного випадку брати відповідну кількість лінійних одиниць.

Хрест при ізометричній аксонометрії рисується дуже просто.

Трикутник слідів тут буде рівнобоким трикутником / $l_x = l_y = l_z$ / і кути створені висотами усі рівні між собою / 120° / - Такий хрест показаний на рис. 277, таб. LVI.

Скорочення при ізометричній аксонометрії усі рівні між собою і виносять

$$C_x = C_y = C_z = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816.$$

На практиці иноді рисують, особливо при ізо- та діаметричній аксонометрії, самий рисунок без скорочення. В таких випадках розміри аксонометричного

рисунку побільшуюються і самий рисунок буде більше натури.

Це має на меті скорочення праці і коли з аксонометричного рисунку не треба брати розмірів, то таке скорочення праці має свою слушність. Але взагалі краще вживати скорочення й мати рисунок не побільшений, а натуральний.

§44. ПРИКЛАДИ ПРЯМОЇ АКСОНОМЕТРІЇ.

Як що маємо систему трьох площ мету, то положення точки A у просторі (рис. 281, таб. LVII) точно визначено її трьома метами, або вірніше її трьома метовими прямими X, Y, Z .

Дійсно, коли дані X, Y, Z , то можна побудувати брус і протилежний осередку O вершок визначить точку A .

Всього бруса можна й не рисувати, досить на одній з площ мету, напр. H нарисувати прямокутник $Onal$; з точки a встановити прям, відложити на ньому відтинok $aA = z$ і одержимо точне положення точки A .

В аксонометрії переносять на вісі хреста, при данному скороченню, метові прямі точок, рисують вже не прямокутники, а рівнобіжники і знаходять положення точки.

Треба мати на увазі, що аксонометрія, як рівнобіжне метування, підлягає основним законам нарисної геометрії, а саме прості рівнобіжні і на аксонометричному хресті будуть рівнобіжні.

Коли об'єкт, що треба викреслити в аксонометрії, даний не в дійсній своїй величині, а в якомусь мірілі, то аксонометричний рисунок не конче потрібно рисувати у тому самому мірілі; буває, що звичайний рисунок маємо в 1:20, а аксонометричний треба нарисувати в 1:10.

Все це треба брати під увагу при визначенню міриля для вісей аксонометричного хреста.

На рис. 282, таб. LVII маємо два мети помника в 1:20 натуральної величини. Розміри дані в сантиметрах. З цього помника будемо рисувати аксонометрію у наступних прикладах.

Почнемо з триметричної аксонометрії.

Аксонометричний хрест візьмемо з рис. 275, таб. LVI, скорочення такоє візьмемо з цього ж рисунку. Там за l прийняте 1 см., тому l_x, l_y, l_z будуть 1 см на вісях хреста.

Тепер виготовимо мірило.

Припустимо, що аксонометричний рисунок має має бути виготовлений маж в 1-20.

О. Вільнський. Нарисна Геометрія.

Тоді l_x уявляє собою 20 см., що відкладається по вісі OX хреста /1 см. в $\frac{1}{20} = 20 \text{ см.}/$, і мірило x -ів має за основу вимір $l_x = 20 \text{ см.}$

Те саме маємо для вісі OY хреста, тільки тут за 20 см. слухить l_y , а для вісі OZ хреста ту роль відіграє l_z

Маємо окремих три мірила для коної з осей хреста, рисуємо самий хрест /рис.283, таб. LVII / і починаємо аксонометричний рисунок.

На вісі OX хреста відкладаємо 60 см. мірила x -ів, на вісі OY - 90 см. в мірилі y -ів, рисуємо рівнобіжник, основа готова. На прямій /рівнобіжно з OZ / в вершках основи відкладаємо 30 см. в мірилі z -ів, сполучаємо одержані точки, друга площинка постаменту теж готова.

Для того, щоб нарисувати скіс, можна це зробити двома способами: або на основі рисуємо прості 2, 3, і 4, 5, що дадуть в перехресті точку 6, і на прямій з цієї точки /рівнобіжно з OZ / відкладаємо 42 см. в мірилі z -ів та одержимо точку 1, або рисуємо прості 23 і 45 на другій площині та від точки 6 відкладаємо 12 см. в мірилі z -ів.

Дальша праця не викликає труднощів і нарешті маємо аксонометричний рисунок помника 1:20.

На рисунку за для ясності показані усі руби /невидимими крапками/, але взагалі на таких рисунках показуються тільки руби видимі.

Маємо рисунок помника, що стоїть у першому двостінному куті, мов би вигляд його згори. Як що бажано навпаки мати вигляд його знизу, треба поставити помник у третьому куті, що й виконано на рис. 284, таб. LVIII.

Трикутник слідів той самий, що й в попередньому рисунку, але вісь O_z взята униз. Мірила вісей хреста залишені теж попередні. Для ясності показані усі руби помника.

На рис.285, таб. LVIII маємо той самий помник, тільки в діаметричній аксонометрії при відношенні $1: \frac{1}{2}: 1$.

Аксонометричний хрест нарисований по зразку рис.279, таб. LVI; на вісях OX , OZ відкладається дійсний вимір /в 1:20/, а на вісі OY половина виміру. Рисунок маємо у побільшеному вигляді.

На рис.286, таб. LVIII маємо діаметричну аксонометрію у відношенні $1: \frac{1}{3}: 1$. Хрест зроблений по зразку рис.280, таб. LVI. На вісі OY відкладається $\frac{1}{3}$ виміру /в 1:20/ на решті вісей повний вимір /теж 1:20/. Рисунок теж побільшений.

На рис.287, таб. LVIII маємо ізометричну аксонометрію. Хрест нарисований по зразку рис.277, таб. LVI. Усі скорочення прийняті 0,8, тому рисунок виконаний у мірилі 1:20.

На рис.288, таб. LVIII показаний в ізометричній

аксонометрії куб, з вимірами у дійсну свою величину, себ-то у побільшеному / $1:0,8 \approx 1,25$ разів/ вигляді.

Цей рисунок нагадує рисунок куба, косина якого пряма до одної з площ мету / § 22/. Вся складна праця тут переведена дуже просто.

Усі наведені приклади дають різні вигляди одного й того самого об'єкта в залежності від вибору аксонометричного трикутника, кутів нахилу осей та скорочень.

Якщо вимагається від рисунку можливість мати усі розміри об'єкту, то необхідно прикладати мірило для кожної вісі аксонометричного хреста.

Рисунки, які мають метою лише дати ясний вигляд об'єкту, мірил не потребують, можуть бути зроблені без скорочень і тут найзручніше уживати діаметричну аксонометрію.

§45. СКОСА АКСОНОМЕТРІЯ.

При скосій аксонометрії напрям метових простих на площу відбитку P не прямий, а більший або менший за 90° , взагалі похилий до P .

В скосій аксонометрії кожен три прості, що збігаються у одній точці, можна вважати за аксонометричний хрест, а точку збігу за мет осередка координат, бо дійсно можна завжди знайти такий напрям метових простих, при якому данні прості будуть метами вісей координат.

Так само скорочення для вісей хреста можна взяти, на засаді того ж самого, зовсім довільно.

Це полегшує справу рисування аксонометричного малюнка, тому скоса аксонометрія, особливо деякі види її, уживається дуже часто.

Триметрична скоса аксонометрія вживається найменше, бо довільно вибраний хрест та скорочення не завжди дадуть ясний вигляд картини.

На рис. 289, таб. LVIII взято довільно три лінії Ox, Oy, Oz і прийнято їх за вісі хреста, а точку їх збігу за осередок.

Скорочення беремо довільні. Простий приклад рисування спільного мірила для осей дає рисунок.

На простій відкладаємо $AB = l$, якоїсь одиниці довжини, від точки A відтинки $Ae = l_x; Ad = l_y; Af = l_z$ рівні мірилам вісей. Будуємо довільний $\triangle ACB$, з точок d, e, f ведемо рівнобіжно з AC прості du, ex, fz .

На продовженні простої AB рисуємо потрібне нам мірило /для даного випадку $1:20$ /. З точок u, x і z ведемо прості рівнобіжні з AB . Коли сполучимо точку C з яким небудь поділом мірила, то ця про-

ста визначить той самий розмір для всіх трьох мірил. /60 см. і 100 см. на рис./.

Коли маємо в'є мірила, то по зразку попереднього § 44 рисуємо саму аксонометричну картину.

Самий процес рисування ясний з рисунку.

Діметрична скоса аксонометрія вживається найчастіше при доведеному положенню вісі OZ , поземому OX , та для кута по-між вісями OY і OX /продовженням/ беруть 30° або 45° .

Такий хрест, дуже зручний для виконання, дає досить ясний рисунок і вживається часто, при чому на вісях OX і OZ вживають мірило без скорочення, а на вісі OY скорочення $1/2$ або $1/3$. Площа відбитку у цих випадках буде рівнобіжною з площею XOZ / V /.

Рис. 290 та 291, таб. LIX дають діметричну аксонометрію куба, у відношенні $4:1/2:1$.

Рис. 290-погляд зверху, рис. 291 - знизу, для чого змінені напрям осей OX і OY .

Приклад ізометричної скосої аксонометрії без скорочень показаний на рис. 294, таб. LIX.

Скоса ізометрична аксонометрія, часто вживається в техніці, особливо в будівництві. Хрест тоді вживається з прямим кутом по-між вісями OX та OZ , а вісь OY нахилена до продовження вісі OX під кутами 30° або 45° . Такі хрести маємо виключно вживаються при аксонометрії кладки цегли, будівельного каміння, для сполучень дерев'яних частин і т.п. Такі рисунки корисні і тим, що та його частина, що лежить у площі рівнобіжних з площею XOZ , уявляє собою дійсний вигляд з дійсними розмірами об'єкта.

На рис. 292 і 293, таб. LIX маємо приклади такої скосої ізометричної аксонометрії без скорочень.

Приклад рис. 292, таб. LIX іноді називають кавалер-перспективою, а приклад рис. 293, таб. LIX - скосою рівнобіжною перспективою.

§ 46. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ. В АКСОНОМЕТРІЇ.

Виконання аксонометричних рисунків, про що була мова в попередніх параграфах, за допомогою метів, є лише одна з завдань аксонометрії. Крім цього завданням аксонометрії є безпосереднє розв'язання задач нарисної геометрії, без уявлення метів, а тільки користуючись аксонометричним хрестом при прямій, або маючи положення площі відбитку та напрям метування при скосій аксонометрії.

Усі згадані задачі можна поділити на дві групи: а/ задачі, де треба вияснити положення самого предмету і в/ задачі, де маємо діло з вимірами предмета.

Задачі першої групи не залежать від положення площі відбитку, тому вони розв'язуються однаково як у прямій, так і в скосій аксонометрії. Задачі другої групи, для свого розв'язання вимагають точного визначення площі відбитку, тому в простій аксонометрії виконання простіше, як у скосій.

Раніш було вже зауважено, що положення точки у простороні визначено точно брусом, одним з вершків якого є осередок координат, а протилежним сама точка. В аксонометричному відбиткові цей брус перейде у рівнобіжностінник /рис.301, таб. LX/, який визначить три мети /аксонометричних/ точки.

Будемо ці аксонометричні мети визначати малими літерами з індексами a / a_1 для площі H /, $2/a_2$ для площі V / і $3/a_3$ для площі W /; саму аксонометрію /відбиток/ точки визначатиме через індекс o/a_o /.

Положення точки буде точно усталене, як що маємо її відбиток, та один з аксонометричних метів a_o, a_1 або a_o, a_2 або a_o, a_3 /.

Так само точне положення простої буде усталено, як що данні будуть відбиток її та один з аксонометричних метів a_o, b_o, a_1, b_1 або a_o, b_o, a_2, b_2 , або a_o, b_o, a_3, b_3 /.

Найпростіше визначення площ це визначення їх аксонометричними слідами. Аксонометричними слідами площ будемо називати аксонометричні відбитки їх поземних, перших та других доземних слідів.

У загальному випадку площа T /рис.299, таб. LX/ визначається трикутником, боки якого складені з слідів T_h, T_v, T_w . Ці сліди, що зовсім зрозуміло, повинні попарно збігатися на вісях хреста. На тому самому рисунку показана площа U , яка має трикутник, складений з слідів у другому двостінному куті, а у першому її два сліди розбігаються. Правило попарного збігу слідів на вісі хреста мусить бути дотримано й тут.

На рис.295-298, таб. LX маємо визначення площ, рівнобіжних з осями хреста: площа $Q \parallel OZ$ /рис.296/, площа $R \parallel OY$ /рис.297/ і площа $S \parallel OX$ /рис.298/.

Зрозуміло, що площу, так як це робилося раніш, можна визначати трьома точками або двома простими, перехрещеними, або рівнобіжними.

Тепер розв'язуємо де-кілька задач першої групи що однаково розв'язуються й для прямої й для скосої аксонометрії.

I/ Маємо просту, визначену аксонометричним відбитком m, n , і аксонометричним метом m, n . Треба знайти мети простої і сліди її /рис.295, таб. LX/.

Аксонометричний мет m, n перехрещується з вісями хреста в точках a_1 і c_1 , яким відповідають точки a_2 і c_3 аксонометричного відбитку m, n даної

простої. Перехрестя b_1 простих m, n і m, n , це відбиток перетину простої $МН$ з площею $Н$, себ-то аксонометрія поземого сліду простої. Точці b_1 , на вісях OX і OY хреста відповідають точки b_2 і b_3 .

Прості $a_2 b_2$ буде першим, а $a_3 b_3$ - другим доземими метами простої $МН$.

Першим доземим слідом буде точка a_2 , а другим доземим слідом точка a_3 .

Зрозуміло, що тільки що наведені вирази мет і слід, треба розуміти, яко аксонометричні відбитки цих метів та слідів.

2/ Маємо дві перехрещених прості $AB/a, b, a, b$ і $CD/c, d, c, d$; треба визначити сліди площі, що поведена через них /рис. 300 таб. LX/.

Знаходимо сліди простих a, b для CD і c, d для AB і на зразок прямого метування ведемо через поземі сліди K_1 і Q_1 поземий слід Q_h ; через другі доземі сліди b_3, d_3 - другий доземий слід Q_w площі Q . Перший доземий слід Q_v визначиться сам собою.

3/ Маємо площу Q визначену слідами Q_h, Q_v, Q_w . В площі нарисувати просту і точку /рис. 330, таб. LX/. Нарисуємо довільну просту, яка перехреститься з боками трикутника слідів в точках a_0 і b_0 . Ці точки будуть аксонометричним відбитком поземого, та другого доземого слідів нарисованої простої. Аксонометричний поземий мет a_1 точки A зливається з точкою a_0 , а точка B лежить на вісі OY і на простій $b_0 b_1 \parallel OZ$.

Проста $a_0 b_1$ буде аксонометричним поземим метом простої AB і проста точно визначена відбитком $a_0 b_0$ та метом $a_0 b_1$.

Взяти точку, що лежить на площі можна, як і при прямому метуванні, за допомогою довільної простої, що лежить в той самій простій та поведена через дану точку.

На рисунку треба взяти або відбиток точки або мет ii C_1 ; тоді провести через вибрану точку відбиток довільної простої $/a_0 b_0$ або $d_0 e_0/$ і з точки C_0 просту $C_0 C_1 \parallel OZ$. Точка C_1 буде поземим метом точки C_0 , і сама точка точно визначена відбитком C_0 і метом C_1 .

4/ Знайти перетин двох площ Q і R /рис. 304, таб. LX/.

Розв'язання задачі зовсім аналогічно розв'язанню подібної задачі в прямому метуванні.

Перехрестя других доземих слідів Q_w і R_w дасть відбиток a_0 одного з слідів простої перетину, а разом з тим і другий доземий мет цієї точки; поземий мет буде точка a_1 .

Точка b_0 /одночасно і $b_1/$ перехрестя поземих слідів Q_h і R_h дасть відбиток поземого сліду простої перетину площ.

Проста $AB/a, b, a, b, /$ є простою перетину площ Q та R .

5/ Знайти перетин простої з площею /рис.305, таб. LX/.

Через дану просту ведемо допоміжну площу R рівнобісну з віссю OZ . Перетин площ Q та R буде проста $DC/c, d, c, d, /$, а перехрестя простої DC з даною $AB/a, b, a, b, /$ дасть точку $B/b, b, /$ перетину даної простої з даною площею.

6/ Знайти перетин бруса, що стоїть на площі H , з площею Q /рис.306, таб. /.

Ведемо через руби бруса допоміжні площі, рівнобісні з площею мету. Перетин цих площ з даною дасть просту, перехрестя якої з рубом визначить точку перетину.

Напр. через руб $A/a, a, /$ поведена допоміжна площа $R \parallel W/R_h \parallel OZ$. Проста перетину площ R та Q повинна мати відбиток рівнобісний з другим доземим слідом площі $Q/h, 1, \parallel Q_w/$. Точка 1 буде точкою перетину руба A з площею Q . Мет цієї точки зливається з точкою a .

Многокутник перетину має відбитком п'ятикутник $1, 2, 3, 4, 5$, а поземим слідом a, b, c, d, e .

Перейдемо тепер до розв'язання задач другої групи для прямої аксонометрії.

7/ Знайти віддалення точки від площі картини /рис.301 і 302, таб. LX/.

Поведемо через вісь OZ площу пряму до площі відбитку, знайдемо їх перетин CD , та обкрутимо ту допоміжну площу навкруги простої перетину CD до злиття з площею рисунку /рис.302/. Тут CD буде мет площі відбитку, проста O, C буде віссю координат OZ , а проста O, D метом площі H .

Точки $a, i a$, рис.301 та рис.302 відповідно попадуть в точки $a, i a$.

Якщо з точки a поставити прям до площі H /до O, D /, то на цьому прямі визначиться дійсне положення точки $A/a, /$ на перехрестю пряма a, A з простою $a, A/a, A \parallel O, O \perp CD$.

Відтинок a, A буде дійсне віддалення точки A від площі відбитку, а відтинок a, A - це віддалення точки A від площі H /поземо-метовий прям/.

8/ Знайти перетин площі з площею відбитку.

Якщо дана площа пряма до одної з площ мету, то розв'язання задач показано на рис. 307 і 309, таб. LX/.

На рис.307, таб. LX дана площа Q пряма до поземної площі мету.

Проста перетину знаходиться по правилах перетину двох площ прямого метування.

Проста $MN/m, n, m, n, /$ буде простою перетину площі Q з площею картини R .

На рис. 309, таб. LX маємо випадок, коли площа Q пряма до другої дозимої площі мету W .
Простою перетину буде проста $DE/d_0e_0, d_1e_1$;
або d_0e_0, d_3e_0 .

На рис. 308, таб. LX маємо випадок перетину довільної площі Q з площею картини P .

Проста $DE/d_0e_0, d_1e_1$ є простою перетину.

У далішому викладі будемо називати точку перетину простої з площею відбитку нульовим слідом простої, а просту перетину площі теж з площею відбитку нульовим слідом площі /визначати будемо великою літерою з індексом 0. напр. R_0, S_0, Q_0 і т.д./

Взагалі инокутник перетину многостінника з площею відбитку називатимем теж, по аналогії нульовим слідом многостінника.

9/ Знайти нульовий слід простої /рис. 310, таб. LX/

Знаходимо точку перетину простої з площею /зад. 5/ картини.

Допоміжна площа Q , поведена через дану просту, рівнобіжна з OX .

Точка $B/v_0, v_1$ буде нульовим слідом даної простої.

10/ Знайти дійсну величину даного відтинку, та кут його нахилу до площі відбитку /рис. 311 і 312, таб. LX/.

Знаходимо нульовий слід $G/a_0, a_1$ простої, що несе даний відтинок $MN/m_0n_0, m_1n_1$. Далі знаходимо віддалення точок M і N від площі картини m_0m_1 і n_0n_1 на рис. 312, таб. LX/.

Потім обертаємо просту MG навкруги простої m_0a_0 до злиття з площею рисунку.

На прямих m_0M_0 і n_0N_0 відкладаємо дійсні віддалення точок M і N від площі відбитку $m_0m_1, m_1m_1, n_0N_0 = n_0n_1$.

Кут $M_0a_0m_0 = \angle \varphi$ буде кутом нахилу даного відтинку MN до площі відбитку, а відтинок MN_0 буде дійсною величиною відтинка MN .

II/ З осередка координат спустити прям на просту, що лежить у площі H /рис. 313, таб. LXI/.

Через точку O ведемо просту $OX_1 \parallel m_1n_1$ і приймаємо її за вісь нового хреста A_1CB_1 де вісь OZ залишається старою /тому й A_1B_1 злине з AB /, бік $CB_1 \perp m_1n_1$, а тому й до OX_1 , і третя вісь буде ГЕОМЕТРИЧНО прямою до вісі OX_1 /як осі координат/.

Тому можемо сказати, що проста $CD/c, d_1$ буде визначати відбиток пряма, спущеного з осередка координат на просту MN .

На рис. 314, таб. LXI ця задача розв'язана для простої MN/m_2n_2 , що лежить у площі W .

Аксонметричним прямом буде проста DE/d_3e_3 .

вісь OZ_1 .

Розв'язання цієї задачі графічно можна полегшити, а саме:

а/ продовжуємо вісь OZ /рис.315, таб. LXI / до перехрестя в точці c_1 з a_1b_1 ; з точки c_1 ведемо просту $c_1e_1 \parallel OY$, а з точки a_1 просту $a_1e_1 \perp Zc_1$; проста Oe_1 буде аксонометричним прямом до простої AB .

в/ З точки c_1 , перехрестя продовження вісі OZ з метом a_1b_1 ведемо просту $c_1e_1 \parallel OZ$ /рис.316 таб. LXI /, а з точки b_1 просту $b_1e_1 \perp OZ$.

Проста Oe_1 буде аксонометричним прямом до простої a_1b_1 .

с/ З точки O ведемо прям Oe_1 , до вісі OZ /рис.317, таб. LXI /, з точки c_1 перехрестя цього прями з a_1b_1 , ведемо просту $c_1d_1 \parallel OY$, а з точки a_1 просту $a_1d_1 \parallel OZ$.

Проста od_1 буде аксонометричним прямом до простої a_1b_1 .

12/ З даної точки спустить прям на дану площу /рис.318, таб. LXI /.

Знаходимо нульовий слід Q_0 даної площі Q , тоді аксонометричний відбиток прями до площі буде прямим /на рисунку/ до нульового сліду $Q_0/m, n, \perp Q_0$, а мет цього прями повинен бути аксонометрично прямим до поземого сліду $Q_b/oe, \parallel Q_b, m, n, \perp se$.

На рисунку крім того знайдена точка $N/n_0, n_1$ перетину прями MN з площею Q .

13/ Знайти кут нахилу даної площі R до площі картини /рис.319 і 320, таб. LXI /.

Рисують злиття перетину площі картини з площею, прямою до неї, та поведеною через вісь OZ /рис.320, таб. LXI / і знаходять дійсне віддалення довільної точки площі R /напр. f_0 / від площі картини / f_0, f_0 /

Потім з точки f_0 спускають прям f_0g_0 на нульовий слід R_0 площі R , з точки f_0 ставлять прям f_0F_0 до f_0g_0 та відкладають $f_0F_0' = f_0F_0$.

Кут $F_0g_0f_0 = \angle \varphi$ буде дійсним кутом нахилу площі R до площі картини.

14/ Знайти дійсний вигляд фігури, що задано своїм аксонометричним відбитком /рис.321 і 322, таб. LXI /.

Спочатку знаходимо кут нахилу площі R /в якій лежить даний ΔMNL / до площі відбитку $L\varphi, f_0g_0 \perp R_0; f_0F_0 \perp f_0g_0; f_0F_0 \perp f_0F_0'$, потім обертаємо площу R навкруги нульового сліду R_0 до злиття з площею відбитку. Точка F перейде у положення $F_0''/g_0F_0'' = g_0F_0'$, а злите положення слідів площі R буде R_h та R_w .

Через точки m_0, n_0, l_0 ведемо прості n_0l_0, m_0l_0 і l_0z рівнобіжні з R_w і прості m_0M_0, n_0N_0, l_0L_0 .

прямі до вісі обертання R_0 і через точки 1, 2, 3 - прості 1 M_0 , 2 M_0 і 3 L_0 рівнобіжні з слідом R_w .
/Те саме можна виконати й відносно слідів S_h , S_b ./

Трикутник $M_0N_0L_0$ уявляє собою дійсний вигляд даного трикутника MNL визначеного аксонометричним відбитком m, n, l .

Не трудно зауважити, що 4 $M_0N_0L_0$ і m, n, l - то споріднені трикутники з віссю споріднення R_0 .

15/ Знайти віддалення даної точки від даної площі /рис.324 і 325, таб. LXI/.

Спочатку знаходимо кут нахилу φ площі R з площею картини, потім знаходять дійсне віддалення даної точки $M/m, m_1$ від площі відбитку m, M_0 , потім з точки m спускають прям m, h до f, g і відкладають $h, M' = m, M_0$, нарешті з точки M' спускають прям $M'M''$ на g, F .

Відтинок $M'M''$ буде дійсним віддаленням точки M від площі R .

16/ Нарисувати аксонометрію бруса з основою квадрат, що лежить у площі $R/R_h, R_0, R_w$ і має за осередок описаного кола точку M/m . Бік квадрата і довжина руба данні /рис.325 і 326, таб. LXII/.

Спочатку знаходять кут φ нахилу даної площі R до площі відбитку, потім з точки m спускають прям m, n на нульовий слід R_0 , через n ведуть просту $n, m' \parallel g, F$, через m прям m, m' до простої $m, n / m, m' \parallel R_0$, тоді m, m' буде віддаленням точки M від площі відбитку і можна зняти площу R з площею відбитку, обертанням її навкруги R_0 .

Точка M падає тоді у точку $M_0/n, M_0 = n, m'$ і $n, M \perp R_0$.

Рисуємо квадрат 1'2'3'4', вершки якого переносимо на просту n, m' в точки 1, 2, 3, 4, рисуємо там руби та повертаємо площу R назад.

При зворотньому обертанні маємо напр. для точки 1, 1 l $\parallel m, m'$ та $f, A \parallel n, M_0$.

Аксонометрія заданого бруса буде 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Нарешті перейдемо до розв'язання задач другої групи в скосій аксонометрії.

При розв'язанні задач цієї групи в скосій аксонометрії, треба мати, крім трикутника слідів, ще напрям метування. Трикутник слідів може бути взятий довільний.

Як що маємо трикутник слідів ABC /рис.327, таб. LXII/ для скосої аксонометрії, то не трудно визначити аксонометричний хрест для даного трикутника ABC й при прямій аксонометрії.

Прям CD дасть напрямок вісі OZ' , а прямі з вершків A і B на протилежні боки визначають вісі Ox і Oy та осередок хреста O' . Знаходимо дійсне від-

далення осередка O' від осередка координат.

Проста CD уявляє собою аксонометричний відбиток напрямку метування, а $\angle O'O'O'' = \angle \varphi$ - куту нахилу метових простих до площі відбитку $O'O'' \perp O'O'$, $O'O'' \perp O'O'$.

Виходить, що коли маємо скосий аксонометричний трикутник, та скосий аксонометричний хрест, то не трудно перейти до простих аксонометричних трикутника та хреста, розв'язать завдання, та перейти назад.

Для цього покажемо ще як переходити з скосих аксонометричних відбитків та метів.

Коли маємо відбиток a' і мет a' /рис.327, таб. LXII / в скосій аксонометрії, то відшукання цих елементів для простої аксонометрії при однакових трикутниках слідів /але різних хрестах/ виконується так:

Через точки m' і m' ведемо прості m' і m' , рівнобіжні з відбитком OO' напрямку метування. Далі через точку m' ведемо просту m' в рівнобіжну з Ox /вісь скошого хреста/, а через точку o' просту $o'm'$ в рівнобіжну з Ox' /вісь прямого хреста/.

Точка m' буде поземим метом точки M при прямому метуванні, а точка m' /перехрестя простої m' і m' з простою m' і m' /буде відбитком точки M при простій аксонометрії.

Скося аксонометрія триметрична вживається рідко в техніці, найчастіш вживається диметрична та ізометрична, при чому площа картини ставиться в положення рівнобіжне з одною з площ мету /дві з осей хреста утворюють між собою кут 90° /.

Для такого випадку розв'яземо де кілька задач. /Площею відбитку буде площа W /.

17/ Знайти віддалення точки від площі відбитку /рис.328, таб. LXII /.

Знаходимо другий доземний мет a_3 , за допомогою простих a' в a' a_3 Ox ; a' a' ba_3 Oz .

Віддалення точки A від площі картини виносить подвійну довжину відтинків a' в або a' a_3 .

Відкладаємо на продовженні a_3 в від точки o' відтинки $ba_1 = 2a'$ в або $2a'$ a_3 , і цей відтінок ba_1 і буде дійсним віддаленням точки A від площі картини.

Якщо сполучити точки a' з точкою a_1 , то проста a' a_1 мусить бути прямою до вісі Ox .

18/ Точка a' є відбитком точки A , що лежить у площі H .

Нарисувати аксонометрію шестикутника /при даному боці/ так, щоб точка A була осередком описаного кола /рис.329, таб. LXII /.

Зливаємо площу H з площею картини. Тоді точка a' перейде у точку a' a' Ox , ba' Oz ; a' a_1 Ox /.

Рисуємо шестикутник 123456 даного боку, так щоб точка a' була осередком описаного кола.

Повертаємо площу H назад. Тоді кожна точка-вершок виконає шлях точки a . тільки у зворотньому порядку.

Напр. для точки I - маємо $11.10x, 1e \parallel ox, c1. \parallel ox$. Так само і для решти точок.

Шостикутник $1.2.3.4.5.6.$ буде відбитком шостикутника, що лежить у площі H .

19/ На даній площі нарисувати правильний трикутник, даного боку, так щоб осередком кола описаною була точка M /рис.330, таб. LXII /.

Спочатку зливаємо дану площу R з площею картини, обертанням навкруги сліду R_h .

З точки A ставимо прям до вісі ox і через точку A . перекрестя цього прями з продовженням осі OZ ведемо просту $A.B$. Точка A . буде злите положення точки A , тому проста $A.B$ уявляє собою злитий слід R_h площі R .

Знаходимо злите положення точки C , яка лежить на другому доведеному сліді R_w площі R , що дасть нам можливість знайти й злите положення R_w .

З точки O спускаємо прям на R_h , а з точки B , як з осередка, описуємо дугу лучем BC . Перекрестя цього прями з дугою, точка C . буде злите положення точки C , а проста BC . буде злитим слідом R_w .

Знаходимо злите положення точки M , для чого ведемо просту $m.N \parallel R_h$, знаходимо злите положення N . точки N і ведемо $N.M. \parallel R_h$, $m.M. \perp R_h$.

Беремо точку M . за осередок кола описаного навкруги правильного трикутника з даним боком. Рисуємо цей трикутник $1.2.3.$ і повертаємо його назад за допомогою прости $1.K_0, 2.L_0$ і $3.Q_0$. рівнобіжних з R_h / $BK_0 = BK, BL_0 = BL, BQ_0 = BQ, K1. \parallel L2. \parallel Q3. \parallel R_h, 1.1. \perp R_h, 2.2. \perp R_h, 3.3. \perp R_h$ / і знаходимо відбиток $1.2.3.$ даного трикутника.

Дану площу можна також злити з площею відбитку, за допомогою обертання навкруги сліду.

Як це зробити буде показано в наступній задачі.

20/ Знайти дійсний вигляд фігури, що лежить в даній площі R /рис.331, таб. LXII/.

З початку за допомогою точки $a_3/a'_3 \parallel ox$ визначаємо кут φ нахилу площі R до площі картини / $a_3 \perp R_w, a_3 A_0 \perp a_3 1, 1 A_0 \parallel ox$ /.

Потім зливаємо площу R з площею відбитку за допомогою обертання навкруги сліду R_w . Злите положення A . точки A буде на продовженні прями $a_3 1$ на віддаленню $1 A_0 = 1 A'_0$.

Чотирикутник в злитому положенні та аксонометричний чотирикутник $a'_1 b'_1 c'_1 d'_1$ будуть споріднені фігури, вісь спорідненості для яких буде слід R_w , а напрямок метування рівнобіжний з напрямком

а' А. По спорідненій з точкою а' точці А, та напрямку знаходимо споріднений чотирекутник А. В. С. D., який буде уявляти дійсний вигляд чотирекутника АВСD заданого відбитком а'. в'. с'. d'.

§47. АКСОНОМЕТРІЯ КОЛА Й КУПІ.

Як що коло рівнобіжне з площею відбитку, то відбиток його теж буде колом. В такому випадку, як що не звертати уваги на скорочення, рисують коло, з осередком у відбитку осередка та даним лучем.

У випадку коли не можна відкинути скорочення, то крім відбитку осередка, треба знайти відбиток одної з точок кола, і віддалення по-між тими двома відбитками й буде лучем кола - відбитку.

Як що коло лежить в одній з площ мету, або в площях рівнобіжних з цими площами, то відбитком кола буде еліпс. Велика вісь цього еліпсу буде на рисунку пряма до вісі координат, прямої до даної площі мету або кола. Ця вісь уявляє собою відбиток поперечника даного кола, рівнобіжного з площею картини, а тому на ньому можна відломити луч в його дійсну величину.

На рис. 332, таб. LXIII показано два способи рисування еліпсу відбитку при триметричній аксонометрії.

Маємо відбиток S. осередка кола, треба нарисувати аксонометрію його, як що це коло лежить у площі V / або у площі рівнобіжної з V /.

Через точку S. ведемо просту е. о. пряму до вісі ОУ; це буде велика вісь еліпсу. Від точки S. відкладаємо на цій вісі S. е. = S. о. = лучеві даного кола.

Через точку S. ведемо прям h. і. до великої вісі е. о.; це буде мала вісь еліпса, залишається знайти довжину цієї малі вісі.

Для того зливаємо з площею відбитку трикутник F. o. l. та відкладаємо на злитому його положенні від точки O. довжину луча даного кола. Знаходимо мірло U. в цього луча /у/ і відкладаємо його по малій вісі від точки S. до точок h. і.

Нарисувати тепер відбиток даного кола, еліпс з осями е. о. і h. і. можна способами § 29.

Еліпс відбитку даного кола можна нарисувати ще таким способом.

Як що маємо відбиток q. осередка кола /рис. 332, таб. LXIII/, то рисування великої вісі робиться по попередньому, а саме а. в. l. о. x; q. а = q. в. = лучеві даного кола.

Потім зливаємо трикутник KOL з площею картини та відкладаємо $Om =$ дучеві кола. Відтинок $Om = \frac{r}{2}$ відкладаємо на великій вісі еліпса від точки O по обидва боки $/ \frac{a}{2} = \frac{b}{2} = \frac{r}{2} /$. Точки f_1 і f_2 будуть вогнищами еліпса відбитку даного кола.

Тоді вже не трудно знайти малу вісь цього еліпса $/ \frac{a}{2} = \frac{b}{2} = \frac{c}{2} = \frac{d}{2} = \frac{e}{2} = \frac{f}{2} = \frac{g}{2} = \frac{h}{2} /$ і нарисувати його.

Найчастіше зустрічаються в випадках, коли коло лежить на площі H , або на площі з ній рівнобіжній. Можна також вибрати вісі координат так, щоб виконання рисунку було по можливості полегшено, а це може статися, коли осередок координат злитий з осередком даного кола, або вісь OZ зливається з віссю при кривих поверхнях.

На рис. 333, таб. LXIII маємо випадок ізометричної аксонометрії для кола, яке лежить на площі H і осередок якого злитий з осередком координат.

Ділимо поперечник даного кола, що йде по вісі Ox на кілька рівних частин /на рисунку 8/, та через точки поділу ведемо прямі до Ox , себ-то прості рівнобіжні з Oy .

На вісі Ox аксонометричного хреста відкладаємо /в скороченню, або без/ відтинки $01 = 1, 2 = 2, 3 = 3, 4 = 4, 5 = 5$. Через точки $1, 2, 3$ і т.д. ведемо прості рівнобіжні з віссю Oy та відкладаємо на цих простих відтинки $1_1 = 1, 2_1 = 2, 3_1 = 3$ і т.д. Точки $0, 1_1, 2_1$ і т.д. будуть точками еліпса відбитку. Для того, щоб мати більше точок, останній поділ 3,5 ще переполовинен точкою 4 і це дає ще зайву точку еліпса.

На місце того, щоб відкладати ці всі відтинки на хресті, можна просто знайти дві головних осі еліпса і тоді вже нарисувати самий еліпс.

Велика вісь еліпсу, як й у попередньому випадку повинна бути прямою до вісі OZ , а мала вісь зливатися з OZ .

Через точку 5_1 ведемо просту a_5 під кутом 45° до вісі OZ . Відтинок a_5 буде великою, а $5_1 b_1$ - малою поувіссю еліпса відбитку.

Якщо з точки O встановимо пряму oa до вісі Oy , відложимо $oc = 0,5$ і сполучимо точку c з точкою 5_1 , то відтинок sc буде великою, а ca малою поувіссю еліпсу відбитку.

Перший з цих способів уживається виключно при ізометричній аксонометрії, а другий при діаметричній та триметричній.

Загальний випадок триметричної аксонометрії кола, що лежить на довільній площі показаний на рис. 334, таб. LXIII

Спочатку знайдемо відбиток S_1 та мет $S_1 c_1$ - рядка S_1 кола, за допомогою простої $AB / a_1 b_1, a_1 c_1 / a$

потім знайдемо відбиток того поперечника даного кола, який буде рівнобіжний з площею відбитку, який уявить з себе велику вісь еліпса і буде рівним самому поперечнику.

Для цього перетинаємо наш рисунок площею, що поведена через вісь OZ , та прямою до H і зливаємо цю площу з площею відбитку.

Знаходимо у злитому положенні точку S_0 , себто злите положення осередка даного кола.

Через S ведемо в даній площі Q просту SE рівнобіжну з площею відбитку $/S_0 E_0 \parallel C_0 D_0/$; знаходимо мет e_1 , точки E і сполучаємо його з точкою S . Це буде відбиток поперечника, рівнобіжного з площею картини.

Від точки S відкладаємо відтинки $S_1 = S_2 =$ лучеві даного кола. Проста $1_0 2_0$ буде великою віссю еліпсу відбитку.

Мала вісь цього еліпсу буде прямою до $1_0 2_0$ і проходить через осередок еліпсу S .

Треба знайти довжину малої вісі.

Для того на відбитку малої вісі беремо довільну точку e_0 , знаходимо за допомогою простої $KF \parallel SB / K_0 f_0 \parallel S_0 e_1 /$ поземий мет e_1 , точки E / точка E лежить на площі Q / і нарешті знаходимо віддалення цієї точки від площі картини $/e_0 E_0/$.

Знаходимо дійсну довжину відтинку $SE / s_0 S \perp S_0 e_0, e_0 E \perp S_0 e_0, s_0 S = S_0 s_0, e_0 E = e_0 E_0 /$, відкладаємо відтинки $S_3 =$ лучеві даного кола, та знаходимо відбиток S_3 точки S . Відтинки $S_4 / S_3 = S_4 /$ буде відбитком малої вісі еліпсу - відбитку даного кола.

По двох головних осях рисуємо й самий еліпс.

На рис. 335, таб. LXIII маємо діаметричну аксонометрію стілка, що стоїть на площі H , і вісь якого злита з віссю OZ .

Рисуємо відбиток основи стілка, по способу, показаному на рис. 333, таб. LXIII $/Oa \perp OY; 1_0 6_0 \perp OZ; ac = O6_0 = O7_0; ab = 18_0, 06/$ потім знаходимо відбиток S вершка S стілка, та ведемо з точки S дотичні до знайденого еліпсу.

Все це разом дає нам аксонометрію даного стілка.

На рис. 336, таб. LXIII маємо аксонометрію вальця дуг основи якого, та висота повинні бути рівними 100 см.

Беремо для триметричної аксонометрії, аксонометричний хрест, та мірила вісьові з рис. 283, таб. LVII. Матимемо таким чином аксонометрію у мірилі 1:20.

Уся праця ясна з рисунку.

Відкладаємо $1_0 O = 05_0 = 100 \text{ см}$ в мірилі $X-16$ та $S_0 O = 07_0 = 100 \text{ см}$ в мірилі $Y-16$. Знаходимо велику $/2_0 6_0/$ та малу $/4_0 8_0/$ вісі еліпса $/Oa \perp OY, Oa = 03_0, ac = 06_0$

$= 02_0$; $a 6 = 04_0 = 08_0$ / та рисуємо відбиток основи.

Тоді рисуємо творчі вальця $/ 2_0 2_0 = 100 \text{ см}$ в мірилі $Z-i 6$ / та верхню основу, однакову з нижньою.

Коло в скосій аксонометрії рисується так само, як й в прямій, тільки з де-якими невеличкими змінами.

В скосій аксонометрії коло теж відбивається еліпсом.

На рис. 337, таб. LXIV маємо приклад скосої діметричної аксонометрії кола, яке лежить у поземній площі мету H , так, що осередок I цього кола буде одночасно й осередком координат.

На вісі Ox відкладаємо відтинки $01_0 = 05_0$ - лучеві даного кола, а на вісі Oy відтинки $03_0 = 07_0$ - половини луча.

Для того, щоб знайти велику та малу вісь еліпса, на вісі Oz відкладаємо відтинки $0a_0 = 01_0 = 05_0$, сполучаємо точку a з точкою 3_0 , переполовинюємо відтинки $a 3_0$ / точка b /, і з точки b , як з осередку, описуємо коло через осередок координат $/ \text{муг} = 80$ /.

Це коло перекрестить просту $a 3_0$ / або її продовження / в точках c і d .

Проста Oc дає напрям великої вісі, а проста Od - малої вісі еліпса; на цих вісях відкладаємо $02_0 = 06_0 = ac$; $04_0 = 08_0 = ad$.

Тепер можна вже нарисувати еліпс, який і буде аксонометрією заданого нам кола.

Як що взагалі треба знайти аксонометрію якої небудь кривої, або кривої поверхні, то знаходимо відбитки поодиноких точок, та сполучаємо ці відбитки плавкою кривою.

Аксонометрія кривих поверхней це буде відбиток контура цієї поверхні, як це було й при прямому метуванні.

Трохи простіше стоїть справа з кулею, аксонометрію якої розглянемо зараз.

При прямій аксонометрії, куля відбивається як коло, при чому луч цього кола буде однаковий з лучем самої кулі.

Це зовсім зрозуміло, бо при прямому метуванні / проста аксонометрія / метові прямі утворюють навкруги кулі обгортаючий валець, який перетинається площею відбитку / прямої до вісі вальця / по колу, однакового луча з лучем кулі.

При скосій аксонометрії площа відбитку похилена до метових протих, разом з тим до вісі обгортаючого вальця, а тому відбитком кулі буде не коло, а еліпс.

На рис. 338, таб. LXIV маємо приклад прямої ізометричної аксонометрії кулі.

Коло K_0 луча рівного лучеві даної кулі, уявляє собою аксонометрію кулі, осередок якої злитий з осередком координат.

Коли ж знаходити аксонометрію кола по аксонометрії кол його перекроїв з площами мету, то одержимо теж коло, але луч якого буде більше за даний.

Для цього знаходять відбиток 4, 5, 6, 7, кола перекрою з площею H ; 8, 9, 10, 11, - з площею V і 12, 13, 14, 15, - з площею W .

Коло K' , що обгортає усі ці еліпси, буде визначати побільшену аксонометрію даної кулі.

На рис. 339, таб. XLIV маємо скосу ізометричну аксонометрію попередньої кулі, при попередніх умовах /осередок кулі в осередку координат/.

Тут теж шукаємо відбитки трьох перекроїв кулі з площами мету.

Для площі V , яка має на хресті кут $\angle XOZ = 90^\circ$ цей перекрій відіб'ється колом K , луча рівного лучеві кола.

Для площі H це буде еліпс 1, 2, 3, 4, і для площі W - еліпс 5, 6, 7, 8; залишається обгорнути ці три криві плавною кривою і одержимо бажану аксонометрію.

Понеже, як про це вже було вгадано, ця аксонометрія уявляє собою еліпс, то знайдемо його головні вісі, що полегшує рисування самого еліпса.

Мала вісь рівняється попереїникові кулі і буде прямою до вісі OY /11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1005, 1006, 1007, 1008, 1009, 1010, 1011, 1012, 1013, 1014, 1015, 1016, 1017, 1018, 1019, 1020, 1021, 1022, 1023, 1024, 1025, 1026, 1027, 1028, 1029, 1030, 1031, 1032, 1033, 1034, 1035, 1036, 1037, 1038, 1039, 1040, 1041, 1042, 1043, 1044, 1045, 1046, 1047, 1048, 1049, 1050, 1051, 1052, 1053, 1054, 1055, 1056, 1057, 1058, 1059, 1060, 1061, 1062, 1063, 1064, 1065, 1066, 1067, 1068, 1069, 1070, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1076, 1077, 1078, 1079, 1080, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1087, 1088, 1089, 1090, 1091, 1092, 1093, 1094, 1095, 1096, 1097, 1098, 1099, 1100, 1101, 1102, 1103, 1104, 1105, 1106, 1107, 1108, 1109, 1110, 1111, 1112, 1113, 1114, 1115, 1116, 1117, 1118, 1119, 1120, 1121, 1122, 1123, 1124, 1125, 1126, 1127, 1128, 1129, 1130, 1131, 1132, 1133, 1134, 1135, 1136, 1137, 1138, 1139, 1140, 1141, 1142, 1143, 1144, 1145, 1146, 1147, 1148, 1149, 1150, 1151, 1152, 1153, 1154, 1155, 1156, 1157, 1158, 1159, 1160, 1161, 1162, 1163, 1164, 1165, 1166, 1167, 1168, 1169, 1170, 1171, 1172, 1173, 1174, 1175, 1176, 1177, 1178, 1179, 1180, 1181, 1182, 1183, 1184, 1185, 1186, 1187, 1188, 1189, 1190, 1191, 1192, 1193, 1194, 1195, 1196, 1197, 1198, 1199, 1200, 1201, 1202, 1203, 1204, 1205, 1206, 1207, 1208, 1209, 1210, 1211, 1212, 1213, 1214, 1215, 1216, 1217, 1218, 1219, 1220, 1221, 1222, 1223, 1224, 1225, 1226, 1227, 1228, 1229, 1230, 1231, 1232, 1233, 1234, 1235, 1236, 1237, 1238, 1239, 1240, 1241, 1242, 1243, 1244, 1245, 1246, 1247, 1248, 1249, 1250, 1251, 1252, 1253, 1254, 1255, 1256, 1257, 1258, 1259, 1260, 1261, 1262, 1263, 1264, 1265, 1266, 1267, 1268, 1269, 1270, 1271, 1272, 1273, 1274, 1275, 1276, 1277, 1278, 1279, 1280, 1281, 1282, 1283, 1284, 1285, 1286, 1287, 1288, 1289, 1290, 1291, 1292, 1293, 1294, 1295, 1296, 1297, 1298, 1299, 1300, 1301, 1302, 1303, 1304, 1305, 1306, 1307, 1308, 1309, 1310, 1311, 1312, 1313, 1314, 1315, 1316, 1317, 1318, 1319, 1320, 1321, 1322, 1323, 1324, 1325, 1326, 1327, 1328, 1329, 1330, 1331, 1332, 1333, 1334, 1335, 1336, 1337, 1338, 1339, 1340, 1341, 1342, 1343, 1344, 1345, 1346, 1347, 1348, 1349, 1350, 1351, 1352, 1353, 1354, 1355, 1356, 1357, 1358, 1359, 1360, 1361, 1362, 1363, 1364, 1365, 1366, 1367, 1368, 1369, 1370, 1371, 1372, 1373, 1374, 1375, 1376, 1377, 1378, 1379, 1380, 1381, 1382, 1383, 1384, 1385, 1386, 1387, 1388, 1389, 1390, 1391, 1392, 1393, 1394, 1395, 1396, 1397, 1398, 1399, 1400, 1401, 1402, 1403, 1404, 1405, 1406, 1407, 1408, 1409, 1410, 1411, 1412, 1413, 1414, 1415, 1416, 1417, 1418, 1419, 1420, 1421, 1422, 1423, 1424, 1425, 1426, 1427, 1428, 1429, 1430, 1431, 1432, 1433, 1434, 1435, 1436, 1437, 1438, 1439, 1440, 1441, 1442, 1443, 1444, 1445, 1446, 1447, 1448, 1449, 1450, 1451, 1452, 1453, 1454, 1455, 1456, 1457, 1458, 1459, 1460, 1461, 1462, 1463, 1464, 1465, 1466, 1467, 1468, 1469, 1470, 1471, 1472, 1473, 1474, 1475, 1476, 1477, 1478, 1479, 1480, 1481, 1482, 1483, 1484, 1485, 1486, 1487, 1488, 1489, 1490, 1491, 1492, 1493, 1494, 1495, 1496, 1497, 1498, 1499, 1500, 1501, 1502, 1503, 1504, 1505, 1506, 1507, 1508, 1509, 1510, 1511, 1512, 1513, 1514, 1515, 1516, 1517, 1518, 1519, 1520, 1521, 1522, 1523, 1524, 1525, 1526, 1527, 1528, 1529, 1530, 1531, 1532, 1533, 1534, 1535, 1536, 1537, 1538, 1539, 1540, 1541, 1542, 1543, 1544, 1545, 1546, 1547, 1548, 1549, 1550, 1551, 1552, 1553, 1554, 1555, 1556, 1557, 1558, 1559, 1560, 1561, 1562, 1563, 1564, 1565, 1566, 1567, 1568, 1569, 1570, 1571, 1572, 1573, 1574, 1575, 1576, 1577, 1578, 1579, 1580, 1581, 1582, 1583, 1584, 1585, 1586, 1587, 1588, 1589, 1590, 1591, 1592, 1593, 1594, 1595, 1596, 1597, 1598, 1599, 1600, 1601, 1602, 1603, 1604, 1605, 1606, 1607, 1608, 1609, 1610, 1611, 1612, 1613, 1614, 1615, 1616, 1617, 1618, 1619, 1620, 1621, 1622, 1623, 1624, 1625, 1626, 1627, 1628, 1629, 1630, 1631, 1632, 1633, 1634, 1635, 1636, 1637, 1638, 1639, 1640, 1641, 1642, 1643, 1644, 1645, 1646, 1647, 1648, 1649, 1650, 1651, 1652, 1653, 1654, 1655, 1656, 1657, 1658, 1659, 1660, 1661, 1662, 1663, 1664, 1665, 1666, 1667, 1668, 1669, 1670, 1671, 1672, 1673, 1674, 1675, 1676, 1677, 1678, 1679, 1680, 1681, 1682, 1683, 1684, 1685, 1686, 1687, 1688, 1689, 1690, 1691, 1692, 1693, 1694, 1695, 1696, 1697, 1698, 1699, 1700, 1701, 1702, 1703, 1704, 1705, 1706, 1707, 1708, 1709, 1710, 1711, 1712, 1713, 1714, 1715, 1716, 1717, 1718, 1719, 1720, 1721, 1722, 1723, 1724, 1725, 1726, 1727, 1728, 1729, 1730, 1731, 1732, 1733, 1734, 1735, 1736, 1737, 1738, 1739, 1740, 1741, 1742, 1743, 1744, 1745, 1746, 1747, 1748, 1749, 1750, 1751, 1752, 1753, 1754, 1755, 1756, 1757, 1758, 1759, 1760, 1761, 1762, 1763, 1764, 1765, 1766, 1767, 1768, 1769, 1770, 1771, 1772, 1773, 1774, 1775, 1776, 1777, 1778, 1779, 1780, 1781, 1782, 1783, 1784, 1785, 1786, 1787, 1788, 1789, 1790, 1791, 1792, 1793, 1794, 1795, 1796, 1797, 1798, 1799, 1800, 1801, 1802, 1803, 1804, 1805, 1806, 1807, 1808, 1809, 1810, 1811, 1812, 1813, 1814, 1815, 1816, 1817, 1818, 1819, 1820, 1821, 1822, 1823, 1824, 1825, 1826, 1827, 1828, 1829, 1830, 1831, 1832, 1833, 1834, 1835, 1836, 1837, 1838, 1839, 1840, 1841, 1842, 1843, 1844, 1845, 1846, 1847, 1848, 1849, 1850, 1851, 1852, 1853, 1854, 1855, 1856, 1857, 1858, 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, 1864, 1865, 1866, 1867, 1868, 1869, 1870, 1871, 1872, 1873, 1874, 1875, 1876, 1877, 1878, 1879, 1880, 1881, 1882, 1883, 1884, 1885, 1886, 1887, 1888, 1889, 1890, 1891, 1892, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907, 1908, 1909, 1910, 1911, 1912, 1913, 1914, 1915, 1916, 1917, 1918, 1919, 1920, 1921, 1922, 1923, 1924, 1925, 1926, 1927, 1928, 1929, 1930, 1931, 1932, 1933, 1934, 1935, 1936, 1937, 1938, 1939, 1940, 1941, 1942, 1943, 1944, 1945, 1946, 1947, 1948, 1949, 1950, 1951, 1952, 1953, 1954, 1955, 1956, 1957, 1958, 1959, 1960, 1961, 1962, 1963, 1964, 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 21

площу Q .

Дане кільце обгортає куля, яка дотикається до цього кільця по колу $IO.II$, що утворилося від перетину кільця площею Q . Осередок цієї кулі буде точка a , і ця куля має відбитком коло, луча $a.O$.

Точка b кільця лежить на згаданій кулі, і як раз на відбитку її, бо ця точка лежить у площі рівнобіжній з площею відбитку $/ab \parallel P/$, то відбитки точок b /їх маємо дві/, лежать на відбитку допоможної кулі.

Рисуємо коло K , що буде аксонометрією допоможної кулі, з осередка a . $/aa.OZ/$ та на перекресті цього кола з прямими, спущеним з точки b на вісь OZ /рис. a /, одержимо дві точки b і b' кривої відбитку даного кільця.

Таким самим способом користуючись допоможними площами R, S, T , та допоможними кулями, визначені точки $a, a', b, b', c, c', d, d', e, e', f, f', g, g', h, h', i, i'$.

Контур аксонометрії кільця уявляє собою еліпс, мала вісь якого злита з віссю OZ ; а осередком якого буде точка l . $/ll.OZ/$.

Для того, щоб знайти точки еліпсу, що визначають його вісі, переносимо крайні точки e і f кільця на вісь OZ в точки e і f . $/ee.OZ, ff.OZ/$ а на великій вісі відкладаємо $lg = le, g' = l'f$.

Весь контур готовий, залишається нарисувати середину кільця.

Крива $e d b g f$ уявляє собою контур кільця, який і дає еліпс $e. d. b. g. f$ і т.д. - аксонометрію цього кільця; крива $1.2.3.4.5.6.7$ - це контур осередку.

Крайні точки 1 і 7 визначаються відбитками 1 і 7 . Точки h і h' визначаються, як що відложимо $lh = le, h' = l'f$.

Для визначення решти точок користуються тем допоможними кулями, поведеними через точку і дотичні до кільця. Такі кулі мають відбитками кола, перекрестя яких з прямими до вісі OZ /напр. $6.6.OZ/$ і дадуть точки кривої відбитку. Так куля поведена через точку 5 /осередок 15 / має своїм відбитком коло, однакового луча, з осередком 15 ; перекрестя цього кола з прямими до OZ $/5.5.OZ/$ визначить точки 5 і $5'$.

Таким способом найдена повна триметрична пряма аксонометрія даного колового кільця.

На рис. 341, таб. LXIV показана ізометрична скоса аксонометрія того ж самого кільця, при чому вісі координат мають осередок спільний з осередком кільця.

Тут спочатку знаходимо аксонометрію тої керуючої, по якій посувається коло, коли воно утворює кільце.

Ця керуюча буде коло, що лежить в площі Н
Знаходимо способом, показаним вище; еліпс,
відбиток цього кола. Це буде еліпс 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

При утворенні кільця творче коло посувається
весь час так, що осередок його не сходить в керую-
чого кола, а площа пряма до керуючої.

Відбитки творчого кола взагалі будуть еліпси,
тільки два крайніх /осередки 4. і 5./ відібраються ко-
лами, але для нас не важний весь той еліпс, нам пот-
рібна його велика вісь, що рівна поперечникові твор-
чого кола.

Еліпс, що обгортає усі положення творчого ко-
ла дасть аксонометрію колового кільця, так, як це
показано на рисунку.

С ЦЕНТРАЛЬНЕ МЕТУВАННЯ.

§ 48. Вступ.

Вище /§ 2/ було висловлено, що рівнобіжне ме-
тування є окремий випадок метування центрального або
осередкового.

Дійсно, можна припускати, що усі рівнобіжні
метові прості збігаються на безконечно далекому від-
даленні в одну точку, - осередок метування, і як що
цей осередок перенесемо на віддалення реальне, то ці
метові прості утворять собою жмуток простих, а самий
спосіб метування перейде у центральний.

В центральному метуванні маємо точку, куди
збігаються метові прості, - осередок, - і метову площу
яку називають також площею відбитку.

Ті малюнки, що ми щ хвилини бачимо своїми
очима, це є теж відбиток центрального метування, де
за осередок будуть наші очі. Такі відбитки називають
перспективними відбитками, або просто перспективою.

В дальшому викладі не будемо робити різниці
по між цими двома назвами, хоча де-яка різниця тут
існує.

В перспективі площа відбитку обов'язково зна-
ходиться поміж оком та предметом, чого може й не бу-
ти при центральному метуванні; крім того площа від-
битку при перспективі мусить вважатися прозором, ні-
би скляною, що зовсім не обов'язково при централь-
ному метуванню.

Перспектива майже не вживається в техніці, а
за те вона необхідна для маляра. Найкращим прикладом
перспективи є кожна фотографія.

Зробимо де-які визначення спільні й для цен-

трального метування й для перспективи.

Точку, до якої збігаються метові прості будемо називати **ОСЕРЕДКОМ**, або **ОНОМ** і будемо визначати літерою **О**.

Метові прості в перспективі, будемо називати проміннями зору, або просто проміннями.

Метову площу в перспективі будемо називати також площею відбитку, а мет - відбитком, або перспективою.

Промінь, поведений через око, прямою до площі відбитку, називатимемо **ГОЛОВНИМ ПРОМІНЬМ**, а мет, або відбиток цього проміння - **ОЧКОМ**, або **ГОЛОВНОЮ ТОЧКОЮ** /визначатимемо літерою **Н** /.

Довжина головного проміння, себ-то віддалення ока від площі відбитку, називатимемо **ГОЛОВНИМ ВІДДАЛЕННЯМ**, або просто **ВІДДАЛЕННЯМ** / δ /.

Якщо на площі відбитку нарисуюмо коло, осередком якого буде головна точка **Н**, а лучем віддалення δ , то таке коло матиме назву **КОЛА ВІДДАЛЕНЬ**.

Площа поведена через око поземю називатимемо поземною, перетин її з площею відбитку поземом /проходить через **Н** /, а дозему площу, що поведена через око, доземною, перетин доземної площі з площею картини доземом, який теж проходить через **Н**.

Око завжди знаходиться на певній висоті від площі /поземної/, яка носить назву **ПЛОЩІ ОСНОВИ**. Ця площа перетинається з площею відбитку по поземній простій, яку будемо називати **ПРОСТОЮ** або **ВІССЮ ОСНОВИ**.

Для кращого малюнку віддалення беруть завжди не більше 25 см., тому будемо в наших перспективних малюнках не переступати тої межі.

Якщо око уміщено дуже високо над площею основи, то маємо малюнки так званої орлиної перспективи, прикладом якої можуть бути фотографії з аероплану, або мапи.

Навпаки, коли око знаходиться майже на самій площі основи, то приходимо до перспективи жабиної, прикладами якої можуть бути фотографії високих гір, або будинків, знятих знизу.

Спочатку зупинимося над де-якими законами центрального метування, які здадуться нам й для рисування перспективи.

§ 49. ОСНОВНІ ЗАКони ЦЕНТРАЛЬНОГО МЕТУВАННЯ.

Центральний мет, або перспективний відбиток кожної точки можна знайти як перетин проміння, поведеного через дану точку і око, з площею відбитку.

Кожна точка, що не впливається з оком має

свій відбиток, такою точку. Відбиток точки, зливої з оком, не має точно визначеного відбитку, бо кожний промінь несе на собі ту точку.

Як що точка лежить в площі, поведений через око, та рівнобіжний з площею відбитку, то відбиток такої точки зникає у безконечно далекому віддаленні, бо промінь поведений через таку точку буде рівнобіжним з площею відбитку, та перетинає її на безконечно далекому віддаленні.

Площа, поведена через око, рівнобіжна з площею відбитку, називається тому ПЛОЩЕЮ ЗНИКУ, кожна точка та проста, що лежать на тій площі носять назву ТОЧОК ТА ПРОСТИХ ЗНИКУ.

Маємо площу відбитку P /рис. 342, таб. LXV/, око O , головну точку H , позем H_1H_2 , та віддалення OH

Відбиток точки F буде точка f . перетину променя OF з площею P . Лежить точка F за площею P або перед нею, однаково промінь перетне площу P і дасть відбиток f . точки.

Для цих випадків маємо реальні відбитки, реальну перспективу точки F

Поведемо через око O площу Z рівнобіжну з площею P . Це буде площа знику.

Кожна точка, що лежить по за площею знику дасть реальний центральний мет, але реального відбитку, реальної перспективи не буде, бо наше око нахується оберненим до площі відбитку.

Але за для полекшення де-яких питань перспективи уживають й відбитки, або перспективи точок, що лежать по-за площею знику, не як реальні, а як геометричний відбиток.

Взаємне положення точки, її відбитку та ока для випадків перспективи реальної буде

$$F, f, O$$

або

$$f, F, O$$

а геометричне положення їх буде

$$f, O, F.$$

Для того, щоб знайти відбиток простої AB введемо до точок її променя; точки перетину цих променів з площею відбитку дадуть відповідні відбитки, на решті сполучення цих точок дасть відбитком простої.

Або ми можемо через усі ці метові проміння повести площу, яка буде метовою для даної простої. Перетин цієї метової площі з площею відбитку дасть відбиток даної простої.

З цього висновок, що відбитком простої буде теж проста /15 § I/.

Дана проста AB /рис. 342, таб. LXV/ перетинає площу відбитку в точці α , а площу знику в точці σ

Точку Q_c будемо називати слідом простої AB . Цей слід є разом з тим і відбитком тої точки простої, яка буде спільною для простій та площі відбитку. В точці Q_c збігаються три точки: точка A даної простої, слід цієї простої і відбиток точки A .

Точка Q_3 є точкою знику даної простої. Це буде та точка простої AB , відбиток якої лежить на безконечно далекому віддаленню, бо промінь, поведений через цю точку буде рівнобіжний з площею відбитку.

Як що візьмемо на даній простій послідовно точки $1, 2, 3, 4$ і т.д. будемо знаходити відбитки $1_c, 2_c, 3_c, 4_c$ і т.д. цих точок і будемо цю працю вести до безконечного віддалення точок даної простої, то нарешті дійдемо до променя OQ_c рівнобіжного з самою простою. Цей промінь дасть відбиток Q_c . Що уявляє собою ця точка? Вона є відбитком тієї точки даної простої, яка знаходиться на безконечно далекому віддаленню, яка, як би мовити, втілає з реальності.

Точка Q_c називається ТОЧКОЮ ВТЕЧІ простої.

Ці дві точки, точки знику та втечі мають важливе значіння при центральному метуванні, тому зупинимось трохи на них.

Промінь OQ_c рівнобіжний та рівний відтинку Q_3A даної простої. Рівнобіжний по самому способу його рисування, а рівний тому, що дві рівнобіжних простих AB та $3A$ рівні відтинки.

Тому геометрично у простороні чотирекутник OQ_cA_3A уявляє собою рівнобіжний, який легко побудувати, як що маємо вистарчаючі для цього елементи. Як що ми знаємо точне положення трьох з чотирьох згаданих точок / O , Q_c , слід, точки знику та втечі/, то можна побудувати рівнобіжний і тим визначити точне положення простої у простороні.

Точка O завжди точно визначена, бо для кожного випадку повинні бути відомі: головна точка H та віддалення δ . Тому, як що для якої небудь простої дані точка втечі та слід, то сама проста точно установлена у простороні.

Дійсно сполучаємо точку втечі Q_c з оком O , простою Q_cO , через слід A_3 ведемо просту Q_cA_3 рівнобіжну з одержаною простою і це буде положення даної простої у простороні.

В центральному метуванні, або перспективі ПРОСТА рахується ТОЧНО ВИЗНАЧЕНОЮ, а також ЗАДАНОЮ, коли МАЄМО СЛІД її, ТА ТОЧКУ ВТЕЧІ, а ЗНАЙТИ ПРОСТУ, це значить ВИЗНАЧИТИ її СЛІД ТА ТОЧКУ ВТЕЧІ.

Для того, щоб знайти точку втечі даної простої треба через око повести просту, рівнобіжну з даною, та знайти перетин з площею відбитку; точка втечі простої, зрозуміло, лежить на відбитку самої простої, а тому відбиток простої буде проста, що сполучає слід та точку втечі.

Визначення у рівнобіжних простих Q_cA_3 та A_3A_3

Маємо просту CD рівнобісну з простою AB . Для того, щоб знайти точку втечі цієї простої треба провести через око промінь рівнобіжний з CD . Але це буде той самий промінь, що був поведений для визначення точки втечі простої $AB \parallel CD$. Виходить, що ці дві прості мають спільну точку втечі, а відбитки їх будуть збігатися у цю спільну точку.

Тому при центральному метуванні ВІДБИТКИ ПРОСТИХ ЗБІГАЮТЬСЯ ДО СПІЛЬНОЇ ДЛЯ НИХ ТОЧКИ ВТЕЧІ.

Рис. 343, таб. LXV уявляє собою відбитки шести рівнобіжних простих, точка втечі яких спільна.

Тепер спробуємо в'яснити положення точок втечі простих, що знаходяться у даному відношенні до площі відбитку, або основи.

Для того, щоб знайти точки втечі простих, рівнобіжних з площею основи, треба провести через око промінь рівнобіжний з цими простими, а усі ці проміні лежать у площі рівнобіжній з площею основи; ця ж площа перетинається з площею відбитку по поземі N, N_1 , тому ТОЧКИ ВТЕЧІ ПРОСТИХ, РІВНОБІЖНИХ З ПЛОЩЕЮ ОСНОВИ /ПОЗЕМИХ/ ЛЕЖАТЬ НА ПОЗЕМІ N, N_1 .

ПРОСТІ, ЩО ЛЕЖАТЬ У ПЛОЩАХ ПРЯМИХ ДО ПЛОЩІ ВІДБИТКУ, МАЮТЬ ТОЧКИ ВТЕЧІ НА ПОЗЕМІ D, D_1 .

ТОЧКОЮ ВТЕЧІ ПРОСТИХ, ПРЯМИХ ДО ПЛОЩІ ВІДБИТКУ БУДЕ ГОЛОВНА ТОЧКА H .

Як що прості нахилені до площі відбитку під кутом α , то усі проміння рівнобіжні з цими простими утворюють стіжок, який в перетині з площею відбитку має коло. Як що відоме віддалення δ /рис. 344 таб. XLV/, то луч цього кола γ виносить $\delta \cdot \text{ctg} \alpha$, тому можна висловитися так: ТОЧКИ ВТЕЧІ ПРОСТИХ, НАХИЛЕНИХ ДО ПЛОЩІ ВІДБИТКУ ПІД КУТОМ α , ЛЕЖАТЬ НА ОБВОДІ КОЛА, ОСЕРЕДКОМ ЯКОГО БУДЕ ГОЛОВНА ТОЧКА H , А ЛУЧЕМ $\gamma = \delta \cdot \text{ctg} \alpha$.

Як що $\alpha = 45^\circ$; то $\text{ctg} \alpha = 1$, тоді $\gamma = \delta$, і коло зливається з колом віддалень, а тому ТОЧКИ ВТЕЧІ ПРОСТИХ, НАХИЛЕНИХ ДО ПЛОЩІ ВІДБИТКУ ПІД КУТОМ 45° ЗНАХОДЯТЬСЯ НА ОБВОДІ КОЛА ВІДДАЛЕНЬ.

Прості рівнобіжні з площею відбитку, мають точки втечі спільні з точками знику на безконечно далекому віддаленні.

Прості прями до площі основи мають відбитки прямими до вісі OX , сліду площі основи.

Відбиток площі знайдемо, коли визначимо відбитки усіх її точок. Так що відбитком площі буде теж площа, злита з площею відбитку. Такий спосіб визначення при центральному метуванні площ дуже неясний, тому користуються іншим.

Дана площа S /рис. 345, таб. LXV/ перетинається з площею відбитку P по простій S_d , яку будемо називати слідом даної площі. Цей слід S_d , є разом з тим й відбитком його.

Через око O поведемо площу R , рівнобісну з даною площею S ; площа R перетинає площу P по простій S_e , яка буде ПРОСТОЮ ВТЕЧІ даної площі.

Проста втечі уявляє собою відбитки тих точок даної площі, які лежать на безконечно далекому віддаленні.

Проста S_3 перетину даної площі S з площею знику Z /на рисунку не показані/ має назву ПРОСТОЇ ЗНИКУ; вона несе на собі ті точки даної площі S , відбитки яких знаходяться на безконечно далекому віддаленні.

Зрозуміло, що всі три прості S_e , S_1 і S_3 рівнобіжні між собою.

Слід S_e площі та її проста втечі S_e точно визначають дану площу S , бо як що ми через око O та просту втечі S_e поведемо площу R , то дана площа S повинна бути рівнобісною з площею R та проходити через слід S_e .

Тому при центральному метуванні рахують ПЛОЩУ ВИЗНАЧЕНОЮ, ЯК ЩО ДАНІ СЛІД ІІ ТА ПРОСТА ВТЕЧІ, а коли маємо ЗНАЙТИ ПЛОЩУ, то треба ВИЗНАЧИТИ ЗГАДАНІ ЕЛЕМЕНТИ.

Площі S і R , рівнобіжні між собою /рис.346, таб. LXV/, мають спільну просту втечі R_e / S_e ; навпаки, як що проста втечі буде спільною для даних площ, то ті площі будуть рівнобіжні.

Проста, що лежить на даній площі, повинна мати свій слід та точку втечі на сліді та простій втечі площі. Коли це не виконано, то це буде відзнака, що проста не лежить на площі.

Проста рівнобіжна з даною площею /рис.349, таб. LXV/ обов'язково повинна мати свою точку втечі $/Q_e/$ на простій втечі $/S_e/$ даної площі. Положення сліду простої $/S_e/$ відносно сліду площі $/Q_e/$ згори визначає положення самої простої відносно площі, а саме, як що слід простої лежить над слідом площі $/Q_e, Q_e'/$, то сама проста у просторі лежить над площею, коли ж слід лежить під слідом площі $/Q_e'/$, то проста лежить під даною площею.

Проста рівнобіжна з площею відбитку /рис.355 таб. LXVI/ не має ні слідів, ні точок втечі, тому для визначення такої простої вживають площу S , що поведена через дану просту $/S_e \parallel S_e' \parallel S_e, Q_e/$ та точку Q_e цієї простої, яка тепер лежить на простій t_e, t_e' що лежить в площі S .

Визначення точки через самий тільки відбиток, не дає ясної уяви про положення точки у просторі. Тому уживають для того просту, що проходить через дану точку, і яку називають ВИЗНАЧАЮЧОЮ ПРОСТОЮ. Дійсно визначаюча проста, задана слідом та тоною втечі, має точно усталене положення у просторі, а тим самим має таке точне положення

дана точка.

§ 50. ПРИКЛАДИ ПЕРСПЕКТИВИ.

Для виконання перспективного рисунку, або перспективи треба мати два ме и даного об'єкта точ- не положення площі відбитку та ока. В де-яких ви- падках вистарчить одного мета, але на початку ба користуватися двома.

Маємо мети помника /рис. 360, таб. LXVІІ/; за площу відбитку візьмемо площу P , пряму до позе- мої площі мету /доземий слід не нарисований, бо він не потрібний/, положення ока O визначено метами O, O' .

При виборі положення ока, при даній площі відбитку, або положення площі відбитку, при даному положенні ока, радиться вибирати напрям поземного мета головного проміння OO таким, щоб він сполу- чав око приблизно в серединю об'єкта.

Якщо маємо площу відбитку P , то приблиз- но в середини об'єкта опускаємо прям - головний про- мінь, і на ньому визначаємо око O . Для того, щоб перспектива одержалася ясною, треба, щоб кут ψ , створений крайніми проміннями не перевишав 60° . Пло- шу відбитку краще уміщати коло самого об'єкта.

Коли маємо визначене око O , то ведемо го- ловний промінь теж приблизно до середини об'єкта, а потім визначаємо площу відбитку прямо до голов ного проміння.

Перспектива відіб'ється на площі відбитку. На даному рисунку маємо не саму перспективу, а її мети. Саму перспективу треба винести на окремий рисунок.

Для того, щоб нарисувати перспективу даного помника /рис. 360, таб. LXVІІ/, треба знайти перспек- тиву кожної його точки, а для того ведемо для кож- ної точки проміня, та знаходимо перетин цього про- міня з площею картини.

На рисунку одержимо два мети цих точок, і вже скористувавшись цими метами та метовими прима- ми, нарисуємо й саму перспективу.

Знайдемо перспективу де-яких точок, /мети перспективи/. Щоб знайти це для точки $1/1, 1'/$ спо- лучаємо її з оком $O/O, O'/$ промінням $1-O/1, O, 1'O'/$, та знаходимо точку перетину цього проміння з площею відбитку P . Це буде точка $1_o/1_o, 1'_o/$.

Коли ми знайдемо в указаній спосіб перспек- тиви /мети/ усіх точок, то починаємо рисувати саму перспективу.

Рисуємо позему просту  /рис. 361, таб. LXVІІ/; це буде слід площі основи. Визначаємо на ньому мет

h головної точки та саму точку $H/Hh = o'k/$.

Потім беремо з попереднього рисунку віддалення поземого мета 1_0 точки 1_0 від мету $b/h_1_0/i$ відкладаємо по тому самому напрямку на вісі OX відтинок $ba = hf$ з точки a ставимо прям до OX та відкладаємо $a1_0 = a'1_0$ / попереднього рисунку/. Точка 1_0 є перспективою точки 1 .

Коли виконаємо те саме для всіх точок даного помника, то сполучаємо одержані перспективи точок простими і маємо всю перспективу помника.

На рисунку маємо лише ту частину помника, яку глядач бачить, коли очі його уміщені в точці $O/o, o'/$.

Можна згори знати, які частини об'єкта будуть видними на перспективному рисунку. Це буде та частина, яка обернена до глядача та вміщається у кутах ψ і ψ' .

Як що користуватися точками втечі, то рисунка перспективи стає в деяких випадках простішим.

Для випадку помника /рис. 360, таб. LXVIII/ справа ще упрощена тим, що майже усі руби мають два напрямки, а тому тут матимемо дуже мало точок втечі.

Для усіх простих, рівнобіжних з віссю OX , точкою втечі буде точка $Ф/ф, ф'/$, для визначення якої треба через око $O/o, o'/$ провести проміні, рівнобіжні з даними простими $oф || o'ф' || OX$, та знайти точку $Ф/ф, ф'/$ перетину його з площею відбитку.

Так само з точкою втечі для простих прямих до вісі OX . Це буде точка $F/f, f'/$.

Рисуємо тепер знову сліди OX /рис. 362, таб. LXVIII/ площі основи, визначаємо точки $h, f, ф$, визначаємо позем, головну точку $H/Hh = h' a_0$ попереднього рисунку/, та точки втечі $Ф$ і F / $HФ = hф$, $H F = h f$ /.

Для того щоб нарисувати перспективу основи помника продовжуємо її боки до перетину з слідом P .

Прості $4c$ і $5d$ рівнобіжні між собою, тому мають спільну точку втечі, а перспектива їх повинна проходити через слід та точку втечі.

Переносимо на слід площі основи OX сліди цих простих C_c і d_c / $h c_c = h c$ попереднього рисунку, $h d_c = h d$ / та сполучаємо їх з точкою втечі F .

Прості $C_c F$ та $d_c F$ будуть перспективою згаданих простих.

Те саме робимо для двох других боків основи помника / $h e_c = h e$, $h g_c = h g$ /; маємо перспективи цих боків і разом перспективу усієї основи.

Для того, щоб знайти перспективу другого шару цоколя ведемо знову прості рівнобіжні з попередніми, знаходимо їх сліди на площі відбитку і переносимо їх на перспективний рисунок. Треба тільки мати на увазі, що ці сліди не будуть лежати на сліді OX , а над ним на рівні $C_3 C_3 = 12'$. Сполучаємо напр. точку C_3 з точкою втечі F ; це буде перспекти-

ва відповідного боку, перетин якої з прямом з точки 1₀ дасть точку 2₀-перспективу точки 2.

Руб 1,2 прямий до площі основи; тому, як це було зауважено раніш, перспектива його буде прямою до OX .

Сполучаємо точку 2₀ з точкою втечі ϕ , - знаходимо точку 1₀, перетину простої $\phi 2_0$ з відповідним прямом, перетин простої $\phi 1_0$ теж з прямом дасть перспективу ще одної точки верхньої основи цоколя.

Для того, щоб знайти перспективу точки 9 можна 1/ або повести через точку 9 дві простих 9J і 9K, знайти сліди цих простих i і k /перспективний рисунок i_3 і k_3 на висоті 9 до вісі OX /, тоді перекрестя перспектив цих простих i_3 і k_3 дасть точку 9₀-перспективу точки 9;

2/ або знайти точку втечі простої 9.10; для чого ведемо мети проміня $OS/oc, o's'$ /рівнобіжного з простою 9.10; точка $C_0/c, c'$ буде точкою втечі цієї простої; переносимо її на перспективний рисунок в точку C_0 , сполучення якої з точкою 10₀ дасть перспективу простої 9.10.

Коли знайдемо перспективу усіх точок, сполучаємо їх простими і маємо перспективу всього помника.

Рисунки 361 і 362, таб. LXVII, уявляють одну й ту саму перспективу помника рис. 360 /таб. LXIII/, тільки виконані різними способами.

Справу рисування перспективи за допомогою точок втечі в де-яких випадках можна ще полегшити що до будівничих рисунків.

Коли маємо план та бічний вигляд якого небудь будинку, то в таких рисунках багато точок лежать на одному рівні, користування якими в де-якій мірі полегшують виконання самого рисунку.

Маємо план будівель /рис. 363, таб. LXVIII/, де які точки яких лежать на одному рівні. Для даного рисунку таких рівнів маємо сім /0, I, II, III, IV, V, VI/

Поставимо площу відбитку так, щоб вона перетинала план будови, тоді та частина перспективи, що лежить по між площею відбитку та оком, опиниться нижче вісі.

Знаходимо точки втечі $\phi/\phi, \phi'/i/i, i'/f/f, f'$ для простих рівнобіжних та прямих до вісі OX і ведемо через усі точки даної будови ці точки.

Такі прості будуть поведені на різних рівнях, так що сліди їх /перетин з площею відбитку/ теж опиняться на різних рівнях, хоча їх поземі мети будуть сходитися в одну точку.

Переходимо до рисування самої перспективи.

LXVIII / Рисуємо слід OX площі основи /рис. 364, таб. / позем ϕF , та визначаємо з попереднього рисунку головну точку H і точки втечі ϕ і F .

На сліді OX визначаємо, користуючись тем попереднім рисунком, сліди усіх простих $/a_c, b_c, c_c$ і т. д./, припускаючи поки що, що ці всі прості лежать у площі основи. Крім того ведемо прості, які відповідають рівням попереднього рисунку.

Получаємо сліди c_c і b_c з точкою втечі F і сліди a_c і K , з точкою втечі Φ . Одержимо перспективу основи і можемо знайти необхідні для нас відбитки усіх точок, що лежать в цій площі.

Прості Φa_c і $F b_c$ не перехрещуються над віссю, ця точка перехрестя лежить на їх продовженні, і де-яка частина перспективи опиниться нижче вісі OX на що вже була звернена увага при виборі положення площі відбитку.

Тепер знайдемо перспективу де-яких точок, що належать різним рівням.

Напр. точки 36 і 38 рівня I. Сліди простих, поведених через ці точки, лежатимуть не на вісі OX а на простій $I-I$, що визначає відповідний рівень. Це будуть точки c_1 і b_1 . Сполучення їх з відповідними точками втечі та встановлення прямих з відповідних точок основи визначить відбитки бажаних точок.

Те саме зробимо для точок рівня II, III, IV, V, і VI.

Для точки 16, що лежить на шостому рівні, відповідні сліди простих, поведених через неї будуть точки e_1 і q_1 . Перехрестя простих $e_1 F$ і $q_1 \Phi$ визначить відбиток точки 16.

Коли маємо відбитки усіх потрібних нам точок то сполучаємо їх простими, та одержуємо перспективу даного будинку.

Для рисування цієї перспективи положення ока над площею основи, як що рахуватися з мірилом, виране не натуральне. Ця перспектива має вигляд такий, що глядач дивиться на будинок згори, приблизно на рівні з банею. Але в дійсності глядач має певну висоту $/\sim 1,8 \text{ м}/$, тому для того, щоб рисунок одержав натуральний вигляд треба умістити лаше око нижче /до землі кет O_1 /.

Таке положення ока зовсім не змінює способу рисування перспективи; так само треба виконати всю працю з переносом слідів на відповідні рівні, сполучення їх з точками втечі, та остаточне сполучення відбитків усіх потрібних точок.

Така праця виконана на рис. 365, таб. LXVIII, де маємо перспективу того самого будинку тільки око поставлене приблизно на висоті для середнього зросту людини.

Цей рисунок уявляє собою те, що в дійсності побачила б людина, як би вона стояла на місці ока.

Для виконання такого рисунку треба точки втечі Φ і F сполучити зі всіма слідами простих. Одер-

жуються шматки простих, які мають дуже малий відхил одна від другої, тому точки перехрестя їх не завжди ясно визначаються.

Полекшенням виконання рисунку тут може бути пониження площі основи так, щоби око залишалося на своєму місці.

Тоді одержимо додатково ще перспективний план будинку, мовляв, поземий мет перспективи, користування яким дає змогу викинути рисування деяких простих, про які говорилося вище.

На рис. 373, таб. LXX, площа основи перенесена вниз на місце $O_1 X_1$.

Зазначаємо на сліду $O_1 X_1$ усі сліди простих, рівнобіжних та прямих з $O X$ або $O_1 X_1$. Положення ока не змінюється, тому і точки втечі F і F_1 та головна точка H не посунуться, а залишаються по старому.

Коли злучити сліди Q_c, V_c, C_c і т.д. з відповідними їм точками втечі, то одержимо поземий мет перспективи даного будинку.

Відбитки точок повинні лежати на прямих з відповідних точок поземого мету, а тому для визначення самих відбитків не треба користуватися двома простими, сполученими обома точками втечі, а одною та прямою.

Напр. для знаходження відбитку 2_c , сполучаємо відповідаючий рівню VI слід E_1 з точкою втечі F і з точки 2 ставимо прям.

Цей спосіб, хоча й трохи довший, але більш вірний, бо тут перехрестя простих та прямих ясніше визначає точку перехрестя.

На рис. 366, таб. LXXI маємо план та перекрій моста разом з рівчаком, себ-то приклад, де деякі площі виходять по за рисунок.

Перспектива цього рисунку виконана на рис. 367, таб. LXXI.

Спочатку праця провадиться так само, як і в попередніх прикладах, треба зупинитися над відбитками простих 3.4 та 2.5.

Ці прості збігаються у точці I. На перспективному рисунку маємо відбитки точок 3 і 2, відбиток точки 4 опиниться на площі рисунку, але відбиток точки 5 вийде за межі рисунку.

Треба за допомогою простих I.A, I.B та рівня VI знайти відбиток точки I і сполучити цей відбиток 1_c з точками 3_c і 2_c , що визначить відбиток точки 4_c .

§ 51. ОКРЕМІ ВИПАДКИ ПЕРСПЕКТИВИ

Иноді буває вимога нарисувати крім перспективи ще й відбиток у воді. Такі випадки бувають при ви-

креслюванні перспектив будов і ми зупинимося над ними.

Довжина відбитку у воді рівна довжині самого об'єкта, рахуючи ці виміри від поверхні води.

Маємо рівень води ВВ/рис.368, таб. LXIX/ об'єкт АС, відбиток його у воді АД, при чому АС=АД і візьмемо площу відбитку Р прямою до рівня води.

Перспективою АС буде a_0c_0 , а АД a_0d_0 . Знайдемо відношення по між цими величинами.

З подібних трикутників ОАС і Oa_0c_0 , маємо

$$\frac{a_0c_0}{AC} = \frac{Oa_0}{OA}$$

з подібних же трикутників ОАД і Oa_0d_0 , маємо

$$\frac{a_0d_0}{AD} = \frac{Oa_0}{OA}$$

Тому можемо написати:

$$\frac{c_0a_0}{CA} = \frac{a_0d_0}{AD}$$

понема $CA=AD$, то маємо, що $a_0c_0=a_0d_0$, себ-то ПЕРСПЕКТИВА ВІДБИТКУ У ВОДІ РІВНА ПЕРСПЕКТИВІ САМОГО ОБ'ЄКТУ.

Це дає змогу знайти відбиток у воді, для чого треба визначити на рисунку рівень води ВВ, визначити по земній перспективний мет об'єкту і прийняти точки цього перспективного мету за ті точки, що поділяють весь відбиток на дві рівних частини; згорі перспектива самого об'єкту, а знизу рівний йому по довжині відбиток у воді.

На рис.376, табл. LXXI виконано це завдання для будинку рис.363, таб. LXVIII

Спочатку визначено рівень ВВ та знайдено перспективний мет способом, указаним на рис.373, таб. LXX

Усі точки цього поземного мету, як було вказано вище, будуть точками поділу, тому відкладаємо вниз відтинки рівні віддаленню точок перспективного мету до відбитку самої точки.

Напр. для точок 4 і 5 відкладаємо вниз від точки 1 відтинки $1.2=1.4$ і $1.3=1.5$. Точки 2 і 3 будуть відбитками у воді точок 4 і 5.

Таким самим способом знайдені відбитки у воді решти точок, можна потім нарисувати межі води і тоді весь рисунок буде готовий.

Як і при виконанні кожної праці, так і при рисуванні перспективи, завжди треба починати з головного, труднішого, а потім переходити до другого, рядного або легшого. При виконанні другого рядних частин рисунку, простіше иноді виконувати цю працю на самому перспективному рисунку. Для того корисно

знати, як відбиваються на перспективному рисунку дійсні виміри особливо поземих та доземих простих.

Маємо відбиток $a_0 b_0$ /рис. 369, таб. LXIX/ відтинку AB , що лежить в доземій площі. Коли будемо пересувати цей відтинok так, щоб напрямok його залишався той самий, і щоб основа його B посувалася по простій поземій, то точка втечі F для відбитку цього шляху повинна лежати на поземій і нарешті основа опиниться на сліду основи OX в точці 2.

Сполучаємо точку втечі F з a_0 і одержимо відтинok 2.4. /2.4 || $a_0 b_0$ /.

Коли посуватимемо основу B по другому шляху теж поземому, який має точкою втечі точку F_1 , то так само одержимо відтинok 1.3 || $a_0 b_0$.

Ці два відтинки 1.3 і 2.4 рівні між собою і уявляють собою дійсну довжину даного відтинку AB при даній його перспективі.

Все що було сказано дає змогу по даній перспективі визначити дійсну довжину відтинків простих поземих, або доземих, а також навпаки зворотньо по даній дійсній довжині таких відтинків знаходити довжину їх відбитків.

Маємо відбиток b_0 точки B /рис. 370, таб. LXIX/ треба визначити мірило для відбитків доземих простих.

Для цього ведемо просту OF_0 / F_0 буде точка втечі простої поземі поведеної через B /і становлюємо в точці B прям до OX та відкладаємо на ньому наше мірило /напр. 1 см./ . Відбитки $b_0, 1_0, 2_0$ і т.д. будуть відбитками даного мірила /1 см./.

Можна знайти дійсну довжину відтинку ще другим способом.

Проста AB лежить у площі основи /рис. 371, таб. LXIX/, відбиток її буде $a_0 b_0$, точка втечі a_0 .

На простій AB візьмемо довільну точку C , відбиток якої буде точка c_0 .

З подібних трикутників aa_0c_0 і a_0c_0C маємо

$$a_0C : a_0c_0 = aa_0 : a_0c_0.$$

У цій пропорції маємо: a_0C - дійсна довжина відтинку AC ; a_0c_0 його перспектива, aa_0 - віддалення точки втечі простої AB від ока і aa_0c_0 - віддалення цієї точки втечі від відбитку точки C .

Перенесемо це все з простороні на рисунок.

З головної точки H /рис. 372, таб. LXIX/ ставимо прям до позема, відкладаємо на ньому $HO_1 = d$ і лучем a_0O_1 , з точки a_0 , як з осередка, закреслюємо дугу до перехрестя з поземом в точці T .

Сполучаємо точку T з точкою c_0 /відбиток точки C / і знаходимо перехрестя цієї простої в OX , точку D .

Тоді з трикутників c_0Ta_0 і a_0c_0D подібних

між собою, маємо:

$$a_c D : a_c c_0 = a_c \pi : a_c c_a.$$

В цій пропорції, як як і в попередній, маємо: відтинки $a_c c_0$ - буде перспективою відтинку AC , $a_c \pi$ - віддалення точки втечі від ока, $a_c c_a$ - віддалення точки втечі від відбитку точки C , тому висновок, що

$$a_c D = a_c C \text{ /попереднього рисунку/},$$

себ-то дійсній довжині відтинку AC
 Допомога точка π , яка дала нам змогу визначити точку D , себ-то дійсну довжину відтинку AC , називається **ТОЧКОЮ ПОДІЛУ** даної точки втечі.

Ці точки поділу в багатьох випадках бувають корисними для рисування перспективи.

Напр. треба знайти перспективу доземної стіни як що маємо де-які її виміри /рис. 384, табл. LXXII/

Відтинки 1.2, 3.4 і 5.6 хай будуть простінки по між вікнами; 2.3 і 4.5 самі вікна. Точкою втечі для простих поземних межових для даної стінки буде F .

Проста $F6$ буде відтинком основи стінки. Для того, щоб перенести точки 1, 2, 3 і т.д. знаходимо точку поділу для точки втечі F .

Ставимо прями з точки H до позема, відкладаємо $H O_1 = 8$, закреслюємо з F дугу лучем $F O_1$, і маємо точку поділу π .

Сполучаємо точки 1, 2, 3 і т.д. з точкою поділу π , знаходимо відбитки $1_0, 2_0, 3_0$ і т.д. цих точок і закінчуємо рисування перспективи даної стінки.

Для простих прямих до площі відбитку точкою втечі буде головна точка H , а точками поділу будуть точки D, D_1 , що лежать на обводі кола віддалень на поземові.

Напр. треба нарисувати перспективу поземних простих, рівнобідних з віссю OX так, щоб віддалення по між ними виносило певну величину /напр. 2 см. на рис. 385, таб. LXXII/.

Сполучаємо одну з точок /напр. 1/ з головною точкою H , простою $1H$ і точку поділу D_1 з рештою точок; в перехресті матимемо точки a_0, b_0, c_0 і т.д., які і визначають бажані для нас прості.

Прості $D_1 4, D_1 2$ і т.д. мають у простороні нахил до площі відбитку в 45° , а проста $1H$ є відбитком простої, прямої до площі відбитку.

Так само, як що нам треба знайти перспективу поземної площі, поділеної на квадрати певної величини, то це легко виконується за допомогою точок поділу, що ясно видно з рис. 374, таб. LXX.

Розв'язуємо ще таке завдання: нарисувати перспективу куба, з боком Q , так щоб один з вершків його має відбитком точку 1_0 /рис. 375, таб. LXX/.

Постavimo куб на площу основи так, щоб рубли його основи були рівнобіжні і прамі до OX . Хай точки ϕ і τ будуть відповідні точки втечі для цих рубів.

Знайдемо для обох точок втечі точки поділу Π_1 для P і Π_2 для ϕ . Сполучаємо точку I_0 з точками Π_1 і Π_2 і визначимо точки 9 і 10; від цих точок відкладаємо $II.9 = IO.12 = a$. Знайти перспективу основи вже не трудно.

По прикладу рис. 369, таб. LXIX знаходимо точку 5 і разом з тим перспективу основи куба і усю його перспективу.

Переполювинивши кут $\phi O \tau$ матимем точку ϕ , через яку повинна пройти одна з косин основ куба.

Спосіб рисування перспективи за допомогою точок втечі буває часто не до виконання, бо сліди прости можуть опинитися по за межами рисунку; в таких випадках відбиток такої точки треба знаходити за допомогою способу точок.

Але, не рахуючи того, що спосіб точок більш забарний, не можна завжди ужити необхідне віддалення. Рисунок, з якого рисується перспектива, уявляє собою завжди зменшений вигляд предмету, такої і віддалення не є дійсне, а теж зменшене. Тому ми в дійсності маємо перспективу не самого предмету, а його моделі.

Цьому можна в де-якій степені допомогти, як що збільшувати одержану перспективу, що можна виконати двома способами: або збільшити віддалення, або збільшенням відбитку. Можна також сполучити ці два способи.

Побільшення відбитку досягається тим, що залишивши око на своєму старому місці, переставляють площу відбитку на інше місце, з цим, зрозуміло, щоб нова площа відбитку була рівнобіжна з попередньою.

Як що маємо /рис. 382, таб. LXXI/ просту AB , то при даному положенню ока / O /, та площі відбитку / P /, відбитком даної простої буде $a.b$.

Перенесемо площу відбитку в нове положення P' з тим, щоб попереднє віддалення δ / ON перейде у δ' (ON_1)

Новим відбитком буде $a'.b'$.

Знайдемо відношення по-між відбитками та віддаленнями.

З подібних трикутників $Oa.b$ і $Oa'.b'$ маємо:

$$a.b : a'.b' = ON_1 : ON = \delta : \delta'$$

себ-то відбиток простої, при перенесенні площі відбитку на віддалення δ' , змінюється у відношенні $\delta' : \delta$.

З цього ясно, що перенесення площі відбитку на більше віддалення від ока, побільшує перспективу у відношенні $\delta' : \delta$.

При такому перенесенні площі відбитку на місці залишається око O , головна точка, хоча вона й

змінює своє положення у простороні, на рисунку залишається стара. Ця точка тепер буде тою точкою, до якої пристосовується уся перспектива. Правда сліди простих не будуть відповідати дійсним слідам /перетину простої з новою площею відбитку/, але тут приймається як би одночасне змінення усього простору, в якому знаходиться об'єкт.

Як було сказано головну роль при такому побільшенні відіграє головна точка; кожна точка /А/ об'єкта ніби переноситься в нове положення на промінню НА в точку А', при чому $HA':HA = \delta_1:\delta$; те саме відноситься й до відбитків цієї точки А, він переходить в нове положення А', при чому $Ha':Ha = \delta_1:\delta$ і лежить на продовженні, або на самій простій Нао.

Таким робом одержимо перспективний відбиток об'єкту побільшеного в мірілі $\delta_1:\delta$, що знаходиться на побільшеному у відношенні $\delta_1:\delta$ віддаленні від площі відбитку, на який ніби дивляться новим оком, яке лежить на головному промінню, при віддаленні δ_1 , при чому старий відбиток треба побільшити, при головній точці, якої точці подібності, у мірілі $\delta_1:\delta$.

Бувають випадки, коли точка втечі опиниться по за межами рисунку. Тоді трудно рисувати й саму перспективу. Правда маємо способи /§ 1/, які дають змогу сполучати реальні точки з точками безконечно віддаленими, але ці способи трохи забарні, а тому спробуємо використати тут присунення площі відбитку до ока.

Наприклад маємо фігуру /рис. 377, таб. LXXI /; при даному положенню ока О, точка Ф виходить поза-межами рисунку.

Припустимо, що усе зменшено в де-якому певному відношенні /в чотирі рази на рисунку/. Тоді все повинно зблизитися до точки подібності, - головної точки Н. Око О перейде в положення О₁ / $O_1b = \frac{1}{4}Ob$ / точка втечі Ф перейде в точку Ф₁ / $\phi_1b = \frac{1}{4}\phi b$ /.

На рис. 378, таб. LXXI слід основи ох перейде в положення О₁ х₁ / $Hb_1 = \frac{1}{4}Hb$ / . По попередньому нові сліди повинні лежати на вісі О₁ х₁ і на простих 1Н, 2Н і 3Н, себ-то в точках 1₁, 2₁ і 3₁ а точка втечі Ф перейде в Ф₁.

На засаді того, що новий перспективний рисунок повинен бути подібним до старого, то з цього виникає рівнобіжність простих, що сполучає нові сліди з точкою втечі, з простими, які сполучали старі сліди з старою точкою втечі.

Тому сполучаємо точки 1₁, 2₁, і 3₁ з точкою втечі Ф₁ і через відповідні точки 1, 2, 3 ведемо прості рівнобіжні з простими 1Ф, 2Ф, 3Ф, і це будуть відбитки простих при незмінених даних.

Тільки що були розглянуті випадки перенесення площі відбитку, та побільшення усього рисунку;

тепер роздивимось той випадок, коли площа відбитку залишається на своєму положенню, а змінимо положення самого ока.

При такому зміні положення ока /рис. 379, таб. LXXI/, головна точка H залишається на своєму місці.

Нове положення точки втечі d' простої AB так як й в попередніх випадках, буде лежати на продовженні простої Ha і на віддаленню Ha' , яке можна знайти з відношення

$$Ha' : Ha = HO' : HO = \delta_1 : \delta$$

Теж саме відноситься й до слідів простої a і a' , вони теж лежать на одній простій з головною точкою H і тут має місце те саме відношення

$$Ha' : Ha = \delta_1 : \delta$$

Користуючись перспективою простої $/b, b' /$ перспективою точки $c /c /$, що лежить на цій простій, можна знайти перспективу цієї простої і точки при зміні віддалення.

Нове положення точки втечі b' буде лежати на продовженні простої Hb на віддаленню Hb' , що підлягає відношенню $Hb' : Hb = \delta_1 : \delta$.

Треба взяти під увагу, що в даному випадку площа відбитку залишається на старому місці, тому всі сліди простих теж залишаються, а також й слід b ; сполучивши точку b з b' одержимо перспективу даної простої при новому положенні ока.

Для того, щоб знайти нову перспективу точки c , сполучаємо точку c з точкою H і перекрестя цієї простої з новою перспективою даній простій; точка c' буде новою перспективою точки c .

Якщо через точку c /рис. 380, таб. LXXI/ провести просту і через ці дві прості провести площу Q , то тоді по даному a /сліду другої простої/ треба визначити її точку втечі a' , так щоб a, b, c, a', b', c' /рис. 380, таб. LXXI/

Знайдемо нову точку втечі a' другої простої і одержимо тоді нову просту втечі Q' площі Q при нових умовах.

На рис. 381, таб. LXXI маємо побільшення усіх елементів рисунку у простороні в п'ять разів куба, що нарисований був на рис. 375, таб. LXX.

Головна точка H і площа основи і слід OX залишаються на своїх місцях, точки ж втечі f і ϕ і точки поділу Π_1 і Π_2 відійдуть на віддалення в п'ять разів більше, так що точки f, ϕ, Π_1, Π_2 опиняться по за межами рисунку; тому для користування ними вжитий засіб рис. 378, таб. LXXI.

Для того, щоб знайти новий відбиток точки I , по перше сполучаємо точку I з H ; на цій простій повинен лежати новий відбиток I' .

Точка IO залишається на своєму місці, спо-

лучаємо її з новою точкою втечі π_1 і визначимо таким чином точку 1.

Тепер поділяємо віддалення 13H на п'ять рівних частин /точка 13 і 14 залишаються старі/ і першу від H точку поділу α сполучаємо з F_1 , а через точку 1 ведемо рівнобіжну з нею. Це буде нова перспектива руба куба.

Таким самим способом знайдена й решта точок нової перспективи.

Ця перспектива, зрозуміло, буде більшою за попередню.

Крім цих двох способів змінення відбитку та змінення віддалення, може бути вжитий ще один спосіб, при якому ці два способи сполучаються, а саме одночасно змінюють й відбиток і віддалення.

При зміні відбитку змінюється положення усіх слідів, точок та протиставлених втечі, при зміні ж віддалення навпаки залишаються у спокою сліди протиставлених, та площ.

Спочатку припустимо, що змінено віддалення, а саме в m разів, себ-то кожна точка і проста втечі відійдуть від головної точки H на віддалення в m разів більше.

Потім цю одержану перспективу, заміняємо по першому способу в n разів, себ-то всі віддалення від точки H треба побільшити в n разів, разом з тим й нове головне віддалення / $m \cdot n$ /; тому гуртом матиме нове головне віддалення побільшеним в $m \cdot n$ разів і виносить воно $m \cdot n \cdot 8$.

Що торкається самого об'єкту, то при першій зміні, він залишається не змінений, але при другій зміні об'єкт одержує n -кратне лінійне побільшення.

Зрештою одержимо n -кратне лінійне побільшення відбитку об'єкта, що знаходиться на віддаленні від площі відбитку в m разів більшому за попереднє, при головному віддаленні, побільшеному в $m \cdot n$ разів.

Кожна нова точка втечі буде віддалена від головної точки H в $m \cdot n$ разів далше, ніж первісні точки втечі. Що торкається слідів, то вони міняють своє положення лише у відношенні n . Також віддалення по-між рівнями збільшуються лише в n разів, також як й кожне віддалення, що лежить на площі відбитку.

Для прикладу нарисована перспектива рис. 364, таб. LXVIII, при чому взято для m і для n значення 1,25. На жаль площа рисунку не дає змоги зобразити більше побільшення.

На рис. 383, таб. LXXII маємо віддалення $Hb_1 = 1,25 Hb$ з рис. 364, таб. LXVIII, віддалення $Hb = 4,25 \cdot 1,25 Hb$; в тій самій пропорції змінюються віддалення точок втечі $F_1, \phi_1 / F, H = 1,25 \cdot 1,25 FH; \phi, H = 1,25 \cdot 1,25 \phi H$. Усі рівні мають побільшене в 1,25 разів віддалення

від сліду площі основи.

Одержаний рисунок перспективи буде збільшений в $m.n = 1,25 \cdot 1,25$ разів /1,56 разів/.

Як проведена уся праця по виконанню рисунку - ясно і не вимагає пояснень.

§ 52. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМУ МЕТУ- ВАННІ.

В. § 49 звернута була увага на визначення простих та площ не рівнобіжних з площею відбитку; тому в загальних випадках цього параграфу зупинимося головним чином над таким положенням простої та площі.

Точка втечі, та слід простої зрозуміло повинні лежати на відповідних слідах та простих втечі площ, в яких лежать ці прості.

Тому коли маємо дві прості, то необхідна умова того, щоб вони лежали в одній площі /перехрещувалися/, є та, що прості, які сполучають сліди цих простих, а також точки втечі їх, повинні бути рівнобіжними між собою.

Це може бути також відзнакою того, що дані прості перехрещуються, або мимобіжні.

Наприклад прості, визначені на рис. 350, таб. LXXI, мимобіжні, бо площа S в якій лежить проста $AC/a_e a_e$ не проходить через просту $BD/b_e b_e$ і навпаки площа R проходить через просту BD , а через просту AC не проходить. Відзнакою цього маємо те, що хоча слід a_e лежить на сліді R_e , але відповідна точка втечі a_e не лежить на простій втечі R_e . Те саме можна висловити й про площу S .

Як що треба через дві дані рівнобіжні прості /рис. 351, таб. LXXI/ повести площу, то сполучаємо сліди a_e і b_e простою; це буде слід S_e площі S і через спільну точку втечі a_e/b_e ведемо просту $S_e \parallel S_e$; це буде проста втечі площі S , яка поведена через дані рівнобіжні прості.

Проста перетину двох площ визначається тим, що слід її та точка втечі мусять належати одночасно слідам, та простим втечі обох площ, се-то перехрестю тих простих.

Як що маємо дві площі $S/S_e, S_e/1$ $R/R_e, R_e/1$ то проста їх перетину /рис. 347, таб. LXV/ визначається так: перехрестя слів S_e і R_e дає слід C_e простої перетину, а перехрестя простих втечі S_e і R_e дасть точку втечі C_e простої перетину, а самий відбиток цієї простої буде відтиск $C_e C_e$.

Площі, що мають свої сліди та прості втечі

рівнобіжні, перетинаються, як про це вже було висловлено й при прямому метуванні, по простій рівнобіжній з цима слідами. Так що тут відомий вже з гори напрямок простої перетину, треба мати лише одну її точку.

Для розв'язання такого завдання /рис. 352, таб. LXV/ користуємося довільною допоможною площею T / T_c, T_e /, яка перетинає площу S по простій $a_c a_e$, а площу R по простій $b_c b_e$; перехрестя цих відбитків, дасть точку C , яка належить одночасно площам S, R і T і тому належить до простої перетину. Проста, поведена через точку C , рівнобіжно з слідами / S_c і R_c / і простими втечі / S_e і R_e / площ S і R , дасть відбиток простої перетину даних площ.

Для того, щоб знайти точку перетину простої з площею, користуємось, по зразку попередніх розділів, допоможною площею, поведеною через дану просту. Перехрестя простої перетину цих площ з даною простою визначить необхідну нам точку перетину простої з площею.

Як що треба знайти перетин простої $a_c a_e$ з даною площею S / $S_c S_e$ /, то через дану просту /рис. 348, таб. LXV/ ведемо довільну допоможну площу R / R_c, R_e /, яка перетинає дану площу S по простій $b_c b_e$, а точка m буде відбиток точки перетину даної простої з даною площею.

На рис. 353, таб. LXV маємо дві простих $a_c a_e$ і $b_c b_e$, відбитки яких утворюють одну спільну просту.

Для розв'язання цього завдання ведемо через кожену просту довільні допоможні площі /через просту $a_c a_e$ площу R , а через просту $b_c b_e$ площу S /, простою перетину цих двох площ буде проста $c_c c_e$, точка перехрестя цієї простої з даною, точка d буде відбитком перехрестя даних простих.

Завдання повести площу через дану просту і дану точку /рис. 354, таб. LXV/ виконується так.

Проста дана відбитком $a_c a_e$, а точка своїм відбитком C , та визначаючою простою $t_c t_e$.

Для розв'язання цієї задачі ведемо через дану точку C просту рівнобіжну з даною простою $a_c a_e$. Ці дві прості повинні мати спільну точку втечі; тому відбиток її буде проста $c_c a_e$. Ці дві прості визначають бажану нам площу, а для визначення слідів цієї площі треба знайти слід простої $c_c a_e$.

Прості $t_c t_e$ і $c_c a_e$ лежать в одній площі R , головні лінії яких визначаються так: R_e проходить через точки втечі a_e і t_e , а слід R_c рівнобіжний з R_e проходить через точку t_c . Перехрестя сліду R_c з відбитком $c_c a_e$ дасть слід b_c цієї останньої простої.

Тепер сполучаємо точки a_c і b_c і це буде слід

S_c площі, яку ми шукаємо, а проста втечі S_e буде проста, рівнобіжна з слідом S_c , поведена через точку a_e .

Площа $S/S_c, S_e$ / проходить через дану просту і через дану точку.

Розв'язання завдання повести через дві даних точки просто виконується так /рис.357, таб. LXVI /.

Маємо точку a_e /визначаюча проста t_c, t_e / і друга точка b_e /визначаюча проста t_c, t_e /. Геометрично відбиток простої, що сполучає ці дві точки, буде $a_e b_e$. Але при центральному метуванні цього маю, треба визначити слід та точку втечі цієї простої.

Точка a_e /або b_e / лежить разом з визначаючою простою t_c, t_e /або t_c, t_e / в одній площі, в якій також лежить і проста, що сполучає данні точки. Визначимо, користуючись попереднім прикладом, елементи цієї площі S .

Сполучаємо t_c з t_e - це буде проста втечі S_e площі; слід S_c мусить проходити через t_c рівнобіжно з S_e . Сліди усіх простих, що лежать у площі S , опиняться на сліду S_c , також і простої, визначеної відбитком $a_e b_e$; це буде точка C_c .

Для визначення елементів простої $a_e b_e$ ведемо нову допоможну площу R , в якій також лежить ця проста. Слід простої $a_e b_e$, а також її точка втечі повинні лежати на сліду R_c і простій втечі R_e , площі R . Для визначення сліду R_c сполучаємо точки C_c з t_c а для визначення простої втечі R_e , через точку t_e ведемо просту $R_e \parallel R_c$.

Точки: d_c буде слідом, а d_e точкою втечі простої AB , що сполучає дві даних точки A і B .

Знайти перетин довільної площі з простою рівнобіжною з площею відбитку не уявляє зараз жадних труднощів.

Маємо /рис.356, таб. LXVI / довільну площу R / R_c, R_e / і просту BC / b_c, c_e /, що визначена площею S / S_c, S_e /, в якій ця проста лежить. Проста AC рівнобіжна з площею відбитку.

За допоможну площу можемо тут взяти саму визначаючу площу S , бо ця площа поведена, по завданню через дану просту.

Перетин площ S і R буде проста $d_c d_e$, перехрестя якої з відбитком даної простої дасть відбиток a_e точки перетину даної простої з даною площею.

За визначаючу просту для точки A/a_e /можемо взяти просту $a_e a_b$.

На рис.358, таб. LXVI розв'язане завдання: знайти перетин довільної простої / $a_c a_e$ / з площею, рівнобіжною з площею відбитку і яка визначена точкою b_e та визначаючою простою t_c, t_e .

Для розв'язання задачі через дану просту ведемо довільну площу $S/S_c, S_e$ / і знаходимо просту перо-

тину площі S з даною. Для цього останнього ведемо через A/a визначаючу просту $t_c t_e$ допоміжну площу $R/R_c, R_e$. Перетин площі R і S буде проста $c_c c_e$, перетин площі R з даною буде проста $d_c d_e$, а перетин площі S з даною - проста $d_c c_e$. Точка e буде відбитком точки перетину даної простої з даною площею, рівнобіжною з площею відбитку.

Тепер поведемо площу /рис. 359, таб. LXVI/ через дану точку A/a /визначаюча проста $t_c t_e$ / і через просту BC рівнобіжною з площею відбитку $b_c c_e$ і визначаюча площа S_c, S_e .

Ведемо через визначаючу просту $t_c t_e$ довільну площу $R/R_c, R_e$ і знаходимо перетин цієї площі з даною простою BC . Це буде точка e . Сполучаємо точки a і e простою, та визначаємо слід і точку втечі цієї простої f_c, f_e .

Площа, яку нам треба знайти, визначається слідом і простою втечі, які проходять через точки f_c і f_e і повинні бути рівнобіжними з слідом і простою втечі визначаючої площі S . Це буде площа $Q/Q_c, Q_e$.

Перейдемо тепер до розв'язання де-яких задач з визначенням точних вимірів, але перед тим зупинимось над де-якими питаннями центрального метування.

Коли маємо площу відбитку P та площу основи H /рис. 371, таб. LXXI/ і точку D , то ту точку можна зметувати на площу основи H прямим метуванням у точку d $Dd \perp$ площі H .

Знайдемо відбитки точок D і d , для чого поведемо метові проміня OD і Od , перетин яких з площею P дасть точки a /відбиток точки D / і a' /відбиток точки d /. Ця точка a , яку будемо називати відбитком мету точки, в де-яких випадках допоможе при розв'язанні задач.

Проміння OD і Od лежать, разом з простою od , в одній площі, прямій до площі основи, бо Dd і Od - прямі до площі H .

Ця площа і площа основи H перетинаються площею P , прямою до площі H , по простих прямих між собою /19 § 1/, тому $a, E \perp o\alpha$; разом з тим зрозуміло, що a і a' лежать на тій же простій a, E .

З цього висновок, що відбиток точки, та відбиток мету точки лежать на спільному прямій до вісі $o\alpha$.

Кожну просту теж можна визначати через відбиток простої, та відбиток мету простої.

При такому визначенні маємо крім відбитку кожної точки простої, ще й відбиток мету цієї точки, які лежать на спільному прямій до вісі.

Мет сліду простої лежить на площі основи H , а разом й на площі відбитку P , себ-то на простій їх перетину на вісі OX . Цей мет буде разом з тим й відбитком мету цього сліду. Тому, коли маємо відбиток простої $/a, a' /$ і відбиток мету $/a', a' /$ цієї простої, то не трудно визначити елементи її сліду.

Відбитком мету сліду /рис.386, таб. LXXII/ буде точка перехрестя відбитку мету простої з віссю OX , точка a' , а відбитком сліду, або самим слідом буде та точка самого відбитку простої, що лежить на одному прями до OX з точкою a' , то буде точка a .

Мет даної простої лежить в площі основи H ; то точка втечі цього мета повинна лежати на поземі H, H_1 . Разом з тим через цю точку втечі повинен проходити відбиток мету даної простої, себ-то точка втечі відбитка простої /або відбиток мету точки втечі даної простої/ лежить на перехрестю позема H, H_1 з відбитком мету простої, - це буде точка a' .

Таким робом по даних відбитку простої та відбитку її мету, можна визначити необхідні елементи цієї простої - слід і точку втечі, а також відбитки метів цих точок.

На рис.386, таб. LXXII крім простої a, a' нарисовані ще точка $C /c, c' /$, що лежить на даній простій, точка $D /d, d' /$, яка лежить за площею відбитку P /як і точки $S, B /$ і точка $E /e, e' /$, що знаходиться перед площею відбитку P .

Відбитки точки збігаються з відбитками її мету тільки тоді, коли точка лежить на площі основи або на промінню прямому до площі основи / Oo , рис 371, таб. LXXI /.

Для точок, що лежать на площі відбитку P , відбитки їх метів лежать на вісі OX .

Площі теж легко визначати вказаним способом.

Наприклад маємо дві перехрещені прості a, a' , a', a' і b, b' , b', b' /рис.387, таб. LXXIII /; треба через них повести площу.

Слід площі та її проста втечі повинні проходити через відповідні точки прости, які лежать в цій площі. Тому проста a, b буде слідом S , а проста a', b' - простою втечі S' цієї площі.

Можна ще знайти відбиток простої перетину даної площі з площею основи /основний слід/. Цей слід лежить в площі основи, а його точка втечі лежить на поземі H, H_1 ; це буде точка f , перехрестя S з H, H_1 , а слід цього сліду лежить на вісі OX , себ-то в точці перехрестя S з OX , - точка f' . Тому основний слід даної площі буде проста f, f' - проста S .

На цьому сліду обов'язково повинні лежати точки c і d перехрестя відбитків даних прости з

відбитками їх метів.

Коли схочемо визначити довільну точку ϵ , яка лежить в даній площі S , то по вибраному відбитку мету e_1 знаходимо відбиток e_0 так: ведемо $e_1 \parallel OX$, $e_1 \parallel S_c \parallel S_b$ і $e_1 \parallel OX$. Можна навпаки взяти e_0 і відшукати таким самим способом e_1 .

В попередньому параграфі було вказано, як знаходити за допомогою точок поділу, дійсні величини відтинків прости, що лежать в площі основи.

Тепер знайдемо дійсну величину відтинка, визначеного відбитком, та відбитком мету.

Маємо відтинок $AB/a, b, a', b'$. Знаходимо точку втечі /рис. 382, таб. LXXIII/ цього відтинку. Це S_c де точка f /рис. 382, таб. LXXIII/ є точкою поділу для відбитку мету f сполучаємо точку Π з точками a, a', b, b' . Точка Π є точкою перекрестя прости a, a' і b, b' з віссю основи OX , ставимо прямі $1, 1'$ і $2, 2'$ до перекрестя з простими a, a' і b, b' . Відтинок $1, 2$ буде геометрично уявляти дійсну довжину даного відтинку AB .

Якщо точку f сполучимо з точкою b , продовжимо цю просту до перекрестя в точці c з прямою a, a' , сполучимо точки Π і c простою, яка перекреститься з прямою $2, 2'$ в точці c_1 , то проста c, c_1 теж буде l , а відтинок c, c_1 уявляє різницю віддалень точок A і B від площі основи H .

Цю задачу можна розв'язати ще другим способом /рис. 389, таб. LXXIII/, як що згори визначені слід S_c і точка втечі S_c даного відтинка.

Лучем HC закреслюємо дугу до перекрестя з площею H, H_1 в точці c . Сполучаємо точку c з $O_1/OH = 8, 4 \cdot 10, 90^\circ$. Через даний відтинок ведемо довільну площу $S/S_c, S_c/$ та від точки S_c на простій втечі відкладаємо $c, \Pi = cO_1$. Точку Π сполучаємо з точками a, a' і b, b' і одержуємо точки A, B перекрестя цих прости з слідом S_c . A, B - дійсна довжина відтинку AB .

Тут виконано обертання даного відтинку в площі S так, щоб він злявся з слідом S_c .

Перейдемо тепер до питання злиття даної площі з площею відбитку, питання до якого в наступному часто прийде́ться звертатися.

Маємо площу $S/S_c, S_c/$ на ній точку A/a , визначаючи проста b, b' . Для розв'язання цього питання повинно бути так, щоб визначено положення ока O , себ-то дані H і θ /рис. 390, таб. LXXIII/.

З точки A ставимо прям до сліду S_c . Точку втечі таких прости, прямих до сліду S_c буде точка f , яка одержиться від перекрестя прямих $Hf/H \perp S_c/$ з простою втечі площі S . До точки f повинні збігатися відбитки цих прямих до сліду S_c , а також й прям з точки A . Проста a, f - буде відбитком цього

пряму. Злите положення точки A буде лежати на прямій з точки A_1 /перехрестя $f\alpha$ з S_c / до сліду S_c .

Знайдемо тепер злите положення ока. Для цього відкладаємо $f1 = H0 = 8$, сполучаємо точку 1 з H і відкладаємо на прямій fH відтинок $0.f = H1$. Точка O буде злите положення ока.

Сполучаємо точки O з A і визначимо тим точку A злите положення точки A .

Таким самим способом знайдемо злите положення точки J / i /. визначаючи проста K_c, K_e /. Точка K_e сполучена з точкою O , з точки K_c поведена проста $K_c J$. $\parallel O, K_e$, її перехрестя з продовженням прямої H дасть точку J .

Цю точку можна знайти ще в такий спосіб.

Ведемо через i просту рівнобіжну з елементами площі $S/S_c, S_e$ /; точка M буде відбитком точки, яка лежить на прямій до S_c , бо лежить на відбитку цього прямої. Злите положення точки M лежить на перехресті продовжень простої $a.m$ і пряма A, a_1 , в точці M . Проста M, J $\parallel S_c$ визначить точку J .

Злите положення точки S/g / можна визначити так, як це зроблено для точки A/a /, а саме: сполучаємо точки f з e , визначаємо точку g , ставимо прям g, G до S_c і сполучаємо точки g з O і маємо точку G .

Як що на продовженню прямої fH від точки O відложимо відтинок $2.3 = O, f$ і через точку 3 поведемо просту S_3 рівнобіжну з S_c , то одержимо злите положення простої знику S_3 даної площі S .

Точку знику B_3 простої B_c, B_e в злитому положенню знайдемо, як що сполучимо точки O з B_e і через точку B_c поведемо просту B_c, B_3 $\parallel O, B_e$.

З цього всього можна вивести деякі твердження, а саме:

Відбиток та злите положення кожної точки даної площі лежать на одній простій з O .

Злите положення простої даної площі S рівнобіжне з простою, поведеною через точку втечі цієї простої і через злите положення ока / B_c, O, B_e, B_3 /.

Злите положення простої знику даної площі S знаходиться від сліду S на віддаленні рівному віддаленню злитого положення ока O від простої втечі S_e і рівнобіжне з S_c .

Для пояснення того, що було висловлено, розв'яжемо приклад: маємо відтинок $1.2/1.2, 1:2$ /; треба нарисувати відбиток квадрату, площа якого похиблена до площі відбитку під $\alpha = 60^\circ$ і відтинок 1.2 буде його боком /рис. 391, таб. LXXIII/.

Спочатку знаходимо елементи площі S , в якій лежить даний квадрат.

Площа S утворює кут $\alpha = 60^\circ$ з площею відбитку; тому її проста втечі буде дотичною до кола, осередка

H , лука $\tau = 8. \text{сг} 60^\circ$, себ-то $H.5$.

Знаходимо точку втечі та слід простої, на якій лежить відтіннок 1.2. Це будуть: точка втечі a_e , a'_e і слід a_s, a'_s .

Через точку a_e ведемо дотичну до кола; це буде проста втечі S_e площі S . Слід S_s цієї площі проходить через точку a_s і рівнобіжний з S_e .

Знаходимо злиге положення O_o ока O . Для цього на простій втечі S_e від точки дотику b / $H.1$ S_e / відкладаємо $b_s = H.O_s = 8$. Від точки b відкладаємо $bO_s = H_s$. Це буде злиге положення O_o ока O .

Злиге положення відтіннка 1.2 повинно бути рівнобіжним з простою O_o a_e і проходити через точку a_s . Точки 1 і 2 визначаються простими $O.1$ і $O.2$.

Рисуємо квадрат 1.2.3.4 і повертаємо його назад.

Бік 3.4 рівнобіжний з боком 1.2, тому має спільну точку втечі a_e , а слід a'_e . Проста $a_s a'_e$ буде його відбитком, а прості $O.3$ і $O.4$ визначають відбиток 3. і 4. точок 3 і 4.

Відбиток заданого квадрату буде 1.2.3.4..

Розв'яжемо ще таку задачу: нарисувати відбиток правильного трикутника, який лежить в площі основи і бік якого визначений відбитком 1.2. /рис.392, таб. LXXIII /.

Площа основи має слідом Ox , а простою втечі H, H_s . Головна точка H - це точка втечі прямих до Ox .

Злиге положення бока 1.2 повинно проходити через слід його, точку a_s ; напрямком цього злигеного положення буде рівнобіжний напрямку $a_e O_s / a_s 2 \parallel a_e O_s$; тоді прості $O.1$ і $O.2$ визначають злігті точки 1 і 2.

Можна ці злігті точки знайти ще другим способом, а саме: ведемо через точку 2 /або 1/ прям до Ox , відбиток якого буде проста H_s , а прям $b_s 2 \perp Ox$ буде злиге положення цього прями і визначить точку 2 і просту $a_s 2$.

На боці 1.2 рисуємо правильний трикутник 1.2.3 та повертаємо точку 3 назад, для чого ведемо через точку 3 просту $3 a_s \parallel a_s 2$, які будуть мати спільну точку втечі a_e . Проста $a_s a_e$ є відбитком простої 3. a'_e , а проста $O.3$ визначить точку 3., відбиток точки 3.

Трикутник 1.2.3. є відбитком трикутника 1.2.3.

Завдання на опрeдiлення кута можуть бути розв'язані користуючись лише точками та простими втечі. Кут створений промінями поведеними через око до точок втечі той самий, що творять прості у простороні.

Наприклад треба знайти кут поміж двома простими /рис.393, таб. LXXIII/, то тут вистарчать дві точки втечі a_e і b_e /цих простих, головна точка H і віддалення 8 .

Спускаємо з точки H прям на просту $a_e b_e$ від

точки C відкладаємо $cd = \delta$ і на прямій CH відкладаємо $CO_0 = Hd$. Точка O_0 буде злита з площею відбитку ока O .

Сполучаємо O_0 з a_e і b_e ; подікут $\alpha = a_e O_0 b_e$ буде визначати кут по-між даними простими.

Коли треба знайти точку втечі нормалі до даної площі /рис. 394, таб. LXXIII/, то з ока O ставимо прям до площі, яка проходить через просту втечі та саме око. Цей прям зрозуміло буде прямим до простої, що лежить у даній площі і є прямою до S_e . Як що ми це все зіллємо з площею відбитку, то визначимо потрібну нам точку втечі нормалі до S .

З головної точки H спускаємо прям на S_e , з точки H становимо прям до $a_e H$ і переносимо віддалення δ у точку O_0 . Сполучаємо O_0 з a_e і ставимо до $O_0 a_e$ прям $O_0 n_e$, який визначить точку n_e - точку втечі нормалі до площі S .

Цей рисунок 394 може бути вжитий, ако розв'язання зворотньої задачі: знайти просту втечі нормальної до даної простої площі.

Як що треба, повести /рис. 395, таб. LXXIII/ через дану точку a_0, a_0' площу прям до даної простої $b_e b_e'$. $b_e b_e'$, то тут ведемо спершу площу прям до даної простої. Для того сполучаємо H з b_e , ставимо прям HO_0 і HN_e , відкладаємо $HO_0 = \delta$ і будуємо прямокутний трикутник $b_e O_0 c_e$, який визначить точку c_e . Прям через c_e до HN_e визначить просту втечі S_e площі прямої до даної простої.

Для того, щоб знайти слід цієї площі, ведемо через дану точку a_0, a_0' довільну просту $d_e d_e', d'_e d_e'$, знаходимо слід d_e цієї простої і через точку d_e ведемо $S_e \parallel d_e$ - слід площі S .

Проста $g_e g_e'$ буде відбитком, перетину площі з площею основи. Трикутник $a_0 e_0 a_0'$ упевнює що точка A лежить у площі S .

§ 53. ПЕРСПЕКТИВА КОПА Й КУПІ.

Для того щоб знайти відбиток кола, треба повести до усіх його точок проміння. Ці проміння створюють конічну поверхню, стіжок, перетин якої з площею відбитку дасть відбиток самого кола.

З § 35 відомо, що стіжок перетинається з площею, або по еліпсу, або по гіперболі, або по параболі.

Тому відбитком кола може бути еліпс, гіпербола, або парабола, в залежності від положення самого кола відносно ока.

Як що коло не торкається простої знику площі, в якій лежить це коло, то відбитком його буде еліпс,

як що воно перетинає просту знику, то гіпербола і нарешті як що торкається простої знику, то буде параболою.

В окремих випадках, коли коло рівнобіжне з площею відбитку, то відбитком його буде коло, коли ж площа кола лежить у площі проміння, то відбитком такого кола буде проста.

В наступних прикладах знайдений відбиток кола, даного луча τ , при даному осередку цього кола.

Спочатку знайдемо відбиток того поперечника кола, що проходить через осередок A/a_0 і буде рівнобіжний з площею відбитку.

Відбиток цього поперечника буде проста $c.d. \parallel S_c$ /рис.396, таб. LXXIV/.

З'яємо площу S , в якій лежить коло, з площею відбитку. Для цього знаходимо точку втечі f_e простих прямих до сліду $S_c/Hf_e \perp S_c$, знаходимо злите положення A_0 осередка кола /перехрестя $f_e a_0$ з S_c / відкладаємо $A_0 c = A_0 d = \tau$ і знаходимо відбитки c_0 і d_0 точок c і d .

Обертаємо тепер коло, що утворив поперечник $c_0 d_0$, з осередком a_0 , навкруги $c_0 d_0$ до положення рівнобіжного з площею відбитку. Це буде коло K_0 зворотне обертання точок якого дасть точки відбитку даного кола.

Знаходимо злите положення ока O_0 , а також злите положення простої знику S_0 площі $S/Hf_e c = O_0 g$. Положення кола K_0 відносно простої знику S_0 показує, що відбитком кола буде еліпс.

Знайдемо відбитки точок 1 і 2 які лежать на тятиві 1.2, прямій до вісі обертання, а також до сліду S_c . Точка втечі цієї тятиви проходить через точку c_0 /лежить на вісі обертання/ та через точку втечі f_e ; тому відбитком її буде проста $f_e h$, яка разом з простими $O_0 1$, $O_0 2$ визначить точки 1. і 2.

Так само знайдемо відбиток поперечника 5.6, прямого до сліду S_c . Це буде проста 5.6., яка уявляє поперечник еліпса - відбитку кола.

Цей поперечник прямий до S_c буде єдиним відбитком якого буде також поперечником відбитку даного кола.

Точка m_0 , яка переполовинює відбиток 5.6., буде осередком еліпсу, з чого маємо висновок, що відбиток осередка кола не є осередком відбитку самого кола.

Для того, щоб знайти другу вісь еліпса, продовжуємо поперечник кола K_0 , прямий до S_c , знаходимо точку знику цього поперечнику і з точки O_0 ведемо дотичні до кола K_0 . Точки дотику 3 і 4 дадуть злите положення тої тятиви, яка відіюється у вісь еліпса.

Вісь еліпса 3о 4о буде рівнобіжна з S_c , а також з 3.4, проходить вона через точку m_0 і разом

в простих O_3 і O_4 , визначити точки 3 і 4 .

По знайдених осях 3.4 і 5.6 можна вже нарисувати еліпс, який й буде відбитком даного кола.

На рис. 397, таб. LXXIV маємо випадок, коли коло K перекрещує просту знику S_3 , себ-то випадок гіперболи.

Знайдемо асимптоти цієї гіперболи. Асимптоти ці в злитому положенні будуть дотичні до кола K в точках дотику в точках C і B перекрестя кола K з простою знику S_3 .

Відбитки цих дотичних повинні бути рівнобіжні з простими O_3B і O_3C , себ-то будуть простими n_3C і n_3B .

Переполовинимо кут $B.n_3C$ - це буде напрям головної вісі гіперболи n_3d , в злитому положенні ця вісь має напрям n_3e і точки G і E будуть злите положення вершків гіперболи. Прості O_3E і O_3G визначають відбитки e і g цих вершків.

По цих елементах, разом з точками 1 і 2 , рисуємо саму гіперболу - відбиток даного кола.

Нарешті на рис. 398, таб. LXXIV маємо випадок параболи, коли коло K дотикається до простої знику S_3 .

Знайдемо вершок та головну вісь параболи.

Напрямок осі параболи буде рівнобіжний з простою O_3D / $m.D \perp S_3$ /

З точки O_3 становимо прям O_3E до O_3D , з точки E ведемо другу дотичну до кола K , відбиток цієї дотичної буде дотичною до параболи у вершку її. Цей відбиток проходить через точку C / перекрестя $E.B$ з S_3 / і має напрям рівнобіжний з O_3E . Проста O_3B визначає точку B - вершок параболи. Головна вісь проходить через точку B , напрям її рівнобіжний з O_3D , або прямий до $C.B$.

Щоб знайти ще вогнище параболи сполучаємо f_1 з 1 , знаходимо перекрестя f_1 з $B.C$, точку q і з точки q ставимо прям до $f_1 4$, який і визначає вогнище $ф$.

По цих елементах, та точках 1 і 2 , рисуємо параболу, відбиток даного кола.

Розв'яжемо ще таку задачу: нарисувати відбиток кола, луча $\gamma = 4$ ст., яке дотикається до простої $B.C$, проходить через точку A і лежить в площі основи /рис. 399, таб. LXXIV/.

Зливаємо площу основи, обертанням навкруги вісі OX з площею відбитку.

Злите положення даної дотичної буде $B.B' / B.B'$ а злите положення точки A буде точка A' .

Лучем 4 ст. рисуємо коло K , яке торкається простої $B.B'$ і проходить через точку A' .

Ведемо поперечник $E.G$ прямий до OX ; точка втечі його буде головна точка H , а відбитком простої HH . Прості O_3E і O_3G визначають точки e і g .

відбитки точок E і G . Проста $e.g.$ буде віссю відбитку кола.

Тягива $L'D$ буде злитим положенням другої вісі, а відбитком її буде проста $e.d.$ $|| OX$.

Рисуємо тепер по цих точках $e., e.g. i d.$, точці A . і точці S . дотику до простої $e.g.$ еліпс, який й буде відбитком даного кола.

Перспектива кулі так само, як і перспектива кола може бути еліпсом, гіперболою, або параболою, бо й тут маємо теж обгортаючий кулю стіжок, що може перетинатися з площею відбитку, при різних положеннях, по одній з згаданих кривих.

Перспектива кулі буде колом, лише у тому випадку, коли осередок кулі лежить на головному промінію.

Обгортаючий стіжок може обгортати багато куль осередки яких лежать на вісі цього стіжка.

Тому відбиток кулі буде відбитком багатьох куль, осередки яких мають спільний відбиток.

Одна з таких куль має своїм осередком точку m_0 /рис. 400, таб. LXXIV/, яка лежить на площі P /на рис. показаний план/.

Ці обидві кулі вміщаються в один й той самий обгортаючий стіжок, тому для цих куль можна написати таку пропорцію:

$$R : r = Om : Om_0$$

хай буде коло 3.4 те коло кулі, яке рівнобіжне з площею P ; тоді відбитком цього кола буде коло 3.4. і для цих кол маємо теж пропорцію:

$$R : r_1 = Om : Om_0$$

Зев-то

$$r = r_1$$

Другими словами: коли роздивляться на коло даної кулі, рівнобіжне з площею P , як на контур цієї кулі, то відбитком цієї кулі буде контур кулі, осередок якої лежить в площі P і які мають спільний обгортаючий стіжок.

Богнищами цього відбитку будуть відбитки /1. і 2./ крайніх точок поперечника /1, 2./ поперечника прямого до кола 3.4.

Користування такими допоможними кулями в деяких випадках полегшує розв'язання питання

Наприклад, треба нарисувати перспективу кулі коли маємо осередок її / m_0, m'_0 / та луч R /рис. 401 таб. LXXV/

Спочатку рисує коло, рівнобіжне з площею P . Знаходимо луч $m_0 n_0$ цього кола. Знаходимо точку A /перехрестя Hm'_0 з OX /. відкладаємо $AB = R$ і ведемо проту HB . Проті $m_0 n'_0$ і $m_0 n_0$ рівнобіжні з OX , а точки n_0 і n'_0 лежать на прамі до OX .

Головна вісь відбитку буде проста Hm .

Вогнища будуть відбитками точок F і Φ ; це будуть точки f і ϕ .

Крайні точки великої вісі будуть точки 2. і 1. відбитки точок дотику 1 і 2 дотичних, поведених з злитого положення ока O .

Коли маємо положення вогнищ та велику вісь еліпса, нарисувати його вже не трудно.

Те саме можна виконати и у випадках гіперболи, або параболи і над цим зупинятися не будемо.

D. МЕТУВАННЯ КОТАМИ.

§ 54. ВСТУП.

Коли ми роздивлялися в § 3 мети точки, то з'ясували, що при рівнобіжному метуванню, положення точки у простороні, при одній площі мету, не визначається точно, нам тоді потрібно було двох площ мету.

Звернемося тепер до способу прямого метування на одну площу мету, але для точного визначення положення предмета у простороні, введемо ще одно поняття.

Як що довжина метсвого прямоу точки буде задана, то положення цієї точки у простороні буде точно визначено. Дійсно з мету точки ставимо пряма відкладаємо на ньому дану величину. В цьому випадку кожному мету точки, відповідає лише одна точка у простороні.

Такий спосіб прямого метування на одну площу мету носить назву метування котами і вживається часто при топографічних працях.

Площу мету будемо називати ПЛОЩЕЮ ОСНОВИ, або ПОРІВНЯННЯ, метові прямі, що мають точно визначену довжину КОТАМИ.

При метуванні котами, як було тільки що висловлено, коти мають певний вимір. Тому що рисувати в дійсній величині часто не можливо, тому вживаються зменшення їх, себ-то рисунки виконуються в

О. Віданський. Нарисна геометрія.

даному мірилі, що повинно тут бути зазначено при кожному рисунку.

Часто великий кот не дасть змоги користуватися площею рисунку, на якій ці виміри не вміщуються. Тоді вводяться тоді допоможні площі, рівні з площею основи. Такі площі носять назву **ШАРОВИХ ПЛОЩ**.

Шарові площі можна вести через кожний кот, навіть через точки його поділу. Площі, що поведені через цілі одиниці виміру котів, або взагалі на рівних частках одиниць виміру, носять назву **ГОЛОВНИХ ШАРОВИХ ПЛОЩ**.

Віддалення головних шарових площ одна від другої, носить назву **ШАРОВОГО ВІДДАЛЕННЯ**.

§ 55. ТОЧКА, ПРОСТА ТА ПЛОЩА.

Кожна точка, що визначена на рисунку в метуванні котами, поруч з літерою, повинна мати визначений для неї кот, який пишеться в дужках.

На рис. 402, таб. LXXV маємо точку **А**, яка лежить над площею порівняння на висоті 8,5 одиниць довжини, точку **В**, віддалення якої виносить вже 6 таких одиниць.

Умовимося для усіх точок, які лежать над площею порівняння, рахувати коти додатними, навпаки для точок, які лежать під цією площею, котам приписувати знак мінус і рахувати ці коти від'ємними.

Тільки в одному випадку рахують точки, які лежать під площею порівняння, з додатними котами. Це буває при рисуванні пляну моря. Тоді коти визначають глибину моря і відраховуються від поверхні, яку вважають за площу порівняння.

На згаданому рисунку /402, таб. LXXV/ точки **А** і **В** мають додатні коти і тому лежать над площею порівняння, а точки **С** і **Д** мають від'ємні коти і лежать під цією площею.

До рисунку, як вже згадувалося, повинні бути поданий показчик мірила /1:500 для даного рас/.

Мет простої буде теж проста. Положення простої у простороні точно визначене, коли визначені дві її точки. Тому в метуванні котами мети кожної простої будуть вистарчаючими для визначення її, коли маємо коти двох точок цієї простої.

Проста **АВ** /рис. 403, таб. LXXV/ визначена котами для точки **а** = 21 і для точки **в** = 38, тому визначить положення у простороні точок **А** і **В**, тим самим і самої простої **АВ**. Проста **АВ** разом з котами точок **а** і **в** та положення

метом ab , утворять трапес, який можемо збудувати, бо маємо необхідні для того елементи.

Перекинемо цей трапес на площу порівняння об-
крутивши його навкруги мету ab . Для цього з точок
 a і b ставимо прями до ab , відкладаємо в даному мі-
рилі відповідні коти і маємо трапес $A.B.b.a$, де ві-
дтинок $A.B.$ уявляє собою дійсну довжину цього відтин-
ку.

Крім того це перекинене положення простої
уявляє собою дійсне положення простої $A.B.$ відносно
площі порівняння. Кут $b.a.B.$ уявляє собою кут нахилу
простої AB до площі порівняння, взагалі до поземної
площі.

Як що через точку A повести просту $A.D. \parallel ab$
то кут $D.A.B.$ буде теж рівний α .

З трикутника $A.D.B.$ маємо:

$$B.D. = A.D. \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

або

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B.D.}{A.D.};$$

З цього виразу можна вираховувати $\operatorname{tg} \alpha$, а також
й кут α . Цей кут дає напрямок даної простої і в
дальшому $\operatorname{tg} \alpha$ будемо називати МІРИЛОМ НАХИЛУ ПРОСТОЇ
і будемо визначати літерою H .

Як що треба на даній простій визначити точ-
ку E з котом 30 м. , то в перекинутому положенні виз-
начаємо точку E , яка віддалена від площі порівнян-
ня на 30 м. і з точки E спускаємо прям на ab . Точ-
ка e матиме кот 30 м. зворотньо, як що треба визначи-
ти кот точки, що лежить на даній простій і має метом
точку e , то ставимо з точки e прям до ab і виміря-
ємо в даному мірилі відтинок $e.E$.

У наведеному рисунку проста AB перетинає
площу порівняння в межах рисунку, тому все виконання
не трудне. Але коли маємо великі коти, то можна пе-
рекидати просту не на площу порівняння, а на довіль-
ну шарову площу.

Як що наприклад поведемо шарову площу через
точку A і перекинемо просту AB на цю площу, то ма-
тимемо не трапес вже, а трикутник, де одною прямою
буде мет ab , другою різниця котів $58-21=37 \text{ м.}$, а
протипрямою ab дійсна величина самої простої.

Кут $B'.ab$ буде кутом α нахилу простої.
Для визначення точки G з котом 50 м. , від-
кладаємо $50-21=29 \text{ м.}$ і визначаємо точку g , як це
робилось тільки що.

Можна це визначення зробити ще таким спосо-
бом. На прямі $b.B'$ відкладаємо $58-40=18 \text{ м.}$ для точки
 F з котом 40 і ведемо $MF \parallel ab$.

Як що дану просту перетяти горизонтальними шарови-
ми площами, то точки перетину простої з цими площа-

ми будуть мати коти послідовно збільшуючися, або зменшуючися на одиницю виміру.

Такі точки дуже зручні для визначення простої при метуванні котами і воно майже виключно тут вживається.

Нанесення на мет простої котів точок перетину з головними шаровими площами звється ГРАДУІРОВАНИМ простої.

Градуїрувати дану просту AB /рис. 404, таб. LXXV/ можна так. Прям aA , рівний $4.8 - 1.3 = 3.5$ см. поділяємо на відтинки 0.8 ; 1 ; 1 і 0.7 . Точку A сполучаємо з точкою B і через точки поділу ведемо рівнобіжні з AB прості, які визначають точки перетину даної простої з головними шаровими площами 4 , 3 і 2 .

Маємо градуїровку даної простої AB .

Відтинки 2 , 3 і 3.4 рівні між собою, як це ясно з самої геометричної будови, тому можна продовжити у обидва кінці простої градуїровку і визначити ще точки з котами $1, 5, 6$ і т.д.

Як що у виразі для мірила нахилу простої

$$H = \operatorname{tg} \alpha = \frac{B.D.}{A.D.}$$

на місце $B.D.$ візьмемо різницю котів, одиницю довжини $1m$, для нашого випадку, а $A.D.$ відтинок 2.3 , або 3.4 , який визначимо через i , то матимемо:

$$H = \frac{1}{i};$$

або

$$i = \frac{1}{H};$$

Відтинок i будемо називати ІНТЕРВАЛОМ даної простої. Він визначає віддалення метів двох точок даної простої, різниця висот яких виносить 1 одиницю довжини $/1m/$, або точок, які лежать на шарових площях з шаровим віддаленням $1m$.

Градуїровка, інтервал та ще напямом нахилу зовсім ясно визначають просту, тому в наступному будемо користуватися виключно цим способом визначення простих.

Інтервал і мірило нахилу простої, як видно з попередніх виразів, числа зворотні.

При градуїруванні простої не конче потрібно на прямі aA /рис. 405, таб. LXXV/ відкладати відтинки в даному мірилі; можна відкласти відповідні відтинки у якому завгодно мірилі, сполучити точку A з B і через точки поділу повести рівнобіжні. Результат буде той самий, що й у попередньому випадку.

Можна навіть не ставити пряма aA , а повести під довільним кутом простої aD , нанести довільним мірилом відповідні відтинки, сполучити точку D з B і через точку поділу повести рівнобіжні з DB .

Треба тільки пам'ятати, що прості DB і A_0B в останньому випадку не уявляють собою дійсного вигляду і довжини даної простої, з такого рисунку також не можна визначити кута нахилу простої.

Для визначення площі, перетнемо її головними шаровими площинами. Прості перетину будуть усі рівнобіжні між собою, крім того вони будуть рівнобіжні з слідом даної площі, себ-то з перетином її з площею порівняння.

Але ці прості, головні шарові даної площі ще не зовсім ясно визначають саму площу. Для цього треба мати засіб визначити кут нахилу площі до площі порівняння.

Для визначення цього кута треба повести площу пряму до простої перетину її з площею порівняння /слід/, або головних шарових простих/.

Проста перетину такої допоможної площі з даною буде прямою до головних шарових простих, мет її теж буде прямим до згаданих простих.

Така проста, ПРоста НАХИЛУ ДАНОЇ ПЛОЩІ, має той самий кут нахилу, яким виміряється кут нахилу даної площі. Тому проста нахилу точно визначає дану площу. Шарові прості повинні бути прямими до цієї простої і проходить через відповідні точки її градусівки.

Просту нахилу площі рисуватимемо двома лініями: одною грубшою й одною тоншою.

На рис. 406, таб. LXXV показана площа S , яка визначена простою нахилу S_n , та головними шаровими простими.

Кожна проста, що лежить в даній площі, повинна мати відповідні точки градусівки на відповідних головних шарових простих площі. Це є відзнака того, що проста лежить в площі.

Кожна точка даної площі, або повинна лежати на простій даної площі, або проста, що сполучає дану точку з точкою простої нахилу однакового куту, повинна бути рівнобіжна з шаровими простими, себ-то теж бути шаровою простою.

Проста BC /рис. 406, таб. LXXV/ лежить на площі S , також точка A теж лежить на цій площі.

Рівнобіжні між собою площі мають рівнобіжні, одного напрямку та однакових інтервалів прості нахилу.

Прості рівнобіжні між собою, теж мають рівнобіжні, одного напрямку, та однакового інтервала мети.

Прості, що перехрещуються між собою повинні мати спільну точку, коти якої на обох метях мусять бути однакові.

Друга відзнака того, що прості перехрещуються буде те, що вони лежать в одній площі. Тому усі про-

сті, які сполучають точки даних простих з однаковими кутами, повинні бути рівнобіжні між собою, бо вони уявляють собою шарові прості одної площі.

Тому прості AB і CD /рис.407, таб. LXXV/ перекрещуються, бо лежать в одній площі, шарові прості якої будуть 10.10 ; 11.11 ; 12.12 і т.д. / 10.10 // 11.11 // 12.12 ./

Навпаки прості AB і CD /рис.408, таб. LXXV/ мимобіжні, бо прості 8.8 і 12.12 не рівнобіжні і тому не можуть бути шаровими простими площі.

Візьмемо точку $A/a=1$ та перекинемо її на площу рисунку /рис.409, таб. LXXV/

Поведемо просту AB і просту AC -пряму до першої.

Маємо два прямі. Як вони метуються? Метом простої AB , буде aB , а простої AC - ac . Напрямки цих простих, а саме метів їх будуть протилежні.

Відтинок aB буде інтервал i простої AB , а відтинок ac буде інтервалом i_1 пряма до простої AB .

З трикутника CAB маємо:

$$Ca. aB = aA^2;$$

або

$$i. i_1 = 1 \quad / \text{довжини в даному мірилі} /.$$

Тому прямі до простої, має рівнобіжний з метом простої мет, протилежного напрямку, і здобуток інтервалів їх рівен одиниці.

Наприклад, коли маємо просту з $i = 20$, при мірилі $1:100$, будемо мати для i_1

$$i_1 = \frac{1}{i} = \frac{10^m}{20^m} = \frac{1}{2};$$

Визначення i , простіше робити графічно, як показано на рис.409, таб. LXXV.

§ 56. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ.

При метуванні кутами, так само, як й при користуванні иними методами метування, можна розв'язати багато задач нарисної геометрії.

Переїдемо до прикладів.

ЗАДАЧА I. Через дану точку $C/c, 14.4$ /поставити просту рівнобіжну з простою $AB/aB, i=10^m$ /. Мірило $1:200$.

Рівнобіжні прості мають мети рівнобіжні

Введемо через точку c просту $de \parallel aB$; це буде мет потрібної нам простої /рис.410, таб. LXXV/

Треба градуїрувати просту de , інтервал якої $i_1 = i$.

Тому від точки C відкладаємо $C.14 = 0.4$; $C.15 = 0.6$ і далі визначаємо точки I_2, II, IO і т.д. відкладаючи $I_2 II = II IO$ і т.д. $= l$.

Напрямок простої DE однаковий з напрямком простої AB .

ЗАДАЧА 2. Через дану точку $C/c, 10.5/$ повести просту, пряму до простої $AB/aб, i = 12.5 \text{ } ^\circ \text{ } /$ мірило $1:100$ /рис 4II, таб LXXV./

Прям до простої має рівнобіжний, з метом простої мет але напрямок протилежний.

Через точку c ведемо просту $de \parallel ab$ для того щоб знайти інтервал пряма DE , ведемо на меті ab точку /напр. $18/$, ставимо прям $18 M$ відкладаємо в даному мірилі $18. M = 1 m / 10 \text{ } ^\circ \text{ } /$ сполучаємо точки M з 19 і ведемо до простої $19. M$ прям MN Відтинок $18 N = 1$, інтервалу пряма DE

По знайденому інтервалу l , градуїруємо прям DE і задача буде розв'язана.

ЗАДАЧА 3. Через три дані точки: $A/a, 18.5/$, $B/b, 2/$ $C/c, 19.8/$ повести площу. Мірило $1:500$ /рис. 4I2, таб. LXXV/

Сполучаємо дві з даних точок /напр. A і B / простою $AB/aб/$, градуїруємо її, та знаходимо кот 19.8 , що відповідає котіві точки C .

Сполучаємо точку C з точкою простої AB , кота 19.8 . Усі точки одержаної простої мають одна й той самий кот $/19.8/$, тому ця проста буде рівнобіжна з площею порівняння і тим самим дає напрям шарових простих потрібної площі S .

Через точки $18, 19, 20, 21$ і т.д. ведемо головні шарові прости площі S /рівнобіжні з $C.19.8/$ потім ведемо прям S_n до тих простих і маємо визначену площу S що проходить через дані три точки A, B і C

Так само розв'язується задача: повести площу через дану просту і точку по-за нею.

ЗАДАЧА 4. нарисувати мет плаского п'ятикутника з вершками $A/a, 20/$, $B/b, 14/$, $C/c, 10/$, $D/22/$ і $E/25/$ Мірило $1:200$ /рис 4I3 таб. LXXV /

Три точки A, B і C дані своїми метами. Іі три точки лежать в одній площі, в якій повинні знайтися й решта точок D і E .

Задачу можна розв'язати у той спосіб, що через три дані точки ведемо площу на якій наносимо точки D і E з котами 22 і 25

Можна розв'язати цю задачу ще так Сполучаємо точки A і B простою AB і градуїруємо її. По цій сполучаємо точку C напр. з точкою 18 простої AB . Ця проста $C.18$ теж лежить в одній площі з простою AB об мають спільну точку $m /18/$ градуїруємо цю просту CM і на коті 25 уміщуємо вершок E .

Потім сполучаємо точку C з точкою $N /m, 16/$

простої АВ, і ця проста теж лежить в тій самій спільній площі. Після градуїрування, визначаємо вершок на коті 22.

П'ятикутник АВСDE/abcde/ лежить в одній площі та відповідає завданню.

ЗАДАЧА 5. Знайти перетин двох площ $S/S_n, i=10\%$ і $R/R_n, i_1=7,5\%$. Нахил площ однаковий. Мірило 1:200 /рис. 414, таб. LXXVI/.

На шарових простих обох площ лежать точки з однаковими котами. Перехрестя однакових шарових простих обох площ, дають точки, які лежать одночасово на обох площах, се-то належать до простої перетину цих площ.

Сполучивши точки перехрестя однакових шарових простих обох площ простою ВА, одержимо просту перетину площ S і R .

Градуїровку простої перетину ВА, а також її напрямком, визначають відразу точки перехрестя шарових простих.

Не потрібно вести, та знаходити перехрестя багатьох шарових простих. Для визначення простої необхідно дві точки, тому для розв'язання цієї задачі вистарчить знайти перехрестя двох пар шарових простих.

ЗАДАЧА 6. Знайти перетин двох площ $S/S_n, i=10\%$ та $R/R_n, i_1=7,5\%$. Нахил площ протилежний. Прості нахилу рівнобіжні $/S_n \parallel R_n/$. Мірило 1:200 /рис. 415, таб. LXXVI/.

Такі площі перетнуться по простій, рівнобіжній з площею порівняння, тому прямою до простих нахилу площ.

Перехрестя шарових простих тут не буде, бо ці прості рівнобіжні між собою. Тому попереднього способу уживати тут не можна.

Сполучимо точки простих нахилу площ з однаковими котами /напр. 40/. Ця проста однакових котів тому рівнобіжна з площею порівняння.

Як що будемо проводити далі таке сполучення однакових котів точки обох простих нахилу, то зауважимо, що мети цих простих збігаються в точці m . Це дає змогу висловити твердження, що усі такі прості мають спільний мет, точку m , через яку повинна пройти и проста перетину обох площ, бо ця проста теж рівнобіжна з площею порівняння.

Проста АВ $/ab \parallel S_n \text{ і } R_n/$ буде простою перетину площ S і R з котом 37,9.

ЗАДАЧА 7. Знайти точку перетину простої АВ $/ab, i=15\%/$ з площею $S/S_n, i_1=10\%$. Мірило 1:200. /рис. 417, таб. LXXVI/.

Через дану просту ведемо довільну допоміжну площу, знаходимо просту перетину цієї площі з даною. Ця проста перетину лежить в одній площі /до-

поможній/ з даною простою. Перехрестя цих двох простих визначить точку перетину даної простої з даною площею.

Бедемо шарові прості 5 і 8 допоможної площі, що поведена через дану просту АВ. Напрямок цих шарових простих довільний, але вони рівнобіжні між собою.

Простою перетину допоможної площі з даною площею δ буде проста CD/cd .

Перехрестя простих CD і AB , точка M/m , б.т./ буде точкою перетину даної простої АВ з даною площею S .

ЗАДАЧА 8 Знайти перетин двох площ: $S/S_n, i=10^\circ/m$ / та $R/R_n, i=15^\circ$ / Нахил площ протилежний. Прості нахилу мимобіжні. Мірило 1:200 /рис. 416, таб. LXXVI/.

Цю задачу можна розв'язувати способом, яким вжити для площ однакового нахилу. Але іноді перехрестя однакових шарових простих виходять по за межами рисунку /на рис. шарові прості 6/, тому треба покористатися допоможними площами.

Знаходимо перетин простої нахилу S_n з площею R . Це буде спільна для обох площ точка A/a .

Потім знаходимо перетин простої нахилу R_n з площею S . Це буде спільна для обох площ точка B/b .

Простою перетину буде проста АВ, що поведена через спільні для обох площ точки А і В /градуїровка на рис. не виконана/.

Ці дві точки перетину знайдені користуючись довільними допоможними площами /шарові прості 4 і 6/.

ЗАДАЧА 9. Через точку A/a , 4.5/ провести просту, яка перехрещувала-б дві дані прості $CB/cb, i=10^\circ/m$ / та $ED/ed, i_1=15^\circ$ / Мірило 1:200 /рис. 418, таб. LXXVI/.

Через дану точку А та просту СВ ведемо площу /напрямок шарових простих ab /, потім ведемо другу допоможну площу через точку А та просту ED /напрямок шарових простих af /.

Знаходимо просту перетину цих двох допоможних площ, просту $AG/ag, i_2=28^\circ/m$ /.

Проста АГ є відповіддю задачі, бо вона проходить через точку А, лежить в одній площині /допоможних/ з даними простими, тому перехрещується з ними.

Цю задачу можна розв'язати ще другим способом.

Ведемо через дану точку А /рис. 419, таб. LXXVI/ та через просту ED площу /напрямок шарових простих ag /, та знаходимо перетин цієї площі з другою даною простою СВ.

Коли сполучимо знайдену точку перетину М з точкою А, то проста МА буде відповіддю задачі, бо ця проста проходить через точку А, перехрещує просту СВ /точка М/ і лежить в простій ЕД в одній /допоможній/ площі, тому перехрещується і з ЕД.

ЗАДАЧА 10. Через дану точку $A/a, 7.8/$ повести площу, рівнобіжну з даною площею $S/S_n, i = 15^\circ/m/$. Мірило 1:200 /рис. 420, таб. LXXVI/.

Площі рівнобіжні мають рівнобіжні, однакового нахилу, та однакового інтервалу прості нахилу. Тому через точку a ведемо просту $R_n \parallel S_n$, відкладаємо $a.8 = 0.2$; $a.7 = 0.8$ та градуємо інтервалом i просту R_n .

Площа R рівнобіжна з площею S і проходить через дану точку A .

ЗАДАЧА 11. Через дану точку $A/a, 10.5/$ повести просту, рівнобіжну з даною площею $S/S_n, i = 10^\circ/m/$. Мірило 1:200 /рис. 421, таб. LXXVI/.

Як відомо рівнобіжність простої з площею відзначається тим, що у площі мусить лежати хоча одна проста, рівнобіжна з даною.

Ведемо у даній площі S довільну просту CB , яка градується своїм положенням у даній площі.

Потім через дану точку A ведемо просту DE рівнобіжну з простою CB , а тим самим й з даною площею.

Напрямок мета і інтервал простої DE треба взяти з простої CB .

ЗАДАЧА 12. Через дану точку $A/a, 10/$ повести площу, рівнобіжну з двома даними простими $CB/cb, i = 4^\circ/m/$ та $ED/ed, i = 10^\circ/m/$. Мірило 1:200 /рис. 422, таб. LXXVI/.

Через дану точку A ведемо прості рівнобіжні з даними простими CB і ED . Площа поведена через ці допоміжні прості C_1B_1 і E_1D_1 буде рівнобіжна з даними простими і буде проходити через дану точку A .

Через точку a ведемо просту $c_1b_1 \parallel cb$, градуємо її інтервалом i . Через ту ж точку ведемо просту $e_1d_1 \parallel ed$ та градуємо її інтервалом i_1 .

Через дві прості e_1d_1, c_1b_1 ведемо площу $S/S_n, i_2 = 3^\circ/m/$ для чого сполучаємо однакові коти цих простих /шарові прості площі $S/$, та ведемо до них прям S_n .

ЗАДАЧА 13. Через дану точку $A/a, 10/$ повести просту, яка перекрещувала б просту $BC/bc, i = 7.5^\circ/m/$ та була рівнобіжною з даною площею $S/S_n, i_1 = 10^\circ/m/$. Мірило 1:200 /рис. 423, таб. LXXVI/.

Через дану точку A ведемо площу R рівнобіжну з даною $R_n \parallel S_n, i_2 = i_1 = 10^\circ/m/$. Знаходимо перетин площі R з даною простою BC , за допомогою шарових простих 7.7 та 13.13 і простої de . Точка перетину M простої BC з площею R , точка A лежить теж у площі R , а тому і проста AM лежить у площі R .

Понеже площа R рівнобіжна з площею S , то і проста AM теж буде рівнобіжна з цією площею, крім того проста AM проходить через точку A і перекрещує просту BC в точці M , тому ця проста AM буде відповіддю на запитання задачі.

Залишається знайти інтервал простої AB та

градуїрувати її $i_3 = 19\text{‰}$.

Цю задачу можна розв'язати ще в другий спосіб.

На рис. 424, таб. LXXVI маємо точку $A/a, 10\text{‰}$ простої $CB/cb, i = 7,5\text{‰}$ площі $S/S_n, i = 10\text{‰}$ Мірило 1:200.

Спочатку через точку A ведемо площу R рівнобіжну з площею S . Потім через дану точку A і дану просту CB ведемо площу /шарові прості мають на-
прямок $\alpha. 10\text{‰}$.

Знаходимо просту перетину площі R , з площею визначеною точкою A та простою CB .

Ця проста перетину $AM/am, i = 20\text{‰}$ проходить через точку A , перехрещує просту CB , оскільки лежить з нею в одній площі, та лежить в площі R , рівнобіжній з площею S , тому проста AM сама рівнобіжна з площею S .

Проста AM буде відповіддю на запитання задачі.

ЗАДАЧА 14. З даної точки $A/a, 8.4\text{‰}$ повести прям до площі $S/S_n, i = 15\text{‰}$ Мірило 1:50 /рис. 425, таб. LXXVII/.

Меті пряма до площі, будуть, як й меті двох прямих /див. рис. 409, таб. LXXV/, рівнобіжні з простою нахилу площі, але протилежною напрямку; що торкається їх інтервалів, то вони підлягають тому самому закону, а саме: $i \cdot i_1 = 1$.

Тому спочатку знаходимо інтервал i_1 пряма. Для цього рисуємо прямокутний трикутник 15. P, Q , з якого знаходимо відтинок 16. $Q = i_1$.

Потім ведемо через точку a просту $ba \parallel S_n$, та градуїруємо її по даному куту точки $A/a, 8.4\text{‰}$ та інтервалу i_1 .

Відтинки: $a8 = 0,4 i_1$, $a.9 = 0,6 i_1$ і т.д.

ЗАДАЧА 15. Через точку $A/a, 14,5\text{‰}$ даної простої $Bc/bc, i = 5\text{‰}$ повести площу, пряму до даної простої. Мірило 1:125 /рис. 426, таб. LXXVII/.

Проста нахилу площі, прямій до простої Bc буде рівнобіжна з bc , тому напрямок шарових протилежний площі вже згорі відомий.

Проста $\alpha. 14.5$ буде шаровою простою і буде прямою до bc .

Знаходимо, як це робилося у попередніх прикладах, інтервал простої нахилу потрібної нам площі, та градуїруємо просту нахилу $S_n/S_n \parallel bc$, починаючи від кута 14,5 цим інтервалом.

Напрямок нахилу простої нахилу S_n буде протилежний нахилу простої Bc .

ЗАДАЧА 16. Знайти віддалення даної точки $A/a, 17\text{‰}$ від даної простої $Bc/bc, i = 15\text{‰}$ Мірило 1:400 /рис. 423, таб. LXXVII/.

Через дану точку A ведемо площу S , пряму до даної простої $BC / S_n \| bc, i, i = 1 /$. Потім знаходимо перетин площі S з простою BC , за допомогою шарових простих 17.17 і 20.20, точок d і e та простої de .

Проста AM / am відповідає на запитання задачі бо вона пряма до даної простої BC і тому буде найкоротшим віддаленням. Що проста AM пряма до простої BC свідчить те, що ця проста лежить у площі S , прямої до простої BC , та проходить через точку перетину BC з S .

Колі просту AM перекинемо на шарову площу 17, то одержимо відтинок aM_0 , дійсну довжину віддалення точки A від простої BC .

ЗАДАЧА 17. Знайти віддалення по-між двома рівнобіжними простими $AB / ab, i = 15^\circ /$ і $CD / cd, i = 15^\circ$ Мірило 1:400 / рис. 428, таб. LXXVII /.

Ведемо площу S , пряму до даних простих $S_n \| ab \| cd, i, i = 1 /$. Знаходимо перетин площі S з даними простими. Проста AB перетинає площу S в точці $N / n, 8.9 /$, а проста CD в точці $M / m, 9.6 /$

Проста MN пряма до обох даних простих буде відповідати вимогам задачі.

Дійсна довжина віддалення по-між даними простими, визначається відтинком mM_0 /протипряма, одна пряма m, n , друга 9.6-8.9=0.7/.

ЗАДАЧА 18. Знайти віддалення по між даними рівнобіжними площами $S / S_n, i = 15^\circ /$ та $R / R_n, i = 15^\circ$ Мірило 1:400 / рис. 429, таб. LXXVII /.

Ведемо просту AB пряму до даних площ S і R . $ab \| S_n \| R_n, i, i = 1 /$. Знаходимо перетин простої AB з площами S /точка M / і R /точка N /.

Відтинок MN простої AB уявляє собою найкоротше віддалення поміж площами S і R .

Відтинок mM_0 є дійсна величина цього віддалення.

ЗАДАЧА 19. В даній площі $S / S_n, i = 10^\circ /$ повести прості з мірилом нахилу $n = 3/4$. Мірило 1:90 / рис. 430, таб. LXXVI /.

Це завдання прийдеється розв'язувати часто, тому зупинимось над ним довше.

Прості з певним нахилом утворюють у просторі стіжок, вісь якого пряма до площі порівняння, а творчі якого нахилені до цієї площі під кутом, tg якого рівен мірилу нахилу.

Цей стіжок перетинається кожною шаровою площею по колу.

Дана площа з шаровими площами має спільні шарові прості, які лежать в одній площі з згаданим колом основи стіжка.

Перехрестя шарової простої площі з колом основи стіжка, визначають одну з точок потрібної нам простої, а зручний вибір вершка стіжка дасть другу

точку тієї простої.

Перейдемо до розв'язання задачі на рисунку.

За вершок стіжка візьмемо одну з точок простої нахилу S_n /напр. точку 15/.

Творчі цього стіжка мають мірило нахилу

$$H = \frac{3}{4}$$

тому інтервал для них i буде:

$$i_1 = \frac{1}{H} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Виходить, що коли перетяти стіжок шаровою площею 14, то луч основи стіжка буде

$$\tau_1 = i_1$$

Коло перетину стіжка з шаровою площею 13 буде

$$\tau_2 = 2 i_1$$

Взагалі цей луч буде остільки більший, наскільки більше буде віддалення вершка стіжка від шарової площі.

Для шарової площі 12.12, за луч τ_3 треба взяти 3. i_1 , тому

$$\tau_3 = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4 \text{ м.}$$

що при даному мірілі 1:90 виносить

$$\tau_3 = 45 \text{ м/м.}$$

Перехрестя кола, осередка 15, луча $\tau_3 = 45 \text{ м/м}$ з шаровою простою 12.12, визначить точки 12 і 12, а також дві прості 15.а і 15.б, які лежать в даній площі S , та мають мірилом нахилу $H = \frac{3}{4}$.

ЗАДАЧА 20. Через дану просту АВ/а6; $i = 10 \text{ м/м}$ / повести площі, нахилені до площі порівняння під кутом β . Мірило 1:200 /рис. 131, таб. LXXVII/.

Такі площі будуть дотичними до стіжка з землею віссю, та творчими, нахиленими під кутом β .

Такий стіжок теж перетинається з шаровими площами по колах, але лучі цих кол тепер треба знайти з рисунку.

Уявимо собі знову, що вершок стіжка лежить на простій АВ, напр. в точці 15, та знайдемо перетин цього стіжка з шаровою площею 10.10.

Тоді висота стіжка буде 15 - 10 = 5 м., а луч кола перетину, визначимо якою прямокутного трикутника $\triangle M.N$, де другою прямокутною буде висота стіжка 5 м., в мірілі 1:200, 25 м/м/, а протипрямка нахилена до $\triangle M$ під кутом β .

Рисуємо дугу кола, осередка 15, та луча R.

Це буде частина перетину шарової площі 10.10 з стіжком.

З точки 10 ведемо дотичні до нарисованої дуги кола. Це буде напрямом шарових простих /10.10/ потрібних нам площ.

Дальше визначення цих площ ясно з рисунку.

ЗАДАЧА 21. Знайти кут, створений двома перекрещеними простими $ВА/ва, i = 10^\circ/m$ та $ДС/дс, i_1 = 12,5^\circ/m$. Мірило 1:200 /рис. 432, таб. LXXVII/

Цю задачу, як й останні, розв'яжемо за допомогою перекидання площ /злиття/ з якою небудь шаровою площею.

Через дані прості ведемо площу, шарові прості якої проходять через відповідні точки градуїровки простих.

Цю площу перекинемо на шарову площу, наприк. 7.7. Тоді точки 7 і 7 даних простих залишаються на місці і потрібно буде знайти злите положення ще одної точки /наипростіше точки ϵ перехрестя простих/ і тоді буде вже визначено і злите положення самих простих.

Визначимо графічно кут точки ϵ

Перекинемо просту AB на шарову площу 7.7. Кут точки 10 відносно шарової площі 7.7 буде $10-7 = 3m$. Відкладаємо на прямій $10.10_0 / 10.10_0 \perp ab /$ в даному нам мірилі $10.10_0 = 3m$, сполучаємо точки 7 і 10_0 і це буде злите положення простої AB . Кут точки ϵ вимірюється відтинком $e\epsilon_0 / e\epsilon_0 \perp ab /$.

При злитті площі даних простих з шаровою площею 7.7, точка ϵ буде посуватися по прямій eM до вісі обертання 7.7.

Віддалення точки ϵ від осі $77 / eM /$ буде протипрямою прямокутного трикутника, одною з прямих якого буде мет $/eM /$ цієї протипрямки, а другою - кут точки ϵ .

Трикутник $e\epsilon_0 M$ визначить потрібну для нас протипрямку $M\epsilon_0$.

Тепер відкладаємо на прямій eM в один, або другий бік від осі 77 довжину $M\epsilon_0$ протипрямки $M\epsilon$ і визначимо злите положення ϵ_0 точки ϵ .

Прості $\epsilon, 7, \epsilon, 7$ визначають дійсне положення даних простих і дадуть вимір кута, створеного цими простими.

ЗАДАЧА 22. Знайти дійсний вигляд трикутника з вершками $A/a, 5^\circ, B/b, 9^\circ, C/c, 6^\circ$. Мірило 1:100 /рис. 433 таб. LXXVII/.

Градуїруємо бік BC , та знаходимо шарову просту 5.5 площі даного трикутника. Потім зливаємо трикутник ABC з шаровою площею 5.5.

Тут треба звернути увагу на те, що мет даного трикутника, та його злите положення будуть споріднені фігури, з віссю споріднення шаровою простою 5.5.

Знайдемо з трикутника $cC, d/cd \perp 5.5, cC_1 = 1m$ віддалення c, d точки C від осі обертання.

Знаходимо злите положення C_0 точки C .

Прості $C_0 B_0$ і $c_0 b_0$ будуть споріднені прості з

спільною точкою 5 на вісі споріднення 5.5. Точка визначиться прямом 6B. до вісі 77.

Нарешті маємо дійсний вигляд аB. C. даного трикутника ABC

ЗАДАЧА 23. На даній площі $S/S_n, i=10\%$ /нарисувати квадрат /бік 1,125 м/. Мірило 1:50 /рис. 434, таб. LXXVI/.

Уявимо собі, що дана площа S перекинута навкруги шарової простої 12.12 і злита з цією шаровою площею.

Рисуємо на злитому положенні площі S даний квадрат A. B. C. D. і повертаємо його назад.

Віддалення точки D від осі кручення буде відтинок D. d., це буде протипрямка трикутника, де одна з прямих буде кат точки D.

Проста 1.12 /134=1 м / дасть напрямок для протипрямки d. D., що дасть можливість визначити точку d.

Бік ad і точка a визначаються користуючись спорідніністю даних фігур.

Решта точок можуть бути також визначені або за допомогою спорідненності, або переводячи дійсне віддалення злитих положень точок від осі обертання графічно у коти самих точок.

Одержимо квадрат з вершками A/a, 12,2/, B/b, 12,8/, C/c, 13,6/ та D/d, 13,1/.

ЗАДАЧА 24. Знайти віддалення по між двома рівнобіжними простими: AB/aб, i=15%/ та CD/cд, i=15%/ мірило 1:50 /рис. 435, таб. LXXVII/.

Ця задача вже була розв'язана /зад. 17/, тепер пристосуємо тут злиття площ.

Зливаємо площу даних прямих з шаровою площею 8.8.

В злитому положенні вистарчить знайти лише одну точку /напр. 8/.

Коли маємо злите положення 8, точки 8, то сполучаємо її з точкою 7 простої DE і це буде злите положення цієї простої. Через точку 7 простої AB ведемо просту рівнобіжну з простою 7.8. і це буде злите положення простої AB, а віддалення /l/ поміж ними вже знайти не трудно.

ЗАДАЧА 25. З даної точки A/a, 4/ спустити прям на дану просту BC/bc, i=15%/ мірило 1:50 /рис. 436, таб. LXXVII/.

Зливаємо площу, яка визначена даною простою і даною точкою з шаровою площею 4.4.

Злите положення простої BC буде 4 50. З точки a спускаємо прям aM. на злите положення простої BC, та повертаємо точку M. назад.

Мет необхідного нам пряма буде am; залишається градуїрувати його /на рис. не виконано/.

§ 57. ПРИКЛАДИ ВЖИТКУ КОТ ПРИ ПЛОЩАХ.

Спробуємо взяти методи попереднього параграфа при площах.

Такі приклади зустрічаються найчастіше тоді, коли треба проложити шлях, або відгалудження його, або при розміщеннях майдану на похилій площі.

При цих роботах, діло техника визначити де треба зробити викоп, а де насип.

Так що тут йде про визначення меж та викопів та насипів, а ці межі уявляють собою прості перетину даної площі з площами викопу, та насипу.

Коли треба визначити межові площі викопу та насипу, то повиненно бути дане мірило нахилу цієї площі, без чого градуіровка простої спадку неможлива.

На практиці маються де-які практичні цифри для цього мірила нахилу, але загального закону установити не можна. Таке мірло залежить від ґрунта, а головним чином від здібності цього ґрунту не розпадатися.

На практиці приймають:

для городньої землі, торфу та	
подібних гатунків	$1/2$
" глини, піску	$1/2 - 2/3$
" гравій, жорстка	$1/2 - 4/5$
" м'яккого камня та мергеля	1
" камня для викопу	$4/5 - 4/3$
" " насипання	$3 - 8$
" греблі взагалі $\alpha = 33^\circ 41,5'$	$2/3$

Тепер розв'яжемо таке завдання:

Треба на площі $S/S_n, i = 20\%$ на коті 16,4 розбити майдан, розміром $7m \times 12m$, мірило нахилу для насипу $H = \frac{2}{3}$, а для викопу $H_1 = 1$. Мірило 1:200 /рис. 437, таб. LXXVIII/.

На даній площі S ведемо шарову просту з котом 16,4, ця проста перетне площу майдану /положення його мусить бути задане/ в точках a і b .

Ці дві точки уявляють собою межі насипу та викопу, бо ці точки лежать як раз на самій площі.

Почнемо з насипу.

Мірило нахилу $H = \frac{2}{3}$, тому інтервал простої нахилу усіх площ насипу буде

$$l_1 = \frac{1}{H} = \frac{3}{2} m$$

що в даному мірилі /1:200/ виносить

$$l_1 = \frac{3}{2} 5 = 7,5 m.$$

Усі площі насипу /а також і викопу/ матимуть шарові прості рівнобіжні з боками майдану, а тому прості нахилу тих площ будуть будуть прамі до цих боків.

Ставимо до боків майдану прями, визнаємо їх за прості нахилу площ насипу, знаходимо на них кот 16 /площа майдану має кот $16,4$, току на простих нахилу треба відкласти $0,4 \cdot \frac{1}{4} = 3 \text{ мм}$, це буде кот 16 , а потім градуїруємо ці прості нахилу $\frac{1}{4} = 7,5 \text{ м/м}$.

Знайдемо просту перетину площі насипу бока ac . Одною з точок цієї простої буде спільна для майдану і площі S точка a , другу точку дасть перехрестя шарових простих або площ з однаковими котами /напр. 14 /. Сполучимо ці дві точки і маємо одну межеву просту насипу.

Те саме зробимо для бока майдану fu ; тут простою перетину площі насипу з площею S буде проста bn .

Перетину третьої площі насипу з площею S можна не знаходити; цей перетин визначиться сам собою.

Знайдемо перетини площ насипу між собою.

Одною з точок простої перетину площ насипу боків ce і ef буде спільна ім точка e , другою точкою буде одна з точок перехрестя шарових простих однакових котів обох площ.

Таким способом визначаються прості fk і es .

Точки s і k перехрестя цих останніх простих $/bc$ і fk / з простими, які були визначені раніш $/ad$ і bn /, визначають просту sk перетину площі насипу боку ef з площею S .

Маємо усі межі насипу; можемо висловити, що частину $abfc$ майдану, разом з скосами bjk , $fkse$ і aes треба насипати. З одержаного рисунку, можна визначити коти точок s і k , дізнати довжину відтинків as , sk і kb і вирахувати кількість потрібної для насипу землі.

Межі викопу визначаються подібним же способом, тільки тут треба знайти відповідний інтервал t_2 і звернути увагу на нахил площ викопу, протилежний попередньому.

Межі викопу будуть atq , b . Тут теж так само як й для насипу можна вирахувати кількість землі, що треба зняти, то порівняння з кількістю землі, потрібної для насипу, можна з'ясувати чи для даної праці треба довозити землю для насипу, чи її вистарчить з викопу.

По цьому зразку можна розв'язувати питання и про уложення поземих шляхів; що торкається шляхів з певним нахиленням, то це буде розв'язано в двох наступних прикладах.

Нахил шляхів визначається або в відсотках на тисячу $/\text{‰}/$ або дробом $/\frac{1}{20}, \frac{1}{25}$ і т.д./, в пер О.Вілінський. Нарисна Геометрія.

шому випадку маємо, що на 1000 m шлях знижується на дану кількість метрів /напр. для 5‰ на 5 m/, а у другому випадку маємо мірило нахилу i , користуючись яким не трудно визначити інтервал i .

На даній площі S/S_n , $i = 20\text{‰}$ треба розбити шлях з нахилом 1:25, шириною 4 m, роз'їздом /прямокутник 5 m x 15 m/, з тим щоб точка а шляху мала кот 20, мірило нахилу для насипу $H = 3/5$, для викопу $H_1 = 3/4$. Мірило 1:250 /рис. 438, таб. LXXVIII/.

Спочатку проградуємо шлях.

Мірило нахилу для нього маємо 25, тому інтервал буде виносити $1 : 1/25 = 25\text{ m}$, що в данному мірилі рівне $25.4 = 100\text{ m/m}$

Кот точки а буде 20, визначаємо наступний кот 21, можемо ще визначити середній кот 20,5.

Знайдемо просту перетину площі шляху з даною площею. Це буде проста ef, яка визначить точки g і b межи поміж насипом та викопом.

По зразку попередньої задачі для даного випадку /прямокутний майдан/ можна визначити прості $n_k i \text{ m}$, але решта простих вже визначиться за допомогою площ; шарові прості яких будуть простими, поведеними в даній площі під даним нахилом.

Наприклад для визначення межи насипу від точки h, на коті 21 рисуємо коло лучем $1 : 3/4 = 3/5\text{ m} \sim 5\text{ m}$ в даному мірилі /і з точки 20 ведемо дотичну. Це буде напрям шарової простої площі насипу. Проста перетину цієї площі з даною S буде межею насипу.

Для визначення межи викопу нам потрібно вже мати точку з котом 22, але тут можна взяти коло основи стіжка $1/2_1 = 1 : 3/5 = 5/3\text{ m}$ або $\sim 7\text{ m}$ не знизу межи шляху, а зверху, та з точки 20 повести до цього кола дотичну.

Це останнє коло буде потрібне також для другого боку шляху, бо можна просто повести шарові прості рівнобіжні з тима, що тільки що визначено, а рисування самого кола буде вже зайвим.

Напряж шарових простих бока встєж буде той самий, бо цей бік рівнобіжний з боками шляху.

Таким способом визначаються усі межи насипу, та викопу та можна обрахувати кількість потрібної для цього землі, як це вказано у попередньому прикладі.

Виконання задачі має невеличку різницю у випадку, коли фігура роз'їзду не прямокутник, а инша, як це маємо на рис. 439, таб. LXXVIII, де фігура роз'їзду є чотирекутник з основою 20 m, висотою 5 m, та кутами нахилу двох боків до основи 45° . Решта умов однакова з попередньою задачею.

Різниця в розв'язанні цієї задачі складається лише в рисуванні площ насипу та викопу для боків ab і cd.

Спочатку градуїруємо шлях і визначаємо його коти 20, 20,5 і 21. Потім знаходимо межі взагалі насипу та викопу /проста ef / і знаходимо межі для шляху та бока bc по зразку попереднього прикладу.

Для боку cd шукаємо точки з різними котами. Як що продовжити цей бік (на 2 нап'ям до перехрестя з шаровими простими площі шляху, то одержимо точки $x/21/$ и $y/20.5/$. Тут прийдеється використати шарову просту 20,5, бо перехрестя з шаровою простою 20 виходить по за межі рисунку.

Рисуємо коло, осередка $У$ і луча $\frac{7.5}{2}$ /маємо шарову висоту $\frac{1}{2}$ /, знаходимо шарові прості площі викопу бока cd , і перетин цієї площі з площами боків bc та шляху.

Те саме робимо для бока ab , себ-то знаходимо точки $a/20/$ и $2/20.5/$ цього боку і знову знаходимо шарові прості площі насипу, при шаровій висоті $\frac{1}{2}m$.

Перетин цієї площі з площами насипу бока bc та шляху визначають межі самого насипу.

Зупинимося ще над питанням яке зустрічається коли треба робити переїзди в розрізах греблі, або взагалі закругляти кути насипу, або викопу.

Уявим собі частину греблі /рис.440, таб. LXXVIII/ яка перерізана, щоб зробити проїзд. Частина стінки /Q/ ставиться тоді доземо та викладається з цегли, площа ж нахилу S переходить на розі в коничну поверхню, яка має керуючою еліпсо і нарешті вона переходить в площу R однакового з нею нахилу.

Найчастіше площі R і S перетинаються в площі ґрунту по простих R_0 і S_0 прямих між собою, але розв'яжемо це питання для загального випадку, коли згаданий кут різниться від 90° .

Маємо площу S , бічну площу насипу греблі. Ця площа S має мірило нахилу простої нахилу $\frac{2}{3}$.

Вона визначена шаровою простою 20. Крім того маємо дозему площу Q , складену з цегли і шарову просту /20/ площі R , яка повинна визначити коничну поверхню і частину переходової поверхні.

Для інтервала площі R візьмемо $24^m/m$, тоді інтервал площі S буде $(1 : \frac{2}{3}) 24 = 36^m/m$.

Вершок коничної поверхні визначиться точкою перетину трьох площ S , R і Q . Знаходимо просту перетину ab площ S і R , перехрестя якої з слідом Q дасть мет c вершка коничної поверхні; його велика вісь буде прям cd , спущеним з точки c на шарову просту 20 площі S .

Для того щоби знайти решту елементів цього еліпсу, ведемо коло, осередка C , луча cd і з точки e перехрестя цього кола з шаровою простою 20 площі R спускаємо прям ef на велику вісь cd еліпса.

Точка f буде вогнищем еліпса, а симетрична в осередком C точка f_1 ($cf = cf_1$) буде другим вогни-

шем.

Як що на продовженню пряму ef відложимо $de=ef$, сполучимо точку q з точкою f_1 , то точка b перехрестя простої f_1q з шаровою простою 20 площі R буде точкою переходу коничної поверхні в площу R .

Таким чином маємо коничну поверхню з верш-ком c , та частиною hd еліпсу основи, яка з од-го боку від творчої ef переходить у площу R , а з другого боку, від творчої ed , переходить у площу S .

§ 58. КРИВІ ЛІНІЇ ТА ПОВЕРХНІ.

Довільна крива визначається, при метуванні котами, своїм метом, та вистарчаючою кількістю котів її точок. Для пласких кривих можна додати ще елементи площі до якій належить ця крива.

Криву з постійним нахилом, до площі порівнян-ня, так, як й кожен просту, можна градуїрувати, можна по аналогії, надати їй мірило нахилу.

Як що треба на даній кривій визначити кот даної точки, то це можна виконати більш менш точно.

Найточніший спосіб полягає у тому, що через дану криву, або через ту її частину, що обмежена сусідніми з даною точкою котами, ведемо допоможну циліндричну поверхню, творчі якої прямі до площі по-рівняння. Потім розгортаємо цю циліндричну поверхню і ця розгортка точно визначить кот даної точки.

Менш точно це завдання можна виконати так.

Як що треба визначити кот точки c /рис. 442, таб. LXXIX/, то будемо роздивлятися на частину да-ної кривої, обмежену котами 34 і 35, як на криву постійного нахилу і проградуїруємо цей відтинok. Для цього поділимо відтинok на рівні частки, які дуже мало відрізнялися б від простої, і розділ, що попа-де у дану точку визначить її кот.

Ще менш точний спосіб, це заміна відтинка ab кривої, простою de і визначення кота точки c , яка лежить на простій de приблизно на однім рівні з точкою c .

Коли ми знайомилися з кривими поверхнями /§ 34/, то на прикінці згадували поверхні, утворення яких не підлягає ніяким законам.

Такі криві поверхні названо було графічними поверхнями і яскравим прикладом такої поверхні може бути поверхня земної кулі.

Як що мати до діла з частинами поверхні зем-ної кулі, то вважають необхідним приймати, що пря-ми до цієї поверхні рівнобіжні, другими словами, для операції беруть відносно невеликі шматки такої по-верхні.

Так що в дальшому викладі будемо приймати за правило, що нашу графічну поверхню /будемо називати її в пристосованню до поверхні земної кулі-топографічною/, прям перетинає тільки в одній точці.

Топографічна поверхня визначається шерехом кривих ліній, збіжних або розбіжних. Ці криві лінії уявляють собою перетин даної топографічної поверхні з головними шаровими площами. Вони носять назву головних шарових ліній даної поверхні.

Шарове віддалення, як й при площах, можна брати довільне, але де які дисципліни прийняли вже сталу величину для цього віддалення, а саме в технічних планах $1 \div 5 \text{ м}$, в меліоративних понижується іноді до $0,25 \text{ см}$, при викреслюванні географічних мал $10 \div 100 \text{ м}$.

При визначенню топографічної поверхні за допомогою шарових ліній, приймається умова, що в межах цих ліній, поверхня не має різких змін, що всі криві, поведени тут мало чим відрізняються від прости́х. Коли це не виконано, то треба зменшити шарове віддалення, ввести нові шарові лінії, і приблизитись наскільки це можливо до цієї умови.

Знайдемо криву перетину даної кривої поверхні /рис. 443, таб. LXXIX/ з площею $S / S_n, i = 10^\circ \text{ м}$.

Зрозуміло, що точки перехрестя однакових шарових прости́х з шаровими лініями, будуть точками, спільними і для площі і для поверхні. Коли ж сполучимо одержані точки перехрестя плавкою кривою, то маємо криву перетину площі з поверхнею.

Не зовсім ясна буде частина кривої, яка уявляє собою ніби вершок кривої, бо шарові проста́та лінія 17.17 не перехрещуються і тут прийдеться або ужити способів, про які буде обговорено нижче, або нарисувати цю частину кривої приблизно.

Найчастіше вживається при котах допоміжна площа, пряма до площі порівняння, так звана профільна площа. Крива перетину профільної площі з даною кривою поверхнею носить назву профілю даної поверхні і буває дуже корисною при розв'язанні багатьох задач.

Профіль кривої поверхні рисується так /рис. 444, таб. LXXIX/.

Слід S профільної площі перехрещує шарові криві даної поверхні в точках a, b, c, d, e, f, g, h . Коти цих точок визначені тими шаровими лініями, на яких точки лежать. Перекинемо площу S на шарову площу 20.20 і одержимо дійсний вигляд кривої перетину і точне положення точок A, B, C і т.д.

Для ясности рисунку, самий профіль можна ви-нести окремо, як це зроблено на рис. 444, таб. LXXIX, На довільній простій відк... смо відтинки $a\epsilon$.

вс, сd і т.д.; в точок поділу ставимо прями і відкладаємо на них різницю котів в даному мірилі. Коли одержується профіль занадто плаский, то мірило котів можна збільшити у довільне число разів /на рис. в 2,5 рази/. Сполучаємо точки а, б, с, d, е, f, g, h плавкою кривою і маємо профіль даної поверхні в даному напрямку. Зрозуміло, що кожна поверхня може мати безліч профілів.

Користування профілем дає змогу точно визначити точку, яка лежить на даній кривій поверхні. Напр. для точки М /m/ переносимо на профіль положення точки m, ставимо прям і тим визначимо точку М. Висота точки М над шаровою площею 20 буде 1,6 m, тому кот точки М виносить $20 + 1,6 = 21,6 m$.

Це буде самий точний спосіб визначення котів точок, які лежать на кривій поверхні. В багатьох випадках вистарчає вживання менш точних, але проте далеко менш забарних способів.

Напр. через мет і точки L ведемо профільну площу /по можливості прямо до сусідніх шарових ліній. Потім сполучаємо у простороні точки перетину шарових ліній з профільною площею простими і перекидаємо одержаний трикутник на шарову площу 20.

Якщо з точки L поведемо прям, то він визначить точку L, висоту цієї точки / lL / відносно площі 20, а разом з тим й кот її $/20 + lL/$. Для людини вже вправленої, перекидання трикутника буде зайвим, бо положення самої точки відносно шарових ліній визначить віддалення її від площі 20 $/ln:nt/$.

Другий спосіб полягає у тому, що через дану точку р ставлять мірило так, щоб один з поділів його /напр. 12/ знайшовся на шаровій лінії 20, а другий поділ /на 10 більш = 22/ на шаровій лінії 21, тоді відповідний поділ мірила визначить положення точки відносно площі 20, а тим самим й її кот.

Це найпростіший та найбільш вживаний спосіб визначення котів точок, що лежать на даній кривій поверхні.

Профіль кривої поверхні може бути корисним, коли треба знайти перетин простої з поверхнею, або коли треба через дану точку провести дотичну до кривої. Ця остання задача розв'язана на рис. 444, таб. LXXIX. Через дану точку N /n/ ведемо профільну площу, знаходимо профіль кривої поверхні, визначаємо на ньому точку M, та через точку M ведемо дотичну до профілю. Проградувати цю дотичну вже не трудно, мет же дотичної збігається з S.

Коли крива поверхня задана шаровими лініями, то точне визначення точок цієї поверхні, часто вимагає ще додаткових шарових ліній. Спосіб нанесен-

ня на рисунок додаткових шарових ліній, носить назву інтерполірування і це інтерполірування може бути виконано так.

Або ведемо до двох сусідніх шарових ліній /напр. 50 і 60 рис. 445, таб. LXXIX/ де кілька спільних прямих, які вже або переполсвинюємо /як що треба визначити шарову лінію 55/, або поділяємо на відповідну кількість частин, та сполучаємо одержані точки плавкою кривою. Цей спосіб інтерполірування вживається тоді, коли треба визначити одну з шарових ліній.

Коли ж треба відразу визначити цілий шерг шарових ліній, то скоріше та простіше для інтерполірування користуватися лінійкою мірила, причому цю лінійку ставимо так, щоб один з поділів її /напр. I/ завжди знаходився на одній шаровій простій, а другий на другій сусідній. Напр. на рис. 445, таб. LXXIX треба визначити шарові лінії 62, 64, 66, 68, себ то треба поділяти на п'ять частин, тому поділ I лінійки мірила стоїть завжди на шаровій лінії 60, а на шаровій лінії 70 повинен бути поділ кратний п'яти /15, 17, 5, 20 і т.д./. Плaskі криві, якими сполучено відповідні точки поділу, уявляють собою шарові лінії 62, 64 і т.д.

Площу дотичну до даної кривої поверхні в даній точці, можна повести за допомогою профілю так.

Дану точку визначаємо, або за допомогою інтерполірування, або беремо одну з точок шарової лінії /напр. A шарової лінії 13.13, рис. 446, таб. LXXIX/.

Дотична до кривої поверхні площа, як відомо визначається двома дотичними до двох кривих ліній даної поверхні, що перекрещуються в точці дотику.

Одна з таких кривих ліній буде шарова лінія 13.13 і одною з дотичних буде проста Bc

Для того, щоб визначити другу криву лінію, ведемо профіль даної кривої поверхні, через точку A. До перекинутого профілю, ведемо у точці A дотичну, градуїруємо її і це буде друга дотична де яка разом з Bc визначає дотичну площу S.

Мірилом нахилу кривої поверхні в даній точці буде мірило нахилу площі дотичної до поверхні в даній точці, себ-то мірило нахилу простої нахилу цієї площі. Проста нахилу дотичної площі має найбільший нахил з усіх простих, поведених через дану точку.

Як що будемо від даної точки кривої поверхні з напрямку простої нахилу дотичної площі, переходити послідовно до другої точки від неї теж в напрямку простої нахилу вже другої точки до третьої і т.д. на кривій поверхні одержимо криву найбільшого спадку або лінію спадку. Ці лінії спадку уявляють собою шлях води що тече з поверхні.

Лінії спаду перехрещуються у простороні й на рисунку з шаровими лініями під прямим кутом.

Щоб закінчити цей параграф, розберемо ще декілька прикладів на перетин кривої поверхні з кривою ж поверхнею, та з кривою лінією.

Буває на практиці часто потрібно, як це було й з площами, мати перехід площі до кривої поверхні, або одної кривої поверхні до другої. Тут вживаються перехідові коничні поверхні, причому ці коничні поверхні можуть бути і еліптичні і колові.

Маємо площу $S/S_n, i=10^\circ$ та криву поверхню /рис 448, таб. LXXXIX/ треба за допомогою коничної поверхні, вершок якої лежить на простій нахилу в точці α , зробити перехід по між двома даними площею та поверхнею.

Задача зводиться до знаходження перетину коничної поверхні з даною кривою.

Конична поверхня визначається своїм вершком, а також шаровими лініями, які для даного випадку будуть колами.

Знаходимо, по загальному зразку, перетин двох кривих поверхней /даної і коничної/. Перехрестя відповідних шарових ліній, точки b, c, d, e, f визначають криву перетину двох кривих поверхней.

Таким чином одержимо спочатку площу, що визначена шаровими простими, потім коничну поверхню, з шаровими кривими - дугами кол, і нарешті дану криву поверхню, визначена теж шаровими лініями даної кривої лінії.

Перетин кривої лінії з кривою поверхнею, так як і раніш, знаходимо користуючись допоможними поверхнями, циліндричними, або коничними.

Маємо криву поверхню /рис. 449, таб. LXXXIX/ та криву лінію $AB/ab/$; треба знайти точки їх перетину.

Ведемо через дану криву лінію, як через керуючу, допоможну поверхню циліндричну поверхню. Ця циліндрична поверхня перетинається шаровими площами по творчих, тому вона визначається даною кривою лінією, та шаровими простими, рівнобіжними між собою.

Знаходимо криву перетину допоможної циліндричної поверхні з даною /на рисунку крапкована/. Точки m і n перехрестя двох кривих ліній будуть спільними точками і для даної кривої і для даної кривої поверхні, тому вони виявляють собою бажані точки перетину.

За допоможну площу беруть иноді й не циліндричну поверхню, а иншу, причому творчі цієї поверхні уявляють собою, поземі прості прямі й у простороні і на рисунку до даної кривої.

Така допоможна крива поверхня визначається /рис 450, таб. LXXX/ даною кривою та шаровими прос-

тими, прямими до даної кривої.

Крива cd перетину допоможної кривої поверхні з даною, носить назву нульової кривої поверхні. Ця крива вживається часто при будовах шляхів.

Багато питань топографічних поверхней розглядаються в геодезії, гідротехніці та інших галузях техніки, але обмеженість часу та місця не дає змоги звернути на це достаточну увагу. Ті основні питання, що розглянуті у цьому курсі, дадуть змогу кожному розв'язувати питання й більш широкі.

Звернемо увагу ще на одне питання.

Коли на даній кривій поверхні треба повести шлях, певного постійного нахилу, напр. H , то вісь цього шляху рисується так /рис. 451, таб. LXXX/.

Інтервалом осі даного шляху буде $l = \frac{1}{H}$. Уявляємо, що поміж шаровими лініями даної поверхні, ця вісь може бути взята за просту, беремо в ціркуль в даному мірілі l і від початкової точки a закреслюємо дугу до перехрестя з сусідньою шаровою лінією в точці b . Потім так само знаходимо точки c, d, e, f і т.д.

Плавка крива $abcdef$ і т.д. уявляє собою вісь шляху, постійного нахилу H , що лежить на даній кривій поверхні.

Так само можна знайти й відгалудження ekl і smn даного шляху, того ж самого, або іншого нахилу.

§ 59 ПРИКЛАДИ ВЖИВАННЯ КОТІВ ПРИ КРИВИХ ПОВЕРХНЯХ.

Для більш ясного уявлення правил попереднього параграфу, розв'яжемо де-кілька питань, з якими може прийде́ться мати дію на практиці.

На кривій поверхні /рис. 452, таб. LXXX/, яка визначена, в мірілі 1:500, шаровими лініями що два метри /шарове віддалення 2 м/, починаючи з точки A /а, 53/ треба повести прямий шлях, широкий 10 м, з спадом 1:20. Насипи мають мірило нахилу $\frac{3}{4}$, викопи $\frac{2}{3}$. Треба знайти межі насипу й викопу.

Спочатку рисуємо вісь SS шляху, відкладаємо ширину; тим самим шлях буде вже визначений.

Треба його проградуйувати. Шлях має нахил 1:20, тому мірило нахилу його буде $\frac{1}{20}$, а інтервал $l = \frac{1}{\frac{1}{20}} = 20$ м. Беремо в даному нам мірілі 20 м і визначаємо коти 52,51 і 50 даного шляху. Дальша праця провадиться так само, як й в попередніх прикладах.

Для насипу рисуємо стіжок, з вершком в коті 50, основою в шаровій площі 53; тому луч основи цьо-

го стіжка буде $\frac{4}{3} \cdot 3 = 4\text{ м}$, або в даному мірилі $8 \frac{1}{3}\text{ м}$. Одержимо дві скос. площі /по обидва боки шляху/ насипу, перетин яких з даною кривою поверхнею дасть криві $e'n$, $e_1'n_1$ межі насипу. Точки e і e_1 визначаємо тим, що знаходимо перехрестя шарових протистих і ліній 52, і потім вже перехрестя знайдених кривих з боком ac/a_1c_1 шляху визначить ці точки e і e_1 .

При будівництві викопу, треба звернути увагу на те, щоб дощова вода не псувала стінок, тому завжди при викопах роблять ще рівчак. Головні розміри таких рівчаків, найчастіше уживаних на практиці показані на рис. 453, таб. LXXX.

Тому при викопу, ведуть межі рівчака, себ-то на віддаленню $1,8\text{ м}$ ведуть прості рівнобіжні з шляхом і вже будівництво стіжка з нахилом $2/3$ проводять від межевих точок рівчака.

На рисунку побудовано стіжок з вершком в точці 52, основою в шаровій площі 50, лучем кола основи $\frac{3}{2} \cdot 2 = 3\text{ м}$, або в даному мірилі $6 \frac{1}{3}\text{ м}$. Одержимо межі викопу $f'm$ і $f_1'm_1$.

Крива $f'e, e_1f_1$ уявляє собою межу насипу та викопу, себ-то так звану нульову лінію площі даного шляху.

На рисунку 453, таб. LXXX показано в побільшеному мірилі перехід і кінець рівчака. Такі закінчення можна робити різними способами, в залежності від місцевих обставин, але це не входить в обсяг цього курсу.

На рис. 454, таб. LXXX маємо приклад поземого не прямого шляху.

На даній кривій поверхні /мірило $1:500$ /, в шаровими лініями що 1 м . треба повести на коті 100 поземий шлях, широкий 10 м . Спочатку цей шлях йде просто, а потім переходить в дугу кола, даного луча. Насипи мають мірило нахилу $2/3$, а викопи $2/5$. Треба знайти межі насипу та викопу.

Усе завдання розв'язується дуже просто, а саме: спочатку рисуємо вісь шляху, його межі $m'n$ і $m_1'n_1$, потім знаходимо площі насипу, та криві перетину цих площ з даною кривою поверхнею.

Криві ac і b будуть межами насипу.

Зрозуміло, що точки a і b перехрестя боків шляху з шаровою лінією 100, будуть точками переходу насипу в викоп.

Для викопу спочатку визначимо межі рівчаків, потім знаходимо площі викопу, при чому на тій частині шляху, що має вісь дугу, площа переходить в коничну поверхню того самого нахилу, а шарові протисті в дуги кол, які мають той самий осередок, що й вісь шляху.

Межами викопу будуть криві ed і f_1l .

На рис. 455, таб. LXXX показаний частково про-

філь насипу знайденого шляху /площа профілю Π_1 /, а на рис. 456, таб. LXXX, частина профілю викопу /профільна площа Π_2 / . Такі профілі можуть бути корисними для вираховування кількості землі.

Дуже складна праця визначення меж насипу і викопу, за допомогою рисунку площ нахилу та знаходження перетину цих площ з даною кривою поверхнею, можна в деяких випадках упростити користування профілями. Як що взяти достаточну кількість цих профілів, то тим самим визначаться точки кривих - меж насипу та викопу.

Вияснимо це на прикладі.

На кривій поверхні /рис. 457, таб. LXXXI/ мірило 1:250, шарові лінії до 1 м, треба розбити по земній площі широкій 6 м, з роз'їздом, у вигляді прямокутника $abcd$ /10 м $\times$ 15 м/ , та з відгалуженням, по дузі кола дуга 100 м, та під'ємом 50‰. Відгалуження широке 2,5 м відходить від боку cd роз'їзду. Нахил насипу $\frac{3}{5}$, викопу $\frac{2}{3}$.

Нахил 50‰ визначає, що на 1000 м протягу, мається під'єм, або спад 50 м, себ-то мірило нахилу виходить $50:1000 = \frac{1}{20}$. Такий спосіб визначення нахилу дуже часто вживається при залізничних шляхах.

Всі межі насипу та викопу можна виконати за допомогою площ нахилу, але можна це саме зробити й користуючись профілями.

Візьмемо наприклад профільну площу Π і перекинемо увесь профіль на площу шляху, себ-то шарову площу 100.

Спочатку нарисуємо профіль ґрунту /криву перетину даної кривої поверхні з профільною площею Π_1 / . З точок перехрестя сліду Π_1 , з шаровими лініями 94, 95, 96 ставимо прями і в даному мірилі, відкладаємо на них відповідні для кожної точки шарові висоти /для шарової лінії 94, відкладаємо $100-94 = 6$ м, в мірилі 1:250 - $6 \times 4 = 24$ м/м; для шарової лінії 95 - $100 - 95 = 5$ м, $5 \times 4 = 20$ м/м, і для шарової лінії 96 - $100 - 96 = 4$ м, $4 \times 4 = 16$ м/м/. Весь ґрунт знаходиться по під шляхом, тому згадані величини відкладаємо вниз.

Одержані точки треба сполучити плавкою кривою лінією, але коли не вимагається особливої точності, то можна користуватися й простими.

Потім з точок 5 та 6 ведемо прості даного для насипу нахилу $\frac{3}{5}$. Ці прості 5-3 і 6-4 визначать разом з простою 5-6 насип даного профілю, а точки 30 і 40 визначать мети 3 і 4 кривих меж насипу.

З правого боку шляху рівчак продовжений і на те місце, де мається насип. Це роблять в тих випадках, коли передбачають багато дощової води й небезпека псування цієї водою насипу.

Детальних вимірів такого рівчака не подаємо.

бо вони залежать від місцевих обставин.

Таким самим способом ведемо профільні площі $\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$, взагалі стільки, скільки потрібно для ясного визначення точок кривих меж насипу та викопу. Знайдені точки сполучаємо кривими і одержуємо межі насипу та викопу.

Більш яскраве користування профілями для визначення меж насипу та викопу видно з наступного прикладу.

На кривій поверхні /рис. 458, таб. LXXXI/, мірило 1:200, шарові лінії що I_m , починаючи від точки a /100/ треба повести шлях, широкий 4 м, з під'ємом 1:20, при чому цей шлях спочатку на кро-
тязі 20 м йде просто, а потім переходить у дугу, ду-
ча 50 м. Нахил насипу 2/3, викопу 1.

Спочатку наносимо на рисунку вісь шляху ad себ-то просту його частину, 20 м, потім рисуємо дугу ab , дука 50 м. Відтинок ab , що складається з ad і db , буде вісь шляху в межах рисунку. Рисуємо межі шляху, широкого 4 м. Градуїруємо вісь цього шляху. Нахил маємо 1/20; тому інтервал буде $1 : \frac{1}{20} = 20\%$, а в даному мірилі $20 \times 5 = 100\%$. Градуїруємо не тільки цілими числами, але ще й полови-
нами і одержуємо в межах рисунку такі точки шляху: $a/100/$, $c/100.5/$, $d/101/$, $e/101.5/$, $b/102/$.

Через кожну з цих точок ведемо профільну площу і знаходимо відповідний профіль.

Профільна площа Π_1 , кот 100.

Рисуємо спочатку, як це показувалося в попередньому прикладі, профіль ґрунту /крапкована лінія/, який ясно показує, що з обох боків шляху треба зробити викоп. Треба, виходить, з обох боків зробити рівчаки, тому ведемо прості 10.11 і 12.13 з нахилом 2/3 /як для насипу/. Точки 11 і 13 визначаться тим, що глибина та ширина рівчака /внизу/ виносить 0,5 м, таким чином визначаться точки 14 і 15. З цих точок починається викоп, ведемо прості 14.2. та 15.1, з нахилом, як для викопу /1/ і визна-
чаємо точки 1. і 2. перехрестя з профілем ґрунту.

Маємо межі викопу 1. 15. 11. 10. 12. 13. 14. 2.

Знаходимо мети 1 і 2 точок 1. і 2.. Це будуть точки кривої - межі викопу.

Профільна площа Π_2 /кот 100,5/ дає профіль, який показує, що з одного боку залишається викоп, а з другого боку починається вже насип. Маємо точки 3 і 4 кривих.

Профільна площа Π_3 /кот 101/ дає так само, як й попередня, з одного боку викоп, з другого на-
сип і визначає точки 5 і 6.

Профільна площа Π_4 /кот 101,5/ визначить точки 7 і 8, а профільна площа Π_5 /кот 102/ визна-
чить точки 9 і 10.

Коли бажано усю працю виконати ще точніше, то можна взяти площі на котах 11,25; 100,75, 101, 101,75 і т.д. і мати більше точок кривих.

Одержані точки 1,3,5,7,9, а також 2,4,6,8,10 сполучаємо плавкими кривими і одержуємо межі насипу та викопу.

На кожному профілю маємо точку перехрестя кривої ґрунту, з площею шляху / O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 /. Як що сполучити ці нульові точки для кожного профілю павкою кривою 00, то одержимо нульову лінію даного шляху, лінію, яка показує де починається насип, а де кінчається викоп, межа між ними.

Е. ТЕОРІЯ ТІНЕЙ.

§ 60. ВСТУП.

Жмут проміння цілком освітлює площу, яку поставлено на його шляху. Як що на цьому шляху проміння поставимо точку, то той промінь світла, що зустрічає точку, не піде далі і на освітленій площі матимемо темну точку, тінь даної точки.

На шляху проміння можна поставити не лише точку, але кожний предмет /фігуру, многостінник, криву поверхню/, що затримає проміння і дасть темну пляму, тінь даного предмета.

Такі не освітлені місця, що виникають від взаємного положення предмета, та проміння / а тим самим й джерела освітлення/ називаються ВЛАСНОЮ ТІНЬЮ, або просто ТІНЬЮ предмета.

За площу, на якій відбивається тінь даного предмета, візьмемо площі мету, позему і дозему, в аксонометрії, та перспективі крім того для цього иноді вживається площа відбитку, а в котах і площа порівняння, або одна з шарових площ.

Як що предмети стоять поруч один коло другого, то крім власної тіні, маємо ще один гатунок тіні, а саме один з предметів кидає тінь на другий, таку тінь називатимемо ВІДБИТОЮ ТІНЬЮ.

Предмет, що стоїть на шляху проміння, освітлюється ними з одного боку, частина його поверхні

буде темною. Ту частину предмету називатимемо ЗАТІНЕНОЮ ЧАСТИНОЮ предмета.

Що торкається самого джерела освітлення, то тут можуть бути два випадки: джерело освітлення знаходиться близько від предмета і джерело освітлення знаходиться на безконечно далекому віддаленню.

Перший випадок, випадок ЦЕНТРАЛЬНОГО або ОСЕРЕДКОВОГО освітлення, зустрічається часто в житті, коли маємо за джерело освітлення лампу, свічку і т.п. Проміння освітлення тут виходять з однієї точки, з джерела освітлення.

Другий випадок, РІВНОБІЖНЕ освітлення, має місце при соняшнім освітленню. Джерело освітлення знаходиться дуже далеко, тому усі проміння рівнобіжні між собою.

За напрям проміння рівнобіжного освітлення беруть напрям АВ /рис. 450, таб. LXXXII / куба, дві стінки якого рівнобіжні з площами мету /KBCD і KBED / . Мети напрямку проміння будуть поземим СВ доземим DB. Ці дві протиставляють собою косину квадрата - стінки куба, тому вони похилені до KB під кутом 45°. Понеже KB по нашій умові, рівнобіжне з віссю мету OX, то виходить, що мети проміння нахилені до вісі OX під кутом 45°.

Що торкається нахилу самого проміння до площ мету, то цей кут φ для обох площ мету буде однаковий і виносить:

Косина СВ, коли бік куба буде а, виносить

$$CB = a\sqrt{2}$$

З трикутника ABC маємо

$$AC = CB, \text{ то } \varphi$$

$$\text{то } \varphi = \frac{AB}{CB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

себ-то

$$\varphi = 35^{\circ} 15' 53''$$

Напрямок проміння, при рівнобіжному освітленню, може бути й інший, але це буде в кожному окремому випадку заготовлено /"напрямок проміння довільний"/, коли ж при виконуваних завданнях про напрямок проміння нічого не згадується, то цей напрямок прийнятий нормальний /нахил мету до проміння 45°/.

Кожне проміння можна вважати за просту, що визначена своїми метами. Як що за площу освітлення прийняти площі мету, то тінь, яку відбиває даний промінь, буде точка перетину проміння з площею мету. себ-то слід проміння.

Виходить, що вся праця зводиться до визначення слідів того проміння, який зустрічається з даним предметом.

За площі освітлення візьмемо площі мету, тому за тінь будемо рахувати той слід проміння, який

упаде в перший двостінний кут. Це буде ДІЙСНА тінь. Другий слід проміння, при вибраному нами напрямку, упадає в другі двостінні кути (другий або четвертий/. Такі сліди називатимемо УЯВНОЮ тінню.

§ 61. РІВНОБІЖНЕ ОСВІТЛЕННЯ (власні тіні)

Тінь точки не викликає ніяких труднощів. Це буде слід того проміння, який попадає на дану точку. Тінь простої може упасти або на позему площу мету, або на дозему, або на обидві зразу.

На рис. 460, таб. I XXXII маємо тінь простої на поземій площі мету.

Для того щоб знайти тінь простої треба визначити тіні двох її точок, та сполучити її простою, бо тінь простої буде теж простою.

Дійсно, коли через усі точки даної простої повести проміння, то утвориться площа проміння, яка в перетині з площею мету /15 § I/ дасть просту.

Знаходимо тінь точки $A/a, a'$. Ведемо через точку A промінь /даного напрямку/ і знехедимо поземий слід A_0 цього проміння. Те саме виконуємо й для другої точки $B/b, b'$ даної простої. Тінню простої AB буде проста ж $A_0 B_0$.

На рис. 461, таб. I XXXIII маємо випадок, коли тіні даної простої лягає на дозему площу мету. Так само знаходимо тіні двох точок простої і сполучаємо їх простою. Тінню буде проста $A_0 B_0$.

На рис. 462, таб. I XXXIV маємо випадок, коли одна частина простої має дійсною позему тінню, а друга її частина дозему.

Знаходимо тінь точки $A/a, a'$. Дійсною тінню буде точка A_0 . Точка $B/b, b'$ має позему уявну тінню, точку B_0 , а дійсною тінню буде доземий слід B' .

Сполучати точку A_0 з B_0 не можна, бо вони лежать на різних площях мету. Тому сполучаємо точку A_0 з точкою B' і бачимо, що до точки C_0 /перехресття $A_0 B_0$ з віссю ox /, дійсна тіннь лягає на позему площу мету.

Сполучаємо точку C_0 з точкою B_0 /вони влягають в одній доземій площі мету/ і маємо дійсну дозему тіннь $C_0 B_0$. Повна тіннь простої AB буде ломана лінія $A_0 C_0 B_0$.

Цю саму тіннь можна визначити, за допомогою уявної доземої тіні A_0 точки A . Знаходимо тіннь B' і A_0 точку C_0 перелому і відтинок $A_0 C_0$.

Прості рівнобіжні з площами мету мають тіні на відповідних площях мету, рівнобіжними з самою

простою.

Проста $AB/a'b'$ рівнобіжна з поземою площею мету /рис. 463, таб. LXXXII/ має тінь $A.B. \parallel a'b' \parallel AB$, проста ж $AB/a'b'$ рівнобіжна з доземою площею мету /рис. 464, таб. LXXXII/ має частину тині $C.B'$, що лягла на дозему площу мету, рівнобіжною з самою простою $C.B' \parallel a'b' \parallel AB$, а частина $C.A.$ вже не підлягає цьому правилу.

Висновком з цього може бути те, що й по величині, для відтинків простої рівнобіжної з площами мету, тінь рівна відтинкові.

Прості прямі до площ мету мають тінь прямою до вісі OX .

Проста $AB/a'b'$ пряма до поземної площі мету /рис. 465, таб. LXXXII/, має тінню ламану лінію $A.C.B'$.

Поземий слід простої AB зливається з поземим її метом, тому й тінь цієї точки теж попаде у ту саму спільну точку. Цей випадок приводить нас до висновку, що **ТІНЬЮ СЛІДУ ПРОСТОЇ БУДЕ САМ СЛІД.**

Далі тінь $A.C.$ зливається з напрямком проміню, а тінь $C.B' \parallel a'b' \parallel AB$ і пряма до OX .

Тінню кривої лінії теж буде крива.

Для визначення тині кривої лінії треба визначити тині вистарчаючої кількості її точок, а потім сполучити ці точки плавкою кривою.

На рис. 466, таб. LXXXII маємо приклад тині кривої лінії з переломом в точці $M. /A., B.C.M.D.B' /$

Визначення тині фігур не уявляє жадних труднощів. Треба знайти тині боків, для чого треба знайти тині вершків.

Напр. для того щоб визначити тині трикутника $ABC/a'b'c'$ треба знайти тині усіх його вершків A, B і C /рис. 467, таб. LXXXII/.

Тінню даного трикутника буде багатокутник $A.M.B'. N.C.$, при чому вершки A і C мають дійсну тінь позему, а вершок B дозему; тому тині боків AB і BC мають переломи в точках $M.$ і $N.$

Трикутник abc тині закривається самим трикутником ABC , тому цей клаптик тині не зафарбовується, тоді як уся власна тінь зафарбовується темною фарбою.

Для того, щоб знайти тінь кривої фігури взагалі, треба знайти тині точок цієї фігури і сполучити ці точки плавкою кривою. Тут теж можуть бути переломи тіней.

Тінь кола взагалі буде еліпс, бо коли поведемо до усіх точок обводу кола проміння, то одержимо циліндричну поверхню, яка перетинається з площами мету по еліпсу.

Як що площа кола рівнобіжна з площею мету, то тінню такого кола на цю площу буде теж коло того самого луча.

3/5, 5'/ На рис. 468, таб. LXXXII маємо коло, осередка луча γ , площа якого рівнобіжна з поземою площею мету, тому позема тінь цього кола буде теж колом.

Знаходимо позему тінь S , осередка S , рисуємо коло осередка S , луча γ , - це буде позема тінь даного кола.

В точках 1. і 2. ця тінь переходить в уявну і треба для цієї частини визначити дійсну дозему тінь.

Точки 1. і 2. уявляють собою тінь точок 1/1, 1'/ і 2/2, 2'/, тому дуга 1.82 буде мати дійсну позему тінь а дуга 1.2 дійсну дозему тінь.

Визначимо точки 3, 4, 5, 6 і 7 дуги 1.2 і знайдемо дійсну тінь їх, сполучимо ці тіні 3., 4., 5., 6., 7./ плавкою кривою, то одержимо повну тінь даного нам кола.

Тінь многостінника уявляє собою тінь контура його, контура, який визначається крайніми проміннями, що торкаються цього многостінника.

Маємо /рис. 469, таб. LXXXII / піраміду $SABCD$ / $sabed, s'a'b'c'd'$ /, основа якої стоїть на поземій площі мету; треба визначити тіні.

Межові проміння проходять через точки b і d тому контур, що визначає тінь буде складатися з рубів SB і SD . Стінки SAB і SAD будуть освітлені, а стінки SBC і SCD будуть знаходитися у тіні, будуть затіненими частинами піраміди.

Для визначення тіні даної піраміди треба знайти тінь точок B, D і S , або рубів SB і SD .

Тінь точки B , яка уявляє собою слід руба SB , лежить в точці b ; те саме відноситься й до точки D .

Вершок S піраміди має дозему дійсну тінь S' , тому загальна тінь піраміди уявляє собою фігуру в b, m, S', n, d, e , причому тіні рубів SB і SD будуть ломані лінії.

Частина тіні закривається самою пірамідою, а саме: на поземому меті dck і на доземому $m, c'e'$.

На поземому меті затіненою частиною буде мет sbc , а на доземому sca .

Тінь куба 1.2.3.4.5.6.7.8 /1.2.3.4.5.6.7.8, 1'2'3'4'5'6'7'8'/ що висить у повітрі /рис. 470, таб. LXXXII / знаходиться тим самим способом.

Контур рубів, що дають тінь, складається з рубів 1.4, 4.3, 3.7, 7.6, 6.5 і 5.1. Знаходимо тіні вершків 1, 5, 6, 7, 3 і 4 і сполучаємо їх простими.

Руби 3.4, 5.6 рівнобіжні з обома площами мету, тому їх тіні рівнобіжні, і поземо, і доземо з самими рубами.

Руби 1.4 і 7.6 прямі до доземної площі мету, разом з тим вони рівнобіжні з поземою площею мету,

тому поземі їх тіні прямі до вісі OX і рівнобіжні з самими рубами, а дозема тінь зливається з відповідним промінням.

Руби 1.5 і 3.7 прямі до поземної площі мету, тому поземо їх тінь зливається з напрямком проміння, а доземо вона буде прямою до вісі.

Затіненою частиною куба будуть стінки 1.2.6 5 і 2.3.7.6, які на обох метях закриваються другими освітленими стінками, а тому не зафарбовуються.

Тінь стіжка, як і взагалі коничної поверхні знаходиться так само, як тінь піраміди.

На рис. 471, таб. LXXXIII це завдання виконано.

Знайдена позема /уявна/ тінь S , вершка S , і з точки S поведені дотичні $S.a$ і $S.b$ до кола основи стіжка. Потім знайдена дійсна дозема тінь S' , вершка S і визначені переломи.

Творчі SA і SB визначають межі освітленої і затіненої частин стіжка.

Тінь циліндричної поверхні, що стоїть на поземній площі мету, визначена на рис. 472, таб. LXXXIII

Спочатку знайдена тінь верхньої основи, яка буде колом, бо верхня основа рівнобіжна з поземою площею мету. Потім ведемо спільні дотичні до кол нижньої основи і тині верхньої основи і тоді маємо межі усієї тині циліндричної поверхні.

Творчі AA_1 і BB_1 визначають затінену частину циліндричної поверхні.

Коли б тінь верхньої основи частково попала на дозему площу мету, треба було б знайти дійсну дозему тінь частини верхньої основи, знайти дійсну дозему тінь точок D або E дотику і тим буде визначений перелом тиней творчих AD і BE .

Для визначення тині кулі /рис. 473, таб. LXXXIII треба ужити де-яких допоможних методів.

Усі проміння, що обертають кулю, та визначають її тінь, утворюють циліндричну поверхню, яка в перетині з площами мету дасть еліпси. Тому і тінню кулі буде еліпс.

Цей самий циліндр проміння буде торкатися кулі по колу, яке й буде межою затіненої частини, а це коло змитується тиж еліпсами.

Спочатку визначимо тині осередка S кулі: поземою /уявною/ тінню буде точка S_0 , а доземою /дійсною/ точка S_1 .

Знайдемо спочатку позему тінь кулі, а разом з тим і поземий мет межового еліпсу.

Ак було сказано вже тінню кулі буде еліпс. Осередком його буде точка S_0 , великою віссю проміннь SS_1 , а малою $A.B.$ і S_0 . Точки A_0 і B_0 , що лежать на межах проміннях, визначають відразу розмір малої вісі. Залишається знайти велику вісь.

Через промінь, поведений через осередок S , ведемо допоможну площу, пряму до поземої площі мету, яка перетне кулю по колу.

Перекинемо цю допоможну площу, обертанням навкруги мета SS_0 на позему площу мету.

Осередок S злитого положення кола перетину кулі з допоможною площею, буде лежати на прямі SS_0 і на віддаленні рівному поземометовому пряму $/SS_0 = S'k/$.

З осередка S рисуємо коло, луча рівного лучеві кулі.

Сполучаємо точки S і S_0 і це буде злитим положенням проміня, поведеного через осередок кулі. Ведемо дотичні до злитого кола, рівнобіжні з злитим напрямком проміня $/CC_0 \parallel DD_0 \parallel SS_0 /$, які визначають крайні точки C_0 і D_0 еліпсу тіні, а разом з тим його велику вісь.

Рисуємо по цих даних еліпс поземої тіні і бачимо, що тільки частина його, а саме $M.D.M.$ буде дійсною тінню кулі, а решта буде уявною.

Знаходимо тепер доземий еліпс тіні кулі таким самим способом, користуючись допоможною площею, поведеною через промінь $s's_0$, та прямою до доземної площі мету.

Злите положення осередка кола перетину цієї допоможної площі з кулею, буде точка $S'/s's' = S'k$; $S's' \perp s's_0$. Злите положення проміня буде $S'S_0$ і дотичні $G'G_0$, $H'H_0$ визначають велику вісь еліпса; мала вісь його проходить через осередок S_0 , пряма до $s's_0$ і межові проміння визначають крайні її точки E_0 і F_0 .

По цих даних рисуємо дозему тінь кулі еліпс, який повинен проходити через точки M і M_0 .

Повна дійсна тінь даної кулі визначена, залишається знайти мети кола, що визначає межі затіненої частини кулі.

Почнемо з поземого мету цього кола.

Велика вісь цього мету - еліпсу визначають крайні /дотичні/ проміння; це будуть точки a і b , і $та тиса$ ab буде великою віссю еліпсу.

Мала вісь буде прямою до ab , а для визначення крайніх її точок звернемося до злитого положення кола перетину допоможної площі з кулею.

Поперечник прямий до поперечника ab , своїм метом дасть малу вісь еліпса, і таким поперечником буде DC , прямий до злитого положення проміня. Зметуємо назад точки C і D / $cC \perp s's_0$, $dD \perp s's_0$ / в точки C і a і одержимо малу вісь еліпса і самий еліпс. З злитого положення DC бачимо, що точка C лежить на верхній частині кулі, тому частина acb еліпсу буде видимою, а bda закрыта кулею.

Таким самим способом визначимо велику $e'f'$

малу $g'b'$ вісі і самий еліпс - доземий мет кола.

§ 62. РІВНОБІЖНЕ ОСВІТПЕННЯ.

/відбиті тіні/.

Маємо площу $P/P_b, P_r/$ і просту $AB/ab, a'b'/$ по за площю, треба знайти, крім власних тіней, ще відбиту тінь простої на площу.

Знаходимо спочатку /рис. 474, таб. LXXXIII/ тінь простої AB .

Точка A є разом доземим слідом простої, тому тінь цієї точки зливається з її поземим метом. Тінь точки B буде точка B_0 /уявна/, а тіню всієї простої буде A_0B_0 .

Ця тінь до точки C_0 /перехрестя A_0B_0 з $P_b/$ буде лежати на поземій площі мету, а потім перейде у відбиту тінь на площу P .

Знайдемо відбиту тінь точки B , для чого визначимо перетин проміня, поведеного через цю точку, з площею P .

Точка $F_0/f_0, f_1/$ буде точкою перетину, себ-то буде відбитою тіню точки B на площі P .

Сполучаємо точки C_0 з f_1 і одержимо просту C_0f_1 - відбиту тінь простої AB на площу P .

Відбиті тіні мають два мети і для нашого випадку матимемо поземий мет C_0f_1 і доземий C_0f_0 .

Цей спосіб дає змогу знаходити відбиті тіні на кожному площу, себ-то по цьому способу можна розв'язати кожне питання про відбиту тінь. Але він дуже забарний і в де яких випадках вимагає багато часу. Тому зупинимося на другому способі, для чого розв'яжемо таке завдання.

Маємо дві мимобіжних прості. Треба знайти відбиту тінь одної простої на другу.

На обох мимобіжних простях завжди можна знайти точки, які лежать на одному загальному проміні і які мають спільну тінь. Одна з тих точок буде відбитою тіню другої точки. Залишається тільки визначити ті дві точки, а головне ту, яка буде відбитою тіню.

Знаходимо /рис. 475, таб. LXXXIII/ тіні даних простих $AB/ab, a'b'/$ і $CD/cd, c'd'/$. Це будуть прості A_0B_0 і C_0D_0 . Тіні A_0B_0 і C_0D_0 перехрещуються в точці M .

Точка M уявляє собою тінь одної з точок простої AB /бо лежить на A_0B_0 /, а також одної з точок простої CD /бо лежить на C_0D_0 /, себ-то ці

дві точки обох даних простих повинні лежати на одному спільному промінню.

Як що поведемо через точку M , яка буде слідом променя, цей промінь, то він перереститься з даними простими в точках $N/n, n'/i, K/k, k'/l$.

З цього всього можна зробити висновок, що точка N простої AB кидає тінь на просту CD в точці K ; другими словами відбитою тінню простої AB на просту CD буде точка K .

Як що маємо многостінник, або криву поверхню, то треба мати на увазі, що відбита тінь може визначатися лише на освітленій частині, на затіненій ж його частині цієї тіні не може бути.

Пристосуємо цей спосіб до різних прикладів.

Треба знайти усі тіні /власні та відбиті/ піраміди $SAB CDEF /sabc def, s'a'b'c'd'e'f/$ та простої $MN /mn, m'n' /$

Спочатку знаходимо /рис. 476, таб. LXXXIII/ власні поземі тіні піраміди $/b S. edc /$ і простої $/M. N/$.

Тінь простої MN зустрічає основу піраміди в точці 1. В цій точці починається відбита тінь простої на піраміду.

Ця відбита тінь спочатку лягає на стінку SBA . Знайдемо відбиту тінь простої MN на руб SA . Для того визначаємо тінь руба $SA /s. a/$ та знаходимо точку 2. перехрестя тіней простої $M. N.$ та руба $S. a$. Точка 2 дає змогу визначити точку 2, відбиту тінь простої MN на руб SA . Яка з точок простої MN кидає цю тінь в точці 2, не має ваги, тому її не визначено.

Проста MN кидає на стінку SAB відбиту тінь 1.2.

Так само визначені відбиті тіні простої MN на руби $SE /3/, SE /4/$ і повна відбита тінь /поземий мет/ на піраміду /1.2.3.4/.

Доземий мет відбитої тіні знайдемо загальним способом і одержимо повну відбиту тінь 1.2.3.4 /1.2.3.4; 1'2'3'4'/, при чому частина цієї тіні на доземому меті /1'2'/ буде закрита стінками піраміди; тому вона рисується крапковою.

Залишається докінчити рисування власної тіні /знайти S_i і переломи/, та визначити затінені частини піраміди /на поземому меті стінки Sbc, sed і Sde , а на доземому меті стінки $S'e'd'$ /.

На рис. 477, таб. LXXXIV розв'язане те саме питання для коничної поверхні. Вся різниця полягає в тому, що на місто рубів тут треба брати творчі, а також у тому, що відбитою тінню буде не ломана проста, а крива лінія.

Власною тінню буде $S. c. d$, відбитою тінню крива 1.2.3.4.5.6.7 /1.2.3.4.5.6.7; 1'2'3'4'5'6'7'/, при чому на поземому меті закрита коничною поверхнею частина

6.7, а на доземому частина $4'2'3'4'$, і затемненими частинами коничної поверхні на поземому меті буде $5cd$, а на доземому $5d'm$.

На рис. 478, таб. LXXXIV маємо випадок бруса, який стоїть на поземій площі мету, та трикутника.

Тут виконання завдання полегшується, а саме весь поземий мет відбитої тіні злитий з поземим метом самого бруса, залишається знайти доземий лі мет.

Точка $E/e, e'$ кидає тінь на стінку AA, D, D . Поземий мет цієї тіні буде точка I , а доземий мет повинен лежати на перехресті дозедого мету руб h/h' з поземим метом проміння $E1/e1, e'1$. Таким способом визначається точка I .

Таким самим способом визначені точки $2'$ і $4'$; доземі мети відбитої тіні вершків G /на стінку AA' $DDi F$ /на стінку $DD'C'C'$.

Залишається знайти відбиту тінь боків трикутника на руб DD бруса.

Поземий мет проміння $d1$ дає поземі мети 2 і k точок L і K боків GF і FE даного трикутника, які кидають відбиті тіні на руб DD . Знаходимо доземі мети $1'$ і k' цих точок, ведемо через них доземі мети проміння, перехрестя яких з $d'd'$ визначить точки $3'$ і $5'$, відбиті тіні боків GF і EF на руб DD .

Повний доземий мет відбитої тіні даного трикутника на брус буде $1'2'3'4'5'$.

Залишається визначити власну тінь бруса, трикутника /закривається тінью бруса/ та затінені частини самого бруса /закриті теж стінками/.

На рис. 480, таб. LXXXIV те саме завдання виконане для циліндричної поверхні.

Знову як й в рис. 477, таб. LXXXIV тут приходить визначати криву відбитої тіні по точках, кожний раз приходить визначати тінь творчої, перехрестя якої з тінью боків трикутника дасть точку відбитої тіні.

Для того, щоб знайти відбиту тінь вершків даного трикутника, через відповідні тіні цих вершків ведемо тіні творчих циліндричної поверхні, визначаємо саму творчу, і нарешті відбиту тінь вершка.

Поземий мет відбитої тіні трикутника ABC на даній циліндричній поверхні буде фігура 1.6.3.4.с.5.6. Доземий мет закривається циліндричною поверхнею і на рисунку не показаний.

Власною тінью буде тінь циліндричної поверхні з додатком частини тіні трикутника, що не закривається першою.

Затінені частини циліндричної поверхні визначені на рисунку.

На рис. 479, таб. LXXXIV маємо похилу піраміду, та плаский чотирикутник і тут для визначення відбитої тіні треба скористуватися власною тінью пірамі-

ди та чотирикутника.

Точки 1., 2., 3., 4., і т.д. до 10. перехрестя тіні боків чотирикутника з тінями рубів піраміди визначають точки відбитих тіней боків чотирикутника на рубі піраміди. Це будуть точки $1/1, 1'/, 2/2, 2'/, 3/3, 3'/, 5/5, 5'/, 6/6, 6'/, 7/7, 7'/, 9/9, 9'/, 10/10, 10'/$.

Треба ще визначити відбиті тіні вершків K і N , бо з рисунка видно, що вершки M і L не дають відбитих тіней.

Через тіні K і N вершків K і N ведемо тіні $S.K$ і $S.N$ рубів піраміди, знаходимо відповідні цим тіням руби $SF/sf, s'f', SG/sq, s'q'$ і визначаємо відбиті тіні вершків точки $4/4, 4'/, 8/8, 8'/$.

Маємо певну відбиту тінь чотирикутника $MLKL$ на піраміду $SAB CDE$, фігуру 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 $/1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8', 9', 10'/$, при чому на поземому меті будуть закриті боки 3.4, 4.5, 5.6 і 6.7, а на доземому боки $1'2', 1'10', 9'10'$.

Власну тінь піраміди і чотирикутника складає фігура 6.1.10.5.6.2.5.11.с; затінено буде на поземому меті sbc , а на доземому $s'd'c'$.

На рис. 481, таб. LXXXV маємо стіжок, та похилу призму, треба визначити усі тіні.

Тут теж можна користуватися поземими власними тінями стіжка і призми.

Відбита тінь стіжка на призму починається з точки 1 /перехрестя $S.mz ad$ /, потім маємо відбиту тінь 2 вершка S стіжка, далі точка 3 відбита тінь творчої $S.N$ на руб DH і нарешті точка 4 перехрестя $S.o$ з dc . Визначаються усі ці точки способом наведеним вище.

Частина цієї тіні буде закрыта стінками призми, а саме на поземому меті відтинок 3.4, а на доземому меті стіжок закриває частину відтинка $1'2'$.

Власна тінь цих тіл переривається призмою і більша частина тіні стіжка закрыта призмою та її тінню.

Затіненою частиною стіжка будуть $S.m$ і $S'n'q'$ а приами-мет $abfg$ і стінки $ABFC$.

На рис. 482, таб. LXXXV маємо брус, з трикутною основою, що стоїть на поземій площі мету, на ньому лежить шостикутний брус, а на цьому останньому стоїть стіжок.

Відбита тінь верхнього бруса на нижній знаходиться так само, як це було для випадку рис. 478, таб. LXXXIV. На поземому меті ця тінь зід'ється з метами рубів нижнього бруса, крім того її закриває верхній брус. На доземому меті вона визначається фігурою

Навпаки відбита тінь стіжка на верхній брус визначається ясно лише поземим метом. Для того, щоб знайти цю тінь, рисуємо власну тінь стіжка на площу

верхньої основи верхнього бруса і це буде поземим метом 5. 6. 7. 8 відбитої тіні стіжка на верхній брус.

Разом з тим ця відбита тінь визначить межи затіненої частини стіжка, творчі 3α і 5β /на доземому меті закрита стіжком/.

Повна власна тінь усіх цих тіл визначається складною фігурою, а саме 11. D. 12. c' 13. F. 14. S. 15. 16. G. 17. H. 18. f. 11. Частина тіні, а саме c' 12. E. 13. закрита нижньою призмою.

Затіненою частиною верхньої призми буде мет f' f' g' g'.

Нарешті зупинимось трохи над пустими кривими поверхнями, визначення тіней яких має деякі особливості.

Маємо стіжок, що стоїть своїм вершком на поземій площі мету і який не має реальної основи, себ то пустий /рис. 483, таб. LXXXV/.

Власна тінь, а також затінені частини його визначаються по способах, про які говорилося раніше і це не викликає труднощів.

Половина обводу кола основи буде кидати відбиту тінь на осередні стінки стіжка, при чому половина цих стінок, що мають межою творчі 5α і 5β зовсім не освітлюється, а решта має відбиту тінь, межа якої визначена кривою A, 1, 2, 3, 4, 5, 6 B /a. 1, 2, 3, 4, 5, 6, B; a' 1' 2' 3' 4' 5' 6' 8' /.

Для визначення цих точок, беремо наприклад точку D /d, d' / обводу ADB кола основи /який й кидатиме тінь на стінки стіжка/, визначаємо поземий /а по ньому доземий/ мет тої творчої /5c / стіжка, на який відбивається тінь точки D.

Перехрестя доземого мету S' c' цієї творчої в доземим метом d' 2' проміня визначить доземий мет відбитої тіні. Знаходимо потім поземий мет 2, що лежить на поземому меті творчої 5c.

Таким способом визначаємо усі точки кривої відбитої тіні на стінках стіжка.

На рис. 484, таб. LXXXV маємо піввальця, на якому зверху лежить чверть кулі.

Тут теж маємо частину стінок і основи, що зовсім не освітлені /поземі, межа cd, доземі a' b' g' / і частину з відбитою тінню.

Ця відбита тінь визначена доземим метом спочатку частиною d' 1' творчої, потім йде крива 2' g', що визначається якою тінь, яку кидатиме край cb кулі на стінки. Для прикладу визначена відбита тінь точки F /f f' / . Знайдено творчу вальця на яку лягає тінь і визначена сама точка 2'.

Визначення власної тіні теж не викликає труднощів. Вона складається з тіні піввальця /тіні межових творчих з переломами/, а потім з тіні чверть кулі, для визначення якої користуємося допоможною

площею, як це робилося раніш при рисуванні власної тіні куді.

§ 63. ЦЕНТРАЛЬНЕ ОСВІТЛЕННЯ.

Вся різниця поміж рівнобіжним та центральним освітленням полягає у тому, що при останньому всі проміння збігаються в одну точку, джерело освітлення.

Джерело освітлення визначається двома метами, які згори визначають напрям метів проміння, тому й напрям самого проміння.

Способи рисування тіней при центральному освітленні ті самі, що й при рівнобіжному, єдина різниця полягає у напрямку проміння.

Найкраще це виявиться з розв'язання прикладів.

Тінь простої знайдена на рис. 485, таб. LXXXVI.

Знаходимо тіні двох точок $A/a, a'$ і $B/b, b'$ даної простої, для чого ведемо через джерело світла $D/d, d'$ і дані точки проміння $DA/da, da'$, $DB/db, db'$ знаходимо сліди цих промінів. Промінь DA має поземий слід A_0 в першому куті, а промінь DB має поземий слід B_0 в другому куті, тому тінь даної простої буде мати перелом і уявляє собою ломану лінію A_0CB_0 .

Так само визначена тінь трикутника /рис. 486, таб. LXXXVI.

Боки AB і BC будуть мати переломи, а бік матиме тінь на доземній площі мету. Визначення тіні для цього випадку не викликає труднощів і ясно з рисунку.

Те саме можна висловити й про рис. 487, таб. LXXXVI, де визначена тінь кола, площа якого рівнобіжна з поземною площею мету.

Усі проміння, що обгортають дане коло, утворюють конічну поверхню, яка в перетині з поземною площею мету, рівнобіжною з площею кола, себ-то площею творчої поверхні, повинна дати коло. Тому на поземній площі мету тінню даного кола теж буде коло.

Осередком цього кола буде слід того проміння, що проходить через осередок $O/o, o'$ даного кола. Це буде точка O_0 .

Для того, щоб знайти луч цього кола, треба знайти тінь другої крайньої точки луча OA /або якого завгодно другого/. Тінню точки A буде точка A_0 і лучем кола тіні буде відтинок O_0A_0 .

Частково тінь даного кола переходить в уявну, тому треба знайти дійсну дозему тінь цієї частини кола.

На рисунку це зроблено по точках. Можна виз-

начити цю дозему тінь й як еліпс, визначаючи його вісі, але для даного випадку це забарна праця й тому простіше визначати по точках.

Тінь похилої призми /рис.489, таб. LXXXVI / знаходиться легко, як що взяти під увагу все що було вже сказане.

Ріжниця в порівнянні з рівнобіжним освітленням буде та, що положення джерела світла відносно призми, дасть тінь руба AF і затіненою частиною призми будуть усі бокові стінки.

Знайдемо ще тіні кулі при центральному освітленні /рис.490, таб. LXXXVI /.

Спочатку визначимо затінені частини кулі. Це буде в дійсності коло, яке зметується на обох площках мету еліпсом.

Велику вісь цього еліпсу на поземому меті визначають мети проміння дотичного до мету кулі, поведеного з мету джерела світла. Це будуть дотичні dc і de , а великою віссю еліпса буде відтинок ce .

Для визначення малої вісі через промінь DS поведемо допоможну площу, пряму до поземої площі мету та перекинемо цю площу на позему площу мету за допомогою обертання навкруги ds .

Зливе положення D_2 джерела світла буде лежати на прямій dD_2 до ds , на віддаленні $dD_2 = dq$, точка D_2 лежить по за межами рисунку/.

Сполучаємо точку D_2 з поземим слідом S_0 проміння DS і це буде зливе положення самого проміння DS .

Знаходимо зливе положення осередку S_2 кола перетину кулі з допоможною площею. Точка S_2 повинна лежати на злитому положенні D_2S_0 проміння DS , на прямій до ds , встановленому з осередку S і на віддаленні $S_2S = s'r$. Одночасне сповнення цих вимог буде свідчити про правильність рисунку.

З точки D_2 ведемо дотичні до злитого положення кола перетину. Ці дотичні D_2A_2 і D_2B_2 визначають зливе положення малої вісі еліпсу, а також і її поземий мет ab .

Рисуємо еліпс - межу затемненої частини кулі і маємо поземий мет ll .

Так само знаходимо доземий мет цієї межі.

Велика вісь буде відтинок $l'k'$, для визначення малої ведемо через промінь DS допоможну площу пряму до доземої площі мету, та перекидаємо цю площу на дозему площу мету.

Сполучаємо зливе положення $D_3/D_3d' \perp s'd'$, $D_3d' = dq$; джерела світла D_3 лежить по за межами рисунку/ з доземим слідом S'_0 проміння SD . Це буде зливе положення проміння DS .

Визначаємо зливе положення $S'_3/S'_3s' = s'r$, $S'_3s' \perp d's'$ /осередку кола перетину кулі з допоможною площею, рисуємо коло, та ведемо до нього дотичні $D'_3G'_3$ і $D'_3F'_3$, які визначають зливе положення $F'_3G'_3$ малої

вісі еліпсу, а також й мет $f'q'$ іі.

Тепер звернемося до самої тіні кулі.

Проміння, що обертають кулю /по колу-межі затіненої частини/ утворюють коничну поверхню яка, як це вже відомо, в перетині з площами мету може дати еліпс, гіперболу, або параболу.

Спочатку знайдемо позему тінь кулі.

Дотичні D_2A_2 і D_2B_2 , як що їх продовжити, в перехрестю з поземим метом as , в точках B_0 і A_0 , що лежить по за межами рисунку, визначають велику вісь B_0A_0 еліпса - тіні. Це дає нам упевнення, що фігурою тіні буде еліпс, але дуже розтягнений. Як що D_2A_2 було б рівнобіжне з as , то була б параболу.

По цих даних трудно нарисувати еліпс, а тому треба визначити де кілька точок, тіней точок кола межи затіненої частини кулі.

Між иншим тіні точок E і C лежать на простій CE , поведеній через S_0 і на продовженню дотичних ae , de .

Маємо позему тінь кулі, залишається знайти дозему її тінь.

Це буде повний еліпс, визначення вісей якого вже не викликає жадних труднощів, як що використувати злите положення допоможної площі.

Повна власна тінь кулі складається з частин двох еліпсів, що мають спільні точки на вісі мету ox .

Щоб закінчити цей параграф зупинимося ще на відбитих тінях при центральному освітленню.

Загальні правила рисування відбитих тіней залишаються ті самі, що й при рівнобіжному освітленню.

На рис. 491, таб. LXXXVII маємо куб і піраміду треба визначити усі тіні.

Спочатку знаходимо власні тіні піраміди і куба. Для визначення відбитих тіней треба мати однакові тіні обох тіл, тому спочатку визначаємо лише поземі тіні.

Відбита тінь куба на піраміду починається з точки m перехрестя тіні куба з основою піраміди.

Потім знаходимо відбиту тінь одного з рубів куба /поки ще не знаємо якого/ на руб SA піраміди. Для цього шукаємо точку L_0 перехрестя тіні S_0a руба SA з тінню 6.7 руба 6.7 куба /тепер знаємо який руб куба кидає тінь на руб SA /.

Сполучаємо точку L_0 з поземим метом d джерела освітлення і перехрестя протил dL_0 з sa визначить точку l поземий мет відбитої тіні руба 6.7 на руб SA .

Далі знаходимо відбиту тінь вершка B , для чого сполучаємо точки B_0 з S_0 , знаходимо мет Sp руба SP , що має тінню S_0p і перехрестя мета проміння aB_0 з метом руба Sp . Точка k буде поземим ме-

том відбитої тіні вершка δ на стінку SAB .

Останньою точкою відбитої тіні буде точка n перехрестя тіні куба з основою піраміди.

Доземий мет відбитої тіні, в частині своєї $1'k'n'$ буде закрита стінками піраміди.

Тепер докінчуємо рисування власних тіней, знаходимо переломи, затемнені частини піраміди і завдання буде виконано.

На рис. 492, таб. LXXXVII маємо стіжок, який стоїть на поземій площі мету, а на вершку його покладене коло, осередок якого лежить у вершку стіжка, а площа рівнобіжна з поземою площею мету.

Знайдемо спочатку власну тінь стіжка і кола. Тінь кола лягає на обидві площі мету; вона визначається на поземій площі мету теж колом, осередка S , і луча S_0B . На доземій площі мету це буде крива, яка визначається за допомогою точок дуги nm , яка в дійсності кидає тінь на дозему площу мету.

На рисунку показано як знайти тінь точок L $/f, c/i$ $K/k, k'/$; це будуть точки L_0, K_0 .

Маємо таким чином повну власну тінь кола, додамо до цього ще тінь стіжка, яка визначить також затінені частини стіжка. На поземому меті, мет кола частково закриває цю затінену частину, а на доземому меті сам стіжок закриває частково цю частину стіжка.

Тепер визначимо відбиту тінь кола на стіжок.

На поземому меті ця тінь закривається колом, тому вона рисується крапковано.

Межі відбитої тіні визначають точки 1. і 2. спільні для обох власних тіней. Промінь $d1$. в перехрестю з творчою sf стіжка дасть точку 1 цієї тіні, другу межу точку 2 визначимо таким самим способом.

Решта точок буде визначена, коли для кожної точки дуги 1. 2. знайдемо тінь творчої, саму творчу, на якій ця точка лежить та поведемо відповідний промінь.

Наприклад візьмемо точку 3_0 . Ця точка лежить на тіні S_0c творчої sc , тому її відбита тінь теж буде лежати на творчій sc . Крім того ця відбита тінь лежатиме на проміню $d3_0$, себ-то в точці 3 перехрестя sc і $d3_0$.

Коли маємо вистарчаючу кількість поземих метів точок відбитої тіні, сполучаємо їх плавкою кривою і це буде весь поземий мет цієї тіні.

Доземий мет відбитої тіні визначається теж по точках, користуючись поземими метами цих точок, а також звернувши увагу на яких творчих ці точки лежать. Наприклад точка 3 лежить на творчій sc , тому доземий її мет лежить на $s'c'$ і на прямій до OX з поземого мету точки 3.

На доземому меті частина $3'2'$ закрита стіжком і тому нарисована крапковано.

§ 64. ТІНІ В АКСОНОМЕТРІЇ.

Як що по даних метях предмета визначається аксонометричний його відбиток, то можна знайти також в метях усі тіні цього предмету, а потім перевести її на даний аксонометричний хрест.

Такий спосіб можна в де-яких випадках скоротити і визначати тіні вже самого аксонометричного відбитку, але для того необхідно мати крім аксонометричного відбитку самого предмету, також один з аксонометричних метів його.

За площі, на які лягає тінь найчастіше беруть позему $/H/$ та другу дозему $/W/$ площі мету, тому найчастіше крім відбитку дається ще поземий аксонометричний мет.

Що торкається проміня, то для виконання завдання треба мати аксонометричний відбиток цього проміня, а також один з його аксонометричних метів, найчастіше поземий.

Дальша праця по знаходженню тіней в аксонометрії зовсім аналогічна тіням рівнобіжним і центральним, що ясно буде з наступних прикладів.

Тінь простою AB , яка визначена аксонометричним відбитком $a.b$. і поземим метом $a'b'$, при даному аксонометричному хресті, та даному напрямку проміня, яке визначено відбитком p . і метом p' , знаходиться так.

Знаходимо тінь двох точок простої. Тінь точки, як й в попередньому, визначається слідом проміня, поведеного через дану точку і який лежить в першому двостінному куті.

Через мет a' точки A ведемо мет $a'A$ проміня $/a'A \parallel p'/$, а через відбиток a точки ведемо відбиток $a.A$ проміня $/a.A \parallel p/$. Перехрестя цих простих дасть точку A , слід проміня, а разом з тим й тінь точки A , або вірніше аксонометричний відбиток тіні.

Тінь точки B лягає у другому двостінному куті, точка B ; тому тінь даної простої буде мати перелом в точці c , бо дійсною тінню точки B буде другий доземий слід B проміня.

Аксонометричний відбиток тіні даної простої або тінь аксонометричного відбитку даної простої буде ломана проста $A.c.B$.

На рис. 494, таб. LXXXVII визначена тінь аксонометричного відбитку $a.b$ с. a площі, прямої до поземої площі мету.

Тут треба знайти тіні відбитків ооків площі.

Боки $a.b.$ і $c.d.$ будуть мати переломи, а бік $b.c.$ лягає на другу дозему площу. Повна тінь буде фігура $d.2c.B.1a.$

Напрям проміння для даного випадку затемнює один бік даної площі, що звернений до глядача.

На рис. 495, таб. LXXXVII маємо теж випадок площі прямої до поземої площі мету.

Вся праця про визначення тіні виконується так само, як й в попередньому випадку, ріжниця лише в тому, що бік площі, звернений до глядача, не буде затінений.

Повна тінь відбитку $a.b.c.d.$ буде $a.1B.2.C.d.$, при чому частину $a.3d.$ закриває сама площа.

На рис. 496, таб. LXXXVIII маємо скосу діаметричну аксонометрію куба.

Визначення тіней цього відбитку зовсім ясно з рисунку і жадних пояснень не вимагає. Повна тінь буде $b.1F.G.2H.d.$ при чому відбиток куба закриває частину $b.1F.3.c.$

Відбиток $b.g.c.d.$ буде затінений.

На рис. 497, таб. LXXXIX маємо ізометричну аксонометрію бруса.

Так само як попередній випадок, й тут усе ясно й не вимагає пояснень.

Затінений буде відбиток $d.k.n.c.$ стінки бруса.

Переїдемо до більш складних випадків, де матимемо й приклади відбитих тіней.

Треба знайти усі тіні відбитку помника, показаного на рис. 498, таб. LXXXIX.

Власна тінь цього помника знаходиться, по попередньому, легко. Частина рубів кидає тінь з переломами, і повна тінь, не рахуючи тої її частини, яка закривається відбитком, буде фігура показана на рисунку.

Затінені стінки помника визначаються напрямком проміння, це будуть стінки 1.2.17.18; 3.4.19.20; 5.6.8.21 і 6.7.8.

Відбита тінь буде лише на стінці 2.3.20.17. Ця тінь починається від точки 3. Для того, щоб знайти відбиту тінь руба 3.4 на руб 2.17. через мет 4, цього руба ведемо мет проміння до перехрестя з рубом 1.18 в точці 16. З точки 16 ставимо напрям до поземої площі мету до перехрестя з рубом 2.17 в точці 160. Межа відбитої тіні буде проста 2.160, а повна відбита тінь виносить 2.20.17.16..

На реклямах часто вживається аксонометричні відбитки, при чому для більшої ясности до цих відбитків додаються ще усі тіні. В таких випадках визначають тінь лише на одній поземній площі мету.

На рис. 499, таб. LXXXIX маємо теж відбиток помника.

Власна тінь по умові, лягає уся на позему площу мету і визначення цієї тіні не викликає ніяких труднощів.

Визначення затінених частин помника теж не викликає труднощів, це будуть стінки 1.2.5.30; 31.32.33.34; 3.6.35.36; 9.10.39.40 і 10.21.39.

Відбита тінь помника на верхню площу основи визначається так, ніби ця верхня площа основи уявляє собою площу тіні. Визначення цієї тіні не викликає труднощів.

Для визначення відбитої тіні руба 3.6 на руб 32.33, через мет цього руба ведемо мет проміння, знаходимо точку 41 перехрестя його з метом руба 31.32, з точки 41 ставимо прям до поземої площі мету до перехрестя його з рубом 31.32 в точці 42.

Відбита тінь ця буде 3.36.33.42.

Щоб знайти відбиту тінь вершка помника на стінку 13.15.3.6, знаходимо точку 16 перехрестя тіней відповідних рубів, яка визначає одну з точок 16 відбитої тіні.

Уся відбита тінь межується простою 16.17.

§.65. ТІНІ В ПЕРСПЕКТИВІ.

Тіні в перспективі, так як й в аксонометрії можна визначити двома способами: або знайти тіні в метак, а потім вже перевести ці тіні на площу відбитку, на перспективний рисунок, або зразу по даній перспективі, відбитку предмета, визначити перспективу його тіней.

Найчастіше вживається другий спосіб, як менш забарний.

В перспективі може бути ужито рівнобіжне освітлення, а також й центральне.

При рівнобіжному освітленню може бути де-який відтинок при соняшному освітленню, про що буде сказано.

Центральне освітлення, освітлення лампою, або свічкою, вживається иноді при будівельних рисунках, а найчастіш в малярстві.

Площею, на яку лягає тінь, в загальних випадках, беруть площу основи. Бувають випадки, коли за таку площу беруть ще яку небудь другу площу, але такі випадки, повинні бути кожний раз окремо зазначені.

Для рівнобіжного освітлення повинно бути визначено для кожного випадку точка втечи проміння, а

також і її перспективний мет, який завжди лежить на по земі - обрію, та на одному прями до цього обрію з точкою втечі.

Для центрального освітлення дається відбиток джерела освітлення, а також перспективний мет цього джерела. Усі відбитки проміння проходять через відбиток джерела освітлення, а всі перспективні мети проміння через перспективний мет цього джерела освітлення.

На рис. 500, таб. LXXXVII маємо приклад тіней для перспективи бруса, що стоїть на площі основи. Точка втечі проміння S_6 , перспективний мет цієї точки - S_6 .

Рисування тіні зовсім аналогічно з попередніми прикладами різнобіжного, центрального освітлення та тіней в аксонометрії.

Для визначення тіні напр. руба 4.8 знаходимо тінь двох його точок, точок 4 і 8.

Точка 4 є разом і відбитком і перспективним її метом, тому ж як вона лежить на площі основи, то і тінь її упаде в ту саму точку.

Перспективним метом точки 8 буде точка 4.

Сполучаємо точку 4 з точкою S_6 , одержимо перспективний мет відбитку проміння, а самий відбиток цього проміння буде проста, що сполучає точки 8 і S_6 .

Точка 8, перехрестя цих двох простих лежить на площі основи і уявляє собою перспективний слід, а разом з тим і тінь точки 8.

Тому тіню в перспективі, або перспективою тіні руба 4.8 буде проста 4.8.

Таким самим способом визначимо тіні решти точок верхньої основи бруса і одержимо повну перспективу тіні 4,3.2.6. 7. 8., частина якої 3.29 закрита самою перспективою бруса.

Положення перспективного мету точки втечі проміння, визначає затінені частини бруса.

Для даного випадку це буде стінка 6,7,3,4.

На рис. 501, таб. LXXXIX маємо теж приклад рівнобіжного освітлення, але тут є змога визначити також відбиті тіні.

Визначення перспективи власної тіні не викликає жадних труднощів і зупинятися над цим не будемо.

Відбита тінь визначиться на передній стінці і на карнизі.

Для того, щоб знайти відбиту тінь верхньої частини через перспективний мет 30 руба 31,32 ведемо перспективний мет перспективи проміння $/S_6-3_2/$, перехрестя якого з метом руба 34,4 буде точка 20. Перспектива 20 буде відповідати мету 20. Сполучаємо точку 20 з S_6 і точка 21 перехрестя цього відбитку проміння $/S_6-2_0/$ з рубом 31,32 буде відбитою ті-

ню руба 34.4 на руб 31.32.

Таким самим способом знайдено відбиту тінь руба 34.4 на руб 2.9. Це буде точка 23 і уся відбита тінь визначиться чотирекутником 3.23.21.22.

Відбита тінь на карнизі визначається відбитком проміння чотирекутника 2.35.36.19.

Заміненими частинами помника будуть усі стінки, що зашихровані легко на рисунку.

Освітлення сонцем це окремий випадок рівнобіжного освітлення, справа йде тільки про те де знаходиться сонце.

На рис. 502, таб. LXXXIX сонце знаходиться перед глядачем, перед площею знику. Точка втечі соняшнього проміння лежить над поземом - обрієм, а перспективний мет її на самому поземі.

Рис. 504, таб. LXXXIX дає приклад такого освітлення сонцем.

Виконання рисунка ясно з попередніх прикладів, тому над ним зупинятися не будемо.

На рис. 503, таб. LXXXIX сонце знаходиться за глядачем, за площею знику, тому точка втечі соняшнього проміння буде не реальна, геометрична точка.

Рисування тіней в цьому випадку не відрізняється від попередніх прикладів.

Може бути ще випадок, коли соняшне проміння буде рівнобіжне з площею знику, а тим самим з площею відбитку. У цьому випадку відбитки соняшнього проміння будуть рівнобіжні між собою, бо їх точка втечі переходить на безконечно далеке віддаєння.

Тим самим і перспективний мет точки втечі соняшнього проміння опиниться на безконечно далекому віддаєнні, тому всі перспективні мети відбитків проміння рівнобіжні з поземом - обрієм.

На рис. 505, таб. LXXXIX маємо приклад такого освітлення.

При центральному освітленню дається відбиток джерела світла, а також перспективний мет цього відбитку.

Тут можна пояснити чому при рівнобіжному освітленню, перспективний мет точки втечі проміння лежить на обрію.

При центральному освітленню джерело світла лежить на реальному віддаєнні від ока. Тому й відбиток його, а також і перспективний мет мають довільне положення відносно обрія.

При рівнобіжному освітленню, яке уявляє собою окремий випадок центрального освітлення джерело світла переноситься на безконечно далеке віддаєння від глядача, тому й реальний мет його лежить теж на безконечно далекому віддаєнні а

перспектива цього мета, перспективний мет, повинен опинитися на обрії.

Маємо два приклади центрального освітлення в перспективі.

На рис. 506, таб. LXXXIX маємо помник, джерело світла $D/D_0, D_0'$ треба визначити усі тіні на доданій площі, слід якої на площі основи буде P, P'

На рис. 507, таб. LXXXIX маємо три площі, прямі до площі основи, джерело світла $D/D_0, D_0'$ треба визначити усі тіні на площі стінки f, c, v, g .

Виконання цих завдань ясно з рисунків і пояснень не вимагають.

Показуки римеуатупу.

1. Тпу скупанни чогоу кыроу вукору-
сману маки кнуфку:

1. Dr. tech. V. Jarolimek a B. Procházka:
Deskriptivní geometrie.

2. Bartel.

Geometria wykreślna

3. F. Harang & H. Beaufils:
Géométrie descriptive

4. Проф. Н. Петрунѣ

Ортогональный проекции.

5. Prof. Dr. Emil Müller:

Lehrbuch der darstellenden Geometrie

6. Prof. Dr. G. Scheffers.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie.

7. Prof. Dr. R. Haussner:

Darstellende Geometrie

8. Prof. Dr. Vonderlinn

Parallelperspektive

9. E. Geiger:

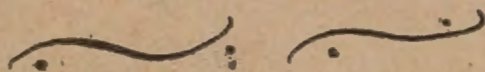
Die angewandte darstellende
Geometrie.

10. L. Haass

Die Schatten-Konstruktionen.

11. H. Diesener

Darstellende Geometrie.



О Г Л А В .

№№		Стор.
1	Вступ	3
2	Предмет нарисної геометрії. . .	7
	А. ПРЯМЕ МЕТУВАННЯ.	
3	Точка	8
4	Проста.	12
5	Сліди простої	14
6	Взаємне положення прости . . .	15
7	Дійсна довжина відтинку простої	17
8	Площа	18
9	Точка та проста на площі. . . .	20
10	Взаємне положення площ; площі та проті	22
11	Перетин площ між собою.	24
12	Перетин площ з простою.	28
13	Видимі точки	30
14	Обертання навкруги одної вісі .	32
15	Обертання навкруги двох осей .	35
16	Обертання площ навкруги голов- них ліній.	36
17	Злиття площ	38
18	Зміна одної площі мету.	40

19	Зміна двох площ мету	42
20	Розв'язання задач	44
21	Третя площа мету	53
22	Будування многостінників	55
23	Спорідненність	60
24	Перетин многостінників з площею . . .	62
25	Перетин многостінників з простою . . .	65
26	Перетин многостінників між собою . . .	66
27	Криві лінії	75
28	Коло	79
29	Еліпс	81
30	Гіпербола	85
31	Парабола	86
32	Циклоїди	88
33	Вальцева гвинтова лінія	90
34	Криві поверхні	98
35	Перетин кривої поверхні з площею . . .	100
36	Перетин кривої поверхні з простою . . .	103
37	Перетин кривої поверхні з многостін- ником	105
38	Перетин кривої поверхні з кривою по- верхнею	106
39	Перетин кривої поверхні з кривою лі- нією	109
40	Дотичні площі	110
41	Розгортка многостінника і кривої по- верхні	115

В. АКСОНОМЕТРІЯ.

42	Вступ	120
43	Вибір аксонометричного хреста . . .	121
44	Приклади прямої аксонометрії . . .	129
45	Скоса аксонометрія	131
46	Розв'язання задач в аксонометрії. .	132
47	Аксонометрія кола та кулі	141

С. ЦЕНТРАЛЬНЕ МЕТУВАННЯ.

48	Вступ	147
49	Основні закони центрального метуван- ня	148
50	Приклади перспективи	153
51	Окремі випадки перспективи	157
52	Розв'язання задач при центральному метуванні	165
53	Перспектива кола та кулі	175

Д. МЕТУВАННЯ КОСТАМИ.

54	Вступ	177
55	Точка, проста, площа	178
56	Розв'язання задач при котах.	182
57	Приклади вжитку котів при площам . .	192
58	Криві лінії та поверхні	196
59	Приклади вжитку котів при кривих по- верхнях	201

Г. ТЕОРІЯ ТІНЕЙ.

60	Вступ	205
61	Рівнобіжне освітлення /власні тіні/	207
62	Рівнобіжне освітлення /відбиті тіні/	212
63	Центральне освітлення	217
64	Тіні в аксонометрії	221
65	Тіні в перспективі	223

Зауважені помилки.

Стор.	Рядок		Надруковано	Має бути
	Зверху	Знизу		
5		6	просту DE	просту DF
"		4	умові, що DE = KE	умові, що DG = KE
"		3	KL // AB	KL // AC
9		24	в положення H,	в положення H,
16	13		як E не рівнодісна	як EF не рівнодісна
"	20		O, то одержуємо	O, то одержуємо
"		22	K та M-N	KL та MN
17		6	a'A ⊥ a'b	a'A ⊥ a'b'
"		"	Bb = a'n = a'S - b't; A	Bb = a'n = a'S - b't; Ab'
"		2	з точки (k)	з точки l (k)
"		1	з точки ()	з точки b (a')
21		8	сполучаємо F з G	сполучаємо F з F
24	1.		найди́тисої	найди́тисої
25		24	площу мету /F/	площу мету /T/
"		19	буде точка P	буде точка B
27	1		/поземий слід/	/поземий слід/
30	10		На рис. 48	На рис. 49
"		21	метів	метами
31	6		то видно	то це видно
32		18.	/рис. 55, маб	/рис. 65, маб
34		18	маб LX	маб X.
"		6	та ведемо Co P ₂	та ведемо Co' P ₂
"		"	доземий слід Ph ₀	доземий слід P ₂
35	3		усі поземні	усі поземні
36	25		i LQ _h a ₂ Ph	i LQ _h b, Ph
38	9		aB, C, D, E,	a'B, C, D, E,
40	18		/рис. 83. таб. XI/	/рис. 83. таб. XII/
44		4	a'e' та ed'	a'e' та e'd'
46	13		/XV	/XVI
"		7	бC буде	б, C буде
"		4	лучами бC	лучами б, C
49		15	E ₁ G ₁ та E ₂ F ₂	E ₁ G ₂ та E ₂ G ₂
51	6		довжини б'F ₁	довжини B'F ₁
"		6	/рис. 132, таб. XIX/	/рис. 131, таб. XIX/
56		1	до поземної	до доземної
"		12	/sC ₄ /	/sS ₄ /
58	12		S та S ₁	S та S'
"	17		мети кубу	мети куба
"	31		gf // cb, ge // cd	gf // cb; fe // cd
"		2	рисуваний кубу	рисуваний куба
59		"	с/	с/

Горн.	Рядок		Надруковано	Мат думи
	горн.	зрису		
60		10	P ma P	P ma P
61		7	6D // A, 1	6D, // A, 1
62		2	поземоро го	приземоро до
65		11	мадл. II XIV	мадл. XXIV
66	5		SADE /sade, s'a'd'e'/	S CDE /scde, s'c'd'e'/
70		10	один по	один на
71		8	159, мад XXVII/	159, мад. XXVIII
"		11	10.9, 9.8, а на	10.9, 9.8, 8.7, 7.6, а на
73		1	4.5, 5.6, 5.6 ма	4.5, 5.6 ја $\frac{AB}{2}$
77	1		Дуга CB = $\frac{AB}{2}$	Дуга CB = $\frac{AB}{2}$
79		1	Проекти LM, SR,	Проекти LM, SR
80	23		го ав	го бс
81	15		з боку BC	з проговх. боку BC
82		18	$ed = c^2 + b^2 = a^2 - b^2 + b^2 = a^2$	$c.d = c^2 + b^2 = a^2 - b^2 + b^2 = a^2$
84	2		точки 1, 1,	точки 1, 1,
"	7		точки F, G, H, J, K, L, M	точки F, G, H, K, L, M
"	20		на простий NON,	на простий NON ₀
"		18	Коло, межо	Коло, межи
86		9	проекти T, E = T, C	проекти T, E и T, C
88	3		на дотичниј AT,	на дотичниј AT
"	8		точки F' з T	точки F' з T
"	11		проекта BN	проекта BN
"	26		M, та спуску	M, та спуску
90	3		рис. 192	рис. 194
91		23	Ик го виев O'O,	Ик го виев O'O,
92	23		1, 17, приложутишка	1, 13, приложутишка
95		6	и неподвижеского	и неподвижеского
"	9		рис. 203 таб. XXVIII	рис. 205 таб. XXVIII
97	8		та виев O'O / o'o, o'o' /	та виев O'O, / o'o, o'o' /
98		24	На рис. 225, таб XLI	На рис. 225, таб XLII
101	18		в точи d	в точи c
"	19		d з O ₀	c з O ₀
102	27		6.10 / 6.10, 6'10' /	7.10 / 7.10, 7'10' /
103		12	даной проекто	даного проекто
105	5		осередка O	осередка O ₀
110	3		кривото линијо	кривото линијо
111		11	де L oa	де L oa
112		16	одермат	одермат
112		3	одермат	одермат
"		1	дуга DE	попереника DF
113	24		одерматис	одерматис
116		18	рис. 259, таб. LIII	рис. 261, таб. LIII
"		3	рис. 259, таб. LIII	рис. 261, таб. LIII

Форм.	Рядок		Надруковано	Мат. дати
	Згорн	Знизу		
119	7		воту відкладаємо	правоту відкладаємо
"	8		а вни	а лівоту
"	"		творити воту	творити правоту
"	9		вни JM	лівоту JM
"	9		третини воту	третини правоту
"	10		воту вЛ	правоту вЛ
"	10		вни PL	лівоту вР
123		16	OE	CE
124	10		трикутник AOD	трикутник AOD
125		9	Δ AOC і Δ BOC	Δ AOC і Δ BOC
132		19	На рис. 292; 193	На рис. 292 і 293
134	22		рис. 330, таб. LX	рис. 303, таб. LX
135	11		/рис. 306, таб. /	/рис. 306, таб. LX/
"	17		/Rh // ox/	/Rh // oy/
136		16	МН. буде	Мо. Но. буде
137	6		з точки а	з точки а,
"		4	$190. F_0'' = 90. F_0'$	$190. F_0' = 90. F_0''$
"		5	положення F_0''	положення F_0'
138	10		324 і 325	324 і 323
139	3		а $\angle O'OO''$	а $\angle O'O''$
141		12	FOL та	KOL та
"		2	$90. a = 90. b.$	$90. a_0 = 90. b_0.$
142		12	прям. oa	прям. oe
143		16	$ac = 06_0 = 07_0;$	$ac = 05_0 = 07_0;$
"		17	$7_0 b_0 \perp OZ$	$7_0 5_0 \perp OZ$
159		1	с. Пав	с. Пав
160		1	має	має
165		16	таб. LXXI.	таб. LXXVI
"		24	LXXI	LXXVI
169	8		/рис. 386, таб. LXXII/	/рис. 386, таб. LXXII/
170	13		/рис. 382, таб. LXXIII/	/рис. 388, таб. LXXIII/
175	26		з точки O ₂	з точки O.
"		20	до Cc b _c	до Cc b _c
182	16		AC-ac	AC-ac
183		14	/рис. 413, таб. LXXV	/рис. 413, таб. LXXV
184		8	/ab // S _H	/ab ⊥ S _H
"		16	тому рівнобіжна	тому вона рівнобіжна
187		1	/рис. 423	/рис. 427
"		14	прямий 90	прямий до e'
190	23		/e F, L	/e b _c ⊥
192	28		нахилання	нахилу
193		22	авфе	авфе
195	23		/рис. 440, таб. LXXVIII	/рис. 440, 441, таб. LXXVIII
206	17		/рис. 450, таб. LXXXII/	/рис. 459, таб. LXXXII/

Сор.	Рядок		Надруковано	Має бути
	Зверху	Знизу		
219	3		одвертають	одвертають
225	7		заміняють	заміняють.

