

МАТЕМАТИЧНІ ВЗОРИ
ТРИГОНОМЕТРІЯ

СКЛАВ

П. ЗЛЕНКО.

ПРАГА
1926

Математичні твори.
— Кристалізація. —

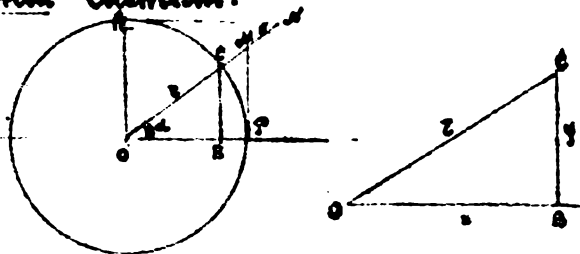
состав
П. Зленко



Прага
1926

I Тригонометрія.

1. Тригоном. функції в координат. ній системі.

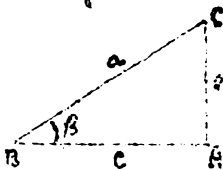


$$\frac{y}{r} = \sin \alpha; \quad \frac{r}{y} = \operatorname{cosec} \alpha;$$

$$\frac{x}{r} = \cos \alpha; \quad \frac{r}{x} = \sec \alpha;$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{x}{y} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

Тригоном. функції при упр. трикутн. тригоном.



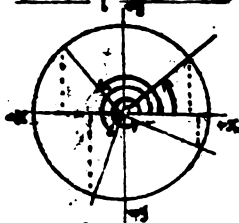
$$\sin \beta = \frac{b}{a}; \quad \operatorname{cosec} \beta = \frac{a}{b};$$

$$\cos \beta = \frac{c}{a}; \quad \sec \beta = \frac{a}{c};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{cotg} \beta = \frac{c}{b};$$

2. Знаки в тригонометрических функциях

	sin	cos	tg	ctg
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-



3. Тригонометрические функции

	$0^\circ 360^\circ$	90°	180°	270°	45°	30°	60°
sin.	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos.	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg.	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
ctg.	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
sec.	1	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
cosec.	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	-1	$\sqrt{2}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

4. Тригонометрические функции

	$-a$	$a \pm \alpha$	$2a \pm \alpha$	$3a \pm \alpha$	$4a \pm \alpha$
sin.	$-\sin a$	$\cos a$	$\mp \sin a$	$-\cos a$	$\sin(\pm a)$
cos.	$\cos a$	$\mp \cos a$	$-\cos a$	$\pm \sin a$	$\cos(\pm a)$
tg.	$-\operatorname{tg} a$	$\mp \operatorname{ctg} a$	$\pm \operatorname{tg} a$	$\mp \operatorname{ctg} a$	$\operatorname{tg}(\pm a)$
ctg.	$-\operatorname{ctg} a$	$\mp \operatorname{tg} a$	$\pm \operatorname{ctg} a$	$\mp \operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg}(\pm a)$

5. Osnovni nprušen. broju.

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$2. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha.$$

$$3. 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

$$4. \sin \alpha, \operatorname{cosec} \alpha = 1$$

$$5. \cos \alpha, \sec \alpha = 1$$

$$6. \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$7. \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$8. \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$9. \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha} = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

$$10. \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}{\operatorname{cosec} \alpha} = \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$11. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}} = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1} = \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\sin \alpha}$$

$$12. \sec \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$$

$$13. \cos 2\alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\sec \alpha}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha};$$

6. Пунктии чиноро кына бузгакени репес апыккени номбуна кына.

$$14. 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$15. 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$16. \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$17. 1 - \sin \alpha = 2 \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$18. \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$19. \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

7. Пунктии номбуна кына бузгакени репес чинни кына.

$$20. \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$21. \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$22. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$23. \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

8. Формули надбињеног крпа
Бунарени зунеруе крпа.

$$24. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$25. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$26. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$27. \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$$

9. Формули ерпе (пренеме)
око крпа.

$$28. \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta.$$

$$29. \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

$$30. \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}$$

$$31. \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}.$$

10. Формули краинне крмб.

$$32. \cos n\alpha = 2 \cos(n-1)\alpha \cos \alpha - \cos(n-2)\alpha$$

$$33. \sin n\alpha = \sin(n-1)\alpha \cos \alpha + \cos(n-1)\alpha \sin \alpha$$

11. Сума або рницца функцй
двох крмб.

$$34. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$35. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$36. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$37. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$38. \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha)$$

$$39. \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ + \alpha)$$

$$40. \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$$

$$41. \frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)$$

$$42. \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$43. \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

12. Црна о Со пинена са арум-
нио нроа кумб.

$$44. \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$45. \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$46. \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 1$$

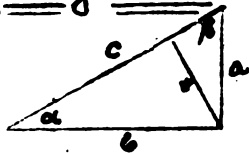
$$47. \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 1$$

$$48. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$$



II Розв'язання трикутників.

1. Трикутник
прямокутний.



Дано	Знайти	Вартості катетів	
1. Катет і про- тилегна до нього пряма	α a	$\beta,$ $b, c.$	$\beta = 90^\circ - \alpha;$ $b = \frac{a}{\sin \alpha}; c = \frac{a}{\sin \alpha}.$
2. Катет і пря- ма що до нього проведена	α b	$\beta,$ $a, c.$	$\beta = 90^\circ - \alpha;$ $a = b \tan \alpha; c = \frac{b}{\cos \alpha}$
3. Катет і протилежна	α c	$\beta.$ $a, b.$	$\beta = 90^\circ - \alpha$ $a = c \sin \alpha; b = c \cos \alpha.$
4. Обидві прямі	a b	c $\alpha, \beta.$	$c = \sqrt{a^2 + b^2};$ $\tan \alpha = \frac{a}{b}; \tan \beta = \frac{b}{a}$
5. протилежна і пряма	c a	b $\alpha, \beta.$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}; \cos \beta = \frac{a}{c}$

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \sin \beta = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a};$$

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta; \quad b = c \sin \beta = c \cos \alpha;$$

$$a = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta; \quad b = a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{ctg} \alpha;$$

Теорема прямоугольн. триг.

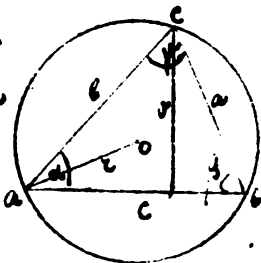
$$\Delta = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{c}{4} \sin 2\alpha = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

2. Косинусный принцип.

1. Базис синусовый.

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



2. Базис Косинуса.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta.$$

3. Теорема тангенсів.

$$(a+b):(a-b) = \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}$$

4. Взаємні Мollweid'ові.

$$(a+b):c = \cos \frac{\gamma-\beta}{2} : \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$(a-b):c = \sin \frac{\alpha-\beta}{2} : \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

5. Вартості кутів трикутника в функції його сторін.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

6. Основні способи розв'язання косокутного трикутника.

1. Якщо дані дві сторони і один кут,

визивають теорему синусів.

2. Якщо дані два бoki та кут на протилежному з них, визивають таку теорему синусів.

3. Якщо дані два бoki та кут між ними, визивають теорему косинусів.

4. Якщо дані всі бoki - взору 5.
для обчислення кутів.

7. Площа трикутника P .

$$\text{вл. } P = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2}$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

вл. синусового кола $r = \frac{P}{s}$

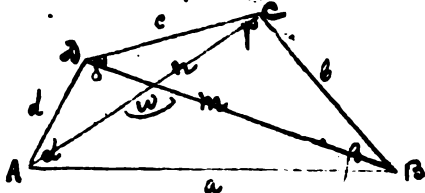
вл. косинусового кола $R = \frac{abc}{4P}$

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

Розв'язання трикут. за даними.

Дано	Знак ма!	Розв'язання трикут. Δ .
1. Два боків та один проміжний кут	a b α	c P β, γ $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$; $P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$; $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$.
2. Два кутів та один проміжний бік	α β a	γ P b, c $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$. $P = \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$ $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$; $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$
3. Два кутів та бік до них протилежний	α β c	γ P a, b $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ $P = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma}$ $a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$; $b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$;
4. Два боків та кут між ними	a b γ	c P α, β $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$ $P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ $\cos \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}$; $\cos \beta = \frac{b \sin \gamma}{a - b \cos \gamma}$
5. Три боків	a b c	α P $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ або $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

3. Ромбический



$$\text{Площадь } P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$P = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot \sin \omega$$

Объемлена кривь 4-кутника
кред по боку.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$$



