Є. І. ВИЖЕНКО.

ПОЧАТКИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

1923

На правах рукопису.
[516(02)]

Є. Вр. Іваненко.

ПОЧАТКИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Складено по лекціях, що викладалися на математичних курсах в Подебрадах в 1923 р.



Видано 150 примірників
коштом Укр. Громад. Комітету
в Ч.С.Р.

Вступні розуміння.

§1 Вимір відрізків на прямій.

Візьмемо безмежну пряму AB і довільну на ній точку O (рис. 1)



Рис 1.

Починаючи з точки O ми можемо посуватися вздовж прямої лише у двох напрямах OB і OA, коли один з них, як це ми бачили вже в алгебрі при розглядженню від'ємних чисел, будемо вважати за додатний, то другий, протилежний, буде від'ємним.

За додатний напрям умовимося вважати той, який буде з правої руки, для спостерігача, що дивиться на пряму AB поперек її напрямку. Звідси промінь прямої OB носить назву додатного променя, а промінь - OA зветься від'ємним променем прямої AB.

Так само кожна точка M, що

взято на додатному промені носить назву додатної точки, а точка M_1, що взято на від'ємному промені – від'ємної точки.

Далі кожний відтинок, що обмежується додатними точками є додатним, а від'ємними точками є від'ємним. [OM, ON – є додатні відтинки, а OM_1, ON_1 – є від'ємні відтинки, себто вони мають від'ємну вартість]

З курса геометрії нам відомо, що кожний відтинок простої можно вимірять через який другий наперед загаданий відтинок, як одиницю міри. Таким чином, кожний відтинок OM можно виразовити числом, що показує скільки разів прийнята одиниця міри вміщується в даному відтинку OM.

Отже кожному відтинку OM відповідає одно і лише одно число. (одиниць міри) і навпаки кожному числу відповідатиме один і лише один певно визначений відтинок.

Наприклад: Хай мірою відтинка OM буде $+a$, тоді навпаки, кожному відаленню $+a$ від точки O буде

відповідати точка M (а разом і відтинок OM). З другого боку точки O відтинку OM завжди відповідатиме один і лише один відтинок OM, рівний по безвзглядній величині (a) відтинку OM. Цей відтинок матиме міру $OM_1 = -a$.

Такими числами положення якої точки на прямій (вісі) завжди визначається одним числом.

§2. Вимір відалень на площі.

Ми вже казали в курсі тригонометрії про те, як визначити положення точки на площі.

Для цього перетинаємо площину на 4 частини за допомогою Декартового хреста.

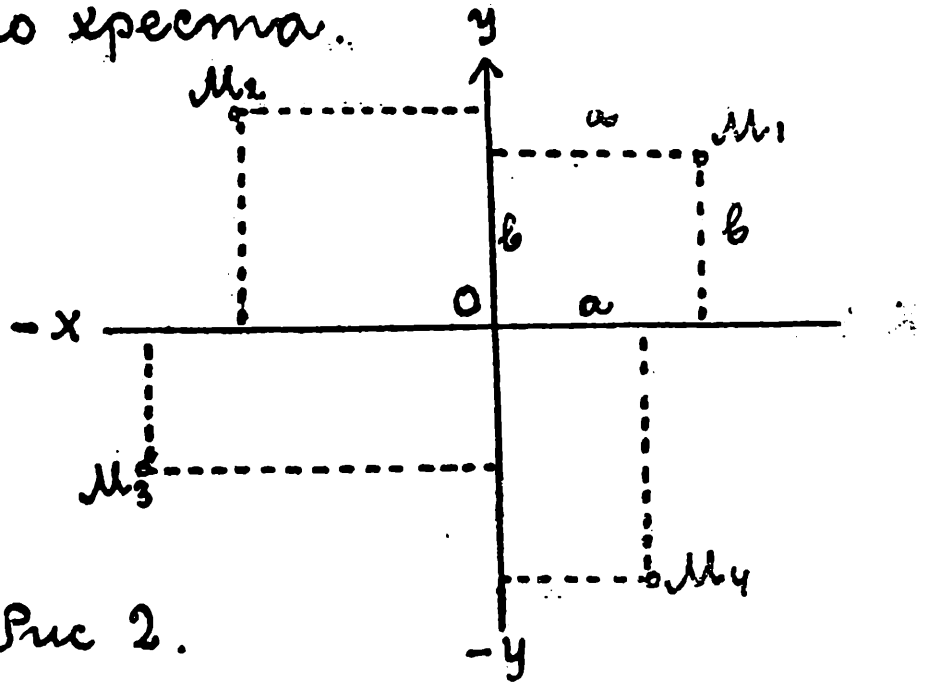


Рис 2.

Візьмемо на площі дві взаємно перпендикулярні прямі XX і YY, що перетинаються

ються в точці О. Будемо називати ці прості осями координат: хх віссю ікс ів, а уу - віссю ігрек ів. Точка О, початок координат, визначає на кожній з осей два напрями. Коли на вісі х-ів ми виберемо за додатний напрям ох (узгоджуючи умову попереднього §), то обертаючи вісь хх проти стрілки годинника до приставання з віссю уу, ми самим визначимо додатний напрям на осі уу від точки О вгору.

Кожній точці площі відповідають два відтинки: один на вісі х, а другий на осі у. Для кожного з цих відтинків згідно §1 відповідатиме одно й лише одно число (міри)

<u>Таким чином кожній точці площі відповідає тільки одна пара чисел, що визначають положення цієї точки.</u>

Ця пара чисел носить назву Значників даної точки (Значник на вісі х - носить назву абсциси (відтинкова точка), а Значник на вісі у - ординати (рядної точки).

Значники точки М умовлено записувати так: М(а, в)

Зворотне: Коли нам відомі значники якої точки М(а і в), то відкладавши їх на осях від точки О і поставивши до осей прямі, ми одержимо точку М на перехресті цих прямих. Дві прості перехрещуються лише в одній точці, а тому даній парі значників відповідає одна й лише одна точка площі. Тому для визначення осей координат кожна пара значників, цілком визначає положення точки на площі.

Декартов хрест поділяє площу на 4 чверті (або квадранти)

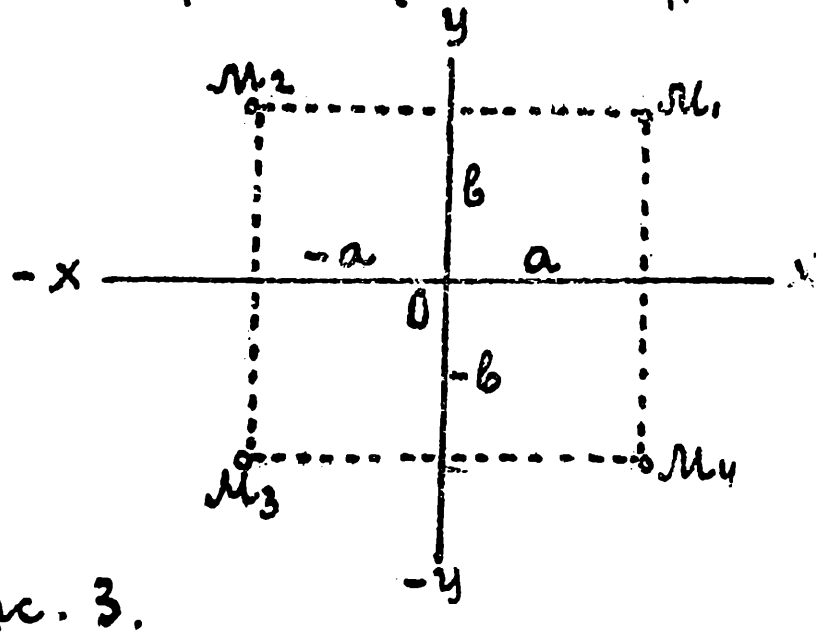


Рис. 3.

У кожній чверті завжди легко знайти точки (M_1, M_2, M_3, M_4), що

матимуть по безвзглядній величині однакові значки, але справжня величина їх буде різна.

Так напр: точки:

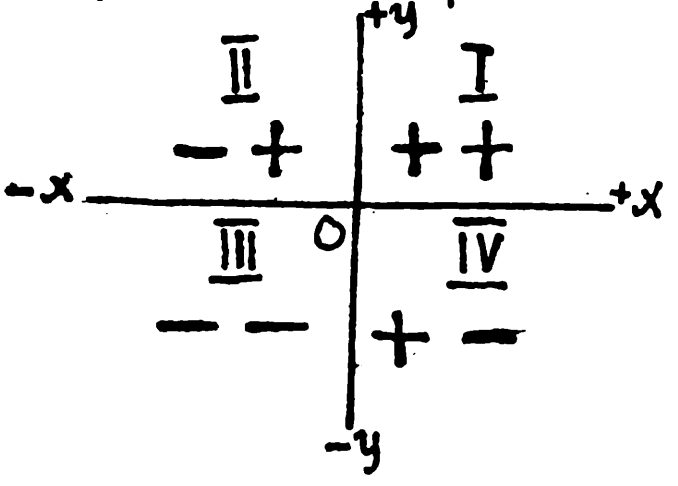
M_1 мая значки a і b; $M_1(a,b)$

M_2 " " " $-a$ і b; $M_2(-a,b)$

M_3 " " " $-a$ і $-b$; $M_3(-a,-b)$

M_4 " " " a і $-b$; $M_4(a,-b)$

Мнемонічна схема знаків. Декартова хреста:



§3 Положення відтинку на площі.

Коли ми маємо відтинок простої на площі то перед нами стає завдання:

1) визначити лет цього відтинку на вісі,
2) визначити довжину відтинку (відалення між двома точками)
3) визначити напрямність відтинку

4) Знайти спосіб поділити відтинок в даній пропорційності, коли нам відомі лише значення кінців відтинку.

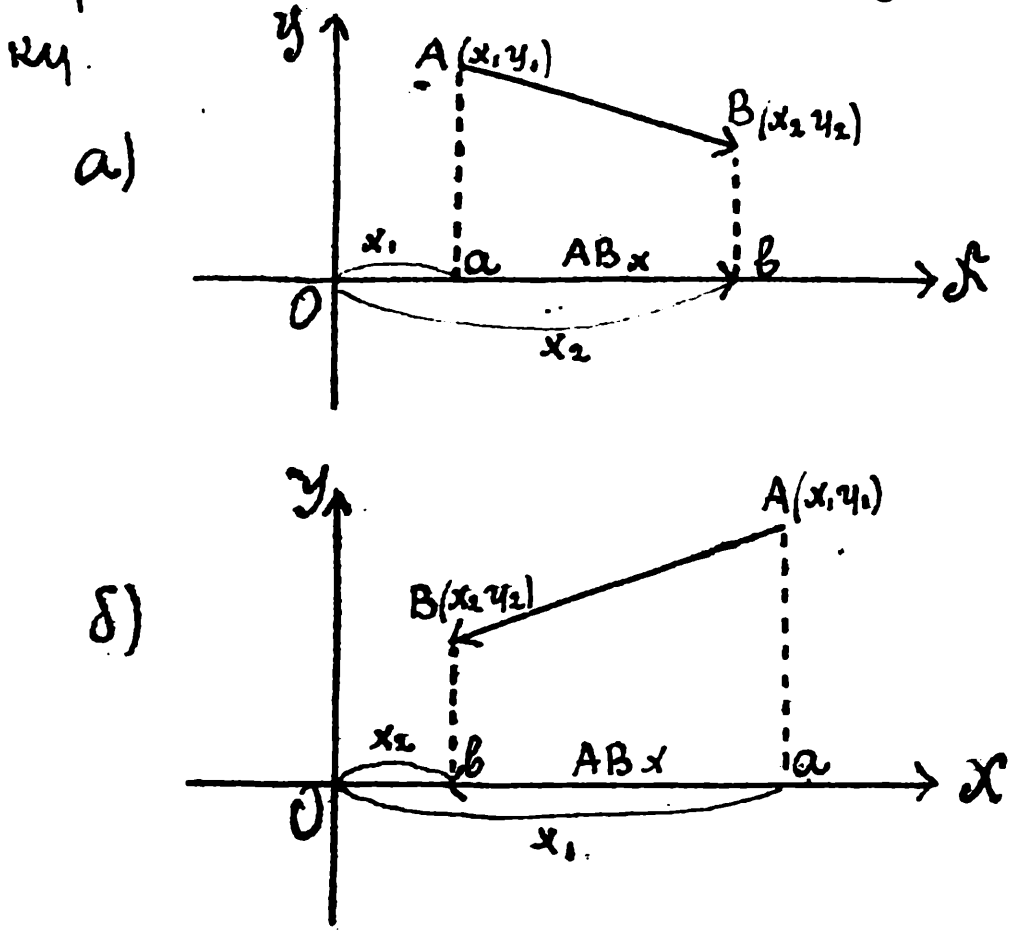


Рис 4.

Визначення.

1) Будемо вважати, що кожний довільно взятий відтинок, має власний певно визначений напрямок, що вважатемо за додатний. Таким чином цей відтинок можно завжди вважати додатною величиною, незалежно від напрямку координатних осей.

2) За міст відтинку на вісь вважатимемо відстань між містами на тій вісь кінців відтинку.

3) За напрям руху лічильника беремо приймати напрям від кінця початку відтинка до кінця його кінця.

4) Коли напрям лічильника однаковий з напрямом осі - то він має додатну вартість, а в протилежному випадку - від'ємну вартість.

[На рис 4(а) - лічильник AB_x - має додатну вартість, а на рис. 4(в) лічильник AB_x має від'ємну вартість]

Лічильник відтинка на одну з координатних осей є різницею між значеннями кінця й початку відтинка.

$$AB_x = \pm P_x = x_2 - x_1 \quad \text{----} \quad (1)$$

На рис 4(а) лічильник відтинку AB є додатний:

$$AB_x = P_x = x_2 - x_1$$

На рис 4(б) лічильник відтинку AB є від'ємний, а тому:

$$AB_x = -P_x = -(x_1 - x_2) = x_2 - x_1$$

Розглянемо випадок, коли відтинок лежить в різних чвертях. На рис 5(а) лічильник відтинку AB є додатний:

$$AB_x = +P_x = a_0 + o_b = -x_1 + x_2 = \underline{x_2 - x_1}$$

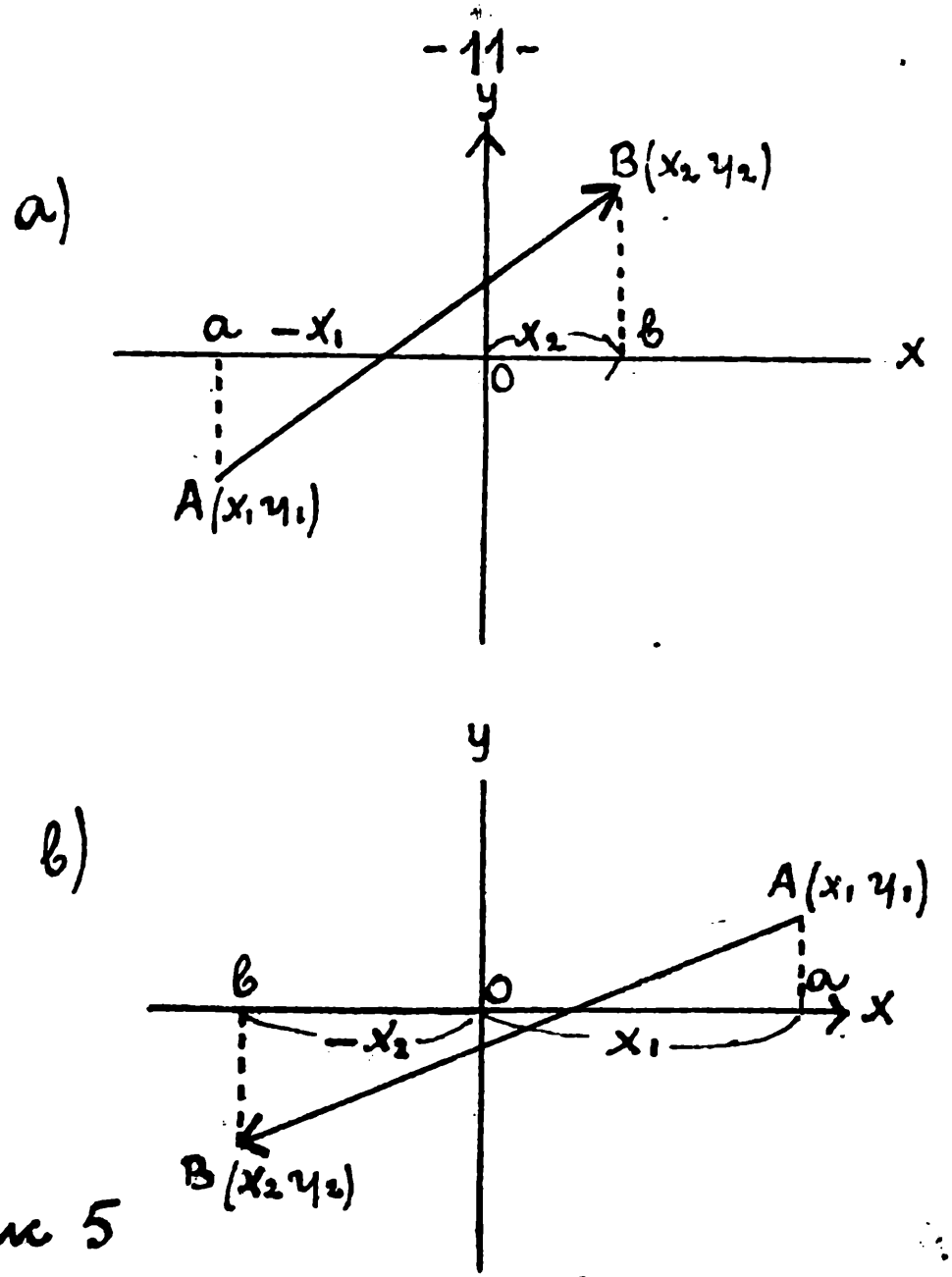


Рис 5

На рис 5 (в) мет віртинку АВ є від'ємний:

$$АВx = -Px = -(ов + оа) = -(-x_2 + x_1) = x_2 - x_1$$

Аналогічні міркування доводять, що й:

$$АВy = \pm Py = y_2 - y_1 \quad \text{-----(2)}$$

Що й треба було довести.

Квадрат віртинка є рівний сумі квадратів його метів на вісі.

Розглянемо паралелограмик АВЛМ (рис 6)

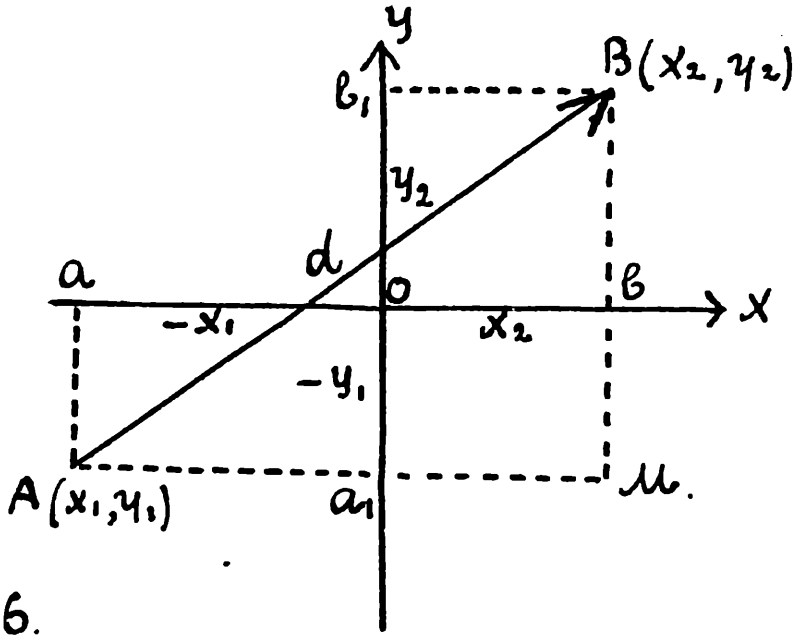


Рис. 6.

Його протилежна є $AB = d$, а прямі: BM рівна лінії $AB_y (= a_1 b_1)$, тому:

$$\underline{BM = (y_2 - y_1)}$$

а AM - рівна лінії $AB_x (= ab)$ а тому:

$$\underline{AM = (x_2 - x_1)}$$

З теореми Піфагора ми маємо:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2$$

або: $$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

а звідси:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ ----(3)}$$

[Знак перед радікалом +, тому що ми вважаємо відтинок AB завжди додатним]

Напрямність відтинку.

За визначення напрямності відтинку вважають кут, що утворює додатний напрям відтинку з додатним напрямом осі X-ів.

Цей кут носить назву <u>кута спаду простої</u>, або просто <u>спаду простої</u>.

Цей кут відраховується в напрямності проти стрілки годинника.

(Рис 7 (а),(б),(в): кут спаду α)

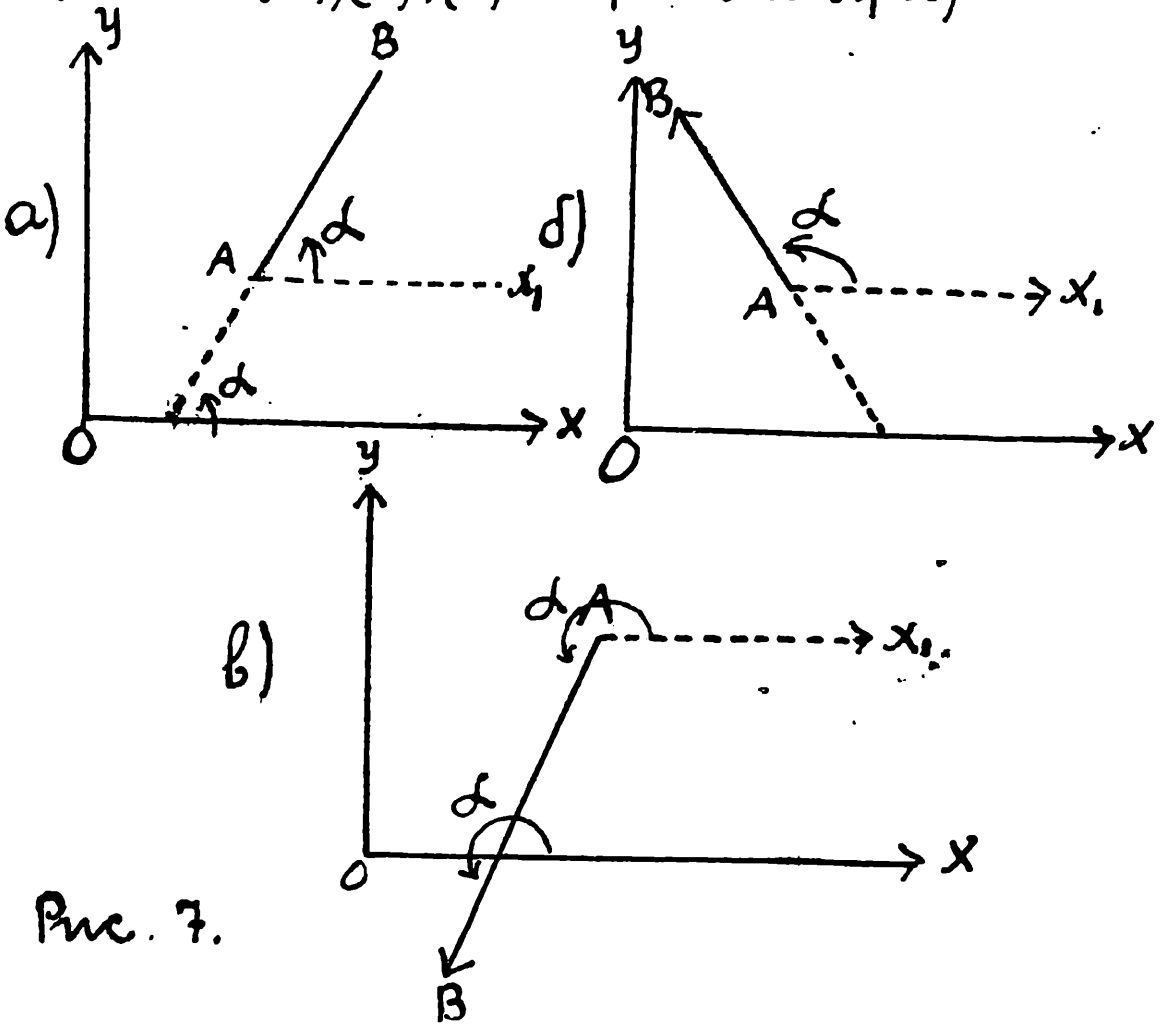


Рис. 7.

<u>Тангенс кута спаду відтинку є рівний відношенню листу його на вісь Y-ів до листу на вісь X-ів</u>

Розглянемо прямокутний трикутник BMA. (Рис 8)

В ньому $tg(180-\alpha) = \frac{BM}{AM}$, але:

$BM = y_2 - y_1$ (як лист AB на вісь Y)

$AM = -(x_2 - x_1)$

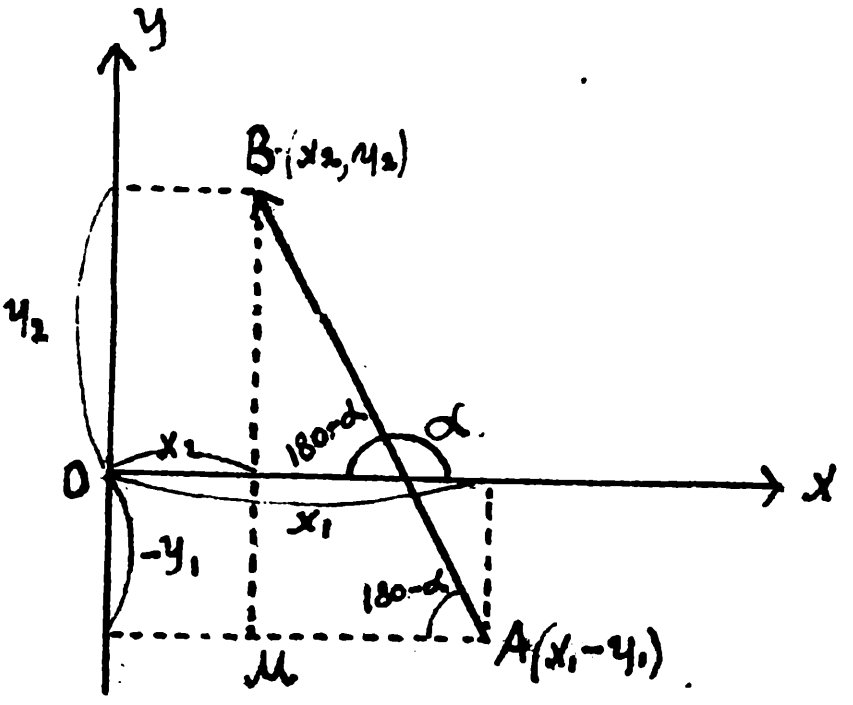


Рис. 8.

Отже: $tg(180-\alpha) = -tg\alpha = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Звідси:

$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots\ldots (4)$$

Що й треба було довести.

Тангенс кута спадну носить власну назву <u>кутового зміннika простої</u>, бо від кожної зміни цього зміннika змінюється й напрям простої взнлядно координатних осей.

Задача 1.

Знайти значення точки, що перебільшує визначений відтинок в даному відношенню $m : n = \lambda$?

<u>1й випадок:</u>

<u>Точка лежить на відтинкові.</u>

Припустимо, що відтинок визначається значеннями його кінців:

$A(x_1\ y_1)$ і $B(x_2\ y_2)$.

Означимо значники переділюючої точки $\mathcal{P}$ через x і y себто $\mathcal{P}(x,y)$

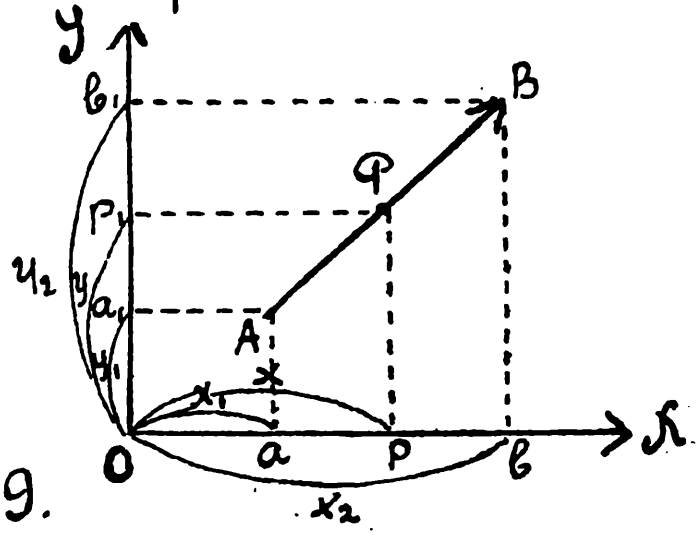


Рис. 9.

Точка $\mathcal{P}$ лицить переділити відтинок AB так, щоб: $\frac{A\mathcal{P}}{\mathcal{P}B} = \lambda$.

З геометрії відомо, що рівнобіжні перетинають відтинки не рівнобіжних на частини пропорційні, себто:

$$\frac{A\mathcal{P}}{\mathcal{P}B} = \frac{ap}{pb} \quad \text{і} \quad \frac{A\mathcal{P}}{\mathcal{P}B} = \frac{a_1p_1}{p_1b_1}$$

але: $ap = x - x_1$; $pb = x_2 - x$

$a_1p_1 = y - y_1$; $p_1b_1 = y_2 - y$.

Тому:

$$\frac{A\mathcal{P}}{\mathcal{P}B} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \; ; \; \frac{A\mathcal{P}}{\mathcal{P}B} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda .$$

Звідси:

$x - x_1 = x_2\lambda - x\lambda$, або $x(1+\lambda) = x_1 + x_2\lambda$.

Тому:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Теж: $y - y_1 = y_2\lambda - y\lambda$, або $y(1+\lambda) = y_1 + y_2\lambda$

Тому:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Такими числом значимали точки Ф будуть:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{aligned}\right\} \text{------(5)}$$

Висновок. Коли точка Ф перепоповнює відтинок АВ, то відношення $\frac{АФ}{ФВ} = \lambda = 1$ тоді <u>значимки середини відтинка будуть:</u>

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}\right\} \text{------(6)}$$

<u>2-й випадок.</u>

<u>Точка Ф лежить на продовженню відтинка АВ.</u>

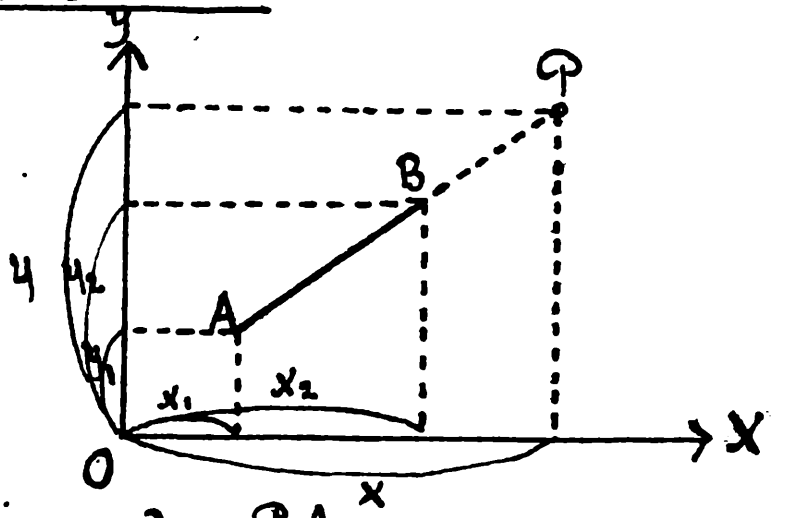


Рис. 10.

Тоді: $\lambda_1 = \frac{ФА}{ФВ}$

З тих самих відношень матимемо:

$$\lambda_1 = \frac{x - x_1}{x - x_2}\ ;\quad \lambda_1 = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

Звідки: $x - x_1 = \lambda x - \lambda_1 x_2$

$y - y_1 = \lambda_1 y - \lambda_1 y_2$

або: $$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda_1}$$

$$y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda_1}$$

Від цих взорів ми можемо перейти до попередніх:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \; ; \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

прийнявши $\lambda_1 = -\lambda$.

Це цілком можливо, бо в першому й у другому випадках, як відтинок ΦB, так і їх числа pb беруться в напрямах взаємно протилежних. (Рис. 11)

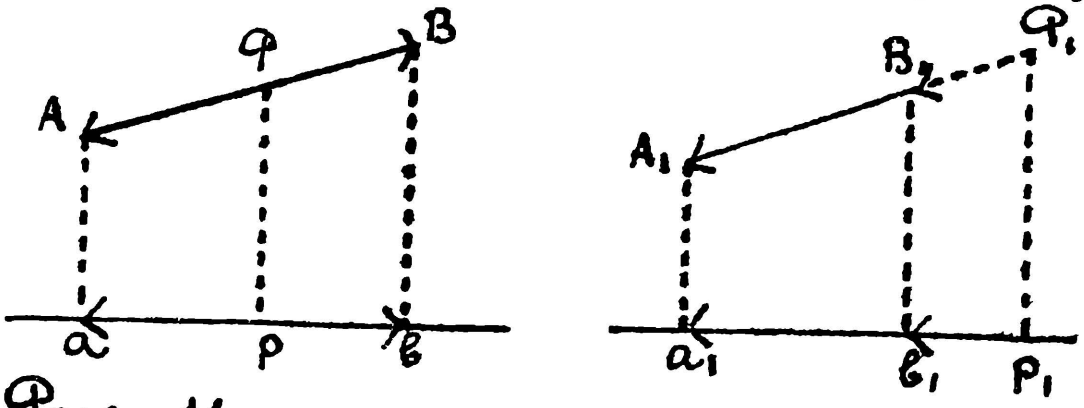


Рис. 11.

Отже: $$\frac{\Phi B}{\Phi A} = -\frac{\Phi_1 B_1}{\Phi A_1}$$

а тому $\lambda_1 = -\lambda$.

Задачі.

Ч 1. Накреслити в прямокутній системі координат точки:
$A(0,5)$; $B(+2,+3)$; $C(-6,+2)$; $D(-3,-5)$; $E(-2,+6)$; $F(+3,-5)$; $K(5,0)$; $L(-3,0)$ прийнявши за одиницю міри $\frac{1}{2}$ сантиметра.

Ч-2. Трикутник має значення вершин: A(3,-2), B(7,4) і C(10,2), вимірювати трикутник, взявши за одиницю міри 0,5 см.

Ч-3. Теж вимірювати чотирикутник, коли значення вершин його A(-3,-2); B(2,6); C(5,3) і D(3,-4)

Ч-4. Знайти довжину відрізка і його значення кінців:
A(2,5); B(6,1)

Ч-5. Знайти спад відрізку Ч-4.

Ч-6. Теж, знайти довжину і спад відрізку: A(0,0); B(2,-5)

Ч-7. Теж, коли значення кінців: A(-4,-5); B(2,-1)

Ч-8. Теж, коли A (0,5); B(-3,0)

Ч-9. Знайти відалення точки A(6,5) від початку координат.

Ч-10. Обчислити боки трикутника, що має значення вершин:
A(-3,-5); B(2,3); C(-1,8)

Ч-11 Обчислити боки і косини чотирикутника, що має значення вершин: A(0,0); B(4,0), C(0,6) і D(-1,2)

Ч-12. Теж, коли A(0,2), B(7,4), C(0,-5) і D(-4,-1)

Ч-13 Знайти кути спаду для про-

стих, що переходять через початок координат і точки:

1) (5,4) 2) (-3,4) 3) (3,-5) 4) (-2,-4)

Ч-14. Знайти значення точки, що передічує відрізок $A(2,-4)$ $B(-2,5)$ у відношенні:

1) $\lambda = \frac{2}{3}$; 2) $\lambda = -\frac{2}{5}$; 3) $\lambda = -\frac{4}{3}$; 4) $\lambda = 2$.

Ч-15. У якому відношенні точка $P(1,0)$ передічує відрізок $A(2,0)$, $B(6,0)$?

Ч-16. У якому відношенні точка $P(-7,9)$ передічує відрізок $A(-3,5)$, $B(5,-3)$

Ч-17. У якому відношенні точка $P(4,3)$ передічує відрізок: $A(6,5)$; $B(-2,-3)$.

Ч-18. Знайти значення середини відрізків: 1) $A(-2,3)$, $B(6,-1)$
2) $A(0,0)$ $B(4,-6)$

Ч-19. Довести, що сума квадратів на вісь Ox вершин трикутника дорівнює 0.

Ч-20. Теж, для кожного многокутника?

Задача 2

Знайти значення центра ваги (перехрещення осередніх) трикутника,

що має значення вершин: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

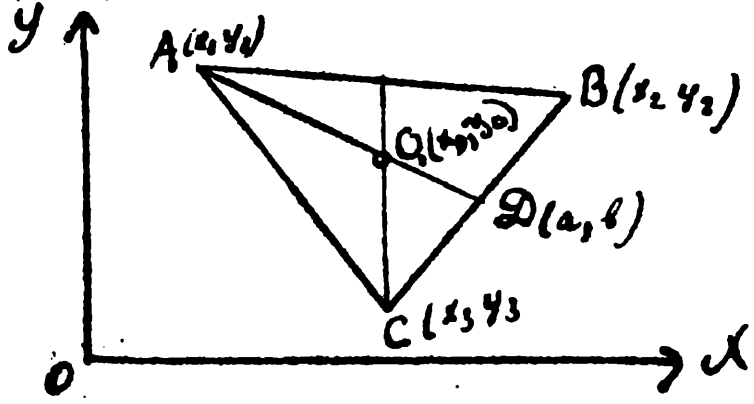


Рис. 19

Ми знаємо, що центр ваги лежить на середній трикутника на $\frac{1}{3}$ її довжини від основи. Себто центр ваги переділює середню у відношенню $\lambda = \frac{AO}{OD} = 2$.

Попереду визначено значення кінців якої середньої AD: значення початку її $A(x_1, y_1)$.

Точка же D (кінець середньої) переполовинює відтинок CD, а тому значення її будуть:

$$a = \frac{x_2 + x_3}{2}; \quad b = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

Отже лишається розв'язати задачу: переділити відтинок: $A(x_1, y_1)$ $D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ у відношенню: $\lambda = 2$.

Тоді значення центра ваги O будуть:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_2+x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ y_0 &= \frac{y_1 + 2 \cdot \frac{y_2+y_3}{2}}{1+2} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (7)$$

Отже:

Значник центру вали трикутника є середнім арифметичним значників всіх трьох вершин цього трикутника.

§ 4. Кут між прямими.

Коли нам дано дві прямих l_1, l_2, що перехрещуються, то умовились називати кутом між цими прямими, той кут, що відлічується від прямої l_2 до прямої l_1 в напрямності проти стрілки годинника. (Рис. 13)

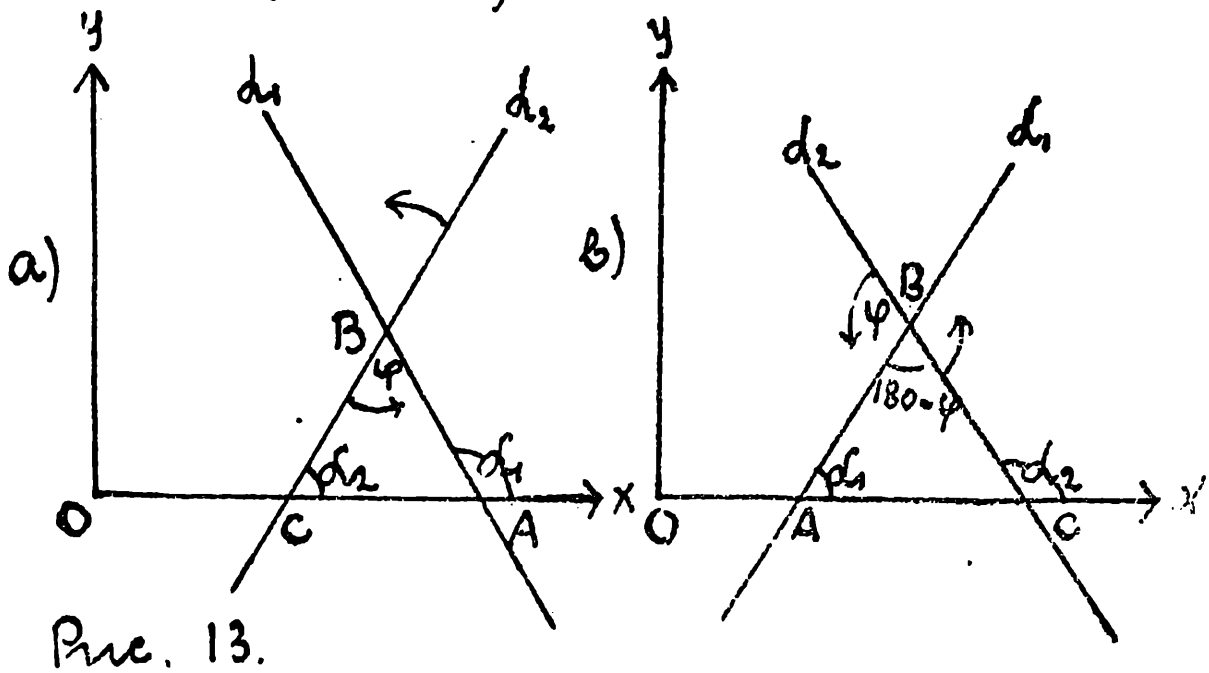


Рис. 13.

У першому випадку: (Рис 13a)

α_1 як зовнішній кут трикутника ABC буде $\alpha_1 = \alpha_2 + \varphi$

(де α_1 і α_2 є кути нахилу прямих)

Звідси: $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$

У другому випадку (Рис 13 б) зовнішній кутовий є α_2 і тому

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 180 - \varphi$$

$$\varphi = 180 + (\alpha_1 - \alpha_2)$$

Звідси:

$$tg\,\varphi = tg\,(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1\, tg\alpha_2}$$

або:

$$tg\,\varphi = tg[180 + (\alpha_1 - \alpha_2)] = tg(\alpha_1 - \alpha_2),$$

а тому одержуємо той же вірш. Але ми знаємо, що $tg\alpha_1 = m_1$ і $tg\alpha_2 = m_2$ є кутові значення, то підставляючи їх маємо:

$$tg\,\varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \quad \text{------(8)}$$

Вірш (8) дає нам можливість обчислити кут φ між даними прямими.

Коли б прямі d_1 і d_2 були рівнобіжні, то кутовий був їх різні, а тому:

$$m_1 - m_2 = 0$$

і $tg\,\varphi = 0$, себто $\varphi = 0$.

Звідси ми маємо умову рівнобіжності двох прямих

$$m_1 = m_2 \quad \text{------(9)}$$

<u>Дві прямі рівнобіжні, коли їх кутові значення (разом і кути спадні) є рівні.</u>

Щоб були прості d_1 і d_2 прямові взаємно необхідно, щоб $\varphi = 90°$ себто $\operatorname{tg}\varphi = \infty$. Це можливо, коли $m_1 \neq m_2$ і коли знаменатель є нуль, себто

$$1 + m_1 m_2 = 0$$

Звідси $m_1 m_2 = -1$ і нарешті

Умова прямовості простих.

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} \quad \text{.....(10)}$$

Дві прості є взаємно прямі, коли їх кутові злишки є взаємно зворотні і протилежні по знаку.

§ 5 Поле трикутника й многокутника.

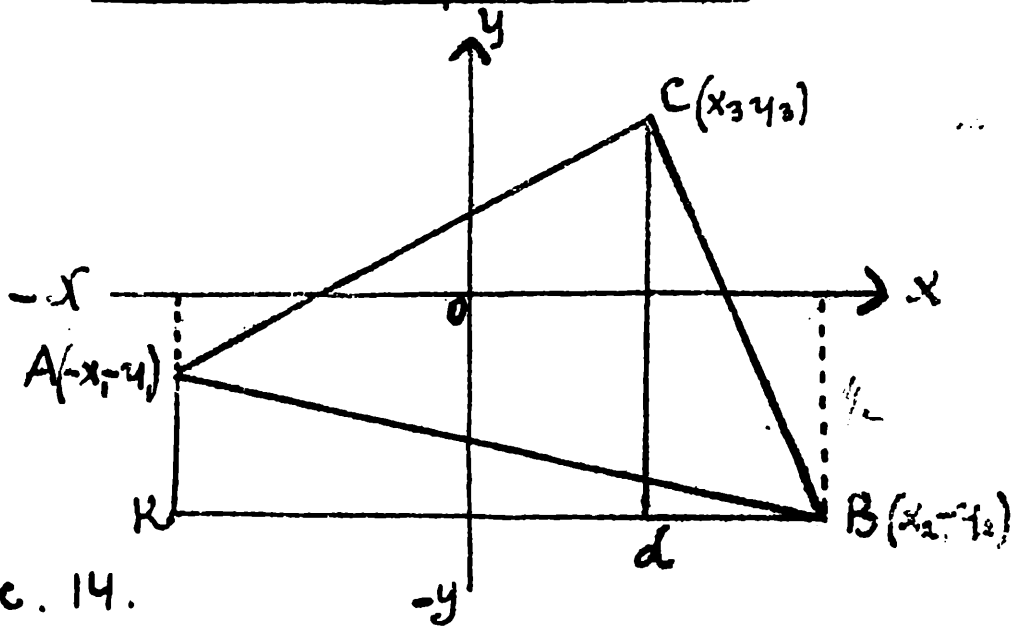


Рис. 14.

Знаючи значники вершків трикутника (рис 14.) легко обчислити і його поле. Припустимо, що маємо трикутник ABC з вершками

$A(x_1 y_1), B(x_2 y_2), C(x_3 y_3)$. Проводимо через найнижчий вершок трикутника (через вершок, що має значником найменший ряд) просту BK рівнобіжну до осі X-ів.

Тоді поле трикутника ABC буде сумою полів трапезу $KACd$ і трикутника CdB без поля трикутника AKB, себто:

$$S_{ABC} = S_{KACd} + S_{CdB} - S_{AKB}.$$

або:

$$S_{ABC} = \frac{KA+dC}{2} Kd + \frac{dC \cdot dB}{2} - \frac{KA \cdot KB}{2}$$

Але. $KA = -y_2 - (-y_1) = y_1 - y_2$

$dC = y_3 - y_2$; $Kd = x_3 - x_1$

$dB = x_2 - x_3$; $KB = x_2 - x_1$

Маємо:

$$S = \frac{(y_1-y_2)+(y_3-y_2)}{2}(x_3-x_1) + \frac{y_3-y_2}{2}(x_2-x_3) - \frac{y_1-y_2}{2}(x_2-x_1)$$

$$2S = (y_1-y_2)(x_3-x_1) + (y_3-y_2)(x_3-x_1) + (y_3-y_2)(x_2-x_3) - (y_1-y_2)(x_2-x_1) =$$

$$= (y_1-y_2)x_3 - (y_1-y_2)x_1 + (y_3-y_2)x_3 - (y_3-y_2)x_1 + (y_3-y_2)x_2 -$$

$$- (y_3-y_2)x_3 - (y_1-y_2)x_2 + (y_1-y_2)x_1 = x_1(y_1-y_2-y_1+y_2-y_3+y_2) +$$

$$+ x_2(y_3-y_2-y_1+y_2) + x_3(y_1-y_2) = x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) +$$

$$+ x_3(y_1-y_2).$$

Або: $$2S = (x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - y_1x_2 + x_3y_1 - x_3y_2) =$$

$$= (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) \quad \ldots (11a)$$

Цей вірш легко написати за

допоміжної так званої колової підстановки по два: 1.2.3.1 $\boxed{(1.2)+(2.3)+(3.1)}$

Поле кожного многокутника можна розглядати як суму полів трикутників на які дробиться даний многокутник косинами з якого одного вершка.

Напр: Поле пятикутника (Рис.15)

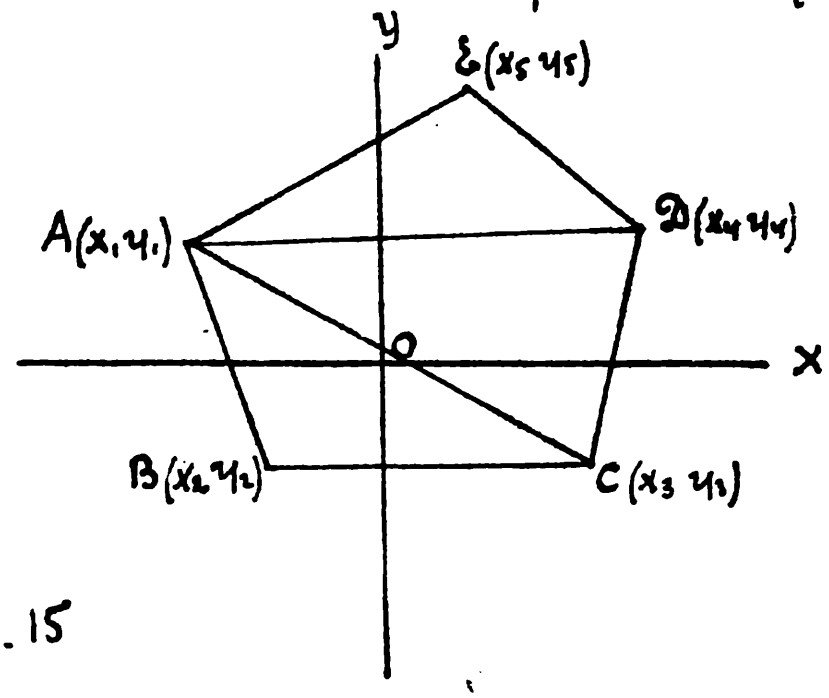


Рис. 15

$$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE}$$

$$2S_{ABCDE} = \left[(x_1y_1 - y_1x_2) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cancel{(x_3y_1 - x_1y_3)}\right] +$$
$$+ \left[\cancel{(x_1y_3 - y_1x_3)} + (x_3y_4 - y_3x_4) + \cancel{(x_4y_1 - x_1y_4)}\right] +$$
$$+ \left[\cancel{(x_1y_4 - y_1x_4)} + (x_4y_5 - y_4x_5) + (x_5y_1 + x_1y_5)\right]$$

$$2S = (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - y_3x_4) +$$
$$+ (x_4y_5 - y_4x_5) + (x_5y_1 - x_1y_5).$$

Індекси при значниках цих сум складаються по правилу колових перестановок, а саме:

1.2.3.4.5.1 $\left[(1.2)+(2.3)+(3.4)+(4.5)+(5.1)\right]$

Отже коли ми умовились символом: $\Delta x_k y_{k+1}$ означати різницю:

$$(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k)$$

то вір поля прямокутника, або многокутника можно записати:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1 \ldots n} \Delta x_k y_{k+1} \quad (11б)$$

Висновок.

Коли б всі дані точки лежали б на одній простій то поле многокутника було б нуль.

Тому рівняння:

$$\sum_{k=1 \ldots n} \Delta x_k y_{k+1} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (11в)$$

є умовою, що через дані точки лежить на одній простій.

Задачі.

Ч-21. Обчислити поле прямокутника, коли:

1) $A(3,-2)$, $B(-4,1)$, $C(-8,5)$
2) $A(3,0)$, $B(0,2)$, $C(4,5)$

Ч-22. Довести, що точки: $A(0,-4)$, $B(2,2)$, $C(-1,-7)$ лежать на одній простій.

Ч-23. Обчислити поле чотирикутника: $(-4,0)$, $(1,-3)$, $(5,1)$ $(0,6)$?

Ч-24. Дано дві точки $A(0,5)$, $B(3,0)$. Знайти третю точку C, що має рядною 2 і лежить на простій AB?

7-25 Довести, що дані три точки лежать на прямій:

1) $A(7,7)$, $B(1,4)$, $C(-3,2)$

2) $K(3,-4)$, $M(0,5)$, $N(-1,8)$

7-26. Обчислити поле:

1) чотирікутника з вершинами: $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(3,3)$, $D(4,1)$

2) п'ятикутника з вершинами: $A(2,3)$, $B(-5,8)$, $C(11,-4)$, $D(9,12)$, $E(14,7)$.

7-27. Довести, що коли чотирікутник з вершинами: $A(x_1 y_1)$, $B(x_2 y_2)$, $C(x_3 y_3)$, $D(x_4 y_4)$ є рівнобіжник, то $x_1+x_3 = x_2+x_4$; $y_1+y_3 = y_2+y_4$?

7-28. Довести, що чотирікутники:

1) $(1,6)$, $(-5,-4)$ $(0,-7)$, $(6,3)$

2) $(4,1)$, $(6,7)$, $(0,5)$ $(-2,-1)$

3) $(3,5)$, $(-5,1)$, $(-1,-2)$, $(7,2)$

4) $(4,0)$, $(1,7)$, $(-6,4)$ $(-3,-3)$

є рівнобіжники (обчислити які саме?)

7-29. Довести:

1) що трикутник: $(8,8)$ $(5,3)$ $(4,7)$ є рівнораменний, а

2) трикутник: $(2,11)$, $(-1,6)$, $(-2,10)$

є прямокутний

Розділ 1
Проста лінія

§ 6. Рівняння прямої

1 Рівняння вісей

Ми розглядали досі положення якої точки на прямій й цікавились визначати це положення відданістю точки від другої наперед загаданої точки, прийнятої за початок рахунку. (§ 1)

Розглянемо тепер той випадок, коли точка лежить на одній з вісей координат. Напр: на вісі X-ів.

Означимо її відданість від початку координат, виміряне даною лінійною мірою через x_1. Уявимо собі цю точку попереду в точці O - початку координат. Тоді її значення (відданістю від O) буде нуль. Будемо її рухати вздовж вісі (в один чи другий бік)

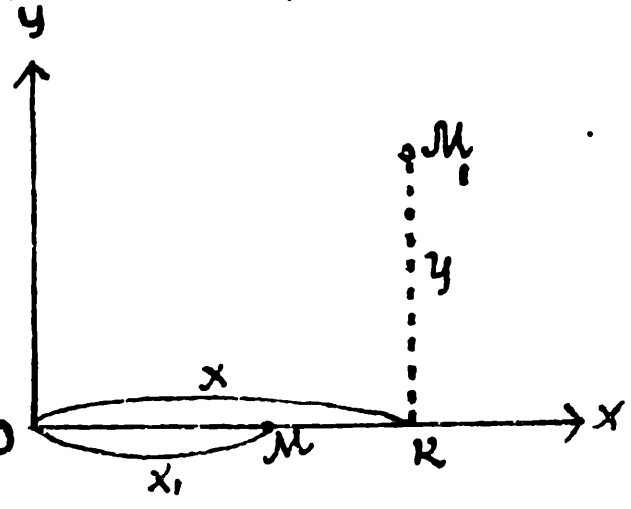


Рис. 16.

З геометрії ми знаємо, що шлях цього руху (слід залишений рухомою точкою) утворить пряму.

Постараємося знайти таку властивість руху точки, якаб стала ознакою того, що точка у своєму русові утворює дану просту.

Ми вже знаємо, що положення кожної точки М на площі визначається двома значками x і y. (де x є відалення по вісі x-ів рядної точки M_1 від початку координат O, а y - є відалення точки M_1 від осі x-ів)

Коли ця точка M_1 лежатиме на вісі x-ів, то віддалення її від вісі x-ів є нуль і тому її значник $y=0$.

Деб точка M_1 не лежалаб на вісі x-ів, то завжди вона буде мати значник $y=0$, себто $M_1(x,0)$

Отже рівнання $y=0$ є ознакою того, що довільна точка M_1 лежить на вісі x-ів.

Перебіг всіх можливих вартостей значника x точки M_1 дасть нам слід руху точки M_1, взагалі вісі x-ів, себто просту, що уявляє з себе вісь x-ів, а тому рівнання:

$$y=0 \quad \text{.....} \quad (12)$$

є рівнанням вісі x-ів.

Аналогічними міркуваннями ми дойдемо до того, що рівнання:

$$x=0 \quad \text{.....} \quad (13)$$

є рівнянням вісі y-ів.
(і точка, що має значитися $M(0,y)$ завжди лежить на вісі y-ів)

II Рівняння простих рівнобіжних до вісей

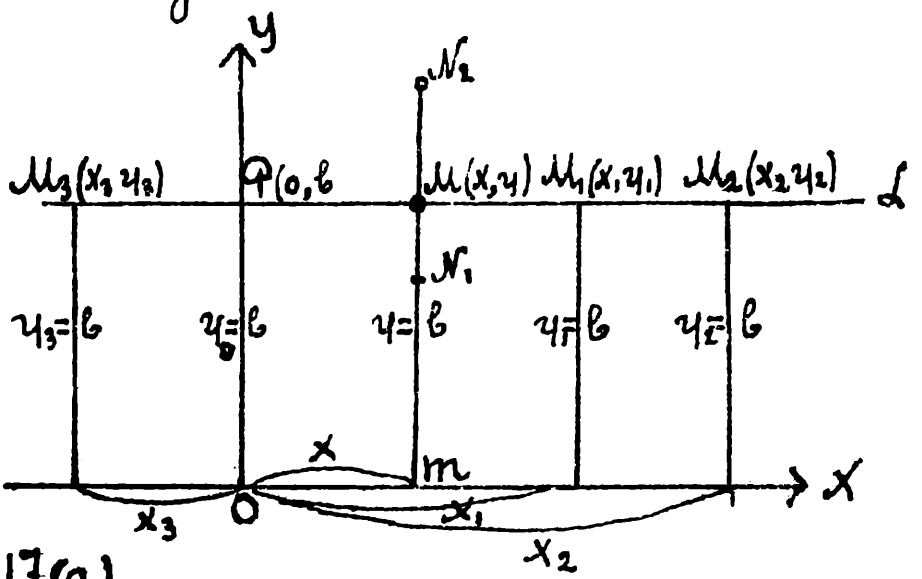


Рис. 17(a)

Візьмемо яку точку $M(x,y)$ на площі й будемо спостерігати її рух в напрямі рівнобіжному, наприклад: вісі X-ів. Ця точка утворить просту рівнобіжну цій вісі X-ів.
В якому з своїх положень M_1, M_2, M_3 ця точка не була б, вона матиме завжди сталу вартість своєї рядної $\underline{y=b}$ (бо рівнобіжна є геометричне місце точок рівновіддалених від даної простої), в той час як значник x буде для кожного положення точки M на простій d мати різні вартости, властиві лише даному її положенню. (цих вартостей безліч)

Відрізок прямої d від осі X-ів $y = b$, можемо заступити відтинком ОР (також рівним b).

Відтинок ОР носить назву: відтинку осі y-ів, себто відтинку, що утворює на осі y-ів дана пряма d своїм перехрестям $P(0,b)$ з нею. Коли d є рівнобіжна осі X-ів, то відтинок осі Y-ів є рівний відтинкам рядних (значникам y) всіх точок, що лежать на прямій d.

Коли ми візьмемо якусь довільну точку N_1 чи N_2, що не лежать на прямій d, то їх рядні $y' = mN_1$, або $y'' = mN_2$ будуть завжди чи менші чи більші від $y = b$ (себто: $y' < b < y''$)

Отже рівняння $y = b$ є необхідною й вистарчаючою прикметою того, що дана точка при всяких вартостях значника x лежить на прямій d, рівнобіжній осі X-ів, а точці рівняння:

$$y = b \quad \text{.....(14)}$$

(де b - є відтинок осі y-ів) <u>можемо вважати рівнянням прямої рівнобіжної до осі X-ів.</u>

Аналогічними міркуваннями ми доведемо (рис 17 б), що рівняння: $x = a$ є необхідною й вистарчаючою

приклетою того, що дана точка при всяких вартостях змінної y, лежить на простій d рівнобіжній до осі y-ів.

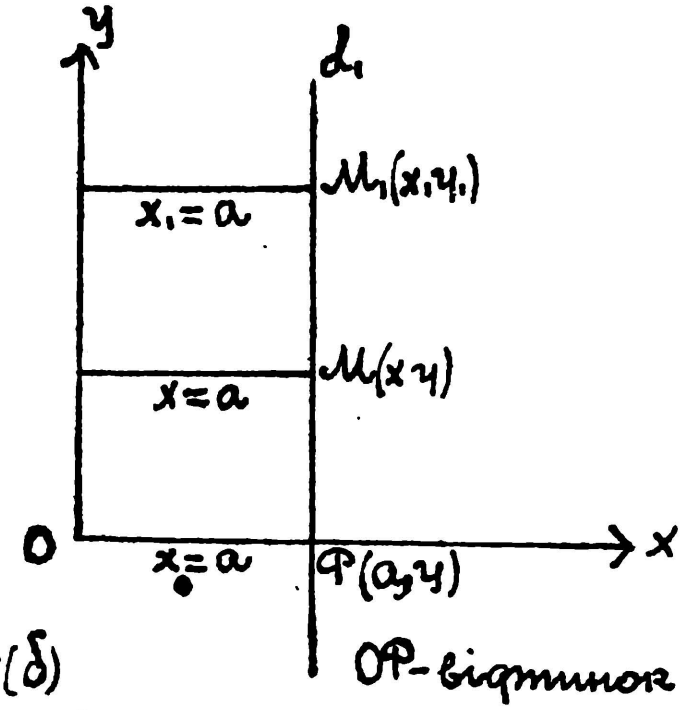


Рис. 17(б) OP-відтинок осі x-ів.

Тому рівнання:

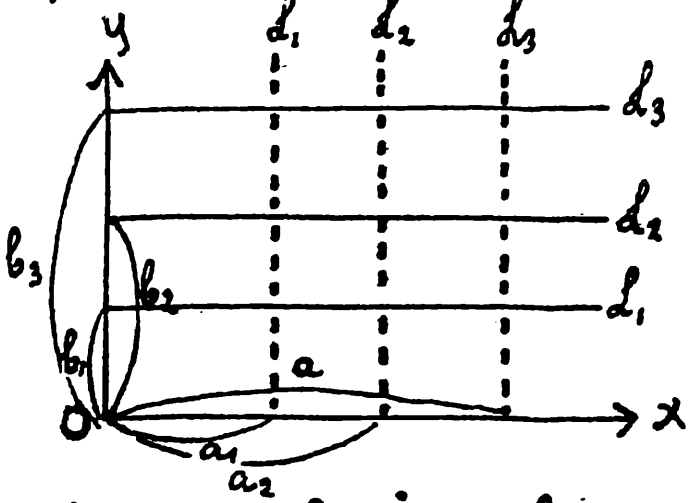
$$x = a \quad \text{----------} (15)$$

(де a - є відтинок осі x-ів) є рівнанням простої рівнобіжної до осі y-ів.

Коли ми в рівнанню $y = b$ (чи $x = a$) будемо надавати сталій вартости b довільні значіння b_1, b_2 і т.д. ($a_1, a_2 \ldots$) то кожному з цих значінь буде відповідати окрема проста $d_1, d_2 \ldots$ рівнобіжна осі x-ів (чи осі y-ів), що відтинається від осі y-ів (x-ів) відтинки відповідно рівні b_1, b_2 і т.д.

Усі прості будучи рівнобіжні одній і тійже простій - осі x-ів - будуть

також рівнобіжні лише собою.



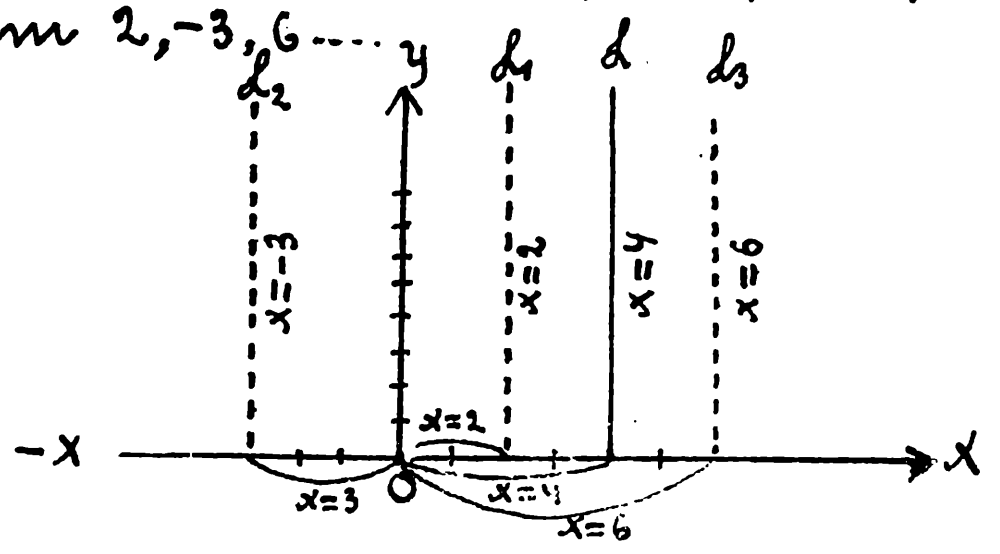
Отже кожна зміна вартости вільного члена рівняння рівнобіжної вісі координат простої, утворює нову просту рівнобіжну першій.

У окремому випадку, коли цей вільний член приймая вартість нуль, то проста стає відповідною вісю, що її показує саме рівняння.

Справді, коли в рівнанню $y = b$; $b = 0$, то рівняння $y = 0$ визначає вісь x-ів, теж саме й для рівняння $x = a$.

Приклад:

Накреслити просту $x = 4$ і потім дати вільному члену по черзі вартости 2, -3, 6 ....



Приймемо за одиницю міри 0,5 см. тоді одержимо шереr простих $d_1 d_2 d_3$ рівновіжних між собою й рівновіжних до осі y-ів.

Задачи.

ч-30. Що виображує точка $A(x, y)$ де x може приймати які бажано вартости від $-\infty$ до $+\infty$. Визначити загальну прикмету цих точок, а також графічно виобразити сукупність точок A, що підлягають цій загальній прикметі.

ч-30 а. Теж для точок: $B(-0,5, y)$; $C(0, y)$; $D(x, -3)$

ч-31. Нагресслити прості, що визначаються рівняннями:

$y=6$; $x=-0,5$; $y=0$; $x=3$, $y=-3,5$.

ч-32. Рівнання простої $y=3$.

Написати рівнання простих відалених від даної на 5; 2; 8; (розглянути відалення по обидва боки простої)

ч-33. Яка точка перехрещення простих: $x=a$, $y=b$; $x=2,5$, $y=-4$.

III Рівняння прямої, що проходить через початок координатних осей

Будемо звати точку, слід якої утворює пряму, творчою точкою даної прямої.

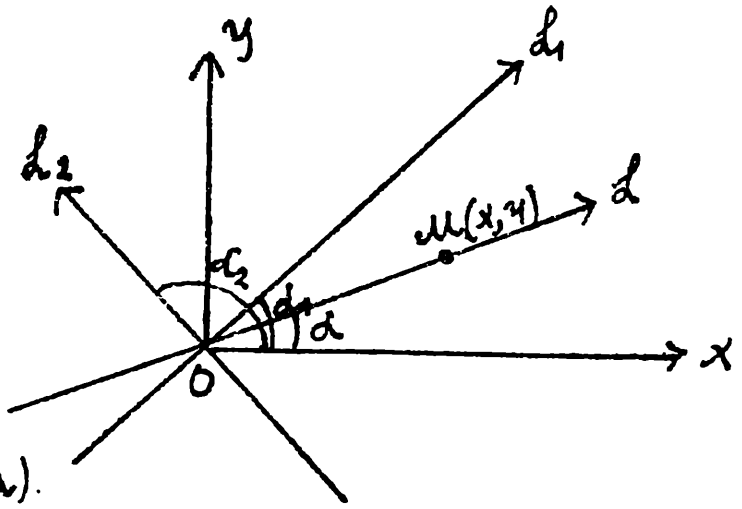


Рис. 18(а).

Хай яка творча точка $M(x,y)$, що рухається від початку координат (в той чи інший бік) утворює яку пряму l. Положення цієї прямої в площині осей xy буде залежати від величини кута спаду α, що утворює ця пряма з віссю x-ів; різними кутами спаду: $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ будуть відповідати різні положення прямої l, l_1, l_2

Відмічено шерег окремих положень творчої точки M на прямій l. Напр: $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)$ і т.д. (Рис 18(б)

Ми бачимо, що значення кожної з цих точок утворюють неофіційно

прямокутний трикутник з гострим кутом α, а тому для кожного з положень точки M на прямій l завжди існуватиме рівність:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$$ (де для даної прямої l - $\operatorname{tg}\alpha = \text{const}$.)

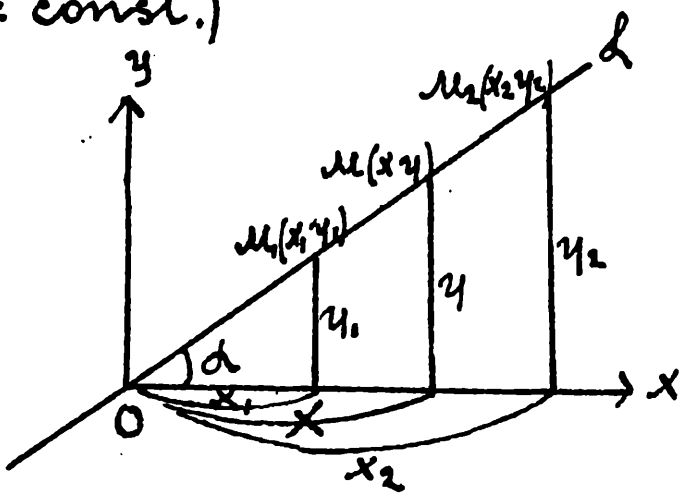


Рис 18(в)

[так для точки M_1: $\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{tg}\alpha = m$; для точки M_2: $\frac{y_2}{x_2} = \operatorname{tg}\alpha = m$ і т. д.]

Одними словами в кожному окремому положенню творчої точки M на прямій l, відношення рядної точки до відповідної відтинкової, є величина стала, рівна тангенсу кута спаду прямої на вісь x-ів.

<u>Ця стала величина (тангенс кута спаду прямої на вісь x-ів), носить назву кутового злінника даної прямої.</u>

Коли ми візьмемо які точки $N_1(x';y')$ і $N_2(x'';y'')$, що не лежатимуть на прямій l (Рис 19), то через пога-

тих координат і відповідні точки N_1 і N_2 можемо провести прості d_1, d_2, що утворять свої кути спаду α_1 і α_2 різні не рівні кути α, або більші, або менші його.

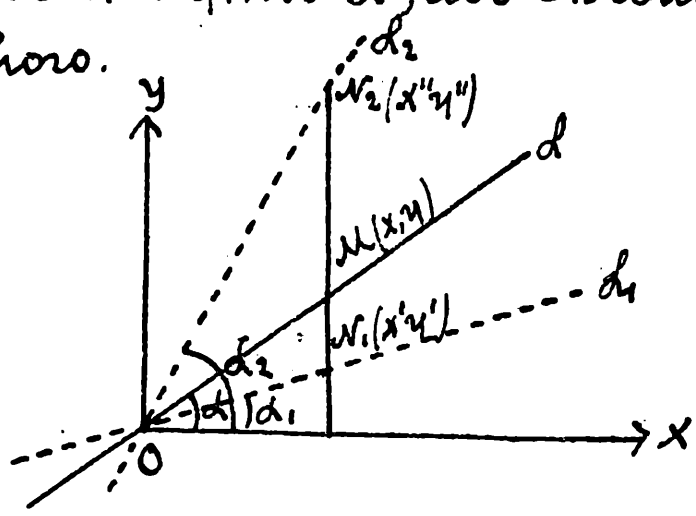


Рис 19

Точці 3 відповідних трикутників
1) ΔN_1OP і 2) N_2OP маємо:

$$\frac{y'}{x_1} = \operatorname{tg}\alpha_1 \; ; \quad \frac{y''}{x''} = \operatorname{tg}\alpha_2$$

Але $\alpha_1 \neq \alpha$; $\alpha_2 \neq \alpha$ (і не рівні $\alpha_1 = \alpha_2 = 180 + \alpha$, бо тоді точки N_1 і N_2 лежали б також на прості d, властиво на промені "і", направленому у від'ємний бік від точки O)
Точці:

$$\frac{y'}{x'} \neq \frac{y''}{x''} \neq \frac{y}{x}.$$

Тангенс також рівність $\frac{y}{x} = m(\text{const})$ не є властивою для значників точок, що не лежать на даній прості d.

<u>Як також рівняння $\frac{y}{x} = m$, або $y = mx$ є необхідною й вистарчальною прикметою того, що при всіх можливих вартостях своїх значників x і y,</u>

дана точка М лежить на прямій, яка проходить через початок координат і утворює кут спаду на вісь X-ів ∠α / тангенс якого є рівний сталій величині m/

Коли ж перебігати всіх можливих вартостей своїх значників x і y, точка М утворює ряд простих, що рівняння:

$$y = mx \quad \text{.....(16)}$$

(де $m = tg\alpha$) є рівнянням прямої, що проходить через початок визначних вісей.

Далочи кутовому значнику довільні вартості від $-\infty$ до $+\infty$, ми одержимо жмутки простих, що проходять через (мають свої вузли) початок координат (Рис 18 а)

Кожній окремій вартості значника m буде відповідати одна й лише одна пряма цього жмутка.

1) Коли m має додатну вартість, то кут спаду прямої є гострий (Рис 18 а), прямі α, α_1), коли ж від'ємне, то кут спаду є тупий. (Рис 20)

$tg\alpha$ - є тангенс тупого кута,

а тому: $tg\alpha = -\frac{y}{x}$

Звідси: $y = -x\,tg\alpha$.

Рівняння (16) має сенс, коли кутовий коефіцієнт

$$m = -\operatorname{tg}\alpha < 0$$

Отже при тупому куті спаду проекції на вісь X-ів кутовий коефіцієнт є від'ємний.

2) Коли $m=0$ (тоді $\operatorname{tg}\alpha=0$; $\alpha=0$), то рівняння прийме вигляд $y=0\cdot x$; $y=0$ - це є рівняння осі X-ів (і справді при $\alpha=0$ пряма l співпадає з віссю X-ів)

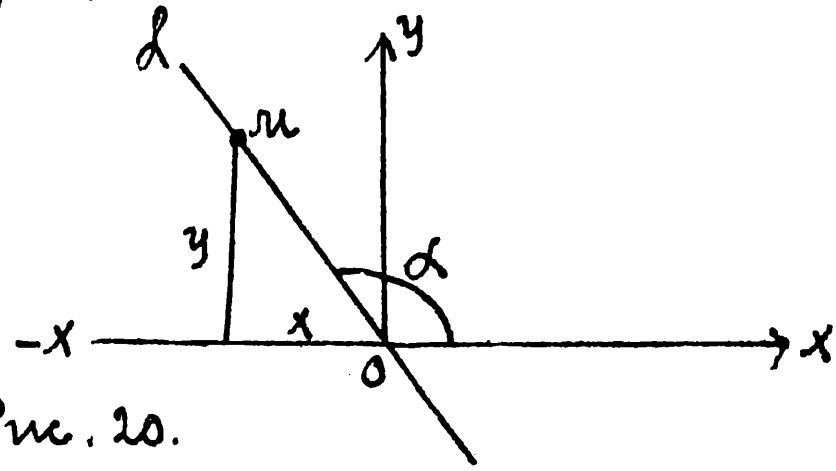


Рис. 20.

3) Коли $m=\infty$ ($\operatorname{tg}\alpha=\infty$; $\alpha=90°$), то визначивши з рівняння $y=mx$, невідоме x, матимемо $x=\frac{y}{m}$, а при $m=\infty$, буде $x=\frac{y}{\infty}=0$; маємо рівняння $x=0$, осі Y-ів. (і справді при $\alpha=90°$ пряма l співпадає з віссю Y-ів)

Задачі.

Ч-34. Написати рівняння прямої, що проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт:

1) $\alpha = 45°$ 2) $\alpha = 60°$ 3) $\alpha = 30°$.

Ч-35. Знайти кут спаду на вісь X прямої, що проходить через початок координат і має рівняння:

1) $y = -\frac{3}{5}x$

2) $\frac{y}{x} = -1$

Ч-36. Яке рівняння має пряма, що проходить через початок координат і утворює з віссю x-ів кут (спаду): 1) 120°, 2) 150° 3) 135° 4) 180°.

Ч-37. 1) Довести, що точки: A(1,3); B(-5,-15); C(0,0) лежать на прямій: $y = 3x$?

2) Які з точок (4,2); (1,-5); (3,3); (-2,10) лежать на прямій $y = -5x$.

Ч-38. Накреслити прямі:

$y = 2x$; $y = -3x$; $2y = -x$.

Ч-39. Теж накреслити прямі:

$y - x = 0$; $x + y = 0$; $y = \sqrt{3}x$; $2y = x$.

Задача 3.

Написати рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку A(a, b)?

Рівняння кожної прямої, що проходить через початок координат буде:

$$y = mx \quad \text{----- (I)}$$

Але точка A (з умови) належить цій

простій, а точці "її" значення лишать обертати це рівняння (I) у тотожність, себто:

$$b = ma \quad (II)$$

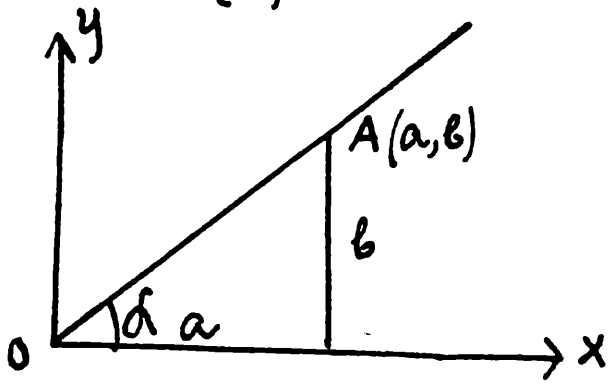


Рис. 21.

[Це можно одержати безпосередньо з Δ KAO (рис 21); $b = a\,tg\alpha$; $b = ma$]

Звідси $m = \frac{b}{a}$ і підставивши в рівність (I) Подібливши почленно рівність (I) на (II) матимемо:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \quad \text{або} \quad y = \frac{b}{a}x$$

Задачі

Ч-40. Написати рівняння простої що проходить через початок координат і точку: A(-8,12); B(5,4); C(3,3); D(2,0); E(-4,8).

Ч-41. Довести, що рівняння:

$$\frac{2xy-y}{2xy-1} = \frac{2x}{2x+1} \quad \text{і} \quad \frac{2x+6y-5}{9y-5} = 1.$$

є рівняннями простих, що проходять через початок координат і визначити їх.

IV Загальне рівняння кожної прямої.

Припустимо, що нам дано яку пряму d, що має кут спаду на вісь x-ів - $\angle\alpha$. і творить відтинок вісі y-ів - n.

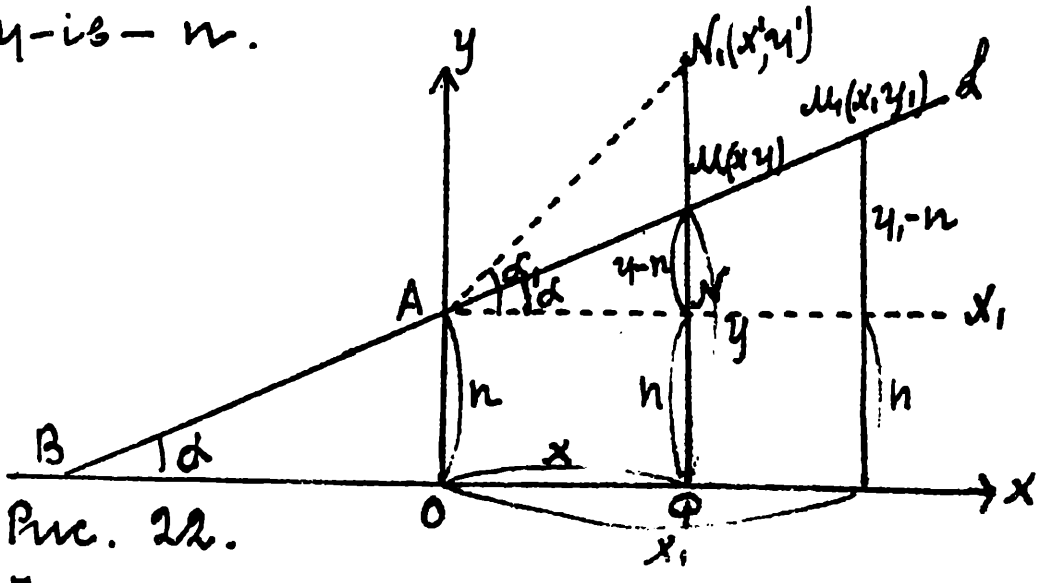


Рис. 22.

Через точку перехрестя прямої d з віссю y-ів A проводимо пряму $AX_1 \parallel OX$. Тоді утвориться кут: $\angle AX_1 = \angle B = \alpha$ (кут спаду прямої d на вісь x-ів)

Деб ми не брали точку M на прямій d, то завжди значники її утворюють прямокутний прикутний MAN з гострим кутом α,

Отже: $$\frac{MN}{AN} = tg\alpha = m\,(const)$$

але $MN = MP - NP = y - n$; $AN = x$

тому $$\frac{y-n}{x} = tg\alpha = m\,(const)$$

[для якої точки M_1 на прямій d буде:
$\frac{y_1-n}{x_1} = tg\alpha = m$]

<u>О-дним словом при кожному окремому положенню творчої точки M на простій d, відношення різниці між рядною і відтинковою осі y-ів до відповідної відтинкової точки є величина стала рівна тангенсу кута спаду простої на вісь x-ів</u> (себто кутовому зовнішньому цієї простої).

Для кожної точки $N(x', y')$, що не лежатиме на простій d, буде відповідати інший кут спаду $\alpha \neq \alpha$, а тому й відношення $\frac{y_1 - n}{x'} \neq \operatorname{tg}\alpha$.

Такий самої рівність $\frac{y-n}{x} = m$ (const) не є властивою для значників точок, що не лежать на даній простій d.

А тому рівняння:

$$\frac{y-n}{x} = m \quad \text{або} \quad \underline{y = mx + n}$$

<u>є необхідною й достатньою умовою того, що при всіх можливих вартостях своїх значників x і y, дана точка M лежить на простій, що має кут спаду на вісь x-ів $\alpha = \operatorname{arctg} m$ і відтинає від осі y-ів відтинок $y = n$.</u>

Коли перебігом всіх можливих вартостей своїх значників x, y, твор-

та точка M утворює дану пряму l, то рівняння:

$$y = mx + n \quad \text{------(17)}$$

(де $m = tg\alpha$) буде рівнянням прямої в довільному положенню відносно координатних осей.

Це загальне рівняння прямої має назву <u>основного, або канонічного рівняння прямої на площі.</u>

[Примітка: В деяких випадках можемо зустрінути рівняння прямої вигляду: $x = m_1 y + n_1$.

Очевидно, що таке рівняння визначає пряму, що має кут спаду на вісь y-ів, $\beta = arctg\, m_1$ і відтинає від осі x-ів відтинок n_1.]

<u>Аналіза рівняння: $y = xm + n$.</u>

I. Розглянемо яку роль в рівнянню відіграє кутовий злінник m.

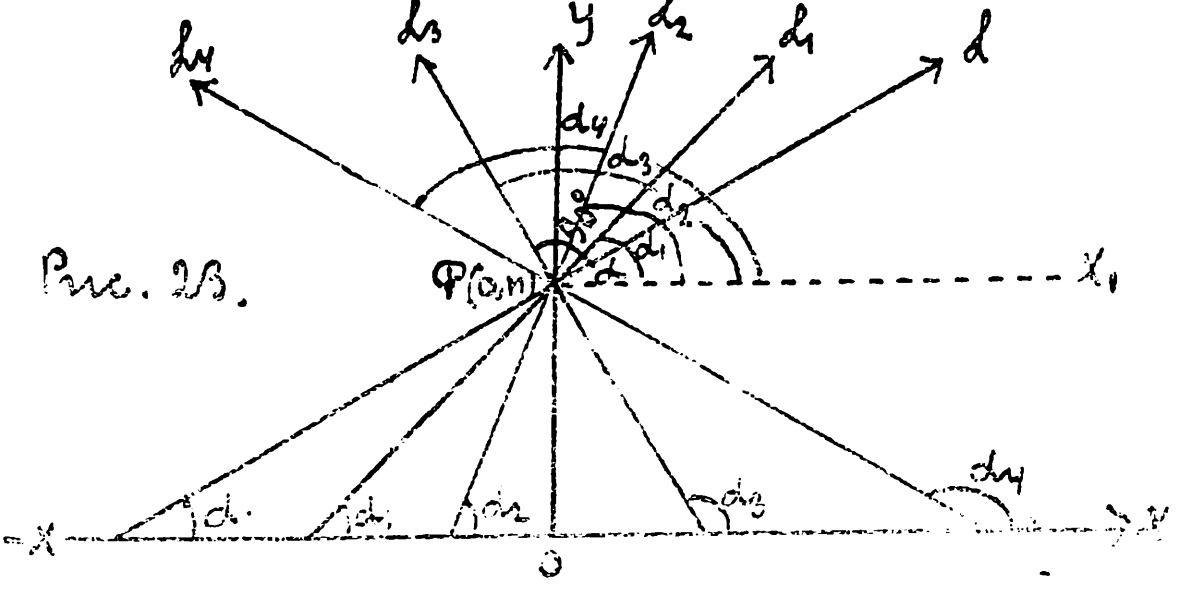


Рис. 23.

Коли почнемо довільно змінювати вартости кутового злишника m, то разом будуть змінюватися і вартости кутів спаду простої d_4 ($\delta_0 m = \operatorname{tg}\alpha$) В цьому разі проста d буде обертатися навколо точки $P(0,n)$, бо ми залишаємо вартість відтинку вісі y-ів сталою = n. При цьому кожній окремій вартости злишника m буде відповідати одна й лише одна проста d_k.

Коли проста d у якомусь зі своїх окремих положень, напр: d_3 стане прямою до первісного положення d, тоді кватовому $\angle d_3 = 90 + \alpha$, а через те: $m_3 = \operatorname{tg} d_3 = \operatorname{tg}(90+\alpha)$;
але $\operatorname{tg}(90+\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
але $\operatorname{tg}\alpha = m$. Тому $\underline{m_2 = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{m}}$
і ми одержали умову прямовісности простих вже доведену в §4, взір (10).

II Роля вільного члена рівняння простої.

Так само, коли ми при сталій вартости злишника m, будемо змінювати довільно вартости вільного члена n (Рис. 24.), то одержимо

ряд простих рівнобіжних одна одній, бо кути спаду їх на вісь x-ів буде однаковий (тому що $m = const$).

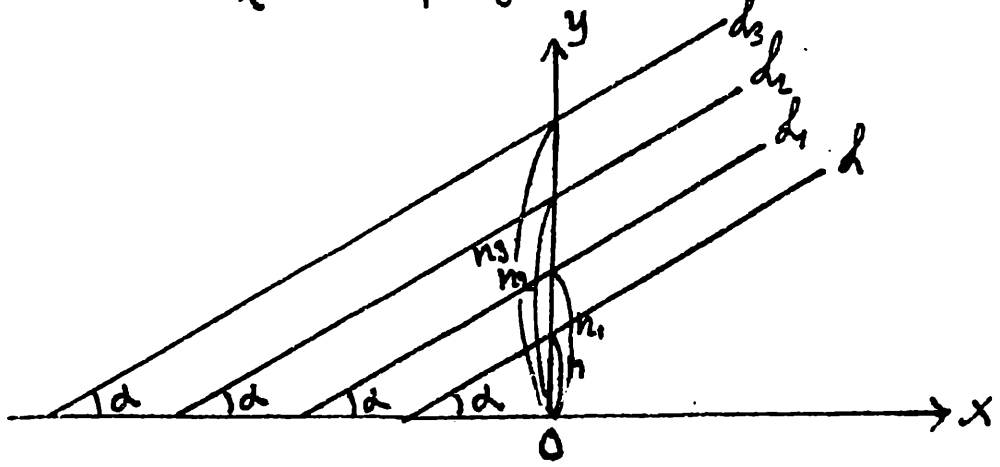


Рис. 24.

Отже дві прості, що мають рівняння (вигляду 17), що відрізняються лише своїми вільними членами є рівнобіжні.

Таким чином тепер простих, що мають рівняннями:

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + n_1 \\ y = mx + n_2 \\ y = mx + n_3 \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots (17_{a})$$

є сноп рівнобіжних.

Числовий приклад:

Рівняння: $\left.\begin{array}{l} y = 4x + 2 \\ y = 4x + 7 \\ y = 4x - 3 \\ \text{і т. д} \end{array}\right\}$ є рівняння сноп рівнобіжних.

Доведене зараз твердження цілком відповідає умові рівнобіжності, що ми доводили в § 4 (вір 9),

яка каже, що:

Дві прямих, що мають однакові кутові змінники ($m_1 = m_2$) є рівнобіжні.

§ 7. Основні задачі на пряму.

Задача 4.

Написати рівняння прямої, що проходить через задану точку $A(a, b)$

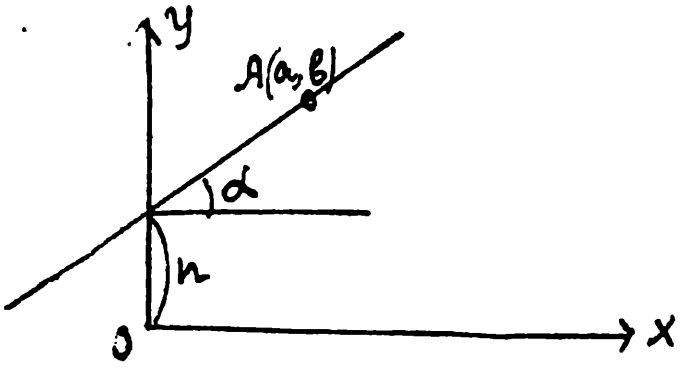


Рис. 25.

Рівняння кожної прямої є:

$y = mx + n$ (де $m = \operatorname{tg}\alpha$, кут нахилу прямої на вісь x-ів, а n - є відтинок вісі y утворений перехрестям цієї з даною прямою)

Коли ця пряма переходить через точку A, себто точка A належить прямій, то значники цієї точки будуть неодмінно розв'язками рівняння (инакше точка A не лежатиме на прямій), тому:

$$y = mx + n \quad (1)$$

обертається у тотожність:

$$b = ma + n \quad (2)$$

Відлічуючи рівність (2) від рівності (1) маємо:

$$y - b = m(x - a)$$

Примітка: Умовлено означати в загальному випадку значники точки A через x_1, y_1 й тоді в загальному вигляді рівняння буде:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ ------ } (18)$$

Геометричний доказ

Візьмемо визначні вісі xy і яку точку $A(a,b)$ (Рис. 26)

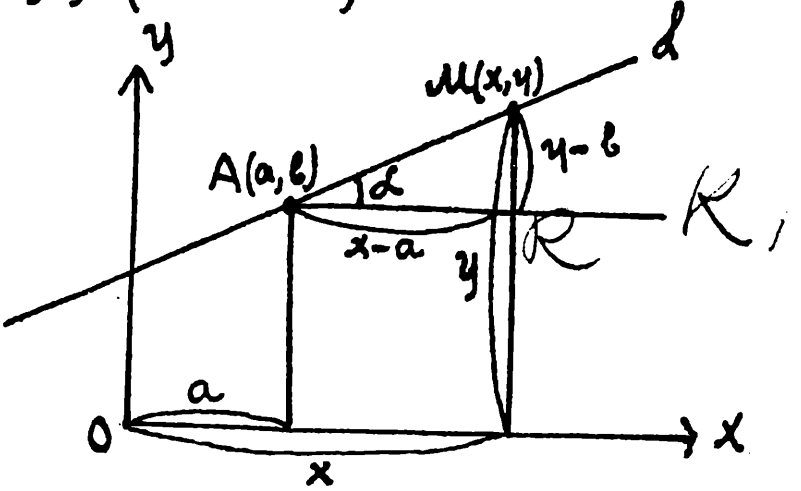


Рис. 26.

Через цю точку проводимо довільну пряму d і на ній візьмемо яку будь точку M з невизначеними значниками x і y. Провівши ряді й пряму $AK \parallel OX$, маємо прикутний $\triangle MAK$, де $AK = AM_x = x - a$; $MK = AB_y = y - b$. Означимо кут спаду прямої d на вісь x-ів через α, тоді з прикутника $\triangle AMK$, маємо:

$$y - b = (x - a)\operatorname{tg}\alpha.$$

Але $tg\alpha$ є кутовий злінних простої l:
$tg\alpha = m$.
тоді: $y - b = m(x - a)$
Це і є рівняння простої l, що проходить через точку A, бо воно встановлює функціональну залежність між значеннями довільної точки на цій прямій і кутом спаду її на вісь X-ів.

Аналіза.

Очевидно, що через точку $A(a,b)$ можна провести безліч прямих.
Ми можемо кутовому злінних надавати безліч довільних значень і тим самим одержати безліч прямих, що проходитимуть через точку A.

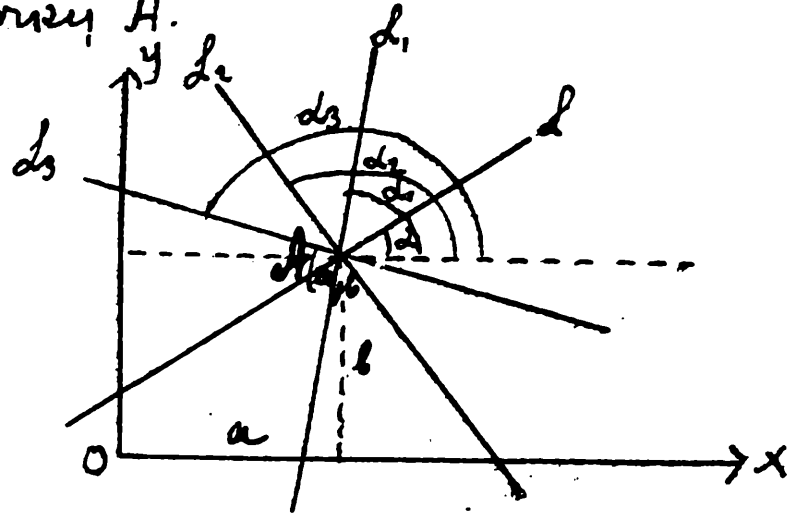


Рис. 27.

Задача 5

Написати рівняння прямої, що проходить через 2 заданих точки: $A(a,b)$, $B(c,d)$.

Рівняння кожної прямої: $y = mx + n$.
Коли ця пряма проходить через точку $A(a, b)$, то це рівняння обернеться в:

$$y - b = m(x - a)$$

Але з умови дано, що ця пряма проходитиме й через точку $B(c, d)$, тому рівняння її також мусить мати вигляд: $y - d = m(x - c)$

Щоб сполучити ці два рівняння у одно ми почленно поділимо їх на одне й матимемо:

$$\frac{y - b}{y - d} = \frac{x - a}{x - c}.$$

Або в загальному вигляді, коли $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ маємо:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2} \quad \text{------(19)}$$

Цьому рівнянню дають ще й другий вигляд, а саме:
З пропорції (19) складаємо похідну (попередній так відноситься до різниці наступного, як другий попередній до різниці других наступного і попереднього)

$$\frac{y - y_1}{\cancel{y} - y_2 \cancel{- y} + y_1} = \frac{x - x_1}{x - x_2 \cancel{- x} + x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

або: $$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \quad \text{.....(19a)}$$

Геометричний довід

Візьмемо вісі координат xy і дані точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2 y_2)$.

Проводимо через ці дві точки пряму d і беремо на ній довільну точку $M(x, y)$

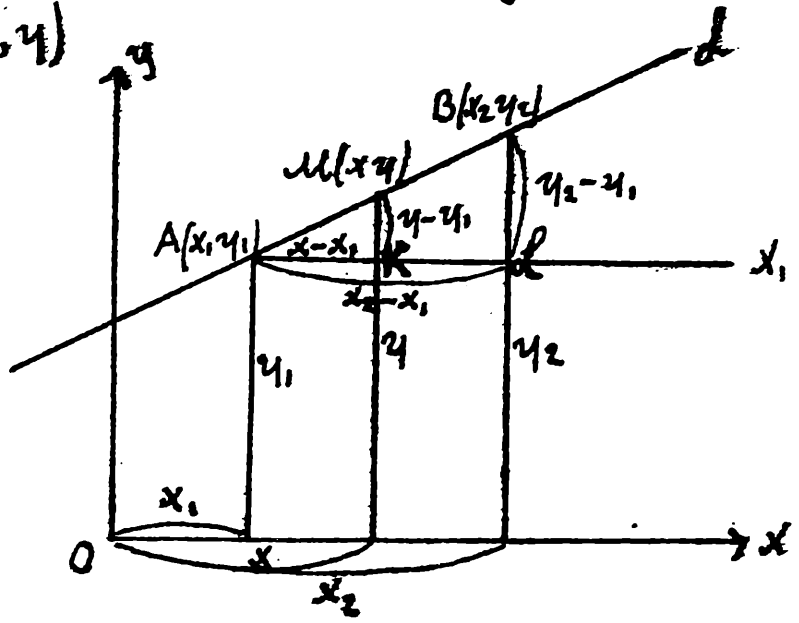


Рис. 28.

Тоді спустивши з точок ряди і провівши пряму $Ax' \parallel Ox$, маємо зі схожості прямокутників: AKM і AdB, що:

$$\frac{KM}{Bd} = \frac{AK}{Ad}; \text{ або } KM = \frac{Bd}{Ad} \cdot AK$$

Але $KM = y - y_1 (= AM_y)$; $Bd (= MB_y) = y_2 - y_1$;
$AK (= AM_x) = x - x_1$; $Ad (= AB_x) = x_2 - x_1$

Тому підставивши вартості: KM, Bd .... маємо:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(або міняючи знаки в чисельнику і

Знаменатель, матимемо взір (19а)

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

Це рівняння установлює залежність між значеннями якої бажано точки на прямій d і точку з її рівнянням. В цьому рівнянню кутовий змінних $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ є величина стала, що й мусить бути, тому що дві точки цілковито визначають пряму. Тобто така пряма є одна.

Примітка. Можно було б вивести безпосередньо й взір 19, а саме: Взявши точку $M(xy)$ перед нею $A(x_1 y_1)$, матимемо:

$$\frac{AK}{Bd} = \frac{MK}{Md}$$

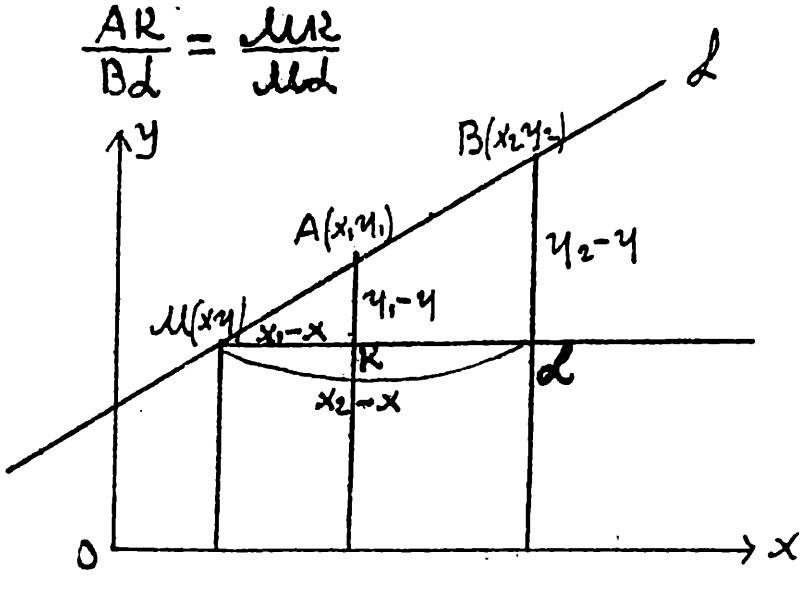


Рис. 29

але $AK = y_1 - y$; $Bd = y_2 - y$; $MK = x_1 - x$; $Md = x_2 - x$, тому:

$$\frac{y_1 - y}{y_2 - y} = \frac{x_1 - x}{x_2 - x}$$, або міняючи

перед членами дробів знаки на зворотні, матимемо:

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=\frac{x-x_1}{x-x_2}$$, що є рівнянням (19)

Висновок.

Три точки лежать на прямій, коли вони обертають в тотожність рівняння (19), (себто рівняння прямої, що проходить через дві задані з цих трьох точок)

Дійсно, коли дано три точки: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_3)$, то рівняння прямої, що проходитиме через точки A і B буде:

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=\frac{x-x_1}{x-x_2} \ldots (19)$$

Але, коли точка C лежатиме на цій самій прямій, то її значення мусять задовольняти рівнанню (19) (себто бути його розв'язками) а тому:

$$\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} \ldots\ldots\ldots (20)$$

є тотожність.

[Примітка. Ця умова прямолінійності трьох точок не є нова. Вона лише є іншою формою загальної умови (11) взаємного лінійного

трьох точок, а саме:

$$\sum_{1\dots n} \Delta x_k y_{k+1} = 0$$

Пояснимо це:

Приводимо до спільного знаменателя рівняння (20):

$$y_3x_3 - x_2y_3 - x_3y_1 + x_2y_1 = x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2$$

або:

$$0 = x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_1y_2$$

Це можно написати так:

$$(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) = 0$$

але ми різницю $(x_ky_{k+1} - x_{k+1}y_k)$ умовились означати через $\Delta x_k y_{k+1}$, а тому наша рівність буде мати: вигляд:

$$\sum_{k=1,2,3.} \Delta x_k y_{k+1} = 0$$

що і є взором (11)]

Задача 6.

Дано просту $y = kx + l$ (де k і l є дані сталі величини).

Провести через точку $A(a,b)$ рівнобіжну до цієї простої.

Ми вже знаємо, що кожна проста d, що проходить через точку $A(a,b)$, має рівняння:

$$y - b = m(x - a)$$

Таких простих буде безліч, в залеж-

ності від змін вартостей кутового змінника m (рис 27), тому треба підібрати таку вартість змінника m, щоб ця пряма b була рівнобіжною до даної, але ми з умови рівнобіжності двох прямих (вір 9), знаємо, що такі прямі мусять мати однакові кутові змінники, а тому m = k.

Отже рівняння прямої, що проходить через точку A(a,b) рівнобіжно до прямої y = kx + l, буде:

$$y - b = k(x - a) \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

або визначаючи y, матимемо:

$$y = kx + (b - ak) \quad \ldots\ldots (21a)$$

Щоб написати рівняння прямої, що проходить через задану точку A(a,b) рівнобіжно даній прямій y = kx + l необхідно (й вистарчає) змінити в рівнянню заданої прямої вільний член на різницю рядної даної точки без здобутка відтинкової на кутовий змінник.

Приклад.

Написати рівняння прямої, що проходить через точку A(4,5) рівнобіжно до прямої: y = 3x + 2

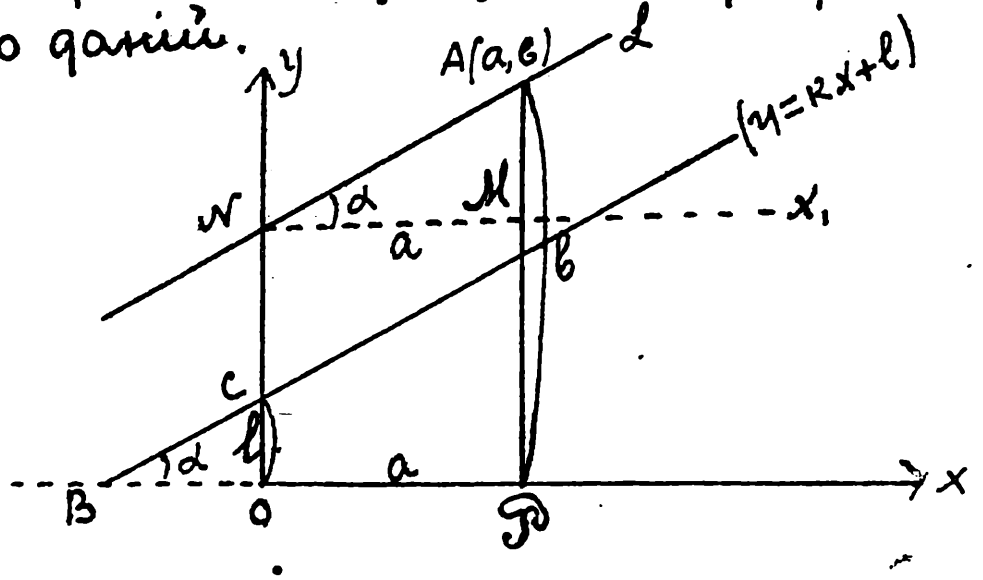
Новий вільний член: b - ak = 5 - 4.3 = -7.

Тому рівняння прямої l:

$$y = 3x - 7$$

Геометричний доказ

Взявши вісі координат xy і дану пряму $y = kx + l$, проводимо через задану точку $A(a,b)$ пряму l рівнобіжно даній.



Ми знаємо, що рівняння кожної прямої має вигляд:

$$y = mx + n \quad (A)$$

Треба знайти сочинники m і n.

Провівши пряму $NX' \parallel OX$, ми маємо кут $\angle lNX'$, який рівний куту нахилу прямої l на вісь x-ів, але $\angle lNX' = \angle CBO = \alpha$, як кути створені взаємно рівнобіжними рамінами.

Маємо: $\operatorname{tg} \angle lNX' = \operatorname{tg}\alpha = k$

(Взявши пряму $y = kx + l$, що має такий кут нахилу $\angle CBO = \alpha$)

Отже: $\underline{m = k}$.

Обчислимо $n = ON$ (відтинку утвореному прямою d на осі y-ів)

$$ON = AP - AM = b - AM$$

З прямокутника ANM, маємо:

$AM = MN \operatorname{tg}\alpha = a \operatorname{tg}\alpha$ (але $\operatorname{tg}\alpha = k$)

тому: $AM = ak$.

Звідси: $n = ON = b - ak$

(вільний член рівняння)

Підставляючи вартості m і n у рівняння (A), матимемо:

$$y = kx + (b - ak)$$

(себто попереднє рівняння 21[a])

Задача. 7.

Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(a, b)$ прямовід до даної прямої $y = kx + l$?

[Коли точка $A(a, b)$ лежить на даній прямій, то вживають формулювання: Написати рівняння прямої поставленого до прямої $y = kx + l$, в точці $A(a, b)$; коли ж точка лежить поза прямою, то вживають формулювання: написати рівняння прямої спущеного на пряму $y = kx + l$ з точки $A(a, b)$].

Рівняння кожної прямої d, що

проходить через точку $A(a,b)$ буде:

$$y-b=m(x-a) \quad (l)$$

Таких простих буде безліч, залежно від зміни вартости кутового злічника m. Тому нам треба підібрати таку вартість злічника m, щоб проста l була прямовою до даної.

З умови прямовости простих ми знаємо, що кутовий злічник простої прямої до даної, мусить бути рівний оберненій величині кутового злічника даної простої взятій з протилежним знаком (вір.10)

себто: $$m=\frac{1}{k}.$$

Тому рівняння простої l, що проходить через точку $A(a,b)$ прямово до даної простої $y=kx+l$ буде: $$y-b=-\frac{1}{k}(x-a) \dots\dots (22)$$

або визначаючи y, ми матимемо другий вигляд цього рівняння:

$$y=-\frac{1}{k}x+\left(b+\frac{a}{k}\right) \dots\dots (22a)$$

Щоб одержати рівняння простої, що проходить через точку $A(a,b)$ і є прямою до даної

простої $y = kx + b$, треба в рівнанню даної простої:

1) кутовий зчінник зчінити на обернену величину його взяту з протилежним знаком.

2) вільний член зчінити на суму ряної даної точки з її відтинковою поділеного на кутового зчінника рівняння даної простої.

Приклад.

Дано просту: $y = 3x + 2$.

Написати рівняння прямої до неї ступеного з точки $A(6,5)$ [або поставленою до неї в точці $A(6,5)$]?

Зчінник буде: $-\frac{1}{3}$.

Вільний член: $b + \frac{a}{12} = 5 + \frac{6}{3} = 7$.

Тому рівняння прямої:

$$y = -\frac{x}{3} + 7.$$

Геометричний довід.

1-ий випадок. Точка лежить на даній простій (поставленій прямій)

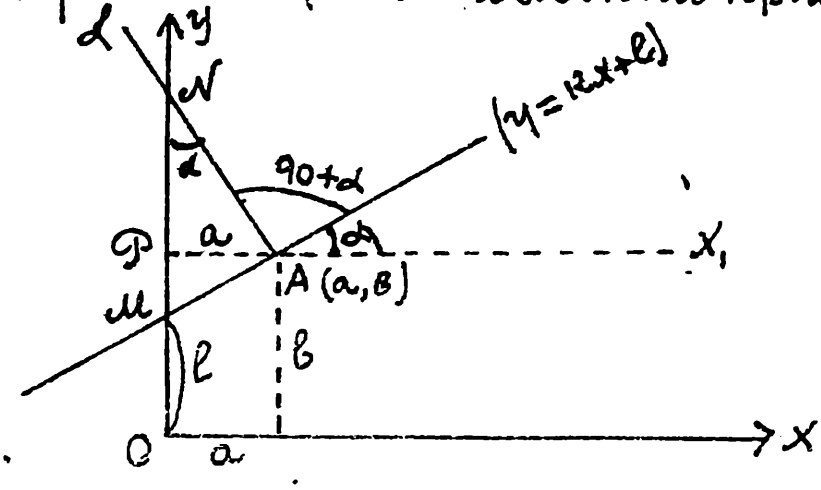


Рис. 31.

Рівняння кожної прямої буде:

$$y = mx + n \quad (l)$$

Щоб мати рівняння даної прямої l треба відповідно визначити сталі m і n.

Ми знаємо, що m є тангенс кута нахилу прямої l на вісь x-ів, себто:

$$\underline{m = \operatorname{tg} \angle lAX'}$$

Коли кут нахилу даної прямої $y = kx + l$ є $\angle\alpha$ (себто $k = \operatorname{tg}\alpha$), то кут нахилу прямої до неї, прямої l, буде (рис 31):

$$\angle lAX' = \alpha + 90^\circ$$

Маємо:

$$m = \operatorname{tg} \angle lAX' = \operatorname{tg}(90 + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Але $\operatorname{tg}\alpha = k$ й через те:

$$\underline{m = -\frac{1}{k}}$$

(Цей вираз ми вже мали в § 4)

Визначимо сталий n:

Ми знаємо, що сталий n є величина відтинку вісі y-ів, утвореного перетином цієї вісі даною прямою l; себто:

$$n = ON = OP + PN.$$

$OP = b$; PN з прямокутного прикутника PAN є рівне: $PN = a\operatorname{ctg}\alpha$, або: $PN = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a}{k}$ (бо $\operatorname{tg}\alpha = k$)

Отже: $n = ON = b + \frac{a}{k}$

Підставляючи вартості m і n у рівняння (2), матимемо:

$$y = -\frac{1}{k}x + \left(b + \frac{a}{k}\right)$$

(себто одержали рівняння 22а).

2-й випадок.

Точка A лежить поза даною прямою (стрілений пряме)

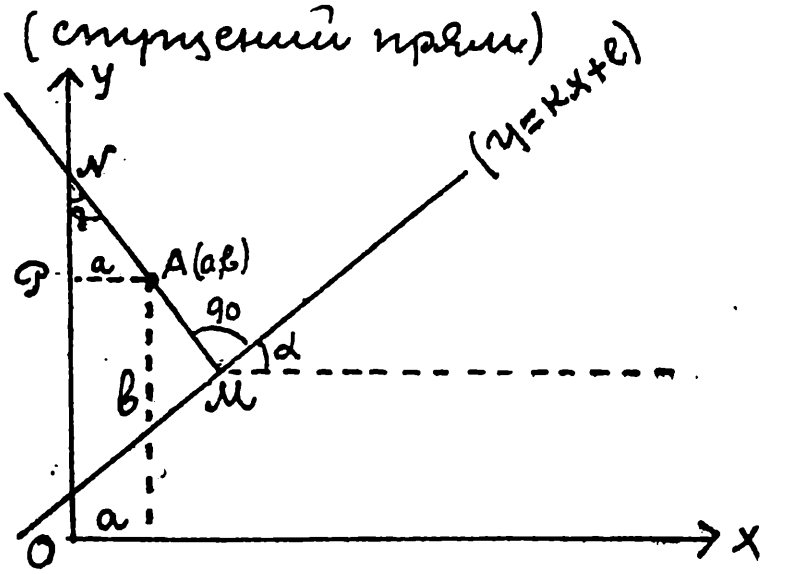


Рис. 32.

Рівняння кожної прямої буде:

$$y = mx + n.$$

Треба визначити сочинники m і n. Визначення m аналогічно попередньому, а тому ми його не будемо доводити:

$$m = -\frac{1}{k}$$

Сочинник n у даному разі буде:

$ON = OP + PN$.

Але $OP = b$; а з трикутника APN маємо: $PN = a\,ctg\alpha = \frac{a}{tg\alpha} = \frac{a}{k}$.

Звідси: $n = ON = b + \frac{a}{k}$.

Отже рівняння прямої буде:

$$y = -\frac{1}{k}x + \left(b + \frac{a}{k}\right)$$

Ми бачимо, що рівняння для прямих спрямених з якої точки, чи поставлених в якій точці даної прямої є однакове

Алгебричне рівняння прямої

Кожне алгебричне рівняння першого степеня з двома невідомими уявляє певну просту лінію.

(Инакше: кожне рівняння першого степеня з двома невідомими можно завжди графічно інтерпретувати як певно визначену просту лінію на площі)

Візьмемо загальну форму такого рівняння:

$$Ax + By + C = 0 \quad \ldots\ldots (23)$$

Визначимо з нього y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = 0$$

Функція тангенс може приймати які бажано вартості від $-\infty$ до $+\infty$, а тому дріб $-\frac{A}{B}$ завжди може уявляти tg якого кута α, себто:

$$-\frac{A}{B} = \operatorname{tg}\alpha = m$$

Відношення сочинників $-\frac{c}{B}$ завжди виражається якимсь числом. Це число завжди може означати відтинок на осі y вимірений в яких певних одиницях міри. Тому дріб $-\frac{c}{B}$ можемо вважати рівним n, себто:

$$-\frac{c}{B} = n$$

Таким чином рівняння:

$$Ax + By + C = 0$$

перетворюється в:

$$y = mx + n.$$

Це є звичайне рівняння (17)

1) Кут спаду цієї простої легко визначається з рівності:

$$tg\alpha = -\frac{A}{B}, \text{ а}$$

2) Відтинок осі y-ів також легко визначається з рівності:

$$n = -\frac{c}{B}.$$

Примітка: У практиці таке перетворення алгебричного рівняння в канонічне рівняння простої переводиться шляхом визначення з алгебричного рівняння y.

Напр: $2x + 3y - 6 = 0$

Звідси поділивши члени рівняння на 3 (на сочинник при y) і переносячи всі члени крім y в праву

частину маємо:

$$\frac{2}{3}x + y - 2 = 0$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Отже $tg\alpha = -\frac{2}{3}$; $n = 2$.

[Аналіза: A і B не можуть бути одночасно рівні нулю, бо тоді рівняння не існувало б; ($c = 0$)

Розглянемо випадки:

1) Коли $c = 0$, тоді $n = -\frac{c}{B} = 0$ і пряма рівняння $y = mx$ проходить через початок вісей і рівняння має вигляд: $Ax + By = 0$.

2) Коли $A = 0$ (а $B \neq 0$), то $tg\alpha = -\frac{A}{B} = 0$ і $\alpha = 0$. Пряма (має рівняння: $y = x \cdot 0 + n$; $y = n$) є рівнобіжна до вісі x-ів, Коли $c \neq 0$, себто $n \neq 0$, а коли $c = 0$, себто $n = 0$, то пряма ($y = 0$) стає віссю x-ів.

(У першому разі рівняння прямої має вигляд: $0x + By + c = 0$, себто $By + c = 0$ (рівняння рівнобіжної вісі x-ів) а у другому разі рівняння має вигляд: $0x + By + 0 = 0$, себто $By = 0$ (рівняння вісі x-ів)

3) Коли $B = 0$ ($A \neq 0$). Тоді рівняння $Ax + By + c = 0$ розв'язуючи відносно x і маємо: $x = -\frac{B}{A}y - \frac{c}{A}$

Коли $B=0$ то рівняння має вигляд: $x=-\frac{c}{a}$, або $x=k$

При $c\neq 0$ це є рівняння прямої рівнобіжної до вісі y-ів і має вигляд: $Ax+C=0$

При $C=0$, це є рівняння самої вісі y-ів і має вигляд:

$$Ax=0$$

Такими чином алгебричне рівняння:

1) $Ax+By+C=0$ (повне)

є рівняння прямої в довільному положенню згідно вісей.

2) $Ax+By=0$

є рівняння прямої, що проходить через початок координат

3) $Ax+C=0$

є рівняння прямої рівнобіжної вісі y-ів

4) $By+C=0$

є рівняння прямої рівнобіжної вісі x-ів

5) $Ax=0$

є рівняння самої вісі y-ів

6) $Bx=0$

є рівняння самої вісі x-ів ∎

Примітка:

Виведемо для випадку коли рів-

нання прямої висловлено через загальне алгебричне рівнання:

$$Ax + By + C = 0$$

1) Рівнання прямої, що проходить через загадану точку $M(x_1, y_1)$.

Ми вже знаємо, що рівнання такої прямої є: $y - y_1 = m(x - x_1)$; але $m = -\frac{A}{B}$; тому: $y - y_1 = -\frac{A}{B}(x - x_1)$, або:

$$\underline{B(y - y_1) = -A(x - x_1)}$$

або:

$$\underline{A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0}$$

2) Той же самий вигляд має шукане рівнання прямої, що проходить через дану точку $M(x_1, y_1)$ рівнобіжно даній.

Коли рівнання даної прямої є:

$$Ax + By + C = 0$$

то рівнання прямої, що проходить через точку $M(x_1, y_1)$ рівнобіжно даній буде:

$$\underline{A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0}.$$

Приклад:

Дано пряму: $15x + 5y + 9 = 0$; рівнобіжна їй, що проходить через точку $M(3, 4)$ буде:

$$15(x - 3) + 5(y - 4) = 0$$

або:

$$\underline{3x + y - 13 = 0}$$

3) Рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_1, y_1)$ паралельно до прямої $Ax + By + C = 0$ буде: (вір 22)

$$y - y_1 = +\frac{B}{A}(x - x_1) \quad \text{або}$$

$$\underline{B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0}$$

Приклад:

Дано пряму: $15x + 5y + 9 = 0$.

Рівняння прямої до неї, який проходить через точку $M(3,4)$ буде:

$$5(x-3) - 15(y-4) = 0$$

або $5x - 15 - 15y + 60 = 0$; $5x - 15y + 45 = 0$

$$x - 3y + 9 = 0.$$

§ 8. Про первні, що можуть визначити положення прямої на площі заданно визначених вісей.

Щоб визначити положення прямої на площі заданно визначених вісей вистарчає двох первнів, а саме:

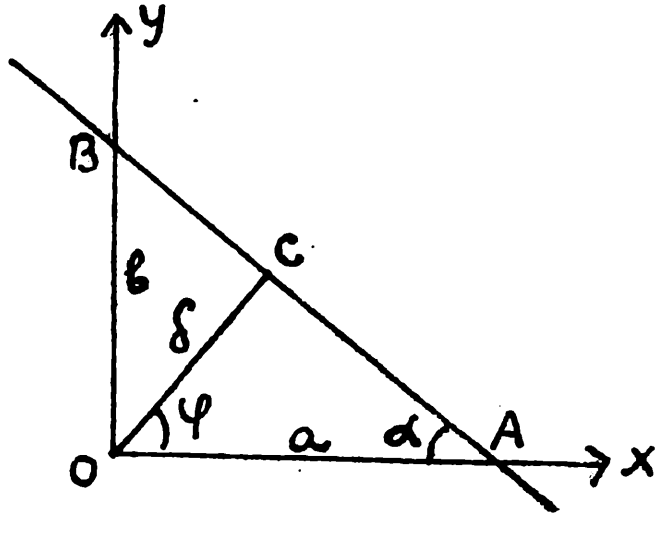


Рис. 33.

1й спосіб.

Положення простої на площині цілком визначається, коли відомо кут спаду простої на одну з осей і відтинок другої осі від початку осей до точки перехрестя простої з віссю (відомо $\angle\alpha$ і b)

Справді, коли відомо лише кут спаду простої, напр: на вісь x-ів, то ми можемо мати безліч простих рівнобіжних одна одній, що нахилені один й той же кут спаду (рис 34)

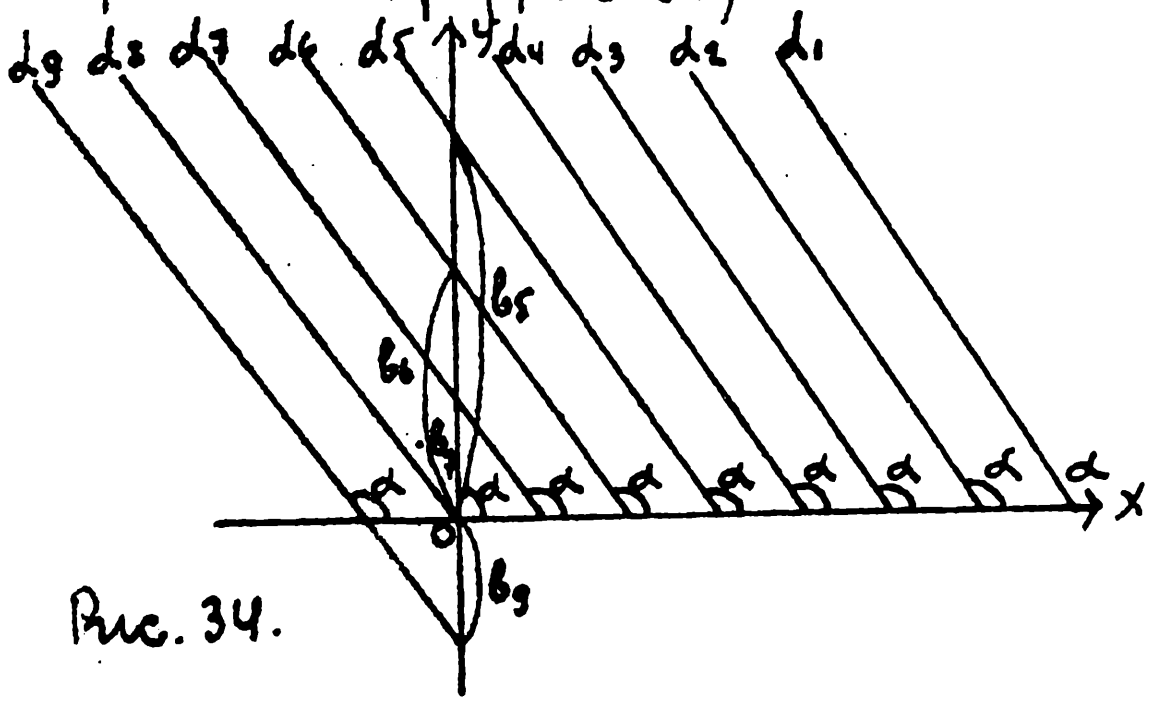


Рис. 34.

Так само, коли відомо лише один відтинок осі y-ів b_4, що утворює перехрестя простої з віссю, то ми можемо мати безліч простих, що відтинатимуть один і той же відтинок

вісі У-ів (рис 35)

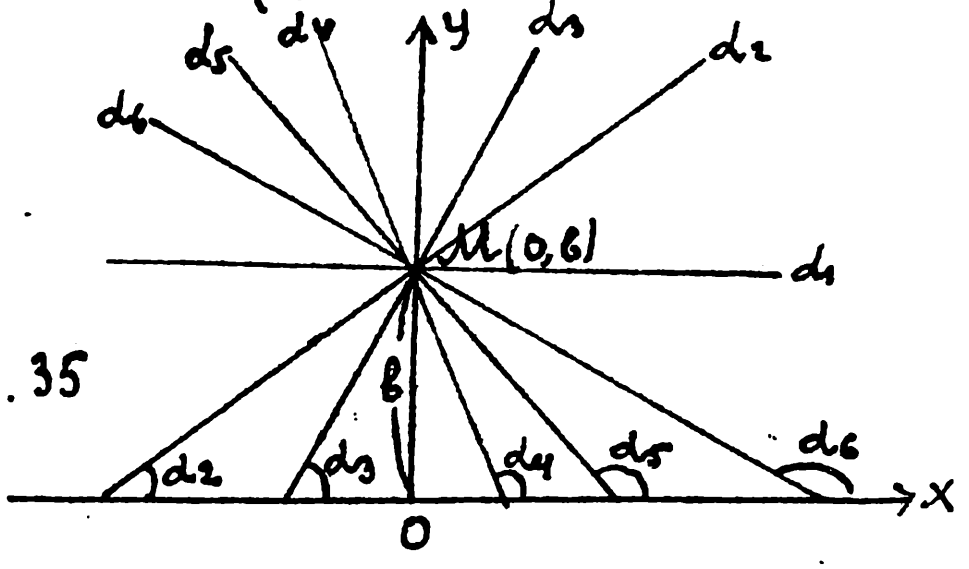


Рис. 35

Але в першому випадку (Рис 34) кожна з рівнобіжних простих відтинала різні лише один їй властиві відтинки вісі У-ів ($y = b_k$), а в другому випадку кожна з простих жгутка M (рис. 35) мала окремий свій власний кут спаду $\angle d_k$ різний від кутів спаду інших простих.

Коли ж разом відомі і кут спаду, що творить проста d з віссю Х-ів і відтинок, що утворює вона своїм перехрестям на вісі У-ів, то (Рис 33) утворюється прямокутний трикутник AOB, що має сталими прямку $OB = b$ і гострий кут $\angle OAB = \alpha$.

Із геометрії відомо, що ці первні цілковито визначають трикутник, а точці проста d (протилежна трикутника) буде єдиною. Отже положення простої на площі зв'язно визначених вісей буде цілковито визначеним.

При доведенню канонічного рівняння простої, ми й користувалися цим способом визначення положення простої на площі зв'язно вісей. Само канонічне рівняння: $y = xm + n$ установлює саме залежність визначників творчої точки від розглянених первнів.

($m = tg\alpha$ – є функція кута спаду, а n – є величина відтинку на вісі y-ів, утвореного перехрестям простої з вісю)

2ий спосіб.

Відтинкове визначення положення простої на площі зв'язно визначених вісей.

Коли нам відомо лише відтинок на одній з вісей координат (напр: на вісі y-ів: $y = b$

рис 35), то ми матимемо цілий жмуток простих, що відповідають нашій умові проходження їх через точку $M(0, b)$

Так само, коли нам відомий відтинок лінії на вісі x-ів ($x = a$, рис 36), ми матимемо цілий жмуток простих задовольняючих нашу умову проходження їх через точку $N(a, 0)$

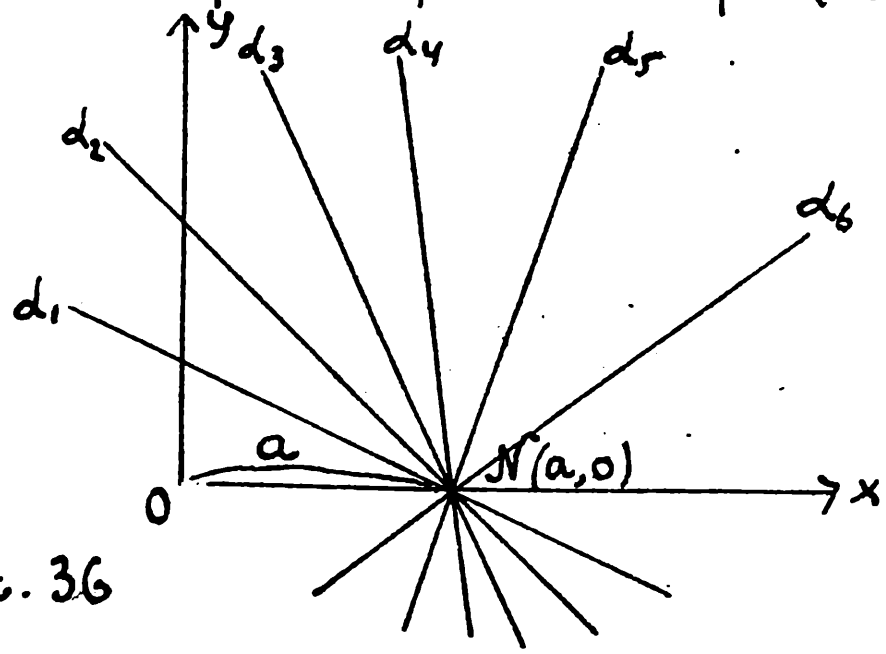


Рис. 36

Але, коли нам відомо разом обідва перші: відтинок на вісі x-ів, і відтинок на вісі y-ів ($x = a$; $y = b$), то в такому разі проста d (рис. 33) утворює прямокутник AOB.

Цей прямокутник є прямокутний і має цілком визначені прямі: a і b.

із геометрії ми знаємо, що цих первнів цілком вистарчає для визначення величини прикутника, а тому проста d (протиприлка) буде єдиною.

Отже величини відтинків, що утворює проста з віссями цілковито вистарчає, щоб визначити її положення на площі заданої віссей.

3-ій спосіб

Прямове (нормальне) визначення положення простої на площі заданих визначних віссей.

Припустимо, що нам відомо або довжину δ, прямої спущеної на просту d з початку координат, або кут φ, що творить цей прям з одною з віссей.

(З якою все одно, бо сума обох кутів з віссями є 90°, себто: $\varphi + \varphi_1 = 90$. Тому, коли відомий один з кутів, то відомий й другий)

1) Коли відома лише одна довжина δ, прямої спущеного з початку координат на про-

ству d, то таких простих буде безліч; всі вони будуть дотичними до кола луча δ (з центром O) в кожній з точок обводу цього кола (рис 37а)

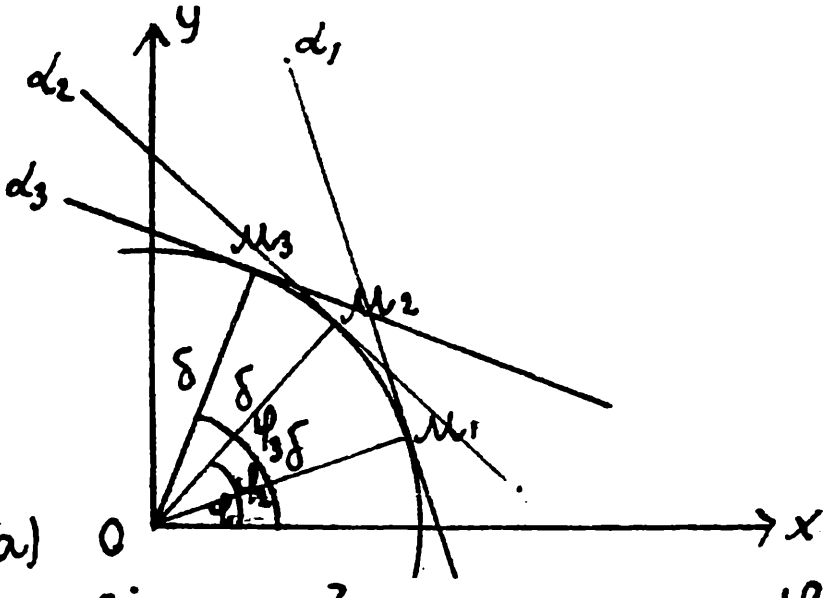


Рис. 37(а)

2) Коли відомий лише кут φ, що творить пряма спрямений з початку координат на просту d з якою з віссей, напр: з віссю x-ів, то простих d також буде безліч. Всі вони (рис 37б) складуть сім'ю рівнобіжних, як прямі до спільної прямої в кожній з точок: $M_1, M_2, M_3 \ldots$

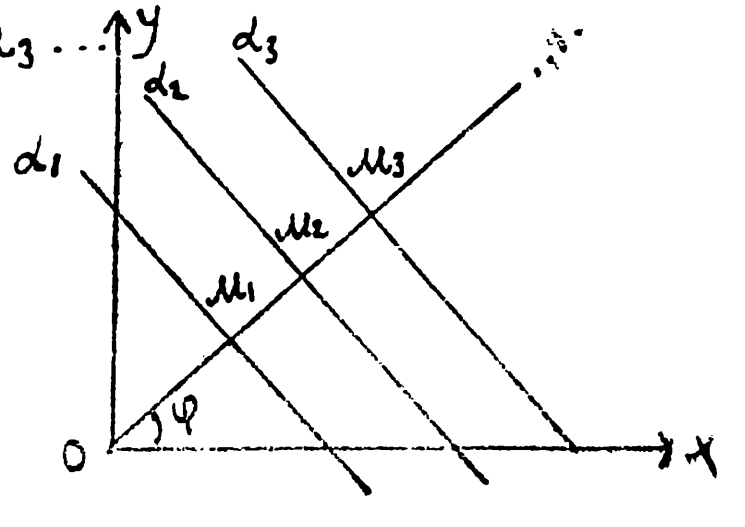


Рис. 37(б)

Але, коли дані і довжина b зазначеного прямої і кут що утворює він з віссю x-ів (або y-ів), то положення простої d зливно віссей цілком визначене, бо (рис 33) тоді утворюється прямокутний трикутник AOC у якого є стала пряма b і гострий кут φ. Як ми казали, такий трикутник є цілковито визначений по величині, а тому і цілковито визначений положення простої d, як другої прямої трикутника AOC.

Отже, довжина прямої спущеного з початку координат на просту і кут, що утворює ця пряма з віссями координат, цілковито визначають положення даної простої на площі зливно визначних віссей.

Перший спосіб визначення положення простої на площі був, як ми вже зазначили, використаний для складення канонічного рівняння прямих.

Тепер переходимо до складання

ще других форм рівнань прямої, що ґрунтуються на другому і третьому способах визначення положення прямої на площині.

§ 9. Відтинкове рівняння прямої.

Як сама назва свідчить, в основу рівняння є покладений другий спосіб визначення положення прямої на площині.

Коли ми зможемо встановити функціональну залежність між цими величинами (відтинками на осях) і значеннями довільної творчої точки, що лежить на прямій, то матимемо рівняння цієї прямої.

Припустимо, що нам дано визначені осі xy і пряма d, що відтинає на осях відтинки $x=a$ і $y=b$. Де ми не взяли б на прямій d довільну точку $M(xy)$ (рис 38), то завжди значники її x і y утворюють прикутник, напр: $KLMB$, сторони яко

прикутник AOB, утворений простою d з визначними вісьми. Тому завжди існуватиме відношення виляду:

$$\frac{KM}{OA} = \frac{KB}{OB}$$

Підставляючи вартості відтинків KM, OA, KB, OB

$$\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a} \quad ; \quad \frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a}$$

маємо:

$$\underline{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \text{ .....(26)}$$

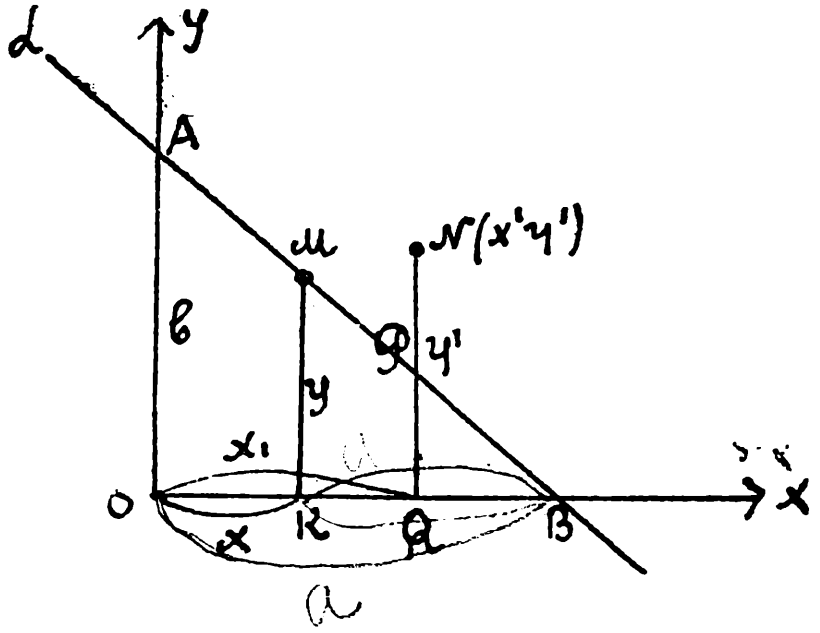


Рис. 38

Це і є прямою того, що кожна точка, значники якої задовольняють рівнанню (26), лежить на простій d, себто рівнання (26) є рівнанням цієї простої.

Це рівнання носить назву:
<u>Значникового рівнання простої.</u>

[Примітка: Для того, щоб довести, що рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ є виконуючого приклетою того, що довільна точка M, значники якої задовольняють цьому рівнанню може лежати лише на простій, яка відтинає від осей відтинки $x=a$, $y=b$, ми розглянемо (рис 38) якунибудь точку $N(x'y')$, що не лежить на простій d:

$$\Delta PQB \sim \Delta AOB.$$

Тому: $\frac{QP}{OA}=\frac{QB}{OB}$

але $QP=y'-QN$; $OA=b$; $QB=a-x'$; $OB=a$.

Отже: $\frac{y'-QN}{b}=\frac{a-x'}{a}$, або:

$$\frac{y'}{b}-\frac{QN}{b}=1-\frac{x'}{a} \text{ або:}$$

$$\frac{x'}{a}+\frac{y'}{b}=1+\frac{QN}{b}$$

Таким чином, щоб значники x' і y' точки N задовольняли рівнанню: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, необхідно, щоб $\frac{QN}{b}=0$; $b\neq 0$, а тому, щоб дріб $\frac{QN}{b}$ рівнявся нулю, необхідно, щоб $QN=0$.

PN - є відстань точки N від точки P (є. якій ряда точки N перетинає просту d), а точку відстань PN може бути рівною нулю лише тоді, коли точка N лежатиме на прямій d. Таким чином значення кожної точки, що не лежать на прямій d не задовольняють рівнянню $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, якщо ж ми довели безумовно задовольняють значення точок, що лежать на прямій d і точку рівняння (26) є виконуючого приклеєного того, що точка лежить на прямій d і само рівняння може вважатися рівнянням цієї прямої d]

§10 Прямове (або нормальне) рівняння прямої.

З самої назви очевидно, що це рівняння грунтується на тому, що положення прямої на площині значно визначних осей цілковито визначаються довжиною прямої спущеного з початку визначних осей до даної прямої (відстань про-

стої від початку визначених вісей) і кутом цього прямої з якою з визначених вісей. Отже це рівняння встановлює функціональну залежність між значеннями довільної точки на цій простій та розглянутими вище першими: відстанню простої від початку координат та кутом цього прямої з однією з визначених вісей.

Припустимо, що нам дано визначені вісі xy і проста d. Хай відстань цієї простої d від початку вісей буде δ, а кут цього прямої з віссю x-ів-$\angle\varphi$

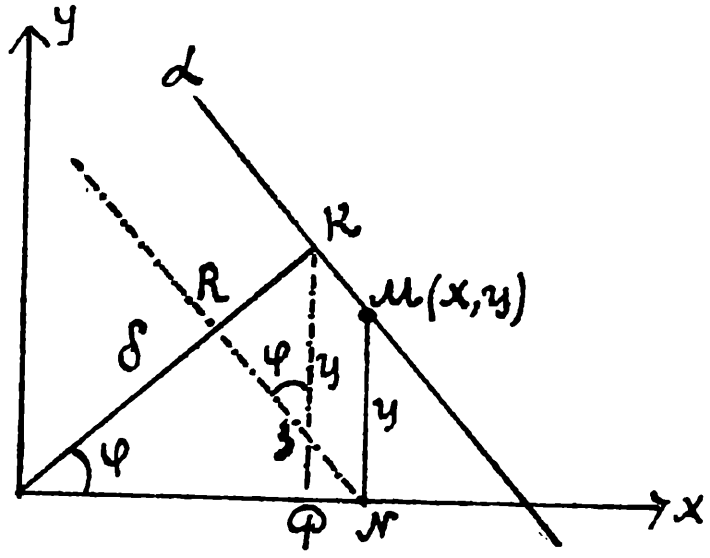


Рис. 39.

Візьмемо на простій d яку небудь точку $M(xy)$ значення якої: $x = ON$, а $y = NM$.

Обчислимо довжину прямої $OK = \delta$.

Для цього з точки K спускаємо пряму KP на вісь x-ів і проводимо пряму NR ∥ d.

Маємо: OK = δ = OR + RK.

Але: 1) З прямокутного трикутника ORN, маємо OR = ON cos φ = x cos φ.

2) З прямокутного трикутника RKS маємо RK = KS sin φ = y sin φ (бо ∠ RSK = φ, як складений з ∠ KON взаємно прямовимі раменами)

Тому:

$$\underline{x\cos\varphi + y\sin\varphi = \delta} \quad \ldots\ldots (27)$$

[Примітка: Подаємо ще два способи доведення рівняння (27)

2-й спосіб.

З прямокутних трикутників: AKO і Δ BKO визначаємо відтинки, що творить пряма d на осях через дані величини довжину прямої δ і кут її нахилу φ з віссю x-ів (рис 40)

1) З Δ OKA маємо:

$$e = \frac{\delta}{\sin\varphi}$$

2) З Δ BKO маємо:

$$a = \frac{\delta}{\cos\varphi}.$$

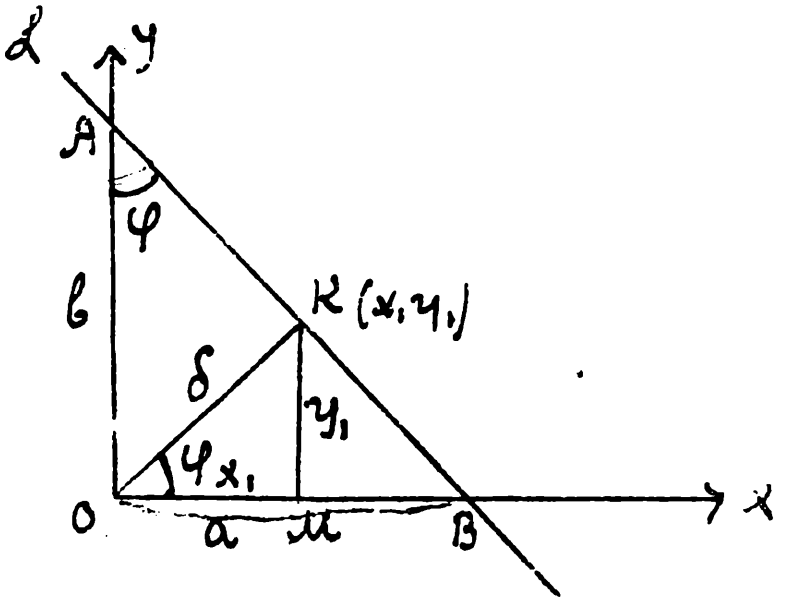


Рис. 40.

Тоді, взявши відтинкове рівняння прямої d:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

ми підставимо в нього знайдені вартості a і b і одержимо:

$$\frac{x}{\frac{\delta}{\cos\varphi}}+\frac{y}{\frac{\delta}{\sin\varphi}}=1, \text{ або:}$$

$$\frac{x\cos\varphi}{\delta}+\frac{y\sin\varphi}{\delta}=1 \text{ або:}$$

$$\underline{x\cos\varphi+y\sin\varphi=\delta}$$

3-ій спосіб.

Пряму d можна розглядати, як пряму до прямої δ, проведений через точку $K(x_1,y_1)$.

Рівняння прямої δ, як прямої, що проходить через початок визначених вісей з кутом φ спаду на вісь x-ів, буде: $y=x\operatorname{tg}\varphi$.

Знайдемо координати значимих: x_1, y_1 точки K.

З трикутника OMK маємо:

1) $x_1 = \delta \cos\varphi$; 2) $y_1 = \delta \sin\varphi$.

Тоді рівняння кожної прямої, що проходить через точку — $K(\delta\cos\varphi, \delta\sin\varphi)$ буде:

$$y - \delta\sin\varphi = m(x - \delta\cos\varphi)$$

Лишається визначити кутовий значимий m.

Для цього скористаємо умови, що пряма d є прямовою до прямої δ.

Звідси, очевидно, що m повинно бути величиною рівною зворотній координати взятій з протилежним знаком кутового значимого рівняння $y = x\operatorname{tg}\varphi$, себто:

$$m = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = -\operatorname{ctg}\varphi$$

Отже рівняння прямої d буде:

$$y - \delta\sin\varphi = -\operatorname{ctg}\varphi(x - \delta\cos\varphi),$$

або: $\sin\varphi(y - \delta\sin\varphi) = -\cos\varphi(x - \delta\cos\varphi)$

$$y\sin\varphi - \delta\sin^2\varphi = -x\cos\varphi + \delta\cos^2\varphi;$$

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \delta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \delta \cdot 1$$

Прямове рівняння прямої має попередній вигляд.

§ 11 Перетворення однієї форми рівняння прямої у другу.

I Перетворення канонічного рівняння у відтинкову форму

а) Канонічне рівняння форми: $y = xm + n$ перетворюється у алгебричне простим позбавленням його від знаменателя (коли такий є) і перенесенням всіх членів у ліву частину.

Приклад: $y = -\frac{3}{5}x + 2$

$$5y + 3x - 2 = 0$$

б) перетворимо канонічне рівняння у відтинкове.

Дано рівняння: $y = mx + n$.

Щоб висловити його через відтинки на осях, треба лише кутовий коефіцієнт m висловити через відтинки на осях, бо n є вже такий відтинок.

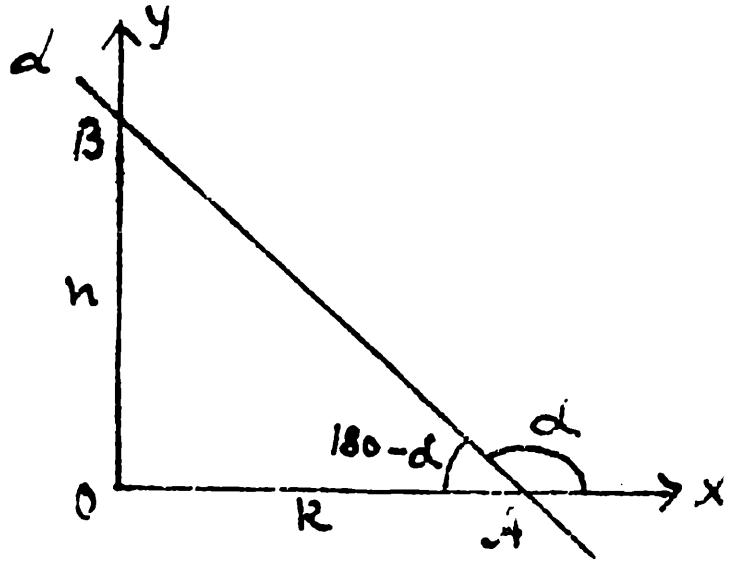


Рис. 41.

З прямокутника AOB маємо:

$tg(180-\alpha) = -tg\alpha = -m = \frac{n}{k}$, або:

$m = -\frac{n}{k}$ [або $k = -\frac{n}{m}$ ..... A]

Підставляючи у канонічне рівняння знайдену вартість змінника m, матимемо:

$y = -\frac{n}{k}x + n$, або $y + \frac{n}{k}x = n$

Поділивши члени рівняння на n одержимо:

$$\frac{y}{n} + \frac{x}{k} = 1$$

Що й треба було довести.

Практично це перетворення робиться дуже просто:

1) Ділимо всі члени рівняння на вільний член:

$$y = mx + n; \quad \frac{y}{n} = \frac{m}{n}x + 1$$

2) Сочинник $\frac{m}{n}$ невідомого x переносимо в знаменатель, а весь член у праву частину:

$$\frac{y}{n} = \frac{x}{\frac{n}{m}} + 1, \text{ або: } \frac{y}{n} + \frac{x}{-\frac{n}{m}} = 1$$

Це й буде потрібне рівняння, бо $-\frac{n}{m} = k$ [див. (A)]

Приклад:

1) $y = 4x + 2; \quad \frac{y}{2} = 2x + 1; \quad \frac{y}{2} + \frac{x}{-\frac{1}{2}} = 1$

2) $y = -3x + 6$; $\frac{y}{6} = -\frac{x}{2} + 1$; $\frac{y}{6} + \frac{x}{2} = 1$

Рівняння розв'язання перетворення всякого алгебричного рівняння прямої у відрізкове

1) Вільний член рівняння:
$Ax + By + C = 0$ відокремлюючи у праву частину:
$$Ax + By = -C$$

2) Ділимо всі члени рівняння на вільний член з його знаком:
$$-\frac{A}{C}x + \left(-\frac{B}{C}\right)y = 1$$

і 3) переносимо сочинники у знаменателя:
$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

[Таким чином, відрізки на осях, що робить пряма рівняння $Ax + By + C = 0$ є:
1) на осі x-ів: $a = -\frac{C}{A}$
2) на осі y-ів $b = -\frac{C}{B}$]

Приклад:

1) $3x + 2y - 5 = 0$; $3x + 2y = 5$;
$\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = 1$ або: $\frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1$

2) $4x - 9y + 12 = 0$; $4x - 9y = -12$;
$-\frac{1}{3}x + \frac{3}{4}y = 1$ або: $\frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{4}{3}} = 1$

Перетворення канонічного рівняння в пряміву форму й навпаки розглянемо окремо.

II Перетворення відтинкового рівняння в канонічну форму рівняння прямої.

а) Рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ перетворюється в рівняння канонічне $y=mx+n$ шляхом визначення кутового злінника m, бо n, як відтинок осі Y-ів утворений прямою d є рівний b $(n=b)$.

$m=\operatorname{tg}\alpha$, кута спаду прямої d на вісь X-ів.

З трикутника ABO маємо:

$$\operatorname{tg}(180-\alpha)=\frac{b}{a}, \text{ або:}$$

$$-\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}, \text{ звідки } m=\operatorname{tg}\alpha=-\frac{b}{a}$$

Тому канонічне рівняння прямої через відтинки на осях висловиться:

$$y=-\frac{b}{a}x+b$$

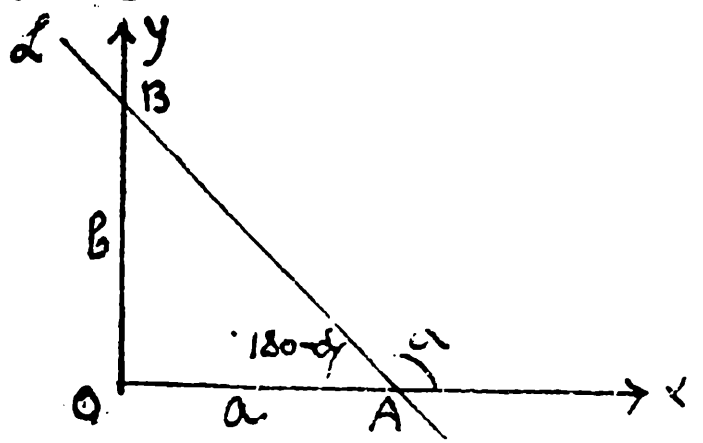


Рис. 42.

Практично відтинкове рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ перетворюється в канонічне звичайним визначенням з першого рівняння невідомого y через x.

Справді: $\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$; $y=-\frac{b}{a}x+b$

Таким чином кут спаду прямої буде: $\alpha = \operatorname{arctg}-\frac{b}{a}$

Приклад:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1;\ \frac{y}{8}=-\frac{x}{4}+1;\ y=-2x+8$$

б) Позбавивши відтинкове рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ від знаменателя, ми одержимо алгебричне рівняння простої (виявляємо: $Ax+By+C=0$)

Справді: $bx+ay=ab$, або

$$bx+ay-ab=0$$

Приклад: $\frac{x}{-5}+\frac{y}{4}=1$; $4x-5y+20=0$

Перетворення відтинкової форми рівняння у прямову розглянемо окремо.

III Перетворення алгебричної форми рівняння простої у прямову форму.

а) Алгебрична форма рівняння:

$$Ax+By+C=0$$

Звідси: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

але знаємо, що $m = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$

$$n = -\frac{C}{B}$$

Кут α, як зовнішній (рис 43 стор 90) трикутника АОВ є рівний:

$\angle\alpha = 90 + \varphi$, тому:

$m = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(90+\varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi.$

З трикутника ОВД маємо:

$$\delta = n\sin\varphi$$

тому маємо:

$$-\operatorname{ctg}\varphi = -\frac{A}{B}, \text{ або } \operatorname{ctg}\varphi = \frac{A}{B} \quad \ldots(I)$$

1) $1 + \operatorname{ctg}^2\varphi = \operatorname{csc}^2\varphi$; $\frac{1}{\sin^2\varphi} = 1 + \frac{A^2}{B^2} = \frac{A^2+B^2}{B^2}$,

отже: $\sin\varphi = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad \ldots(II)$

2) $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = 1 - \frac{B^2}{A^2+B^2} = \frac{A^2+B^2-B^2}{A^2+B^2}$

отже: $\cos\varphi = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad \ldots(III)$

3) $\delta = n\sin\varphi = -\frac{C}{B} \cdot \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad \ldots(IV)$

Підставляючи в прямову форму рівняння: $x\cos\varphi + y\sin\varphi = \delta$ маємо:

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

або: $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$

де $\cos\varphi=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$; $\sin\varphi=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, інакше:

$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{A}{B}$ і $\delta=-\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$.

δ – умовимся вважати додатним і тому знак перед $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ береться такий, щоб $\delta=\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}>0$

Правило:

Щоб перевести алгебричну форму рівняння простої до нормової форми, треба перенести всі члени рівняння в ліву частину. Многочлен лівої частини рівняння поділити на модуль (на квадратовий корінь з суми квадратів сочинників при невідомих), взятий з такими знаками, щоб частка від ділення вільного члена на нього була додатна і одержаний дріб прирівняти нулю.

Це й буде нормова форма алгебричного рівняння простої.

Щоб одержати нормову форму рівняння простої в конечному вигляді, треба обчислити

φ і δ з рівностей:

$$ctg\,\varphi = \frac{A}{B} \quad \ldots \text{ I}$$

$$\delta = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad \ldots \text{ II}$$

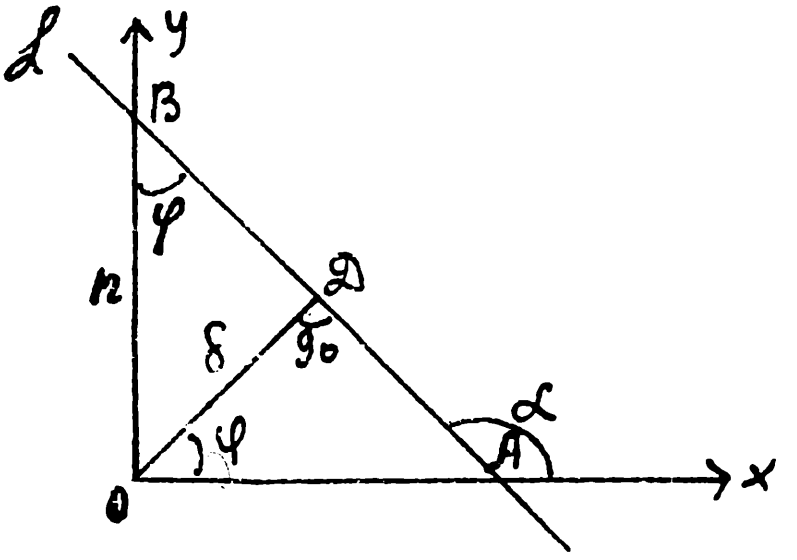


Рис. 43.

Приклади:

Звести до нормальної форми рівняння: $4x+3y=12$; $3y-4x=12$; $3x-4y=8$; $x-y=0$; $5x-3=0$.

Розв'язка:

$4x+3y=12$; $4x+3y-12=0$;

$\frac{4x+3y-12}{\pm\sqrt{16+9}}=0$, або $\frac{4x+3y-12}{+5}=0$;

$\left[ctg\,\varphi=\frac{4}{3}\ ;\ \delta=-\frac{-12}{\pm 5}=\frac{12}{5}\right]$

$lg\,ctg\,\varphi = lg\,4 - lg\,3 = 0{,}60206 - 0{,}47712 = 0{,}12494$; $\angle\varphi = 36^\circ\,52'\,11''$.

(φ - в 1-й чверті, бо $\sin$ і $\cos$ є додатні, коли б були від'ємні то в 3-й)

Решту прикладів пропонується зробити самим учням.

б) Перетворення інших форм рівнянь простої у прямову.

Загальний спосіб такий: перетворюючи всі інші форми рівняння простої у алгебричну, а потім переходячи до прямової.

Так:

1) Канонічне рівняння: $y = xm + n$ (позбавляючи від знаменателя коли він є і переносячи члени у ліву частину)

Маємо: $y - mx - n = 0$

Тоді по доведеному пряма форма буде:

$$\frac{y - mx - n}{\pm\sqrt{1+m^2}} = 0$$

де $\sin\varphi = \frac{1}{\pm\sqrt{1+m^2}}$; $\cos\varphi = \frac{-m}{\pm\sqrt{1+m^2}}$;

$\operatorname{ctg}\varphi = -m$; $\delta = \frac{+n}{\pm\sqrt{1+m^2}}$

Приклад: $y = -\frac{5}{12}x + 4$; $12y + 5x - 4 = 0$

Прямова форма: $\frac{5x + 12y - 48}{\sqrt{25+144}} = 0$

або: $\frac{5x + 12y - 48}{13} = 0$.

1) $\delta = -\frac{-48}{13} = \frac{48}{13}$ 2) $\cos x = \frac{5}{13}$; 3) $\sin x = \frac{12}{13}$

4) $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{5}{12}$ (в 1-ій чверті кут)

$\lg \operatorname{ctg}\varphi = \lg 5 - \lg 12 = 0{,}69897 - 1{,}07918 =$
$= \bar{1}{,}61979$; $\varphi = 67^\circ 22' 48''$.
Рівняння має вигляд:
$x\cos 67^\circ 22'48'' + y\sin 67^\circ 22'48'' = \frac{48}{13}$.

2) Відтинкове рівняння:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Звідси: $bx + ay = ab$.
Нормальне рівняння:

$$\frac{bx + ay - ab}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

де $\delta = +\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Приклад: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$; $4x + 3y = 12$

$$\frac{4x + 3y - 12}{\pm\sqrt{16+9}} = 0\,; \quad \frac{4x + 3y - 12}{\pm 5} = 0$$

$\delta = -\frac{-12}{\pm 5} = \frac{12}{5}$; (sin і cos однакового знаку, а тому) $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{4}{3}$; $\varphi = 36^\circ 52' 11''$.)
Рівняння: $x\cos 36^\circ 52'11 + y\sin 36^\circ 52'11'' = \frac{12}{5}$

IV Перетворення прямої форми рівняння простої у нову форму (себто складення рівнянь різних форм, коли відомо відстань простої від початку визначених осей δ і кут цього відхилення з віссю x-ів)

Припустимо, що ми маємо рівняння прямої в прямовій формі:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \delta$$

де φ і δ – є відомі сталі величини.

Найпростіший спосіб перетворення цього рівняння в канонічне, а звідси вже в решту форм (див I). Ми вивели, що (IIIa):

$\operatorname{ctg}\varphi = -m$, а звідси: $m = -\operatorname{ctg}\varphi$ ...(A)

Далі $\delta = n\sin\varphi$, або $n = \frac{\delta}{\sin\varphi}$ ....(B)

Ці два рівняння дають можливість обчислити сполучники канонічного рівняння і підставити їх у загальний вигляд цього рівняння: $y = xm + n$.

Практично: В рівнянню: $x\cos\varphi + y\sin\varphi = \delta$ шляхом логарифмування й числування по таблицях звичайних чисел знаходимо $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$, та підставляємо. Тоді одержуємо алгебричне рівняння прямої.

Приклад: $x\cos\varphi + y\sin\varphi = \frac{8}{5}$,

де $\varphi = 323^\circ\,7'\,49''$.

1й спосіб: $m = -\operatorname{ctg}\varphi = -\operatorname{ctg}323^\circ 7'49'' =$

$= -\operatorname{ctg}(270^\circ + 53^\circ 7'49'')$.

$m = tg\ 53°7'49''$ (себто $\alpha = 53°7'49''$)

$lg\ m = 0,12494$, а звідси: $m = 1,(3) = \frac{4}{3}$

$n = \frac{\delta}{\sin\varphi}$

$\sin\varphi = \sin 323°51'11'' = \sin(360 - 36°52'11'') =$

$-\sin 36°52'11''.$

$lg \sin 36°52'11'' = \bar{1},77815.$

$\sin\varphi = -N\bar{1},77815 = -0,6 = -\frac{3}{5}.$

$n = \frac{8}{5} : -\frac{3}{8} = -\frac{8}{3}.$

Тому рівняння буде:

$y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$ [Алгебричне рівняння:

позбавляючи від знаменників маємо: $4x - 3y - 8 = 0$ (або $4x - 3y = 8$)

2) Відрізкове: (поділивши на вільний член) $\frac{x}{+2} + \frac{y}{-\frac{8}{3}} = 1.$]

2-ий спосіб.

$\sin\varphi = \sin 323°7'49'' = \sin(360° - 36°52'11'')$

$\sin\varphi = -\sin 36°52'11''.$

$lg \sin 36°52'11'' = \bar{1},77815$

$\sin\varphi = -0,6 = -\frac{3}{5}$

$\cos\varphi = \cos 323°7'49'' = cs(360° - 36°52'11'') =$

$= \cos 36°52'11''.$

$lg \cos\varphi = \bar{1},90309;\ \cos\varphi = 0,8 = \frac{4}{5}.$

$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \delta$

$\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y = \frac{8}{5}$; $4x - 3y = 8$ (теж саме)

Таким чином, коли відомо нам відношення простої від початку визначених осей і кутового відношення з цього осью, то завжди можемо скласти якої бажано форми рівняння цієї простої.

§ 12 Точка перехрещення двох простих визначених рівняннями: (1) $ax + by + c = 0$
(2) $a_1x + b_1y + c = 0$

Очевидно, що ця точка належатиме одночасно і на простій (1) і на простій (2), а тому її значення мусять задовольняти обом рівнянням, інакше кажучи, значення цієї точки є спільним розв'язком системи рівнань (1) і (2).

Таким чином, щоб знайти значення точки перехрещення двох простих визначених рівняннями, треба ці рівнання розв'язати як систему.

Розв'язки цієї системи рівнань будуть значеннями точки перехрещення прос их.

Аналіза

Розв'язавши рівняння (1) і (2) як систему, одержимо:

$$x_1 = \frac{cb_1 - c_1 b}{ab_1 - a_1 b} \; ; \; y_1 = \frac{ac_1 - a_1 c}{ab_1 - a_1 b}$$

1-й випадок: коли $ab_1 - a_1 b = 0$,

тоді $x_1 = \infty$ $y_1 = \infty$.

Прості є рівнобіжні (бо перехрещуються на безмежності)

Але в цьому випадку $ab_1 = a_1 b$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \quad \ldots\ldots (28)$$

Коли рівняння простих мають пропорційні коефіцієнти при невідомих, то вони рівнобіжні.

2-й випадок: $ab_1 - ba_1 \neq 0$

Тоді може бути:

1) $cb_1 - c_1 b = 0$, а $ca_1 - ac_1 \neq 0$, себто $x = 0$, $y \neq 0$. Себто точка перехрестя на вісі y-ів.

Але в цьому разі: $cb_1 = c_1 b$, або

$$\frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1}$$

Так само, коли:

2) $cb_1 - c_1 b \neq 0$, а $ca_1 - ac_1 = 0$

тоді $x \neq 0$, $y = 0$, себто точка перехрестя на вісі x-ів.

Але в цьому разі: $a_0 c_1 = a_1 c$, або

$$\frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1} \quad \text{.....(29)}$$

Отже: Коли рівняння простих мають вільні члени пропорційні сочинникам якої будь невідомої, то точка перехрестя цих простих лежить на вісі якій належать сочинник.

Напр:

1) $\left.\begin{matrix} 3x+2y=5 \\ 6x-y=10 \end{matrix}\right\}$ $\frac{10}{5} = \frac{6}{3}$; тому точка лежить на вісі X-ів.

Справді: $6x+4y=10$

$-6x \pm y = -10$

$5y = 0$

$y=0$; $3x=5$; $x=\frac{5}{3}$.

3) Коли: $cb_1 - c_1 b_1 = 0$; $ca_1 - ac_1 = 0$

То може бути два випадки:

а) рівності можливі, коли $c = c_1 = 0$ і $ab_1 - a_1 b \neq 0$; $x=0$; $y=0$ – прості переходять через початок визначних вісей.

б) Коли $c \neq 0$, тоді $cb_1 = c_1 b$, або

$\frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1}$; $ca_1 = a_1 c$ або $\frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1}$

Дві величини рівні третій рівні між собою, а тому:

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, або $ab_1 = a_1 b$; $ab_1 - a_1 b = 0$

Отже тоді всі сочинники пропорційні: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

Але в цьому разі: $x = \frac{0}{0}$; $y = \frac{0}{0}$
Себто прості перехрещуються у кожній точці, тобто вони є пристайні.
Приклад:

$$\begin{matrix} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 12 \end{matrix} \quad \left| \quad \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}. \right.$$

Це є пристайні прості, бо справді, коли ми друге рівняння скоротимо на 3 тобто на сочинника пропорційности $n = 3$, то одержимо: $2x + 3y = 4$, себто перше рівняння.

Розглянемо ще гострий прямовості простих:

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (2)$$

в канонічній формі ці рівняння будуть:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (1)$$
$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \quad (2)$$

Ми вже знаємо, що гострий прямовості простих є:

$$m_1 = -\frac{1}{m}$$

В даному разі $m = -\frac{a}{b}$; $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$

тобто $-\frac{a}{b} = +\frac{b_1}{a_1}$

Звідси: $-aa_1 = bb_1$, або:

$$aa_1 + bb_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (30)$$

Отже:

Дві прості визначені рівняннями в алгебричній формі, є взаємно прямі, коли сума добутків коефіцієнтів однакових невідомих є рівна нулю.

Примітка.

Точки перехрещення простої з віссю.

Хай рівняння простої є:

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

Рівняння осей: у осі x-ів: $y = 0$ (2)

у осі y-ів: $x = 0$ (3)

Щоб знайти точку перехрещення простої (1) з віссю x-ів, треба розв'язати систему (1) (2). Але це все одно, що в рівнянні (1) положити $y = 0$ і розв'язати його знайдено x (Ми одержимо відтинок осі x-ів)

Так само, щоб знайти точку перехрещення простої (1) з віссю y-ів, треба розв'язати систему (1) (3), що теж саме,

ля в рівнянні (1) положити $x=0$ і розв'язати рівняння знайдено y

Отже:

Щоб знайти відтинки на осях простої, що визначена якимсь рівнянням, треба по черзі покласти x, y, рівним нулям і розв'язати рівняння знайдено того невідомого, що лишається.

Приклади:

I Знайти відтинки на осях простої.

1) $3x+5y=15$ і $y=2x-6$.

1) $x=0$; $5y=15$; $y=3$; $y=0$; $3x=15$
$x=5$.

Тому відтинкове рівняння буде: $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$.

2) $x=0$; $y=-6$; $y=0$; $2x-6=0$; $x=3$
тому відтинкове рівняння буде: $\frac{x}{3}+\frac{y}{-6}=1$.

II Накреслити просту:

1) $2x+7y=28$ і $y=-6x+12$.

1) $y=0$: $2x=28$; $x=14$; $x=0$; $7y=28$
$y=4$.
$\frac{x}{14}+\frac{y}{4}=1$

2) $y=0$; $-6x+12=0$; $x=2$; $x=0$; $y=12$

$\frac{x}{2}+\frac{y}{12}=1$

Відтинкове рівняння дає найлегший спосіб графічного виображення простої по її рівнянню.

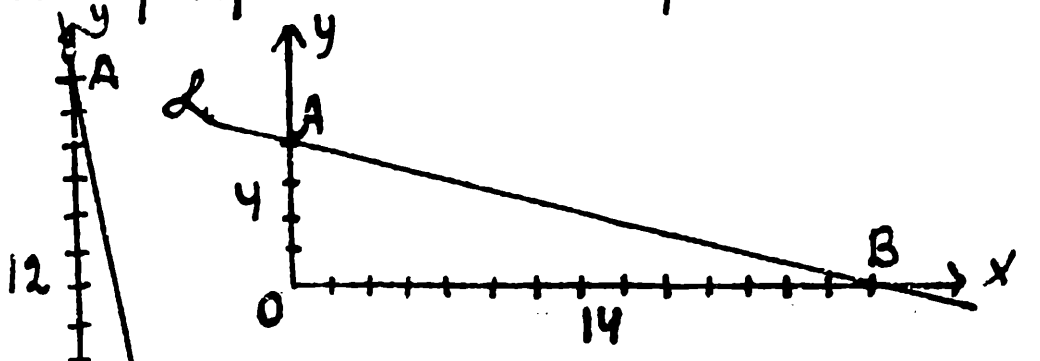


Рис. 44.

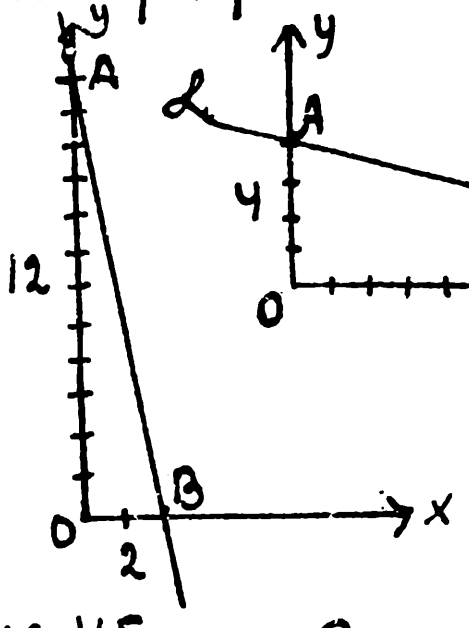


Рис 45.

Задачі

Ч-42. Написати рівняння простих:

1) Що проходить через точку	$A(4,-2)$		і має кут спаду:	$60°$
2) " " "	$B(-3,-5)$	"	" "	$115°$
3) " " "	$C(-6,4)$	"	" "	$50°11'39''$
4) " " "	$D(3,8)$	"	" "	$65°33'21''$

Ч-43. Написати рівняння простої, що проходить через точки:

1) $A(-2,2)$; $B(5,-3)$
2) $C(0,4)$; $D(4,0)$
3) $K(5,5)$; $L(-3,-4)$
4) $M(-2,-3)$; $N(6,-8)$

Ч-44. Написати рівняння боків прямокутника, що

має значення вершин:

1) $(24,-8)$; $(2,25)$; $(12,-5)$
2) $(-4,-1)$; $(2,3)$; $(-6,0)$
3) $(0,0)$; $(3,5)$; $(12,-6)$
4) $(-2,-5)$; $(0,8)$; $(18,1)$

№-45. Довести:

1) Що точка $(4,4)$ лежить на одній прямій з точками: $(3,5)$ і $(5,3)$
2) Теж саме: точка $(5,-7)$ з точками: $(3,0)$ і $(1,7)$
3) Теж саме: точка $(0,-5)$ з точками $(6,17)$ і $(1,-\frac{4}{3})$

№-46.

1) Через точку $(3,-6)$ провести рівнобіжну прямій: $y=2x+1$
2) Через точку $(0,4)$ провести рівнобіжну прямій: $y=-\frac{3}{4}x+2$
3) Через точку $(0,0)$ провести рівнобіжну прямій: $6x+4y=15$
4) Через точку $(5,6)$ провести рівнобіжну прямій: $2x-3y=0$.

№-47. Написати рівняння прямої:

	поставленого в точці:	до прямої:
1)	$(3,-4)$	$y=-5x+11$
2)	$(2,2)$	$2x+7y=18$
3)	$(-1,4\frac{1}{2})$	$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

Ч-48. Написати рівняння прямої, що проходить:

1) через точку $(-3,-7)$ паралельно прямій: $y=-\frac{1}{3}x+9$
2) " " $(2,-4)$ " " $6x-11y=1$
3) " " $(0,0)$ " " $\frac{x}{5}-\frac{y}{8}=1$

Ч-49. До простих, що визначені рівняннями в алгебричній формі, провести рівнобіжні: (див. взір 24)

1) через точку $(7,7)$ до прямої: $2x+3y=29$
2) " " $(-2,4)$ " " $5x-7y-1=0$
3) " " $(-1,-8)$ " " $6x+y=9$

Ч-50. Теж, провести прямові: (взір 25)

1) через точку $(8,1)$ до прямої: $13x+11y=44$
2) " " $(2,-5)$ " " $6x-7y+18=0$
3) " " $(-4,-1)$ " " $7x-y+12=0$

Ч-51 Написати рівняння простих, що творять відтинки на вісях:

1) $x=2, y=5$ 2) $x=-\frac{1}{2}, y=4$ 3) $x=-1$, $y=+1$

Ч-52. Написати рівняння простих, що мають:

1) відстань від початку вісей $\delta=14$ і кут спаду $\alpha=120°$
2) Теж: $\delta=2{,}4$ а кут спаду $\alpha=126°52'11''$.

(примітка: кут спаду $\alpha=90+\varphi$, де φ зовнішній)

№-53 Перетворити рівняння:
1) $y=-\frac{2}{3}x+4$ в алгебричну і відтинкову форми.
2) $\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{3}=1$ в канонічну та алгебричну форми.

№-54 Перетворити рівняння в прямову форму:
1) $3x-16y=2$
2) $2x+3y+5=0$
3) $y=-3x-2$
4) $y=-\frac{3}{4}x+5$
5) $\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1$
6) $\frac{3x}{4}+\frac{2x}{3}=1$

№-55 Перетворити в інші форми прямове рівняння простої: $x\cos\varphi+y\sin\varphi=\delta$, коли:
1) $\varphi=315°$; $\delta=0$;
2) $\varphi=216°\ 52'\ 11''$; $\delta=2,4$
3) $\varphi=153°\ 7'\ 49''$; $\delta=2,4$
4) $\varphi=143°\ 7'\ 49''$; $\delta=1,6$
5) $\varphi=0$ ——— $\delta=0,6$
6) $\varphi=270°$ ——— $\delta=0,75$.

№-56 Знайти значення x точок: $A(x,2)$, $B(x,-3)$ $C(x,-1)$ $D(x,0)$, а також значення y точок: $M(-2,y)$, $N(1,y)$, $P(-3,y)$. Коли відомо, що всі ці точки лежать на простій: $4x-3y-2=0$

№-57 1) Знайти точку перехрещення простих: $3x+2y=5$; $3y-x-2=0$

2) Знайти точки перехрещення кожної з цих прямих з вісьми.

№-58. Написати рівняння прямої, що сполучає перехрестя прямих: 1) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-3y=8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+3y=8 \\ 2x-5y=4 \end{cases}$

№-59. Визначити взаємне положення прямих:

1) $8x+6y=15$, $3x-4y=6$

2) $2x+5y=16$, $y=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}x$

3) $2x+y=6$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

4) $3x+5y=12$, $2x+5y=12$

5) $x+4y-6=0$, $3x+12y-18=0$

6) $3x-5y=14$, $\frac{x}{1,5}+\frac{y}{2,5}=1$

№-60. Визначити значення вершин трикутника, що має боками:

1) $x+3y=3$ 2) $2y=x+4$ 3) $2x-y-2=0$

№-61 Теж, коли боки трикутника: $y+x=5$; $y=\frac{3}{2}x-2,5$; $y-9x=5$.

№-62. Перетворити вірш для визначення кута між прямими $\left(tg\varphi=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right)$ для випадку, коли рівняння прямих дано в алгебраїчній

прямі: $ax+by+c=0$

$a_1x+b_1y+c=0$

[Відповідь: $tg\varphi=\pm\frac{ab_1-a_1b}{aa_1+bb_1}$ ....(31)]

Ч-63. На підставі задачі 262 визначити кути між прямими, що мають рівняння:

1) $2x+3y-5=0$ і $3x-y-2=0$

2) $2x+5y=4$ і $0,4y-x+3=0$

Ч-64. Теж, визначити кути трикутника, що має боки: 1) $y-6x=8$ 2) $3x+2y-2=0$ 3) $4y-2x-5=0$.

Ч-65 Знайти боки й кути трикутника:

1) A(2,1) B(3,-2) C(-4,-1)

2) A(2,3) B(4,-5) C(-3,-6)

§ 13 Відстань точки від прямої

Із геометрії відомо, що під відстанню прямої від точки й надалі: точки від прямої розуміється довжина прямої, опущеного з цієї точки на пряму. За напрям цього відстані беремо напрям від точки до прямої (рис 46)

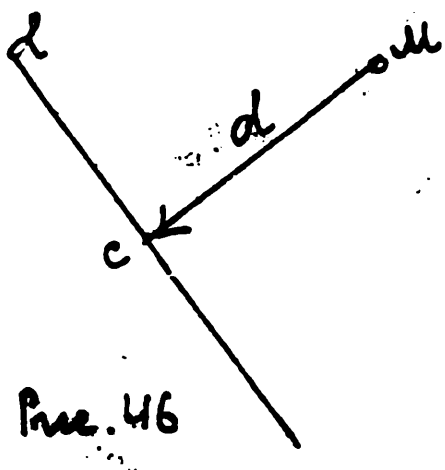


Рис. 46

Точка M знаходиться по одну сторону від прямої l, то кажуть, що точка M лежить по один бік від прямої l (Рис. 47). Але, коли точка M лежить по різні боки від прямої l, то кажуть, що точки M і початок вибраних осей, то напрям її відхилення MC буде однаковий з напрямом відхилення δ самої прямої від початку осей і тому це відхилення MC вважають додатним, себто:

$$MC = +d$$

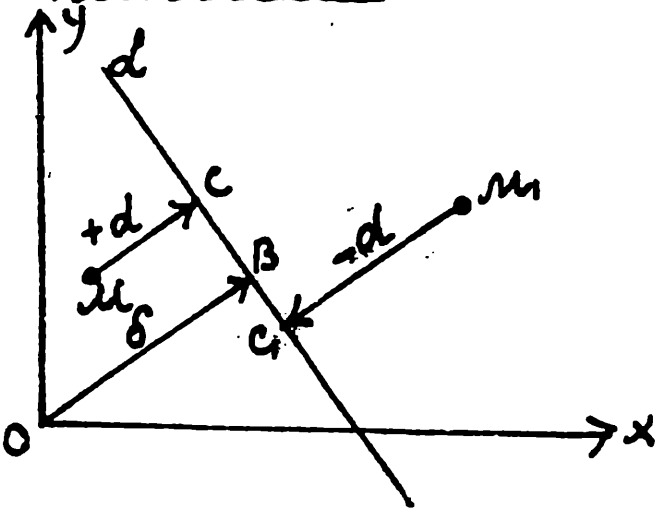


Рис. 47.

Навпаки, коли точка M_1 лежить по другий бік прямої від початку осей, то напрям її відхилення M_1C_1 від прямої буде протилежним відхиленню δ прямої від початку осей, а

точку це відстань точки від прямої вважають від'ємною, себто: $MG = -d$.

Обчислимо відстань якої точки $M(x_0 y_0)$ від прямої. (рис 48)

Проектуємо точку M на пряму δ. Тоді $MN = OC - OP$; $d = \delta - OP$.

Обчислимо OP: $OP = OR + RP$.

З прямокутника ORK маємо:

$$OR = x_0 \cos\varphi$$

З прямокутника RPK_1 маємо:

$$RP = y_0 \sin\varphi$$

Тому: $OP = x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi$

підставляючи у вартість d матимемо:

$$d = \delta - x_0 \cos\varphi - y_0 \sin\varphi$$

або $$d = -(x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - \delta)$$

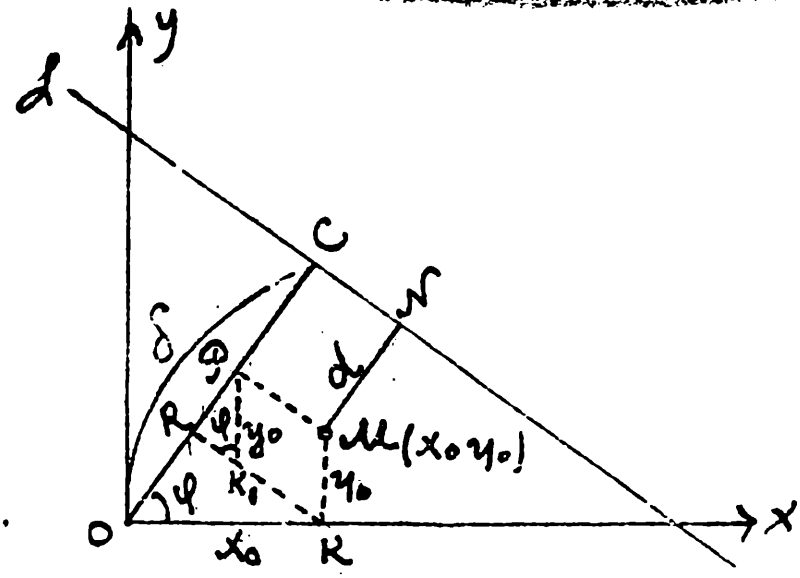


Рис. 48.

Розглянемо випадок, коли точка M лежить з другого боку прямої. (рис. 49)

Проектуючи точку M на пряму δ.
Тоді одержимо: $PC = OP - OC$

$$-d = OP - \delta$$

або: $$d = \delta - OP.$$

Але: 1) З трикутника ODK маємо: $Od = x_0 \cos\varphi$.

2) З трикутника LPK_1 маємо:
$LP = y_0 \sin\varphi$.

Отже: $OP = x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi$

Тому: $d = \delta - x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi$

або: $$d = -(x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - \delta)$$

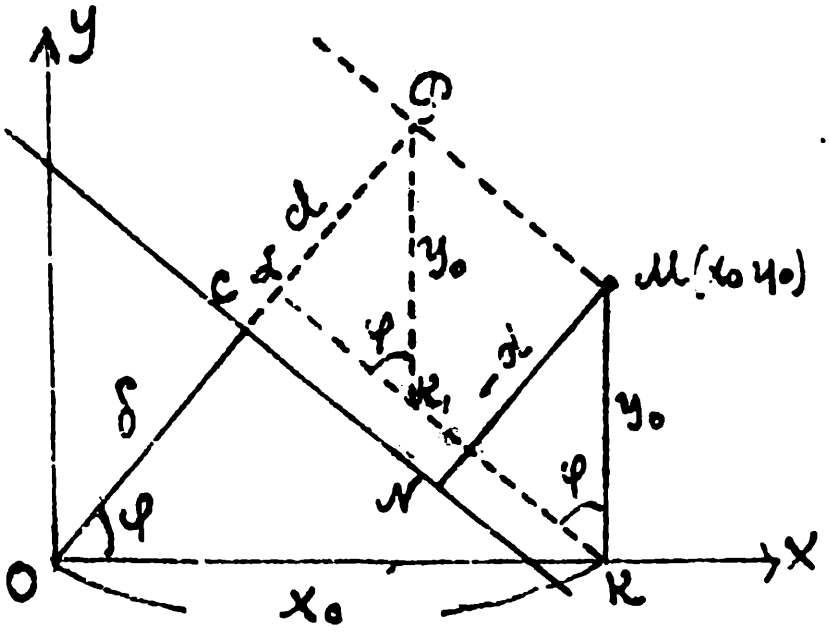


Рис. 49.

Таким чином в обох випадках алгебричну відстань d, точки від прямої визначається однаково.

$$d = -(x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - \delta)$$

Розглянувши вираз в дужках, ми бачимо, що він уявляє лівий частину рівняння даної

простої в прямовій формі:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta = 0$$

в яке підставлено значення даної точки.

Таким чином:

Віддалення точки від простої, рівняння якої в прямовій формі, рівне лівій частині цього рівняння взятій з протилежним знаком, в яку підставлено значення даної точки.

$$d = -(x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - \delta) \quad \ldots\ldots (32)$$

Висловимо деякі міркування, що до знаку d, коли в обох випадках алгебрично d висловлюється однаково.

Рівняння простої:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \delta$$

1-й випадок, коли точка $M(x_0 y_0)$ по бік початку визначених осей

Тоді значення: $x_0 < x$; $y_0 < y$,

а тому $x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi < x\cos\varphi + y\sin\varphi$

Отже різниця:

$$x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - \delta < 0$$

має від'ємну вартість, а тому d буде додатне:

$$d > 0$$

2-й випадок, коли точка $M(x_0 y_0)$ по другий бік прямої ніж початок осей:

Тоді значення $x_0 > x$; $y_0 > y$,

а тому: $x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi > x\cos\varphi + y\sin\varphi$

Отже різниця $x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - \delta > 0$

має додатну величину, а тому d буде від'ємне:

$$d < 0$$

3-й випадок, коли точка $M(x_0 y_0)$ лежить на прямій d.

Тоді значення $x_0 = x$; $y_0 = y$,

а тому: $x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi = x\cos\varphi + y\sin\varphi$

Отже різниця: $x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - \delta = 0$

і $d = 0$

Приклад:

Обчислити відстань точки $M(5,6)$ від прямої:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = 12 \quad (\text{де } \varphi = 63°15')$$

Маємо: $d = -(5\cos\varphi + 6\sin\varphi - 12) =$

$$= 12 - 5\cos\varphi - 6\sin\varphi \quad (\text{де } \varphi = 63°15')$$

Зручніше, коли рівняння прямої визначено в алгебричній формі: $ax + by + c = 0$

приводимо його в нормальну форму.

$$\frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

(де знак $\sqrt{}$ протилежний знаку c, бо $\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ мусить бути додатним)

Тоді: $\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$; $\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$;

$\delta = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$. Підставляючи знайдені вартості у вірш для відстаней точки $M(x_0 y_0)$ від прямої, а саме у вірш:

$$d = -(x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - \delta)$$

матимемо:

$$d = -\left(\frac{ax_0}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{by_0}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

або:

$$d = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{-----(33)}$$

(де знак перед $\sqrt{}$ є зворотній знаку перед c)

Таким чином

Щоб обчислити відстань точки від прямої визначеної алгебричним рівнянням, треба обернути це рівняння в прямову форму, взяти ліву частину його з протилежним знаком і підставити в неї значення даної точки.

Примітка.

Це правило поширюється на всіх інших форми рівнянь простої після їх зведення до алгебричної.

Приклад: $3x+4y=6$ є рівнання простої. Обчислити відстання від неї точок 1) $A(0,1)$ 2) $B(2,1)$

Рівнання простої в прямовій формі буде:

$$\frac{3x+4y-6}{+\sqrt{3^2+4^2}}=0, \text{ або } \frac{3x+4y-6}{5}=0$$

Тому: $$d_{(0,1)}=-\frac{3.0+4.1-6}{5}=+\frac{2}{5}$$

$$d_{(2,1)}=-\frac{3.2+4.1-6}{5}=-\frac{4}{5}.$$

Вподразнимо це геометрично: Проста $3x+4y=6$ має відтинки на осях: 1) $3x=6$; $x=2$

2) $4y=6$; $y=\frac{3}{2}$

Відкладши просту d і напівтивши точки A і B ми переконуємося в правильності наших виводів.

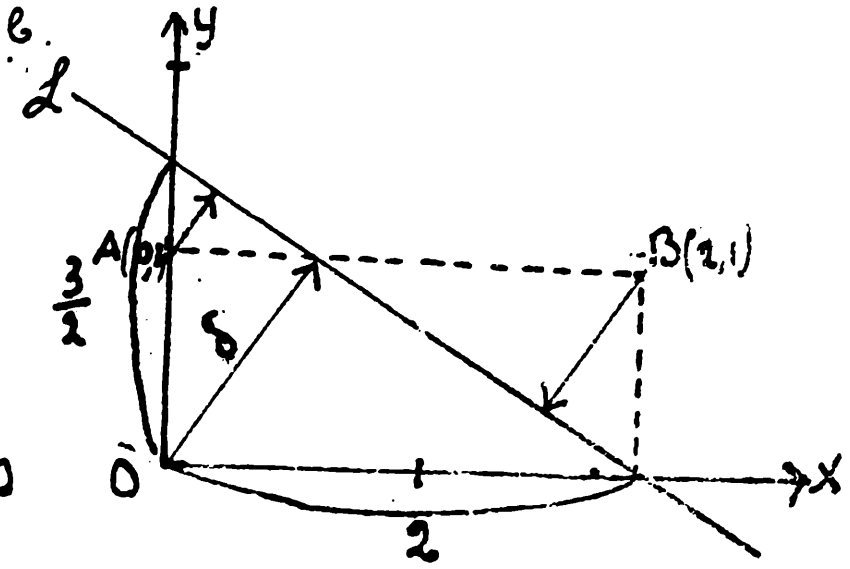


Рис. 50

Примітка:

Загальний взір для відстані точки від прямої надається також і для обчислення довжини прямої, спущеного з початку відсей на пряму.

Справді у взір:

$$d = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

підставимо значення початку відсей $O(0,0)$ і одержимо:

$$d = -\frac{A\cdot 0 + B\cdot 0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Але ми знаємо вже, що:

$$\delta = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Тому: $\underline{d = \delta}$.

Приклад:

Візьмемо рівняння попереднього прикладу:

$$\frac{3x + 4y - 6}{5} = 0$$

$$\delta = -\frac{3\cdot 0 + 4\cdot 0 - 6}{5} = +\frac{6}{5}$$

Задачі.

✓ 2-66. Обчислити відстань:
1) точки $A(2,7)$ від прямої: $3x+4y=14$
2) " $B(-2,3)$ " " $2x+y-4=0$

✓ 2-67. Обчислити відстань від прямої: $5x+12y+60=0$
точок: 1) $A(-9,-6)$ 2) $B(2,4)$ 3) $C(4,-10)$
4) $D(-5,-2)$ 5) $E(-12,0)$

2-68 Те ж від прямої: $5x+2y+10=0$
точок: 1) $A(1,-3)$; 2) $B(-4,1)$;
3) $C(-2,0)$ 4) $D(-5,-2)$.

✓ 2-69. Обчислити довжину висот трикутника, що має вершини:
1) $A(1,2)$, $B(2,-2)$ $C(-3,-4)$
2) $A(3,7)$, $B(5,-1)$ $C(-3,5)$

2-70. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-4,6)$ і має відстань від точки $B(4,5)$ рівне $p=4$?

Розв'язок:

Рівняння прямої, що проходить через A буде:

$$y-6=m(x+4) \quad \ldots(1)$$

Треба визначити значення m?
Дано рівняння (1) прямої форму: $y-6=mx+4m$

$$mx - y + 4m + 6 = 0$$

Тоді: (2) $\dfrac{mx-y+4m+6}{\sqrt{m^2+1}} = 0$

Відстань прямої від точки B дано $p=4$, а тоді:

$$d = -\frac{4\cdot m - 5 + 4m + 6}{\sqrt{m^2+1}} = 4$$

або: $-\dfrac{8m+1}{\sqrt{m^2+1}} = 4$; $64m^2+16m+1 = 16m^2+16$

$48m^2+16m-15=0$

Звідси: $m_1 = -\frac{3}{4}$; $m_2 = \frac{5}{12}$

Тоді рівняння (1) приймає вигляд: 1) $y-6 = -\frac{3}{4}(x+4)$, або: $3x+4y-12=0$

2) $y-6 = \frac{5}{12}(x+4)$, або: $5x-12y+92=0$

Два розв'язки, бо (рис 51) з точки можна провести дві дотичні до кола і одержимо прості AK і Ad, що виповнюють умову задачі.

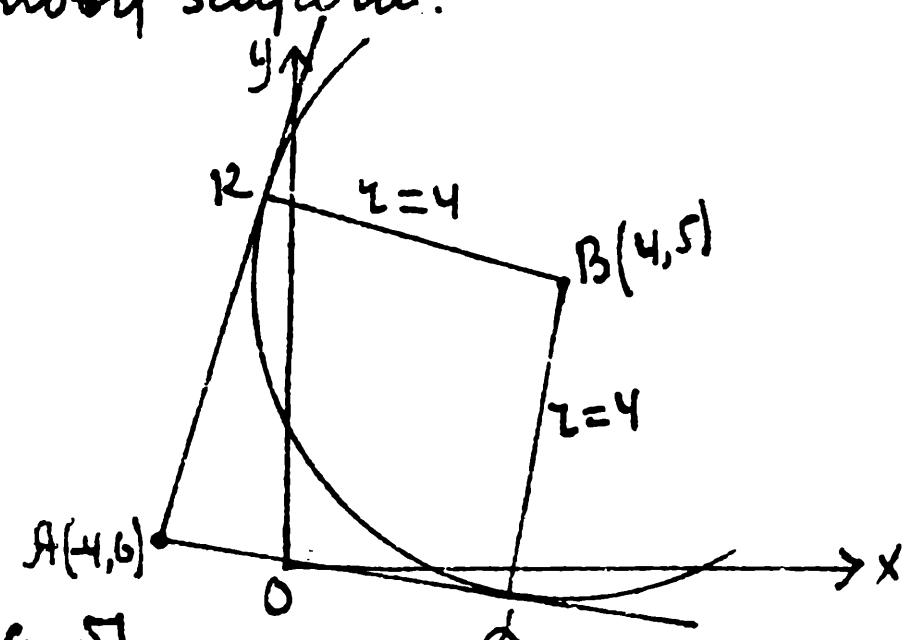


Рис. 51.

№ 71. Написати рівняння прямих, що:

1) проходить через точку $A(1,-1)$ і має відстань $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ від точки $B(2,7)$

2) творить на осі X відтинок $\frac{19}{8}$ і має відстань $p=-3$ від точки $C\left(5,\frac{3}{2}\right)$

§ 14 Міст точки на прямій

Поставимо собі завданням знайти значення міри точки на прямій, себто значення основи прямої, спущеного з даної точки на пряму.

Хай точка $M(x_0 y_0)$ є та, з якої пряма на пряму спущено, а точка $N(x_1 y_1)$ є основа цього прямої. (рис 52)

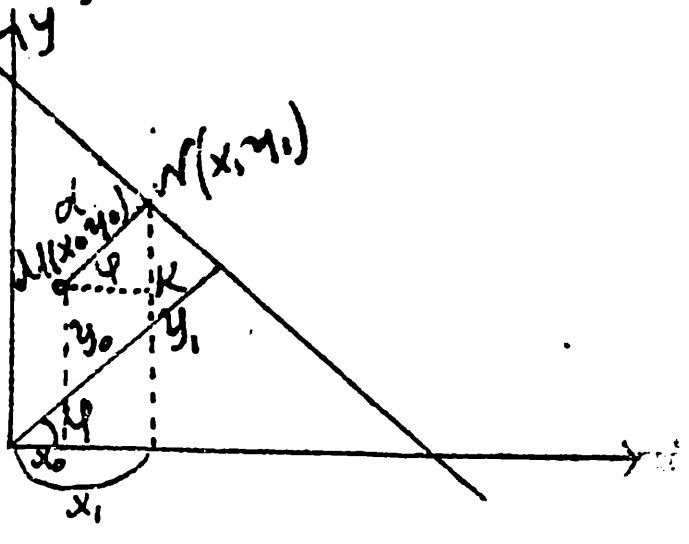


Рис. 52.

З прямокутника MNK маємо:

$$MK = x_1 - x_0 \; ; \; KN = y_1 - y_0$$

Отже: $x_1 - x_0 = d\cos\varphi \; ; \; y_1 - y_0 = d\sin\varphi$.

а звідси:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + d\cos\varphi \\ y_1 &= y_0 + d\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

або:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 - (x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - \delta)\cos\varphi \\ y_1 &= y_0 - (x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - \delta)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots (35)$$

Коли рівняння задане в алгебричній формі, то ми знаємо, що:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

Маємо:

$$x_1 = x_0 + d\cos\varphi = x_0 - \frac{ax_0+by_0+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

або:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2} \\ \text{аналогічно:}\quad y_1 &= y_0 - \frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (36)$$

Приклад: Знайти лет точки $A(2,-4)$ на прямої: $3x+4y-15=0$

тоді прямова форма буде:

$$\frac{3x+4y-15}{5}=0$$

Отже:

$$x_1 = 2 - \frac{3(3\cdot 2 - 4\cdot 4 - 15)}{25} = 2+3=5 \qquad (-25)$$

$$y_1 = -4 - \frac{4(3\cdot 2 - 4\cdot 4 - 15)}{25} = -4+4=0 \qquad (-25)$$

Дамо геометричну інтерпретацію: $x=5$; $y=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$ - відстані на осях

Збудуємо точку $A(2,-4)$ і спустимо прямі на простий d.

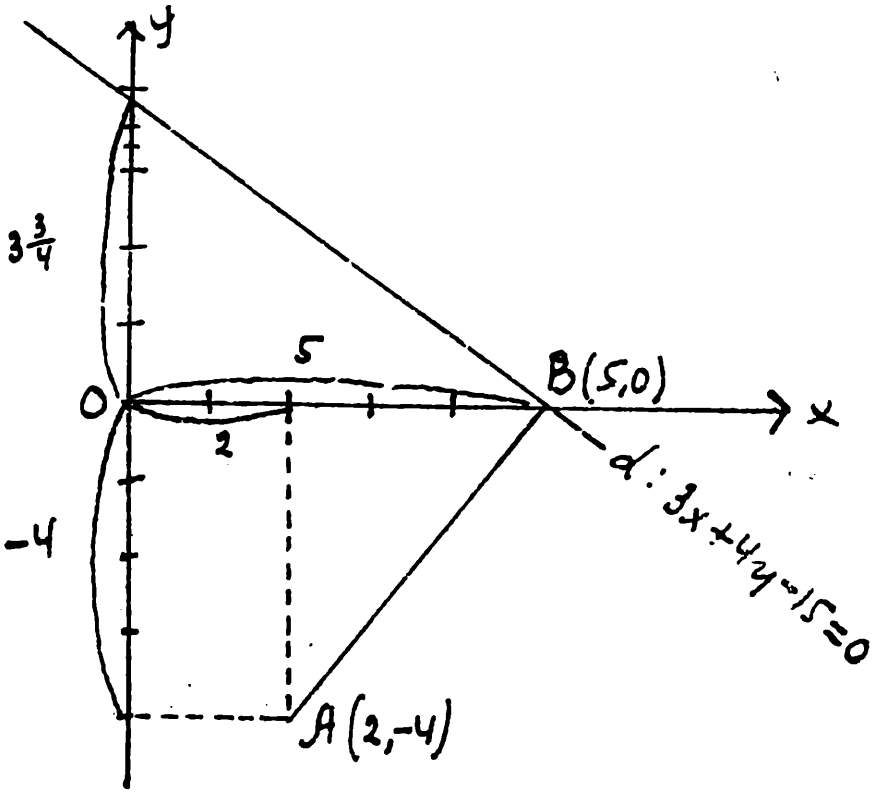


Рис 53.

§-15. Жмуток простих.

Хай дано дві простих, що визначаються рівняннями:

$$x\cos\varphi_1 + y\cos\varphi_1 = \delta_1 \quad (d_1)$$
$$x\cos\varphi_2 + y\cos\varphi_2 = \delta_2 \quad (d_2)$$

Кажуть що через точку перехрестя A цих простих проведемо яку нову довільну простий d, то вона буде геометричним місцем точок, відношення відстаней яких від двох даних простих є величина стала (const).

Доведемо це. Візьмемо через точок $M, M_1, M_2 \ldots$ на простій d

і спустимо на дані прості пря-
мі: MN, M_1N_1, M_2N_2 .... MP, M_1P_1,
M_2P_2 .... Утворяться шерег схо-
жих трикутників, (рис. 54)

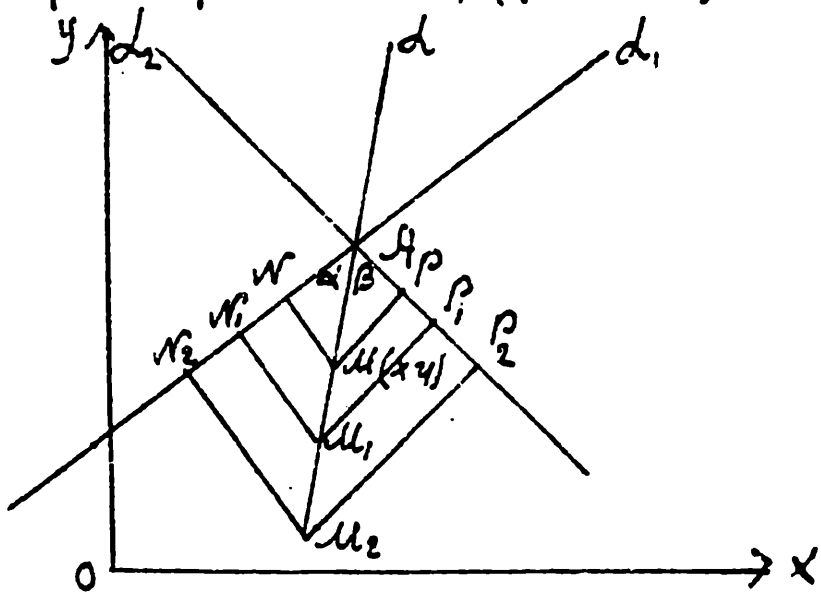


Рис. 54.

а тому:

$$\frac{MP}{M_1P_1} = \frac{MA}{M_1A}\ ;\ \frac{MN}{M_1N_1} = \frac{MA}{M_1A} \quad ..(1)$$

$$\frac{M_2P_2}{M_1P_1} = \frac{M_2A}{M_1A}\ ;\ \frac{M_2N_2}{M_1N_1} = \frac{M_2A}{M_1A} \quad ...(2)$$

Отже: з (1) маємо:

$$\frac{MP}{M_1P_1} = \frac{MN}{M_1N_1} \text{ або: } \frac{MP}{MN} = \frac{M_1P_1}{M_1N_1}$$

з (2) маємо:

$$\frac{M_2P_2}{M_1P_1} = \frac{M_2N_2}{M_1N_1} \text{ або: } \frac{M_2P_2}{M_2N_2} = \frac{M_1P_1}{M_1N_1} \text{ і т.д.}$$

Сполучуючи відношення в суміш пропорцію, матимемо:

$$\frac{MP}{MN} = \frac{M_1P_1}{M_1N_1} = \frac{M_2P_2}{M_2N_2} = (const) \text{ і т.д.}$$

Сталу величину (const) відношення відхилень простої d від простих d_1 і d_2 означимо через λ і надалі математично для якої-завгодної точки $M(x,y)$, що лежить на простій d рівняння:

$$\frac{MP}{MN} = \lambda$$

Що є приємною, що ця точка $M(x,y)$ неодмінно лежить на простій d. Ми вже знаємо, що таке рівняння носить назву рівняння даної простої d. Щоб мати це рівняння в загальному вигляді визначимо з рівнянь даних простих d_1 і d_2 вартості MP і MN.

MP - є відхилення точки $M(x,y)$ від простої d_2, а тому:

$$MP = (x\cos\varphi_2 + y\cos\varphi_2 - \delta_2)$$

[де x,y значники точки $M(x,y)$]

Так само MN, як відхилення точки M від простої d_1 буде:

$$MN = (x\cos\varphi_1 + y\cos\varphi_2 - \delta_1)$$

(де x,y значники точки M)

Загальним типом рівняння простої, що проходить через перехрещення двох даних про-

стих 2:

$$\frac{x\cos\varphi_2 + y\cos\varphi_2 - \delta_2}{x\cos\varphi_1 + y\cos\varphi_1 - \delta_1} = \lambda$$

або:

$$(x\cos\varphi_2 + y\cos\varphi_2 - \delta_2) - \lambda(x\cos\varphi_1 + y\cos\varphi_1 - \delta_1) = 0. \quad (37)$$

[Примітка: Ми могли знову означити через λ і зворотне відношення, себто $\frac{MN}{MP} = \lambda$.
і тоді рівняння нашого-б вийшло:
$(x\cos\varphi_1 + y\cos\varphi_1 - \delta) - \lambda(x\cos\varphi_2 + y\cos\varphi_2 - \delta_2) = 0$
Це показує, що черга рівнянь даних простих при складенню простої, що проходить через їх перехрестя немає значіння]

Означимо, слідом за Німецькими геометрами Плюкером, ліві частини рівнянь:

$$x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - \delta_1 = 0 \quad (d_1)$$
$$x\cos\varphi_2 + y\cos\varphi_2 - \delta_2 = 0 \quad (d_2)$$

через P_1 і P_2.

Тоді маємо рівняння простих:

$$P_1 = 0 \text{ і } P_2 = 0$$

А у рівнянні простої, що переходить через перехрестя даних, також означимо ліву частину через P. Себто рівняння простої буде: $P = 0$

Тоді:

$$F_1 - \lambda F_2 = 0 \quad \ldots\ldots (38)$$

Цей буде рівнянням прямої, що проходить через перехрестя даних прямих $F_1 = 0$ і $F_2 = 0$.

Досліджую, що уявляє з себе стала λ?

Ми показали, що λ є відношення:

$$\lambda = \frac{MN}{MP}$$

Але з прямокутників: MAP; MAN (рис 54) маємо:

$$MP = AM \sin\beta \; ; \; MN = AM \sin\alpha$$

тому:

$$\lambda = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Коли ми будемо давати λ різні довільні вартості, напр: λ'; λ'' ..., то будемо одержувати довільну багато прямих d', d'' .... для яких:

$$\lambda' = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} \; ; \; \lambda'' = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} \quad \text{і т. д.}$$

Всі ці прямі будуть переходити через точку перехрестя прямих d_1 і d_2

Тому рівняння:

$$F_1 - \lambda F_2 = 0 \quad \ldots\ldots (39)$$

можно вважати <u>за рівняння пучка простих, що проходить через перехрестя двох даних простих.</u>

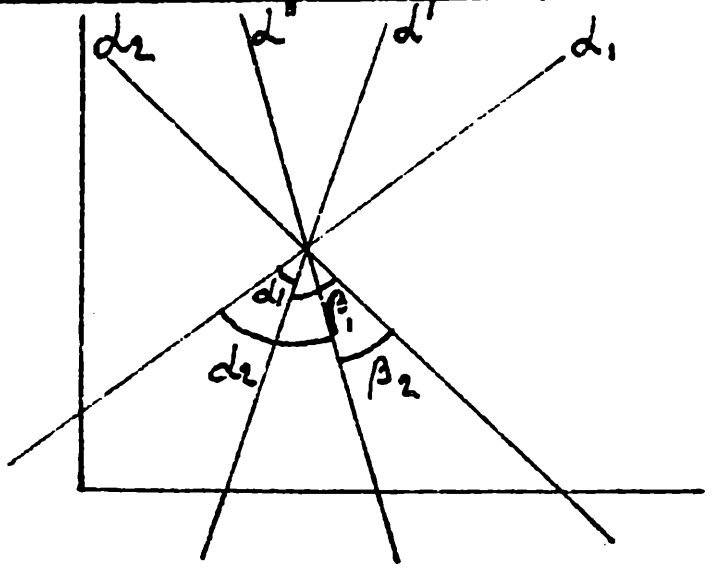


Рис. 55.

Даючи окремі вартости змінному параметрові λ, ми будемо одержувати рівняння окремих простих з цього пучка.

[Самі прості d_1 і d_2 також належать до цього пучка. Справді: 1) даючи λ вартість $\lambda=0$ ми одержимо $\underline{\Phi_1=0}$

2) перетворивши рівняння так: $\Phi_1=\lambda\Phi_2$; $\Phi_2=\frac{\Phi_1}{\lambda}$ і даючи вартість $\lambda=\infty$, матимемо $\underline{\Phi_2=0}$]

Розглянемо випадок, коли рівняння простих дані в аналітичній формі:

$$\Phi_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$\Phi_2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Тоді перевівши ці рівняння в прямову форму, маємо:

$$P_1 = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = 0$$

$$P_2 = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$

Тоді рівняння жмутка буде:

$$\left(P = P_1 - \lambda P_2 = \right) \frac{A_1x + B_1y + C}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \lambda \frac{A_2x + B_2y + C}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$

Або помноживши цілі рівняння на $\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ маємо:

$$A_1x + B_1y + C_1 - \lambda \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} * (A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

* Знаки $\pm$ можно знести, бо вони одночасно однакові і в чисельнику і в знаменнику.

Означивши:

$$\lambda \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = K$$

Тоді маємо рівняння жмутка:

$$A_1x + B_1y + C_1 - K(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \ldots (40)$$

де $K = \lambda \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

Розглянемо тепер яку вартість має жмутковий змінник λ

Ми знаємо, що λ є відношення

прямій в на дані прості d_1 і d_2 з якої небудь точки простої d (d' або d''), що проходить через точку перехрестя даних (Рис 56)

Проста d може мати два положення залежно простих: d_1 і d_2. Розглянемо попередні точки M_1 і M_2, що лежать на простій d'

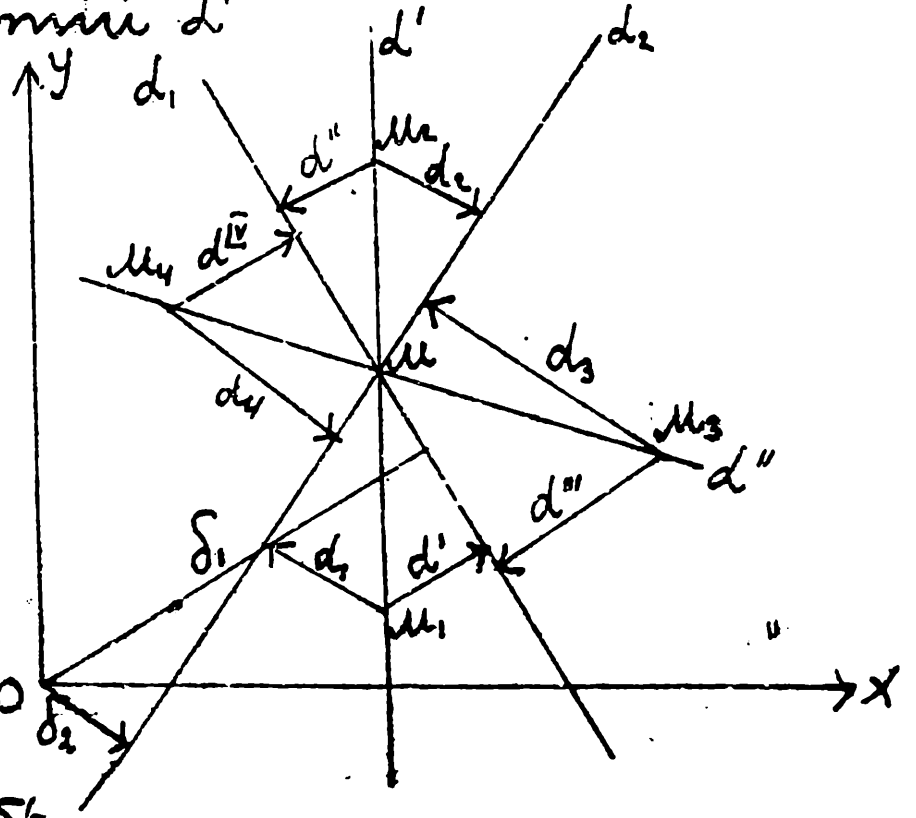


Рис 56.

Для точки M_1 зміщення буде:

$$\lambda = \frac{d_1}{d'}$$, де d_1 - є від'ємне (напрям протилежний до δ_2) а d' - додатне (однакового напряму з δ_1), тому:

$\lambda = -k$ величина від'ємна.

Теж саме для точки M_2:

$$\lambda = \frac{d_2}{d''}$$, де d_2 - додатне,

а d'' – від'ємне, тому:

$\lambda = -k_1$ величина від'ємна.

Отже для простої d' жмуткових змінних λ є число від'ємне.

Розглянемо тепер точки M_3, M_4 на простій d''.

Для точки M_3 змінних λ буде:

$\lambda = \frac{ds}{d'''}$, де ds є величина від'ємна (протилежного напряму δ_2) і d''' також від'ємна (протилежне напряму δ_1)

Тому: λ – величина додатна.

Для точки M_4 змінних λ буде:

$\lambda = \frac{d_4}{d^{IV}}$, де d_4 – величина додатна і d^{IV} – також величина додатна, а тому λ – величина додатна.

Отже для простої d' жмуткових змінних λ є число додатне.

Таким чином, пряма, що проходить через перехрестя двох даних і визначається рівнянням $P_1 - \lambda P_2 = 0$, має жмутковий змінних λ додатним, коли пряма перетинає коло в парі лежачі ле-

лежить початок вісей, і від'ємними, коли проста перетинає кут суміжний куту, в полі якого лежить початок вісей.

Задача 78

Написати рівняння симетральної кута утвореного прямими:

1) $x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 = \delta_1$, або $P_1 = 0$
2) $x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 = \delta_2$, або $P_2 = 0$

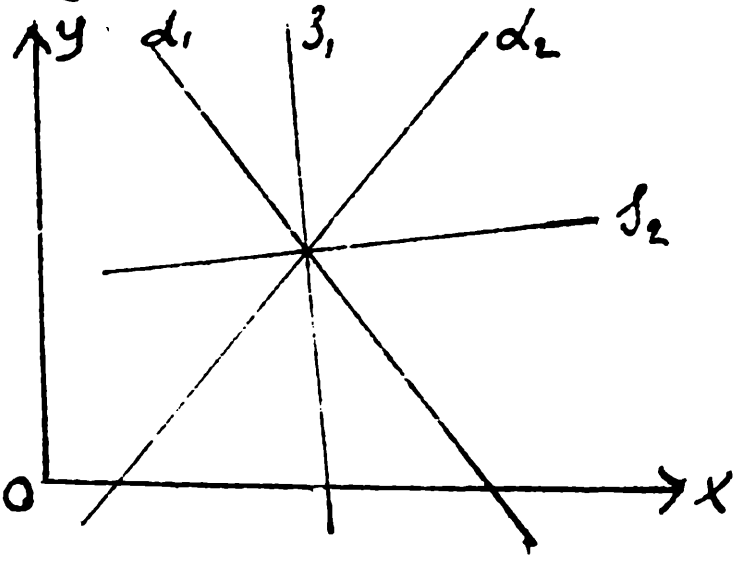


Рис. 57.

Рівняння якої прямої, що проходить через перехрестя даних буде:

$$P_1 + \lambda P_2 = 0$$

Коли ця пряма буде симетральною, то змінник λ по абсолютній величині буде рівний одиниці (бо симетральна є геометричне місце точок

рівновіддалених від рамен кутів.
Але з попередніх міркувань, що до знаку λ, ми знаємо, що коли проста буде S_2 симетральною кута в полі якого лежить початок вісей, то $\lambda = +1$; а коли проста буде S_1, симетральною кута суміжного куту, в полі якого лежить початок вісей, то $\lambda = -1$.

Таким чином:

рівняння симетральної S_1 буде:

$$P_1 - (-1)P_2 = 0 \text{ або}$$

$$P_1 + P_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

а рівняння симетральної S_2 буде:

$$P_1 - P_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

Висновок:

Коли в трикутнику проведені симетральні його внутрішнього кута, та зовнішнього при суміжного, то їх рівняння будуть рівні суті або різниці рівнянь рамен кута, при чому коли, в залежності від положення трикутника взято початку вісей, рівняння симетральної внутрішнього кута виявиться,

Для $\mathcal{P}_1 \pm \mathcal{P}_2 = 0$, то рівняння зовнішнього буде мати протилежну форму. а саме:

$$\mathcal{P}_1 \mp \mathcal{P}_2 = 0$$

Наприклад, в даному положенню прикутника (рис 58)

1) Рівняння симетральної AD буде:

$$\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = 0$$

(бо симетральна перетинає кут в парі якого є початок осей), а рівняння симетральної AK буде:

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = 0$$

2) Рівняння симетральної BE буде:

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_3 = 0$$

а рівняння симетральної Bd є:

$$\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_3 = 0$$

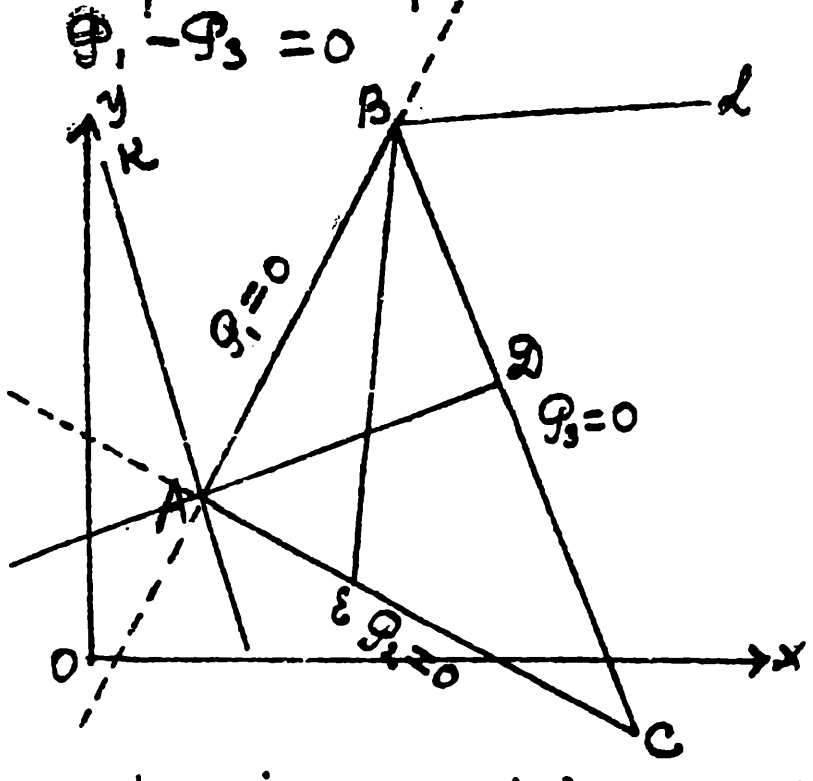


Рис 58.

В тому разі, коли рівняння простих є в алгебричній формі,

то знак жалитугового знін-
ника k рівнання:

$$d_1 - k d_2 = 0$$

підлягає тому же правилу, що
й λ, справді:

$$k = \lambda \frac{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$ і тому знак
k є однако-
вий знаку λ.

Приклад:

Візьмемо для прикладу рів-
нання сіметральної, для якої
$\lambda = \pm 1$.

Тоді і рівнання є: $d_1 \mp \frac{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2}}{\pm\sqrt{a_2^2+b_2^2}} d_2 = 0$

Припустимо, що прості мають
рівнання:

$$3x + 4y - 12 = 0$$
$$5x + 12y - 48 = 0$$

Тоді рівнання сіметральної
буде:

$$3x + 4y - 12 \mp \frac{5}{13}(5x + 12y - 48) = 0$$

Також, коли рівнання про-
стих буде:

$$3x + 4y - 12 = 0$$
$$5x + 12y + 16 = 0$$

то рівнання сіметральної буде:

$$3x + 4y - 12 \mp \frac{5}{-13}(5x + 12y + 16) =$$

§16. Умова того, щоб три дані прості проходять через одну спільну точку.

Ми тільки що довели, що коли проста $P_1=0$ проходить через перехрестя двох других: $P_2=0$ і $P_3=0$, то її рівняння буде:

1) $P_1 = P_2 - \lambda P_3 (=0)$

Так само рівняння простої d_2 буде:

2) $P_2 = P_3 - \mu P_1 (=0)$, а з простої d_3 буде:

3) $P_3 = P_1 - \nu P_2 (=0)$

Додавши всі ці рівняння одно до одного, маємо:

$$\begin{array}{r} P_1 = P_2 - \lambda P_3 \\ + \quad P_2 = P_3 - \mu P_1 \\ P_3 = P_1 - \nu P_2 \\ \hline 0 = (\lambda P_3 + \mu P_1 + \nu P_2) \end{array}$$

або:

$$\mu P_1 + \nu P_2 + \lambda P_3 = 0 \quad \ldots\ldots (41)$$

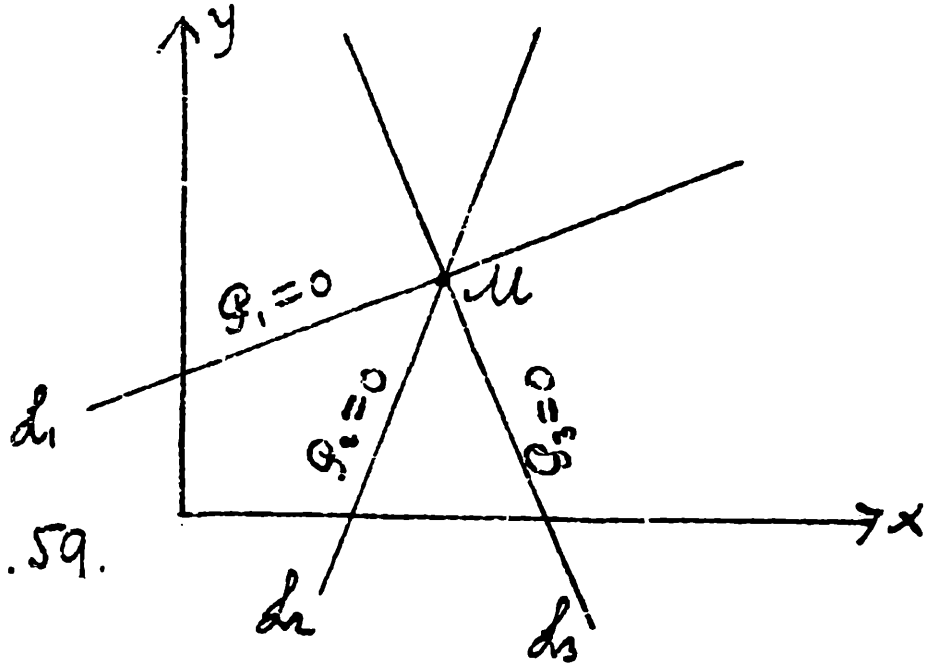


Рис. 59.

Таким чином ми одержуємо умову проходження трьох простих через одну точку.

Коли лінійні ліві частини рівнянь даних простих

при помноженню їх кожний зокрема на довільні числа складають в сумі нуль, то ці прямі всі перехрещуються в одній спільній точці.

Задача.

Довести, що сімедіани внутрішніх кутів трикутника перехрещуються в спільній точці.

1й випадок:

Коли початок визначних осей в середині поля трикутника.

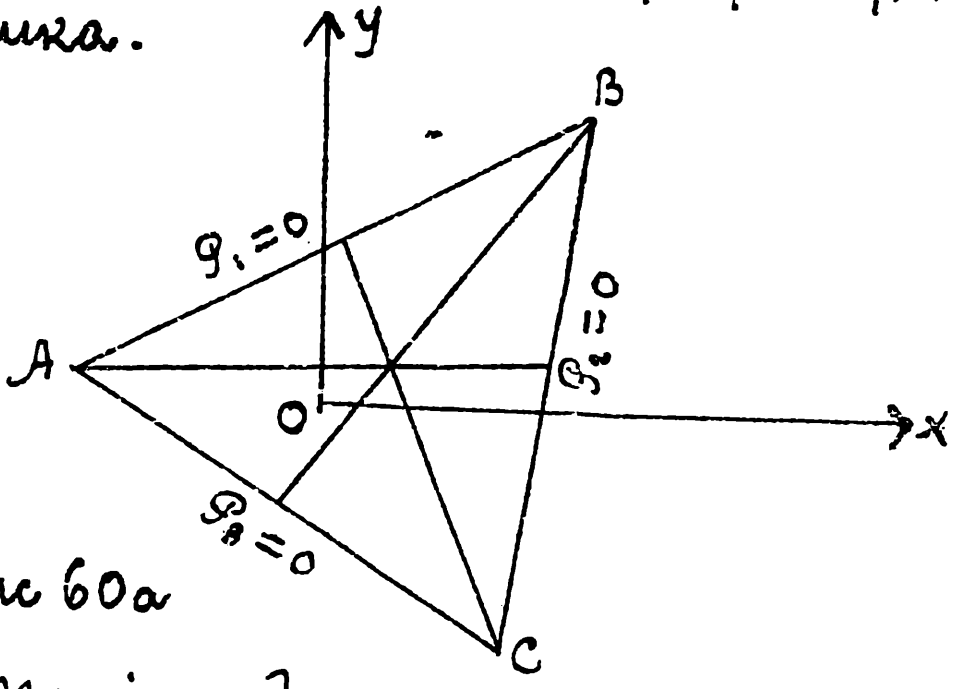


Рис 60а

Тоді цей початок лежить в полі всіх кутів, а через те сімедіальні матимуть рівняння: 1) $g_1 - g_2 = 0$ 2) $g_2 - g_3 = 0$ 3) $g_3 - g_1 = 0$

Звідси:

$$g_1 - g_2 + g_2 - g_3 + g_3 - g_1 = 0$$

Вважаючи довільні числа рівними одиниці і додавши ліві частини всіх трьох рівнянь симетральних, дістанемо 0.

2-й випадок.

Коли початок визначних вісей лежить поза полем трикутника.

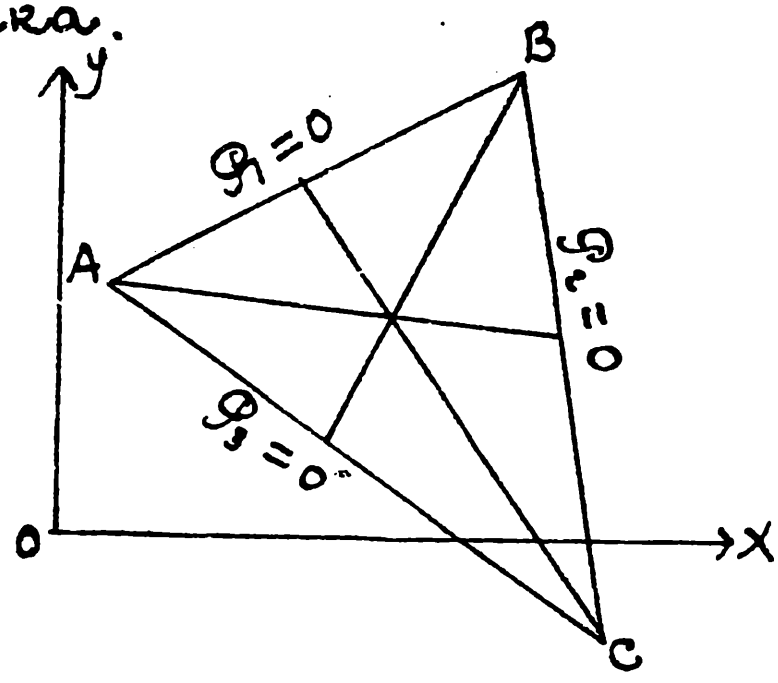


Рис 60 в

Тоді цей початок лежатиме в полі одного з кутів трикутника, напр: B і тим матиме рівняння симетральних:

1) $\varphi_1-\varphi_2=0$ 2) $\varphi_2+\varphi_3=0$ 3) $\varphi_3+\varphi_1=0$

Помноживши перші два рівняння на довільний сочинник $+1$, а третє на сочинник -1, тим додавши ліві частини

цих перших рівнянь одно до одного одержимо:

$$\begin{array}{r} \cancel{P_1} - \cancel{P_2} \\ + \cancel{P_2} + \cancel{P_3} \\ - \cancel{P_3} - \cancel{P_1} \\ \hline 0 \end{array}$$

Таким чином всі ейлеральні внутрішніх кутів в прикутника перехрещуються в одній точці.

Задача.

Довести, що висоти прикутника перехрещуються в одній спільній точці.

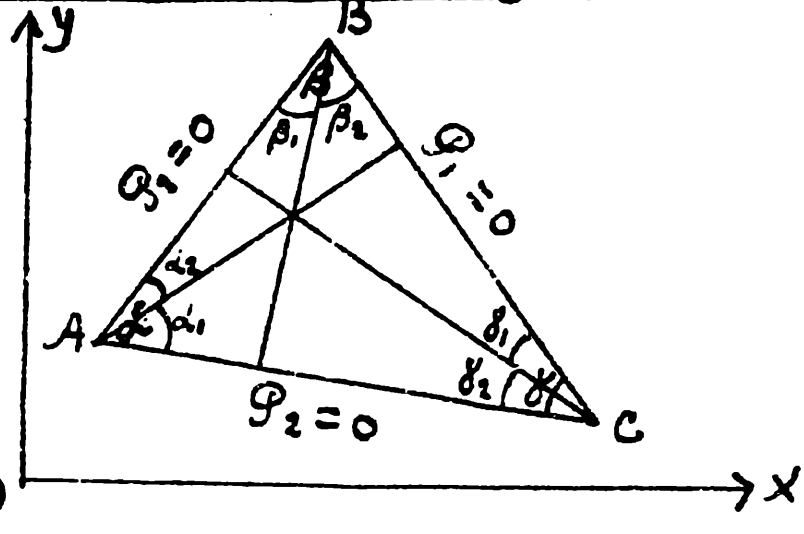


Рис.61.

Напишемо рівняння кожної висоти користуючись тим, що вона проходить через перехрестя двох із боків прикутника.

Так рівняння висоти h_{BC} буде:

$$P_2 - \lambda P_3 = 0$$

Обчислимо λ. Ми знаємо, що: $\lambda = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$, але тому, що h_{BC} є висотою прямокутника, то $\angle\alpha_1 = 90 - \gamma$; $\angle\alpha_2 = 90 - \beta$, тому: $\lambda = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$

Отже: $P_2 - \lambda P_3 = 0$ буде:

1) $P_2\cos\beta - P_3\cos\gamma = 0$

Аналогічно виведемо рівняння: висоти h_{AC}: $P_3 - \lambda_1 P_1 = 0$ або

2) $P_3\cos\gamma - P_1\cos\alpha = 0$

і висоти h_{AB}: $P_1 - \lambda_2 P_2 = 0$ або:

3) $P_1\cos\alpha - P_2\cos\beta = 0$

Додавши ліві частини рівнань висот одну до одної, матимемо:

$$\begin{array}{r} P_2\cos\beta - P_3\cos\gamma \\ + \quad P_3\cos\gamma - P_1\cos\alpha \\ P_1\cos\alpha - P_2\cos\beta \\ \hline 0 \end{array}$$

Отже висоти прямокутника перехрещуються в одній точці.

Задача

Довести, що всі три осередні прямокутника перехрещуються в одній спільній точці.

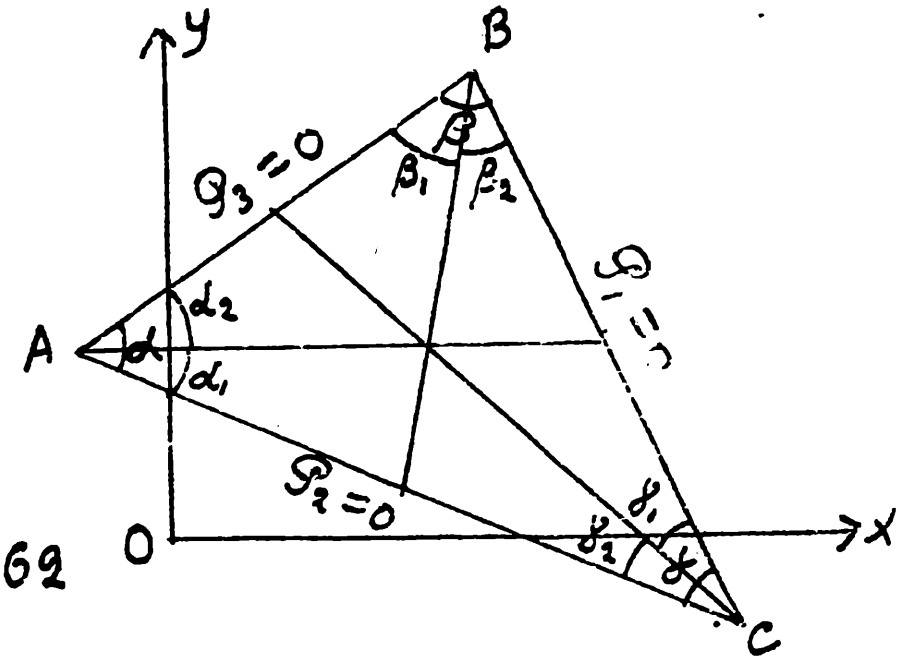


Рис 62

Як і в попередній задачі рівняння осередніх напишемо, як прості, що проходять через перехрестя двох других:

Тобто:

1) Рівняння M_B буде: $\rho_2 - \lambda\rho_3 = 0$
2) " M_{AC} " : $\rho_3 - \lambda_2\rho_1 = 0$
3) " M_{AB} " : $\rho_1 - \lambda_3\rho_2 = 0$

Знаючи $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ виведемо з властивості осередньої, що вона дробить кути на частини, відношення яких пропорційні відношенням кутів при основі.

Тобто:

$$\lambda_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\lambda_3 = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

Тому рівняння осередніх будуть:

1) $M_{BC}: P_2 \sin\beta - P_3 \sin\gamma = 0$
2) $M_{AC}: P_3 \sin\gamma - P_1 \sin\alpha = 0$
3) $M_{AB}: P_1 \sin\alpha - P_2 \sin\beta = 0$

Склавши ліві частини рівнань маємо:

$$\begin{array}{r} P_2\sin\beta - P_3\sin\gamma \\ + \quad P_3\sin\gamma - P_1\sin\alpha \\ P_1\sin\alpha - P_2\sin\beta \\ \hline 0 \end{array}$$

Що й треба було довести.

§ 17. Рівняння деяких простих, що є геометричними місцями точок.

В цьому параграфі покажемо деякі випадки, коли можемо користуючись властивістю простої, як певного геометричного місця точок написати її рівняння.

Приклад 1

Написати рівняння простої, що є геометричним місцем точок рівновіддалених від заданої простої:

$$Ax + By + C = 0$$

припустимо, що це відстань буде d.

Тоді, коли ми на геометричному місці візьмемо яку точку $A(x_1, y_1)$, то це відстань визначиться так:

$$d = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

або: $\pm d\sqrt{a^2+b^2} = -(ax_1 + by_1 + c)$

або, нарешті, маємо:

$$ax_1 + by_1 + c \pm d\sqrt{a^2+b^2} = 0.$$

Щоб мати рівняння цілого геометричного місця, всі точки якого є однаково відстані на d від даної прямої, лишається значки x_1, y_1 вважати за змінні величини, себто, за x і y, тому рівняння прямої рівновідстаненої на d від даної прямої: $ax+by+c=0$, буде:

$$ax + by + (c \pm d\sqrt{a^2+b^2}) = 0$$

(де знак перед d протилежний знаку c)

Як бачимо це є рівняння рівнобіжної прямої до даної (бо "її" рівняння відрізняється лише вільним членом)

Приклад II

Написати рівняння прямої до відтинка простої поставленого в його середині (рівняння симетральної даного відтинка)

Хай значники кінців відтинку будуть: $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ Пряма поставлений до відтинку з його середини є геометричне місце точок рівновідсталих від кінців відтинку, себто ми будемо шукати рівняння простої рівновідсталої від двох даних точок.

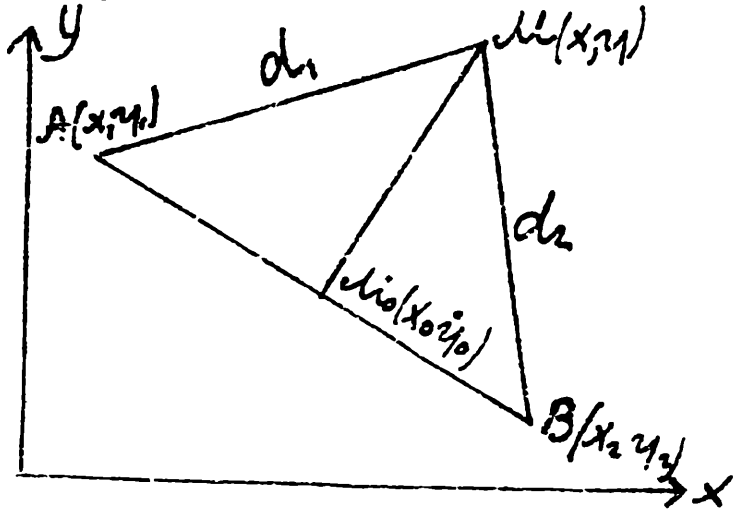


Рис 63.

З властивості геометричного місця й квадрати відстань від кінців відтинку якої точки $M(x,y)$, які будуть:

1) $d_1^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2$
2) $d_2^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2$

є між собою рівні, а тому:

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 \quad (*)$$

або:

$$2x(x_2-x_1) + 2y(y_2-y_1) - \left[(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)\right] = 0$$

[Примітка. Підставивши в рівняння значення середини відтинку: $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ і $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$, ми переконаємось, що пряма перходить через середину відтинку AB: $(y-y_1) = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ і давши нашому рівнянню (*) канонічну форму:

$$y = -\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}x + \frac{(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)}{y_2-y_1}$$

маємо умову прямовисності цих прямих:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\ ]$$

Задача.

Написати рівняння симетральної кута, що має рамена: 1) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$
2) $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Симетральна кута є геометричне місце точок рівновідда-

лення від рамен. Означимо відхалення від рамен якої точки сімметральної $M(x_0 y_0)$ через d_1 і d_2. Тоді ми знаємо, що ці відхалення будуть визначатися так:

$$d_1 = -\frac{a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

$$d_2 = -\frac{a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Для точки $M(x_0, y_0)$ ці відхалення є рівні, а точку:

$$-\frac{a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

або:

$$a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 - \frac{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}(a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2) = 0$$

Щоб мати рівняння простої, для якої всі точки мають властивість точки $M(x_0 y_0)$ треба значки $x_0 y_0$ зміняти на змінні x і y і ми матимемо рівняння сімметральної:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 - \frac{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

або зміняючи: $a_1 x + b_1 y + c_1 = d_1$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = d_2$$

матимемо:

$$\delta_1 \mp \frac{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2}}{\pm\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\delta_2 = 0$$

[Перед сочинником δ_2 лишається поставити два знаки $\mp$, бо як знаючи цей знак залежить від положення кута зносно початку визначних осей]

І ми одержали вже знайоме рівняння симетральної кута.

§ 18 Задачі до розділу „Пряма лінія".

(Взяті з підручників: Фра Jana Vajtěcha, Антона Лотинського, Е. Савицького, Фра Kaz Zahradnika і Ignacy Kranz-a)

Ч-72. Знайти кут, що творять прості:

1) $6y = \frac{5}{4}x + 11$ 2) $3x + 5y = 4$ 3) $y - x = 0$

з віссю x-ів (теж з віссю y-ів)

(1) $\alpha = 11°46'6''$ 2) $\alpha = 149°2'10''$ 3) $\alpha = 45°$)

Ч-73. Написати рівняння простих, що:

1) творить з віссю x-ів кут 60° і відтинає від осі y-ів відтинок $b = 4{,}5$

2) відтинає від всей відтинки: $a = -2$, $b = 5$.

3) творить з віссю y-ів кут в 45° і відтинає від осі x-ів відтинок $a=-3$.

(1) $y=x\sqrt{3}-4,5$ 2) $y=2,5x+5$ 3) $y=x+3$.)

Ч-74. Скласти рівняння прямої, що:

1) рівнобіжна до осі x-ів і творить відтинок на осі y-ів $b=3$

2) рівнобіжна до осі y-ів і творить відтинок на осі x-ів: $a=-4,5$.

3) переходить через початок осей і має кут спаду на вісь x-ів: $\alpha=150°$

4) проходить через точку $A(13,-4)$ і має кут спаду на вісь x-ів: $\alpha=150°$

5) проходить через точку $B(-5,-7)$ і має кут спаду на вісь x-ів: $\alpha=225°$

[1) $y=3,2$ 2) $x=-4,5$ 3) $3y+x\sqrt{3}=0$
4) $3y+x\sqrt{3}+12-13\sqrt{3}=0$ 5) $y=x-2$]

Ч-75 Скласти рівняння прямої, що проходить через точки:

1) $A(3,5)$ і $B(4,-1)$ 2) $A(\frac{2}{3},0)$ і $B(-3,5;0,5)$

3) $M(x_1,y_1)$ і $N(-e,0)$

[1) $y=-6x+23$ 2) $2y+3x=2$ 3) $y-y_1=\frac{y_1}{x_1+e}(x-x_1)$]

Ч-76. Скласти рівняння боків трикутника, що має своїми вершинами:

1) $A(4,5)$ $B(2,-2)$ і $C(-5,0)$
2) $A(0,0)$ $B(8,6)$ і $C(10,-4)$
3) $A(3,5)$ $B(7,-3)$ і $C(-4,-3)$

[1) $y=\frac{7x}{2}-9$; $7y+2x+10=0$; $9y-5x=25$
2) $3x=4y$; $5x+y=46$; $2x+5y=0$
3) $2x+y=11$; $y=-3$; $8x-7y+11=0$]

2-77. Скласти рівняння прямих, що:

1) проходить через точку $A(3,-1)$ і є рівнобіжною до прямої: $2y+4=3x$

2) проходить через точку $B(-5,2)$ і є прямою до прямої: $2y-x+5=0$

[1) $2y=3x-11$ 2) $2x+y+8=0$]

2-78. Написати рівняння прямих, що проходять через точку $A(4,5,6)$ і одна з них рівнобіжна, а друга прямова до прямої, що сполучує точки: $B(-3,3)$ і $C(3,-4)$

[1) $y=-\frac{7}{6}x+11,25$; 2) $7x-6x=15$]

2-79. Обчислити відстання точки $A(5,-12,2)$ від прямих: 1) $y=\frac{3}{4}x+\frac{8}{3}$ 2) $3x=y-5$ 3) $\frac{y}{3}-\frac{x}{4}=1$ 4) $5y+13x-4=0$

[1) $-12\frac{13}{15}$ 2) $3,2\sqrt{10}$ 3) 15,16 4) 0]

Ч-80. Обчислити площу трикутника, що має вершинами: $A(2,3)$ $B(1,\sqrt{3})$ $C(-4,-2)$
[$AB=\sqrt{101}$; $BC=\sqrt{250}$; $AC=\sqrt{61}$]

Ч-81 Обчислити значення центра ваги трикутника з вершинами: $A(-15,-15)$ $B(-3,15)$ $C(15,-3)$ [$x_0=-1$, $y_0=-1$]

Ч-82. Знайти точки перехрестя прямих:

1) $3x = y-5$ і $5y+\sqrt{3}x+3=0$
2) $y = 3x-1$ і $y-3x-7=0$
3) $4x+2y=1$ і $6x+3y-\frac{3}{2}=0$

[1) $x_1=-1$ $y_1=2$ 2) прямі рівнобіжні 3) одна пряма.

Ч-83. Знайти значення вершин і центру ваги трикутника, що має рівняння боків: $y+3x=7$; $x+7y+11=0$; $x=3y-1$ [Центр ваги: $x_0=\frac{1}{3}, y_0=-\frac{2}{3}$]

Ч-84. Трикутник має вершини: $A(-4,-2)$ $B(5,7)$ $C(8,3)$. Треба:

1) Знайти периметр трикутника
2) Обчислити основу AB і висоту h_{AB}
3) Обчислити площу Δ-а через основу і висоту. [$AB=9\sqrt{2}$; $h_{AB}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$; $S=31,5$]

7-85. Знайти відстань від початку всей прямої, що проходить через точки: $A(-5,0)$ $B(-1,-7)$? $\left[\ \delta = \frac{7\sqrt{65}}{65}\ \right]$

7-86. Знайти відстань одна від одної прямих:
1) $y = 9x - 1$ 2) $y - 9x = 7$? $\left[d = \frac{4\sqrt{82}}{41} \right]$

7-87. Обчислити відстань:
1) точки $A(2,2)$ від прямої, що сполучає точки: $B(4,-3)$ $C(-5,-2)$
2) точки $A(10,11)$ і точки $B(-10,1)$ від прямої: $3x + 4y - 24 = 0$
[1) $d = \frac{43}{\sqrt{82}}$ 2) $d_1 = -10$ $d_2 = +10$]

7-88. Знайти висоти трикутника з вершинами:
$A(2,1)$ $B(3,-2)$ і $C(-4,-1)$.
$[\ 2\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{10}\ ,\ 2\sqrt{10}\ ]$

7-89. Через точку $M(1,7)$ провести дві взаємоперпендикулярні прямі, рівновіддалені від початку всей. Написати їх рівняння і знайти їх однакове відстань:
$[\ 4x + 3y - 25 = 0\ ;\ 4y - 3x - 25 = 0\ ;\ \delta = 5\ ]$

7-90. Обчислити кути, що творять між собою

прості: 1) $2x = 3y - 4$ і $2x - y = 2$
2) $y = 2{,}5x + 0{,}5$ і $6x = 3y + 2{,}4$
3) $y = 4x$ і $4x + y = 4$

[1) $tg\varphi = -\frac{4}{7}$ 2) $tg\varphi = \frac{1}{12}$ 3) $tg\varphi = -\frac{8}{17}$]

✓ 2-91. Обчислити кут між прямими: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ і користуючись знайденим взором, обчислити кути між прямими:

1) $4y - 3x = 4$ і $6y = 12x - 5$
2) $y + 3x = 8$ і $3y = 12 - 2x$
3) $6y + 5x = 30$ і $x = 5y - 10$

[$tg\varphi = \pm \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$; 1) $\varphi \approx 7°41'42''$

2) $\varphi = 37°52'30''$ 3) $\varphi = 128°53'4''$]

2-92. Знайти рівняння середніх пригирництва, обчислити їх довжину і знайти їх перехрестя, коли вершини пригирництва є: $A(-5, 2)$ $B(3, -6)$ і $C(4, 7)$.

[Знайти центру ваги: $x_0 = \frac{2}{3}$ $y_0 = 1$]

2-93. Знайти точку перехрестя висот пригирництва: 1) $A(0,0)$ $B(6,0)$ і $C(3,5)$
2) $A(0,-1)$ $B(3,2)$ і $C(4,-3)$

[1) $x_0 = 3$; $y_0 = \frac{9}{5}$ 2) $x_0 = 6{,}25$; $y_0 = 4\frac{1}{4}$]

Ч-94. Обчислити довжини й кути трикутника: 1) $A(2,1)$ $B(3,-2)$ $C(-4,-1)$ 2) $A(2,3)$ $B(4,-5]$ $C(-3,-6]$

[$\sqrt{10}$, $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{10}$]

Ч-95. Скласти рівняння прямої:

1) що проходить через перехрестя двох прямих: $2x = 3y + 12$ і $x = 6y - 12$ і є рівнобіжного до вісі x-ів.

2) що проходить через перехрестя прямих: $3y - 4x + 2 = 0$ і $5y - 3x - 4 = 0$ і є рівнобіжного до вісі y-ів. [$y = 4$; $x = 2$]

Ч-96. Скласти рівняння прямої, що проходить через перехрестя прямих: $y = 5x + 3$ і $4x - y + 1 = 0$ і через середину відтинку: $A(-1,4)$ і $B(4,3)$

[$y = 3x - 1$]

Ч-97. Написати рівняння прямої, що:

1) З вісю x-ів утворює кут $\varphi = 120°$ і має відрахування від початку вісей $\delta = 3$.

2) проходить через точку $A(6,7)$ і відрахована від точки $B(5,-8)$ на $d = \sqrt{113}$.

3) проходить через точку $A(-4,3)$ і віддалена від початку вісей на $\delta = 5$.

[1) $y + x\sqrt{3} = \pm 6$ 2) $8y - 7x = 14$ або $7x - 8y + 14 = 0$ 3) $3y - 4x = 25$]

Ч 98. Прямокутник має вершинами: $A(6,-4)$ $B(8,2)$ $C(-2,6)$; обчислити значення кола обведеного навколо прямокутника?

[$x_0 = \frac{29}{17}$, $y_0 = \frac{13}{17}$]

Ч-99. Обчислити луч кола обведеного навколо прямокутника з боками:

$y = 4x - 9$, $x + y = 1$ і $4y = x + 9$

[$r = 2\sqrt{1,7} = 2,4$]

Ч-100. Рівняння боків прямокутника: $y - x + 1 = 0$; $y + x = 1$; $x = 6$. Обчислити значення перехрестя висот.

[прямокутник прямокутний: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$]

Ч-101. Довести, що висоти прямокутника: $A(1,1)$, $B(-2,2)$ і $C(3,-5)$ перехрещуються в одній точці.

[$2(x - 3y + 8) - 1(5x - 7y + 2) + 1(3x - y - 14) = 0$]

Ч-102 Трикутник має вершини:
$A(-4,2)$ $B(4,-10)$ $C(10,6)$.
Довести, що центр ваги, перехрестя висот і центр кола обведеного на трикутником лежать на одній прямій.
[центр ваги $\left(\frac{10}{3},-\frac{2}{3}\right)$, точка перехрестя висот $\left(\frac{28}{25},\frac{2}{25}\right)$, центр кола обведеного $\left(\frac{111}{25},-\frac{26}{25}\right)$.

$$\frac{\frac{111}{25}-\frac{10}{3}}{\frac{111}{25}-\frac{28}{25}}=\frac{-\frac{26}{25}+\frac{2}{3}}{-\frac{26}{25}-\frac{2}{25}} \text{ або } \frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ ]$$

Ч-103. Розв'язати трикутник, що має рівняння боків:
$y=x$; $x+y=0$; $y=2(x-1)$

Ч-104. Дано трикутник ABC. Позначити основу AC і висоту h_{AC} за визначені вісі, знайти: 1) рівняння і перехрестя висот
2) рівняння симетральних боків і центр кола обведеного.
[Увага: Знаменувати вершини в вказати: $A(x_1,0)$ $B(0,y_2)$ і $C(x_3,0)$
Відповідь: Рівняння висот:
$yy_2-x(x-x_3)=0$; $x=0$ і $yy_2-x_3(x-x_1)=0$
Точка їх перехрестя: $\left(0,\frac{x_1x_3}{x_2}\right)$]

Ч-105 Скласти в прямовій формі рівняння висот, коли вершини трикутника: $A(6,0)$ $B(0,12)$ $C(0,-3)$

Ч-106. Вершина трикутника $A(-1,2)$. Рівняння висоти h_{AB}: $x=2y$, а h_{AC}: $y=3x+10$. Обчислити решту вершин трикутника і написати рівняння третьої висоти h_{BC}?

[Увага: Точка перехрестя висот: $M(-4,-2)$ а рівняння третьої висоти, що проходить через точки A і M буде: $4x-3y+10=0$ Рівняння боків трикутника, як прямих до висот: $y+2x=0$, $3y+x-5=0$ і т.д.

Відповідь: $B(2,1)$ $C(-2,4)$]

Ч-107. Написати рівняння сіметральних, коли рівняння кутів:

1) $4x+3y-9=0$ і $8x-15y+12=0$
2) $3x+4y=5$ і $12x-5y+8=0$

[1) $36x-8y-31=0$; $2x+9y-\frac{203}{14}=0$
2) $11x+3y=2\frac{7}{9}$ і $-3x+11y=15$]

Ч-108. Скласти рівняння простої, що ділить кут на рівні частини

36° і 63°. Коли рамена мають рівняння: $3x-4y=8$ і $12x-5y=12$

[відп: $\frac{3x-4y-8}{5}\sin 63° = \frac{12x-5y-12}{13}\sin 36°$]

Ч 109. Написати рівняння прямої що:

1) проходить через перехрестя прямих: $5x+3y-15=0$; $2x-3y+6=0$ і точки: $(2,5)$

2) проходить через перехрестя тих же прямих, а також через перехрестя прямих:

$5x-4y-20=0$; $5x+7y-35=0$

[Увага. Задачу розв'язати користуючися властивістю системи прямих, а перевірити, складши рівняння, що проходить через дві визначені точки]

Ч-110. Довести, що середня прилеглих і рівнобіжний третьому боковій і рівний його половині (теж для трапеції)

Ч-111. Написати рівняння прямої, що проходить через центрову визначений двома прямими: $4x+7y-15=0$ і $9x-14y-4=0$ і

1) рівнобіжна до осі y-ів.

2) рівнобіжна до прямої $2x-3y-9=0$
3) пряма до першої з даних прямих.
[Увага. В 1) рівняння визначається з тої умови, що рівнобіжна до перпендикуляра з вісі y-ів має значник $\frac{1}{y}=0$; неконст.
Відп: 1) $x=2$ 2) $2x-3y=1$ 3) $3x+2y-8=0$]

Ч-112. Скласти рівняння геометричного місця точок віддалення яких від даних прямих: $12x-16y+9=0$ і $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ мають відношення $\frac{2}{3}$!
[Відп: $68x-72y-69=0$]

Ч-113. Рівняння боків трикутника: $12x+5y+60=0$ і $4x-3y=36$; $8x+15y=16$. Знайти значники центра кола вписаного і луч кола?
[$O(1,-4)$; $r=4$]

Ч-114. Рівняння боків чотирикутника: $x-4y+10=0$; $5x+2y=16$ $4x-9y=34$; $3y-8x=22$. Довести, що середники суміжних боків утворюють рівнобіжник.
[Рівняння середників: $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}$; $y=-\frac{2}{5}x-\frac{13}{3}$; $y=\frac{9}{7}x+\frac{5}{2}$; $y=\frac{9}{7}x-\frac{47}{14}$
Отже кутові значники є парно рівні]

7-115. Вершини чотирикутника: $A(0,0)$ $B(5,0)$ $C(8,4)$ $D(3,4)$. Визначити, що уявляє цей чотирикутник і який чотирикутник утворюють середини сусідніх боків.

[1) ромб 2) прямокутник]

7-116. Довести, що середини сусідніх боків прямокутника з вершинами: $A(3,3)$, $B(11,3)$ $C(11,-5)$ $D(3,-5)$ утворюють ромб?

7-117. Довести, що середини сусідніх боків квадрату з вершинами: $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,-4)$ $D(0,-4)$ утворюють знова квадрат?

Обчислення поверхні та об'ємів обертових тіл за допомогою аналітичної геометрії.

7-118. Вершини трикутника:

1) $A(0,0)$, $B(10,0)$ $C(9,3)$
2) $A(2,-3)$ $B(6,0)$ $C(3,-1)$

Обчислити поверхню і об'єм тіла, утвореного обертанням цих трикутників, зокрема навколо вісі x-ів?

[1) $S = 12\pi\sqrt{10} = 119{,}21$ кв.од. $V = 30\pi = 94{,}25$ куб.од.

2) $S = \pi(15+\sqrt{10}+4\sqrt{5}) = 85{,}175$ кв.од $V = \frac{20}{3}\pi = 20{,}944$ куб.од.]

2-119. Вершини трикутника:
$A(2,3)$ $B(5,7)$ і $C(-3,1)$. Обчислити об'єм тіла утвореного обертанням цього Δ-а навколо найбільшого з боків?
[Рівняння найбільшого боку:
$y=\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$; $h=\frac{7}{5}$ і $V=6\frac{8}{15}\pi=20,525$ куб.од]

2-120. Вершини трикутника:
$A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $C(x_3,y_3)$.
Обчислити об'єм тіла утвореного обертанням цього трикутника навколо осі y-ів.
[У вислід підставити: $x_1=1$; $y_1=1$; $x_2=2$; $y_2=3$; $x_3=3$; $y_3=1,5$]
$$[V=\frac{\pi}{3}\left[(y_2-y_3)(x_2^2+x_3^2+x_2x_3)+(y_3-y_1)(x_3^2+x_1^2+x_3x_1)-\right.$$
$$\left.-(y_2-y_1)(x_2^2+x_1^2+x_2x_1)\right]=\frac{2}{3}\pi S(x_1+x_2+x_3)$$
де S - площа Δ-а. $V=21,99$ куб. од.]

2-121. Рівняння боків трикутника: $y=x$; $4y+3x=42$; $y=3$
Обчислити поверхню й об'єм тіла утвореного обертанням цього трикутника навколо осі x-ів.
[$S=3\pi(29+9\sqrt{2})=393,27$ кв. од.
$V=84\pi=263,90$ куб. од.]

2-122. Вершини чотирикутника $A(2,1)$ $B(4,3)$ $C(7,3)$ $D(9,1)$

Обчислити V тіла утвореного обертанням чотирикутника навколо вісі X-ів.
[$V = \frac{112}{3}\pi = 117{,}286$ куб. од.]

Ч-123. Висота правильної трикутної 12. Обчислити її об'єм, коли прилеглих основи має вершини: $A(-4,2)$ $B(3,-5)$ $C(4,5)$ [$V = 154$ куб. од.]

Ч-124. Пряма чотирикутна призма має висоту 10, а в основі чотирикутник з вершинами: $A(3,3)$ $B(0,5)$ $C(-4,0)$ $D(-2,-5)$ Обчислити S і V призми?
[$S = 10(\sqrt{13}+\sqrt{41}+\sqrt{29}+\sqrt{89})$; $V = 320$ куб. од]

§-19 Перетворення визначних вісей.

Дуже часто буває потреба обчислювати через значення точки, віднесені до одної системи координат, нові значення тієї самої точки до другої системи. Цю операцію звуть перетворенням визначних вісей.

1-й випадок перетворення.

Вісі нової системи є рівно-

бічні вісям старої
це перетворення носить назву <u>рівнобіжного перенесення вісей.</u>

Припустимо, що вісі даної системи будуть xy, а вісі нової системи $x'y'$. Початок нових вісей має значення змінно старої системи: $A(a, b)$

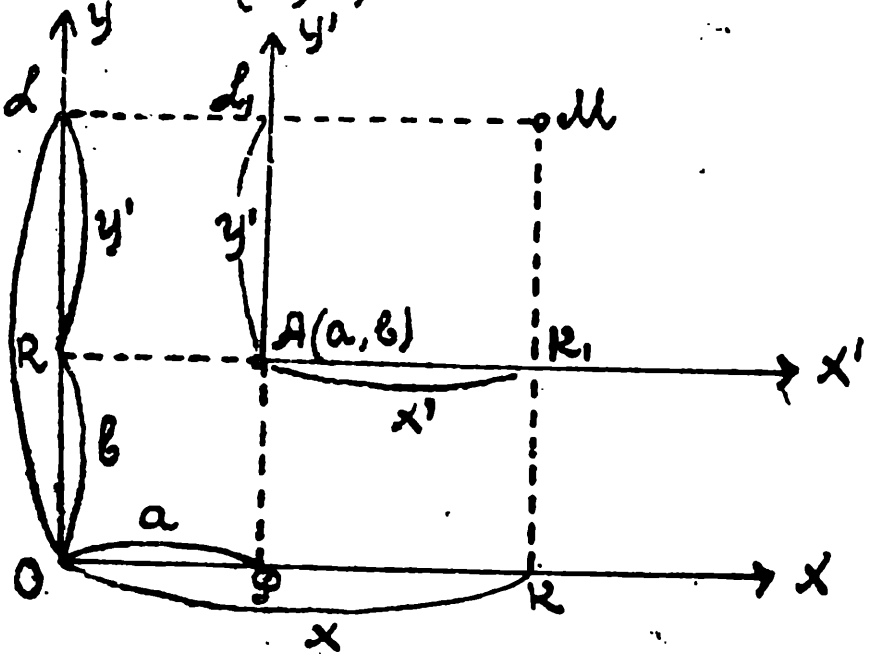


Рис 64.

$x = OK$; $x' = AR_1 = \Phi K$ і $a = O\Phi$.

Але: $OK = O\Phi + \Phi K$, тому:

$$\underline{x = a + x'}$$

Так само: $Od = OR + Rd$

$$\underline{y = b + y'}$$

Звідси маємо такі вздори перетворення:

Значення точки змінно нових координат через старі будуть:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x-a \\ y' &= y-b \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (42)$$

Значення точки старих координат через нові будуть:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'+a \\ y &= y'+b \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (43)$$

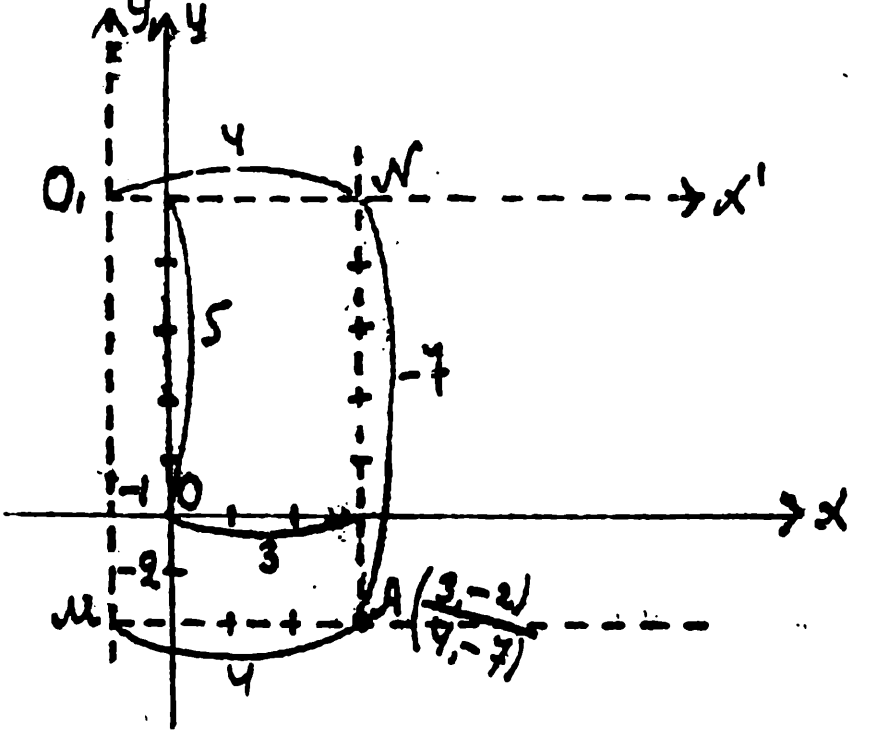
Приклад

Визначити значення точки $A(3,-2)$ старих рівнобіжних перших координат з початком $O_1(-1,5)$

$$x' = x-a \;;\; x' = 3-(-1) = 4$$
$$y' = y-b \;;\; y' = -2-5 = -7.$$

Отже значення точки A старих координат будуть: $A(4,-7)$

Відобразимо вищі перетворення графічно.



II випадок перетворення.

Обертання вісей навколо початку.

Припустимо, що нові вісі координат $x'y'$ повернені зносно старих вісей xy на кут $\angle\varphi$.

Візьмемо яку небудь точку M.

Хай значення цієї точки зносно вісей xy будуть $x; y$, а зносно вісей $x'y'$ будуть: $x'; y'$.

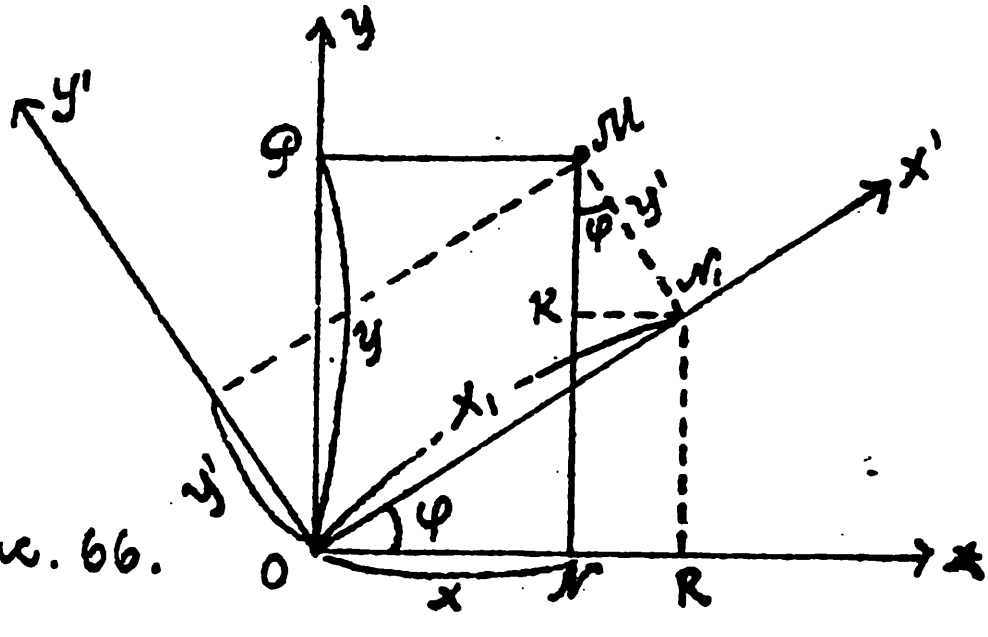


Рис. 66.

Спустивши з точки N_1 прямі на MN і OX матимемо:

$$x = OR - NR;\quad y = MK + KN.$$

З прямокутника ON_1R маємо:

$$OR = ON_1 \cos\varphi = x'\cos\varphi.$$

$$N_1R = ON_1 \sin\varphi = x'\sin\varphi.$$

З прямокутника KMN_1 маємо:

$$KN_1 = MN_1 \sin\varphi = y'\sin\varphi$$

$$MK = MN_1 \cos\varphi = y'\cos\varphi.$$

Маємо:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned}\right\} \text{-----} (44)$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

1) $\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \mid \cos\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \mid \sin\varphi \end{aligned}$

$$\begin{aligned} x\cos\varphi &= x'\cos^2\varphi - y'\sin\varphi\cos\varphi \\ + \quad y\sin\varphi &= x'\sin^2\varphi + y'\sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}$$

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = x'(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

Отже:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \text{ або } x' = y\sin\varphi + x\cos\varphi.$$

2) $\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \mid \sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \mid \cos\varphi \end{aligned}$

$$\begin{aligned} -x\sin\varphi &= -x'\sin\varphi\cos\varphi \pm y'\sin^2\varphi \\ + \quad y\cos\varphi &= x'\sin\varphi\cos\varphi + y'\cos^2\varphi \end{aligned}$$

$$y\cos\varphi - x\sin\varphi = y'(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

Отже:

$$y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi.$$

Таким чином значення точки знайдено нових осей виловлюється через значення старих так:

$$\left.\begin{aligned} x' &= y\sin\varphi + x\cos\varphi \\ y' &= y\cos\varphi - x\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{----} (45)$$

III випадок перетворення.

Довільне перенесення вісей.

Нашим завданням є перенести систему визначних вісей у яку довільну точку $A(a,b)$, так, щоб нова вісь x-ів мала з напрямом старої певний кут сталу φ.

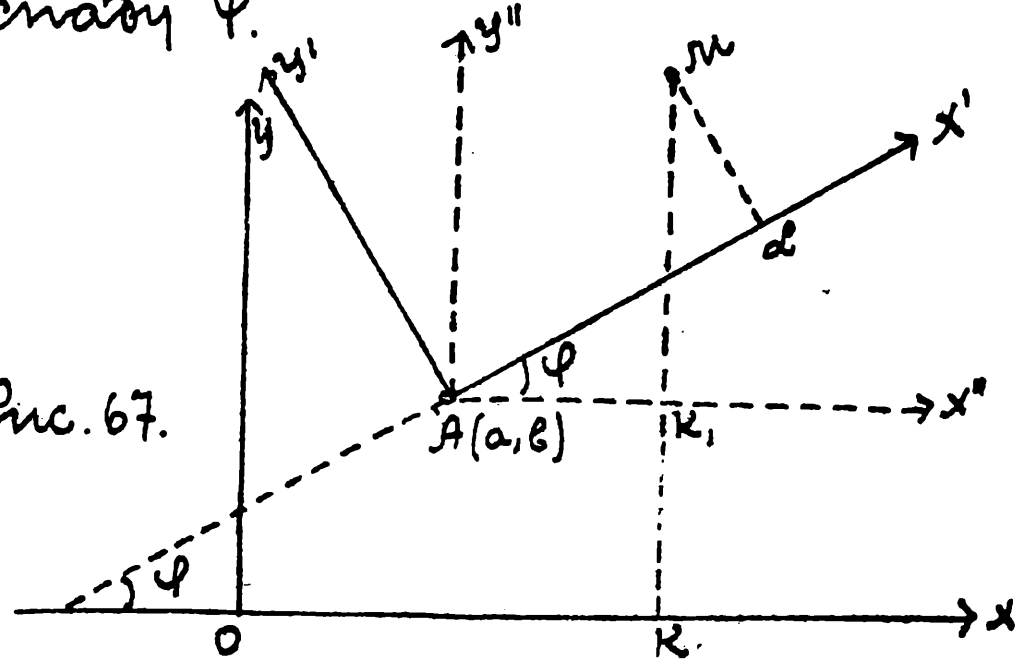


Рис. 67.

Щоб при даних умовах перейти від однієї системи вісей xy до другої $x'y'$, ми введемо допоміжну систему $x''y''$, яка б проходила через точку $A(a,b)$ рівнобіжно попередній.

Означимо значники якої небудь точки M:

1) значно старих вісей: x і y
2) " нових " x' і y'
3) " допоміжних " x'' і y''

З першого випадку перетворення маємо:

$$x'' = x - a \; ; \; y'' = y - b \quad (a)$$

Далі з 2-го випадку перетворення осей матимемо:

$$x' = y'' \sin\varphi + x'' \cos\varphi$$
$$y' = y'' \cos\varphi - x'' \sin\varphi \quad - (b)$$

Підставляючи вартості x'' і y'' з рівностей (a) у (b), матимемо:

$$x' = (y-b)\sin\varphi + (x-a)\cos\varphi \quad \ldots (4б)$$
$$y' = (y-b)\cos\varphi - (x-a)\sin\varphi$$

Біполярні визначення осі.

Розглянемо, що один спосіб визначення положення точки на площі.

Візьмемо яку довільну вісь x і на ній точку O. Тоді положення точки на площі можна точно визначити, коли ми будемо знати відстань її ρ від точки O. і кут спаду простої OM що проходить через точку O і дану M.

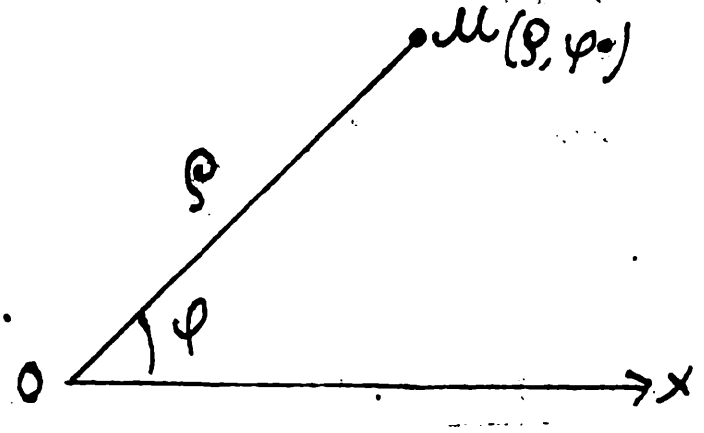


Рис. 68.

Дійсно, коли ми матимемо сталу відстань точки M від O, себто $\rho = const$, то різним значенням $\angle\varphi$ буде відповідати безліч точок M, що лежатимуть на обводі кола радіуса ρ

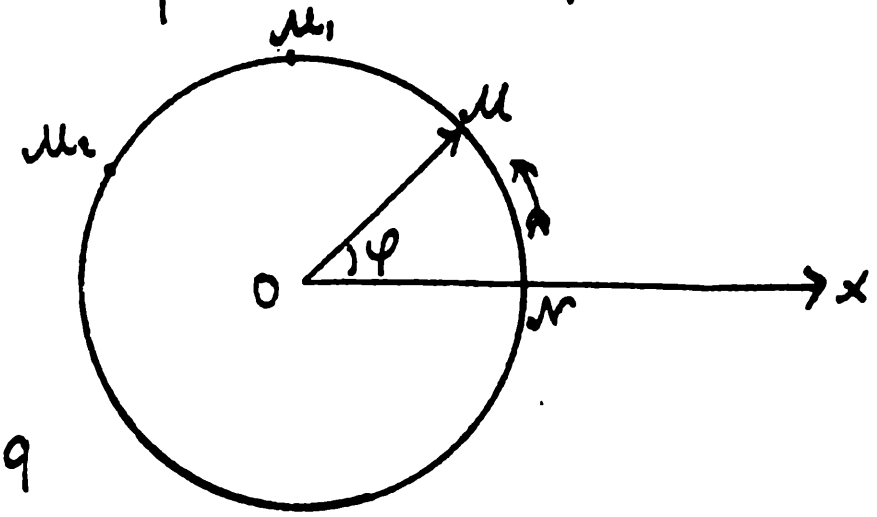


Рис. 69

Але при цьому кожній даній величині φ буде відповідати одна й лише одна величина дуги $\overset{\frown}{NM}$, а тому дані величини ρ і $\angle\varphi$ цілковито визначають положення точки M на площині.

Навпаки, при сталій величині кута φ різним величинам відстані ρ відповідатиме безліч точок, що лежать на прямій OM.

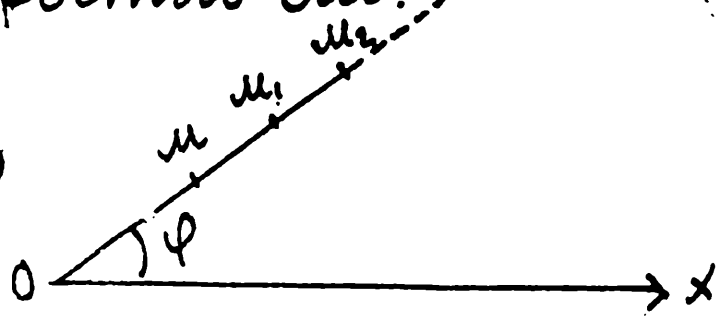


Рис. 70

Але кожній окремій вартості ρ також відповідатиме одно й лише одно положення точки M на простій OM, а тому визначені вартості ρ і φ цілковито визначають положення точки M на площі.

Вісь Ox - носить назву бігункової вісі, точка O - назву бігуна, а відстань OM точки M від бігуна O зветься лучем-вектором точки M. Луч-вектор має додатний напрям від бігуна O до точки M, а кут φ, що зветься фазою, або азімутом точки M, має додатну напрямність зростання проти стрілки годинника.

Довжина луча вектора ρ і величина кута φ (фази) носять назву <u>бігункових значників точки M</u> (ρ, φ)

Перетворення прямокутних координат у бігункові й навпаки.

Проведемо через бігун вісь Y-ів тоді значники точки M будуть: $ON = x$ і $NM = y$.

З прямокутного тригутника

Отже, маємо:

1) $x = \rho \cos\varphi$; $y = \rho \sin\varphi$

2) $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$

$$\left[\sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ і } \cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

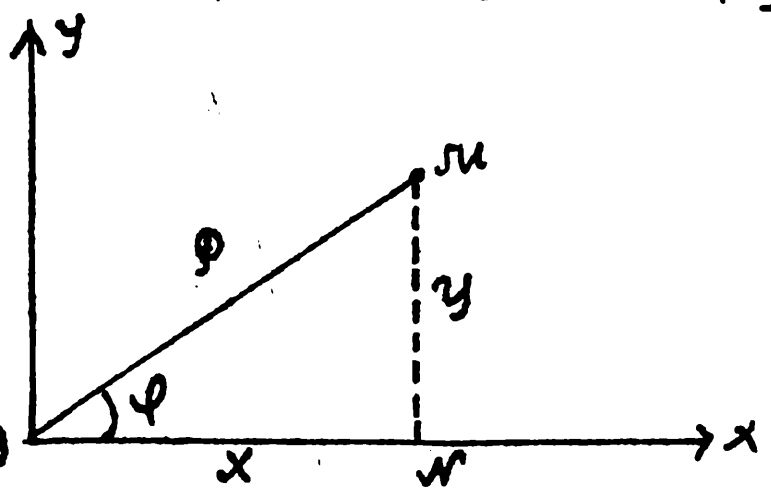


Рис. 7.

Отже, щоб перетворити вирази геометричних величин виражені через прямокутні координати на бігучові, треба підставити вартості:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (47)$$

Навпаки, щоб перетворити вирази геометричних величин виражені через бігучові координати на прямокутні, треба підставити вартості

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \text{----} (48)$$

[Коли у взорах кут φ входить у функціях Sin і Cos, то зручно вживати взорів:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \text{.....(49)}$$

Задачі.

Ч-125. Знайти значники точок: $A(3,4)$; $B(-12,5)$; $C(-4,-3)$ у бігунових координатах.

Ч-126. Знайти значники вершків в прикутника: $A(3,45°)$; $B(5,60°)$ $C(10,135°)$ в прямокутних координатах.

Ч-127. Дано рівнання:

$$x^2+y^2-6x+4y-3=0.$$

Перетворити це рівнання до нових вісей, що мають початком точку $A(3,-2)$ і є рівнобіжні попереднім. [$x^2+y^2=16$]

Ч-128. Який вигляд матиме рівнання простої: $2x+3y=6$, коли вісі координат повернути навколо початку на: 1) 30° 2) 90° 3) 60° 4) -30° 5) -60°.

Ч-129. Який вигляд матиме

рівняння: і) $x^2-y^2=4$ г) $x^2+y^2-6(x+y)=9$ коли вісі координат повернути навколо початку на 45^0?
[$xy=2$; $x^2+y^2-6\sqrt{2}x=9$]

Ч-130. Рівняння і) $x^2+y^2=3x$ г) $x^2-y^2=a^2$ перетворити на бігунові вісі [$\rho=3\cos\varphi$; $\cos 2\varphi=\left(\frac{a}{\rho}\right)^2$]

Ч-131. Бігунові рівняння:
і) $\rho^2\sin 2\varphi=2a^2$ г) $a\cos 2\varphi=\rho^2$.
перетворити на прямокутні вісі? [$xy=a^2$; $x^2+y^2=\sqrt{a(x^2-y^2)}$]

Ч-132. Перетворити в бігунові рівняння: і) $x^2+y^2=a^2$
г) $y=mx$ з) $y=2x$.
[$\rho=a$ (const) - коло; $\operatorname{tg}\varphi=m$ (const), $\operatorname{tg}\varphi=2$]

Розділ II
Коло

§-20. Коло та його рівняння

З геометрії знаємо, що коло є геометричний осередок точок рівновіддалених від центра.

Точку, коли ми не взяли на обводі кола точку $M(x,y)$, що відділяється "її" від центру (точка A) буде завжди однакове ...ме г. Це є основною приг-

метою, що точка M лежить на обводі кола, а тому рівняння, яке встановлює залежність між лучем r і значеннями точки M(x,y), буде рівнянням кола.

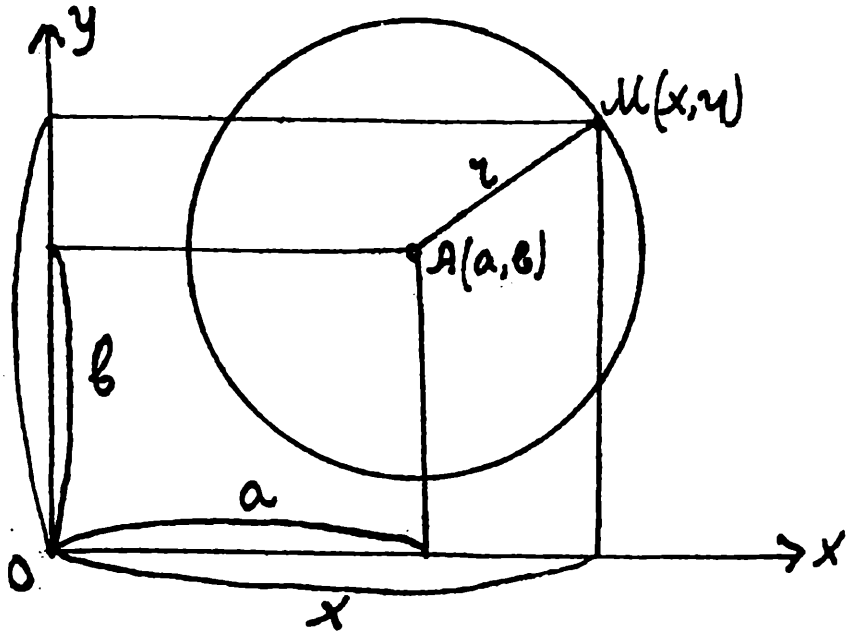


Рис. 72.

Ми знаємо, що квадрат довжини відтинку r рівний сумі квадратів його метів на вісі. а через те:

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2$$

себто: $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$

Виведене рівняння кола:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{.....(50)}$$

носить назву <u>основного рівняння кола</u>.

Для кожної точки, що лежить поза колом її відалення від центру (a, b) буде $r_1 > r$, а тому для неї $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$.

Подібні міркування доводять, що для точки, яка лежить **NO** кругі кола (в середині кола):

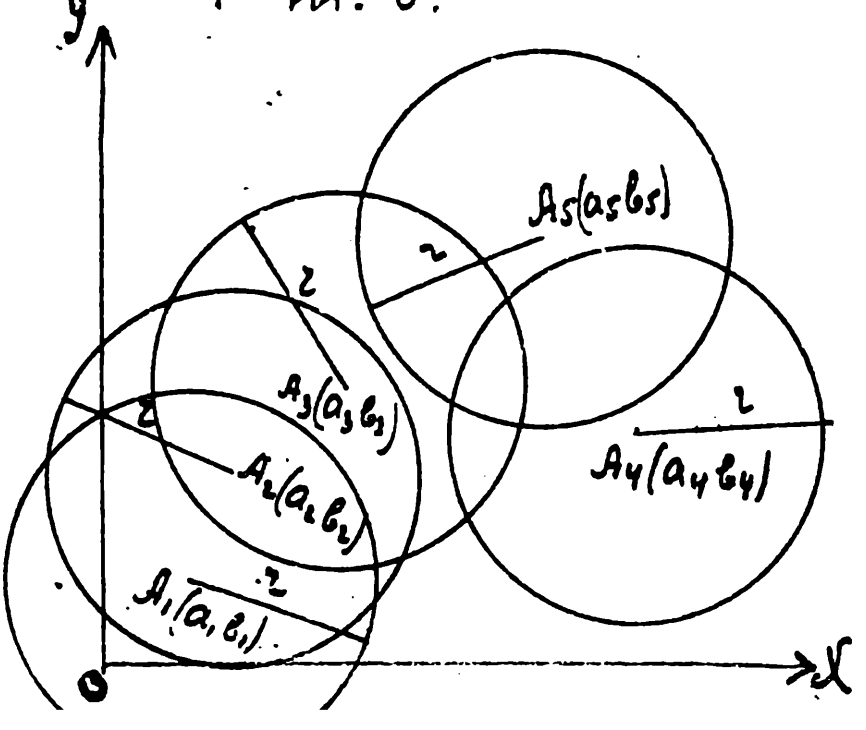
$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$$

Рівняння кола включає в собі три невалежних змінника: значники a і b і луч кола r. Даючи значникам a і b довільні вартости при незмінному r, ми одержимо через рівних між собою кол, з центрами в різних місцях площі знаємо вісей, що визначатиметься рівняннями:

1) $r^2=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2$
2) $r^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2$
3) $r^2=(x-a_3)^2+(y-b_3)^2$

. . . . . .

і т. д.



Навчаємо, якого числа дові́льні вартості при незмінних вартостях значників a і b, ми матимемо через спільноцентрових (концентричних) кол зі спільним центром A(a,b), що визначаються рівняннями:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r_1^2$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r_2^2$$
$$\text{і т. д.}$$

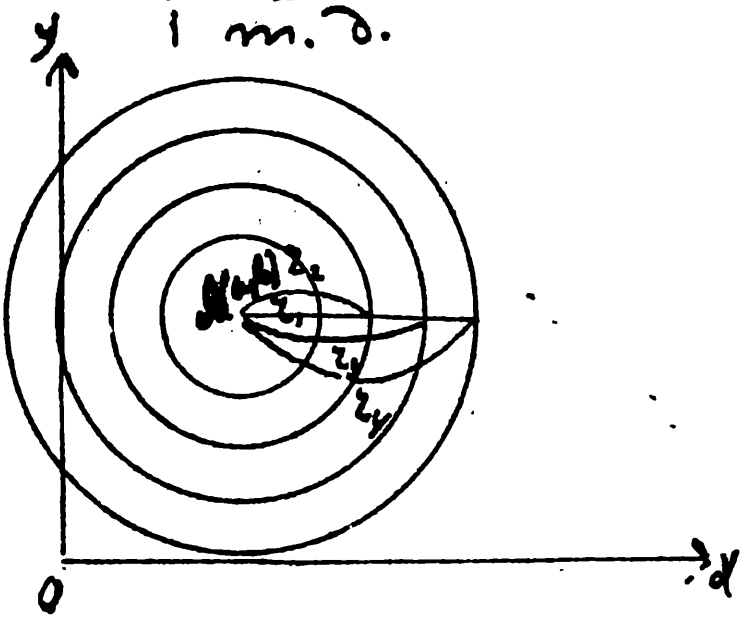


Рис. 74.

Висновок.

Два спільноцентрові кола визначаються рівняннями, що відрізняються лише квадратом значника r.

Аналіза основного рівняння кола.

Проаналізуємо рівняння кола: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Визначимо з цього рівняння по черзі x та y.

$$(y-b)^2 = r^2-(x-a)^2;\ y-b = \pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}$$

$$y = b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}$$

аналогічно:

$$x = a \pm \sqrt{r^2-(y-b)^2}$$

Ці рівності доводять, що кожній окремій вартості x відповідає завжди дві вартості y і, навпаки, кожній вартості y відповідає завжди дві вартості x.

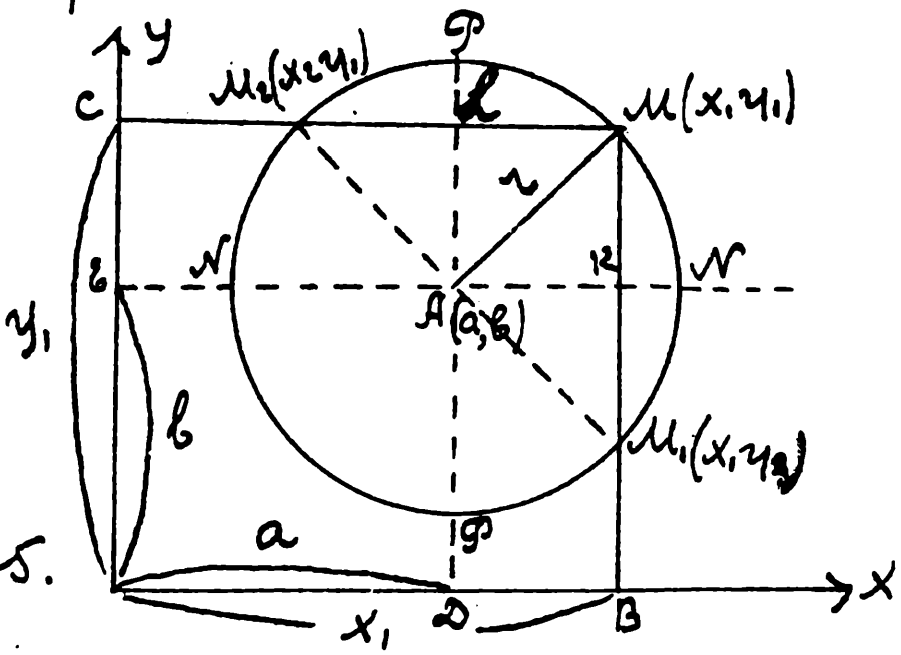


Рис. 75.

Себ-то, коли з якої точки $M(x_1,y_1)$ кола спустимо прямі на вісі, то ці прямі перетинатимуть кожний коло у двох точках: 1) пряма MB – в точках M і M_1, що мають значення: $M(x_1,y_1)$ а $M_1(x_1,y_2)$ 2) пряма MC в точках M і M_2, що мають

Значитиме: $M(x_1, y_1)$ а $M_1(x_2, y_1)$ Усі точки будуть кінцями відповідних хорд: MM_1 і M_1M і будуть положені симетрично зносно середини своїх хорд. Справді: 1) З прямокутних: $\triangle AMK$ і $\triangle AM_1K$, де $AM = AM_1 = r$, $KM = KM_1$ а $AK = x_1 - a$, маємо: $MK = M_1K = \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$, але $b = KB$. Тому:

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2} = KB \pm KM.$$

А це свідчить, що точки M і M_1 лежать симетрично зносно середини хорди K.

Коли ми будемо змінювати вартості x_1 значника точки M, то середина хорди буде посуватися вздовж прямої до усієї хорди, себто вздовж поперечника NN рівнобіжного осі X, а тому відповідні точки перетину кола (кінці хорди) завжди будуть симетрично положені зносно цього поперечника NN рівнобіжного осі X-ів.

Аналогічно з прямокутних $\triangle AdM$ і $\triangle AdM_1$, де $AM = AM_1 = r$; $Ad = y_1 - b$ і $Md = M_1d$, маємо:

$M_2 = \sqrt{r^2-(y-b)^2}$, а точці:

$x = a \pm \sqrt{r^2-(y-b)^2} = C_2 \pm M_2$.

Через міркування подібні до попередніх, ми можемо переконатися, що коли перетнути коло простою рівнобіжною осі x, то точок перетину буде дві M_1 і M_2; ці точки також симетрично знаходяться поперечника кола РР рівнобіжного осі y-ів.

Розглянемо, які найбільші й найменші вартості можуть приймати значення точок, що лежать на колі. Для цього візьмемо виведені вже взори:

$$x = a \pm \sqrt{r^2-(y-b)^2}$$

$$y = b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}$$

Очевидно, що: $(y-b)$ і $(x-a)$ не можуть бути по своїй безмірній (абсолютній) вартості більші r, бо тоді x і y були б уявними величинами (квадрат. корінь з від'ємної величини), себто таких точок на колі не існувало б.

Найбільші й найменші вартості x і y будуть, коли

$(y-b)$ для вартості x, а $(x-a)$ для вартості y будуть нулі.

Тоді: $x = a \pm \sqrt{r^2 - 0} = \underline{a \pm r}$

$y = b \pm \sqrt{r^2 - 0} = \underline{b \pm r}$

Отже x має найбільшу вартість $x_1 = a + r$, найменшу вартість $x_2 = a - r$. Ці вартості одержуються одночасно, коли $y - b = 0$; $y = b$, себто для точок, що лежать на кінцях поперечника MN.

Так само y має найбільшу вартість $y_1 = b + r$ найменшу $y_2 = b - r$. Ці вартості також одержуються одночасно, коли $x - a = 0$; $x = a$, себто для точок, що лежать на кінцях поперечника PP.

Ізоже з себе уявляють рівняння: $x = a + r$; $x = a - r$?

Це, як вже знаємо, є рівняння простих рівнобіжних вісі y-ів, віддалених від неї на $(a+r)$ і на $(a-r)$ Це будуть (Рис 76) прості d_1 і d_2

Так само рівняння $y = b + r$ і $y = b - r$ є прості рівнобіжні вісі x-ів. і віддалені від неї. на $(b+r)$ і ~~на~~ $(b-r)$, себто це бу-

Дуже прості l_3 і l_4.

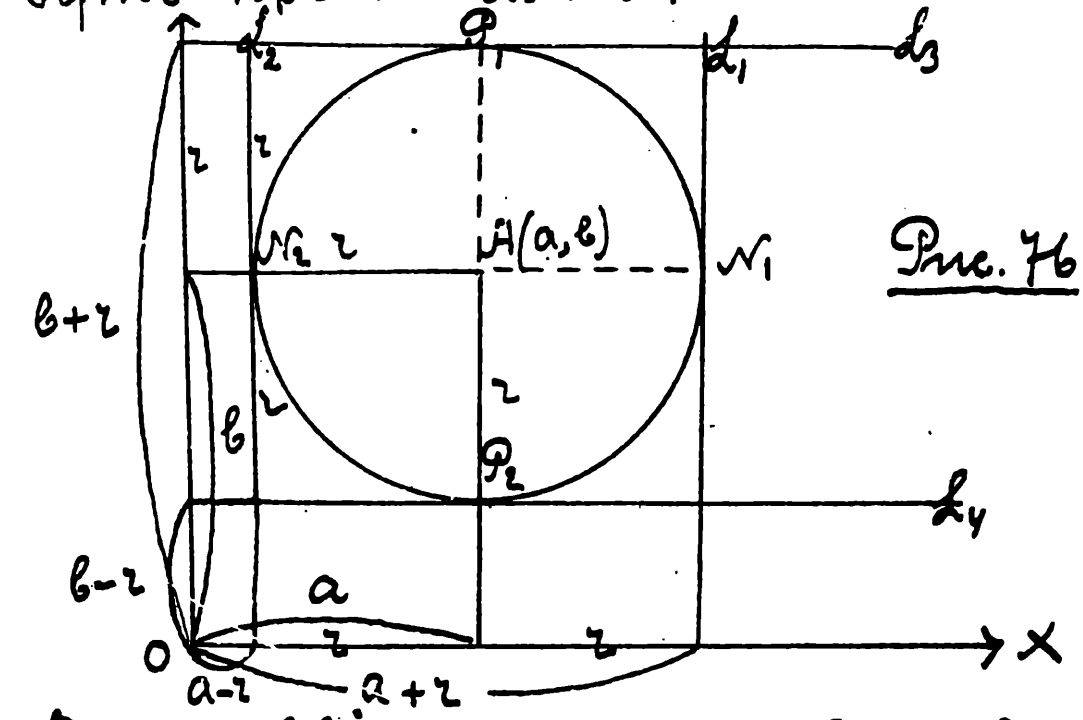


Рис. 76.

Отже бачимо переконуючись, що всі точки кола лежатимуть в полі квадрата, обмеженого цими прямими: l_1 l_2 l_3 і l_4, що є дотичними до кола в точках N_1 N_2 M_1 і M_2 де значення точок кола приймають найбільші й найменші свої вартості.

Наприклад x і y матимуть одну лише вартість (себто подві однакові), тоді коли абсолютні вартості:

$$(y-b)=r \quad \text{і} \quad (x-a)=r.$$

Тоді: $x = a \pm \sqrt{r^2-r^2} = a$

$$y = b \pm \sqrt{r^2-r^2} = b.$$

Але ми вже бачили, що в той час коли $x=a$, то $y=b\pm r$,

а коли $y = b$, то $x = a \pm r$.
Тому значення x і y будуть мати по одній вартості лише у точках дотику до квадрату $d_1\ d_2\ d_3\ d_4$
[Цей самі довідливо й безпосередньо, бо коли:

$$|y-b| = r \text{ і } (x-a) = r, \text{ то}$$

1) $\pm(y-b) = r$, або $y-b = \pm r$; $y = b \pm r$
2) $\pm(x-a) = r$, або $x-a = \pm r$; $x = a \pm r$]

§-21 Центральне рівняння кола.

Розглянемо випадок, коли коло лежатиме своїм центром у початку визначних вісей
Очевидно, що тоді значення центру: $a = 0$, $b = 0$, а тому рівняння матиме вигляд:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

або: $$x^2 + y^2 = r^2 \text{ ------- } (51)$$

Це рівняння можно одержати безпосередньо (рис 77) з прямокутника ОМК, використовуючи теорему Піфагора.

$$OK^2 + KM^2 = OM^2$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

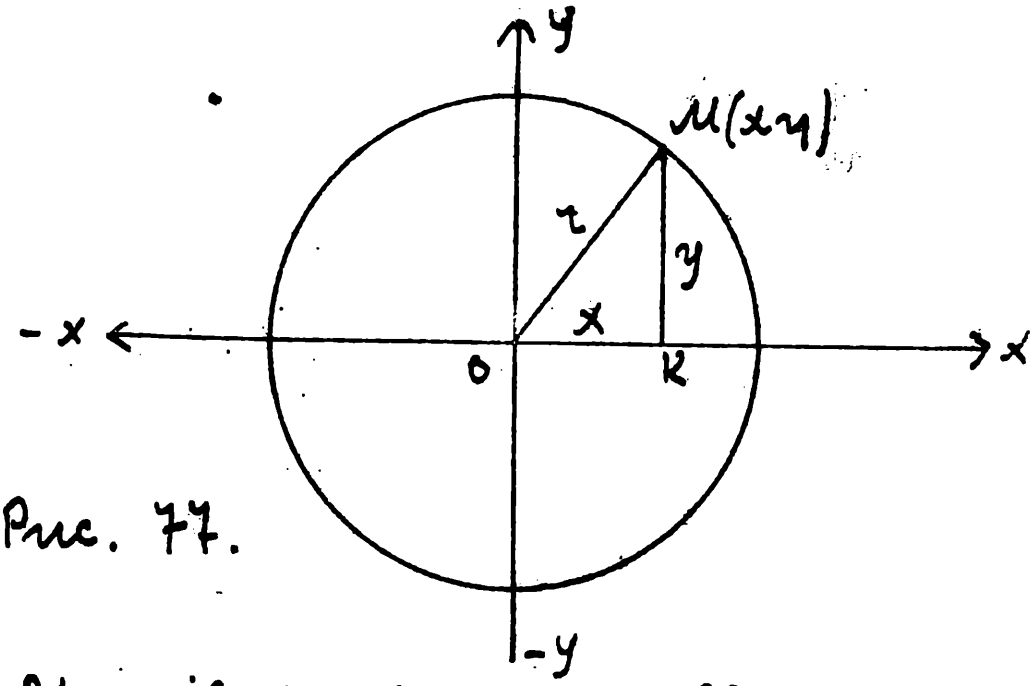


Рис. 77.

Це рівняння носить назву центрального (або центрового) рівняння кола.

[Пропонуємо студентам провести аналіз центрального рівняння подібно аналізу основного]

Розглянені нами дві форми рівняння кола (основне й центральне) – є головними.

Але ми задаємо ще кілька другорядних форм рівняння, що дуже зручні для вживання їх при розв'язанні задач, а саме:

Обводове (вершинове) рівняння.

Це назва має рівняння кола, у якого обвід проходить через початок координат.

1-й випадок.

Припустимо, що центр кола A.

не лежить на жодній з вісей.

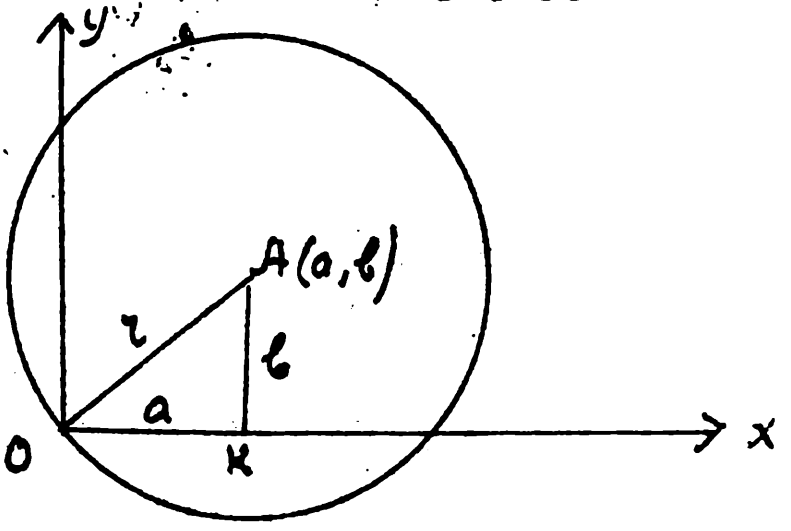


Рис. 78.

Тоді з прямокутника OAK маємо $r^2 = a^2 + b^2$.

Підставляючи вартість r^2 в основне рівняння кола, маємо:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 \text{, або:}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = a^2 + b^2$$

Звідси маємо:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2ax + y^2 - 2by = 0 \\ \text{або: } x(x-2a) + y(y-2b) = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (52)$$

Це рівняння носить назву: Загального обводового рівняння кола.

Коли коло, обвід якого проходить через початок координат (рис 79) має центр, або на вісі X-ів [A(a,0)] або на вісі Y-ів [B(0,b)], то підставляючи в загальне обводове рівняння замість значників центру кола a і b:

У першому випадку значники

$A(a,0)$ маттимемо:

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2o \cdot y = 0$$

або: $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ ..... (53)

Обводове рівняння відносно до вісі x-ів, а у другому випадку, підставляючи значники $B(0,b)$ маттимемо:

$$x^2 - 2ox + y^2 - 2by = 0$$

або: $x^2 - 2by + y^2 = 0$ ..... (54)

Обводове рівняння відносно до вісі y-ів.

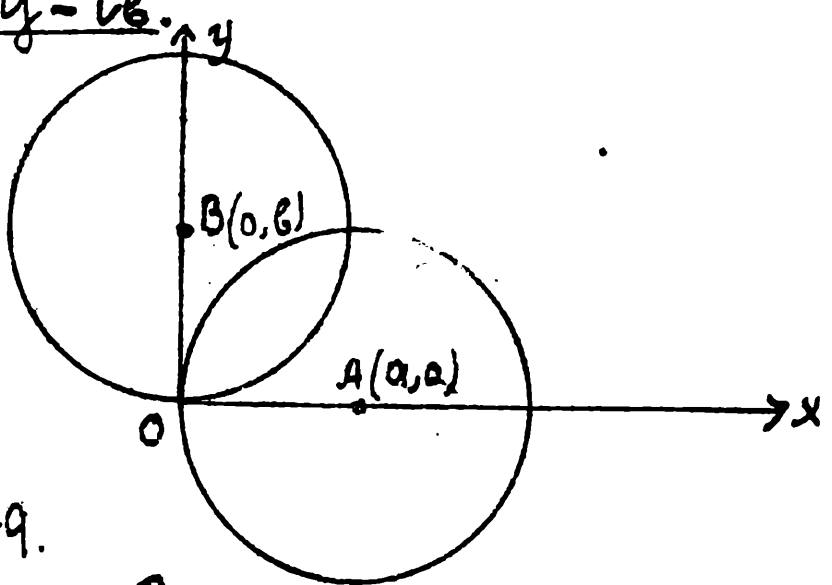


Рис. 79.

Задачі

Ч-133. Накреслити кола, що мають рівняння:

1) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$
2) $x^2 + y^2 = 9$
3) $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$
4) $x^2 - 10x + y^2 = 0$
5) $x^2 - 6y + y^2 = 0.$

Увага: Рівняння 3) є обводове виляду $x^2 - 2ax + y^2 - 2by$, тому центр має значники a і b, а лучеги відбалення A(a,b) до O(0,0). Рівняння 4) і 5) теж обводові і центр цих кол лежить на одній з бісей. Лучі кола обчислюються із сочинників середніх членів.

Ч-134. Написати рівняння кола, що має центр A і луч r, коли: 1) A(0,0); r=4 2) A(-4,0) r=7 3) A(0,5); r=5 4) A(3,4); r=6. 5) A(-4,-6); r=3.

Ч-135. Яке положення зміяно кола $(x-3)^2+(y+4)^2=36$ тоголі: 1) A(-4,-4) 2) B(5,1) 3) C(3,2).

Ч-136. Написати рівняння кола луча r=5, коли центр його: 1) лежить на бісі y-ів і має відбалення від початку бісей: а) y=6 б) y=-5. 2) лежить на бісі x-ів і має відбалення від початку бісей а) x=-4 б) x=3. 3) лежить в точці 6,4.

Ч-137. Написати рівняння кола, що: 1) дотикаються бісі x-ів в точці: 1) x=3 2) x=-5 і має луч r=5

г) дотикається осі y-ів в точці:
1) $y=-2$ 2) $y=2$ і має рад. $r=3$.

г-138. Написати рівняння кола $r=5$, що є дотичним до обох осей рівнобічних (всі 4 випадки)

г-139. Проаналізувати рівняння кола: $x^2+y^2=r$.

г-140. Перетворити в основну форму рівняння кола:

1) $x^2+y^2+4x-8y-16=0$
2) $x^2+y^2-2x-4y-20=0$
3) $x^2+y^2-3y-4=0$.

Увага: треба цими рівняннями дати форму: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Напр: рівняння $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ перетворюються так:

$$(x^2-6x)+(y^2+4y)-12=0$$
$$(x^2-2\cdot3x+9)-9+(y^2+2\cdot2y+4)-4=12$$

або: $(x-3)^2+(y+2)^2=12+4+9=25$

а точн: $(x-3)^2+(y+2)^2=5^2$

Алгебрична форма рівняння кола.

Користуючи основною рівнянню кола дуже легко дати алгебричну форму. Для цього досить перевести зазначені в ньому дії і зробити зведення схожих ме-

нів, напр:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$

Роблячи зведення матимемо:

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0$$

Це і є алгебрична форма рівняння кола.

Щоб дати це більш загальний вигляд помножимо всі члени одержаного рівняння на який небудь довільний числа, напр: на k.

Тоді матимемо:

$$kx^2+ky^2-2akx-2bky+k(a^2+b^2-r^2)=0$$

Припустимо, що виконані дії:

1) Здобутку: $-2.a.k$ буде p, себто: $-2ak=p$

2) Здобутку: $-2.b.k$ буде q, себто: $-2bk=q$

3) суми й здобутку: $k(a^2+b^2-r^2)$ буде S, себто: $k(a^2+b^2-r^2)=S$.

Тоді наше рівняння прийме загальний вигляд:

$$kx^2+ky^2+px+qy+S=0 \quad \ldots\ldots (55)$$

Числовий приклад:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=\frac{25}{4},$$

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4-\frac{25}{4}=0$$

або: $x^2+y^2-2x+4y-\frac{5}{4}=0$

Помноживши все рівняння на

чинника 4 (себто звівши до спільного знаменателя) будемо мати:

$$4x^2+4y^2-8x+16y-5=0$$

Це й буде рівняння кола в загальній алгебричній формі (рівняння другого ступеня)

Тепер поставимо собі питання: при яких умовах алгебричне рівняння другого ступеня, що має загальний вигляд:

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

може бути рівнянням кола? Для цього порівнюємо це рівняння з рівняннями кола, якому ми надали загальну алгебричну форму, себто з рівнянням:

$$Kx^2+Ky^2+px+qy+s=0$$

З цього порівняння ми бачимо, що: 1) $A=K$ і $B=K$ (де K є довільне число) себто $A=B$.

2) В загальній алгебричній формі рівняння кола (Коло) члена, що уявляє здобуток xy – не існує себто $C=0$.

Отже, щоб яке небудь алгебричне рівняння другого ступеня могло бути рівнянням кола необхідно 1) щоб сочин-

<u>мали при других ступінях невідомих були однакові і</u>
<u>2) щоб сочинник при здобутковій невідомих був рівний нулю.</u>
<u>(щоб рівняння не вміщало члена зі здобутковою невідомих)</u>

Доведемо тепер, що алгебричне рівняння другого ступіня, що задовольняє зазначеним умовам завжди є рівнянням кола.

Візьмемо рівняння:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Щоб це рівняння було рівнянням кола, нам необхідно показати, що дане рівняння можемо завжди перетворити до форми основного рівняння кола, що має алгебричну форму:

$$Rx^2 + Ry^2 + px + qy + S = 0$$

Поділивши кожне з цих рівнань на однакового сочинника невідомих у другому ступіню, матимемо:

$$(1)\quad x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

$$(2)\quad x^2 + y^2 + \frac{p}{R}x + \frac{q}{R}y + \frac{S}{R} = 0$$

Отже необхідно, щоб:

$$\frac{D}{A} = \frac{p}{R}\ ;\ \frac{E}{A} = \frac{q}{R}\ \text{ і }\ \frac{F}{A} = \frac{S}{R}.$$

підставляємо вартості p, q і S

$$(3)\begin{cases}\frac{D}{A}=\frac{-2a\cancel{K}}{\cancel{K}}\ ;\ \frac{D}{A}=-2a\\ \frac{E}{A}=\frac{-2b\cancel{K}}{\cancel{K}}=-2b.\\ \frac{F}{A}=\frac{\cancel{K}(a^2+b^2-r^2)}{\cancel{K}}=a^2+b^2-r^2.\end{cases}$$

Очевидно, що рівняння (1) перетвориться в основну форму рівняння кола, коли ми з рівностей (3) зможемо обчислити значення центру кола a і b, а також рад кола r.

Але: $a=-\frac{D}{2A}\ ;\ b=-\frac{E}{2A}$

$$r^2=a^2+b^2-\frac{F}{A}.$$

або підставивши тільки що визначені вартості a і b, маємо:

$$r^2=\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4A^2}-\frac{F}{A}.$$

Звідси:

$$r=\sqrt{\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4A^2}-\frac{F}{A}}=\frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF}.$$

Вартості a і b (а тому й центр кола) існують завжди до дробу: $-\frac{D}{2A}$ і $\frac{E}{2A}$. Є завжди правдиві (не уявні) величини. Щоже торкається вартості r, то вона буде

правдивою (не уявною) лише тоді, коли вираз (дискримінант)

$$D^2 + E^2 - 4AF > 0.$$

Таким чином кожне алгебричне рівняння другого ступеня, що задовольняє умовам:

1) рівності сочинників при других ступенях невідомих і

2) не існуванню члена зі здобутком невідомих, буде тоді рівнянням кола, коли вираз: $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

Але, щоб узагальнити це твердження вважають, що:

1) коли вираз: $D^2 + E^2 - 4AF = 0$, то коло є нульовий луч (себто точка)

2) коли вираз: $D^2 + E^2 - 4AF < 0$, то коло є уявного луча, себто уявне коло.

Таким чином при таких умовних визначеннях можемо твердити, що:

Кожне алгебричне рівняння другого ступеня, що має рівні сочинники при других ступенях невідомих і не вміщує члена зі здобутком невідомих є рівнянням відповідного кола

Приклади:

I. $2x^2+2y^2+6x+10y+9=0$

1) $a=-\frac{D}{2A}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$

2) $b=-\frac{E}{2A}=\frac{-10}{4}=-\frac{5}{2}$.

3) $r=\frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF}=\frac{1}{4}\sqrt{6^2+10^2-4.2.9}=\frac{1}{4}\cdot 8=2$.

Таким чином рівняння (I) обертається в рівняння:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=2^2$$

Приклад II.

Дано рівняння: $x^2+y^2-4x-2y+5=0$

Це є рівняння кола, бо сочинники при x^2 та y^2 є однакові, члена зі здобутком xy не існує.

Подивимося якого роду коло уявлює це рівняння, а для цього розглянемо вираз:

$$D^2+E^2-4AF.$$

$D=-4$; $E=-2$; $F=5$; $A=1$, тоді:

$$16+4-4.1.5=0.$$

Коло є нульового роду (точка)

Знайдемо значення цієї точки:

$$a=\frac{-D}{2A}=-\frac{-4}{2.1}=+2.$$

$$b=-\frac{E}{2A}=-\frac{-2}{2.1}=+1.$$

Таким чином значення точ-

ім центру: $A(2,1)$.

[Рівняння цього кола-точки буде:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=0.$$

Приклад III.

$$x^2+y^2-6x-4y=38.$$

Рівняння задовольняє поставлені умови й точці є рівнянням кола. Розглянемо якого це роду коло?

Вираз: $M=D^2+E^2-4AF=$

$=36+16-4\cdot1\cdot(-38)=-100$; $r=\frac{1}{2A}\sqrt{M}$.

$r=\frac{1}{2}\cdot10i=5i$. Отже $r=5i$.

Коло є уявне з центром:

$a=\frac{-D}{2A}=\frac{6}{2}=3$; $b=-\frac{E}{2A}=\frac{4}{2}=2$.

Рівняння кола:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=(5i)^2$$

або: $$(x-3)^2+(y-2)^2=-25.$$

Будемо називати цю форму алгебричного рівняння кола, що має сочинником при других степенях невідомого одиницю, упорядкованим алгебричним рівнянням кола. Загальний вигляд упорядкованого алгебричного рівняння кола буде: $x^2+y^2+Mx+Ny+P=0$ ...(56)

Таким чином:

$$M=\frac{D}{A}\ ;\ N=\frac{E}{A}\ і\ P=\frac{F}{A}.$$

А через те Зміннимі основного рівняння кола виловлюватимуться через сочинники упорядкованого алгебричного рівняння таки:

$$a=-\frac{D}{2A}=-\frac{M}{2}\ ;\ \text{аналогічно:}$$

$$b=\frac{E}{2A}=-\frac{N}{2}\ ;\ r=\sqrt{\left(-\frac{D}{2A}\right)^2+\left(-\frac{E}{2A}\right)^2-\frac{F}{A}}=$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{M}{2}\right)^2+\left(-\frac{N}{2}\right)^2-P}=\frac{1}{2}\sqrt{M^2+N^2-4P}.$$

[Коло є правдиве, коли $M^2+N^2-4P>0$;
коло є нульового луча, коли $M^2+N^2-4P=0$
і коло є уявне, коли $M^2+N^2-4P<0$]

Отже взори зведення рівняння кола з алгебричної форми до основної є:

$$\left.\begin{aligned} a&=-\frac{M}{2}\\ b&=-\frac{N}{2}\\ r&=\frac{1}{2}\sqrt{M^2+N^2-4P}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (57)$$

Приклад.

Рівняння кола: $x^2+y^2-6x-4y+4=0$.

Тому: $a=-\frac{M}{2}=-\frac{-6}{2}=3$

$$b=-\frac{N}{2}=-\frac{-4}{2}=2.$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{M^2+N^2-4P}=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+4^2-16}=\frac{1}{2}\sqrt{36}=3.$$

Тому: $(x-3)^2+(y-2)^2=9$

Задача 11

Скласти рівняння кола, що проходить через три задані точки: $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_1)$

Розв'язання.

Візьмемо загальне (упорядковане) алгебричне рівняння кола: $x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0$ (А).

Очевидно, що рівняння (А) буде тоді лише рівнянням даного кола, коли ми підберемо такі вартості невідомих (довільних) сочинників M, N і P при яких кола буде підлягати умові проходження через три задані точки. Але, коли коло проходить через три задані точки, то значить їх мусять обертати рівняння цього кола [себто рівняння (А)] у тотожність.

Тому маємо три рівності:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + Mx_1 + Ny_1 + P = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + Mx_2 + Ny_2 + P = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + Mx_3 + Ny_3 + P = 0 \end{aligned}\right\} \cdots (Б)$$

Ці рівності (Б) разом і складають систему трьох рівнань зв'язку трьох невідомих M, N і P,

вартости яких, як ми вже
зазначали й треба визначити.
Ми не будемо розв'язувати
цю систему в загальному ви-
гляді, бо розв'язки дуже складні,
кривдні до запам'ятання й не ма-
ють надної практичної вар-
тости, бо в кожному окремо-
му випадкові цю систему, як
систему першого ступіня дуже
просто й легко розв'язати (при
відповідних зведеннях під час
розв'язання; краще цього розв'я-
зання не більша безпосередня
підставки вартостей значни-
ків у загальні складні взори)
Коли ми визначимо з розв'яза-
ння системи (6) вартости
змінників M, N і P і підстави-
мо їх в рівняння (A), то одер-
жимо алгебричне рівняння
кола, що проходить через три
дані точки. Останнє рівнан-
ня при потребі можемо перет-
ворити в основне.

Приклад.

Скласти рівняння кола, що
прохо-дить через точки: A(-3, 3)

B (3,6) i C (2,-2)

Загальне алгебричне рівняння кола: $x^2+y^2+Mx+Ny+P=0$

Тоді маємо рівності:

$$(-3)^2+3^2+M(-3)+N\cdot 3+P=0$$
$$6^2+6^2+M\cdot 6+N\cdot 6+P=0$$
$$2^2+(-2)^2+M\cdot 2+N(-2)+P=0$$

або:
$$18-3M+3N+P=0$$
$$72+6M+6N+P=0$$
$$8+2M-2N+P=0$$

Відніймши перше рівняння з першого почленно, матимемо:

$$10-5M+5N=0 \text{ або: } M-N=2.$$

Підставляючи в перше рівняння $2(M-N)=4$, матимемо:

$$8+4+P=0 \; ; \; \underline{P=-12}.$$

Тому друге рівняння прийме вигляд:
$$72+6(M+N)-12=0$$
або:
$$M+N=-10$$

Отже:
$$M-N=2 \; ; \; M+N=-10$$
$$2M=-8 \; ; \; M=-4 \; ; \; N=-6.$$

Шукане рівняння кола є:
$$x^2+y^2-4x-6y-12=0$$

Перетворимо в основне рівняння:

$$a=-\frac{M}{2}=2 \; ; \; b=-\frac{N}{2}=3.$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{M^2+N^2-4P}=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+48}=\frac{1}{2}\sqrt{100}=5$$

Отже основне рівняння кола, що проходить через дані точки A, B і C буде:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25.$$

Задачі

7-141. Перетворити в основну форму рівняння кола:

1) $x^2+y^2-6x+4y-3=0$
2) $18x^2+18y^2-12x+18y-11,5=0$
3) $x^2-8x+y^2=0$
4) $4x^2+4y^2-8x+48y+99=0$

7-142. Скласти рівняння кола, що проходить через точки: 1) $A(2,-3)$, $B(5,-1)$ і $C(4,3)$
2) $A(0,0)$, $B(3,-1)$ і $C(8,4)$
3) $K(8,5)$, $L(-6,7)$ і $R(-10,-1)$

7-143. Скласти рівняння кола, що проходить через точку $A(4,2)$ і дотикається до обох осей. Накреслити це коло.

Увага: Найліпше користатися основним рівнянням (знаючи центр $a=7$, $b=7$)

[2 розв'язки. Відп: 1) $x^2+y^2-4(x+y)+4=0$
2) $x^2+y^2-20(x+y)+100=0$]

§-22. Взаємне положення кола й прямої.

Загальний випадок.

Коли ми візьмемо коло й пряму, то остання може бути лише у трьох положеннях відносно цього кола.

1) Перехрещуватиме це коло
2) Дотикатиметься до кола
3) Не перехрещуватиме коло (лежатиме зовні його)

Розглянемо ті прямі, що характеризують кожне з цих положень прямої.

Поведемо через центр даного кола визначені вісі. Тоді рівняння кола буде:

$$x^2+y^2=r^2 \quad \ldots (A)$$

Рівняння кожної прямої є:

$$y=mx+n \quad \ldots (B)$$

Коли ця пряма стикається з колом, то вона мусить мати хоч одну спільну з ним точку M. Значить її точки мусять задовольняти обом рівнянням, а тому рівняння (A) і (B) уявляють систему рівнянь, розв'язавши її ї знаходимо точки

Взявши до системи:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= r^2 \\ y &= mx+n \end{aligned}\right\} \text{----(B)}$$

підставивши в перше рівняння вартість y з другого, матимемо:

$$x^2+m^2x^2+2mnx+n^2=r^2$$

або: $(1+m^2)x^2+2mnx+(n^2-r^2)=0$

А тому:

$$x=\frac{-2mn\pm\sqrt{4m^2n^2-4(1+m^2)(n^2-r^2)}}{2(1+m^2)}$$

$$x=\frac{-mn\pm\sqrt{m^2n^2-n^2-m^2n^2+r^2+m^2r^2}}{1+m^2}$$

або: $$x=\frac{-mn\pm\sqrt{r^2(1+m^2)-n^2}}{1+m^2} \quad \text{----(58)}$$

Значення y одержуємо звичайного підставкою вартости x у визначення: $y=mx+n$.

Досліджуємо одержаний розв'язок x. Вираз (дискримінант): $D=r^2(+m^2)-n^2$ можемо перетворити так: $m=\operatorname{tg}\alpha$ (тангенс кута спаду простої), тому: $r^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)-n^2$, або $r^2\sec^2\alpha-n^2$, а звідси: $\frac{r^2}{\cos^2\alpha}-n^2$, отже:

$$D=r^2(1+m^2)-n^2=\frac{r^2}{\cos^2\alpha}-n^2$$

і Коли $D>0$, то x, а разом і значення y, мають по дві вартости,

себто проста перехрещує коло в двох точках і є його січною

2) Коли $D=0$, то x, а разом і значник y, мають по одній вартості, себто проста є дотичною кола.

3) Коли $D<0$, то значник x, а разом і y, не мають жадної правдивої (неуявної) вартости, а тому проста не має спільних точок з колом; вона проходить поза колом (лінія до кола)

Уявимо це геометрично й для цього дамо нерівностями:

$$D=\frac{r^2}{\cos^2\alpha}-n^2 \gtreqless 0$$

Другий вигляд, а саме:

$$\frac{r^2}{\cos^2\alpha} \gtreqless n^2, \text{ звідки: } \frac{r}{\cos\alpha} \gtreqless n$$

або: $n\cos\alpha \leqslant r$.

Далі обчислимо вартість зображуючу: $n\cos\alpha$

З прикладника КВО (рис 80) ми маємо: $d=n\cos\alpha$

Таким чином вираз $n\cos\alpha$ є відстанню простої $y=mx+n$ від центру кола, і тому:

1) Коли відстань простої (напр d_1)

від центру кола: $\rho(d) < r$, або: $d < r$, то пряма є *січною* кола (має дві точки перехрестя з колом M_1 та M_2)

2) Коли відстань прямої (напр d_2) від центру кола: $\rho(d) = r$, або: $d = r$, то пряма є *дотичною* кола (має одну точку перехрестя M)

3) Коли відстань прямої (напр: d_3) від центру кола: $\rho(d) > r$ або $d > r$, то пряма є *лінією без* кола, (себто немає жодної спільної точки з колом)

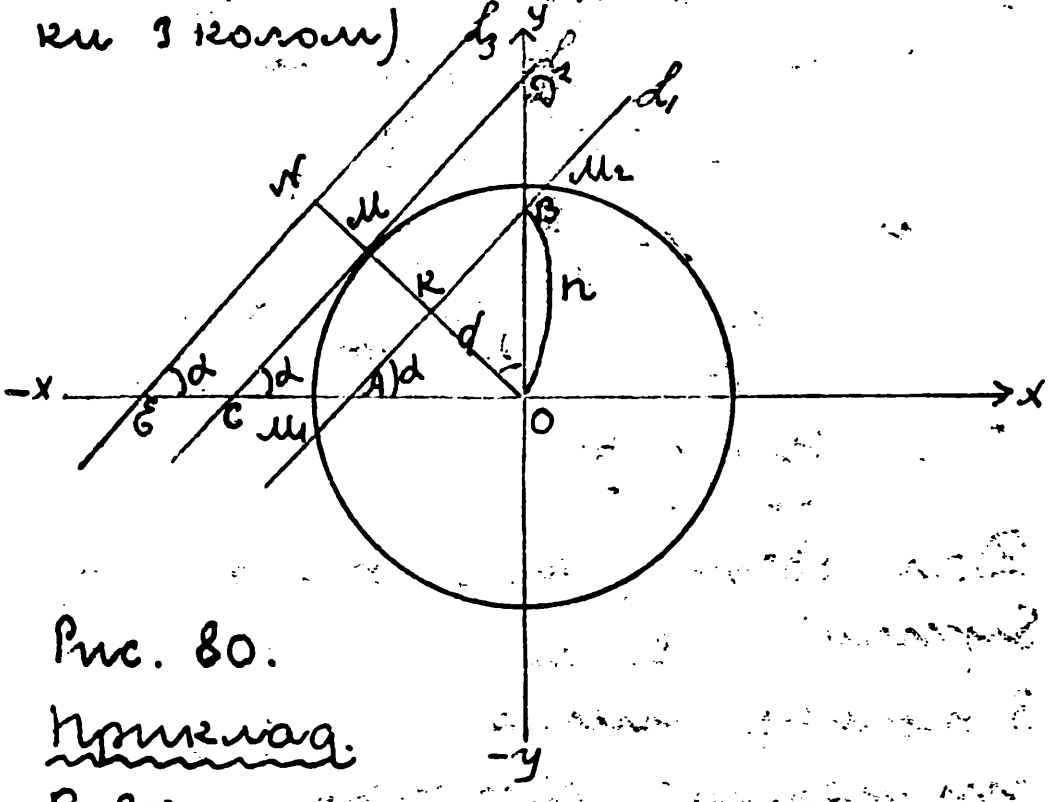


Рис. 80.

Приклад.

В якому положенні відносно кола $x^2+y^2=9$ знаходиться пряма: $y=x+a$?

Очевидно, що $\operatorname{tg}\alpha = 1$, а тому $\alpha = 45°$

Звідси: $d = \rho(d) = a\cos 45° = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Отже, коли:

1) $\frac{a\sqrt{2}}{2} < 3$ $(r=3)$ або: $a\sqrt{2} < 6$, то

проста є січною кола;
2) коли $a\sqrt{2} = 6$, то проста є дотичною;
3) коли $a\sqrt{2} > 6$, то проста є лише поза кола.

Висловимо це ще інакше:
коли $a = 3\sqrt{2}$, то $a\sqrt{2} = 6$

Маємо таке:
1) Для вартостей a менших $a = 3\sqrt{2}$, проста $y = x + a$ буде січною кола;
2) для вартостей a більших $a = 3\sqrt{2}$, проста $y = x + a$ буде лише поза кола, і навпаки:
3) Коли вартість $a = 3\sqrt{2}$, то проста $y = x + a$ є дотичною до кола $x^2 + y^2 = 9$.

Задача

Обчислити значення середньої величини і написати рівняння геометричного осередку середин рівнобіжних хорд.

Припустимо, що центр кола в початку осей, тоді рівняння його буде: $x^2 + y^2 = r^2$.

Коли яка небудь проста: $y = mx + n$ є січною цього кола, то значення перерізів її з колом будемо розв'язувати рівняння:

$$(1+m^2)x^2+2mnx+(n^2-r^2)=0$$

(це рівняння, як ми бачили, одержується підстановкою значення y з рівняння прямої у рівняння кола)

Це рівняння може мати, це такий вигляд:

$$x^2+\frac{2mn}{1+m^2}x+\frac{n^2-r^2}{1+m^2}=0$$

З властивості розв'язків квадратового рівняння, маємо:

$$x_1+x_2=-\frac{2mn}{1+m^2}$$

x_1 і x_2 є значення (відтинкові) точок перехрещення прямої $y=mx+n$ з колом, себто є відтинковими кінців хорди.

Але ми знаємо, що значення середини відтинка є середнє арифметичне значень його кінців, а тому відтинкова x_0 середини хорди буде рівна:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{або} \quad x_0=-\frac{mn}{1+m^2}$$

Обчисливши ординати хорди й для цього підставивши значення x_1 і x_2 в рівняння прямої, матимемо: $y_1=mx_1+n$

$$y_2=mx_2+n$$

Через те ряднa середніх ординат n, буде:

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{m(x_1 + x_2) + 2n}{2}, \text{ або}$$

підставивши вартість $x_1 + x_2$, матимемо:

$$y_0 = \frac{m \cdot \left(-\frac{2mn}{1+m^2}\right) + 2n}{2}$$

після множення й скорочення на 2 матимемо:

$$y_0 = \frac{-m^2 n + n + m^2 n}{1+m^2} = \frac{n}{1+m^2}$$

Щоб скласти рівняння геометричного осередку середин рівнобіжних хорд, звернемо увагу, що у визначення значення середніх ординат:

$$x_0 = -\frac{mn}{1+m^2} \; ; \; y_0 = \frac{n}{1+m^2} \quad \ldots (A)$$

входить змінних n, який є приблизною приналежності точки $(x_0 y_0)$ до даної лінії хорд, бо змінюючи вартости n, ми будемо одержувати все нові й нові хорди (усі хорди рівнобіжні, бо однакового кута спаду $\alpha = \operatorname{arctg} m$).

Отже знаходячи середини цих хорд будуть відповідно кожний раз інші вартости x_0 й y_0.

Коли ми з рівностей (A) виключимо змінних n, то одержимо рівняння, що буде зв'язувати функціонально значення x_0 і y_0 середин рівнобіжних хорд незалежно від їх положення. А це й буде потрібним нам геометричним осередком.

З другої рівності (A) маємо:

$n = y_0(1+m^2)$, а підставивши цю вартість змінного n у перше рівняння, одержимо:

$$x_0 = -\frac{m \cdot y_0(1+m^2)}{1+m^2} \quad \text{або} \quad y_0 = -\frac{1}{m}x_0$$

У даному разі значення x_0 і y_0 стають змінними величинами (рівняння шуканої точки) і тому ми надамо їм звичне означення для змінних величин через x і y. Тоді рівняння геометричного осередку середин рівнобіжних хорд буде мати вигляд:

$$y = -\frac{1}{m}x.$$

Ми бачимо, що цей геометричний осередок уявляє з себе:

1) <u>просту</u> (бо складене рівняння першого степеня в канонічній формі)

2) це є прямі до тятиви через її середину (бо кутовий коефіцієнт знайденого рівняння є величиною оберненою і з протилежним знаком загального рівняння тятиви $y = mx+n$)

3) цей прямі проходять через початок визначених вісей (бо рівняння не має вільного члену), а коли в початку вісей лежить і центр кола, то цей осередок є перпендикуляром кола прямовісним до рівнобіжних тятив.

Задачі.

7-144. Обчислити довжину тятиви кола $x^2+y^2=100$, коли значення її середини $A(1,-1)$

(Вказівка: скористатися взорами коло значників середини тятиви звідки обчислюємо $m=1, n=-2$ рівняння тятиви $y=x-2$. Далі знаходимо точки перехрещення і самі відтинок тятиви)

7-145. Обчислити довжину тятиви, що має рівняння: $x-2y+2=0$ і належить до кола мучи $\sqrt{5}$ і з центром $3,1$)

[відп: $1\sqrt{5}$]

Ч-146. Обчислити довжину хорди перетину:
1) кола: $x^2+y^2=25$ і прямої: $5x-2y-7=0$
2) " : $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ " : $3x^2+4y=12$.

Ч-147. Обчислити відстань на якій перетинає коло рівняння: $x^2+y^2-5x-7y+6=0$?
(Увага: взяти по черзі $x=0$; $y=0$)
[Відп: $P_x=x_2-x_1=1$; $P_y=y_2-y_1=5$]

§-23. Дотична до кола

I Рівняння дотичної до кола проведеної через задану точку на обводі його.

Припустимо, що дане коло має центр в початку вісей, й тому його рівняння: $x^2+y^2=r^2$ ... (A)
Значимо точки на обводі кола, через яку треба повести дотичну є $M(x_1,y_1)$. Візьмемо загальне рівняння простої в канонічній формі: $y=mx+n$ ... (B)
Очевидно, що це рівняння буде рівнянням нашої дотичної лише тоді, коли ми визначимо змінники m і n так, щоб рівняння (B) підлягало умовам дотичної.

Коли ми розв'язали рівняння (A) і (B) як систему, то одержали (як це було доведено у попередньому §):

$$x = \frac{-mn \pm \sqrt{r^2(1+m^2)-n^2}}{1+m^2}$$

Ми вже довели, що пряма $y = mx+n$ буде дотичною в тому разі, коли виразник (дискримінант)

$$\mathcal{D} = r^2(1+m^2)-n^2 = 0.$$

Тому прирівнявши $\sqrt{r^2(1+m^2)-n^2}$ нулю, ми одержимо відповідну точці дотику, себто x_1, точку M.

$$x_1 = -\frac{mn}{1+m^2}$$

Підставивши вартість x_1 у рівняння: $y = mx+n$, одержимо:

$$y_1 = -\frac{m^2n}{1+m^2} + n = \frac{n}{1+m^2}$$

Коли ми будемо ці визначення x_1 і y_1 вважати як систему рівнянь знайдемо з'язків m і n, то розв'язавши її ми й знайдемо потрібні вартості m і n, що відповідатимуть рівнянню нашої дотичної.

З другого рівняння: $n = y_1(1+m^2)$

А підставивши в перше рівняння матимемо:

$$x_1 = -\frac{m \cdot y_1(1+m^2)}{1+m^2} \quad \text{або:} \quad x_1 = -my_1$$

Звідки: $m = -\frac{x_1}{y_1}$

Далі: $n = y_1(1+m^2) = y_1\left(1+\frac{x_1^2}{y_1^2}\right) = \frac{y_1(y_1^2+x_1^2)}{y_1^2}$

але $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, бо точка лежить на колі, а тому:

$$n = \frac{r^2}{y_1}$$

Підставляючи в рівняння (B) знайдені вартості змінних m і n одержимо рівняння дотичної, що проходить через задану точку на колі; а саме:

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{r^2}{y_1}, \text{ або: } yy_1 = -xx_1 + r^2$$

або:

$$xx_1 + yy_1 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots (59)$$

Мисленний спосіб написання рівняння дотичної, що проходить через задану точку $M(x_1, y_1)$ кола, але висловлене рівнянням в центровій формі є такий:

Вписано в рівняння кола квадрати невідомих, як здобутки:

$$x \cdot x + y \cdot y = r^2$$

і один з чинників в кожного здобутка замінюємо на відповідний значник точки M.

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = r^2$$

Припустимо тепер, що рівняння кола є дане в основній формі:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \ldots\ldots (A)$$

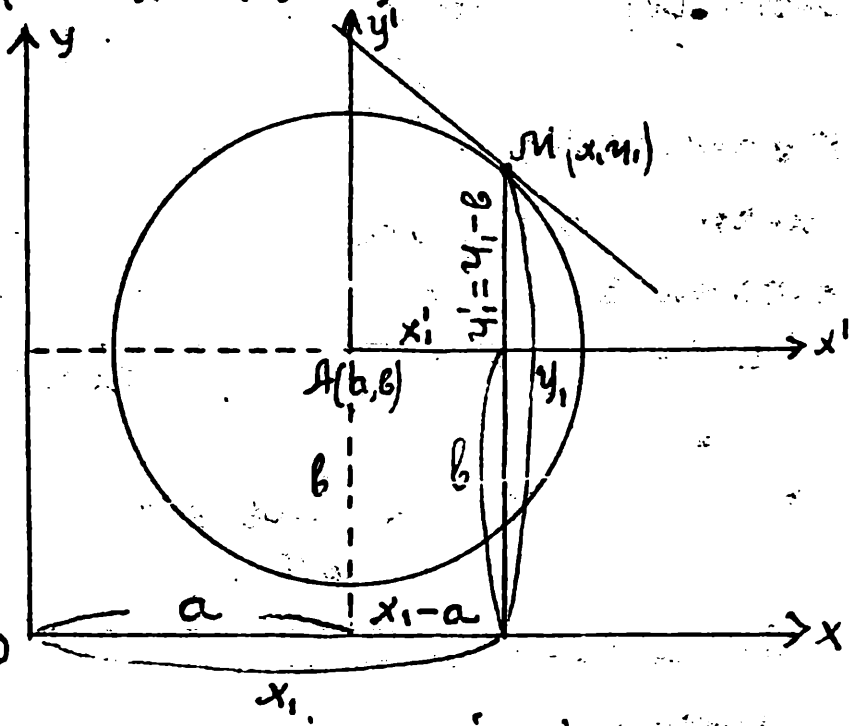


Рис. 81

Візьмемо нові полярні координатні вісі $x'y'$, що мають початок в центрі кола $A(a,b)$ і є рівнобіжні даним вісям.

Далі, як нам відомо, взори перетворення координат будуть:

$$x=x'+a\ ;\ y=y'+b.$$

Коли ми перетворимо рівняння даного кола до нових координат, то матимемо:

$$(x'+a-a)^2+(y'+b-b)^2=r^2$$

або: $$x'^2+y'^2=r^2 \quad \ldots\ldots (B)$$

Означимо значники точки M в нових координатах через x_1', y_1' (де очевидно: $x_1'=x_1-a$, $y_1'=y_1-b$)

Рівняння (B) буде центрованою формою рівняння кола, а тому рівняння дотичної, поведеної до нього через точку $M(x_1', y_1')$ буде:

$$x'x_1' + y'y_1' = r^2$$

Перейдемо тепер назад відносно старих осей (для чого підставляємо $x' = x - a$; $y' = y - b$; $x_1' = x_1 - a$; $y_1' = y_1 - b$) і одержимо назад:

попереднє основне рівняння кола:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

і рівняння дотичної до нього в точці $M(x_1, y_1)$:

$$(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2 \quad \ldots (60)$$

Спосіб творення рівняння дотичної до кола, висловленого в основній формі, як ми бачимо, однаковий до попереднього.

Пишемо в рівнянню кола квадратові ступені двочленів, що містять в собі невідомі, як здобутки: напр. рівняння кола: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, пишемо:

$$(x-a)(x-a) + (y-b)(y-b) = r^2$$

і в одному з чинників кожного здобутка заміняємо ліві члени

на відповідній значній точці M.

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$$

Примітка.

Це рівняння дотичної можна було вивести безпосередньо розв'язанням системи рівнянь:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \quad (\text{I})$$

і прямої: $y=mx+n$ .. (II)

і обчисленням значників m і n.

Подамо цей спосіб розв'язання:

Перетворимо рівняння $y=mx+n$ так: віднімемо від обох частин рівності по $(b+am)$, тоді рівняння не порушиться і ми матимемо:

$$y-b-am=xm+n-b-am$$

$$(y-b)-am=m(x-a)+n-b, \text{ або:}$$

$$y-b=m(x-a)+(n+am-b)$$

означимо многочлен $(n+am-b)$ через p. Тоді рівняння прямої прийме вигляд:

$$y-b=m(x-a)+p \quad \ldots(\text{III})$$

В рівняння (I) і (III) введемо нові змінні:

$$(x-a)=z \; ; (y-b)=u$$

і тоді одержимо систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} z^2+u^2&=r^2 \\ u&=mz+p \end{aligned}\right\} \ldots(\text{IV})$$

Це є система аналогічна центровій, яку ми розв'язали, а тому по аналогії б-ри:

$$z_1 = -\frac{mp}{1+m^2} \quad u_1 = \frac{p}{1+m^2}$$

[де: $z_1 = (x_1 - a)$; $u_1 = (y_1 - b)$]

Далі:

$$m = -\frac{z}{u_1} \; ; \; p = \frac{z^2}{u_1}$$

Знайдені вартості підставляємо в рівняння прямої: $u = mz + p$ і одержимо рівняння дотичної:

$$u = -\frac{z_1}{u_1} z + \frac{z^2}{u_1}$$

або: $uu_1 = -zz + z^2$

або: $\underline{uu_1 + zz_1 = z^2}$

Замінюючи поточні змінні через їх вартості ($z = x - a$; $u = y - b$; $z_1 = x_1 - a$; $u_1 = y_1 - b$) маємо:

$$\underline{(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = z^2}$$

§-24. Прямова або нормаль

Прямовою, або нормаллю зветься проста, що проходить через точку дотику прямово до дотичної. Щоб написати рівняння прямової (нормалі) для кола відносно центра до точки x_1, y_1 кола від-

Зверніть увагу, що нормаль і дотична є взаємно прямі й тому кутові коефіцієнти їх є взаємно зворотні величини, протилежні своїм знаком.

Коли точка дотику є $M(x_1, y_1)$, то рівняння кожної прямої, що проходить через цю точку:

$$(y - y_1) = m_1(x - x_1)$$

З довідки рівняння дотичної ми знаємо, що її кутовий коефіцієнт $m = -\frac{x_1}{y_1}$, тому:

$$m_1 = -\frac{1}{m} = \frac{y_1}{x_1}$$

Отже рівняння прямої (нормалі) в точці $M(x_1, y_1)$ кола відносно центрального до початку осей (рівняння: $x^2 + y^2 = r^2$) буде:

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1), \text{ або:}$$

$$yx_1 + y_1x_1 = y_1x - y_1x_1$$

або $$\underline{xy_1 = x_1y} \quad \ldots\ldots\ldots (61)$$

Цю рівняння можна ще в такій формі:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} \quad \ldots\ldots\ldots (62)$$

Рівняння нормалі для кола, відносного центром до початку осей уявляє рівність відношень змінних рівняння до відповідних значників точки дотику: $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$

Коли рівняння кола дається в основній формі: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ то, як довели, кутовий змінник дотичної $m = -\frac{x_1-a}{y_1-b}$.

Тому змінник m_1 рівняння нормалі буде:

$$m_1 = \frac{-1}{m} = \frac{y_1-b}{x_1-a}$$

Тоді рівняння нормалі матиме вигляд:

$$(y-y_1) = \frac{y_1-b}{x_1-a}(x-x_1)$$

або: $x_1y - ay - x_1y_1 + ay_1 = xy_1 - x_1y_1 - bx + bx_1$

Додаючи до обох частин здобутого ab і групуючи члени рівняння такими чином:

$$x_1y - ay - bx_1 + ab = xy_1 - bx - ay_1 + ab$$

$$y(x_1-a) - b(x_1-a) = x(y_1-\cdot) - a(y_1-b)$$

$$(x_1-a)(y-b) = (x-a)(y_1-b) \quad \ldots\ldots (63)$$

Цьому рівнянню надають вигляд (рівність пропорції)

$$\frac{x-a}{x_1-a} = \frac{y-b}{y_1-b} \quad \ldots\ldots\ldots (64)$$

Висновок.

Нормаль кола є пучок його (проходить через центр кола)

В цьому твердженні можна переконатися. Звичайно ні ставлячи в рівняння значників центру кола. Справді:

1) В першому випадку центр кола лежить в початку вісей, себто його значники (0,0). Підставляючи їх в рівняння $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$, маємо:

$$\frac{0}{x_1} = \frac{0}{y_1} \quad \text{або} \quad 0 = 0 \quad (\text{бо } x_1 \neq 0;\ y_1 \neq 0)$$

2) В другому випадку, значники центр кола (a, b) тому підставляючи їх в рівняння нормалі, маємо:

$$\frac{a-a}{x_1-a} = \frac{b-b}{y_1-b} \quad \text{або} \quad 0 = 0.$$

(бо ніколи ні x_1 не може бути рівним a, ні y_1 - рівним b, себто $x_1 \neq a$; $y_1 \neq b$)

§-25. Визначення рівняння дотичної до кола поведеної з точки поза колом.

Розглянемо, якими чином написати рівняння дотичної, що проходить через задану точку поза

колом. Припустимо, що центр кола відносно до початку осей, тоді його рівняння буде:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots\ldots (\text{I})$$

Хай значники заданої точки поза колом $N(x_0 y_0)$.

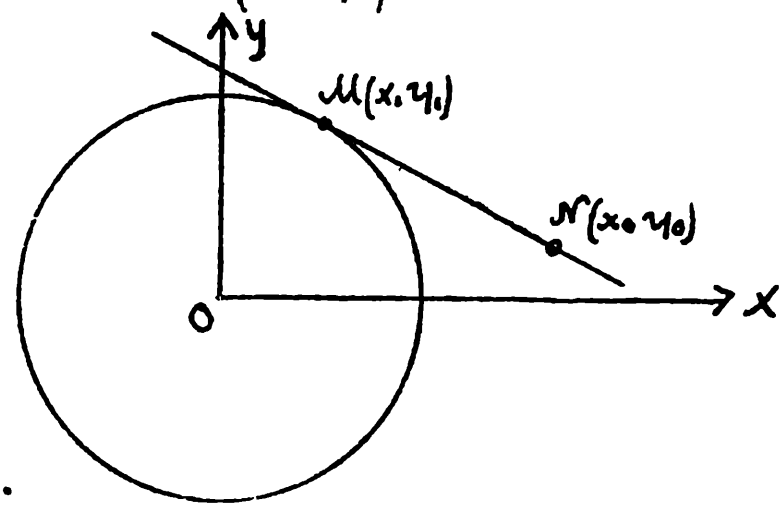


Рис. 82.

Очевидно, щоб ми могли написати рівняння дотичної, користуючися вже доведеним способом, необхідно знайти значники точки $M(x_1 y_1)$ дотику її до кола.

Будемо тимчасово вважати точку M за задану. Тоді рівняння дотичної, що проходить через точку M, буде:

$$xx_1 + yy_1 = r^2 \quad \ldots (\text{II})$$

Але ця дотична мусить проходити й через точку N, а тому її значники мусять задовольняти рівняння (II).

Отже: $x_0x_1 + y_0y_1 = r^2$ ....(III)

Коли точку $M(x_1, y_1)$ ми вважали за задану на обводі кола, то значення її мусять задовольняти і рівняння (I), тому:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \text{ ..... IV}$$

Але ми лише тимчасово припускали, що точка $M(x_1, y_1)$ є задана.

В дійсності це є невідома нам змінна величина, а тому рівності (III) і (IV) є лише система рівнань з двома невідомих x_1 і y_1. Система двох рівнань цілковито визначає два невідомих, що входять в її рівняння, а тому розв'язавши систему рівнань:

$$\begin{cases} x_0x_1 + y_0y_1 = r^2 \\ x_1^2 + y_1^2 = r^2 \end{cases}$$

Ми визначимо значення невідомої точки дотику $M(x_1, y_1)$

Розв'яжемо систему:

$$y_1 = \frac{r^2 - x_0x_1}{y_0}$$

$$x_1^2 + \frac{r^4 - 2r^2x_0x_1 + x_0^2x_1^2}{y_0^2} = r^2$$

$$y_0^2x_1^2 + r^4 - 2r^2x_0x_1 + x_0^2y_1^2 = r^2y_0^2$$

$$x_1^2(x_0^2 + y_0^2) - 2r^2x_0x_1 + (r^4 - r^2y_0^2) = 0$$

$$x_1 = \frac{r^2 x_0 \pm \sqrt{r^4 x_0^2 - (r^4 - r^2 y_0^2)(x_0^2 + y_0^2)}}{x_0^2 + y_0^2}$$

(після скорочення на 2)

Після перемноження двочленів, зведення й виводу за корінь ry_0, матимемо:

$$x_1 = \frac{r^2 x_0 + ry_0\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - r^2}}{x_0^2 + y_0^2}$$

Проаналізуємо розв'язок x_1.

Характер розв'язку залежить від вартості виразника рівняння (дискримінанта)

$$D = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

1) Коли $D > 0$, себто $x_0^2 + y_0^2 > r^2$, то розв'язків два, себто існує дві точки дотику.

2) Коли $D = 0$, себто $x_0^2 + y_0^2 = r^2$, то розв'язок один, себто існує лише одна точка дотику.

3) Коли $D < 0$, себто $x_0^2 + y_0^2 < r^2$, то розв'язки уявні, себто точок дотику немає.

Уявність це в геометричній інтерпретації:

Досліджуємо різницю $(x_0^2 + y_0^2 - r^2)$

Розглянемо прямокутник OMK (рис 83) Він є прямокутний

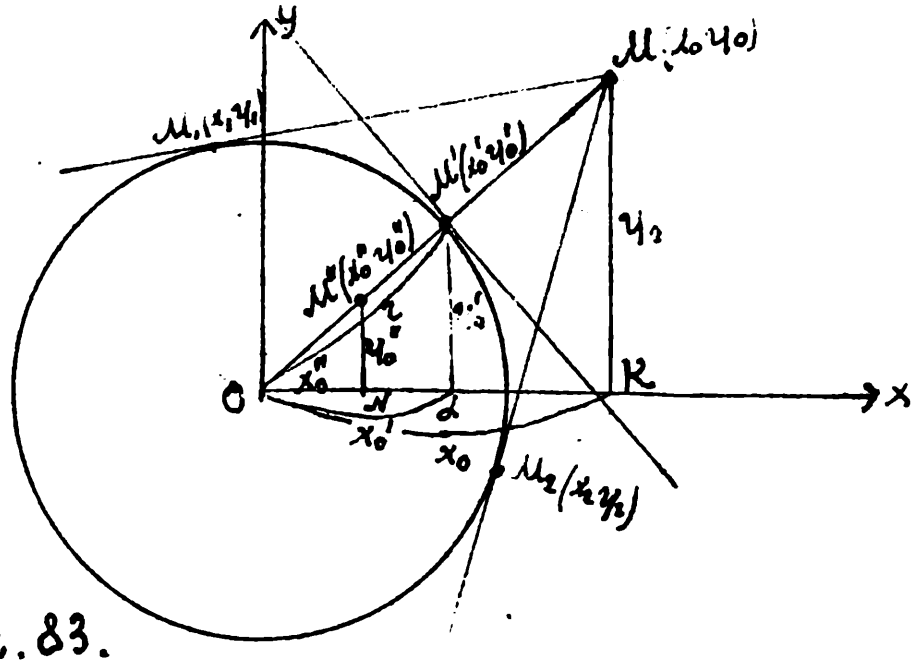


Рис. 83.

а тому по теоремі Піфагора, маємо: $x_0^2 + y_0^2 = OM^2$.

Але $OM = r + d$, де d є відстань відрахування точки M від обводу кола. Тому: $x_0^2 + y_0^2 = (r+d)^2$.

Коли точка M лежить поза колом, то відстань d є завжди додатна величина (більша нуля), а тому $(r+d)^2 > r^2$.

Через те завжди:

$$\underline{x_0 + y_0 > r^2}.$$

Таким чином, коли точка M лежить поза колом, то $x_0 + y_0 > r^2$, себто $D > 0$ і тоді через точку M можно провести дві дотичних до кола.

[Тобто дотичну дві: $M(x_1 y_1)$ і $M_2(x_2 y_2)$]

Будемо наближати точку M до кола, тоді відстань d

буде зменшуватися, але буде лишатися додатним і тільки на обводі обернеться в нуль і коли точка лежить на обводі кола то $x_0^2+y_0^2=r^2$ (що можно перевірити з Δ OM'A) себто $D=0$. Ми бачимо, що через точку, що лежить на обводі кола можно повести лише одну дотичну до кола (x_1 має один розв'язок $y_1=x_0'$; $y_1=y_0'$)

Нарешті, коли точка M наближується до центру кола, перейде через обвід його й буде лежати на кругі, то тоді відділення d стає від'ємним.

[З прямокутника OM"N маємо: $x_0''^2+y_0''^2=(r-M''M')^2$, себто $x_0''^2+y_0''^2<r^2$]

Тоді $D<0$ і точок дотику не має і, дійсно, з точок, що лежать на кругі повести дотичних до кола не можно.

<u>З відси витикає Загальне правило складання рівняння дотичної до кола.</u>

Коли дано рівняння кола і точка (значки "ї"), то передтим, як складати рівняння дотич-

ної, треба зробити аналізу: порівняти суму квадратів значників точки з квадратом луча кола і цим з'ясувати де лежить точка зиляно кола.

I Коли аналіза пересвідчить, що точка лежить на обводі кола, то рівняння пишеться на підставі вже розгляненого правила складання рівняння дотичної поведеної через точку на обводі кола [рівняння (39)] Себто рівняння матиме вигляд.

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$ (де x_1, y_1 значники точки дотику)

II Коли пересвідчуємося, що точка лежить поза колом, то

1) пишемо звичайне рівняння дотичної вигляду: $xx_1 + yy_1 = r^2$, де замість значників x_1, y_1 вставляємо вартості значників даної точки поза колом.

Себто: $$xx_0 + yy_0 = r^2$$

2) Розв'язуємо систему рівнань: із складеного нами рівняння і даного рівняння кола:

$$1)\ xx_0 + yy_0 = r^2$$
$$2)\ x^2 + y^2 = r^2$$

Визначені вартості невідомих $x_1 y_1$ і $x_2 y_2$ (два розв'язки) і будуть точками дотику.

3) Знаючи точки дотику загальними (I) способом складаємо рівняння дотичних, а саме:

1) $xx_1 + yy_1 = r^2$

2) $xx_2 + yy_2 = r^2$

III Коли аналіза пересвідчить, що сума квадратів значників точки менша від квадрату променя кола, то дотичних немає. (точка на кругі кола)

Приклад.

До кола: $x^2+y^2=25$. повести дотичні через точки: 1) $A(5,2,5)$ 2) $B(-1,4)$ 3) $C(4,3)$.

Аналіза: 1) $5^2+2,5^2=25+6,25=31,25>25$. Точка A поза колом.

2) $(-1)^2+(4)^2=1+16=17<25$. Точка B на кругі кола.

3) $4^2+3^2=16+9=25$. Точка C на обводі кола.

1) а) Складаємо рівняння прості $5x+2,5y=25$, або: $x+0,5y=5$.

Розв'язуємо систему:

$$x^2+y^2=25$$
$$x+0,5y=5.$$

$x = 5 - 0{,}5y$; $x^2 = 25 - 5y + 0{,}25y^2$

тому: $25 - 5y + 0{,}25y^2 + y^2 - 25 = 0$

$1{,}25y^2 - 5y = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = \frac{5}{1{,}25} = 4$.

$x_1 = 5$; $x_2 = 5 - 2 = 3$.

тому рівняння дотичних

1) $5x = 25$; $\underline{x = 5}$.

2) $3x + 4y = 25$ (рис 84.)

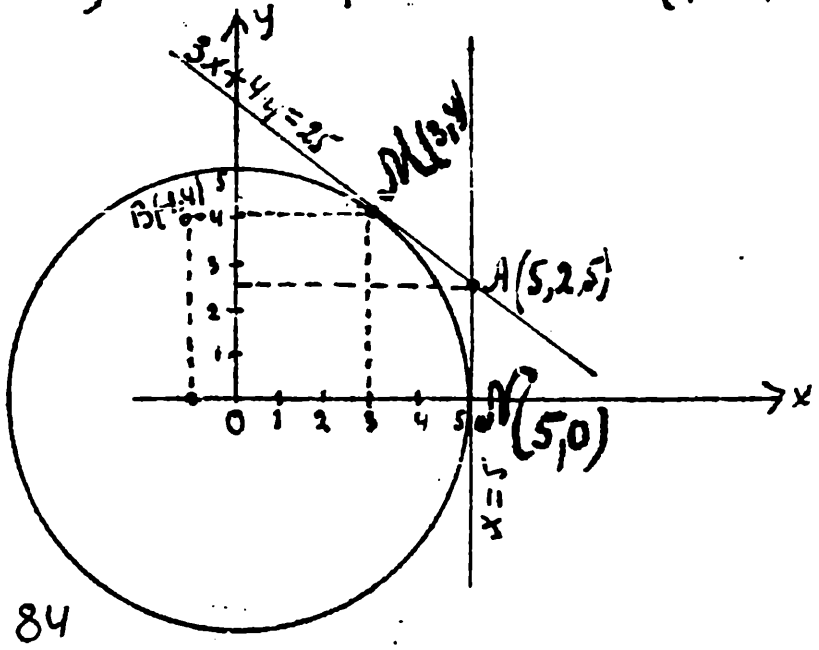


Рис. 84

Точка B (-1,4) лежить на кривій. Дотичних немає.

3) Точка C (4,3) лежить на колі, тому рівняння дотичної

$4x + 3y = 25$.

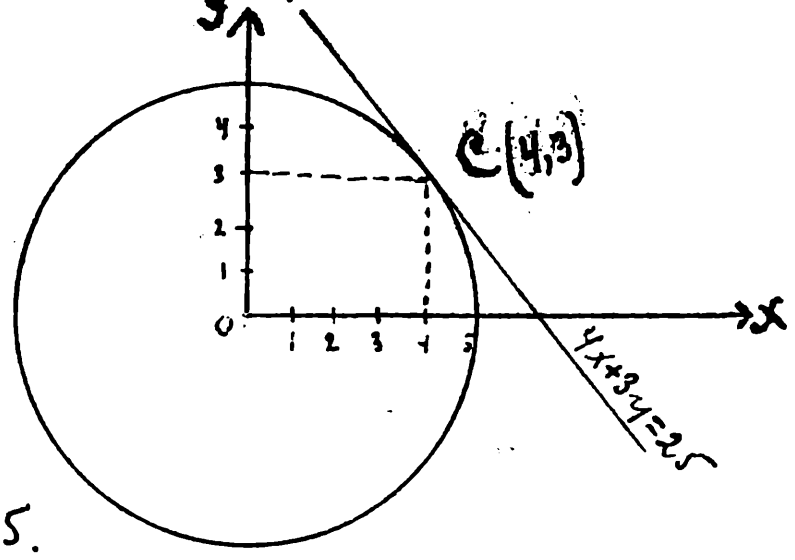


Рис. 85.

Теж правило поширюється і на складання рівняння дотичної до кола, висловленого основними рівняннями.

Приклад:

До кола: $(x-2)^2+(y-1)^2=25$. провести дотичну через точку $M(7,2)$

Аналіза: підставивши значення точки $M(x_0=7, y_0=2)$ в рівняння кола, маємо:

$$(7-2)^2+(2-1)^2=25+1=26>25.$$

Точка лежить поза колом, а тому: $(x-2)(x-2)+(y-1)(y-1)=25$.

Підставивши значення $x_0=7$, $y_0=2$, маємо:

$$(7-2)(x-2)+(2-1)(y-1)=25.$$

або: $5(x-2)+(y-1)=25$.

Введемо нові змінні: $z=x-2$ $u=y-1$ і матимемо:

$$1).\ z^2+u^2=25$$
$$5z+u=25.$$

Розв'язуючи систему.

$u=25-5z=5(5-z)$.

$z^2+25(5-z)^2=25$; $z^2+625-250z+25z^2-25=0$

або: $26z^2-250z+600=0$; $13z^2-125z+300=0$

$z=\frac{125\pm\sqrt{15625-15600}}{26}$; $z=\frac{125\pm5}{26}$.

$z_1=5$; $z_2=\frac{120}{26}=4\frac{8}{13}$; $u=5(5-z)$; $u_1=0$; $u_2=1\frac{12}{13}$

Рівняння дотичних в точках $P_1(x_1 y_1)$ і $P_2(x_2 y_2)$.

1) $2x_1 + uu_1 = 25$ або $5z + 0 \cdot u = 25$.

$z = 5$ але $z = x - 2$, звідси $x - 2 = 5$

$\underline{x = 7}$.

2) $2x_2 + uu_2 = 25$ або $4\frac{8}{13}z + 1\frac{12}{13}u = 25$.

або: $\frac{12}{13}z + \frac{5}{13}u = 5$, але $u = y - 1$; $z = x - 2$

Звідси: $\frac{12}{13}(x-2) + \frac{5}{13}(y-1) = 5$.

або $12(x-2) + 5(y-1) = 65$.

§-26. Бігунка (поляра)

Ми щойно зауважили, що кожне розв'язання системи, що складається з двох рівнань: кола й простої, є процесом відшукання точок перехрещення кола з даною рівнянням простої, січною.

Розв'язки цієї системи, очевидно, є значеннями цих точок перехрещення, себто є спільними й для кола й для даної простої (січної)

Коли ми в §25 для складення рівняння дотичної, що поведено через точку $A(x_0 y_0)$ поза колом, відшукували точку дотику її до кола, ми щойно розв'яз-

вати систему, що складала-ся з рівнянь самого кола й прос-тої.

Розв'язки цієї системи бу-ли значеннями потрібних точок. дотику й одночасно точками перехрещень кола з даною прос-тою.

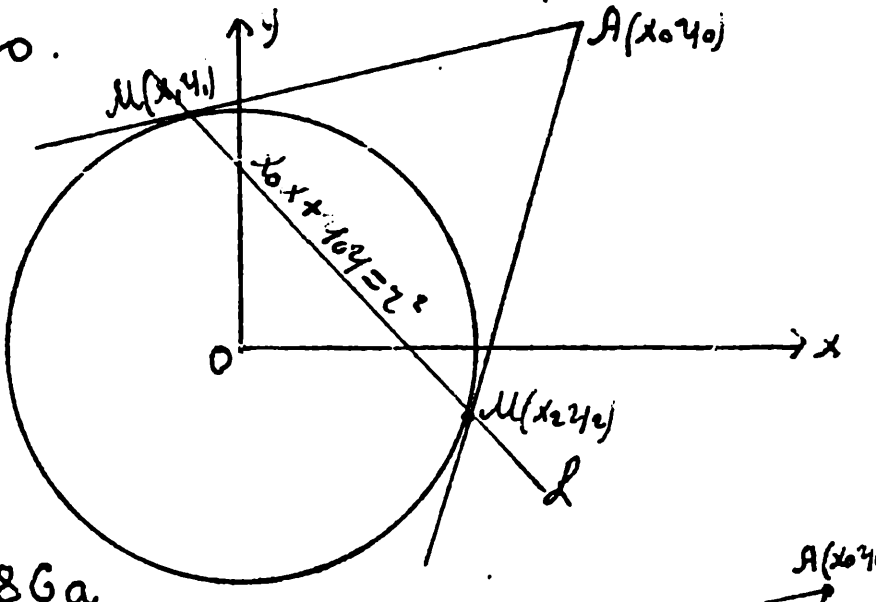


Рис. 86а

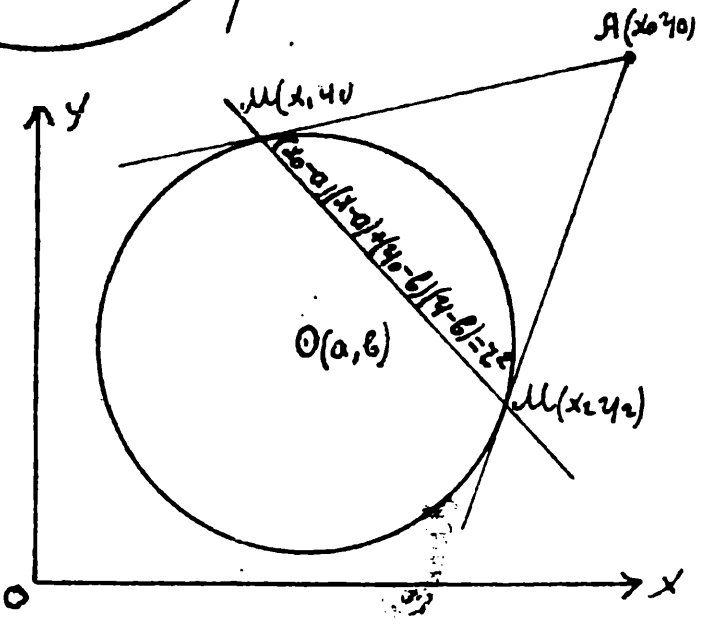


Рис. 86б.

Таким чином зрозуміло, що проста, рівняння якої входило в систему, була січною, що про-ходила через точки дотику. Геометричний образ цієї про-

стої дано на рис. 86 а і в, а саме: пряма l).

Ця пряма носить назву бігучки (полярної) точки A, а сама точка A - бігуна (полюса)

Визначення.

Бігучою (полярою) даної точки (поза колом) зветься пряма, що сполучує точки дотику променів, що виходять з точки A, як бігуна й є дотичними до кола.

Згадаємо тепер, як ми складали в п. III рівняння бігучки (себто тої прямої, за допомогою рівняння якої, через розв'язання системи, ми відшукували потрібні нам точки дотику променів точки A).

Для цього, ми в рівнянні кола, що містять квадрати невідомих, ми писали як здобуткн перших ступенів і вставляли в один із множників кожного здобутку, замість невідомого вартість відповідного значника бігуна (точки A)

Напр: 1) для кола, що виражається рівнянням в центральній формі: $x^2+y^2=r^2$, писали:

$x \cdot x + y \cdot y = r^2$

після підстановки рівняння бігучої буде: $x_0 x + y_0 y = r^2$ ---(1)

2) для кола, що виражається рівнянням в основній формі:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

пишем: $(x-a)(x-a) + (y-b)(y-b) = r^2$

а після підстави.. рівняння бігучої буде: $(x_0-a)(x-a) + (y_0-b)(y-b) = r^2$ ..(2)

З попередніх міркувань очевидно, що рівняння (1) і (2) є рівняннями бігучих (рис 86 а і б), себто січних, що сполучують точки дотику променів $A(x_0 y_0)$, бо рівняння цих простих входять у ту систему, розв'язки якої дали значення точок дотику, а тому ці значення мусять задовольняти рівнянням 1. і (2), себто точки дотику мусять лежати на даних простих.

Таким чином рівняння:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 x + y_0 y = r^2 \\ (x_0-a)(x-a) + (y_0-b)(y-b) = r^2 \end{array}\right\} \text{---} (65)$$

є рівняння бігучих точки $A(x_0 y_0)$ зглядно кола в першому випадку відносного центрами до почат-

ку вісей, а в другому випадку відносного центром у довільну точку (a; b).

§-27. Кут січної з колом.

Визначення.

Кутом січної з колом в даній точці A умовимося звати кут, що утворює ця січна з дотичною проведеною через точку A.

Цей кут рахується від дотичної до січної в напрямності проти стрілки годинника (в додатній напрямності) рис 87 і, як кут між двома прямими, є рівний (див § 4 взір 8):

$$tg\varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Отже для обчислення кута січної з колом необхідно знати кутові коефіцієнти січної й дотичної, що його утворюють.

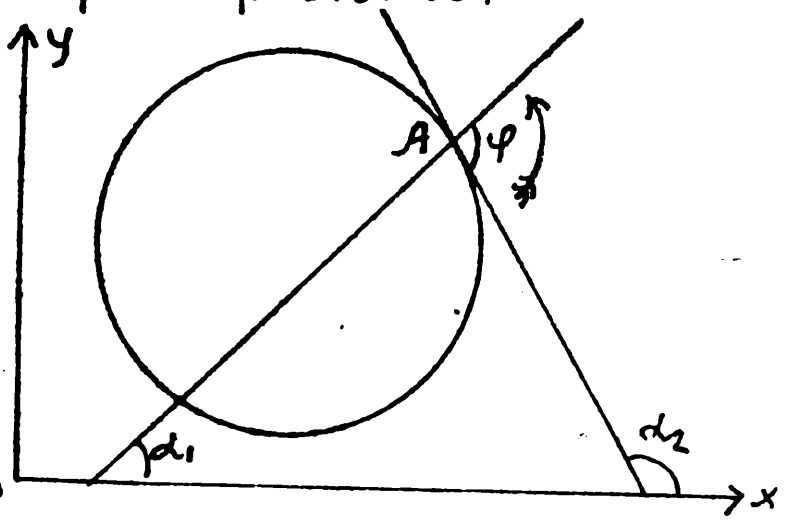


Рис. 87.

§-28. Піддотична і піддотична (піднормаль)

Визначення

Візьмемо коло з центром у початку координат. Через яку небудь точку $M(x_1, y_1)$ цього кола (рис 88) проведемо дотичну й пряму. Тоді введемо такі визначення:

I) Довжиною, або відтинком дотичної до кола в якій небудь точці його обводу зветься відтинок цієї дотичної від точки дотику до перехрестя її з віссю ікс'ів.

(дотична $MB = t$).

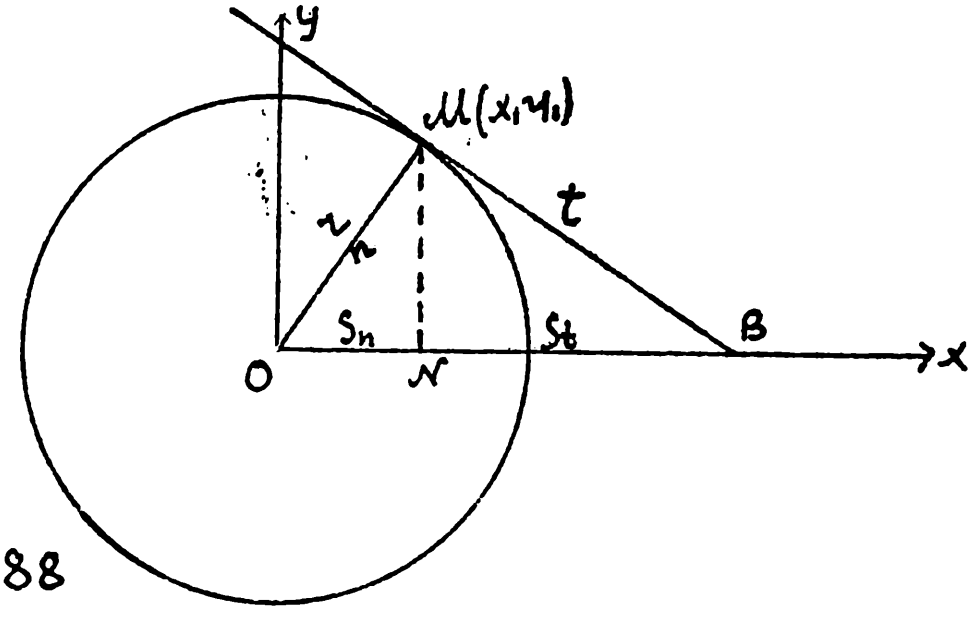


Рис. 88

II) Довжиною, або відтинком прямої' нормалі до кола в якій небудь точці M його обводу зветься відтинок її від точки дотику до перехрестя з віссю ікс'ів

(в даному разі до центра кола)

III) Підотичного (субтангенсного) Зветься міт даного (I) відтинку дотичної на вісь ікс'ів (підотична: BN рис 88)

IV) Підпрямового (субнормалью) Зветься міт даного (II) відтинку прямової на вісь ікс'ів (підпрямова: ON рис 88)

Обчислимо їх величини:

1) Як спостерігаємо, що відтинок прямової ОМ є рівний радіусу кола, тому:

$$r = r \quad \text{.....(66)}$$

2) Підпрямова $S_n = ON$ буде значною x_1 точки M, отже:

$$S_n = x_1 \quad \text{.....(67)}$$

3) Довжина дотичної $t = MB$ з Δ OMB є рівна: $t = r\,tg\alpha$, але: $tg\alpha = \frac{y_1}{x_1}$, тому:

$$t = r\frac{y_1}{x_1} \quad \text{.....(68)}$$

4) Піддотична $S_t = BN$ визначається з Δ NMB, а саме: $S_t = y_1\,tg\alpha$, але $tg\alpha = \frac{y_1}{x_1}$, тому:

$$S_t = \frac{y_1^2}{x_1} \quad \text{.....(69)}$$

§ 29. Положення точки відносно кола

З геометрії нам відомо, що:

1) коли провести з точки поза колом січні до нього, то добуток відрізків кожної січної є величиною сталою для всіх січних рівною квадрату дотичної проведеної з тієї ж точки.

$AC \cdot AB = AE \cdot AD = AG \cdot AF = AL \cdot AK = AM^2$.

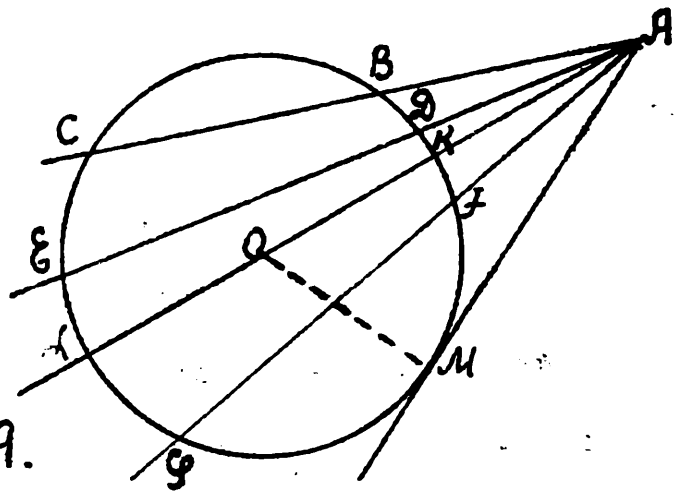


Рис 89.

2) Коли через точку на кругі провести січні до кола, то добуток відрізків кожної січної є величина стала для всіх січних, рівного здобутку відрізків поперечника кола, що проходить через цю точку.

$AC \cdot AB = AD \cdot AE = AG \cdot AF = AK \cdot AL = AM \cdot AN$.

Але відрізок AN (прямої до поперечника KL) є середнього пропорційного між відрізками

поперечника, себто:

$$AN^2 = AK \cdot AL.$$

А тому здобуток відтинків кожної хорди, що проходить через яку точку на кругі є величиною сталою, рівною квадрату півхорди, що проходить через таку саму точку прямово до відповідного поперечника.

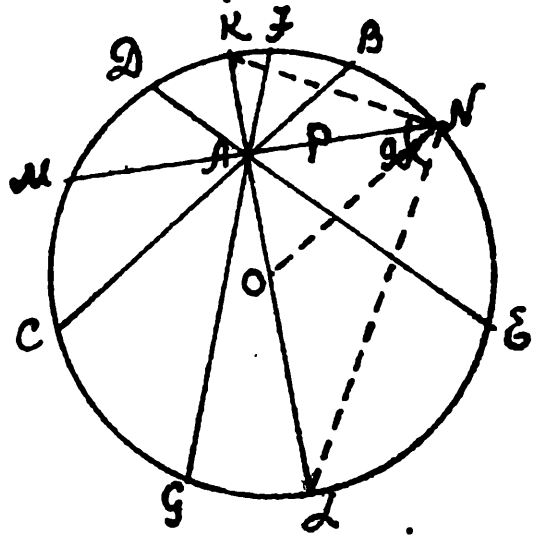


Рис. 90.

Усі ці геометричні теореми можна узагальнити такими чином:

Коли кожна перетинна жмут простих, то здобуток відалень вузла цього жмута від точок перетину кожної простої з кожної є величина стала для всіх простих жмута, рівна по абсолютній величині:

1 квадрату дотичної поведеної

до кола з даного вузла, коли він лежить поза колом.

2) Квадрату півтятиви прямої до поперечника, проведеного через даний вузел, коли він лежить на кругі.

В всіх простих мережах, що перетинаються колом, завжди буде й така, що проходитиме через центр кола. Цю пряму ми уявимося звати лінією сполуки точки з колом.

За довжину лінії сполуки d вважають відалення даної точки від центру. (d = AO рис 89)

Відалення даної точки від точок перетину лінії сполуки з колом звуть відалення даної точки від обводу кола (AK, Ad рис 89)

Здобуток відалень точки від обводу кола уповнимося звати степенем точки зглядно кола.

I) Коли точка лежить поза колом то її відалення від обводу кола кола будуть:

1) $Ad = d + r$

2) $AK = d - r$.

Тому степень точки буде:

$(d+r)(d-r)$.

А ми знаємо, що здобуток відстаней вузла зламаної від точок перетину простої зламаної з колом є рівний квадрату дотичної з цього вузла до кола, а тому:

$$Ad \cdot AK = AM^2 = t^2$$

Отже: $\underline{(d+r)(d-r) = t^2}$

або: $\underline{d^2 - r^2 = t^2}$.

[Останній взір можно одержати безпосередньо на підставі теореми Піфагора з Δ AMO рис. 89]

Таким чином:

<u>Степень точки, що лежить поза колом є рівна квадрату дотичної поведеної з цієї точки до кола.</u>

II) Коли точка лежить на кругі (рис 90), то її відалення від обводу кола будуть:

1) $Ad = AO + Od = d + r$

2) $AK = OK - OA = r - d = -(d-r)$

Тому степень точки буде:

$$(d+r)\cdot(-(d-r)) = \underline{-(d+r)(d-r)}$$

А ми знаємо, що здобуток відтинків тятиви є рівний квадрату півтятиви, що проходить через вузел прямого до відповідного

поперечника, себто:

$$Ad \cdot AK = AN^2$$

або: $-(d+r)(d-r) = \rho^2$

або: $\underline{(d+r)(d-r) = -\rho^2}$.

Таким чином:

Степінь точки, що лежить на крузі (знаходячого кола) є рівна від'ємному квадрату півтятиви прямової до поперечника, що проходить через цю точку рівній півтятивові.

$$(d+r)(d-r) = -\rho^2$$

можно ще висловити так:

$$d^2 - r^2 = -\rho^2$$

[Цей вірш також одержимо безпосередньо з Δ AON (рис 90) користуючися теоремою Піфагора]

Знайдемо тепер аналітичний образ степені точки знаходячого кола.

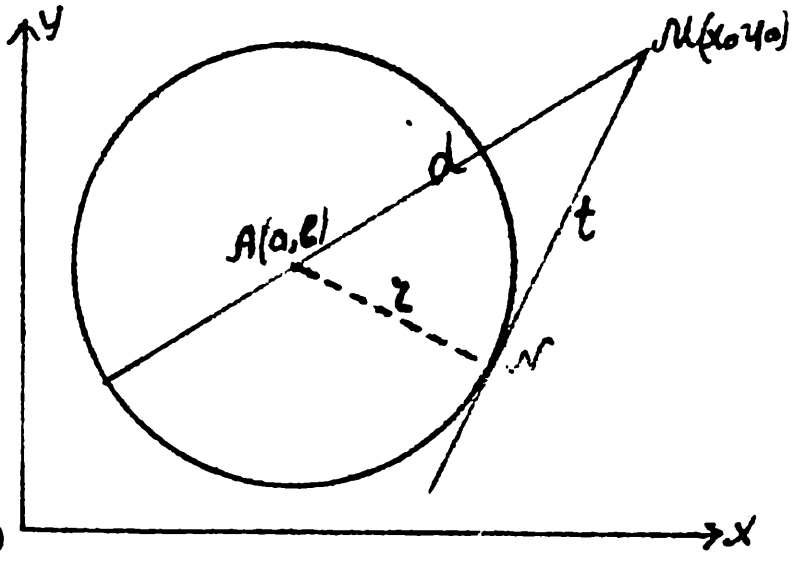


Рис. 91.

Візьмемо рівняння кола в основній формі: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
Хай значення даної точки M є x_0 і y_0, тоді з прямокутника AMN (рис 91) маємо:

$$t^2=d^2-r^2$$

але $d^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$ (через значення кінців відрізка)
Тому: $\underline{f=t^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2}$

Розглянемо випадок, коли точка $M(x_0y_0)$ лежить на колі.

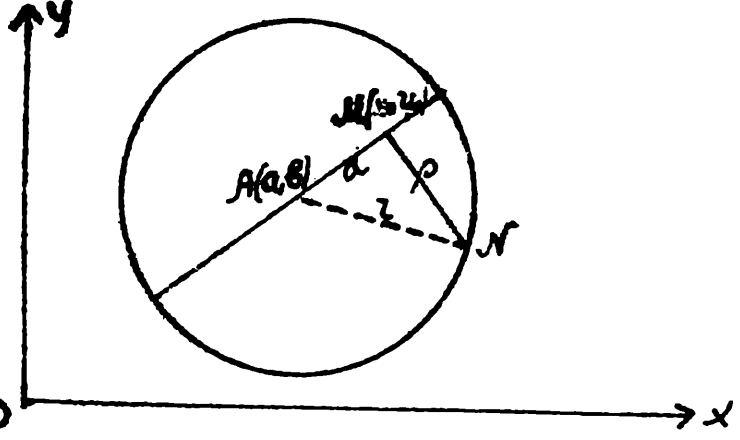


Рис. 92.

З Δ AMN (рис 92) маємо:

$$r^2=d^2+\rho^2$$

або: $-\rho^2=d^2-r^2$
але $d^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$, тому:

$$\underline{f=-\rho^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2}$$

Таким чином:
Щоб одержати вартість степеня точки відносно кола, треба всі члени рівняння кола перенести

в ліву частину і підставити замість невідомих відповідні значення точки. Одержаний таким чином многочлен і буде степенем точки відносно кола. (додатним, коли точка лежить поза колом і від'ємним, коли точка лежить на кругі кола):

$$S = (x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2 \quad \ldots\ldots (70)$$

Примітка

Для кола, що має центр у початку відліку, степінь даної точки буде:

$$S = x_0^2+y_0^2-r^2$$

Пропонується це довести студіюючим.

Задача. Знайти геометричний середовище (місце) точок, що мають однаковий степінь відносно даного кола.

Розв'язок:

Хай рівняння даного кола:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Тоді степінь якої небудь точки $A(x_0 y_0)$ відносно цього кола буде:

$$S = (x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2$$

Щоб одержати рівняння геометричного середовища точок, що мають

даний степень S треба значки точки A взяти за змінні x і y й ми матимемо рівняння:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2+S.$$

Але $r^2+S=r^2+t^2$ (рис 89) коли точка поза кругом, або $r^2+S=r^2-p^2$ (рис 92) коли точка на кругі.

В тому й другому разі:

$$r^2+S=d^2$$

Через це рівняння геометричного осередку матиме вигляд:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=d^2$$

Себто, геометричний осередок точок, що мають однаковий степень зливно даного кола, є також, спільноцентрове з даним, коло, що має лучем відповідну лінію спольчи.

Висновок.

Для кожної точки січної кола завжди можно знайти на тій же січній взагалі й другу точку однакового ступіня з першою. Ця друга точка буде сімметричного до першої зливно центра тятива січної.

Задачі.

Ч-148 Написати рівняння дотичної та прямової:

1) до кола: $x^2+y^2=25$ в точці: $A(-3,4)$

2) " " : $x^2+y^2+2x-6y-19=0$ " : $B(-6,5)$

Ч-149. Написати рівняння дотичної до кола: $x^2+y^2-6x-4y-3=0$

1) рівнобіжної до прості: $6x+8y-21=0$

2) прямової до простої: $4x+y-9=0$

[Увага: Для зразку розв'яжемо в загальному вигляді таку задачу: Написати рівняння дотичної до кола: $x^2+y^2=r^2$ рівнобіжної до простої $y=mx+n$.

Припустимо, що так. дотична проходить через точку обводу кола x_1,y_1, тоді її рівняння буде: $x_1x+y_1y=r^2$, або в канонічній формі: $y=-\frac{x_1}{y_1}x+\frac{r^2}{y_1}$. Коли ця дотична рівнобіжна до даної простої: $y=mx+n$ то їх кутові коефіцієнти є рівні, себто: $m=-\frac{x_1}{y_1}$, або $x_1+y_1m=0$ ..(A)

Нам значення x_1 та y_1 є невідомі, щоб їх визначити крім даного (A) треба ще вперше, але ми знаємо, що точка (x_1,y_1) лежить на колі, а тому: $x_1^2+y_1^2=r^2$ ..(B)

Розв'язавши систему (A) і (B) знайдемо x_1 і y_1 ми одержимо:

$$x_1 = \pm\frac{mr}{\sqrt{1+m^2}} \qquad y_1 = \mp\frac{r}{\sqrt{1+m^2}}$$

Отже рівняння дотичних будуть: (підставляємо в рівняння дотичної вартості x_1 та y_1)

1) $\frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}}x - \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}y = r^2$

2) $-\frac{mr}{\sqrt{1+m^2}}x + \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}y = r^2$

або 1) $mx - y = r\sqrt{1+m^2}$

2) $y - mx = r\sqrt{1+m^2}$

Маємо дотичних буде дві поведених через кінці поперечника.

Що до розв'язання задачі, коли треба написати рівняння дотичної прямої до даної простої, то воно аналогічно попередньому. Лише кутовий множник дотичної: $-\frac{x_1}{y_1}$, на підставі умови прямовісності приймаємо рівним $-\frac{1}{m}$ (де m кутовий множник даної простої)

Отже: $-\frac{x_1}{y_1} = -\frac{1}{m}$

або: $mx_1 = y_1$]

№-150. Визначити кут між дотичними, проведеними до кола: $x^2+y^2+12x-8y+27=0$ в точках: $A(-2,1)$ і $B(-3,8)$.

✓ №-151. Написати рівняння дотичної проведеної:

1) до кола: $x^2+y^2-6x+2y+8=0$ з точки: $O(0,0)$
2) " " : $x^2+y^2=29$ " " : $A(7,-3)$
3) " " : $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ " " : $B(9,2)$

№-152. Обчислити довжину дотичної і кут між нею, коли вона проведена з точки: $A(5,1)$ до кола: $x^2+y^2+2x-2y-7=0$.

№-153. Написати рівняння кола, що має:

1) центр в точці $O(0,0)$ і дотикається прямої: $5x+4y=25$.
2) центр в точці $O(0,0)$ і дотикається прямої: $3x-4y+10=0$.
3) центр в точці: $A(6,7)$ і дотикається прямої: $5x-12y=24$.

№-154. Написати рівняння бісектриси:

1) до кола: $x^2+y^2=36$, зовнішньої точки: $(0,3)$
2) " " : $x^2+y^2=25$, " " : $(3,-2)$
3) " " : $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ " " : $(5,-1)$

№-155. В якому положенні пряма:

1) $2x+5y+9=0$ зовнішня кола: $x^2+y^2=9$.

2) $3x+2y-6=0$ зливно кола: $(x+3)^2+(y-1)^2-4=0$.

№ 156. Знайти степень точки:

1) $A(7,8)$ зливно кола: $x^2+y^2-4x+18y-21=0$

2) $B(2,3)$ " " : $x^2+y^2=4$.

3) $C(5,-2)$ " " : $x^2+y^2-8x-10y+32=0$.

№ 157. Обчислити довжини:

дотичної й піддотичної

та прямової й підпрямової:

1) до кола: $x^2+y^2=25$ в точці: $(4,3)$

2) " " : $x^2+y^2=225$ " " : $(0,15)$

§-30. Взаємне положення кол.

Щоб визначити взаємне положення кол, будемо шукати точки їх перехрещень. Для цього, як ми знаємо треба розв'язати систему рівнань, що складається з рівнань даних кол, а саме:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$(x-m)^2+(y-n)^2=r_1^2$$

Відніманням почленно друге рівняння з першого й одержимо:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=(x-m)^2+(y-n)^2-r_1^2$$

Це рівняння є рівнянням простої, бо другі степені x та y зникнуть (мають сочинникали одинницю) і після зведення схожих членів матимемо:

$2(m-a)x + 2(n-b)y + (a^2+b^2-m^2-n^2+r_1^2-r^2) = 0$

або: $px + qy + s = 0$

(де $p = 2(m-a)$; $q = 2(n-b)$;
$s = a^2+b^2-m^2-n^2+r_1^2-r^2$)

Таким чином ми звели розв'язання системи двох квадратових рівнянь до розв'язання системи квадратового й лінійного рівнянь.

Розв'язавши цю систему ми можемо:

1) одержати по 2 розв'язки для значень x та y.
2) " " 1 " " " " " "
3) " ні одного розв'язка " " "
(уявні розв'яз-ки)

в залежності від того чи відповідний вираз (дискримінант) рівняння: $D \gtreqless 0$

<u>В першому разі кола будуть перехрещуватися в двох точках, в другому - дотикатися, а у третьому - нестикатися (не мають спільних)</u>

<u>Степенна (або радікальна) вісь</u>

Розглянемо просту, одержану нами з системи рівнянь двох кол, а саме:

$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2 = (x-m)^2+(y-n)^2-r_1^2$ ... (71)

або: $K_1 = K_2$; $K_1 - K_2 = 0$ ... (72)

де через K_1 і K_2 ми умовно означили ліві частини рівнянь кол, після перенесення всіх членів їх в цю ліву частину, себто:

$$K_1 \equiv (x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$
$$K_2 \equiv (x-m)^2+(y-n)^2-r_1^2=0$$

З розв'язання системи видно, що дві прості в першому випадку, коли кола перехрещуються, є спільного типу їх, в другому випадку, коли кола дотикаються, є спільного їх дотичного й у третьому випадкові, коли кола є нестичні, вона лежить поза ними.

Щоб уяснити собі роль цієї простої знаходження даних кол, ми розв'яжемо таку задачу:

<u>Знайти геометричний осередок (місце) точок, що мають однаковий степень знаходження обох кол.</u> Припустимо, що така точка A має значення x_0 і y_0, тоді її степень:

1) знаходження першого кола буде:

$$S_1 = (x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2$$

2) знаходження другого кола буде:

$$S_2 = (x_0-m)^2+(y_0-n)^2-r_1^2$$

Коли точка A, ми припустили, однакового степеня зносно обох кол, то $S_1 = S_2$, себто:

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2=(x_0-m)^2+(y_0-n)^2-r_1^2$$

Щоб одержати не одну точку, а геометричний осередок точок, що мають однаковий степень, треба вважати значники x_0 та y_0 за змінні, себто за x та y, а тому рівнання геометричного осередку точок однакового степеня зносно обох кол буде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=(x-m)^2+(y-n)^2-r_1^2$$

Коли ми порівняємо це рівнання з рівнанням простої, що сполучує точки перехрещення кол (яку ми розглядаємо), то побачимо, що ці рівнання тотожні. Отже проста:

$$K_1 - K_2 = 0.$$

є геометричним осередком точок однакового степеня зносно обох кол.

<u>Ця проста носить назву Степеневої, або радікальної осі.</u> Але степень точки зносно кола вимірюється квадра-

тому дотичної з даної точки до кола, а тому степенна вісь є геометричним осередком точок рівних дотичних поведених поведених з них до обох кол.

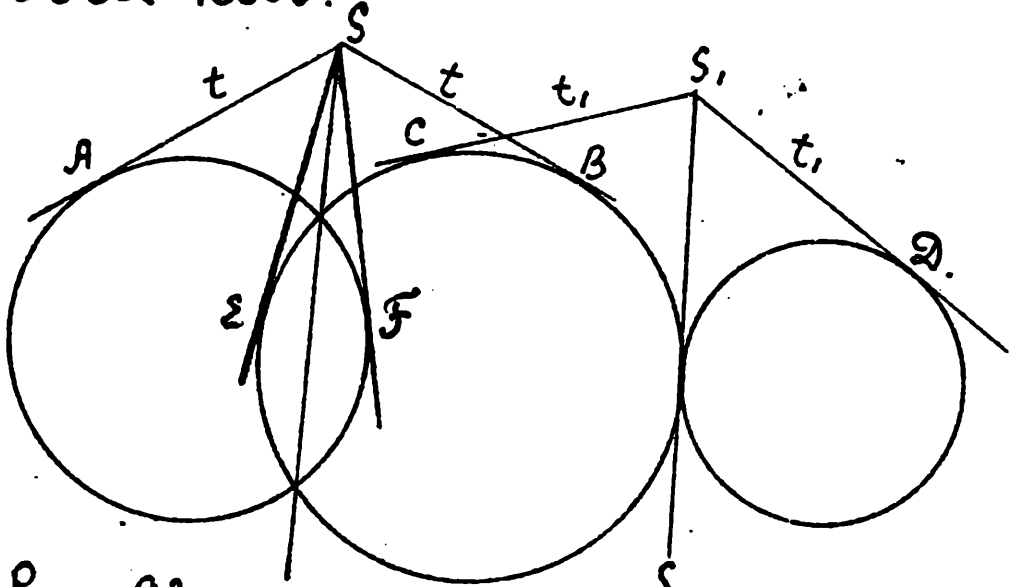


Рис. 93

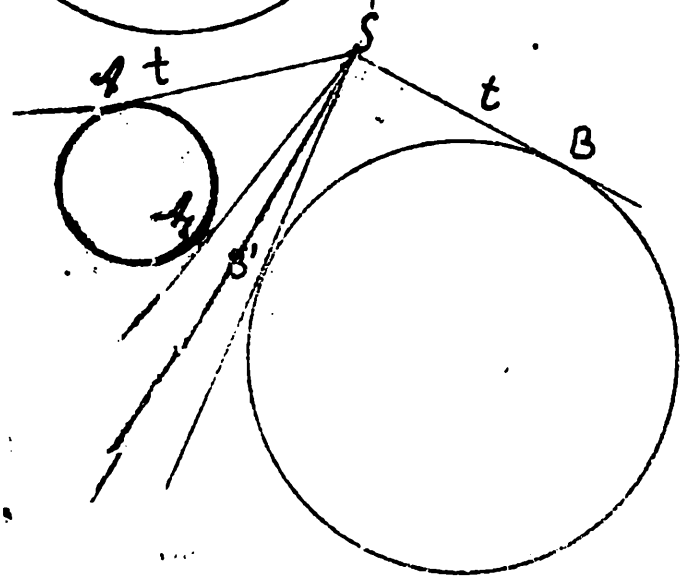


Рис. 94.

Таким чином:

Щоб написати рівняння степеної вісі двох даних кол, треба прирівняти одна одній ліві частини рівнянь цих кол (перенісши в ці частини всі члени обох рівнянь).

Степенна точка трьох кол.

Візьмемо пари кола рівняння, яких припустимо будуть:
$K_1=0$, $K_2=0$, $K_3=0$.
Тоді степенної віссю:
1го і 2го кола буде пряма: $K_1-K_2=0$
2го і 3го " " " : $K_2-K_3=0$
3го і 1го " " " : $K_3-K_1=0$
Додавши почленно ці рівняння, маємо: $K_1-K_2+K_2-K_3+K_3-K_1=0$
Ми одержимо тотожність:

$$0=0.$$

А це, як знаємо, є ознакою, що всі три степенні вісі проходять через спільну точку.
Цю точку збігу всіх степенних вісей звуть степенною точкою.
Дотичні поведені з неї до всіх даних кол є рівні.

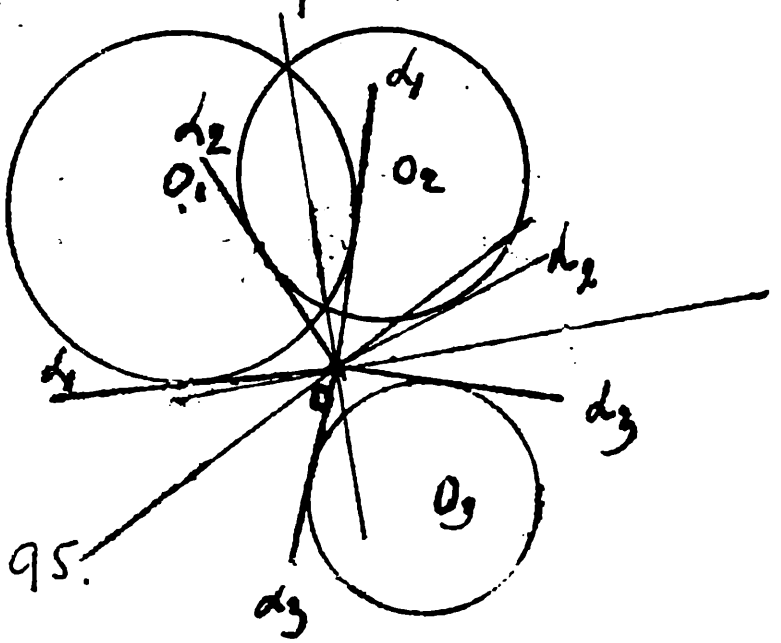


Рис. 95.

§-31. Жмуток кол.

Коли два кола $K_1=0$ і $K_2=0$ перехрещуються в двох точках, то значення цих точок лишаються задовольняти одночасно і рівнянням $K_1=0$ й $K_2=0$. Але цією значення оберта-тиметься в тотожність і кожне рівняння вигляду: $K_1-\lambda K_2=0$ де λ є довільний змінник. Таким чином даючи λ різні вартости, ми одержимо жмуток кол, що проходитимуть через дві задані точки. В окремому випадкові, коли дані кола $K_1=0$ і $K_2=0$ дотикаються то рівняння: $K_1-\lambda K_2=0$ є жмуток кол дотичних в даній спільній точці.

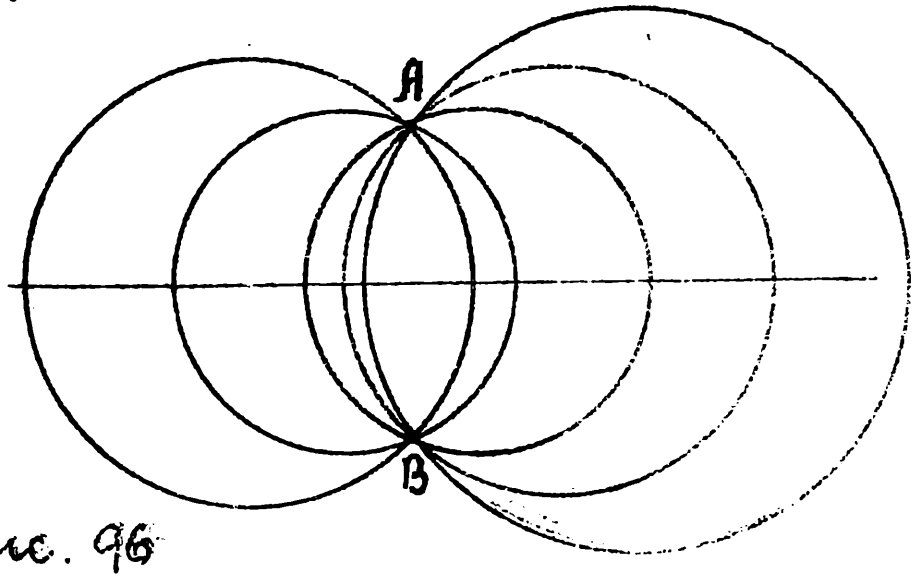


Рис. 96

Задача

Обчислити кут двох даних кол.

Кутом двох даних кол зветься кут утворений дотичними до кол в точці їх перехрещення.

(рис 97) Написавши рівняння дотичних в точці перехрещення кол і давши їм канонічну форму, ми знайдемо відповідні кутові змінники m_1 і m_2; тоді:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

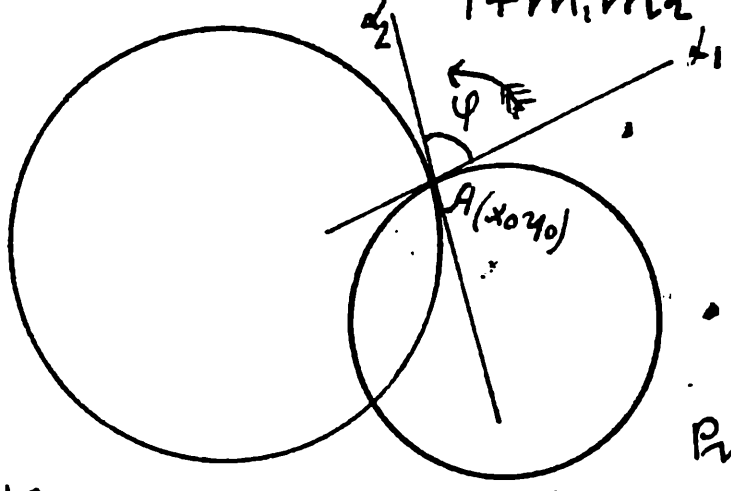


Рис. 97.

Приклад. Знайти кут кол:

1) $x^2 + y^2 = 16$

2) $(x-5)^2 + y^2 = 9$.

Знайдемо точки перехрещення кол: $x^2 - (x-5)^2 = 16 - 9 = 7$.

$x^2 - x^2 + 10x - 25 = 7$; $10x = 32$; $x = 3{,}2$.

$y = \pm 2{,}4$.

Дотичні в точці: $(3{,}2;\ 2{,}4)$ будуть:

До першого кола:

$3{,}2x + 2{,}4y = 16$ або: $y = -\frac{3{,}2}{2{,}4}x + \frac{16}{2{,}4}$.

або: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$. (тому $m_1 = -\frac{4}{3}$)

До другого кола:

$(3{,}2 \cdot -5)(x-5) + 2{,}4y = 9$.

$-1{,}8x + 9 + 2{,}4y = 9$; $y = \frac{1{,}8}{2{,}4}x$; $y = \frac{3}{4}x$.

($m_2 = \frac{3}{4}$.)

Малюнок такий:

Крім лінії дотичних (крім двох кол) є пряма, бо задовольняється умова прямості:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Задача.

Написати рівняння спільної дотичної до двох кол:

Хай рівняння цих кол будуть:

1) $x^2 + y^2 = r^2$

2) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r_1^2$

Напишемо рівняння дотичної до першого кола в якій точці $M(x_1, y_1)$; це рівняння буде:

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

Коли дотична: $x_1 x + y_1 y = r^2$ буде дотичною й до другого кола, то вона буде відалена на r від центра цього другого кола.

Центр кола: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ має значення $O(a,b)$ і точку відалення точки O від дотичної $x_1x+y_1y=r^2$, буде:

$$\frac{x_1a+y_1b-r^2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\pm r_1$$

Але $\sqrt{x_1^2+y_1^2}=r$, тому:

$$x_1a+y_1b-r^2=\pm rr_1$$

Це є перше рівняння знайдення невідомих значень точки $M(x_1,y_1)$

За друге рівняння будемо вважати: $x_1^2+y_1^2=r^2$

(бо точка M лежить на колі: $x^2+y^2=r^2$)

Отже для визначення точки дотику M ми маємо дві системи з квадратового і лінійного рівняння, а саме:

1) $ax_1+by_1=r^2+rr_1$
$x_1^2+y_1^2=r$

2) $ax_1+by_1=r^2-rr_1$
$x_1^2+y_1^2=r$.

Ці дві системи дають по два розв'язків для x_1 та y_1 кожна. Разом 4 розв'язки.

Отже дотичних можно по-

вести дві пари: система 1) дві точки дотику двох внутрішніх дотичних (AB і CD рис 98) а система 2) дві точки дотику двох зовнішніх дотичних. (KL, MN рис)

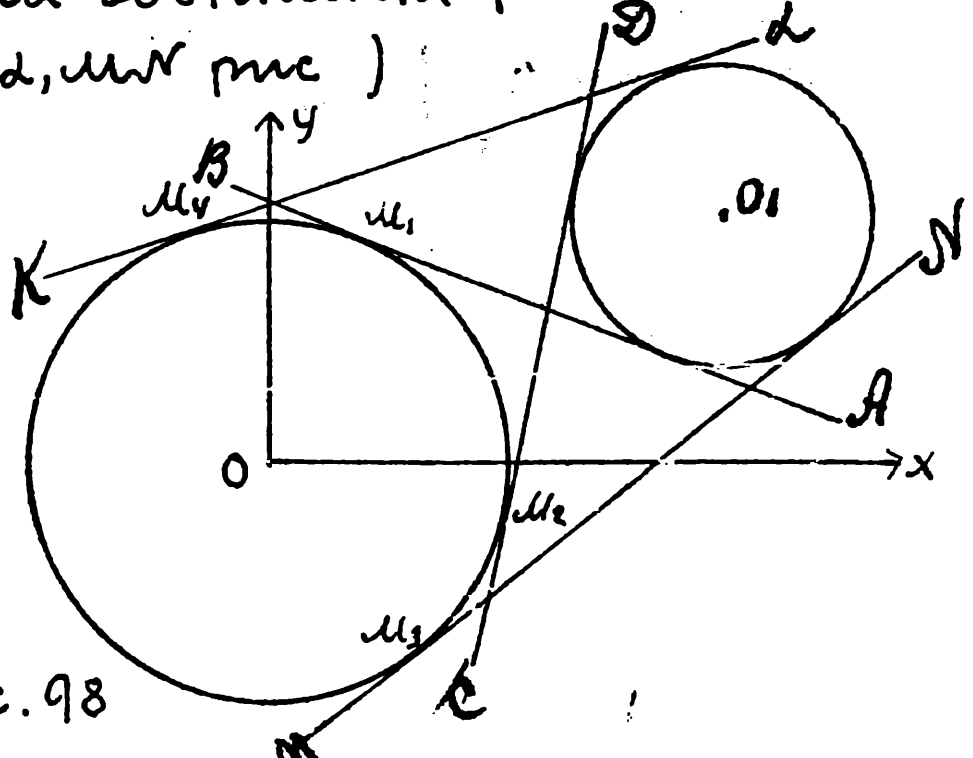


Рис. 98

Приклад. Рівняння кол:

1) $x^2+y^2=36$
2) $(x-8)^2+(y-4)^2=4$

} Лінійне рівняння: $8x_1+4y_1-36=\pm 6.2$

Система I:

$8x_1+4y_1=48$, або: $2x_1+y_1=12$.

$x_1^2+y_1^2=36$.

Система II:

$8x_1+4y_1=24$, або: $2x_1+y_1=6$

$x_1^2+y_1^2=36$.

Розв'язуємо системи:

I	II
$y_1=12-2x_1$	$y_1=6-2x_1$
$x_1^2+144-48x_1+4x^2=36$	$x_1^2+36-24x_1+4x_1=36$
$5x_1^2-48x_1+108=0$	$5x_1-24x_1=0$.

$x = \frac{48 \pm \sqrt{2304 - 2160}}{10}$

$x = \frac{48 \pm 12}{10}$; $x_1 = 6$, $x_2 = 3{,}6$

$y_1 = 12 - 12 = 0$

$y_2 = 12 - 7{,}2 = 4{,}8$.

Рівняння внутрішніх дотичних (підставляємо x_1 та y_1 у рівняння $x_1x + y_1y = r^2$):

1) $6x = 36$, $x = 6$

2) $3{,}6x + 4{,}8y = 36$

або: $3x + 4y = 30$.

$x_1 = 0$; $y_1 = 6 - 0 = 6$

$x_2 = \frac{24}{5}$;

$y_2 = 6 - \frac{48}{5} = -\frac{18}{5}$.

Рівняння зовнішніх дотичних:

1) $6y = 36$, $y = 6$

2) $\frac{24}{5}x - \frac{18}{5}y = 36$

або: $4x - 3y = 30$.

Задачі.

№ 158. Дослідити взаємне положення кол:

1) $x^2 + y^2 - 2y = 0$; $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 18 = 0$

2) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$; $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$.

№ 159. Обчислити кути кол:

$(x - \frac{7}{2})^2 + (y - 2)^2 = 9$; $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

№ 160. Написати рівняння спільних дотичних кол:

1) $x^2 + y^2 = 9$; $x^2 + y^2 - 24x + 108 = 0$

2) $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$; $(x - 4)^2 + y^2 = 9$.

№ 161. Написати рівняння степеневої вісі кол:

$x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$.

Ч-162. Знайти значення степеневої точки кол:

$x^2+y^2=36$; $x^2+y^2-2x-5y-5=0$,

$x^2+y^2+6x+11y-125=0$.

Задачі до розділу II
(Коло)

Ч-163. Визначити значення центру і лучі кола, коли його рівняння:

1) $x^2+y^2-24=6x+8y$
2) $x^2+y^2=2x$
3) $x^2+y^2=16+6y$
4) $4x^2+4y^2-16x+8y+3=0$
5) $36x^2+36y^2+36x+144y+89=0$

Ч-164. Накреслити коло, що визначене є рівнянням:

1) $x^2+y^2-6y=16$
2) $(x^2+y^2)=x$
3) $x^2+y^2-x=\frac{19}{4}-4y$
4) $x^2+y^2+6x=4(x+3)$
5) $144x^2+144y^2=216y-192x-1$

Ч-165. Знайти рівняння, довжину і відстаження від початку вісей лучника кол:

1) $x^2+y^2-6x-10y+30=0$; $x^2+y^2+2x-4y=4$.
2) $x^2+y^2=2y$; $x^2+y^2=2x$.
3) $(x+7)^2+(y-5)^2=9^2$; $x^2-4x+49=24+22y-y^2$

[1) $3x-4y+11=0$; $\delta=\frac{11}{5}$ 2) $y=1-x$; $\delta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $3y-2x=29$; $\delta=\frac{29}{\sqrt{13}}$]

№-166. Перехрестя простих:
$2y-5x=3$; $3y+2x=14$. Взято за центр кола, що проходить обводом через точку (5,6). Написати рівняння кола.

[$x^2+y^2-2x-8y=3$]

№-167. Центр кола лежить на вісі y-ів на відстані 2см. від початку вісей. Написати рівняння кола, коли його обвід проходить через точку B(4,5)

[$x^2+y^2-4y=21$]

№-168. Написати рівняння кола, що проходить через точки:
1) A(0,0), B(8,0), C(0,6) 2) A(-1,2), B(3,3), C(2,-1)
3) A(4,-2), B(-1,3), C(5,-1).

[1) $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ 2) $(x-\frac{13}{10})^2+(y-\frac{13}{10})^2=5,78$.
3) $(x-2)^2+(y-1)^2=B$]

№-169. Написати рівняння кола, що проходить через вершини трикутника:
1) A(2,8), B(5,7), C(6,6)
2) A(8,5), B(-6,7), C(-10,-1)
3) A(-3,3), B(6,6), C(2,-2)

[a, b і r: 1) 2; 3; 5; 2) 0; -1; 10; 3) 2; 3; 5;]

№-170. Написати рівняння кола,

обведеного на трикутникові 3 боками:

1) $x+2y=4$; $x-2y=0$; $y=0$

2) $x+y=5$; $x-y+3=0$; $y=6$.

3) $y-3=0$; $5x+2y+4=0$; $2y-5x+4=0$

[a, б, в: 1) 2; 1,5; 2,5; 2) 2; 6; 3; 3) 0; 0,9; 2,9]

Ч-171 Написати рівняння кола, що обведене на трикутник з вершинами: A(-2,3); B(7,0); C(2,5) і обчислити різницю полів кола та трикутника?

[$(x-2)^2+y^2=25$; $S=63,54$ кв. од.]

Ч-172. 1) Через точку (3,6) провести коло, що дотикається координатних вісей і написати його рівняння.

2) Теж, через точку (9,2)

3) Теж, через точку (4,2)

[Значники центра і рівні лучі кола: 1) $y=15$; $y=3$ 2) $y=17$; $y=5$; 3) $y=10$; $y=2$]

Ч-173. 1) Написати рівняння кола, що проходить через точку A(5,2) і дотикається вісі ікс на відстані від початку вісей $a=3$.

2) Написати рівняння кола, що проходить через точку B(-17,-5) і дотикається вісі ікс на від-

даленню від початку вісей $a=-2$.

3) Написати рівняння кола, що проходить через точку $C(-4,13)$ і дотикається вісі ординат на відстані від початку вісей $b=1$.

[1) $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ 2) $(x+2)^2+(y+25)^2=625$.
3) $(x+20)^2+(y-1)^2=400$]

Ч-174. Написати рівняння кола, що має центром $A(a,b)$ і дотикається прямої: $y=mx+n$

[Увага: луч ч з відданими центру A від даної прямої:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\left(\frac{ma-b+n}{\pm\sqrt{m^2+1}}\right)^2$$

Ч-175. Написати рівняння кола, що:

1) має центр: $A(2,5)$ і дотикається прямої: $3x+4y=1$
2) " " : $B(5,3)$ " " : $3x+2y=10$
3) " " : $C(2,-0,5)$ " " : $2y-x=2$
4) " " : $D(2,-0,5)$ " " : $x+2y=6$.

[1) $(x-2)^2+(y-5)^2=25$ 2) $3x^2+3y^2-130x-78y+321=0$
3) і 4) $(x-2)^2+(y+\frac{1}{2})^2=5$.]

Ч-176. Написати рівняння кола:

1) має радіус $r=13$ і дотикається прямої: $3x+4y=12$ в точці: $A(4,0)$
2) має радіус $r=10$ і дотикається прямої: $4x+3y=70$ в точці: $B(10,10)$

[Увага: Величину радіуса кола можно обчислити 1) як відстань між

цьому в точках 2) як відстань центра від дотичної.

[Відп: 1 $(x-11,8)^2+(y-10,4)^2=169$ 2) $(x-2)^2+(y-4)^2=100$ або $(x-18)^2+(y-16)^2=100$]

Цікаві задачі. Як розв'язати деякі задачі, коли б було дано лише один із значків точок.

Напр: коли сказано, що коло (1) дотикається прямої в точці A, що має вигляд $x=4$, або, що має рядну $y=0$. Теж для кола (2).

Ї-177. Написати рівняння кола, що має радіус 5 і дотикається прямої $3x+4y=1$. Центр цього кола лежить на прямій $y-x=3$

[$(x-2)^2+(y-5)^2=25$]

Ї-178. Написати рівняння кола, що: 1) проходить через точку $M(2,-2)$ і дотикається прямої: $2x+y=1$ в точці $N(5,1)$.

2) проходить через точку $K(5,9)$ і дотикається прямої: $4x+3y=3$ в точці $A(-3,3)$.

[1) $(x-3)^2+y^2=5$ 2) $(x-1)^2+(y-6)^2=25$]

Ї-179. Написати рівняння кола, що: 1) проходить через точки: $A(2,0)$ і $B(-2,0)$ і дотикається

простої: $4y = 3x + 6$.

2) проходить через точки: $M(0,0)$ і $N(2,0)$ і зовнішньо дотикається кола: $(x-5)^2+(y-3)^2=16$.

[1) $3x^2+3y^2+16y=12$ 2) $(x-1)^2+y^2=1$ або: $(x-1)^2+(y+\frac{24}{7})^2=\frac{625}{49}$]

[Увага: В задачі 2) приділяємо увагу, що шукані кола рівних $d=2+4$, оскільки центри даного і шуканого кола]

2-180. 1) Написати рівняння дотичної до кола: $x^2+y^2=34$ рівнобіжної до прямої $5x-3y+5=0$ (проаналізувати)

2) Теж написати рівняння дотичної до кола: $x^2+y^2=100$ прямовісної до прямої $4x+3y=3$ (проаналізувати)

3) Написати рівняння дотичної до кола $x^2+y^2=169$ рівнобіжної до прямої $5x+12y=3$.

[1) $5x-3y=34$ $3y-5x=34$ 2) $3x-4y=50$; $4y-3x=50$ 3) $12y+5x=\pm 169$]

2-181. Знайти перехрестя:

1) прямої: $x-y=1$ з колом: $x^2+y^2=6x+4y=3$

2) " : $3x+y=25$ " : $x^2+y^2=65$

3) " : $4x+3y=70$: $x^2+y^2-4x-2y=80$

[1) $(3,2)$; $(-1,-2)$ 2) $(4,7)$; $(8,1)$ 3) $(10,10)$]

Ч-182 Знайти спільні точки:

1) кола: $x^2+y^2=169$ і прямої: $3x-2y+9=0$

2) " : $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ " : $3x-4y=19$

3) " : $(x+2)^2+(y-3)^2=16$ " : $y=5x-8$.

А також проаналізувати в якому положенні ці прямі зимяно кола.

[1) січна в точках: $(5,12)$ і $(-9\frac{2}{13}, -9\frac{3}{13})$

2) дотична в точці: $(5,-1)$ 3) не зустрічаються з колом бо розв'язки рівні, напр: $x_{12}=\frac{53\pm 5i}{26}$ ...]

Ч-183. Обчислити площу що утворює:

1) з колом: $3x^2-29x+3y^2+43=0$ січна: $4x-3y=11$

2) " : $x^2+y^2=25$ січні: 1) $x+y=7$ 2) $x+5y=20$

3) " : $x^2+y^2-6x+4y=0$ січна: $3x+y=0$

[1) 5 2) $\sqrt{2}$ і $2\sqrt{5}$ 3) $\frac{9\sqrt{10}}{5}$]

Ч-184. До кола: $(x-3)^2+(y-2)^2=16$ проведено січну $4x-3y=6$. Перехрестя січної з колом сполучено з початком вісей. Обчислити поле утвореного прикутника.

[9,6 кв. од]

Ч-185. До кола: $x^2+y^2-3x-5y=4$ проведено січну $3y-4x+11=0$. Обчислити відтинок січної замкнений колом і відстань цієї січної від початку координатних вісей. [5; $\frac{11}{5}$]

№ 186. Обчислити кут:
1) кола: $x^2+y^2-4x-6y=12$ з прямою: $3x-y=8$
2) " : $(x-2)^2+(y+1)^2=100$ " " : $4x+3y=5$.
[1) 71°33'54" 2) 90°]

№ 187. Написати рівняння і обчислити довжину дотичних проведених з
1) точки: $A(-8,5;-17)$ до кола: $x^2+y^2-22x+8y=32$.
2) " : $B(2,14)$ " " : $x^2+y^2=100$
3) з точок: а) $M(6,5;5)$ б) $N(-5,4)$ в) $P(0,9\frac{1}{3})$ до кола: $x^2+(y-5)^2=13$.
[1) $5y-12x=17$; $y=-17$; $t=19,5$ 2) $4y-3x=50$; $4x+3y=50$; $t=10$; 3) а) $2x+3y=28$; $2x-3y+2=0$ $t=\frac{13\sqrt{3}}{2}$; б) $2y-3x=2\sqrt{3}$; $2x+3y=2$; $t=\sqrt{13}$ в) $3y\pm 2x=28$; $t=\frac{2\sqrt{13}}{3}$]

№ 188. Обчислити кути, що обмежують фігури, обчислені у попередній задачі.
[1) 67°22'48" 2) 90° 3) а) 67°22'48" б) 90° в) 112°37'12"]

№ 189 Під якими кутами видно (кут зору):
1) Коло: $x^2+y^2=169$ з точки $M(17,-7)$
2) " : $(x-8)^2+(y-7)^2=25$ з точки: а) $A(3,13)$; б) $B\left[\left(8+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right),\left(7-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\right]$
[1) 90° 2) а) 90° б) 45°]

№ 190. Написати рівняння бічних

точки $M(17,-2)$ знайдено кола: $x^2+y^2-4x-6y=12$ і обчислити її відтинок, замкнений колом.

$[3x-y=8;\ d=3\sqrt{10}]$

Ч-141. 1) Знайти значення бігуна, коли рівняння:

кола: $x^2+y^2=64$ а бігунки $2x-5y+12=0$

$[x_0=-10\frac{2}{3};\ y_0=26\frac{2}{3}]$

2) Теж для кола: $x^2+y^2=65$ і бігунки: $x+5y=13$. $[x_0=5;\ y_0=-25]$

3) Теж для кола: $x^2+y^2-6x+4y=3$ і бігунки: $x-y=1$.

$[1)\ (-10\frac{2}{3},\ 26\frac{2}{3};\ 2)\ (5,25)\ 3)\ (-1,2)]$

Ч-142. Знайти перехрестя й обчислити сильні натиски кол:

1) $x^2+y^2=100$; $x^2+y^2-12x=4$
2) $x^2+y^2=40x$; $x^2+y^2=30y$
3) $x^2+y^2=25$; $(x-2)^2+(y-1)^2=10$
4) $(x-9)^2+(y-8)^2=64$; $x^2+y^2+6x-16y+57=0$
5) $(x-5)^2+(y+6)^2=9$; $x^2+y^2=16$
6) $x^2+y^2-12y=25$; $x^2+y^2-12x-7y=25$.

[1) $(8,6)$; $(8,-6)$: $d=12$ 2) $(0,0)$; $(14,4;19,2)$; $d=24$.
3) $(3,4)$ $(5,0)$: $d=2\sqrt{5}$ 4) дотикаються в точці $(1,8)$ 5) не перехрещуються
6) $(5,12)$ $(-\frac{125}{169},-\frac{300}{169})$; $d=14\frac{12}{13}$]

Ч-143. Написати рівняння спе-

ної, радикальної) всіх кол поданих в попередній задачі.

7-194. Написати рівняння степеної осі і хорди кол:

1) $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ і $(x-1)^2+(y-2)^2=16$

2) $x^2+y^2-4x-6y=3$; $x^2+y^2+6x-2y+1=0$

і довести що вони прямові.

[1) $6x-2y=1$; $x+3y=7$ 2) $5x+2y+2=0$ $5y-2x=11$; в обох випадках задовольняється умова прямовості $AA_1+BB_1=0$]

7-195. Центр кол: $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ $x^2+y^2+2x-6y+6=0$, а також обчислити відстань центрів.

[$2x+3y=7$; $3x-2y+1=0$; $\sqrt{13}$]

7-196. Знайти степеневу точку кол: 1) $(x-3)^2+y^2=5$; $(x+4)^2+(y+1)^2=9$ і $(x-1)^2+(y-2)^2=7$.

2) $x^2+y^2+34x-14y+169=0$; $(x-1)^2+(y-13)^2=1$ $(x-13)^2+(y-2)^2=4$.

[1) $\left(-\frac{1}{15};-\frac{25}{16}\right)$ 2) початок коорд. всей]

7-197. Визначити рівняння кол, що дотикаються:

1) Зовнішнє до кол $(x-3)^2+y^2=1$; $(x-1)^2+(y-3)^2=4$; $(x+3)^2+(y+3)^2=16$

2 внутрішнє до кол: $x^2+y^2=25$; $(x+5)^2+(y+8)^2=16$ і зовнішнє з колом: $(x+10)^2+(y-4)^2=25$.

Увага: Позначити довжину ту-
ників; напр: для першого випадку:
$(\rho+1)^2=(a-3)^2+b$; $(\rho+2)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$ і т.д.
де a, b і ρ - значники центру і
луч невідомого кола. Одержані
при рівнання 3 трьома невідоми-
ми. [Відп: 1) $(x-1)^2+y^2=1$ 2) $(x-6)^2+(y+8)^2=225$]

7-198. Під якими кутом перехре-
щуються кола:

1) $x^2+y^2=64$ і $(x-5)^2+y^2=49$
2) $(x-9)^2+(y-8)^2=64$; $(x+3)^2+(y-8)^2=16$.
3) $(x-6)^2+y^2=40$; $x^2+y^2=100$.

Увага: Кутом перехрещення кол
(або яких небудь кривих) зветься
кут, що утворюють дотичні по-
ведені до даних кол (взагалі до кри-
вих) через перехрестя їх.

[1) $\varphi=38^\circ 12' 48''$; 2) $\varphi=0$ що це означає?
3) $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{9}{13}$ · $\varphi=145^\circ 18' 18''$]

7-199. Обчислити відтинки дотичної,
піддотичної, прямової і підпрямової, а
також написати рівнання дотичної і
прямової, поведених:

1) через точку: $A(8,6)$ до кола: $x^2+y^2=100$
2) " " : $B(15,8)$ " " : $x^2+y^2=289$
3) " " : $C(4,0)$ " " : $x^2+y^2=16$.

[1) $4x+3y=50$; $3x-4y=0$; $t=7,5$; $S_t=4,5$; $n=10$ $S_n=8$
2) $15x+8y=289$; $8x-15y=0$; $t=9\frac{1}{15}$; $S_t=4\frac{13}{15}$; $n=17$; $S_n=15$
3) $x=4$; $y=0$; $t=0$; $S_t=0$; $n=4$; $S_n=4$.]

7-200. Обчислити відстані дотичної, нормалі, прямої та підпрямої, а також написати рівняння дотичної та прямої побудених:
1) через точку: $M(9,9)$ до кола: $(x-5)^2+(y-6)^2=25$
2) " " : $N(-4,10)$ " " : $(x-1)^2+(y+2)^2=169$.
Увага: Щоб визначити відстані дотичної та прямої, визначаємо з їх рівнянь точки перехрестя з віссю ікс'ів. Тоді легко визначити відстані через значення їх x ів, а також і знати їх $S_t=tx$, $S_n=nx$
[1) $4x+3y=63$; $4y-3x=9$; $t=11\frac{1}{4}$; $S_t=0_4$; $n=15$ $S_n=12$; 2) $12y-5x=140$; $12x+5y=2$; $t=26$; $S_t=24$; $n=10\frac{5}{6}$; $S_n=4\frac{1}{6}$]

Геометричні задачі, що розв'язуються за допомогою аналітичної геометрії.

7-201. Обчислити обвід та поле кола визначеного рівнянням
$x^2+y^2+4x-14y=47$
[$P=62,83$ кв.од $S=314,16$ кв.од]

7-202. Обчислити різницю полів: прикутника з богами:
$3x-4y+1=0$; $x+7y+34=0$ $7x-y=77$

і кола обведеного на нього?
[$225(\pi-2)=256,26$ кв. од]

2-203. Обчислити поле введеного в коло: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ прямокутника, два боки якого визначаються рівняннями: $x-y+1=0$; $x+y=1$ [$S=2$ кв. од.]

2-204. Розв'язати прикутник, що має вершок в точці $M(0,3)$ а довжини дотичні проведені з цієї точки M до кола: $(x-2)^2+(y+5)^2=34$.
[Прикутник рівнораменний прямокутний; боки: $\sqrt{34}$; $2\sqrt{17}$; $S=17$ кв.од]

2-205. Теж, коли вершок є в точці $A(7,23)$ а рамена є дотичні до кола: $x^2+y^2=289$.
[прямокутний; боки: $17, 17, 17\sqrt{2}$; $S=144,5$]

2-206 Розв'язати прикутник, що має вершком точку $A(0,0)$, а за основу тятиву $4x-3y=6$ кола $(x-3)^2+(y-2)^2=16$.
[боки: 8; 7,50...; 1,34; $S=4,8$ кв. од]

2-207. Обчислити поле рівнораменника, утвореного дотичними проведеними до точки перехрестя кол:
1) $x^2+(y-5)^2=16$ і $x^2+y^2=9$
2) $4x^2+4y^2=289$ і $(x-10,5)^2+y^2=25$.
[1) $S=12$ кв од 2) $S=42$ кв.од]

Ч-208. Знайти геометричний осередок вершин прямокутників, що мають спільну основу 2в і сталу суму (або різницю) квадратів інших сторін, рівних $a^2+c^2=m$ (або $c^2-a^2=n$).

Розв'язання: Будемо вважати середину основи за початок вісей, основу 2в за вісь x-ів, симетральну основи (пряму з середини її) за вісь y-ів, а значення вершина B означимо за (x,y). Сполучивши точку O з вершиком B (рис 99) отримаємо осередя основи OB.

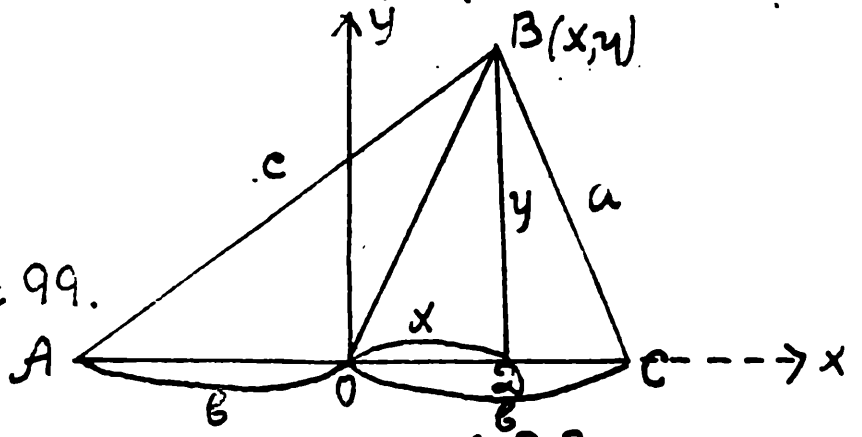


Рис 99.

З прямокутника ODB маємо: $x^2+y^2=OB^2$. Але з геометрії нам відомо, що четверний квадрат осередньої є рівний подвійній сумі квадратів сторін трикутника без квадрата основи, себто: $4M^2=2(a^2+c^2)-4b^2$, а тому:

$$x^2+y^2=\frac{2(a^2+c^2)-4c^2}{4}$$

Згідно умови задачі величини $a^2+c^2=m$ і b^2 є сталі величини, а тому: $x^2+y^2=OB^2$ є рівнянням кола дуга AB (осередньої основи прямокутника) рівної $OB=\frac{1}{2}\sqrt{2m-4b^2}$ (див. рис 100)

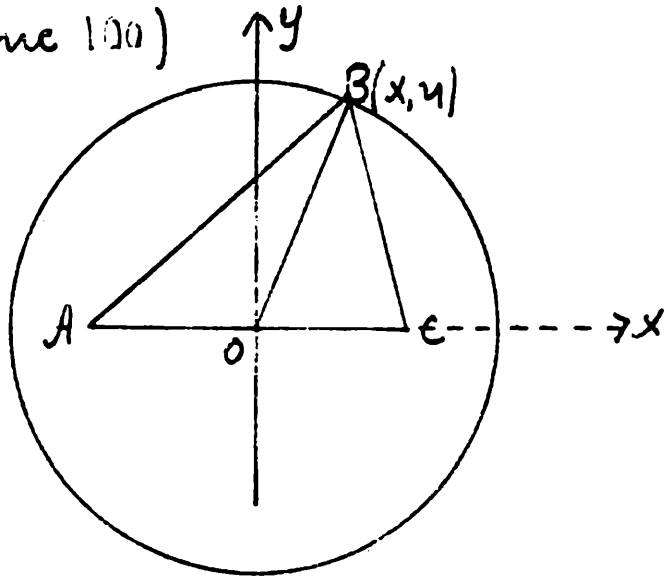


Рис 100

В окремому випадку, коли: $a^2+c^2=4b^2$ $m=4b^2$, то $OB=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot4b^2-4b^2}=b$.
Себто B є вершиною прямого кута, що спирається на основу прямокутника, як на поперечник.

Ч-209. Знайти геометричний осередок вершин прямокутників зі сталою основою $2b=6$, у яких рамена зберігають сталe відношення $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$?

Увага: Прийняти вісі координат, як в попередній задачі (рис 100) визначаючи з прямокутних прямокутників ABD і CBD квадрати протилежних: a^2; c^2 на підставі теореми

пітагора. Далі беремо їх відношення й запишемо $\frac{a^2}{c^2}$ підставляємо замість $\frac{1}{4}$. В кінці маємо розв'язок: $(x-5)^2+y^2=16$.

Ч- 210. Знайти геометричний осередок вершин прямокутників, що мають спільну основу 2b і вершиковий кут β°.

Коли вершиковий кут β є стала величина, то й сума решти кутів $\alpha+\gamma$ є також стала величина.

План розв'язку:

спише $tg\beta = tg[180-(\alpha+\gamma)] = -tg(\alpha+\gamma)$

Маму: $tg\beta = -tg(\alpha+\gamma) = -\frac{tg\alpha+tg\gamma}{1-tg\alpha tg\gamma}$ -(1)

Приймаючи початок та напрями осей як у попередніх задачах, як з ΔABD і ΔDBC обчислюємо $tg\alpha$ і $tg\gamma$, а саме (рис 101) $tg\alpha = \frac{y}{b+x}$; $tg\gamma = \frac{y}{b-x}$ і підставляємо в вір (1).

$$tg\beta = -\frac{\frac{y}{b-x}+\frac{y}{b+x}}{1-\frac{y^2}{(b+x)(b-x)}}$$

Зводимо до спільного знаменника і зробивши спрощення, одержимо:

$y^2 tg\beta + x^2 tg\beta - 2by - b^2 tg\beta = 0$, або:

$x^2+y^2-\frac{2b}{tg\beta}y-b^2=0$; додамо і відніймемо по $\frac{b^2}{tg^2\beta}$ маємо:

$$x^2+\left(y^2-2\frac{b}{tg\beta}y+\frac{b^2}{tg^2\beta}\right)=b^2+\frac{b^2}{tg^2\beta}.$$

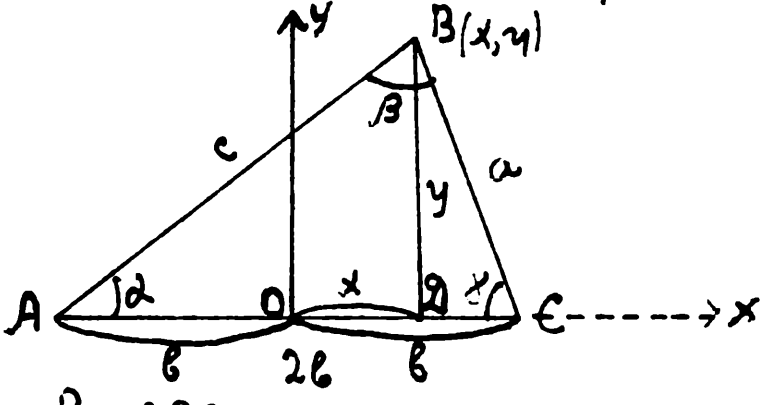
Звідси:

$$x^2+\left(y-\frac{b}{tg\beta}\right)^2=b^2\left(1+ctg^2\beta\right), \text{ або:}$$

$$x^2+\left(y-b\,ctg\beta\right)^2=\left(\frac{b}{\sin\beta}\right)^2.$$

Це рівняння кола радіуса $r=\frac{b}{\sin\beta}$ з центром в точці $K(0, b\,ctg\beta)$.

Рис 101



7-211. Розв'язати попередню задачу для таких окремих випадків:

1) $2b=2$; $\beta=90°$ 2) $2b=4$; $\beta=60°$

3) $2b=8$; $\beta=45°$ 4) $2b=10$; $\beta=30°$

[1) $x^2+y^2=4$; 2) $x^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{16}{3}$;

3) $x^2+(y-4)^2=32$; 4) $x^2+(y-5\sqrt{3})^2=100$]

7-212. Визначити висоту прямої трикутної призми, що має об'ємом 12672 куб. см, а двоє з боків основи є лежать: $4y-3x=60$; $4x+3y=80$ обведеного навколо трикутника кола: $x^2+y^2=400$. [$h=33$ см.]

Ч-213. Бічниця правильної чотирістінної піраміди 20 кв.мір. Косинний осевий переріз піраміди лежить в площі для якої косинна основи висловлюється рівнанням: $6x-8y=5$, а вершок перерізу (разом піраміди) лежить в точці $S(1,2)$. Обчислити обєм та бік основи?

[$V=24$ кв.м. $a=4$ м.]

Ч-214. Правильні многостінні призма й піраміда мають спільні висоту й основу. Рівнання боку основи є: $12x-5y=11$, а центр кола, введеного у цей многокутник, лежить на перехресті простих: $2y-5x=27$; $3x+4=8$. Обчислити спільну висоту призми та піраміди, коли повержні їх відносяться як $8:5$

[$h=8$]

Ч-215. Обчислити обєм трістінної піраміди, що має бокові основи: $AB\equiv x+y=2$, $BC\equiv y-x=4$ і $AC\equiv x+9y+14=0$, а висотою поперечник кола, обведеного на цьому прикутнику?

[рн кола $r=\frac{\sqrt{82}}{9}$; $V=\frac{20\sqrt{82}}{9}=60.37$ кв.о.]

Ч-216. Правильний чотирикутний пірамідний пень має об'єм 4074 куб. од. На нижній основі пня обведено коло рівнянням: $x^2+(y-9,5)^2=144,5$. Кат в точці $A(8\frac{1}{2},18)$ обводу цього кола повести до нього дотичну, то її підготівка буде рівна висоті самого пня. Обчислити бік верхньої основи пня? [$b=13$]

Ч-217. Обчислити поверхню та об'єм правильної чотирикутної призми, що має висоту $=1$, а основою квадрат введений у коло $16x^2+16y^2-24x+32y=375$.

[$S=128,28$ кв. од. $V=50$ куб. од]

Ч-218. Осевий переріз вальця є квадрат. Обвід основи цього вальця проходить через точки: $A(0,1)$ $B(1,0)$ і $C(1,2)$. Обчислити об'єм і поверхню вальця.

[$V=6,2832$ куб. од. $S=18,85$ кв. од]

Ч-219. Осевий переріз вальця $=40$ кв. од. До кола основи поведено дві січні: $3x-5y=23$ і $2x+7y=5$, що переходять через центр, і дотичну: $4x-3y=2$.

Обчислити бічну та обаг вальця? [$S = 125{,}664$ кв.од $V = 314{,}16$ куб.од]

Ч-220. Твірна стіжка нахилена до основи, що визначається рівнянням: $x^2+y-22x+12y+57=0$, під кутом $\alpha = 64°\,24'\,40''$. Обчислити обаг стіжка.

$$[V = \frac{\pi r^3 \operatorname{ctg}\alpha}{3} = 2186{,}75 \text{ куб.од}]$$

Ч-221. Обчислити поверхню та обаг прямого стіжка, твірна якого є рівна подвійному поперечнику кола основи, що проходить через точки (0,8) (6,2) (12,8)

$$[S = 432\pi\,;\ V = 576\pi\sqrt{3}]$$

Ч-222. Вальець має основою коло, що проходить через точки (2,3),(-2,3),(0,-2) і висоту рівну поперечнику цього кола. Обчислити обаг і поверхню правильної, обведеної на вальці шестистінної призми?

[$S = 201{,}84$ кв.од $V = 195{,}11$ куб.од]

Ч-223. Обчислити обаг та поверхню кулі, утвореної обертанням навколо поперечника кола, що проходить через точку (9,2) і дотикається координатних осей. [$S_1 = 3631{,}68$ кв.од. $S_2 = 314{,}16$ кв.од. $V_1 = 20579{,}46$ куб.од. $V_2 = 523{,}60$ куб.од.]

Ч-224. З центрів кол: $x^2+y^2-16x+39=0$ і $x^2+y^2=49$, поведено промені у верхню точку їх перехрестя. Утворений за допомогою цих променів прикутник обертається навколо променя, як вісі. Обчислити об'єм та поверхню цього круглого тіла? [$S=30\pi\sqrt{3}$; $V=50\pi$]

Ч-225. Осевий переріз стіжка є правильний прикутник, а обвід основи стіжка проходить через центри трьох кол: 1) $x^2+y^2-10x-10y+41=0$ 2) $x^2+y^2-10x+6y=2$ 3) $x^2+y^2+2x+6y=6$. Обчислити поверхню й об'єм кулі, обведеної на цьому стіжкові?

[$S=\frac{400\pi}{3}$; $V=\frac{4000\pi}{27}\sqrt{3}=806{,}13$ куб. од]

Ч-226. Вирізок круга в $53°7'49''$ обертається навколо одного з своїх бічних променів. Обчислити об'єм і сферичну поверхню утвореного кругового вирізку, коли відомо, що метовий промінь з кінця дуги даного вирізку на вісь очерпує коло: $x^2+y^2-8x-6y+9=0$.

[$V=\frac{80\pi}{3}$; $S=62{,}83$ кв. од]

§-32. Деякі Зауваження до Другого розділу.

I

Механічний спосіб написання рівняння дотичної до кола в якій небудь його точці $M(x_1,y_1)$

коли рівняння кола є в алгебричній формі.

Хай рівняння кола є в упорядкованій алгебричній формі: $x^2+y^2+Mx+Ny+P=0$, або: $x^2+y^2-2mx-2ny-p^2=0$ (де $M=-2m$, $N=-2n$ і $P=-p^2$)

Перетворимо його в основну форму й маємо:

$$x^2-2mx+m^2+y^2-2ny+n^2=p^2+m^2+n^2=r^2$$

або: $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$ (де $r^2=p^2+m^2+n^2$)

Ми вже знаємо, що рівняння дотичної в точці $M(x_1,y_1)$ обводу буде:

$$(x_1-m)(x-m)+(y_1-n)(y-n)=r^2$$

або перемножуючи:

$$x_1x-m(x+x_1)+m^2+y_1y-n(y+y_1)+n^2=r^2$$

або: $x_1x+y_1y-m(x+x_1)-n(y+y_1)=r^2-m^2-n^2=p^2$

Порівнюючи одержане рівняння дотичної: $xx_1+yy_1-m(x+x_1)-n(y+y_1)=p^2$ ... (74) з рівнянням кола в алгебричній формі: $x^2+y^2-2mx-2ny=p^2$, ми можемо вивести механічне правило написання рівняння дотичної в якій небудь точці обводу кола, а саме:

Щоб написати рівняння дотичної ми можемо в алгебричній формі рівняння кола написати квадрати невідомих як добутки їх, а подвійні невідомі першого степіня як суми їх [напр:

$$xx+yy-m(x+x)-n(y+y)=p^2$$
]

і в кожній парі цих невідомих перелічити одно з них на відповідного значника точки.

(напр: $x x_1 + y y_1 - m(x+x_1) - n(y+y_1) = p^2$. Тут зроблено заміну підкреслених невідомих) Ми брали $M = -2m$; $N = -2n$ і $P = -p^2$, тому: $m = -\frac{M}{2}$; $n = -\frac{N}{2}$ і $p^2 = -P$. Підставляючи ці вартості у рівняння дотичної, ми матимемо:

$$x x_1 + y y_1 + \frac{M}{2}(x+x_1) + \frac{N}{2}(y+y_1) + P = 0 \quad \ldots (75)$$

Отже цей вір показує, що коли ми маємо рівняння кола у самій загальній алгебричній формі, то упорядкувавши його, себ-то приводячи до вигляду: $x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0$. і перетворивши сочинники невідомих у перших степенях, як подвійні величини, себто:

$$x^2 + y^2 + \frac{M}{2}\cdot 2x + \frac{N}{2}\cdot 2y + P = 0$$

ми легко можемо скласти рівняння дотичної до кола користуючися поданим вже правилом.

Приклад:

1) $x^2 + y^2 - 2x - 5y - 5 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - \frac{5}{2}2y - 5 = 0$

Тому рівняння дотичної:

$$x x_1 + y y_1 - (x+x_1) - \frac{5}{2}(y+y_1) - 5 = 0$$

2) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 48y + 99 = 0$. Упорядковуючи:

$$x^2+y^2-2x+12y+\frac{99}{4}=0$$

рівняння дотичної:

$$xx_1+yy_1-(x+x_1)+6(y+y_1)+\frac{99}{4}=0$$

II

Відтинкове рівняння кола.

Хай маємо центральне рівняння:

$$x^2+y^2=r^2$$

Поділимо всі члени на r^2 і матимемо:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1 \text{ або: } \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1 \quad \ldots\ldots (76)$$

Цей вигляд рівняння кола звуть: „відтинковим", або: „рівнянням через осі".

Аналогічно для основної форми, матимемо: $\frac{(x-a)^2}{r^2}+\frac{(y-b)^2}{r^2}=1$ або: $\left(\frac{x-a}{r}\right)^2+\left(\frac{y-b}{r}\right)^2=1$

Розділ III

Криві другого степеня

1

Парабола.

§-33. Визначення параболи й основне (вершинове) рівняння її.

Розв'яжемо таку задачу:

Знайти геометричний осередок (місце) точок, рівновіддалених від даних точки й прямої.

Хай дана пряма буде dd (рис 102) а точка F. Означимо віддалення точки F від прямої dd через p.

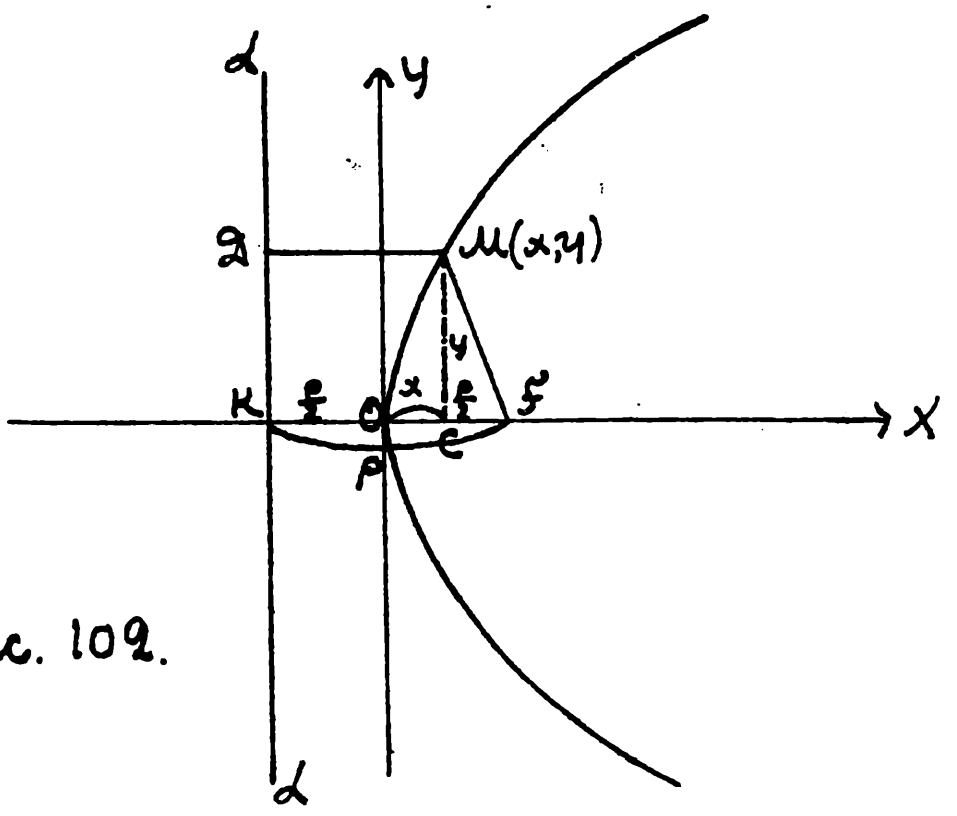


Рис. 102.

Одна з точок, що належатиме до даного геометричного осередку безумовно лежатиме в точці O, посередині KF (бо задовольняється умова: KO = OF) Ця точка є найближча до прямої dd (бо відалення KO і OF творить пряму) і тому буде вершиною геометричного місця. Цей вершок O ми приймемо за початок координат, пряму OX з точки F на пряму dd за вісь x-ів, а пряму до вісі x-ів у точці O - за вісь y-ів. Де б точка M(x,y) не лежалаб на даному геометричному осередку, завжди існуватиме прямокутний трикутник CMF, з якого ми можемо звязати функціонально значення точки з сталими величинами, що дає умова.

Справді, з прямокутника CMF маємо:

$$MF^2 = MC^2 + CF^2 \quad \ldots (1)$$

Але згідно нашого геометричного осередку є те, що: $MF = MD = KO + OC =$
$= \frac{p}{2} + x$; $MC = y$; $CF = OF - OC = \frac{p}{2} - x$.
Підставляючи у рівність знайдені вартості величин MF, MC і CF, одержимо:

$$\left(\frac{p}{2} + x\right)^2 = y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2, \text{ або:}$$

$$y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = p \cdot 2x$$

(різниця квадратів)
Таким чином ми одержали рівняння: $y^2 = 2px$, що є рівнянням нашого геометричного осередку. Крива, що являє з себе геометричний осередок точок, рівновіддалених від даних прямої і точки зветься: параболою.
Виведене рівняння параболи є складене при умові, що початок координат лежить у вершину цієї параболи й тому зветься:
вершиковим рівнянням параболи.
отже вершикове рівняння параболи має вигляд:

$$y^2 = 2px \quad \ldots\ldots (77)$$

Дана пряма dd носить назву:
направляючої параболи, або:

директриси параболи.
Точка F має назву вогнища або фокуса параболи. Відалення $\frac{p}{2}$, вогнища від направляючої зветься вогнищевим або фокусовим відаленням; воно означається завжди літерою p і вважається додатною величиною. Величина подвійного вогнищевого відалення носить назву: здвиг, або параметра параболи. [Вогнищеве відалення p ще часто звуть півздвигом (півпараметром) параболи]

Аналіза рівняння параболи:

$$y^2 = 2px$$

Визначимо з рівняння параболи значення y і матимемо:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

1) Перш за все, коли ми вважаємо p додатною величиною, то x не може мати від'ємних вартостей, бо тоді вартости y будуть уявні і реальних точок кривої не існуватиме.

Тому парабола лежить лише з одного боку від осі y-ів, а саме в бік додатних x-ів

2) Коли $x=0$, то $y=0$, себто крива проходить через початок осей.

3) Взагалі при зростанню вартостей x, абсолютні вартости зростають і коли $x=\infty$, то й $y=\infty$. Крива є безмежна, бо при зростанню відповідних до безмежности "" ряді також простують до безмежности.

4) Кожній вартости x відповідає дві вартости y-ів рівні по величині і протилежні по знаку. Тому парабола складається з двох галузей симетрично положених зглядно осі x-ів, а тому остання носить назву осі параболи.

Найменшій вартости $x=0$ відповідає лише одна точка (одна вартість $y=0$) що лежить на цій осі.

Тому ця точка $O(0,0)$ носить назву: <u>вершина параболи</u>

Розглянемо, що виходить, коли $x=\frac{p}{2}$

Тоді $y=\pm\sqrt{2p\cdot\frac{p}{2}}=\pm p$. Отже відтинок простої, що сполучує точки $(\frac{p}{2},p)$ і $(\frac{p}{2},-p)$, уявляє з себе тятиву параболи, що проходить прямово до її осі через вогнище F. (бо віддалення F від початку координат є рівне $\frac{p}{2}$)

Ця хорда своєю величиною є рівна 3 хвилинковій параболи: 2p. (рис 103)

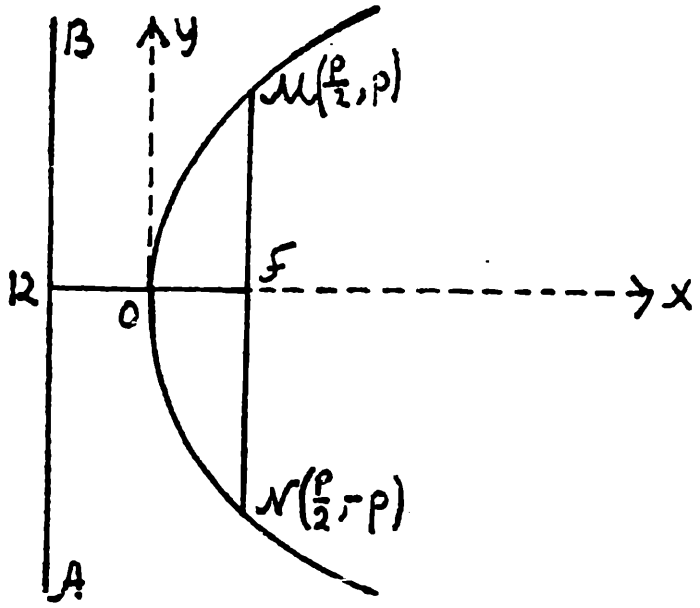


Рис. 103

§-34. Геометричне визначення точок параболи і її креслення

Розглянемо ще одну властивість параболи. Візьмемо яку небудь точку $M(x,y)$ на ній (рис.104). Тоді, як відомо, відстані MF і MP будуть рівні: $MF=MP$. Коли ми сполучимо точку (вгорі) F з точкою P, то одержимо рівнобедрений прямокутний $\triangle MPF$, а тому точка M завжди лежатиме на прямій $\frac{1}{2}M$, що поставимо до основи прямокутника FP з її середини. (рис 104) Ця властивість дає нам можливість визначити точки параболи. А саме: щоб знайти яку небудь точку параболи треба через вгорі з повести довільний промінь FP до перетре-

чення в точці F з напрямною. З середини відтинка FP поставити до нього пряму, а через точку P провести рівнобіжну вісі параболи. Перехрестя M цього прямого ΔM з рівнобіжного PM і буде вершком рівнораменного прямокутника MPF, себто точкою (з доведеного перед цим) самої параболи.

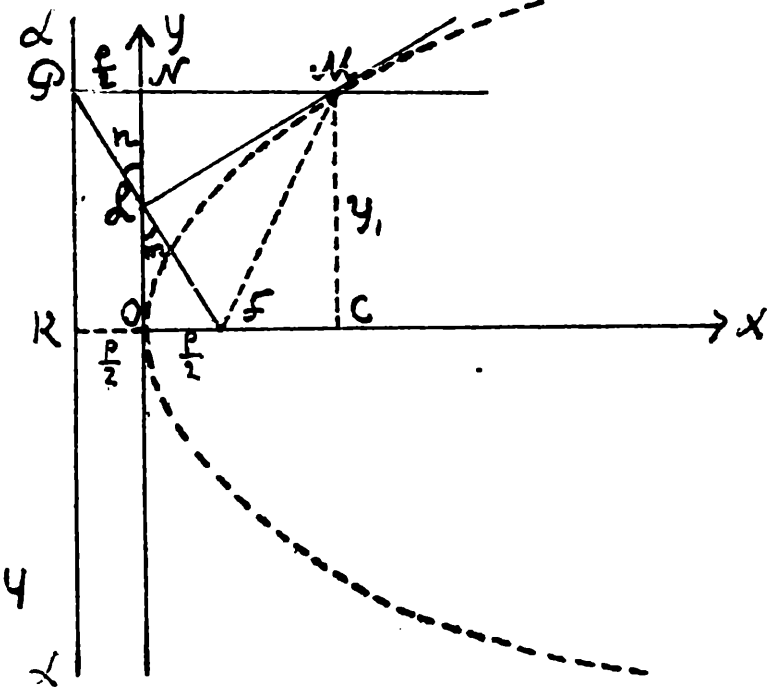


Рис. 104

Зауважимо ще одну властивість параболи, а саме: Коли з довільної точки параболи M провести рівнобіжну до її вісі, тоді промінь направлений з вогнища до перехрестя P згаданої рівнобіжної з директрисою буде переполовинюватися вісю ірекїв і у свою чергу відтинати від цієї вісі відтинок (od) рівний половині радіяльної точки M.

Трикутники: odF і ΔPNd

мають прямі $OS = PN = \frac{p}{2}$ і гострі кути: $\angle m$ і $\angle n$ рівні як вертикові, а тому є рівнокінцевими: $\Delta OdF = \Delta PNd$. Звідси бокі:
1) $Fd = dP$ 2) $Od = dN$, але $ON = CM = y_1$
отже: $Od = dN = \frac{y_1}{2}$ ..... (78)

Ці спостереження облегчують знаходження середини даного проміня, поведеного з вогнища.
Тому щоб збудувати параболу, коли відомо її вогнище $2p$, треба чинити так: (рис 105)
1) повести довільну просту, що буде віссю параболи
2) наміткти на цій осі довільну точку A, яку будемо вважати за початок направленої осі
3) Відкласти від точки A, в напрямі додатних x-ів відтинки: $\frac{p}{2}$ і p і ізінші їх будуть:
O - початком координат, а F-вогнищем.
4) Через точки A і O повести прямі до вибраної нами осі параболи й ці прямі будуть:
1) Ld' - направляючою віссю
2) Oy - віссю ординат.
Після цього ми проводимо з

точки F як мога більшої проміні, що перехрещують направляючу вісь і 1) з кожного перехрестя променя і вісі y-ів ставимо до променя пряму; 2) з кожного перехрестя направляючої вісі з цими променями ставимо до неї пряму. Точки збігу кожної пари відповідних прямих до променя і вісі будуть точками параболи.

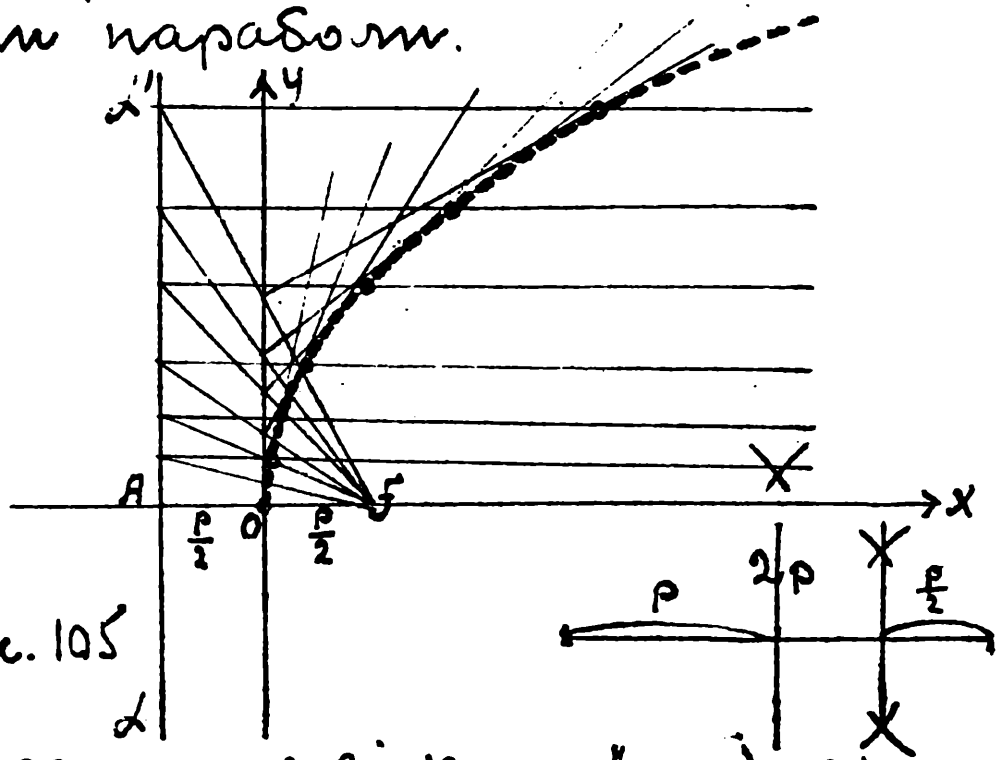


Рис. 105

Креслення від'ємної гілки параболи аналогічне до креслення додатної гілки.

Існує ще кілька способів креслення параболи, яких ми в нашому короткому курсі розглядати не будемо.

Для креслення параболи існує спеціальний технічний

прилад, що носить назву: параболографа.

Але ми розглядати його не будемо, а покажемо технічний спосіб креслення параболи за допомогою лише лінійки та косинця. Тим більш що в основі своїй параболограф посідає той же принцип.

Накреслимо довільну пряму CD. Лінійку будемо вважати за напрямну вісь (директрису). Прикладаємо до неї лінійку MN (рис 106) До верхнього її косинця тим чи іншим прикріплюємо нитку (нитку, що не витягується) нитку, що лежить вздовж прямої MK і рівна їй по довжині

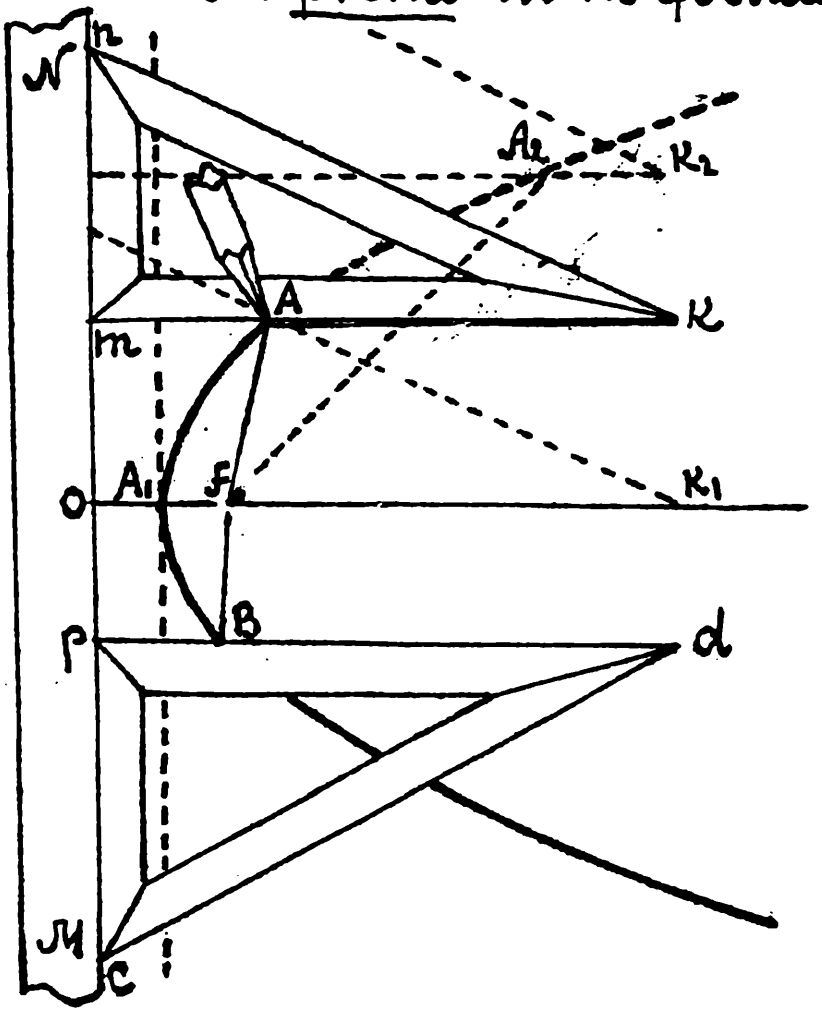


Рис. 106

До простої CD в якій небудь точці O ставимо пряму Ox, що буде віссю параболи. І на ньому від точки O відкладаємо відрізок OF = p (пів даного зліпшка параболи) Тоді точка F - є вогнищем параболи. Кінець нитки т закріпимо в точці F і нитку притискаємо олівцем (натягнувши) до рубa косинця mk (напр в точці A)

Коли ми приложимо косинець mk рубом mn до лінійки MN, а рубом mk до простої Ox, то вістря олівця буде в точці A_1, посередині між O і F ($OA_1 = A_1F$)

Коли далі почнемо посувати цей косинець вздовж лінійки MN вгору, то вістря олівця накреслить нам горішню галузь параболи

Щоб накреслити нижню галузь, ми перекидаємо косинець догори, як показано на малюнку і чинимо, як в першому разі.

Цей технічний спосіб креслення параболи є фактичним виконанням поданого нами перед цим теоретичного способу.

Справді, коли нитка має довжину рубa косинця mk, то в

кожному положенню цього косинця довжина частини нитки FA є рівна довжині частини рубаючи mA, з якого нитку знято. Тому точка A знаходиться у вершині рівнобедреного прямокутника, збудованого на довільному промені Fm з вогнища, і вихідної точки параболи як геометричного осередку, бо для точки A завжди є рівновіддалена і від вогнища F і від напрямної осі CD (FA = Am)

§-35 Інші форми рівняння параболи.

I Дуже просто можно довести вершинові рівняння параболи для тих випадків, коли (рис 107)

1) За вісь параболи є від'ємна вісь ікесів. Рівняння такої параболи буде: $y^2 = -2px$ ---- (79)

2) За вісь параболи є додатна вісь ігреків; рівняння параболи:

$$x^2 = 2py \text{ ---- } (80)$$

і 3) За вісь параболи є від'ємна вісь ігреків; рівняння:

$$x^2 = -2py \text{ ---- } (81)$$

Для зразку подібного роду довід подаємо далі при доведенню еквівалентного рівняння параболи.

Примітка:

Розв'язка рівнянь: $y^2=-2px$ та $x^2=-2py$ не є цілі, бо при додатному p (завжди нашій уяві) вартості x та y є від'ємні, а тому здобутки $-2py$ і $-2px$ є додатні.

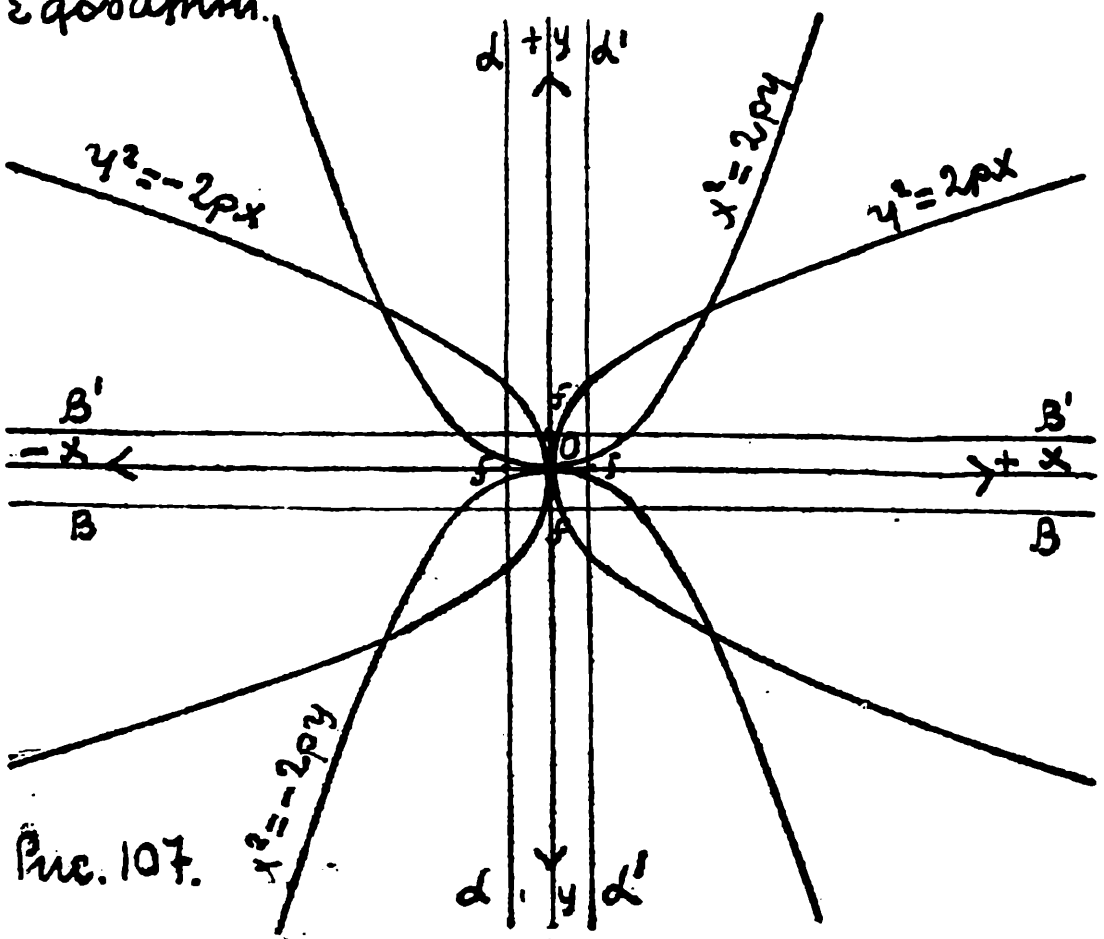


Рис. 107.

II Рівняння параболи, чолом якої вершок у довільній точці A(a,b), а вісь є рівнобіжною осі ікс'ів (або ігрек'ів) і яке носить назву загального рівняння параболи.

Розглянемо випадок, коли вершок параболи лежить в точці A(a,b) а вісь її Kd є рівнобіжна осі ікс'ів

і однаково з неї напрямлена (рис 108)

Хай точка $M(x,y)$ лежить на параболі, тоді з прямокутника FMN маємо: $MN^2 = MF^2 - FN^2$

але: 1) $MN = MP - PN = y - b$

2) $MF = Md = KN$;

$KN = AN + KA$, але $AN = OP - OB = x - a$

$KA = \frac{p}{2}$; тому: $MF = KN = (x-a) + \frac{p}{2}$

3) $FN = AN - AF = (x-a) - \frac{p}{2}$

Отже: $(y-b)^2 = \left[(x-a)+\frac{p}{2}\right]^2 - \left[(x-a)-\frac{p}{2}\right]^2$

або розкладаючи різницю квадратів на множників, одержимо:

$$(y-b)^2 = 2(x-a)p.$$

А звідси рівняння параболи матиме вигляд:

$$\underline{(y-b)^2 = 2p(x-a)} \text{ ----- } (82)$$

Аналогічно для параболи, осьова вісь рівнобіжної осі y-ів матиме рівняння: $\underline{(x-a)^2 = 2p(y-b)}$

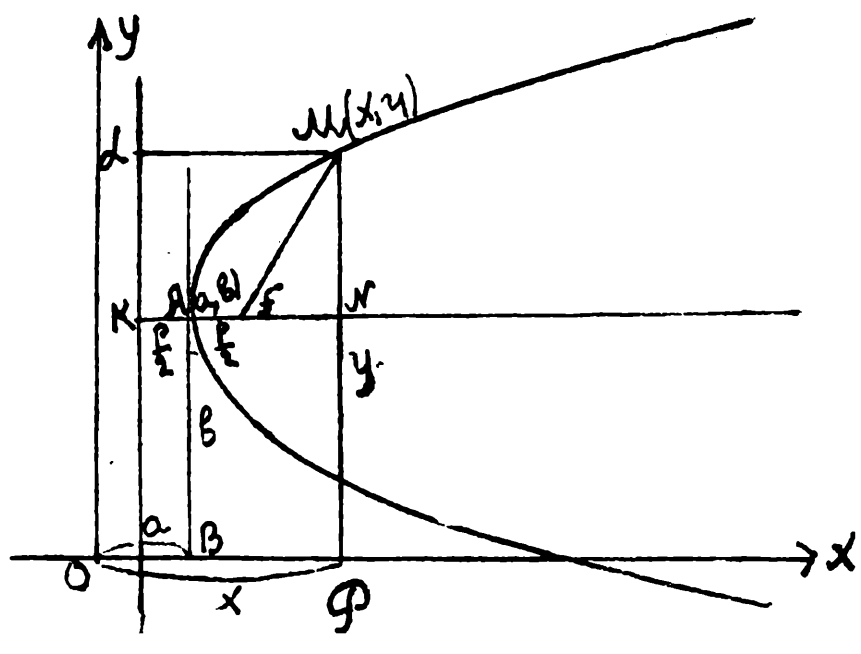


Рис. 108

III Розглянемо, що одну форму рівняння параболи, що носить назву <u>еталонного рівняння параболи</u> (це є рівняння кривої траєкторії центру кінцевого в порожнечі тіла)

У даному разі парабола має вершину в деякій точці $A(a, b)$, а вісь напрямлену рівнобіжно осі y-ів згори у низ, причому, початок координатних осей лежить на одній з гілок параболи.

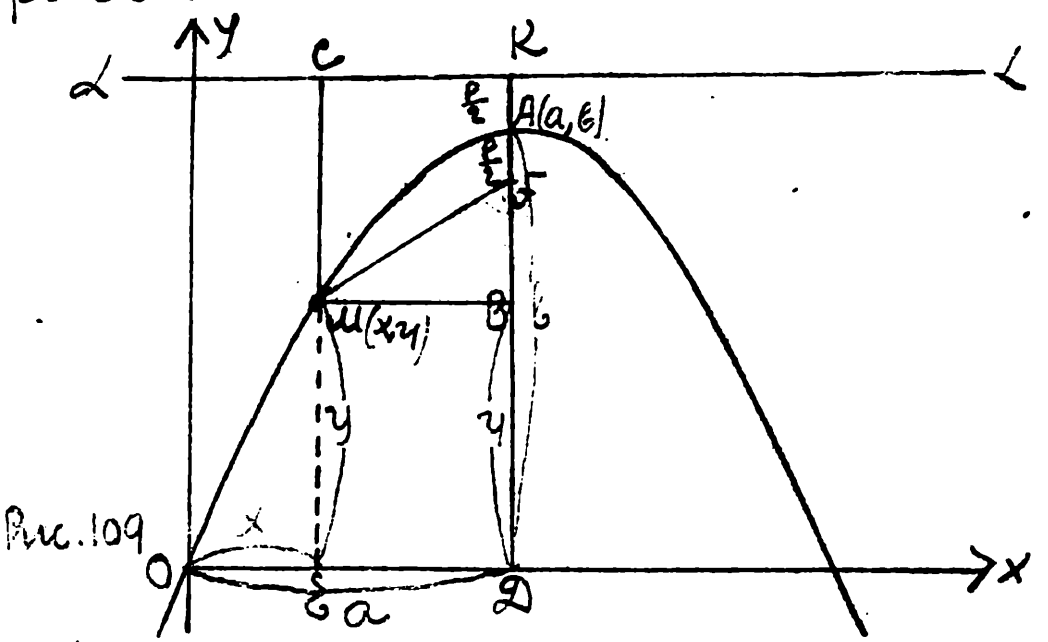


Рис. 109

Розглянемо прямокутний BMF. З нього маємо:

$$BM^2 = FM^2 - BF^2$$

Але: 1) $BM = OD - OE = a - x$

2) $FM = MC$ (з властивості параболи) $= BK$; але $BK = BA + AK$;

$BA = \mathfrak{D}A - \mathfrak{D}B = b - y$; $AK = \frac{p}{2}$.

Тому $FM = (b-y) + \frac{p}{2}$

3) $BF = \mathfrak{D}A - \mathfrak{D}B - FA = (b-y) - \frac{p}{2}$

Вставляючи вартости BM, FM і BF, маємо:

$$(a-x)^2 = \left[(b-y)+\frac{p}{2}\right]^2 - \left[(b-y)-\frac{p}{2}\right]^2$$

або розкладаючи різницю квадратів на чинників, одержимо:

$$(a-x)^2 = 2(b-y)\cdot p.$$

або: $(a-x)^2 = 2p(b-y)$

Коли ще ми не узагальнювали думки, що парабола може проходити через початок визначних вісей, а тому доведене нами рівняння є рівнянням взагалі кожної параболи, що має свою вісь рівнобіжною вісі ікрів і напрямленого в бік від'ємних ікрів.

[Вивід цього рівняння ми подаємо лише для вправи студіюючих, бо на підставі попередніх міркувань можна було написати його безпосередньо; а саме:

Коли рівняння параболи, що має свою вісь напрямленою рівнобіжно вісі ікрів в додатному її напрямі має вигляд:

$= 2px$

$(y-b)^2 = 2p(x-a)$, то рівняння параболи, що має:

1) вісь рівнобіжну вісі ікс-ів і направлену в бік від'ємних ікс-ів, буде: $(y-b)^2 = -2p(x-a)$, або: $(b-y)^2 = 2p(a-x)$

Має само:

2) вісь рівнобіжну вісі ігрек-ів і направлену в бік додатних ігрек-ів, буде: $(x-a)^2 = 2p(y-b)$

3) вісь рівнобіжну вісі ігрек-ів і направлену в бік від'ємних у-ів, буде: $(x-a)^2 = -2p(y-b)$ або $(a-x)^2 = 2p(b-y)$]

Тепер цікавимось ще тим чином, що парабола проходить через початок вісей, себто, коли $x=0$, то $y=0$, а тому перетворивши наше рівняння так:

$$a^2 - 2ax + x^2 = 2pb - 2py$$

або: $x^2 - 2ax + 2py = a^2 - 2pb$

Підставимо в нього вартости $x=0, y=0$ і матимемо:

$$a^2 - 2a \cdot 0 + 0 = 2pb - 2p \cdot 0 \text{ або:}$$

$$a^2 = 2pb.$$

Коли парабола дійсно проходить через початок координат, то ця рівність: $a^2 = 2pb$ мусить бути тотожністю, тобто значення початку координат $O(0,0)$

не задовольняють рівняння даної параболи.

Отже: $a^2 - 2pb = 0$

Вставивши цю вартість в рівняння параболи, матимемо:

$$x^2 - 2ax + 2py = 0 \quad \text{------(83)}$$

Цьому рівнянню можно дати ще такий вигляд:

$x^2 - 2ax + a^2 = a^2 - 2py$, а звідси:

$$(x-a)^2 = a^2 - 2py \quad \text{-----(84)}$$

Ці два рівняння й носять назву елевацийних рівнань параболи.

Задача

Для того, щоб з'ясувати причину назви цілого цього доведеного рівняння параболи й показати її значіння в теоретичній механиці, розв'яжемо таку задачу:

Тіло кинуто вгору під даним елевацийним кутом (кутом нахилу до позиції). Визначити: 1) цілих лету (траекторію) тіла 2) висоту того підне-сення над позиціом і 3) далину

гаткову швидкість і час льоту (тривалість льоту)

Припустимо, що нам відомі:

1) початкова швидкість - V
2) тривалість льоту - t (секунд)
3) елевадійний кут (під яким кинуто тіло) - α°
4) прискорення сили ваги для даної місцевості - g

Треба знайти:

1) форму траєкторії
2) висоту підняття тіла; яку позначимо через h
3) дальність льоту тіла, що позначимо через l.

Візьмемо за початок визначних осей початок руху тіла, вісь x-ів направимо вздовж поверхні землі, а вісь y-ів прямовісно до неї.

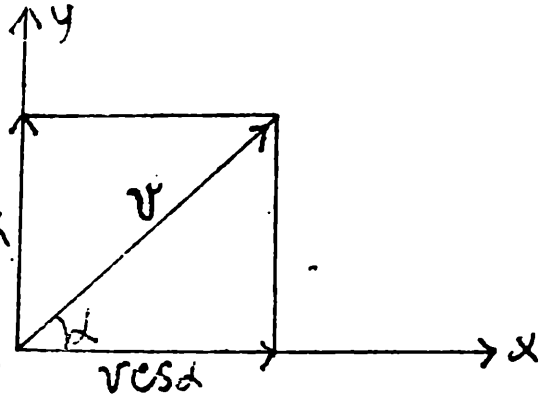


Рис. 110

Кожне тіло, що буде кинуто з якою силою в порожнечі, завжди знаходитиметься під впливом двох сил, а саме:

1) ударної сили (штовхача, що викликав рух тіла)
2) сили ваги. Згідно з законами механіки, перша сила дасть рівномірний прямолінійний рух, а друга рівномірно прискорений рух. (опір створить падання)
Тому швидкість V можна по правилу рівнобіжника розкласти на дві складові швидкості:
1) швидкість рівномірного руху (вздовж осі x) $= V\cos\alpha$
2) швидкість рівномірно прискореного руху (вздовж осі y) $= V\sin\alpha$.
Припустимо, що рух триває t сек; тоді тіло у першому рівномірному русі пройде шлях:

$$S_1 = V\cos\alpha\, t$$

(це буде його повздовжнє просування), а у другому русі за цей t секунд воно пройде шлях:

$$S_2 = V\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$$

(це буде його прямовісне просування)
Коли в момент t секунд тіло опинилось в точці $M(x, y)$, то повздовжнє просування тіла за t секунд було значенням x

точки M, а прямовисне просунення тіла було значенням у тієї точки.

себто: $x = S_1 = v\cos\alpha\, t$ (1)

$y = S_2 = v\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$ (2)

Щоб визначити проекторію лету тіла, нам треба знайти геометричне місце (осередок) точок, що визначають положення тіла на проекторії" незалежно від часу (в даний момент).

Очевидно, що для цього треба виключити із величин x і y величину t (час) і тим самим скласти рівняння проекторії".

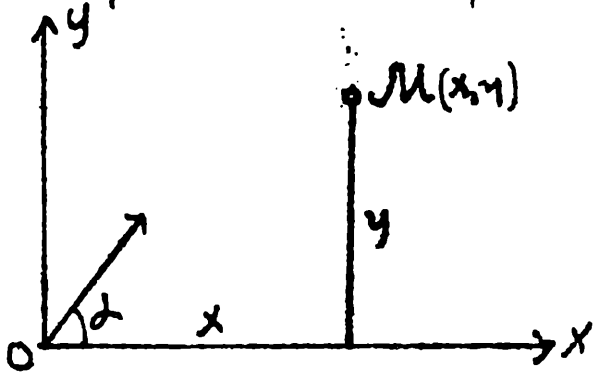


Рис. III

Визначаючи з рівняння (1) величину t:

$$t = \frac{x}{v\cos\alpha}$$

і підставляючи її в рівняння (2), тоді маємо:

$$y = \frac{x\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} \quad \text{або:}$$

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2$$

Ще й буде рівнання проекторії тіла, кинутого в порожнечі під даним елевацийним кутом, яке дуже часто вживається в механиці, але ми надамо йому другий вигляд, а саме: поділимо всі члени на сочинника x^2 і перенесемо в ліву частину; тоді матимемо:

$$x^2 - \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} x + \frac{2V^2 \cos^2 \alpha}{g} y = 0$$

Величини: V, α і g є сталі, а тому ми можемо вкінці їх дій означити через сталі вартости, а саме:

$$(a)\ \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} = 2a \ ;\ (b)\ \frac{2V^2 \cos^2 \alpha}{g} = 2p$$

Тоді рівнання приймає вигляд

$$\underline{x^2 = 2ax + 2py = 0}$$

як ми бачимо це є елевацийне рівнання параболи.

Себто проекторія тіла кинутого в порожнечі під яким небудь кутом до поземи являє з себе параболу, обернену верхом вгору, з віссю прямовісною до поземи. Ця парабола однією своєю галузю проходить через початок руху тіла. Очевидно, що найвищою точкою, якої досягне тіло

буде вершиною параболи $A(a,b)$ (рис 112) і тому висоту польоту буде рівна вершині параболи, себ-то:

$$h = b$$

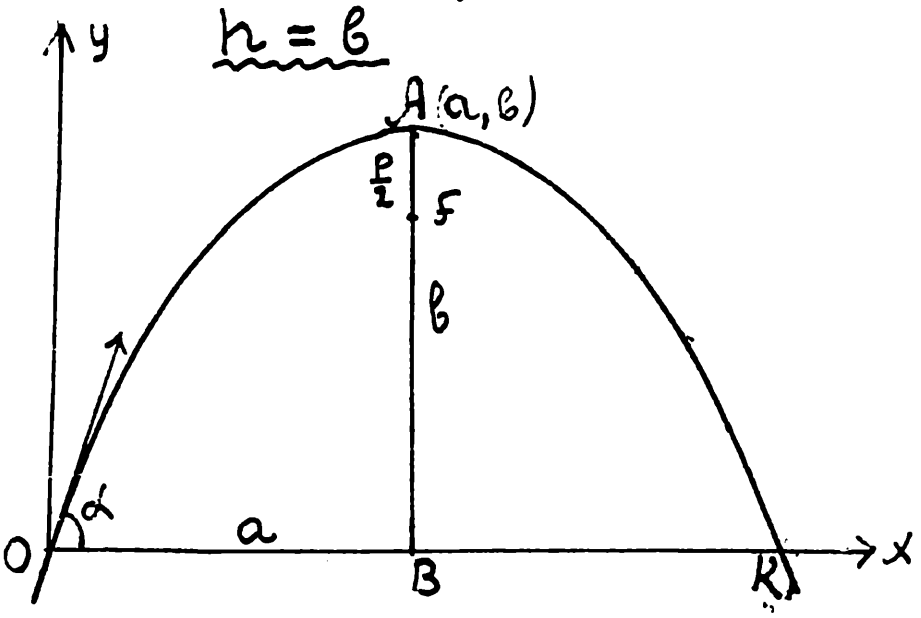


Рис. 112

Дальність польоту тіла буде $l = 2a$ (бо кожній вартості у відповідає тільки 2 рівні по абсолютній величині вартості x). Тому, щоб обчислити вартості h і l, ми мусимо визначити вартості значників вершини $A(a,b)$

З рівності (a), маємо:

$$2a = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}; \quad a = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

З рівності (b), маємо:

$$2p = \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{g}$$ (Значник параболи)

Але ми знаємо, що умовою проходження еквадратної параболи через початок координат є:

$$a^2 - 2pb = 0$$

а звідси: $b = \frac{a^2}{}$

А через те вставляючи цю рівність-
вартости в ін'яр, одержи-
мо:

$$b = \frac{v^2 \sin^2 2\alpha \cdot g}{4g^2 \cdot 2v^2 \cos^2\alpha} = \frac{4v^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{4 \cdot 2g \cos^2\alpha} = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Таким чином висота польоту тіла буде:

$$h = b = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

а далина польоту тіла буде:

$$l = 2a = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Ці величини h і l залежать лише від вартости відповідних функцій sinus, бо v і g - є сталі величини. Тому найбільші вартости для h і l будуть, коли $\sin^2\alpha = 1$ і $\sin 2\alpha = 1$. Отже поклавши $\sin^2\alpha = 1$ і $\sin 2\alpha = 1$, будемо мати:

1) $\sin^2\alpha = 1$; $\sin\alpha = 1$; $\alpha = 90°$, тоді $h = \frac{v^2}{2g}$

2) $\sin 2\alpha = 1$; $2\alpha = 90°$; $\alpha = 45°$, тоді $l = \frac{v^2}{g}$

Таким чином тіло досягає най-
вищого положення тоді, коли його
кинути прямовісно в гору $\left(h = \frac{v^2}{2g}\right)$
а полетить воно найдальше тоді,
коли його кинути під елевацийним
кутом $\alpha = 45°$ $\left(l = \frac{v^2}{g}\right)$.

Коли лет тіла відбувається в по-
вітрі, то приходиться вводити

поправку на опір повітря.
Розглянемо ще випадок, коли тіло з якої небудь висоти h кинуто рівнобіжно поземці. В цьому разі елевації кути α є рівний нулю

$$\alpha = 0$$

Отже в рівнанню параболи: $x^2 - 2ax + 2py = 0$,

$$a = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{v^2 \cdot 0}{2g} = 0$$

$$2p = \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{2v^2 \cdot 1}{g} = \frac{2v^2}{g}$$

Тому рівнання параболи прийме вигляд:

$$x^2 + \frac{2v^2}{g} y = 0$$

або: $x^2 = -2py$ $\left(\text{де } \frac{2v^2}{g} = 2p\right)$

Це, як бачимо, є парабола з вершиною в початку координат з віссю, напрямленою в бік від'ємних ігреків.

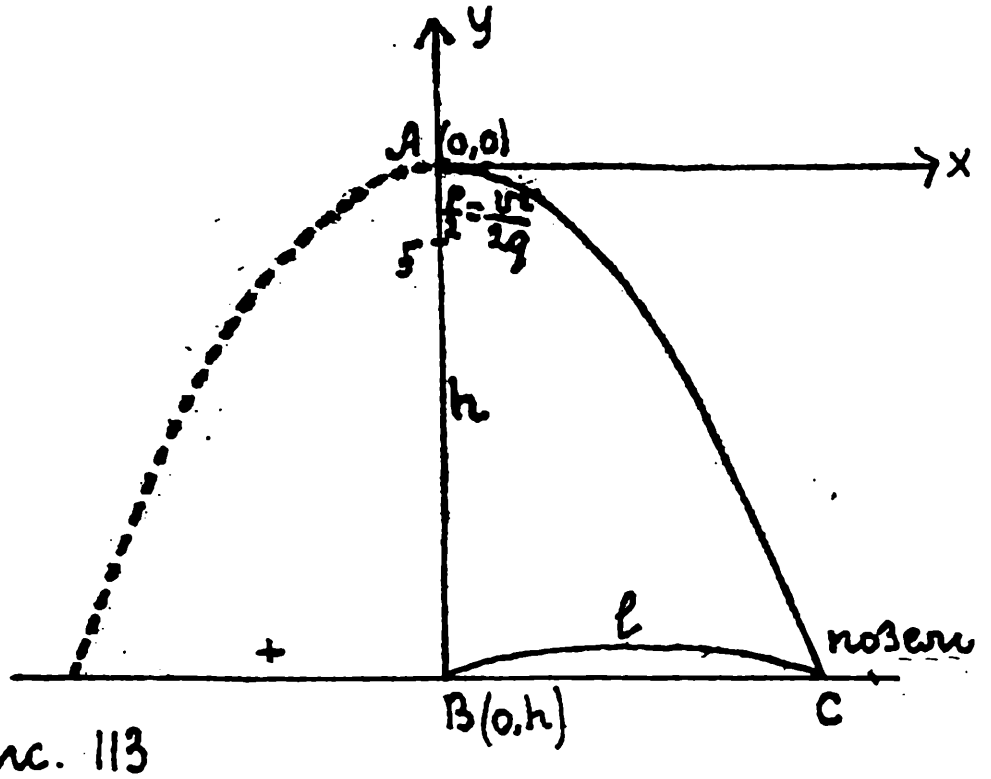


Рис. 113

Визначимо дальність польоту в цьому разі. Очевидно, що політ тіла припиниться, коли воно впаде на землю, але тоді рядна точки C буде $y=-h$. Отже $l=x$ визначиться підстановкою $y=-h$ в рівняння параболи. Маємо:

$$x^2=l^2=-\frac{2v^2}{q}\cdot(-h)=\frac{2v^2h}{q}$$

$$l=+\sqrt{\frac{2v^2h}{q}}=v\sqrt{\frac{2h}{q}}$$

IV Вірогідне рівняння параболи.

Припустимо, що вершина параболи лежить на вісі ікс в точці $A(a,0)$, а вісь параболи направлена в бік додатних ікс. (Вартість a в залежності від умови може бути від'ємною чи додатною). Тоді (як нами було вже доведено) загальне рівняння параболи виглядатиме так:

$$(y-0)^2=2p(x-a), \text{ або:}$$

$$y^2=2p(x-a)$$

Звідси:

$$y^2=2px-2pa$$

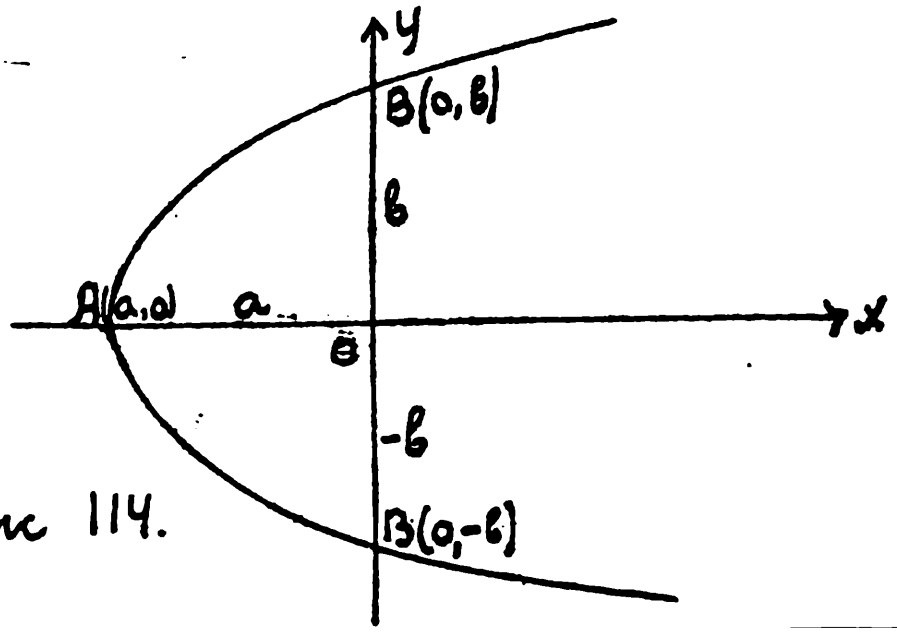


Рис 114.

Визначимо точки відтинки, що творить парабола на осях. Коли парабола має спільну точку точку з віссю ігрек, то рядна цієї точки $y=0$. Так само, коли парабола має спільну точку з віссю ікс, то відтинкова цієї точки $x=0$. Тому, підставляючи по черзі:

1) $y=0$, маємо:

$$2px-2pa=0 \; ; \; x=\frac{2pa}{2p}=a$$

2) $x=0$, маємо:

$$y^2=-2pa \qquad y=\pm\sqrt{-2pa}=\pm b$$

Отже парабола творить: 1) на осі x-ів відтинок $\underline{a}$ а y на осі y-ів відтинки: $\underline{b=\pm\sqrt{-2pa}}$. Коли вартість b є уявна (себто $-2pa<0$) то точок перетину з віссю y-ів параболи не має, але в тому разі й вартість b^2 буде від'ємною і це є ознакою, що парабола немає спільних точок з віссю ікс. Коли відтинки на осях ми означили через a і $b=\pm\sqrt{-2pa}$, або $b^2=-2pa$, то наше рівняння може мати вигляд: (ділимо всі члени рівняння на $-2pa$ і в результаті вставляємо замість $-2pa$ його вартість b^2)

1) $\frac{y^2}{-2pa}=-\frac{x}{a}+1$ 2) $\frac{y^2}{b^2}=-\frac{x}{a}+1$

Переносячи невідомі в ліву частину рівняння, одержуємо, так звані, відтинкове рівняння параболи.

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x}{a}=1 \text{ або } \left(\frac{y}{b}\right)^2+\frac{x}{a}=1 \quad \ldots (85)$$

Приклади:

1) Написати рівняння параболи, що творить на визначених осях відтинки: на осі x-ів: $+5, -5$
на осі y-ів: -2.

Очевидно вершина лежить на осі ігреків і вісь параболи йде в бік від'ємних ігреків. Тому:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\frac{y}{-2}=1$$

2) Проаналізувати рівняння (визначити положення параболи)

$$\frac{y^2}{4}+\frac{x}{3}=1$$

Ясно, що вершина параболи має значення $(3,0)$, вісь параболи лежить на осі ікс-ів і направлена в бік від'ємних ікс-ів, відтинки на осі ігреків будуть $+2$ і -2

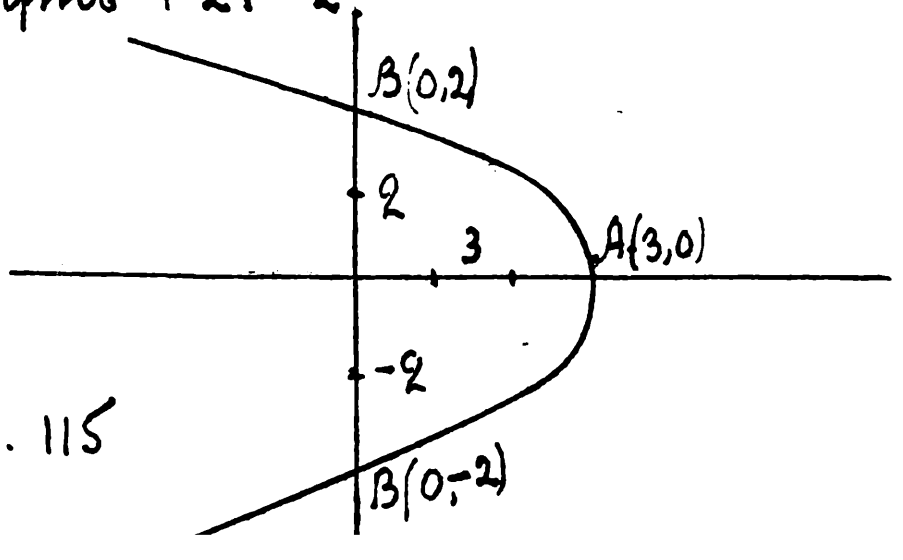


Рис. 115

Приклад 3².

Проаналізувати рівняння:

$$\frac{y^2}{-16}+\frac{x}{2}=1$$

Парабола не перетинає вісі y-ів, бо $b=4i$. Зводимо до спільного знаменателя й маємо:

$y^2-8x=-16$; $y^2=8x-16$ або $y^2=8(x-2)$

Ця парабола має вершок на вісі ікс-ів $A(2,0)$ напрямлена в бік додатних ікс-ів з параметром $2p=8$.

§-36 Алгебричне рівняння параболи

Візьмемо загальне рівняння параболи, коли:

1) вісь параболи рівнобіжна до вісі ікс-ів, то: $(y-b)^2=\pm 2p(x-a)$ -- (A)

2) вісь параболи рівнобіжна до вісі ігрек-ів, то: $(x-a)^2=\pm 2p(y-b)$ ... (B)

[Знаки ± вживаються: „+" коли вісь параболи спрямована в бік додатних значників, а „−", коли вісь параболи спрямована в бік від'ємних значників] Виконавши зазначені в рівняннях дії, будемо мати:

1) $y^2-2by+b^2=\pm 2px\mp 2pa$, або:

$y^2\mp 2px-2py+(b^2\pm 2pa)=0$ ... (1)

2) $x^2-2ax+a^2=\pm 2py\mp 2pb$, або:

$x^2-2ax\mp 2py+(a^2\pm 2pb)=0$ .... (2)

Одержані рівняння (1) і (2) будуть уже алгебричними формами рівнянь відповідних парабол.

Щоб надати цим рівнянням більш загальний характер, помножимо всі члени кожного з них на довільні додатні числа, напр. рівняння (1) на k, а рівняння (2) на l, тоді матимемо

$$ky^2 \mp 2pkx - 2bky + k(b^2 \pm 2pa) = 0 \quad \ldots\ldots (1')$$
$$lx^2 - 2alx \mp 2ply + l(a^2 \pm 2pb) = 0 \quad \ldots\ldots (2')$$

Припустимо, що вислови дій будуть:

$$\mp 2pk = m_1; \quad -2bk = n_1; \quad k(b^2 \pm 2pa) = q_1$$
$$-2al = m_2; \quad \mp 2pl = n_2; \quad l(a^2 \pm 2pb) = q_2$$

Тоді рівняння приймуть вигляд:

$$\left.\begin{aligned} ky^2 + m_1x + n_1y + q_1 &= 0 \\ lx^2 + m_2x + n_2y + q_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8b)$$

де $\underline{m_1 = \mp 2pk}$, $n_1 = -2bk$, і $q_1 = k(b^2 \pm 2pa)$,

$m_2 = 2al$, $\underline{n_2 = \mp 2pl}$ і $q_2 = l(a^2 \pm 2pb)$

Досліджуємо знаки вартостей сочинників m_1 і m_2:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \mp 2pk \\ n_2 &= \mp 2pl \end{aligned}\right\}$$ По умові p - є величина завжди додатна, числа k і l також узято додатніми, тому знаки сочинників m_1 і n_1 завжди буде залежати від знака, що стоїть перед здобутками $2pk$ і $2pl$, а цей знак відворотний знакам, що стоять перед правою частиною рівнань (A) і (B).

Таким чином m_1 і n_1 будуть від'ємні коли в рівняннях (A) і (B) праві части

додатні й навпаки - m, і n, будуть додатні, коли праві частини рівнянь (A) і (B) є від'ємні.

Але праві частини рівнянь (A) і (B) - додатні, коли вісь параболи направлена в бік додатних значників, і навпаки - від'ємні, коли вісь параболи направлена в бік від'ємних значників. Тому, коли сочинники при невідомих, що входять в алгебричне рівняння лише в перших ступенях є від'ємні, - то рівняння визначає параболу, що має вісь направлену в бік відповідних додатних значників, і навпаки - коли ці сочинники є додатні, то вісь параболи спрямована в бік відповідних від'ємних значників.

Приклади: 1) $(x-3)^2 = 8(y-\frac{5}{3})$;
перетворимо в алгебричну форму:
$x^2-6x+9 = 8y-\frac{40}{3}$, або $3x^2-18x-24y+67=0$.
2) $(x-3)^3 = -8(y-\frac{5}{3})$; $x^2-6x+9 = -8y+\frac{40}{3}$, або
$3x^2-18y+24y-13=0$

Тепер поставимо питання: при яких умовах алгебричне рівняння другого ступіня, що має загальний вигляд: $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ може бути рівнянням параболи?

Для цього порівняємо це алгебричне рівняння з алгебричними формами рівнянь параболи (86).

другому рівнянні не існує члена із здобутком невідомих, себ-то $C=0$. Далі, в першому рівнянню параболи що має вісь рівнобіжну осі x-ів - не існує члена, що містить квадрат змінного значника цієї осі (себ-то x^2), инакше кажучи для рівнання цієї параболи $A=0$.

Так само, у другому рівнанню параболи що має вісь рівнобіжну осі y-ів, також не існує члена, що містить квадрат змінного значника (y^2) цієї осі, себто для рівнання цієї параболи $B=0$;

таким чином,

<u>щоб яке-небудь алгебричне рівнання другого ступеня (з двома невідомими) могло бути рівнанням параболи необхідно, щоб сочинники при здобуткові невідомих і при квадраті одного з невідомих були рівні нулям (при чому нулю буває рівний сочинник квадрату того невідомого, який відповідає змінним значникам осі параболи).</u>

Доведемо тепер, що алгебричне рівнання другого ступеня, що задоволь-няє поставленим умовам, є завжди рівнанням якої небудь параболи. Ото:

доведемо, що ці умови не тільки є необхідні, але й достатні).

В цьому доводі будемо розглядати лише параболу, що має вісь, рівнобіжну вісі x-ів, бо довід теореми на випадок параболи, що має вісь рівнобіжну вісі y-ів, буде аналогічним першому доводові;

отже візьмемо рівняння:

$$By^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots (A)$$

Щоб це рівняння було рівнянням параболи, що має вісь рівнобіжну вісі x-ів, необхідно показати, що його завжди можна перетворити в загальне рівняння зазначеної параболи, що має таку алгебричну форму

$$Ky^2 + m_1 x + n_1 y + q_1 = 0.$$

З порівняння цих рівнань ми спостерігаємо, що для цього потрібно, щоб:

$$B = K;\ D = m_1;\ E = n_1;\ \text{і}\ F = q_1;$$

але $m_1 = \mp 2pK$; $n_1 = -2bK$; і $q_1 = K(b^2 \pm 2pa)$,

тому

$$\underline{D = \mp 2p \cdot B};\ \underline{E = -2b \cdot B};\ \text{і}\ \underline{F = B(b^2 \pm 2pa)};\ldots (B)$$

[Зауваження: для параболи, що має вісь рівнобіжну вісі y-ів, ці рівняння мають вигляд:

$$A = K;\ D = -2a \cdot A;\ E = \mp 2p \cdot A;\ F = A(a^2 \pm 2pb)]$$

Очевидно, що наше алгебричне рівняння буде параболічне в тому разі коли ми зможемо із одержаних рівностей (B)

визначити реально 1) параметр і 2) значення вершка цієї параболи.

Але: $2p = \mp\frac{D}{B}$; $b = \frac{E}{2B}$; крім того $b^2 \pm 2pa = \frac{F}{B}$, звідси, вставляючи вартості b і $2p$, будемо мати:

$\frac{E^2}{4B^2} \pm \left(\mp\frac{D}{B}\right) \cdot a = \frac{F}{B}$, або $\frac{E^2}{4B^2} - \frac{D}{B}a = \frac{F}{B}$; що дає:

$$D \cdot a = \frac{E^2}{4B} - F = \frac{E^2 - 4FB}{4B}$$

а тому $a = \frac{E^2 - 4FB}{4BD}$

Сочинники B, D, E, F є величини правдиві (реальні), а тому й обчислені значення й параметр параболи:

$$a = \frac{E^2 - 4FB}{4BD};\quad b = -\frac{E}{2B} \text{ і } 2p = \mp\frac{D}{B}$$

є величини правдиві (реальні).

[Для параболи що має вісь спрямовану рівнобіжно вісі y-ів, ці рівності мають вигляд:

$$a = \frac{D^2 - 4AF}{4AE} \text{ і } b = -\frac{D}{2A};\quad 2p = \mp\frac{E}{B}$$

і є величини також правдиві (реальні)]

Отже парабола, що визначається алгебричним, довільно взятим рівнянням (A), є реальна і тому можна твердити, що <u>кожне алгебричне рівняння (з реальними сочинниками), яке задоволяє поставленим умовам (1) $C=0$; 2) $A=0$; $B\neq 0$; 3) $B=0$; $A\neq 0$) завжди визначає параболу з віссю, рівнобіжною до однієї з координатних вісей.</u>

Розглянемо ще зміст подвійного знаку $\mp$ перед вартістю $2p = \mp\frac{D}{B}$ (або для другого рівняння параболи з віссю рівнобіжною вісі y-ів $2p = \mp\frac{E}{B}$).

Ми знаємо, що величина 1) p – є завжди додатна, 2) $B = K$ також є додатна (бо ми прийняли довільний чинник K додатним), отже, щоб рівність задовольнялася, D мусить мати знак однаковий з відповідним знаком, що стоїть перед дробом, а саме

коли $2p = -\frac{D}{B}$, то D мусить бути від'ємне, а коли $2p = +\frac{D}{B}$, то D мусять бути додатне.

Але $D = m_1$, себто має знак однаковий з m_1, а ми довели, що знаки вартости m_1 – протилежні знакам вартостей змінних значників вісі, а тому:

<u>коли в алгебричному рівнанні сочинник при невідомому, що входить в нього у першому ступені є від'ємний ($D < 0$), то рівнання визначає параболу з віссю, спрямованою в бік додатних вартостей свого змінного значника, а коли тойже сочинник є додатний ($D > 0$), то рівнання визначає параболу з віссю,</u>

справленого в бік від'ємних вар-тостей свого змінного значення.

Коли сочинник при другій ступені невідомого є одиниця ($B=1$), себто алгебричне рівнання параболічне упорядковане, то параметри параболи мають такі вартости:

$$a=\frac{E^2-4F}{4D}\ ;\ b=-\frac{E}{2}\ ,\ a\ 2p=\mp D \ldots (87).$$

[Для параболи що має вісь, спрямовану рівнобіжно вісі y-ів

$$a=-\frac{D}{2}\ ;\ b=\frac{D^2-4F}{4E}\ ;\ 2p=\mp E \ldots (88).]$$

Приклади: 1) Рівнання: $y^2-8x-4y+28=0$ визначає параболу ($C=0$, $A=0$, $B\neq 0$)

1) Параметр її $2p=-(-8)=8$

2) Значники вершків:

$$a=\frac{16-4.28}{-4.8}=3\ ;\qquad b=-\frac{-4}{2}=2\ ;$$

Парабола має вісь рівнобіжну вісі x-ів (сочинник при x^2 рівний 0) і спрямовану в бік додатних x-ів ($D=-8<0$).

Тому ми маємо можемо змогу накреслити цю параболу (рис 116)

Загальне рівнання її буде:

$(y-b)^2=2p(x-a)$:

$(y-2)^2=8(x-3)$.

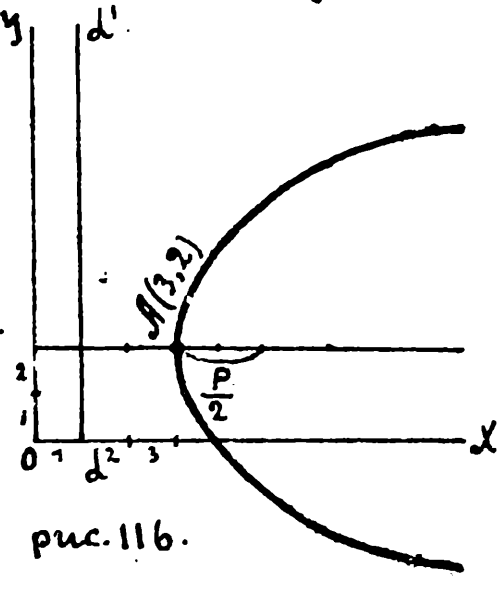


рис. 116.

2) Рівняння $x^2-10x+6y+31=0$ визначає параболу (бо $C=0$; $B=0$; $A\neq 0$).

$$2p=+(+6)=6$$

$$a=-\frac{-10}{2}=5;\quad b=\frac{100-4\cdot 31}{4\cdot 6}=-1$$

$$2p=+6$$

Парабола має вісь рівнобіжну вісі y-ів (бо сочинник при $y^2=0$) і спрямована в бік від'ємних y-ів (бо $E=6>0$)

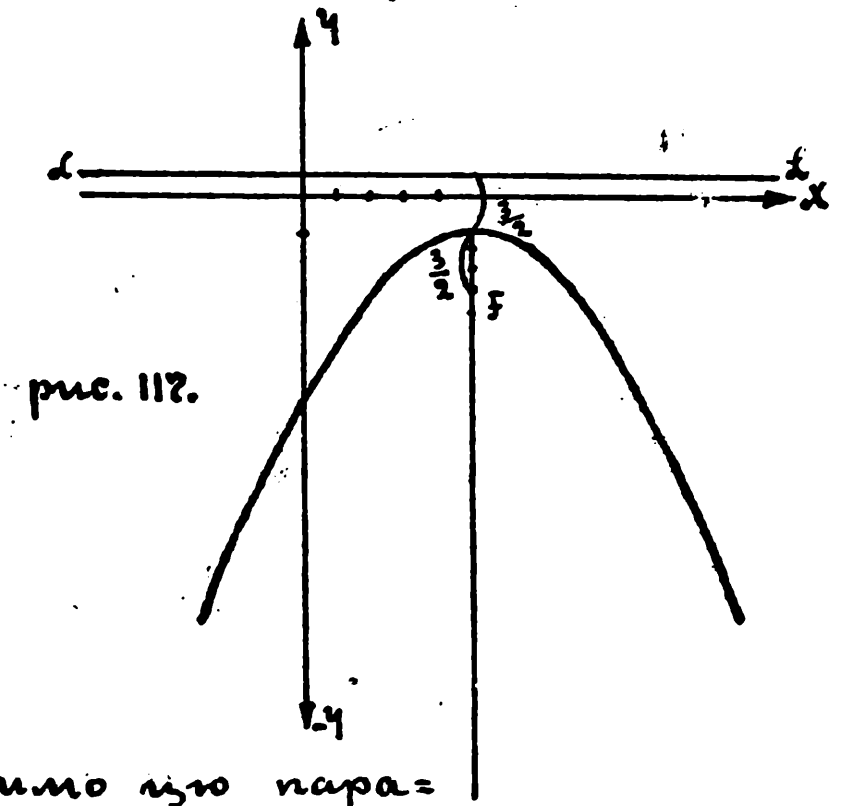


рис. 117.

Накреслимо цю параболу (рис. 117), якої рівняння буде:

$$(x-5)^2=-6(y+1)$$

<u>Перетворення загального рівняння параболи в алгебричне й навпаки.</u>

Як ми вже казали, загальне рівняння перетворюється в алгебричне звичайним переведенням зазначених в ньому дій, та зведенням до спільного знаменателя.

Навпаки, алгебричне рівняння параболи перетворюється в загальне за допомогою

1) теоретичного способу, доведеного перед цим і

2) а) звичайним сповненням членів, що містять в собі квадрат і перший ступінь невідомого, до повного квадрату, в) перенесенням решти членів у праву частину й в) винесенням за дужки спільного чинника.

Напр. рівняння: $y^2-8x+4y+28=0$ можна перетворити в загальну форму таким чином:

1) Доповнюємо до повного квадрату члени, що містять y^2 та y, а саме: $y^2-4y+4-4-8x+28=0$

2) Переносимо решту членів у праву частину й робимо зведення схожих членів:

$$(y-2)^2=+8x-24$$

3) Виводимо за дужки спільного чинника 8 і матимемо загальну формулу рівняння параболи:

$$(y-2)^2=8(x-3).$$

Висід той самий, що й при вживанню теоретичного способу.

Приклад 2.

$$x^2-14x+12y+1=0$$

1) $x^2-14x+49-49+12y+1=0$

2) $(x-7)^2=-12y+48$

3) $(x-7)^2=-12(y+4)$

Задачі

ч.227. Написати вершинові рівняння параболи, що має вісь, спрямовану в бік додатних X-ів, коли:

1) параметр її $2p=4$; 2)- відстань вершина параболи від вершина $d=3$; 3)- ця парабола проходить через точку $(4,-6)$; 4)-проходить через точку $(2,3)$?

ч.-228. Знайти положення точок: $A(9,-9)$; $B(5,8)$; $(10,7)$ щодо параболи: $y^2=9x$?

ч.-229. Обчислити зміщення і положення вершина парабол:

1) $y^2=11x$; 2) $y^2=-7x$; 3) $x^2=6y$ і 4) $x^2=-8y$

ч.-230. Написати рівняння направляючої вісі зазначених в попередній задачі парабол.

ч.231. Написати рівняння параболи, що має: 1) вершиною $A(3,-4)$, зміщником $2p=5$ і вісь, рівнобіжну з вісю X-ів, 2) вершиною $B(3,-2)$, зміщником $2p=12$ і вісь, рівнобіжну

з віссю x-ів; 3) коли віссю параболи є пряма $x=4$, вершок параболи $(4,2)$, а змінник $2p=7$.
(Написати рівняння обох парабол: спрямованих у додатний та у від'ємний бік).

Т.232. Написати в загальній формі рівняння парабол:
1) $x^2-4x-6y+10=0$; 2) $y^2-8x-6y=7$;
3) $y^2+x-8y+10=0$; 4) $45x^2+30x+90y=31$;
5) $x^2-2x+10y+11=0$; 6) $y^2-6x+30=0$;
7) $4y^2-20y-12x+29=0$; 8) $y^2-2(x+y)+1=0$

Т.233. Визначити основні елементи (значення вершків, змінник і напрями вісі) парабол і накреслити їх, коли відомі рівняння:
1) $(y-2)^2=5(x-3)$; 2) $(y+3)^2=-8x$;
3) $x^2-y+3=0$; 4) $y=(x+1)^2$; 5) $y^2-4y-6x-3=0$

Т.234. Обчислити змінник і значення вершків, а також визначити напрями вісей парабол:
1) $y^2-6y-12x+57=0$; 2) $y^2+10x+50=0$;
3) $x^2+6x+9y=0$; 4) $2x^2+12x+y+13=0$;
5) $4y^2-20y-24-47=0$; 6) $x^2-8x+15=y$.

Т.235. Написати рівняння параболи, що має вісь рівнобіжну з віссю x-ів і проходить через точки 1) $A(-5,3)$; $B(1,9)$; $C(-3,5,6)$; 2) $A(1,1)$; $B(7,3)$; $C(3,2)$; теж написати ...ів-

нання параболи, що має вісь рівнобіжну з віссю y-ів і проходить через точки: $M(5,4)$; $N(3,3)$; $P(0,6)$; накреслити ці параболи.

Ч.236. Написати рівняння траєкторії й обчислити висоту та далину льоту тіла, кинутого у горизонтальній з початковою скоростю 275 т. під елевацийним кутом 30°

Ч.237. Пожарова помпа може подати струмок води на 15 т. прямовисно вгору. Під яким елевацийним кутом треба спрямувати струмок води похило до поземи, щоб при віддаленню помпи на 11 т. від будинку досягнути верхка його даху, що підноситься на 8 т. над землею.

Ч.238. Накреслити параболи:

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2+\frac{x}{-2}=1;\quad \frac{x}{4}+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1;\quad \left(\frac{x}{3}\right)^2-\frac{y}{2}=1.$$

§-37. Взаємне положення простої зглядно параболи.

Хай рівнання параболи буде у верхковій формі $y^2=2px$, а рівнання простої - в канонічній: $y=mx+n$. Щоб знайти спільні точки парабола й простої

(значення цих точок будуть одночасно належати обом лініям, а тому задовольняти їх рівняння) ми мусимо розв'язати систему:

$$y^2 = 2px$$
$$y = mx + n$$

Вставляючи вартість y з другого рівняння у перше, матимемо:

$$m^2x^2 + 2mnx + n^2 = 2px$$

або $m^2x^2 - 2x(p - mn) + n^2 = 0$;

звідси $x = \frac{2(p-mn) \pm 2\sqrt{(p-mn)^2 - m^2n^2}}{2m^2}$

або $x = \frac{p - mn \pm \sqrt{p(p-2mn)}}{m^2}$

Вставляючи вартість x у другу рівняння одержимо:

$$y = \frac{p - mn \pm \sqrt{p(p-2mn)}}{m} + n,$$

або $y = \frac{p \pm \sqrt{p(p-2mn)}}{m}$

Досліджимо вираз D (дискримінант)

$$D = p(p-2mn).$$

Ми умовились вважати p за додатну величину, а тому знак виразника D залежить від знаку числника $d = p - 2mn$.

1) Коли $p - 2mn > 0$, або $\underline{p > 2mn}$, то $d > 0$, а разом $\underline{D > 0}$.

Тоді ми маємо по дві вартості значників x та y. Існує дві точки перехрест простої з параболою, себто проста є січною параболи

2) Коли $p-2mn=0$, тоді $d=0$, а разом і $D=0$, ми маємо по одній вартості значників точки перехрестя. Тому існує лише одна точка перехрестя й проста $y=mx+n$ є <u>дотичною</u> до параболи $y^2=2px$, і

3) Коли $p-2mn<0$, тоді $d<0$, а разом і $D<0$, вартості значників точки перехрестя є <u>уявні</u>, себто не існує жадної точки перехрестя даної простої з параболою; <u>проста</u> $y=mx+n$ є <u>мимобіжною</u> до параболи $y^2=2px$.

Отже показником взаємного положення простої та параболи є двочлен: $p-2mn$;

або $\underline{2p-4mn}$.

$2p$ - є змінник параболи, m і n є змінники простої, тому:

<u>Щоб дослідити взаємне положення простої та параболи необхідно порівняти змінник параболи $(2p)$ з четвер:</u>

ним здобуттям обох змінних рівняння простої в канонічній формі (4 тт).

отже, маємо:

$2p > 4mn$ – пряма є січною параболи

$2p = 4mn$ – –"– –"– дотичною –"–

$2p < 4mn$ – –"– –"– мимобіжною –"–

Зінтерпретуємо це геометрично:

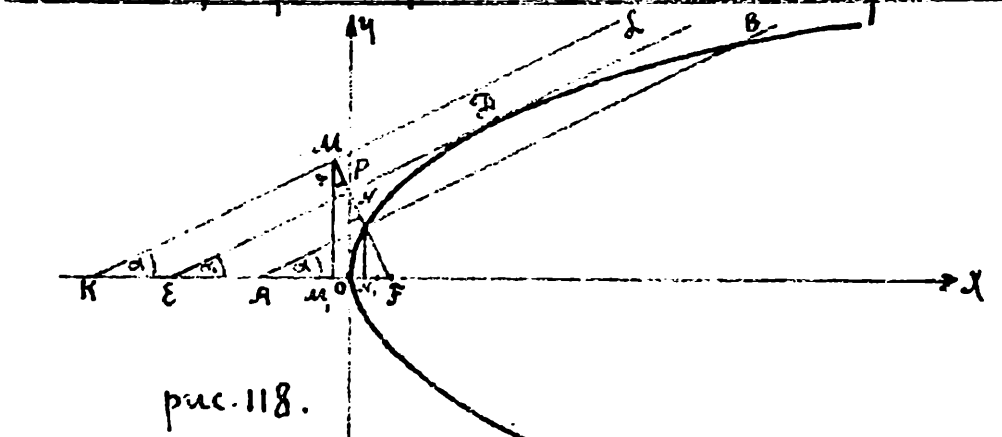


рис. 118.

Нам відомо, що змінник простої $m = tg\alpha$ (кута спаду простої), а змінник n є відтинок, що творить пряма на вісі y-ів.

Тому $2p \gtrless 4mn$, або $p \gtrless 2mn$ можна написати так: $p \gtrless 2ntg\alpha$, звідси - $n \lessgtr \frac{P}{2tg\alpha}$, або $n \lessgtr \frac{P}{2} Ctg\alpha$

Подивимося, що уявляє з себе здобуток: $\frac{P}{2} Ctg\alpha$?

Для цього з вогнища F спустимо прям на дану пряму й розглянемо ΔOPF, що утворить цей прям з відтинками на вісях. В цьому Δ-ові вогнищеве віддалення від

початку координат $OF = \frac{p}{2}$; кут $\angle OPF =$ $= \alpha$ — кут спаду простої (бо $\angle DEO = \alpha =$ $= \angle OPF$, як прямокутні). Отже з ΔOPF ми маємо:

$$OF \cdot Ctg\alpha = OP,$$

або, вставляючи вартість OF, одержимо:

$$\frac{p}{2} Ctg\alpha = OP$$

де <u>OP є відтинок, що творить на</u> <u>вісі y-ів прям. спущений з вогнища F на просту</u>, але з другого боку порівнюючи рівності:

$$\frac{p}{2} Ctg\alpha = OP$$

і $\frac{p}{2} Ctg\alpha = n_1$ (випадок, коли проста є дотичною параболи)

ми бачимо, що:

$$OP = n_1$$

<u>Таким чином, коли проста є дотичною до параболи, то вона прямова до променя простої, поведеного з вогнища в точку перехрестя цієї простої з віссю y-ів</u> і навпаки — <u>коли через перехрестя якого небудь вогнищевого променя з віссю y-ів повести просту прямово до цього променя; то вона буде дотичною до параболи.</u>

Згадаємо тепер, що у цих висл-

дак ми вже раз переконалися при розглядженню способів як накреслити параболю. Крім того ми тоді довели, що ця точка перехрестя дотичної з віссю y-ів є віддаленою від початку координат на половину рядної точки дотику даної простої, тобто

$$OP = n_1 = \frac{y_1}{2}$$

Вертаючися тепер до аналізи виразу: $n \leqq \frac{p}{2} Ctg\alpha$

ми можемо заступити його таким: $n \leqq OP$,

а тому:

Коли рядна точки перехрестя простої з промінем, поведеним з вогнища прямово до неї менша відтинку, що творить цей промінь на вісі y-ів ($n = N N_1 < OP$), то проста є січного параболі.

Коли рядна точки перехрестя простої і згаданого променя є рівна відтинкуу, що творить цей промінь на вісі y-ів, (тобто - промінь прямовий до простої перехрещується з нею на вісі y-ів), ($n = OP$), то проста є дотичною параболі й паралелі,

коли ряда точки перехрестя простої й заданого променя є більша відтинку, що творить цей промінь на вісі Y-ів $(MM_1 = n > OP)$, то дана проста є мимобіжною до параболи.

Розглянемо тепер ще ті випадки, коли проста, або рівнобіжна, або прямовісна до вісі параболи.

Коли проста рівнобіжна або прямовісна до вісі параболи, то загальні розв'язки розглянутої системи не дають конкретних вартостей.

Справді, коли проста рівнобіжна вісі X-ів (параболи), то кутовий її зміщник є $m = 0$, а коли проста буде прямовісною до вісі X-ів, то зміщник $m = \infty$.

Вставляючи ці вартості у розв'язки нашої системи, ми одержимо:

1) $m = 0$; $X = \frac{p \pm \sqrt{p^2}}{0} = \frac{p \pm p}{0}$; $Y = \frac{p \pm \sqrt{p^2}}{0} = \frac{p \pm p}{0}$

себто $x_1=\infty$; $x_2=\frac{0}{0}$; $y_1=\infty$; $y_2=\frac{0}{0}$.

Ми маємо, що в такому разі одна точка перехрестя простої з параболою лежить на безмежності, а друга в невизначеному місці на параболі

2) Коли $m=\infty$, то:

$$x=\frac{p-\infty\pm\sqrt{p^2-\infty}}{\infty}=\frac{-\infty}{\infty};\quad y=\frac{p\pm\sqrt{p^2-\infty}}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

і в цьому разі символи $\frac{\infty}{\infty}$ означають невизначеність, себто точки перехрестя простої й параболи можуть лежати на параболі в невизначених місцях.

Щоб розгорнути ці невизначености, звернемо увагу на те, що коли пряма є рівнобіжною до осі x-ів, то її рівняння приймає вигляд:

$$y=n,$$

а коли ця пряма є прямовою до осі x-ів, то рівняння її має вигляд:

$$x=q\ (const)$$

Нам ми в розглянений
раніш системі рівнань
параболи й простої за-
лишимо рівняння остан-
ньої на відповідні фор-
ми його на випадок
рівнобіжності або пря-
мовості цієї простої до
осі X-ів, то будемо мати
системи:

1) Коли проста рівнобіжна
до осі X-ів

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2px \\ y &= n \end{aligned}\right\} \ldots (a)$$

2) Коли проста пряжова
до осі X-ів:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2px \\ x &= q \end{aligned}\right\} \ldots (b)$$

Система (a) буде мати роз-
в'язки:

$$x = \frac{n^2}{2p}\ ;\quad y = n\ :$$

Система (b)- матиме роз-
в'язки:

$$x = q\ ;\quad y = \pm\sqrt{2pq}\ .$$

Аналізуючи загальний
вигляд системи рівнань
параболи й простої, ми

довели, що проста рівнобіжна до вісі x-ів має дві точки перехрестя з параболою: одну - на безмежності, а другу неозначену. Значники цієї неозначеної точки й дають розв'язки системи (a), а саме $\left(\frac{n^2}{2p}, n\right)$. Ці значники справді є неозначені, бо n - є змінник простої, якому ми можемо надавати які бажано довільні вартости, а разом зі зміною вартости n будуть змінюватися й вартости значника $x=\frac{n^2}{2p}$, де p для даної параболи є стала величина (рис.119).

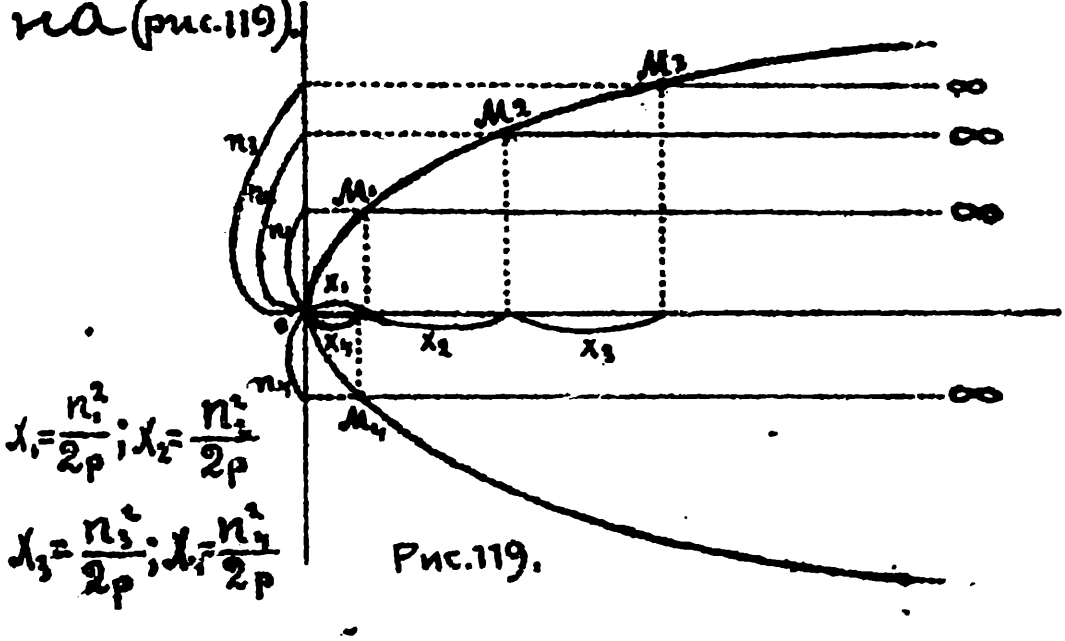


Рис.119.

Ці тятиви $(M_1 \ldots \infty)(M_2 \ldots \infty)$ і т. д. носять назву <u>поперечників параболи</u>

На випадок прямовості простої до вісі X-ів систе-ма рівнань (в) дає значни-ки двох точок перехрещя, положений на спільній лінії рядної симетрично вісі X-ів, а саме:

1) $x = q$; $y = \sqrt{2pq}$

2) $x = q$ $y = -\sqrt{2pq}$.

Положення цих точок на параболі такоже, як це по-казує аналіза загальної системи, є неозначене ($x = \frac{\infty}{\infty}$; $y = \frac{\infty}{\infty}$). Справді: значник $x = q$, де q - є довільна, що може приймати які бажано вартости (від 0 до ∞). Разом з нею і вар-тости значника y - є довільні, бо $y = \pm\sqrt{2pq}$, де $2p$ - є величина стала для даної параболи. Таким чином надаючи q всі мож-ливі вартости від 0 до ∞, ми одержимо безліч тятив

параболи рівнобіжних між собою і прямових до вісі параболи. Разом із зростанням вартости q - зростає й величина тятив (до безмежности (рис. 120)

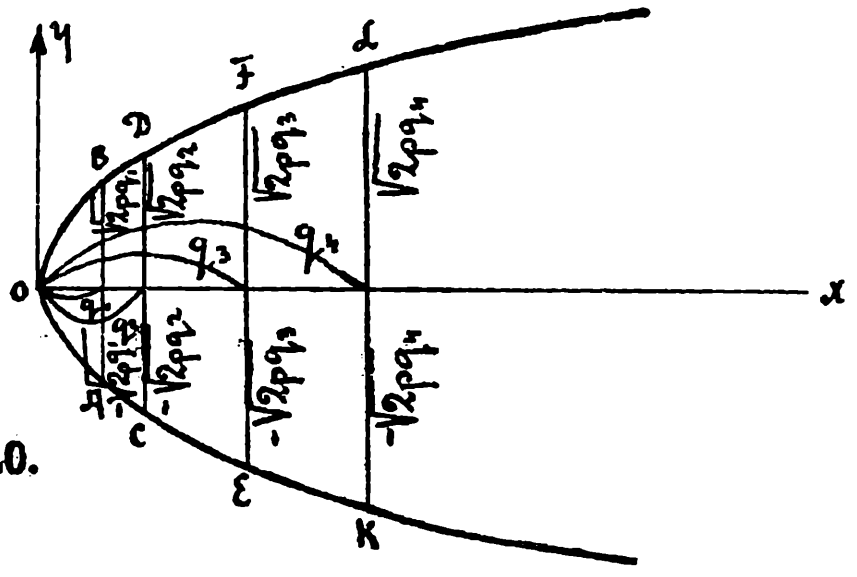


Рис. 120.

Ці всі тятиви матимуть свої середини на вісі параболи й тому носять назву <u>тятив заружених з віссю параболи</u>

§38. <u>Заружені поперечники параболи</u>.

Як ми вже згадували, під поперечником параболи розуміють <u>необмежену</u> тятиву її, рівнобіжну до вісі параболи.

Значники перехрестя поперечника з параболою будуть $\left(\frac{n^2}{2p}, n\right)$ і (∞, ∞).

Щоб скласти рівняння такого поперечника, ми розглянемо рівняння $y = n$, простої, на якій цей поперечник лежить. Задане рівняння $y = n$ не може вважатися за рівняння поперечника параболи, бо не уявляє з себе функціональної залежности між значниками точок, що лежать на цьому поперечникові і значниками, що характеризують параболу, до якої він належить,

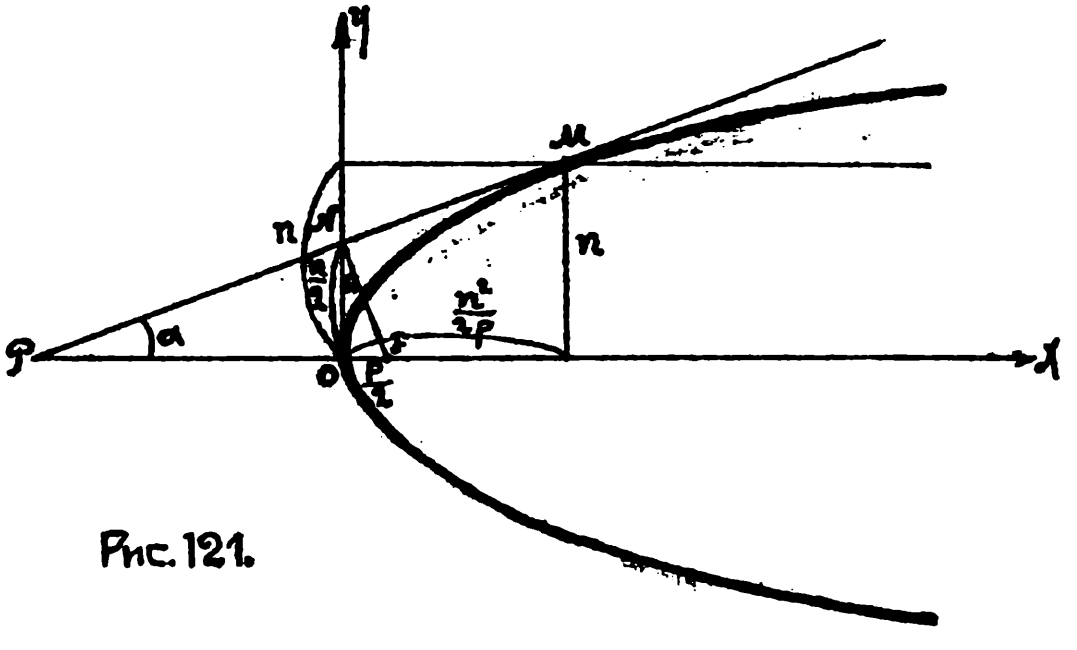


Рис. 121.

тому поставимо собі за-
дачею перетворити дане
рівняння $y=n$ у друге, яке
встановлювало б згадану ви-
ще функціональну залеж-
ність між змінними
параболи та її попере-
чника.

Для цього в точці $M\left(\frac{n^2}{2p}, n\right)$
перехрещення попереч-
ка з параболою проводи-
мо до параболи дотичну
MP (рис. 121), тоді, як ми зна-
ємо, ця дотична перетина-
тиме вісь y-ів у точці N,
так що $ON=\frac{n}{2}$ (половині ряд-
ної точки дотичної); але з ΔONF
ми маємо:

$\frac{n}{2}=\frac{p}{2}\operatorname{ctg}\alpha$ (бо $\angle N=\angle P$ як прямо-
вирамленні), звідки $n=p\operatorname{ctg}\alpha$, або
$n=\frac{p}{\operatorname{tg}\alpha}$, де $\operatorname{tg}\alpha$ буде кутовий
змінник дотичної MP, пове-
деної до параболи в точці
перехрещення її з попере-
чником. Тому $n=\frac{p}{m}$.

Таким чином рівняння
$y=n$ приймає вигляд:

$$y=\frac{p}{m}.$$

Це рівняння задовольняє кожні вимоги, бо зв'язує функціонально значення точок поперечника із змінником параболи p.

Щож торкається до кутового змінника m, то він цілковито визначав положення поперечника зглядно вісі параболи, бо кожному такому окремому положенню поперечника відповідатиме й окрема дотичка до параболи в точці перехрещя цієї параболи з поперечником, і тому кожній вартости кутового змінника зазначеної дотичної відповідатиме лише одно-єдине положення поперечника зглядно вісі параболи.

[Заміна вартости n на $\frac{p}{m}$ заміняє і вартости значників точки $\left(\frac{n^2}{2p}, n\right)$ перехрестя поперечника з параболою на такі:

$$\left(\frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m}\right)$$]

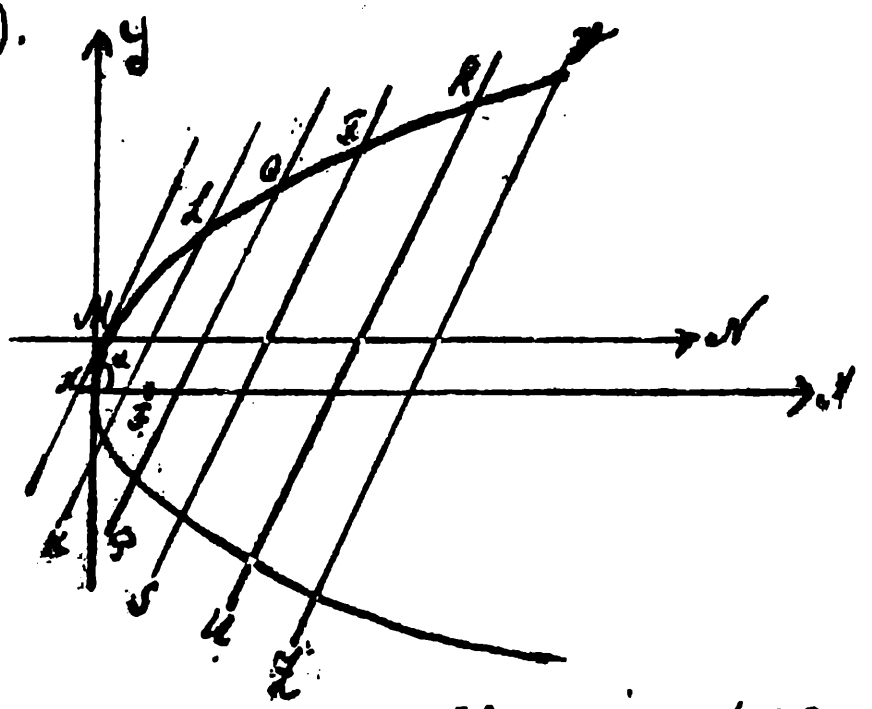
Доведемо тепер, що кожний поперечник параболи є зарученний з тятивами параболи рівнобіжними до дотичної поведеної до параболи через перехрестя її з поперечником.

Коли ми умовимося вже звати тятиви, що мають свої середини на вісі параболи, зарученими з цією віссю, то й у даному разі поперечником, зарученим з цілою тятив, будемо звати той поперечник, що є геометричним осередком середин цих тятив.

Отже наша теорема може бути сформульована так:

Кожний поперечник параболи є геометричним осередком (місцем) середин тятив рівнобіжних до дотичної, поведеної через кінець поперечника, б тому він звється зарученим з цими тятивами.

Візьмемо який небудь поперечник MN параболи $y=2px$, (рис.122).



Через точку M перехрещення цього поперечника з параболою поведемо дотичну M_1N_1. Припустимо, що кутовий змінник цієї дотичної буде $m=\operatorname{tg}\alpha$. Ми довели, що рівняння поперечника MN буде $y=\frac{p}{m}$. Проводимо ряд простих Kl, PQ, ST і т.д., рівнобіжних до дотичної, так щоб вони перехрещували параболу. Рівняння таких простих будуть мати вигляд:

$y=mx+n_1$; $y=mx+n_2$ і т.д., де m - є кутовий змінник про-

стих, однаковий із знаків кожної дотичної (а x приймає вартості однакового знаку зі знаком зміненого значення осі параболи).

Щоб довести нашу теорему, ми, незалежно від рівняння даного поперечника, будемо складати рівняння геометричного осередку (місця) середин даних тятив.

Ми знаємо, що значення середини кожного відтинку є середнім арифметичним значень його кінців.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

тому напишемо значення кінців якої небудь з даних тятив: $y = mx + n$.

Розв'язуючи систему рівнань параболи й простої ми довели, що значення кінців кожної такої тятиви будуть:

$$x_1 = \frac{p - mn_1 + \sqrt{p(p - 2mn_1)}}{m^2}$$

а)

$$y_1 = \frac{p + \sqrt{p(p - 2mn_1)}}{m}$$

б) $$x_2=\frac{p-mn_1-\sqrt{p(p-2mn_1)}}{m^2}$$

$$y_2=\frac{p-\sqrt{p(p-2mn_1)}}{m}$$

Тому значеннями середини тяжіння будуть:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2(p-mn_1)}{2m^2}=\frac{p-mn_1}{m^2}$$

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2p}{2m}=\frac{p}{m}$$

Коли розглянемо вартости знайдених значників x_0 й y_0, ми спостережемо, що значник y_0 є величиною сталою для всіх тяжінь, рівнобіжних до даної дотичної, бо для цих тяжінь змінник m - є величина стала й лише від зміни вартости n ($n_1, n_2, n_3 \ldots$), ми одержимо нові й нові тяжіння рівнобіжні до даної дотичної.

Вартість y_0 не вміщує в собі змінника n, а тому й відношення $\frac{p}{m}$ - буде сталою величиною, а разом з нею і $\underline{y_0=Const.}$ Значник же x_0 буде змінювати свої вартости в залежности від

змін вартостей x (відпови-ні, що творить на вісі y-ів проекція кожної тятиви). Такими чином, і проста, що сполучувальне середини даних тятив, буде мати вартости значення y- сталими, (а x-змінне), себто буде простою рівнобіжною до вісі x-ів і визначеною рівнянням:

$$y = \frac{p}{m}.$$

Але це саме рівняння визначає також і даний поперечник, а тому останній можна вважати за геометричний осередок середин тятив рівнобіжних до дотичної, поведеної до параболи через її перехрестя з цим поперечником, інакше кажучи: <u>кожний поперечник параболи є зруженний з тятивами рівнобіжними до дотичної, поведеної через перехрестя параболи з цим поперечником:</u> (кутового змінника m).

§39. Поле відрізку параболи.

Відрізком параболи зветься частина площі, обмежена дугою параболи й її тятивою.

Доведемо таку теорему:

Поле відрізка параболи, обмеженого тятивою, здруженою з віссю, є рівна $\frac{4}{3}$ добутку додатних значників точки перехрестя даної тятиви з параболою.

$$S_{відр.} = \frac{4}{3} ab$$

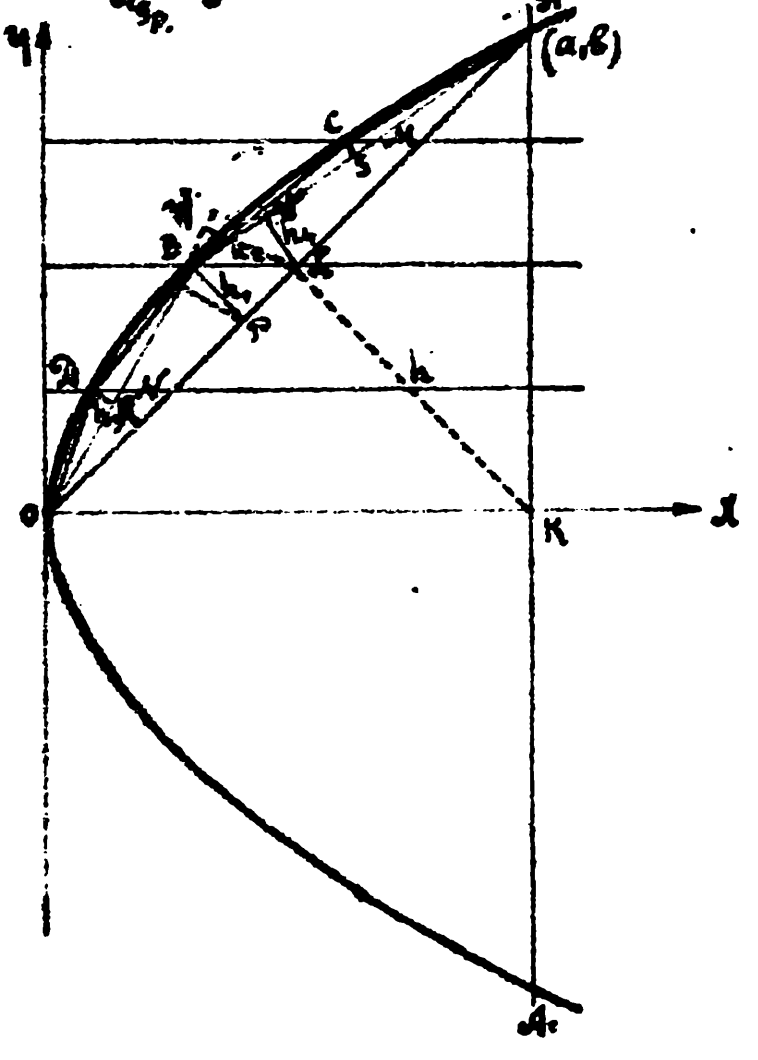


Рис. 123.

Розглянемо попереду поле піввідрізку КОА, обмеженого дугою параболи ⌒ОА, віссю параболи (ОК) і рядною точки А (АК=b). Проведемо тятиву ОА, знайдемо її середину L і через неї проводимо зарубки з нею поперечник. Кінець поперечника В сполучуємо тятивами з точками О і А. Через середини М і N тятив ВА і ВО проводимо знова зарубки з відповідними тятивами поперечники. Точки С і D перехрестя цих поперечників з параболою сполучуємо тятивами з точками А, В і О, знова через середини нових тятив проводимо зарубки з ними поперечники і т.д. до безмежности...

Таким будуванням ми одержимо безліч трикутників: АКО, АВО, АСВ, ВДО і т.д. і т.д. Поля цих трикутників будуть увесь час спадати (змінюватися), простуючи

до О. Нам треба знайти закон цього спадання. Будемо звати ΔAKO - <u>основним</u> і порівнаємо його поле з полем наступного ΔABO. Ми бачимо, що основа OA цих трикутників є спільною, а висота h першого Δ-ка в стільки разів більша висоти h_1 другого. Доведемо це.

Прямокутні $\Delta OdK \sim \Delta dBP$ (прямокутні, і гострі кути: $\angle BdP = \angle dOK$, як внутрішні перехресні). Тому:

$$\frac{dK}{BP} = \frac{OK}{Bd} \text{ або } \frac{h}{h_1} = \frac{OK}{Bd} \quad .. (a)$$

Обчислимо OK і Bd. OK є віддаллю точки A, тому $OK = a$ ... $Bd = x_1 - x_2$ (де x_1, x_2 є відповідні d і B) Точка d є середньою частиною AO, що має значення кінців $(0,0)$ $(a, b = \sqrt{2ap})$. Тому значення точки d будуть:

$$x_1 = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}; \quad y_1 = \frac{b+0}{2} = \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{2pa}}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{pa}{2}}.$$ Таким чином зарухомий з частиною AO поперечник Bd має рівняння: $y = \sqrt{\frac{pa}{2}}$

Щоб знайти значення x_2 y_2

точки B (перехрестя півпрямої $y=\sqrt{\frac{pa}{2}}$ і параболи $y^2=2px$, розв'язавши систему цих рівнянь і матимемо:

$$\left(\sqrt{\frac{pa}{2}}\right)^2=2px_2;\ \frac{pa}{2}=2px_2;$$

$$x_2=\frac{pa}{4p}=\frac{a}{4};\ y_2=\sqrt{\frac{pa}{2}}.$$

Отже відрізок $BL=x_1-x_2=\frac{a}{2}-\frac{a}{4}=\frac{a}{4}$. Вставляючи знайдені вартості $OK=a$ і $BL=\frac{a}{4}$ у пропорцію (a) матимемо:

$$\frac{h}{h_1}=\frac{a}{\frac{a}{4}}=4.$$

Отже $h_1=\frac{h}{4}$, що й треба було довести.

Маючи тепер, коли поле ΔOKA означимо через S $\left(S=\frac{AO\cdot h}{2}\right)$, то поле $\Delta AOB=\frac{AOh_1}{2}=\frac{AOh}{8}=\frac{S}{4}$.

Порівнаємо тепер поле ΔOBL і ΔODB. Ці трикутники мають спільну основу OB, а висота: LW у чотири рази більша висоти: $DR=h_3$. Доведемо це:

$\Delta BLW\sim\Delta RDN$. (бо вони прямокутні і гострий кут $\angle WBL=\angle DNR$ як зовнішні перехресні).

Тому: $\frac{LW}{DR}=\frac{BL}{DN}$ або $\frac{h_3}{h_2}=\frac{BL}{DN}$.

Ми вже довели, що $BL = \frac{a}{4}$.
Щоб обчислити $DN = x_3 - x_4$ (де $N(x_3, y_3)$, а $D(x_4, y_4)$], треба обчислити значення x_3 і x_4.
Значення x_3, y_3 – є значеннями точки N середини відрізка OB, що має значення кінців: $O(0,0)$ і $B\left(\frac{a}{4}, \sqrt{\frac{pa}{2}}\right)$, тому $x_3 = \frac{0+\frac{a}{4}}{4} = \frac{a}{8}$; $y_3 = \frac{0+\sqrt{\frac{pa}{2}}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{pa}{2}}$.

Щоб знайти значення точки D, перехрестя параболи $y^2 = 2px$ і поперечника DN, що має рівняння $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{pa}{2}}$, треба розв'язати дану систему рівнянь; отже:
$y^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{pa}{2} = 2px$. $x_4 = \frac{pa}{8 \cdot 2p} = \frac{a}{16}$.

Таким чином:

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{a}{4} : \frac{a}{16} = 4 \text{ або } \underline{h_3 = \frac{h_2}{4}}$$

Тепер порівнюючи поля Δ ABL і Δ ABC, ми побачимо, що їх висоти $\frac{d_1}{CS} = \frac{h_4}{h_5} = \frac{BL}{CM}$.
Але $BL = \frac{a}{4}$, а $CM = x_5 - x_6$; де x_5, відтинкова M обчислюється як значення середини відрізка AB, що має значення кінців: $A(a,6)$ $B\left(\frac{a}{4}, \sqrt{\frac{pa}{2}}\right)$.

Тому $x_5 = \frac{a+\frac{a}{4}}{2} = \frac{5a}{8}$; $y_5 = \frac{b+\sqrt{\frac{pa}{2}}}{2} =$
$= \frac{\sqrt{2pa}+\sqrt{\frac{pa}{2}}}{2} = \frac{2\sqrt{\frac{pa}{2}}+\sqrt{\frac{pa}{2}}}{2}$, або $y_5 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{pa}{2}}$.
Знайшли точки в визначає, як значення перетин параболи $y^2 = 2px$ і перпендикуляра (CM): $y = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{pa}{2}}$.
Розв'язавши цю систему, одержимо:
$y^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{pa}{2} = 2px$; звідси $x_6 = \frac{9pa}{8 \cdot 2p} = \frac{9a}{16}$.
Тому відрізок $CM = x_5 - x_6 =$
$= \frac{5}{8}a = \frac{a}{16}$, через те $\frac{h_4}{h_5} = \frac{BL}{CM} = \frac{a}{4} : \frac{a}{16} =$
$= 4$. Звідси $h_5 = \frac{h_4}{4}$.
Коли при однаковій основі висота $\triangle OAB$ у чотири рази менша ніж висота $\triangle OBL$, то й поле

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{4} S_{\triangle OBL}$$

З тих же міркувань

$$S_{\triangle BAC} = \frac{1}{4} S_{\triangle LBA}$$

Сума полів цих трикутників:
$S_{\triangle OAB} + S_{\triangle BAC} = \frac{1}{4}(S_{\triangle OBL} + S_{\triangle LBA}) = \frac{1}{4} S_{\triangle AOB}$.
Але ми довели, що поле $\triangle AOB$ є $\frac{1}{4}$ частина основного $\triangle AOK$, себто $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{4} S$.

Таким чином

$$S_{\Delta OAB} + S_{\Delta BAC} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}S\right) = \frac{1}{16}S.$$

Продовжуючи далі обчислення все нових Δ-ів ми переконаємося, що сума площ Δ-ів, утворених зазначеним раніше способом (проведення здружених поперечників до точок AC, CB, BD, DO і сполучення кінців їх з кінцями відповідних хорд і т. д.) буде спадати в геометричній поступовій (кратність якого $\frac{1}{4}$).

Тому, продовжуючи процес до безмежності, одержимо безмежно спадаючий ряд:

$$S, \frac{S}{4}, \frac{S}{16}, \frac{S}{64} \ldots$$

Межа суми членів цього ряду буде площа півсегмента, обмеженого прямою AK і OK, і другого параболи OA.

Обчислимо цю межу суми членів безмежно спадаючого геометричного ряду:

$$S_1 = S + \frac{S}{4} + \frac{S}{16} + \frac{S}{64} + \ldots = \frac{S}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S$$

Але цього відрізка параболи, обмеженого хордою AA,

і другого параболи $\smile AOA_1$ буде удвічі більш за поле S, себто

$$S_{відр.} = 2S_1 = \frac{8}{3}S.$$

Але S = полю $\triangle AOK = \frac{AK \cdot OK}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$, а тому $\underline{S_{відр} = \frac{8}{3} \cdot \frac{ab}{2} = \frac{4}{3}ab}$ . . . (89)

[Часто вживають вздр поля, обмеженого дугою $\smile A$, півпятивою AK і віссю x-ів, себто поля піввідрізку S_1.

$$\underline{S_1 = \frac{4}{3}S = \frac{4}{3} \cdot \frac{ab}{2} = \frac{2}{3}ab} \ldots . (90)]$$

Але $y = \sqrt{2px}$, або $b = \sqrt{2pa}$; звідси $a = \frac{b^2}{2p}$. Вставляючи цю вартість a у поле відрізку, одержуємо

$$\underline{S_{відр.} = \frac{4}{3} \cdot \frac{b^3}{2p} = \frac{2b^3}{3p}}$$

Поле відрізка параболи, утвореного тятивою, прямовою до вісі є рівна $\frac{4}{3}$ відношення куби рядної лінії тятиви до зліпшка параболи:

$$\underline{\frac{4}{3} \cdot \frac{b^3}{2p}} \ldots . (91),$$

або $\underline{\frac{2b^3}{3p}} \ldots . (92)$

Обчислимо теж поле відрізка параболи обмеженого дугою параболи і якою небудь тятивою MN, непрямовою до вісі параболи.

Доведемо, що

поле кожного відрізку параболи, утвореного тятивою не прямовою до вісі X-ів є рівне $\frac{1}{6}$ відношення куба різниці рядних кінців тятиви до параметру параболи.

$$S_{відр.} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(y_2 - y_1)^3}{2p} = \frac{(y_2 - y_0)^3}{12p} \quad (93)$$

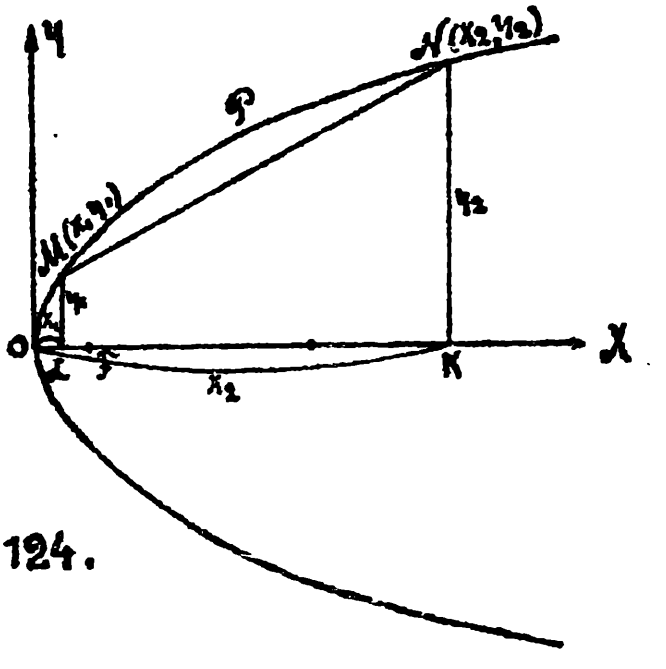


Рис. 124.

поле відрізку MPN можна розглядати, як різницю поля піввідрізку OVK без суми полів трапеції dMVK і піввідрізку OMd.

$$S_{MPN} = S_{OVK} - (S_{dMVK} + S_{OMd}).$$

але: $S_{OVK} = \frac{2}{3} x_2 y_2$; $S_{dMVK} = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1)$;

$S_{опд} = \frac{2}{3} x_1 y_1$, тому:

$$S_{прм} = \frac{2}{3} x_2 y_2 - \frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2} - \frac{2}{3} x_1 y_1$$

або $S_{прм} = \frac{4x_2y_2 - 3x_2y_1 - 3x_2y_2 + 3x_1y_1 + 3x_1y_2 - 4x_1y_1}{6} =$

$$= \frac{1}{6}(x_1y_2 - 3x_2y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_1);$$

Але нам відомо, що $y_1 = \sqrt{2px_1}$;
$y_2 = \sqrt{2px_2}$, а звідси $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$; $x_2 = \frac{y_2^2}{2p}$.

Вставляючи ці вартості у вираз для поля варіяції, маємо:

$$S_{прм} = \frac{1}{6}\left(\frac{y_2^3}{2p} - 3\frac{y_2^2 y_1}{2p} + 3\frac{y_1^2 y_2}{2p} - \frac{y_1^3}{2p}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{(y_2-y_1)^3}{2p}, \text{ або } S_{прм} = \frac{(y_2-y_1)^3}{12p}.$$

Приклади:

1) Обчислити поле варіяції параболи, що творить проста: $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ з параболою $y^2 = 8x$.

Знаходимо значення кінців тятиви $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$, для цього розв'язуємо систему:

$$y^2 = 8x \quad (2p = 8)$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

$y^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{32}{9}x + \frac{64}{9} = 8x$; $4x^2 - 40x + 64 = 0$,

або $x^2 - 10x + 16 = 0$; $x = 5 \pm \sqrt{25-16}$; $x = 5 \pm 3$;

$x_1 = 2$; $x_2 = 8$; $y_1 = \sqrt{8 \cdot 2} = 4$; $y_2 = \sqrt{8 \cdot 8} = 8$.

Отже $S_{відр} = \frac{(8-4)^3}{6 \cdot 8} = \frac{64}{48} = \frac{4}{3}$ кв. од.

2) Обчислити поле відрізку параболи $y^2 = 6x$, що творить ординатива $x = 24$.

Знаходимо значення ординат цієї ординатива:

$y^2 = 6 \cdot 24$; $y = \pm\sqrt{144}$; $y_1 = 12$; $y_2 = -12$.

ординатива прямова вісі x-ів, тому

$$S = \frac{4}{3} \cdot 24 \cdot 12 = 384 \text{ кв. од.}$$

або

$$S = \frac{2b^3}{3p} = \frac{2 \cdot 12^3}{3 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 1728}{9} = 2,192 \text{ кв. од.}$$

Задачі

№ 239. Написати рівняння параболи, в яку можна вписати рівносторонній трикутник з основою 10, а висотою 2,5, так, щоб він лежав вершиною своїй у вершину параболи;

2) тепер, коли при цих же умовах можна вписати рівносторонній Δ з боком 4,5 метра.

№ 240. Дослідити положення прості: 1) $y + 2x = 0$ і 2) $2x + 2y + 5 = 0$ згідно параболи 1) $y^2 = 12x$; 2) $y^2 = 10x$?

т.241. Знайти значення кутів і довжину хорди, що творить пряма $x=\frac{5}{4}y+1$, як січна параболи $x^2=9x$.

т.242. Написати рівняння поперечника параболи $y^2=5x$, а також знайти значення перехрестя його з параболою, коли він є заряженій з хордою $5x-9y+20=0$

т.243. Чи є, для поперечника параболи $y^2-5x-6y+29=0$, зарученого з хордою $x+y=17$?

т.244. Написати рівняння січної до параболи $y^2=9x$, коли ця січна проходить через точку (3,4) і зарученна з поперечником $y=2$?

т.245. Обчислити поле відрізку параболи $y^2=2px$, що творить хорда, яка проходить через вогнище прямо до вісі?

т.246. Чи для параболи $y^2=10x$, коли відрізок є обмеженій хордою $x=2,5$.?

т.247. Обчислити площу відрізків параболи $y^2=12x$, що

утворюються січними до парабол: 1) $y=-6(x+4)$; 2) $y=-3(x-10)$ і 3) $3x=10-y$?

Дотична до параболи.

§40. Рівняння дотичної проведеної через дану точку на параболі.

При дослідженні взаємного положення прямої і параболи, ми спостерегли все такі властивості дотичної до параболи:

1) Дотична відтинає від осі y-ів відтинок рівний половині ординати даної точки дотику.

2) Дотична є прямова до променя проведеного з вогнища в точку перехрестя дотичної з віссю y-ів.

Цими властивостями ми скористуємося, щоб написати рівняння дотичної до параболи.

Хай нам дана парабола рівнянням у вершиновій формі:

$$y^2=2px.$$

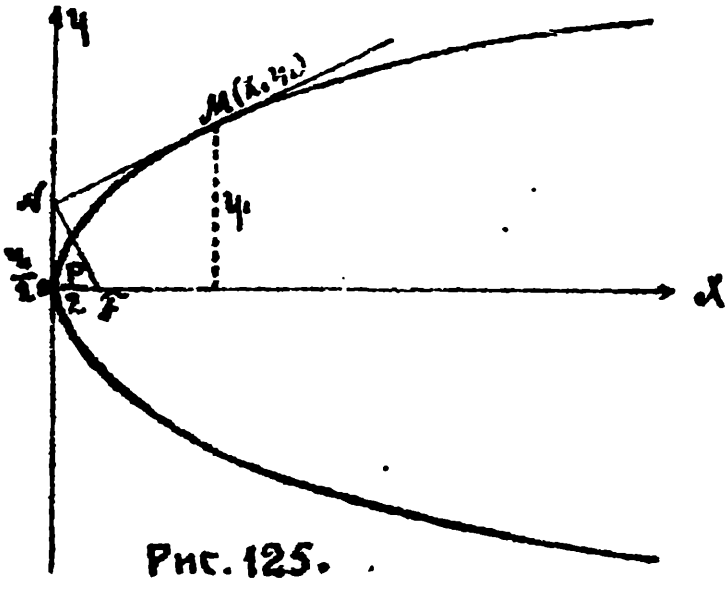


Рис. 125.

треба повести до неї дотичну через точку $M(x_1, y_1)$, що належить до параболи.

Рівняння кожної прямої, що проходить через дану точку $M(x_1, y_1)$ буде

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Щоб ця пряма була дотичною до параболи необхідно кутовий множник m підібрати так, щоб ця пряма була перпендикулярною до променя FN поведеного з вогнища в точку $N(0\ \frac{y_1}{2})$ перехрестя дотичної з віссю y-ів. Але промінь FN творить відтинки на осях: $x = \frac{p}{2}$; $y = \frac{y_1}{2}$; тому його рівняння буде:

$$\frac{x}{\frac{p}{2}} + \frac{y}{\frac{y_1}{2}} = 1 \quad \text{або} \quad \underline{y = -\frac{y_1}{p}x + \frac{y_1}{2}}$$

Коли проста $y-y_1=m(x-x_1)$ мусить бути прямовою до простої FN, то кутовий коефіцієнт m мусить задовольняти умові прямовості простих, себто

$$m=+\frac{p}{y_1}$$

тому таке рівняння дотичної у точці $M(x_1,y_1)$ буде:

$$y-y_1=\frac{p}{y_1}(x-x_1), \quad \ldots \quad (94)$$

або

$$yy_1-y_1^2=px-px_1.$$

Але коли точка $M(x_1,y_1)$ належить до параболи, то $y_1^2=2px_1$, а тому, вставляючи замість y_1^2 знайдену вартість, маємо:

$$yy_1-2px_1=px-px_1 \text{ або}$$

$$\underline{yy_1=p(x+x_1)} \quad \ldots \quad (95)$$

Це і є рівняння дотичної до параболи, рівняння якої дане у вершиновій формі.

Ми бачимо, що правило складання рівняння дотичної до параболи таке саме, як і для кола, рівняння якого дане в алгебричній

форми, себ-то:

Щоб скласти рівняння дотичної до параболи, треба у рівнянні цієї параболи квадрати невідомих написати як здобутки, а подвійні невідомі першого ступіня, як суми цих невідомих (напр., для рівняння: $y^2 = 2px$. $yy = p(x+x)$) і в кожній парі невідомих одно з них замінити на відповідний значник даної точки дотичної.

[напр. $yy = p(x+x)$; робимо заміну $yy_1 = p(x+x_1)$]

Примітка: Можна скласти рівняння дотичної ще другим способом, а саме: кожна дотична мусить проходити через 2 точки: а) рану точку дотичну $M(x_1, y_1)$ і 2) через точку на вісі y-ів відалеку від початку вісей на пів рядної точки дотику, себ-то через точку $N(0, \frac{y_1}{2})$ (рис. 125)

Рівняння такої простої буде:

$$y - \frac{y_1}{2} = \frac{y_1 - \frac{y_1}{2}}{x_1}(x - 0), \text{ або}$$

$y-\frac{y_1}{2}=\frac{y_1}{2x_1}x$, або $y=\frac{y_1}{2x_1}x+\frac{y_1}{2}$; $y=\frac{y}{2x_1}(x+x_1)$

Помноживши обидві частини рівняння на y_1 маємо

$$yy_1=\frac{y_1^2}{2x_1}(x+x_1)$$

Але точка (x_1, y_1) належить до параболи й тому задовольняє рівнанню її, отже $y_1^2=2px_1$. Звідси $\frac{y_1^2}{2x_1}=p$. Вставивши замість $\frac{y_1^2}{2x_1}$ в наше рівняння дотичної, одержуємо

$$yy_1=p(x+x_1),$$

Себто попереднє рівняння дотичної.

Коли ми матимемо рівняння параболи в загальній формі:

$$(y-b)^2=2p(x-a),$$

то шляхом рівнобіжного перенесення вісей в точку a, в визначених при тих умовах рівняння дотичної і перетворення його навчали до старих вісей, ми матимемо рівняння дотичної таке:

$$(y-b)(y_1-b)=p[(x-a)+(x_1-a)].$$

Себто - правило складання дотичної тем саме.

§41. Властивості дотичної

Крім уже доведених властивостей:

1) Дотична параболи (вершиною не початкова) відтинає від вісі y-ів відтинок, рівний півряднй точки дотику;

2) Дотична параболи прямовна до променя, поведеного з фокуса в точку перехрещення цієї дотичної з віссю y-ів.

Маємо ще дві властивості:

3) Дотична відтинає від вісі x-ів відтинок, рівний відємній величині відтинкової точки дотику;

4) Дотична є сімметрального кута, утвореного променем-вектором параболи й поперечником, через точку дотику поведених.

Звідси висновок, що кут нахилу дотичної є рівний половині кута, утвореного променем-вектором і від'ємним напрямом поперечника, через точку дотику поведених.

5) Відстань фокальної пере=
полювиною вісь Y-ів.

Доведемо ці 3 і 4 властиво=
сти фокальної (рис. 126)

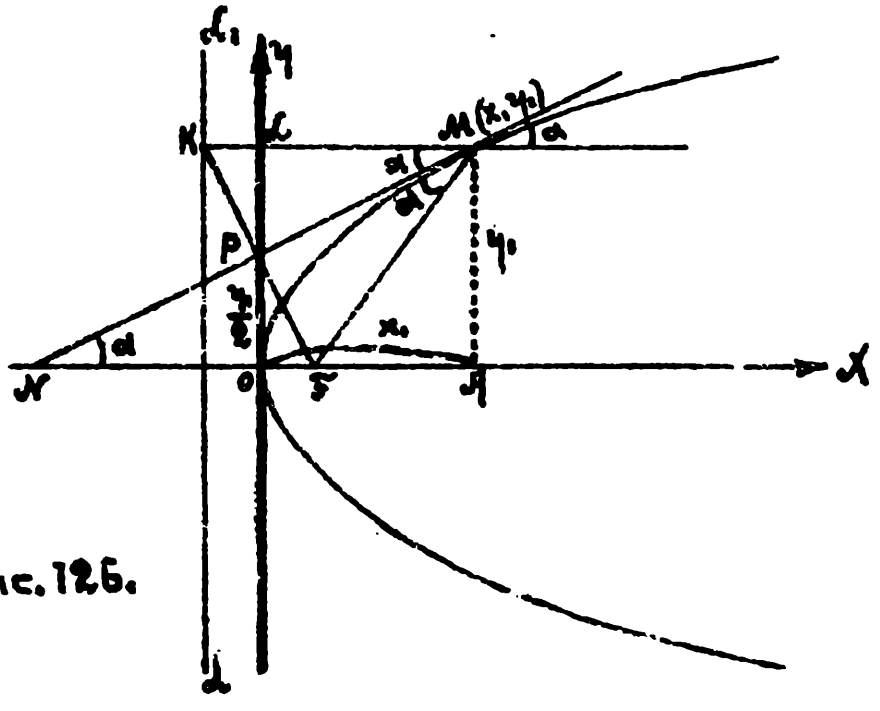


Рис. 126.

3) Розглянемо Δ NKA і Δ NPO, вони
є схожі, бо KA ∥ PO, тому

$$\frac{AN}{ON} = \frac{AM}{OP} = \frac{MN}{NP}$$

але $AM = y_1$, а $OP = \frac{y_1}{2}$, тому

$$\frac{AN}{ON} = \frac{y_1 \cdot 2}{y_1} = 2$$

$AN = 2ON$, себто $ON = OA$.

Звідси знаходимо точки N будуть $-x_1, 0$.

[Цей же висліл одержимо, коли
будемо шукати точку перети=
ну вісі X-ів фокальної $yy_1 = p(x+x_1)$

Справді, поклавши $y=0$, маємо $0=p(x+x_1)$, або $x+x_1=0$; $x=-x_1$.]

5) Разом з цим маємо $\frac{MN}{NP}=2$, себто відтинок дотичної переполовинюється віссю y-ів.

4) З визначення параболи відомо, що $FM=MK$, тому ΔKMF є рівнобедренний. Як ми довели раніш, дотична переполовинює основу цього ΔKF у точці P, а тому, як середня основи рівнобедренного Δ, є одночасно і симетрисною вершинового кута $\angle KMF$, себто його переполовинює.

Але $KM \parallel NA$, тому кут спаду дотичної $\angle N = \angle PMK$ (як внутрішні перехресні), себто є половиною кута, утвореного променем-вектором і від'ємним напрямом поперечника, поведеним через точку дотику.

§42. Прямова або нормальна параболи.

Ми вже знаємо, що прямовою, або нормальною кривої в даній точці зветься пряма, поставлений в точці дотику до

самої дотичної

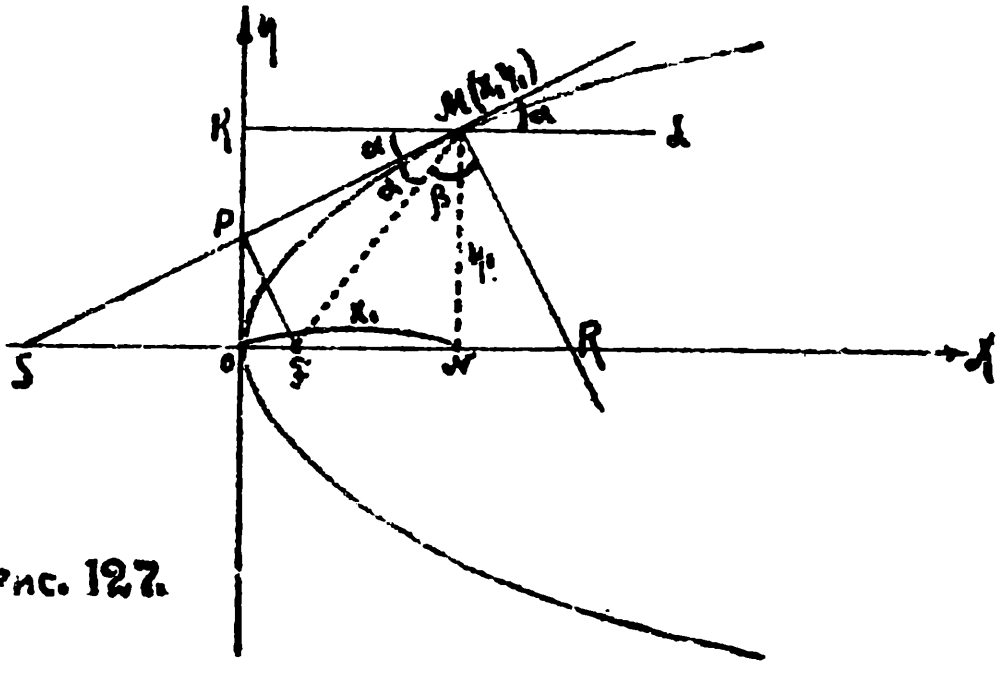


Рис. 127.

Виведемо рівняння прямої. Рівняння дотичної, проведеної через точку параболи $M(x_1,y_1)$ буде: $y-y_1=\frac{P}{y_1}(x-x_1)$; [див. рівняння ( )]

Рівняння прямової як прості, що проходить точкою $M(x_1,y_1)$, буде: $y-y_1=m(x-x_1)$, але ця пряма є прямою до дотичної, а тому $m=-\frac{y_1}{P}$;

Отже рівняння прямової в якій небудь точці параболи $M(x_1,-y_1)$ буде:

$$y-y_1=-\frac{y_1}{P}(x-x_1)\ldots.(96)$$

Властивість прямової параболи є та, що пряма

ня і фокуса є симетрального пучка, утвореного пучком-вектором і додатним напрямом перетина, повернених у фокальну фокусу.

§43. Довжина (відтинок) фокальної та піфокальної, прямової, та підпрямової.

1) Довжина піфокальної є рівна $2x_1$: $S_f = 2x_1$, справді, $S_f = SN = SO + ON = x_1 + x_1 = 2x_1$ (Рис 127).

2) Довжина підпрямової $S_n = P$. Розглянемо $\Delta\Delta$: SMR і SPF. Ми бачимо, що $PF \parallel MR$, тому

$$\frac{MR}{PF} = \frac{SR}{SF} = \frac{SM}{SP},$$

але зі схожості ΔOPS і ΔMNS ми спостерегли, що $\frac{SM}{SP} = 2$, тому

$$\frac{SR}{SF} = 2,$$ отже вогнище переполовинює відтинок осі x-ів, обмежений перетинами з нею фокальної та прямової, тому

$SO + OF = FN + NR$, але $SO = x_1$; $OF = \frac{P}{2}$; $FN = ON - OF = x_1 - \frac{P}{2}$; $NR = S_n$.

маємо тоді $x_1 + \frac{P}{2} = x_1 - \frac{P}{2} + S_n$.

Звідси: $$\underline{S_n = P}$$

Підпрямова параболи є величина стала, рівна півзмінній параболи.

З прямокутних $\Delta\Delta$ SMN і NMR одержимо довжину

1) дотичної: $t = \sqrt{4x_1^2 + y_1^2}$

2) прямової: $n = \sqrt{p^2 + y_1^2}$

Таким чином:

Довжина

1) дотичної: $t = \sqrt{4x_1^2 + y_1^2}$
2) прямової: $n = \sqrt{p^2 + y_1^2}$
3) піддотичної: $S_t = 2x_1$
4) підпрямової: $S_n = p$

} .. (97)

§44. Креслення дотичної та прямової до параболи.

Щоб накреслити дотичну до параболи через дану на ній точку скористуємося, або

1) властивістю дотичної відтинати від вісі y-ів відтинок, рівний половині ряднай даної точки, або

2) властивістю дотичної відтинати від вісі x-ів відтинок, рівний (своєю абсолютною величиною) відтинкові (абсцисі) даної точки.

У першому разі креслення перевідно так:

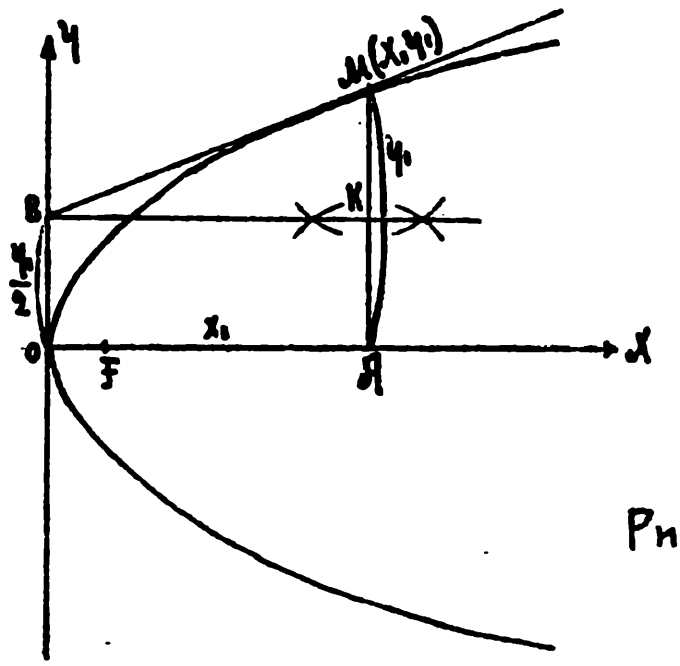


Рис. 128.

Рядну $AM = y_1$ даної точки M (рис. 128) переполовинюємо і через точку K (середина AM) проводимо рівнобіжну KB до вісі x-ів. Тоді $OB = \frac{y_1}{2}$. Через точки B і M проводимо пряму BM, що й буде дотичною до параболи в точці її $M(x_1, y_1)$

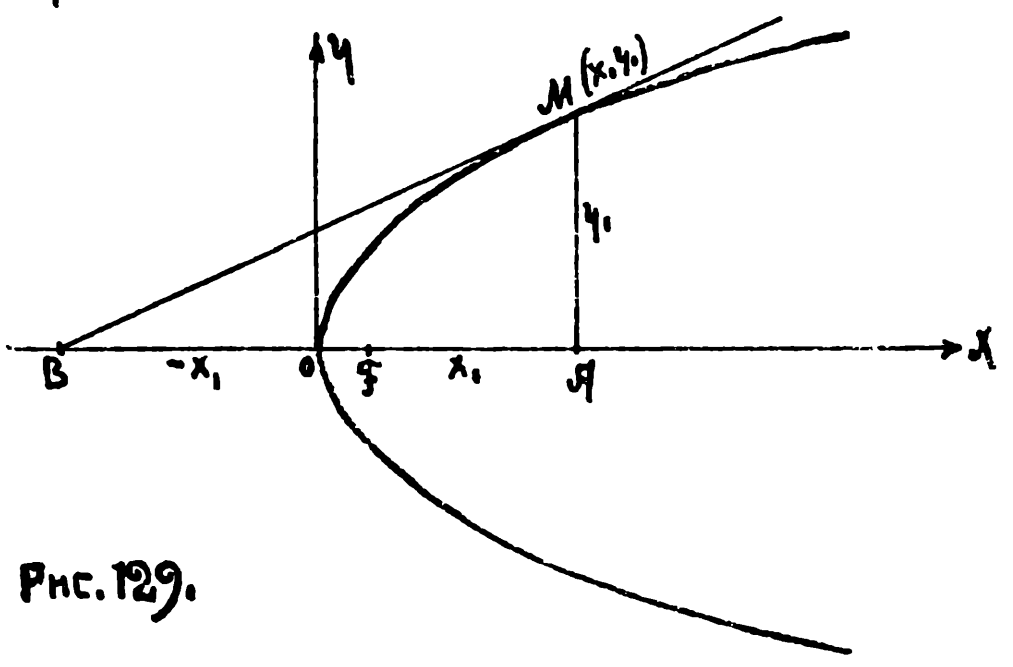


Рис. 129.

У другому разі відтинкову ОА даної (рис. 129) точки $M(x_1 y_1)$ на параболі відкладуємо по вісі x-ів уліворуч від початку вісей O, і через точки B і M проводимо просту

Для накреслення прямової до параболи у даній точці скористуємося тою властивістю, що вогнище параболи переполовинює відтинок вісі x-ів між перехрестями з нею дотичної й прямової.

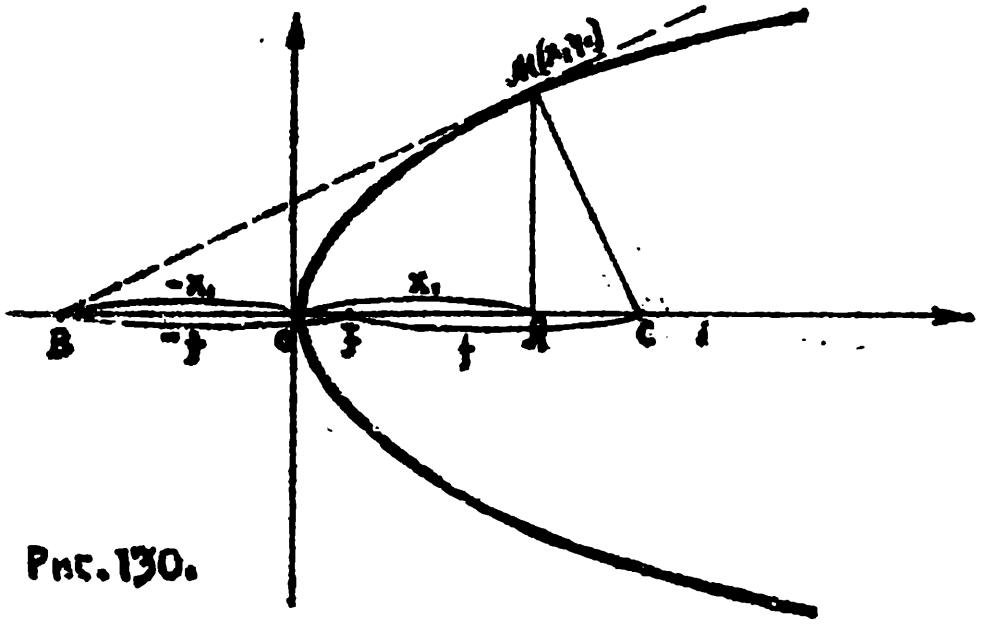


Рис. 130.

А тому креслимо так: (рис. 130) Відтинкову ОА даної точки $M(x_1 y_1)$ на параболі відкладуємо на вісі x-ів у ліворуч від початку вісей O (як це робили у другому випадку будування дотичної, рис. 129),

точки відрізка одержимої точки B від вогнища $F(BF)$ відкладаємо на вісі X-ів управо від вогнища F (відрізок FC). Одержана точка C є перехрестям прямової (нормалі) з вісю X-ів, а тому спорудивши просто точки M_1C матимемо саму прямову MC.

§45. Дотична до параболи, поведена через точку поза нею.

Припустимо, що дотична поведена через дану точку $M_0(x_0y_0)$ дотикається параболи в якійсь невідомій точці $M(x_1y_1)$. Тоді рівняння її буде $yy_1 = p(x+x_1)$. Але з умови очевидно, що ця дотична проходить через точку M_0, а тому значимо її мусимо обертати дане рівняння дотичної у тотожність, себто $y_0y_1 = p(x_0+x_1)$. Ця тотожність є провізорична, бо ми вважали значимі x_1, y_1 за дані. Коли ми бажаємо їх визначити, то мусимо вважати рівність $y_0y_1 = p(x_0+x_1)$, як рівняння з двома

по невідомих x_1 і y_1. Для одержання другого рівняння скористуємося тим, що точка M лежить на параболі, а тому значення точки M: x_1 і y_1 мусять задоволняти рівнанню самої параболи, себто маємо, що

$$y_1^2 = 2px_1$$

Таким чином щоб знайти точку дотику M, ми мусимо розвязати систему рівнань:

$$y_1 y_0 = p(x_1 + x_0)$$
$$y_1^2 = 2px$$

або означаючи x_1 і y_1, як невідомі просто через x і y:

$$\left.\begin{aligned} yy_0 &= p(x+x_0) \\ y^2 &= 2px \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

[Розвязуємо: $x = \frac{y^2}{2p}$; $yy_0 = p\left(\frac{y^2}{2p} + x_0\right)$;
$2yy_0 = y^2 + 2px_0$, а звідси:]

$$y = y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2px_0}$$

Таким чином y, а разом і $x = \frac{y^2}{2p}$ мають

1) або 2 вартости, коли вираз: $D = y_0^2 - 2px > 0$ (себто, в тому

рязі, з точки поза параболою можна повести до неї дві дотичні) 2) або 1 вартість (дві однакові), коли вираз $D = y_0^2 - 2px_0 = 0$ (одна дотична) і 3) або ніодної реальної вартості, коли $D = y_0^2 - 2px_0 < 0$ (дотичної повести неможна)

Геометрично уявимо собі це так:

нерівність $y_0^2 - 2px \gtreqless 0$ можна написати ще й так: $y_0^2 \gtreqless 2px_0$. Рівність: $y_0^2 = 2px_0$ може існувати лише тоді, коли точка $M_0(x_0 y_0)$ лежить на самій параболі, бо значення x_0, y_0 задовольняють рівнанню параболи $y^2 = 2px$. Але ми знаємо, що коли $y_1^2 > 2px_1$, то точка лежить поза параболою. Наперед нам відомо, що для точки, яка лежить на полі параболи $y_1^2 < 2px_1$, аналогічно нерівність $y_0^2 < 2px_0$ показує, що й точка M_0 має лежати на полі параболи.

Отже, 1) коли дана точка лежить поза параболою, то через неї можна повести до цієї

параболи дві дотичних (напр. одна M_0M_1, а друга M_0M_2, рис. 131).

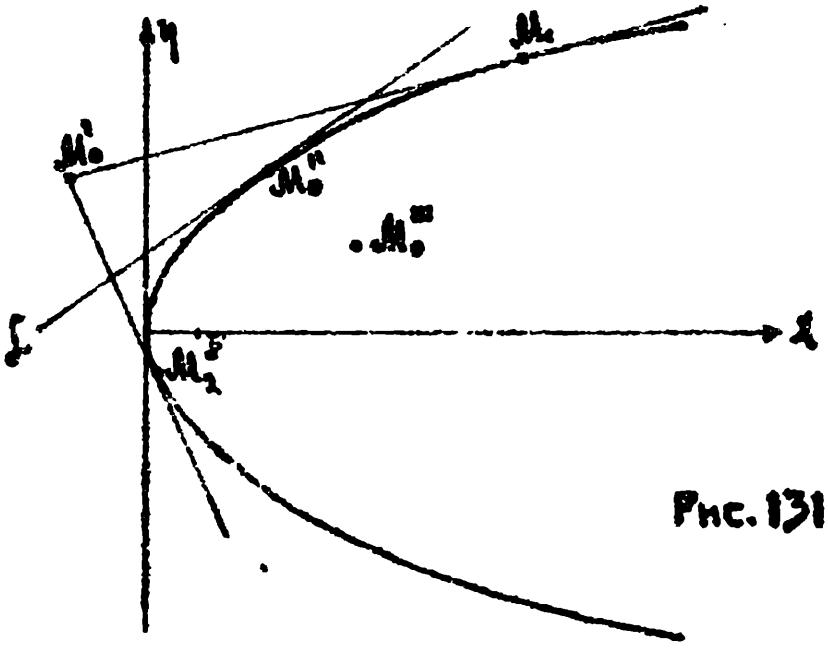


Рис. 131.

2) Коли точка (M_0^2) лежить на параболі, то через неї можна провести лише одну дотичну до цієї параболи (напр. d, рис. 131).

3) Коли точка (M_0''') лежить на полі параболи, то через неї не можна провести жодної дотичної до цієї параболи.

§46. Будування дотичних до параболи поведених з точок, що лежать поза нею.

Припустимо, що ми вже провели дотичні M_0M_1 і M_0M_2 з точки M_0 поза параболою. Ми знаємо, властивість

дотичної до параболи:

Кожна дотична до параболи є прямовою до променя, поведеного з вогнища параболи в точку перехрещення дотичної з віссю Y-ів, а тому кути $\angle FAM_0$ і $\angle FBM_0$ є прямі (рис. 132)

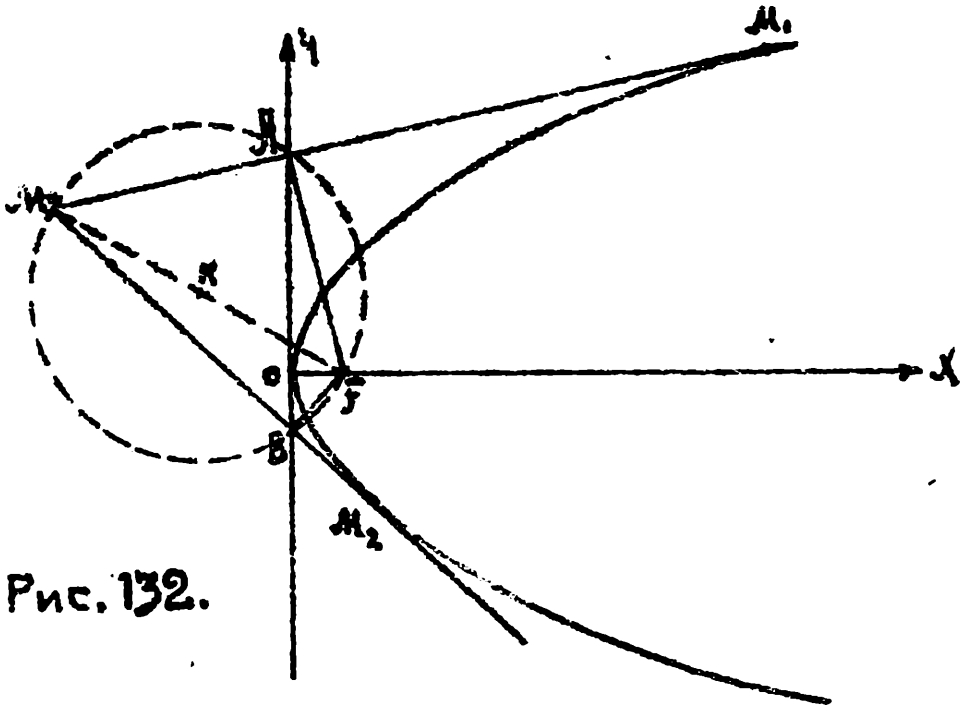


Рис. 132.

Ці кути спираються на хорді відтинку M_0F, що сполучує вогнище з даною точкою, а через те їх вершини A і B мусять лежати на перехрестях обвода кола, збудованого на відтинку M_0F, як на поперечнику, з віссю Y-ів. Ці міркування дають спосіб будування дотичних до параболи поведених з точки, що лежить поза нею. А са-

ми (Рис. 132).

Щоб збудувати дотичні поведені до параболи з якої небудь точки поза нею, необхідно сполучити відтинком простої (M_0F) дану точку з огнищем параболи й на цьому відтинкові, як на поперечникові, збудувати коло. Через дану точку M_0 і точки A і B перехрестя кола з віссю y-ів проводимо прості M_0AM_1 і M_0BM_2, що й будуть потрібними дотичними.

§ 47. Бігунка параболи

Як було для кола, так і тепер <u>січну, перехрестя якої з даною параболою є точками дотику дотичних, поведених з якої небудь точки поза цією параболою, будемо звати бігункою (полярою) зазначеної точки, а саму точку бігуном.</u>

Як видно з системи рівнань, що визначали значення точок дотику, <u>рівнання бігунки</u> буде:

$$yy_0 = p(x+x_0) \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

(Спосіб написання рівнання нам

уже відомий)

Примітка: Очевидно, що рівняння бічниці до параболи: $(y-b)^2+2p(x-a)$ буде:

$$(y-b)(y_0-b)=p[(x-a)+(x_0-a)] \quad \ldots\ldots (99)$$

Властивості бічниці

1) Бічниця є зарученою з полярним параболи, поведеним через бічну її.

Довід: Значення зміщів дотичної тятиви (відтинку бічниці між точками дотику M_1 і M_2) будуть (див. розв'язання систем)

$$y_1=y_0+\sqrt{y_0^2-2px_0}$$

$$y_2=y_0-\sqrt{y_0^2-2px_0}$$

$$x_1=\frac{y_1^2}{2p}=\frac{y_0^2-px_0+y_0\sqrt{y_0^2-2px_0}}{p}$$

$$x_2=\frac{y_2^2}{2p}=\frac{y_0^2-px_0-y_0\sqrt{y_0^2-2px_0}}{p}$$

тому,

Значення середини дотичної тятиви будуть

$$a=\frac{y_1+x_2}{2}=\frac{y_0^2-px_0}{p};\quad b=\frac{y_1+y_2}{2}=y_0$$

Ми спостерігаємо, що рядна бічниця й середини дотичної.

тятиви є однакова $b = y_0$, а дотична проста, що проходить через них є рівнобіжною до вісі X-ів, себто поперечникою параболи (рівняння $y = y_c$). Таким чином бічна (сторона її дотикова тятива) буде зорунжена з поперечникою параболи, що проходить через бічну.

2) Парабола переполовинює відтинок поперечника зорунженого з полярою (під відтинком поперечника розуміємо відділення бічної від середини дотикової тятиви)

і 3) Дотична до параболи, що рівнобіжна до бічної, переполовинює дотичні поведені з бічної, а також і відтинок самої цієї дотичної, замкнений бічними дотичними, переполовинюється точкою дотику.

Довід.

1) Щоб довести, що парабола переполовинює відтинок AM_0 поперечника зорунженого з полярою M_1M_2, визначимо значення X точки B перехрестя даної па-

роботи з поперечником M_0A.

Ми знаємо, що рівняння параболи: $y^2 = 2px$, й рівняння поперечника $y = y_0$, а тому $y_0^2 = 2px$, а звідси $x' = \frac{y_0}{2p}$. (Рис133)

З другого боку було шукати взагалі значення середини відтинку M_0A:

$$x'' = \frac{x_0 + a}{2} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{y_0^2 - px_0}{p}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0p + y_0^2 - px_0}{p}\right),$$

або $x'' = \frac{y_0^2}{2p}$. Ми бачимо, що значення x' перехрестя поперечника M_0A з параболою і значення x'', середини відтинку M_0A є той же самий (а що до значення y, то він для відтинка M_0A є завжди рівний y_0)...

Отже ми доводимо, що <u>парабола переполовинює відтинок M_0A поперечника, зарученого з бігучого.</u>

2) Розглядаючи хорди простих: M_0M_1; M_0A; M_0M_2, перетятих рівнобіжними: $CD \parallel M_2M_1$, ми бачимо, що $\frac{M_0D}{DM_1} = \frac{M_0C}{CM_2} = \frac{M_0B}{BA}$; але $M_0B = BA$, а тому: $M_0D = DM_1$; $M_0C = CM_2$

3) Нарешті проста M_0A є осереднього (медіяною) основи трикутни-

на $M_1M_0M_2$, а тому вона перепо-
ловинювальна хордий від-
тинок замкнений дугами при-
кутника і рівнобічний до
основи M_1M_2, себто $\underline{CB = CD}$.

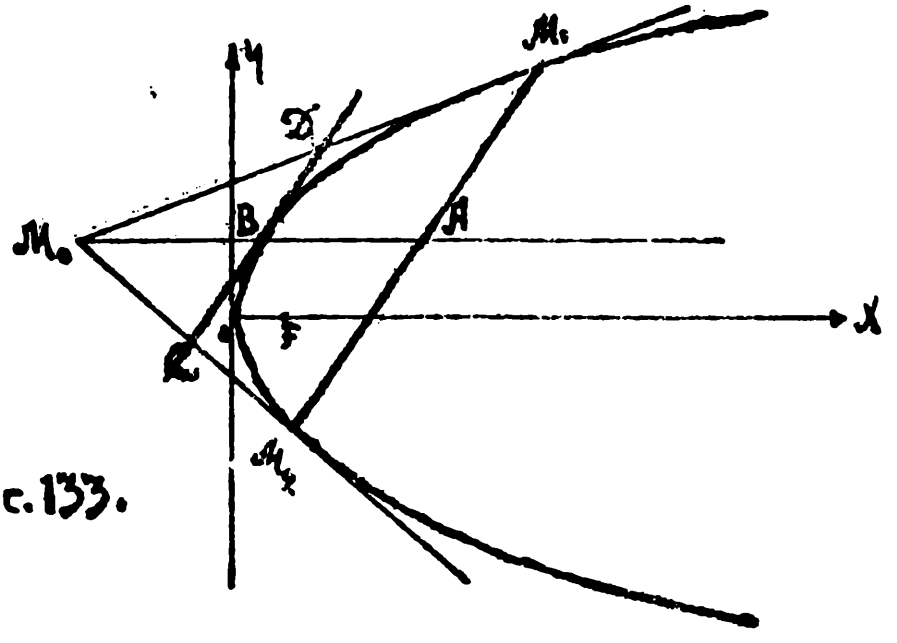


Рис. 133.

Задачи.

№ 248. Написати рівняння дотичної, поведеної через дану точку на параболі:

1) $y^2 = 8x$; $A(2,4)$
2) $y^2 = 8x$; $B(3,y_1)$; $y_1 > 0$
3) $y^2 = -6x$ $C(-\frac{2}{3}, y_1)$; $y_1 > 0$
4) $(y-5)^2 = 7(x+2)$; $M(5,-2)$
5) $x^2 = y$; $M(3,y_1)$

Примітка: Значення y_1 має бути обчислений.

№ 249. Написати рівняння дотичної до параболи: $y^2 = 8x$,

рівнобіжної до прямої $y = x - 3$

Теж, до параболи $y^2 = 5x$, рівнобіжно до прямої $3x - 2y + 7 = 0$;

Т.250. Написати рівняння дотичної до параболи: а) $y^2 = 6$; б) $x^2 = -12y$, прямової до прямої а) $2x + 2y = 9$; б) $2y - 4x = 7$.

Т.251. Написати рівняння прямової (нормалі): 1) до параболи $y^2 = 10x$ поведеної через точку на ній: $A(\frac{5}{2}, y_1)$; $y_1 < 0$;

2) теж — $(y+3)^2 = 5(x-4)$ — „ — $B(9, -8)$

Т.252. Обчислити відтинки: дотичної, прямової, піддотичної та підпрямової до параболи: $y^2 = 10x$, поведених через точку на ній: $M(7, y_1)$; $y_1 > 0$

Т.253. Знайти перехрестя й кути між кривими: $y^2 = 8x$ і $x^2 + y^2 = 128$.

Т.254. Написати рівняння дотичних, поведених з точки поза параболою, коли відомо:

1) Парабола $y^2 = 6x$; точка $A(-6, 0)$
2) — „ — $y^2 = 8x$ — „ — $B(6, 8)$
3) — „ — $(y-b)^2 = 2p(x-a)$ „ — $O(0, 0)$

Т.255. Написати рівняння

бігучим, коли дано:

1) параболу: $y^2 = 14x$; бігуч.: $A(7,8)$

2) — „ — $y^2 = 4x$; — „ — $B(5,-4)$

Ч.256. Довести, що директриса параболи є геометричний осередок бігунів, для яких бігунча проходить через вогнище параболи.

II. Еліпса й гіперболя.

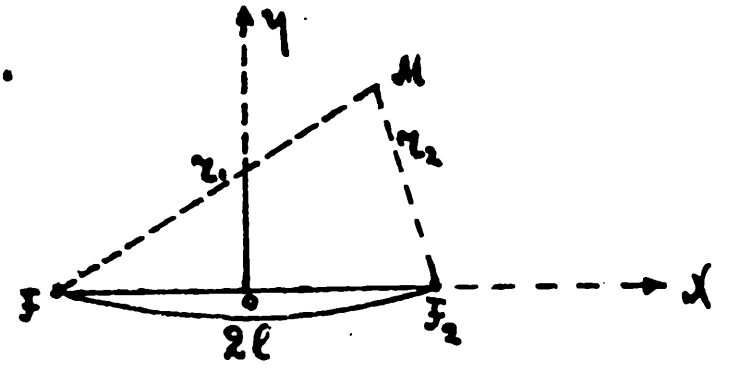
§ 48. Центрові рівняння еліпси й гіперболи.

Розв'яжемо такі задачі:

1) Знайти геометричний осередок точок, сума віддалень яких від загаданих двох точок є величиною сталою.

2) Теж, знайти геометричний осередок точок, різниця віддалень яких від загаданих двох точок є величиною сталою.

Рис. 134.



Припустимо, що нам дано 2 точ-

ки: F_1 і F_2 (рис. 134), віддалених між якими $F_1F_2 = 2c$.

Приймемо відтинок F_1F_2 за вісь X-ів, середину відтинку O за початок вісей, а симетральну цього відтинку (O,Y) за вісь y-ів. Тоді значення точок F_1 і F_2 будуть: $F_1(-c, 0)$ і $F_2(+c, 0)$.

1) Припустимо, що точка M (X, Y) належить до першого геометричного осередку, для якого сума відстаней цієї довільно взятої на осередку точки M є

$$r_1 + r_2 = 2a$$

2 Припустимо також, що й другий геометр. осередок має якусь иншу точку M', також зі змінними значеннями X, Y, що задовольняють умові цього другого геометричного осередку, а саме:

$$r_1 - r_2 = 2a,$$

(У в першому і в другому разі під алгебричним символом a ввалюється стала, хоч для першого і другого випадку й неоднакова величина).

З огляду на схожість умов:

$r_1 + r_2 = 2a$; $r_1 - r_2 = 2a$, ми може-мо їх об'єднати в умову: $r_1 \pm r_2 = 2a$ і разом шукати обидва геомет-ричних осередки.

Щоб скласти рівняння наших геометричних осередків, ми му-симо звязати значення довіль-них точок осередків з даною уно-вою: $r_1 \pm r_2 = 2a$. Це легко зробити, коли ми r_1 і r_2 висловимо через значення їх жінців, а саме:

$$r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

Вставляючи вартости r_1 і r_2 у зга-дану умову: $r_1 \pm r_2 = 2a$, матимемо:

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a$$

Це й будуть рівняння наших осередків точок.

(1-ий осередок матиме між радіяла-ми +, а другий —)

Подвійним квадратуванням ми позбавимо ці рівняння невимірно-сти й одержимо:

$$x^2(a^2-e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-e^2) \quad (*)$$

(*) Подаємо відповідні алгебричні опера-

В даному разі рівняння обох геометричних осередків мають однаковий вигляд, але внутрішньо вони дуже відрізняються, а саме:

1) для першого геометричного осередку $r_1+r_2=2a$: розглядаючи ΔF_1MF_2, бачимо, що $r_1+r_2>2c$, (як сума двох боків Δ-ка більша третього боку) тому $2a>2c$ і $a>c$. Отже $a^2-c^2-\epsilon$ додатна величина і ми можемо прийняти її рівною: $a^2-c^2=b^2$

2) Навпаки для другого геометричного осередку: $r_1-r_2=2a$, а тому, розглядаючи той же ΔF_1MF_2, приходимо до висновку, що $a<c$ й через те $a^2-c^2<0$, або отже, коли ми вважаємо абсолютну величину: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a\mp\sqrt{(x-c)^2+y^2}$; $(x+c)^2+y^2=4a^2\mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$; $(x+c)^2-(x-c)^2-4a=\mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$; $(x+c+x-c)(x+c-x+c)-4a^2=\mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, або $4xc-4a^2$ (різниця квадратів) $=\mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$;

квадратуємо:

$x^2c^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2x^2+a^2y^2$:

$x^2(a^2-c)^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$;

чину різниці $|a^2-e^2| = b^2$, то справжня величина a^2-e^2 у другому геометричному осередку є: $\underline{a^2-e^2=-b^2}$.

Таким чином рівняння першого осередку є:

$$\underline{b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2}$$

а другого осередку:

$$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2, \text{ або}$$

$$\underline{b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2}.$$

Перший геометричний осередок точок носить назву **еліпси**, а другий - **гіперболи**.

Визначення:

1) <u>Елiпсою зветься геометричний осередок точок, сума віддалень яких від двох заданих точок є величиною сталою.</u>

Як ми довели, <u>Центрове рівняння еліпси</u> є:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad \ldots\ldots (100)$$

2) <u>Гіперболою зветься геометричний осередок точок, різниця віддалень яких від двох заданих точок є величиною сталою.</u>

Центрове рівняння гіперболи буде:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots \quad (101)$$

§49. Канонічна форма рівнянь еліпси й гіперболи.

Поділивши всі члени центрового рівнянь еліпси й гіперболи на їх вільного члена, матимемо: канонічні рівняння:

1) Еліпси:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad (102)$$

2) Гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad (103)$$

Для пам'яти:

Рівняння еліпси й гіперболи:

1) Центрові: $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$
2) Канонічні: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Big\}$ $\ldots$ (104)

+ відповідає еліпсі; − гіперболі.

Аналіза рівнянь еліпси й гіперболи.

Щоб мати уяву: 1) що-до геометричного образу кривих 2) що-до вартостей змінників a і b для кожної кривої, ми мусимо зро-

бити аналізу рівнань цих кри-вих:

§50. Аналіза канонічного рівнання елінси.

Виявляємо з рівнання: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вартости x і y, кожну через другу невідоме

$$x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right);\ x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$$

тому

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} \quad (1)$$

Аналогічно:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad (2)$$

1) x і y приймають найбільші і найменші вартости, коли у рівнанню (1) приймаємо $y=0$, а в рівнанню (2) - $x=0$

Тоді:

1) $x=\pm a \quad (y=0)$

2) $y=\pm b \quad (x=0)$

Ці вартости $x=\pm a$ і $y=\pm b$ є своєю абсолютною величиною найбільші вартости значників елінси, бо при вартостях $x>a$; $y>b$ вирази $D_1=b^2-y^2$ і $D_2=a^2-x^2$ будуть менші нуля, а тому відповідні вартости $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ і $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ будуть уявні, себто мо-

ки, для яких $x > a$, або $y > b$, ле-
жать поза геометричним осе-
редком (елісом).

Таким чином еліса має най-
більші по абсолютній величи-
ні вартості значника x на ві-
сі x-ів. Ці точки відстоять від
початку вісей на віддаленні a.
Проста AB, що сполучує визначе-
ні точки: $A(+a, 0)$ і $B(-a, 0)$, зве-
ться <u>великою віссю еліпси</u>.
<u>Велика вісь еліпси є рівна $2a$.</u>
<u>Відрізок a зветься великою піввіссю
еліпси.</u>

Так само, еліпси має найбіль-
ші по абсолютній величині вар-
тості для значника y на вісі
y-ів. Ці точки відстоять від
початку вісей на віддаленні b.
Проста CD, що сполучує визначе-
ні точки: $C(0, +b)$ і $D(0, -b)$, носить
назву <u>малої вісі еліпси</u>.
<u>Мала вісь еліпси є рівна $2b$.</u>
<u>Відрізок b зветься малою піввіссю
еліпси.</u> Як бачимо, вісі еліпси
служать для неї і власними коор-
динатами, тому рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

носить ще назву <u>вісевого рівнян=</u>
<u>ня еліпса.</u> Кінці вісей, точки:
A, B, C і D носять назву <u>вершків</u>
<u>еліпса.</u>

2) <u>Точки F_1 і F_2 - носять назву фо=</u>
<u>кусів еліпса. Віддалення MF_1 і MF_2</u>
<u>якої небудь точки еліпса від фоку=</u>
<u>сів звуться променями - вектора=</u>
<u>ми, або просто - векторами</u>
<u>еліпса.</u>

З попередніх міркувань ми бачи=
мо, що:

<u>Сума променів - векторів еліпса,</u>
<u>поведених до одної точки його</u>
<u>обводу, є завжди рівна вели=</u>
<u>кій вісі еліпса.</u>

$$r_1 + r_2 = 2a \quad \ldots\ldots (105)$$

3) Зі взорів (1) і (2) видно, що кож=
ній вартості x відповідає дві
однакові величиною і різні
знаком вартости y і навпа=
ки. Тому ми можемо зробити
висновок, що <u>еліпса є сімметрич=</u>
<u>ною зглядно своїх осей</u> (що є разом
і вісями ~~координат~~) <u>Отже вісі</u>
<u>еліпса є завжди осями сімет=</u>
<u>рії</u>, а <u>точка O (початок координат),</u>
<u>що є серединою цих вісей: 2a і 2b,</u>

зветься центром елипси і є центром симетрії елипси.

4) Підчас доведення рівняння елипси ми вважали

$$b^2 = a^2 - e^2,$$

звідси $e^2 = a^2 - b^2$, або $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

Віддалення $F_1F_2 = 2e$ носить назву мегиводгниця. Пів мегиводгниця e, себто віддалення центра елипси від якогось із вогнищ, носить назву ексцентрисітета (в перекладі: відступ від центру).

Вартість: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ . . . . (106)

носить назву лінійної вартости ексцентрисітету, або просто лінійного ексцентрисітету.

Коли ексцентрисітет обмірять в одиницях великої півосі a (приймаючи за одиницю міри довжини піввісь a), то матимемо тоду вартість ексцентрисітету:

$$\frac{e}{a} = \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

тому ε завжди менш від одиниці $\varepsilon < 1$. Ця вартість ексцентрисітету:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

звуть числовим ексцентрисіте-

том, (або астрономічним) і щоб відрізнити від лінійної, означаємо її грецькою літерою ε.

Висновок: Коло є лише окремим випадком еліпси, що має однакові вісі. Справді, коли матимемо еліпсу з однаковими вісями, то

$$a = b,$$

а тому рівняння еліпси приймає вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

або:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Це, як бачимо, є рівняння (центрове) кола муа a.

В цьому випадкові ексцентриситет:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

є рівний нулю, себто обидва вогнища зливаються в центрі еліпси і творять центр кола.

Таким чином ми прийшли до висновку, що еліпса є замкнена крива, витягнута вздовж великої вісі і стиснена вздовж малої. Її геометричний образ одержимо, коли вживемо зазначеного нище способу креслення кривої.

§51. Креслення еліпса (технічний спосіб)

Зазначимо, що для еліпса $r_1 + r_2 = 2a$

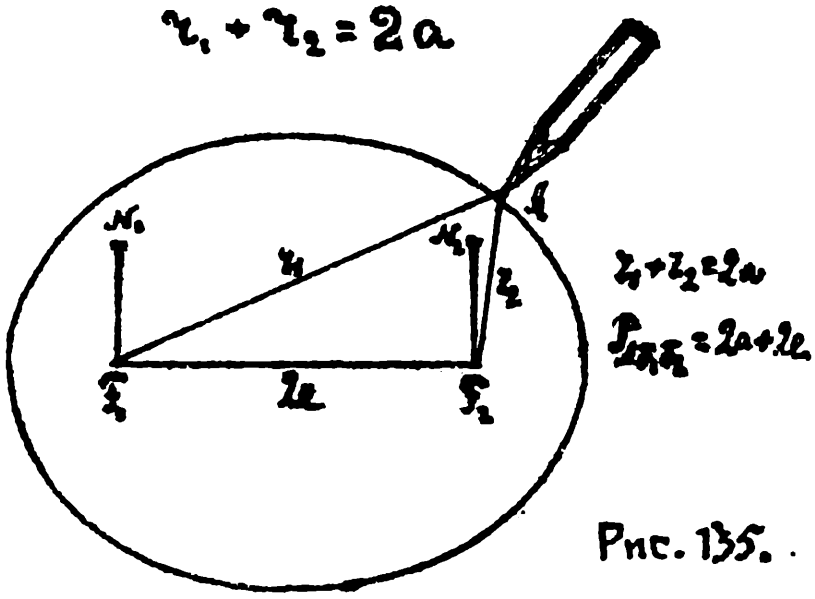


Рис. 135.

Тому, щоб накреслити еліпс, визначену вісь $2a$ і відстань (між фокусами) $F_1F_2 = 2c$ необхідно робити так: відкладаємо відрізок прямої $F_1F_2 = 2c$ і в кінцях відрізка в точках F_1 і F_2 (рис. 135) укріплюємо шпильки N_1 і N_2. Потім беремо нитку довжиною обводу ΔF_1F_2A (себто довжиною $2a + 2c$), зв'язуємо її і надягаємо на шпильки. Кінцем олівця A натягаємо нитку і даємо цьому олівцеві рух. Вістря олівця очерчує еліпс, бо воно буде рухатися завдяки геометричного осередку точок, що мають стале відстання від F_1 і F_2 (вогнищ) рівне $2a$.

лише у кожному положенні вістря A, довжина нитки F_1A+AF_2 = довжині цілої нитки без відтинку F_1F_2, себто $2a+2c-2c=2a$.

§52. Аналіза канонічного рівняння гіперболи.

Визначимо з рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ вартости x і y, кожну через другу зокрема:

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2} \quad (1)$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \quad (2)$$

1) Розглянемо точки перехрестя кривої з віссю x-ів, для цього у рівнанню (1) положимо $y=0$. Тоді $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+0}=\pm a$. Отже гіпербола зустрічає вісь x-ів з обох боків початку координат на віддаленню $+a$ і $-a$.

2) Розглянемо тепер точки перехрестя кривої з віссю y-ів, для цього у рівнанню (2) положимо $x=0$, тоді

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{0-a^2}=\pm bi$$

Вартости y - є уявні. Себто гіпербола не має спільних точок з віссю y-ів, але положена по

обидва боки її ($x = \pm a$), подібно як парабола. Тому точки $x = +a$ і $x = -a$ носять назву вершин гіперболи.

3) Коли x буде простувати до безмежности, то також буде простувати й y. Дійсно, приймаючи у рівнанню (2) $x = \infty$, маємо:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\infty - a^2} = \infty$$

Таким чином гіпербола є кривою, що свойми гałузями йде до безмежности.

4) Кожній вартости x відповідає дві однакові величиною й протилежні знаком вартости y-ів і навпаки.

Тому гіпербола положена свойми гałузями симетрично і зглядно вісі x-ів і зглядно вісі y-ів. Віддалення на вісі x-ів (Р.136) $P_1P_2 = 2a$ носить назву (як і в еліпси) великої або головної вісі гіперболи. F_1 і F_2 – звуться вогнищами гіперболи. Середина відтинку F_1F_2, точка O носить назву центра гіперболи, а довжина відтинка F_1F_2 – тістивогнища. Півтістивогни-

ще e (відстань вогнища від центру) зветься ексцентриситетом гіперболи.

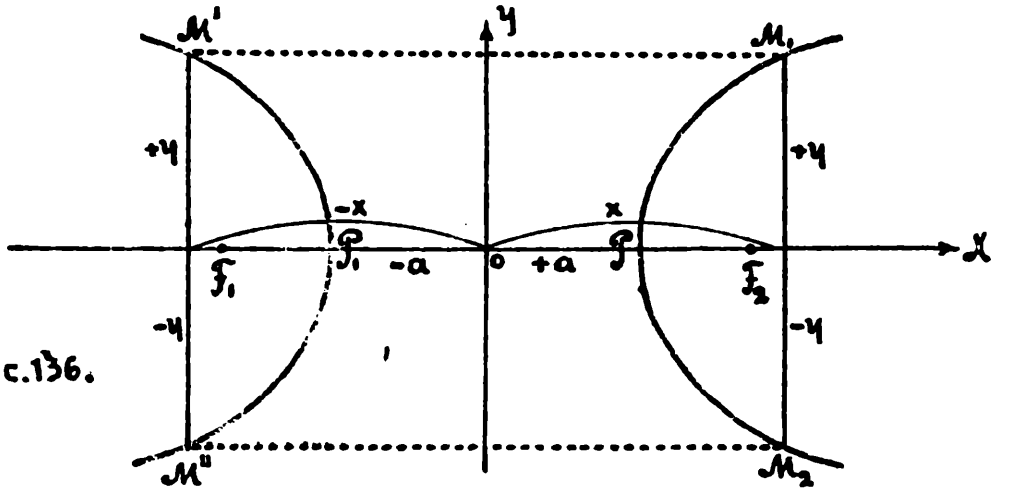


Рис.136.

Як для гіперболи вважали:

$$a^2 - e^2 = -b^2,$$

тому $e^2 = a^2 + b^2$ і наречті лінійний ексцентриситет гіперболи буде:

$$\underline{e = \sqrt{a^2 + b^2}} \quad \ldots (108)$$

Коли ми e числовимо в одиницях великої вісі, то матимемо числовий ексцентриситет гіперболи:

$$\frac{e}{a} = \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \underline{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}} \quad \ldots (109)$$

Очевидно, що числовий ексцентриситет гіперболи

$$\varepsilon > 1$$ (в той час, як для еліпса $\varepsilon < 1$).

Обчислимо ще малу вісь $2b$.

$a^2 - e^2 = -b^2$; $b^2 = e^2 - a^2$

Звідси $b = \pm\sqrt{e^2 - a^2}$

Щоб виобразити b геометрично, ми з точки A лучем $r = OF_1 = e$ очеркнемо дугу CD. Відтинки $OD = b$ і $OC = -b$ і будуть малими піввісями, бо з $\triangle ODA$ маємо: $OD^2 = AD^2 - OA^2$; $OD^2 = e^2 - a^2$; $OD = b = \pm\sqrt{e^2 - a^2}$.

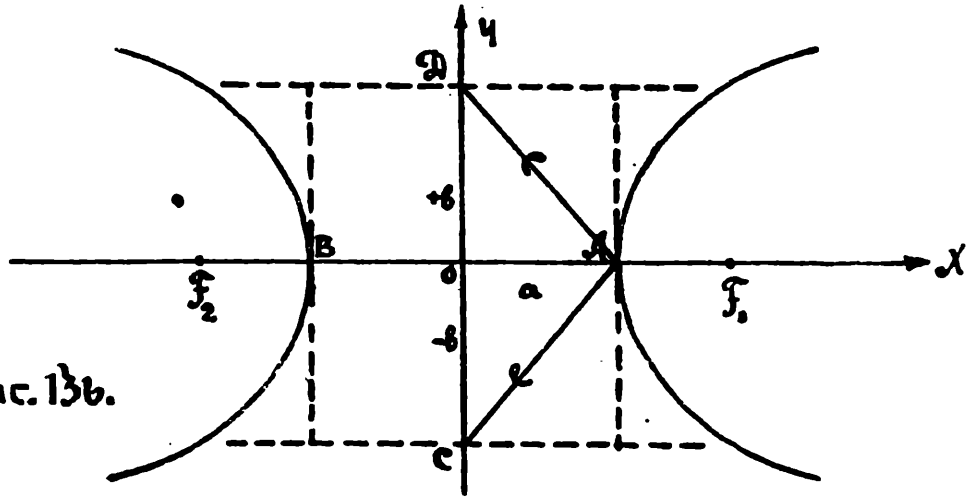


Рис. 136.

Коли $a = b$, то гіпербола зветься рівновісевою (або рівнобокою). Для неї $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Рівняння рівнобокої гіперболи є:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

§53. Креслення (технічне) гіперболи

Припустимо, що нам треба накреслити гіперболу при умові, що: $r_1 - r_2 = 2a$ (з головною віссю $= 2a$). Для цього берем лінійку і до одного з її кінців N (рис. 137) прикріпимо

ємо нитку довжини меншої ніж довжина лінійки на $2a$. На папері проводимо пряму й намічаємо на ній вогнища F_1 і F_2 ($F_1F_2 > 2a$). У вогнищі F прикріплюємо протилежний до зайнятої нитки кінець лінійки так, щоб він міг обертатися навколо F як вісі, а кінець нитки прикріплюємо до точки F_2. Коли тепер лінійку обертати навколо F_1 з положення MN проти стрілки годинника (MN') й при цьому натягувати нитку вістрям олівця, то це вістря опише гіперболу (горішню додатну галузь).

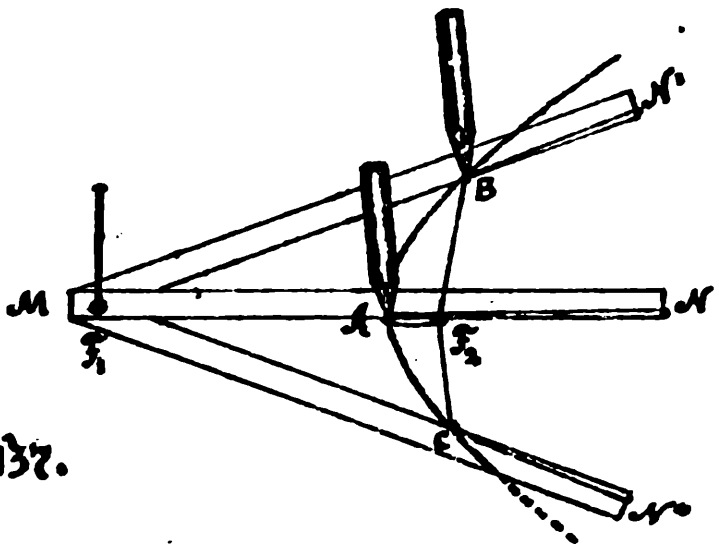


Рис. 137.

Перекладаючи відповідно лінійку: 1) догори, напр. у положення F_1N'; 2) прикріплюючи лінійку до F_2 (щоб

лінійка в точці F_2 обертатися як навколо вісі) і роблячи теж саме, що раніш для вогнища F_1, ми одержимо всі 4 галузі гіперболи.

Справді, у якому положенню лінійка не була б, завжди та частина нитки BF_2, що злилася з лінійки, буде рівна тому відаленню на лінійці, з якого ця нитка зята. Отже шл F_1B завжди збільшується на довжину нитки F_2B і тому різниця шлів $F_1B - F_2B$ завжди є стала, рівна $2a$, тій величині, на якій нитка була взята коротшою ніж довжина лінійки.

§54. Порівнання рівнань елїпси й гіперболи.

Ми довели рівнання елїпси й гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Уявимо тепер геометрично, які криві висловлюють ці рівнання. Взявши зазначений способів креслення елїпси й гіперболи, матимемо:

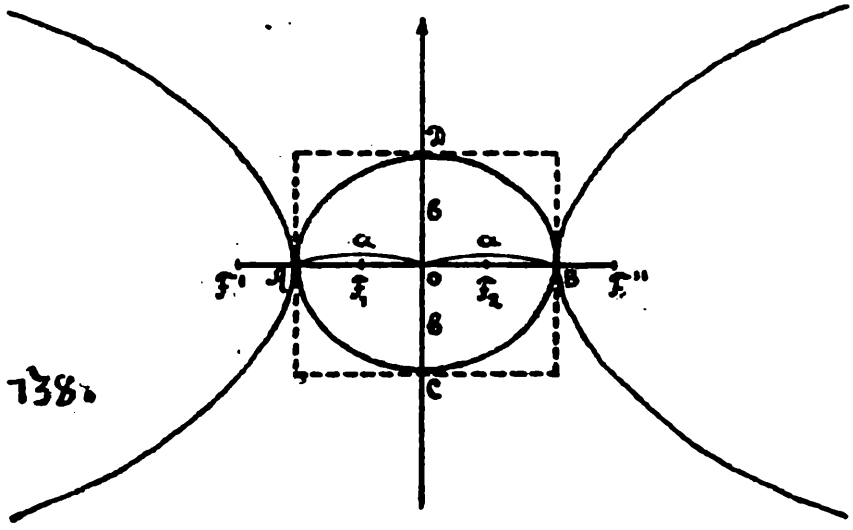


Рис. 138.

Ці еліпса й гіпербола мають спільні вісі: $AB = 2a$ і $CD = 2b$.

Обчислимо відстань їх вогнищ $F'F_1$:

$$F'F_1 = F'O - F_1O = e_1 - e;$$
$$(F'F_1)^2 = e_1^2 + e^2 - 2e_1e;$$

(e_1 - лінійний ексцентриситет гіперболи; e - лінійн. ексцентриситет еліпси)

але $e_1 = \sqrt{a^2+b^2}$, $e = \sqrt{a^2-b^2}$, тому

$e_1^2 + e^2 = a^2 + b^2 + a^2 - b^2 = 2a^2$;

отже $(F'F_1)^2 = 2a^2 - 2e_1e$; $F'F_1 = \sqrt{2(a^2 - ee_1)}$

§55. Обчислення 1) лучів-векторів 2) центрового відсалення, і 3) змінника (параметра) еліпси та гіперболи.

1) Обчислення лучів-векторів.

I. Лучі-вектори еліпси:

Ми вже доводили, що довжина лучів-векторів є:

$r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$ а $r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$.

Щоб з цих взорів обчислити r_1 і r_2 необхідно виключити з них невідомі (змінні) величини x і y. Для цього піднесемо вартости r_1 і r_2 у квадрат і відніймемо одну з одної, тоді одержимо:

$$\begin{array}{r} r_1^2 = (x+e)^2 + y^2 \\ -\;r_2^2 = -(x-e)^2 + y^2 \\ \hline r_1^2 - r_2^2 = (x+e)^2 - (x-e)^2 \end{array}$$

або $(r_1+r_2)(r_1-r_2) = (x+e+x-e)(x+e-x+e) = 2x \cdot 2e = 4ex$ (A);

Але нам відомо, що $r_1 + r_2 = 2a$, а через те:

$2a(r_1 - r_2) = 4ex$, звідки: $r_1 - r_2 = \frac{2ex}{a}$.

Маючи вартости суми: $r_1 + r_2 = 2a$ і різниці: $r_1 - r_2 = \frac{2ex}{a}$, можемо визначити лучі-вектори, а саме:

$$2r_1 = 2a + \frac{2ex}{a}\ ;\ 2r_2 = 2a - \frac{2ex}{a}\ ,$$

або:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = a + \frac{ex}{a} \\ r_2 = a - \frac{ex}{a} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (III)$$

Таким чином, знаючи вартість лише відтинкової даної точки еліпсу, ми маємо змогу обчислити вартости лучів-векторів поведених у цю точку.

II. Довжина рухів-векторів гіперболи:

Ми одержали, що (A):

$$(r_1+r_2)(r_1-r_2)=4ex,$$

але для гіперболи $r_1-r_2=2a$, тому $r_1+r_2=\frac{4ex}{2a}=\frac{2ex}{a}$.

Розв'язуючи систему рівнянь:

1) $r_1+r_2=\frac{2ex}{a}$ і 2) $r_1-r_2=2a$, одержимо:

$$\left.\begin{aligned} r_1&=\frac{ex}{a}+a \\ r_2&=\frac{ex}{a}-a \end{aligned}\right\} \ldots (112)$$

Це і є величина рухів-векторів гіперболи.

2) Відстань простої R, що сполучує центр еліпса (або гіперболи) з якою небудь точкою M обводу еліпса (або гіперболи) носить назву центрового відсалення даної точки еліпса (гіперболи).

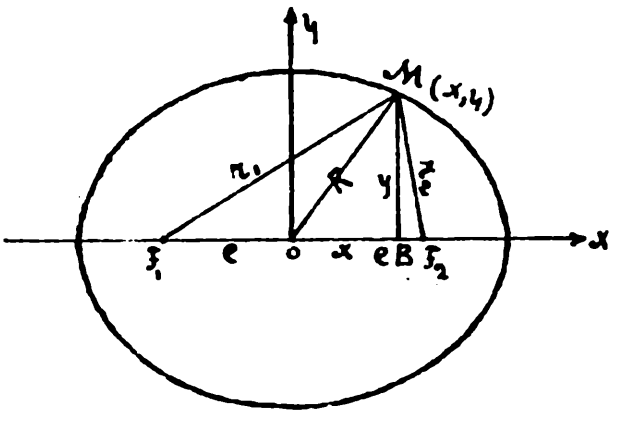


Рис. 139а

Величину R легко обчислити з Δ OMB: (рис. 139а-б)

$$R^2=x^2+y^2,$$

нас для еліпса:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$ (див. аналіз канонічного рівняння еліпса).

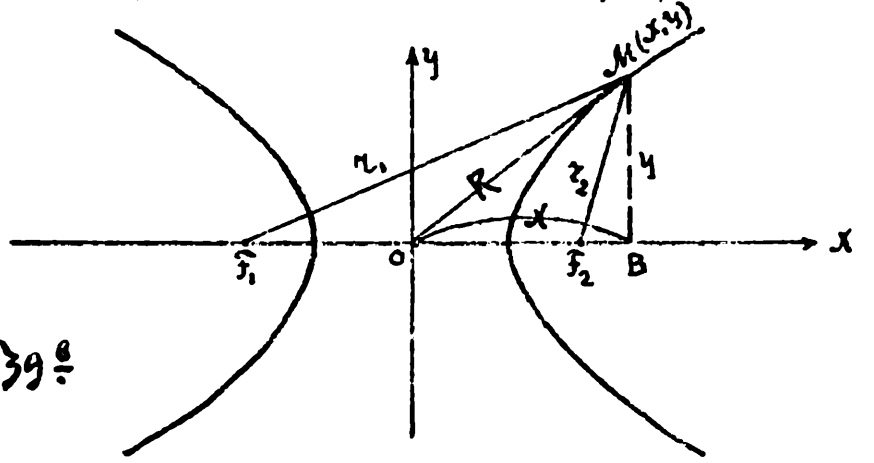


Рис. 139

Тому: для еліпса

$$R^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = x^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$, або

$$R^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x^2$$

Але нам відомо, що $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$, а через те: $R^2 = b^2 + \varepsilon^2 x^2$ і звідси

Центрове відхилення якої небудь точки еліпса буде:

$$R_{\text{еліп.}} = \sqrt{\varepsilon^2 x^2 + b^2} \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

А для гіперболи буде:

$R^2 = x^2 + \frac{\varepsilon^2}{a^2}(x^2 - a^2) = x^2 + \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2} - b^2$, а звідси після заміни $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = \varepsilon^2$ одержимо

$$R_{\text{гіперб.}} = \sqrt{\varepsilon^2 x^2 - b^2} \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

3) Зміннком (параметром) еліпси або гіперболи звуть довжину зорієнтованої з великою віссю і прямової до неї дотичної, що проходить через вогнище кривої.

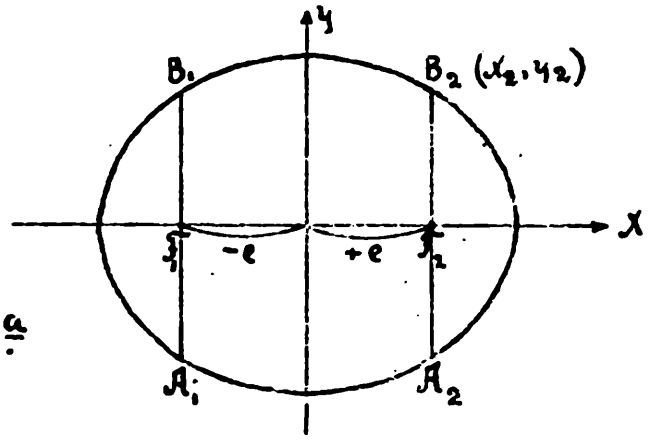


Рис. 140а

Цей зміннк, як і для параболи, означають через 2p. (Легко довести, що довжина дотичної не залежить від того, через яке вогнище її проведено, себто $A_1B_1 = A_2B_2 = 2p$). Довжина цієї дотичної і для еліпси і для гіперболи очевидно буде рівна подвійній величині ординати y^2 точки B_2 (рис. 140а), що має відповідною $x = +e$

Ми знаємо, що рівняння кожної точки еліпси є рівна:

$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, а гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

тому, підставляючи вартість відповідної $x_2 = e$ у ці вирази,

одержимо:

$$y_2 = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2};\quad y_3 = +\frac{b}{a}\sqrt{e^2 - a^2}$$

але 1) для елипси $e^2 = a^2 - b^2$, а тому:

$$y_2 = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2 + b^2} = \frac{b^2}{a}$$

2) для гіперболи: $e^2 = a^2 + b^2$, а тому:

$$y_3 = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2 - a^2} = \frac{b^2}{a}$$

Отже: $p = \frac{b^2}{a}$, а цілий зміст елипси, або гіперболи:

$$2p = \frac{2b^2}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

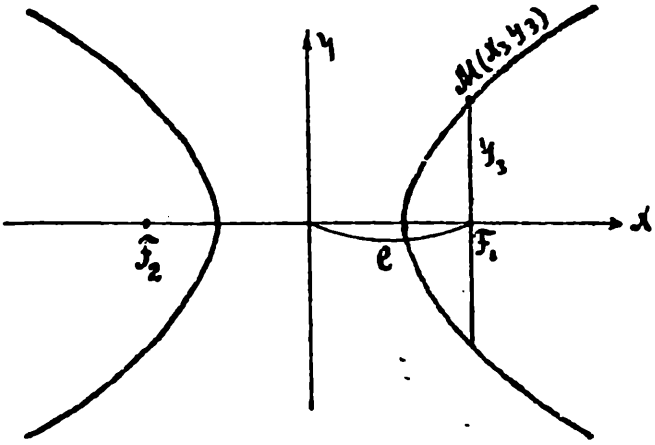


Рис. 140

§56. Вершинове рівняння елипси й гіперболи.

Коли ми за початок вісей будемо вважати вершину елипси або гіперболи, за вісь x-ів їх велику вісь, а за вісь y-ів дотичну до даної кривої, поведену через зазначений вершок, тоді: напруг, які при цих умовах

буде визначати відповідну криву, поставивши назву вершинового, (Рис. 141 $\frac{а, б}{}$).

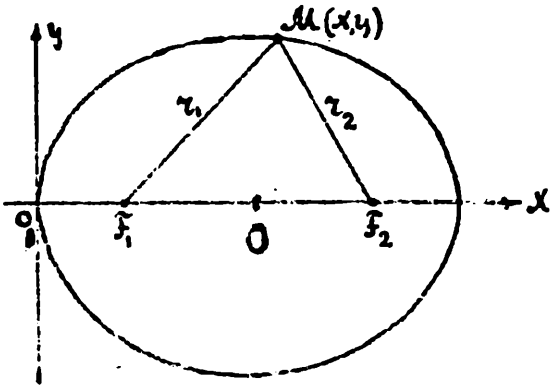


Рис. 141 $\frac{а}{}$

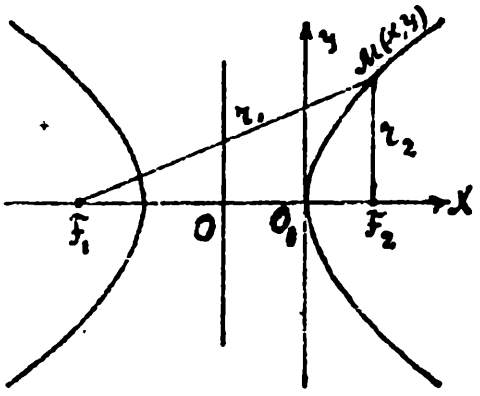


Рис. 141 $\frac{б}{}$

Вершинові рівняння еліпса та гіперболи можна одержати шляхом звичайного рівнобічного перенесення координатних осей у точку 0, вершину кривої.

I. Вершинове рівняння еліпса:

Для еліпса початок координатних осей матиме значення: $(-a, 0)$, а тому взаємне перетворення будуть: $x = x' - a$ і $y = y'(M)$

Якщо в центрове рівняння еліпса: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ поставити вартості (M), то одержимо:

$$b^2(x'-a)^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$$

Звідси: $y'^2 = b^2 - \frac{b^2(x'-a)}{a^2}$ або:

$$y'^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 + \frac{2b^2x}{a}$$

(примітка: ми відкинули індекси при y' і x', бо в даному разі вони не мають цензу, бо x' і y' являються із сс= бе звичайні змінні значення деяк кінці).

Наприкі, приймаючи на увагу, що $\frac{b^2}{a} = p$, будемо мати:

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a} \quad \ldots \quad (116)$$

це і є вершкове рівняння елипси.

Висновок: парабола є окремим випадком елипси, у якої вісь симетрії вісей необмежено зростає.

Справді, коли будемо вважати $a = \infty$, $b = \infty$, то вершкове рівняння елипси приймає вигляд:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{\infty}x^2, \text{ а тому } \underline{\underline{y^2 = 2px}}$$

II. Вершкове рівняння гіперболи.

Для гіперболи початок координатних вісей має значення $(\pm a, 0)$. Тому взори перетворення будуть:

$$x = x' + a; \quad y = y' \quad (N).$$

Коли в центрове рівняння гіперболи $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, вставля-

ми вартості (M) то одержимо:

$$b^2(x'+a)^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \text{ звідки:}$$

$$y^2 = \frac{b^2(x'+a)^2}{a^2} - b^2, \text{ або } y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} + \cancel{b^2} + \frac{2b^2x}{a} - \cancel{b^2};$$

але приймаючи на увагу, що $\frac{b^2}{a} = p$, будемо мати вершинове рівняння гіперболи:

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a} \quad \ldots \quad (177).$$

§ 57. Узагальнення вершинового рівняння для всіх центральних другого ступня (спільних перерізів).

Означимо величину $\pm\frac{p}{a} = q$.

Тоді ми можемо сказати, що загальна форма вершинового рівняння кривих 2-го ступня (спільних перерізів) буде:

$$y^2 = 2px + qx^2 \quad \ldots \quad (178)$$

1) Коли $q < 0$ — то це буде рівняння еліпса

2) Коли $q > 0$ — то це є рівняння гіперболи

і 3) Коли $q = 0$ — то це є рівняння параболи, бо у параболи головна вісь $a = \infty$, тому $q = \frac{p}{a} = 0$

§58. Будування еліпси

Геометричних способів будування еліпси існує декільки. Ми тут зупинимося на одному з них.

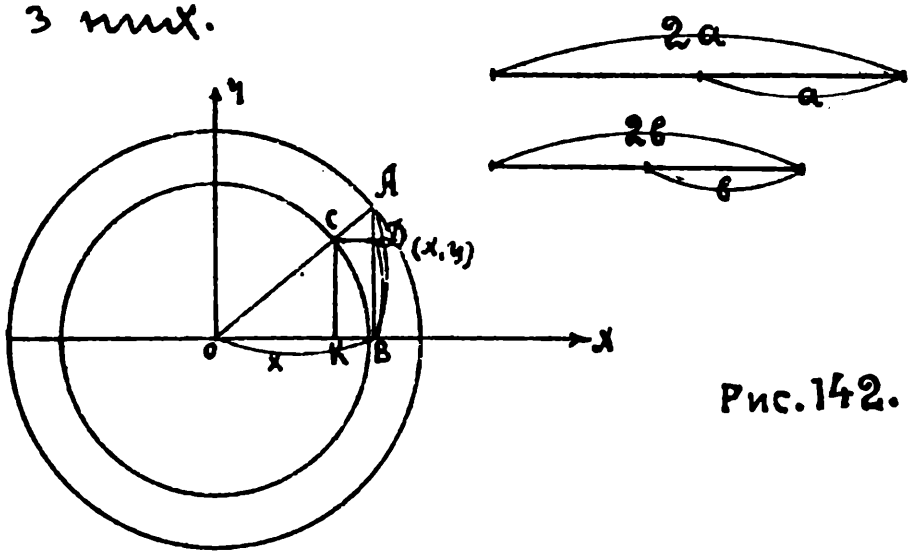


Рис. 142.

Припустимо, що нам треба збудувати еліпсу, що має вісі $2a > 2b$. Для цього перепоповинюємо відрізки $2a$ і $2b$ і, помістивши довільно центр O (рис. 142), окреслюємо два спільноцентрові кола радіусів $r_1 = a$ і $r_2 = b$. Через центр O поведемо два прямовисних перечники й один з них приймемо за вісь X-ів, а другий - за вісь Y-ів. Коли на зовнішньому колі візьмемо довільну точку A і поведемо до неї промінь OA; з перехрестя C цього променя з

внутрішнім полом поведемо рівнобіжну до вісі X-ів, то точка стику D цієї рівнобіжної з рядною точки A, буде точкою, що належить еліпсі. Доведемо це: Через точку C поведемо пряму $CK \parallel AB$. Тоді матимемо відношення:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CK}$$

Обчислимо величини OA, OC, AB і CK.

1) $OA = r_1 = a$; 2) $OC = r_2 = b$; 3) Коли означимо невідомі значення точки D через x та y, то: $AB^2 = OA^2 - OB^2 = a^2 - x^2$ або: $AB = \sqrt{a^2 - x^2}$

4) $CK = BD = y$.

Вставляючи знайдені вартості у відношення, одержимо:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{y} \quad \text{або}$$

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{y^2}$, звідки $\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$; $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

і нарешті $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ми одержали рівняння еліпси, це свідчить, що значення точки D задовольняють рів-

рівнання еліпси, себто точка D лежить на її обводі.

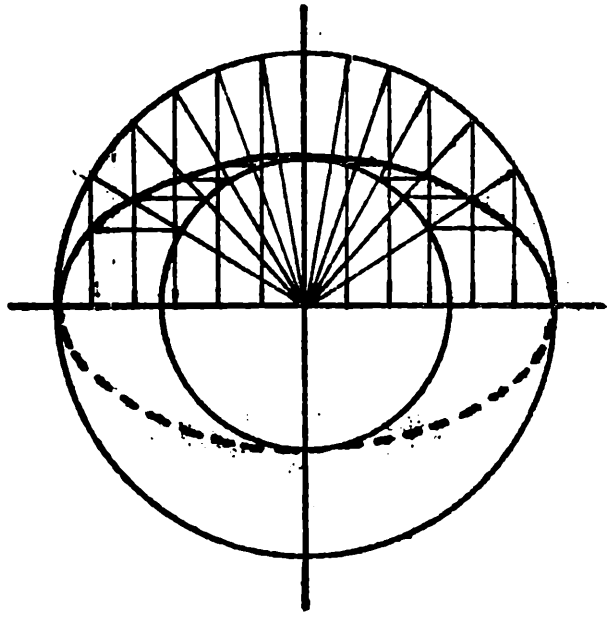


Рис. 143.

Отже, коли ми з центру кола O (рис. 143) поведемо як мога більше променів і для кожного з них способом, який ми щойно вказали точку D, знайдемо відповідні точки еліпси, то крива, що сполучатиме ці точки, буде обводом цієї еліпси.

§ 59. Будування гіперболи.

Припустимо, що нам треба збудувати гіперболу, вісі якої відомі: $2a > 2b$. Візьмемо на площині вісі координат OXY і на вісі X-ів від початку O відкладемо відтинки $OA = a$ і $OB = b$. У точках A і B поставимо прямі AP

і BQ. Коли через початок вісей провести довільну пряму OR, то відтинок її OR від початку вісей до перехрестя з прямою AR - буде відтинковою якоїсь точки нашої гіперболи, а відтинок BL, прямої, поставленого в лінії відтинка B до перехрестя з довільною прямою OR, буде рядною тієї точки параболи.

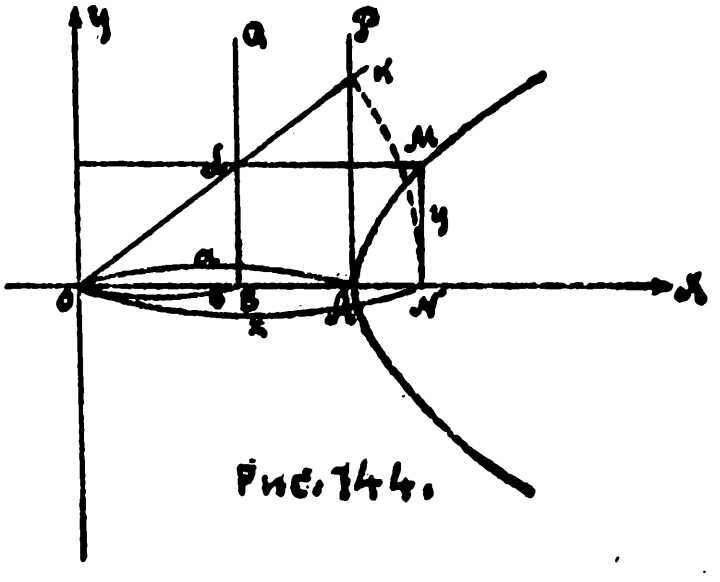


Рис. 144.

Тому, коли ми лучем OR очертимо дугу, то точка N перехрестя дуги з віссю x-ів буде шуканою точкою гіперболи на вісь.

Отже, поставивши пряму NM, ми знайдемо точку M гіперболи, коли повсдемо через точку L

рівнобіжну до вісі x-ів до перетинання з прямою MN; це перетинання й буде точкою M шуканої гіперболи.

Доведемо це: Зад-ів: OKA і OLB маємо: $\frac{AK}{BL} = \frac{OA}{OB}$. Означивши відтинок OK через x, а відтинок BL через y, маємо:

$AK = \sqrt{OK^2 - AO^2} = \sqrt{x^2 - a^2}$; $AO = a$; $OB = b$,

тому: $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{y} = \frac{a}{b}$; або $\frac{x^2-a^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$; або

$\frac{x^2-a^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$; звідки $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Це є рівняння гіперболи, а тому OM і MN мусять по своїй величині бути значинами точки цієї гіперболи, бо вони задовольняють її рівняння. На підставі наших міркувань ми будуємо гіперболу так: взявши вісі координат і відкладавши на вісі x-ів від O півосі a і b, ми в кінцях цих відтинків ставимо прямі через початок координат проводимо як нам більше простих.

Маючи точки, ми одержимо цілий ряд вартостей для значників точок гіперболи і зазначеним способом відкладаємо їх на вісі X-ів та на відповідних рядних. Крива, що сполучатиме кінці цих рядних і буде гіперболою.

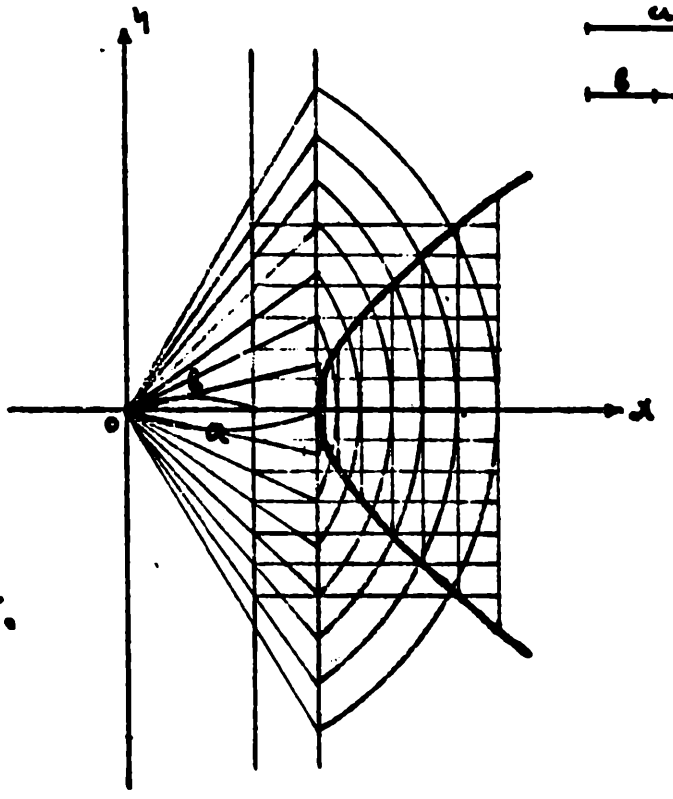


Рис. 745.

Задачі.

ч. 257. Еліпса має 5 значників: a, b, e, ε і p. Як через два дані з них обчислити решту?

ч. 258. Написати рівняння:

I) еліпси, коли: 1) $a=12$; $b=8$; 2) $e=3$, $a=5$, $p=12$.

II) гіперболи, коли: 1) $e=2$, $a=\sqrt{3}$;

2) $\varepsilon = \frac{5}{4}$; $b = 3$.

№ 259. Написати осьове рівняння еліпса, що має 1) велику вісь $2a = 16$ і проходить через точку $A(3,2)$; 2) зміння $p = \frac{1}{3}$ і проходить через точку $(0,2)$

№ 260. Написати канонічне осьове рівняння еліпса, коли він проходить через точки 1) $(4,8)$ і $(-2,4)$; 2) $(4,2)$ і $(2,3)$;

№ 261. Написати осьове рівняння гіперболи, коли вона проходить через точки 1) $(3,2)$ і $(4,3)$ 2) $(1,2)$ і $(4,3)$

№ 262. В якому положенні зігнуто:

1) еліпса: $16x^2 + 9y^2 = 144$ знаходяться точки: 1) $(5,3)$ і 2) $(-10,2)$

2) гіперболи: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ " " 1) $(2,3)$ і $(12,4)$.

№ 263. Рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, знайти, для яких точок кут між прямими - векторами є $90°$?

№ 264. Для яких точок еліпса квадратична у n разів більше радіуса (розв'язати в загальному вигляді).

у окремому випадку, коли від- мінкова уявіна більша за рад- ну і рівняння еліпса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

Ч.265. Перетворити у верши- ві осеві рівняння:

I. а) $25x^2+36y=900$, 2) $x^2+y^2=4$, 3) $16x^2-25y^2=400$, 4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$.

Ч.266. Накреслити криві:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, 2) $x^2+4y^2=4$, 3) $16x^2+9y^2=144$, 4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, 5) $x^2-4y^2=4$, 6) $x^2-y^2=16$.

Ч.267. Написати рівняння дуг- ів-векторів еліпса й дове- сти в яких точках вони є прямові?

Ч.268. Обчислити довжину дуг- ів- векторів

1) еліпса: $9x^2+16y=576$, поведе- них через точку $(4, 3\sqrt{3})$

2) гіперболи: $x^2-4y^2=4$, поведе- них через точку $(4, \sqrt{3})$.

§60. Загальне рівняння еліпса й гіперболи.

Коли еліпса, або гіпербола ма- ють центр в якій небудь довіль- ній точці $M(m,n)$, а головні вісі

рівнобіжні до осі X-ів, то рівняння, які визначають ці криві, носять назву загальних рівнянь еліпси або гіперболи.

Маючи канонічні рівняння еліпси та гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ми можемо скласти загальні рівняння цих кривих шляхом звичайного рівнобіжного перенесення осей у точку O, відносно якої центр кривих M буде мати значення m і n.

В цьому разі взори перетворення будуть:

$$x_1 = x - m; \quad y_1 = y - n.$$

Вставляючи вартості x_1 та y_1 у наше рівняння, маємо загальне рівняння еліпси й гіперболи: (Рис 146)

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} \pm \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1. \quad (119)$$

Примітка. Коли за довільну вісь кривої приймати вісь Y-ів, або просту рівнобіжну їй, то легко довести, що рівняння

вісей або гіперболи матимуть вигляд: (Рис.147 $\frac{a,b}{}$)

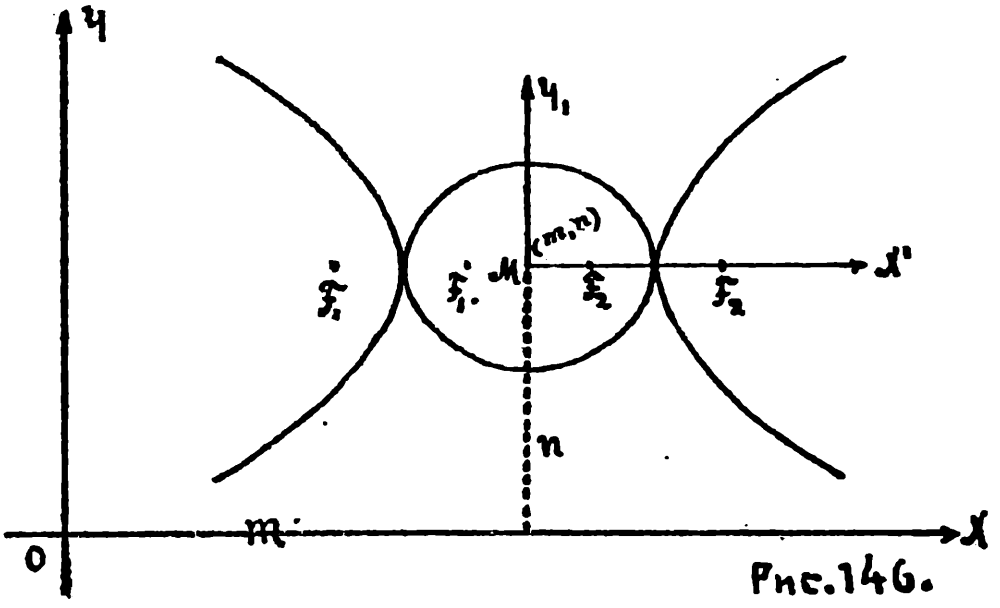


Рис.146.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a^2y^2 \pm b^2x^2 = a^2b^2 \\ 2)\ \dfrac{y^2}{b^2} \pm \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ 3)\ \dfrac{(y-n)^2}{b^2} \pm \dfrac{(x-m)^2}{a^2} = 1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (120)$$

де за головну вісь буде 2b

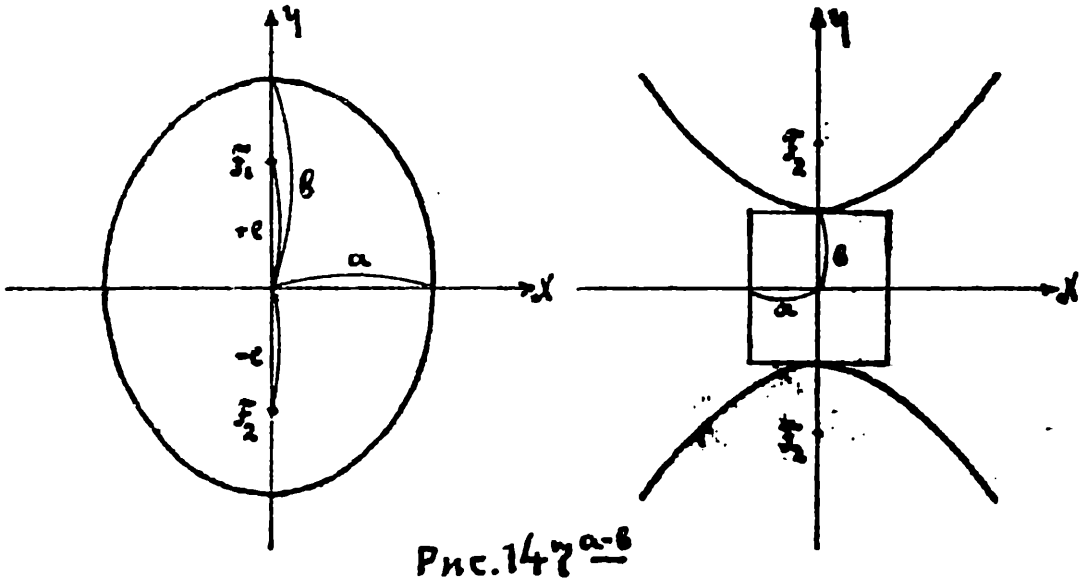


Рис.147 $\frac{a-b}{}$

Це, як задачу, пропонується довести самим студіюючим. Вправа можна зробити як безпосеред=

ніж складання рівняння, чи обертанням осей на 90°)

§61. Алгебричне рівняння елипси й гіперболи.

1. Введемо загальне рівняння елипси:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

до алгебричної форми:

$$b^2x^2-2b^2mx+b^2m^2+a^2y^2-2a^2ny+a^2n^2=a^2b^2$$

або:

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2mx-2a^2ny+(b^2m^2+a^2n^2-a^2b^2)=0$$

Для зведення рівняння до більш загального вигляду, помножимо всі члени його на довільного числа k^2 і матимемо:

$$b^2k^2x+a^2k^2y-2k^2b^2mx-2k^2a^2ny+k^2(b^2m^2+$$
$$+a^2n^2-a^2b^2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Теж саме одержимо, коли загальне рівняння гіперболи: $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}$ зведемо до алгебричної форми:

$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2mx+2a^2ny+(b^2m^2-a^2n^2-a^2b^2)=$$
$$=0, \text{ або } b^2k^2x-a^2k^2y^2-2b^2k^2mx+2a^2k^2ny+$$
$$+k^2(b^2m^2-a^2n^2-a^2b^2)=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

де k^2 - також довільний додатний число.

Візьмемо загальне алгебричне рівняння другого ступня і порівняємо його з рівняннями (1) і (2).

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

Ми бачимо, 1) що і в рівнанні (1) і в рівнанні (2) відсутні члени, що містять здобуток невідомих, себто сочинник $C=0$.

2) Рівнання (1) і (2) відрізняються від алгебричного рівнання тим, що сочинник при невідомих у другому ступені є різні $A\neq B\neq 0$.

3) Рівнання (1) і (2) відрізняються між собою тим, що в 1-му рівнанні знаки сочинників при квадратах невідомих однакові ($A\geq 0, B\geq 0$), а у рівнанні (2) - різні ($A\geq 0, B\leq 0$).

Таким чином, щоб алгебричне рівнання другого ступня було рівнанням елипси або гіперболи, необхідно 1) щоб сочинник при здобутковій невідомих $C=0$; 2) щоб сочинники при квадратах невідомих були нерівні між собою.

Коли ці сотинники при квадратах невідомих одного знаку, то рівняння визначає еліпсу, коли вони різного знаку, то гіперболу.

Доведемо, що ця умова є й достатньою, себто - доведемо, що кожне рівняння другого ступня з двома невідомими, яке задовольняє поставленим умовам, визначає неодмінно одну з цих двох кривих (еліпсу або гіперболу).

Візьмемо алгебричне рівняння:

$$Ax^2 \pm By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

і порівняємо з рівняннями (1) і (2)

Ми бачимо, що

$A = k^2b^2$; $\pm B = \pm k^2a^2$; $D = -2b^2k^2m$; $E = \mp 2a^2k^2n$

і $F = k^2(b^2m^2 \pm a^2n^2 - a^2b^2)$

Коли з цих рівнань ми зможемо визначити реальні (неуявні) вартости знаменників цеглу m і n, а також вартости півосей a і b, то дане алгебричне рівняння буде завжди визначати або еліпсу або гіпер-

бо.ц.

$D = -2Am$, звідси $m = -\frac{D}{2A}$; $E = \mp(\pm 2Bn)$;

$E = -2Bn$, звідси $n = -\frac{E}{2B}$ (і для еліпса і для гіперболи)

Визначаємо півосі a і b: $\frac{a^2}{b^2} = \pm\frac{B}{A}$;

$F = K^2b^2\left(m^2 \pm \frac{a^2}{b^2}n^2 - a^2\right)$; $F = A\left[\frac{D^2}{4A^2} \pm \left(\mp\frac{B}{A}\cdot\frac{E^2}{4B^2}\right) - a^2\right] = A\left(\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4AB} - a^2\right)$;

$\frac{F}{A} = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4AB} - a^2$, звідси:

$$a^2 = \frac{BD^2 + AE^2 - 4ABF}{4A^2B}$$

аналогічно:

$$b^2 = \frac{BD^2 + AE^2 - 4ABF}{4AB^2}$$

отже

$$a = \sqrt{\frac{BD^2 + AE^2 - 4ABF}{4A^2B}}; \quad b = \sqrt{\frac{BD^2 + AE^2 - 4ABF}{4AB^2}}$$

Таким чином ми переконуємося, що завжди можна визначити через coefficients даного алгебраїчного рівняння як значення на центрі, так і вісі кривих.

А тому ми можемо твердити, що повне алгебраїчне рівняння другого степеня з двома невідомими, яке після приведення до простих умовам, завжди

визначає або елипсу, або гіперболу.

§ 62. Механічний спосіб перетворення алгебричного рівняння елипси або гіперболи в загальну форму.

поясним цей спосіб на прикладі:

Дано рівняння: $25x^2+16y^2-18x-14y+5=0$

1) У членах, що містять окремо x або y виносимо коефіцієнта при квадраті невідомого за дужки й у дужках доповнюємо многочлена до повного квадрата:

$$25\left(x^2-\frac{18}{25}x\right)+16\left(y^2-\frac{14}{16}y\right)=-5$$

$$25\left(x^2-\frac{18}{25}x+\frac{81}{625}-\frac{81}{625}\right)+16\left(y^2-\frac{14}{16}y+\frac{49}{256}-\right.$$

$$\left.-\frac{49}{256}\right)=-5\,,$$ звідки:

$$25\left(x-\frac{9}{25}\right)^2-\frac{81\cdot 25}{625}+16\left(y-\frac{7}{16}\right)^2-\frac{49\cdot 16}{256}=-5$$

або

$$25\left(x-\frac{9}{25}\right)^2+16\left(y-\frac{7}{16}\right)^2=-5+\frac{81}{25}+\frac{49}{16}=\frac{521}{400}.$$

2) поділимо всі члени на вільного члена:

$$\frac{10000}{521}\left(x-\frac{9}{25}\right)^2+\frac{6400}{521}\left(4-\frac{7}{16}\right)^2=1$$

3) Переносимо сполучники членів по знаменателях:

$\frac{(x-\frac{9}{25})^2}{\frac{521}{10000}} + \frac{(y-\frac{7}{16})}{\frac{521}{6400}} = 1$ – Це є рівняння еліпса з центром $(\frac{9}{25}, \frac{7}{16})$ і піввісями:

$a = \frac{\sqrt{521}}{100}$; $b = \frac{\sqrt{521}}{80}$.

2-й приклад: Рівняння: $9x^2 - 49y^2 +$

$72x + 98y - 346 = 0$;

$9(x^2 + 8x + 16) - 49(y^2 - 2y + 1) = 346 + 9 \cdot 16 - 49$;

$9(x+4)^2 - 49(y-1)^2 = 441$

Ділимо на вільний член: 441

$\frac{(x+4)^2}{49} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$.

Це рівняння гіперболи з центром $(-4, 1)$ і піввісями $a = 7, b = 3$.

§63. Положення простої зносно еліпса або гіперболи.

Припустимо, що нам дано еліпс або гіперболу, що визначаються рівнянням:

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2 \quad (1)$$

і пряма, визначена рівнянням $y = mx + n$ (2)

Щоб визначити спільні точки цих кривих з даною прямою, ми маємо розв'язати

відповідні системи. Вставляючи з рівняння (2) вираз y у рівняння (1) і розв'язуючи відповідні квадратові рівняння, одержимо:

$$x_{1,2} = \frac{-a^2 mn \pm ab\sqrt{b^2 \pm (a^2m^2 - n^2)}}{a^2m^2 \pm b^2},$$

а $y_{1,2} = m \cdot x_{1,2} + n$ (де знак $\pm$ під коренем і у знаменнику вибирається так: „+" для еліпса і „−" для гіперболи)

Розглядаючи вираз $D = b^2 \pm (a^2m^2 - n^2)$, ми бачимо, що) пряма є січною кривої, коли $D > 0$ (дві вартості x, а разом і y).
2) пряма є дотичною до кривої, коли $D = 0$ (одна вартість x і y) і, нарешті, 3) пряма не має спільних точок з кривою, коли $D < 0$.

Уявімо це геометрично:
ми знаємо, що $m = \operatorname{tg}\alpha$,
тому $D = b^2 \pm (a^2 \operatorname{tg}^2\alpha - n^2) =$

$$= \frac{b^2\cos^2\alpha \pm (a^2\sin^2\alpha - n^2\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha} \gtrless 0$$

Звідси: $b^2\cos^2\alpha \pm (a^2\sin^2\alpha - n^2\cos^2\alpha) \gtrless 0$,
але $c^2 = a^2 \mp b^2$ („−" для еліпса, „+" для

гіперболи), а тому $b^2 = \pm(a^2 - e^2)$.
Через те $\pm(a^2-e^2)Cs^2\alpha \pm a^2Sn^2\alpha \mp n^2Cs^2\alpha \gtrless 0$,
або $\pm(a^2-e^2)Cs^2\alpha \pm a^2Sn^2\alpha \gtrless \pm n^2Cs^2\alpha$.
Розглянемо ці нерівності окремо: 1) для еліпси:

$$(a^2-e^2)Cs^2\alpha + a^2Sn^2\alpha \lessgtr n^2Cs^2\alpha \ldots (a)$$

2) для гіперболи:

$$(a^2-e^2)Cs^2\alpha + a^2Sn^2\alpha \gtrless n^2Cs^2\alpha \ldots (b)$$

З нерівності (a) одержимо:

$$a^2Cs^2\alpha - e^2Cs^2\alpha + a^2Sn^2\alpha \lessgtr n^2Cs^2\alpha, \text{ або}$$

$$a^2(\cancel{Cs^2\alpha + Sn^2\alpha}) \lessgtr (n^2+e^2)Cs^2\alpha \ldots (c)$$

Так само одержимо з нерівності (b):

$$a^2 \gtrless (n^2+e^2)Cs^2\alpha \ldots\ldots (d)$$

Щоб зінтерпретувати взори (c) і (d) геометрично накреслимо еліпсу й гіперболу та очеркнемо на їх головних вісях, як на поперечниках кола круга a, яке будемо звати <u>допоміжним</u> колами даної кривої
Ми обчислимо величину: $(e^2+n^2)Cs^2\alpha$.
(Рис. 148а).
З $\triangle OBF_2$ маємо: $OB = eCs\alpha = AM_1$,
З $\triangle AOK$ маємо: $OA = nCs^2\alpha$
А з $\triangle AOM$ маємо: $OM_1^2 = AM^2 + OA^2$
або $OM_1^2 = e^2Cs^2\alpha + n^2Cs^2\alpha = (e^2+n^2)Cs^2\alpha$

тому числі

$$a^2 \gtreqless OM_1^2, \text{ або } OM_1 \gtreqless a$$

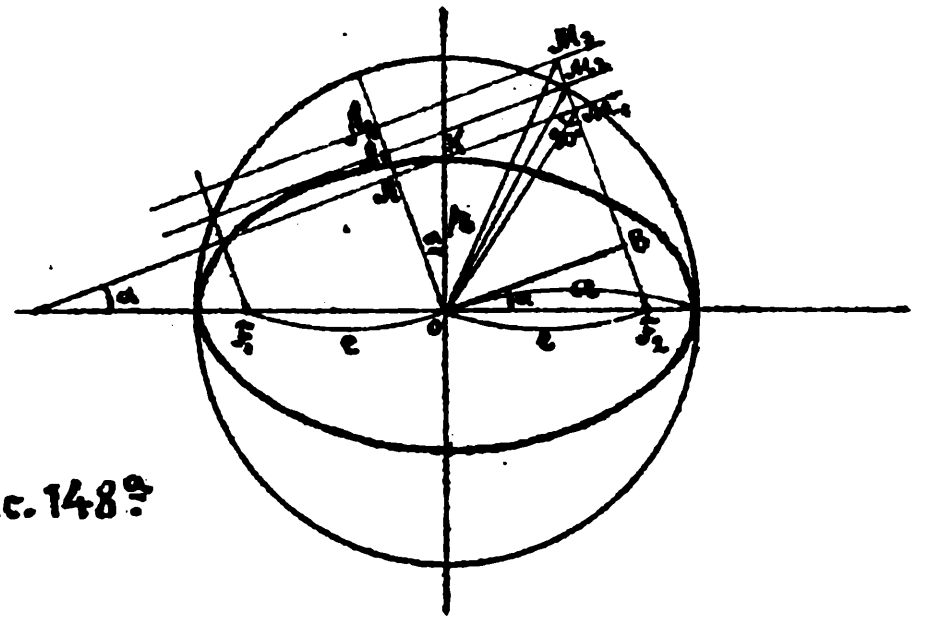


Рис. 148

Але OM_1 - є відстанню точки M_1 від центру кола, а величина „a" - є рад тогож приймітного кола. Тому, коли

1) $OM_1 < a$ - точка M_1 лежить на крузі,

2) $OM_1 = a$ - точка M_1 лежить на обводі кола,

3) $OM_1 > a$ - точка M_1 лежить поза колом.

Звідси дана проста:

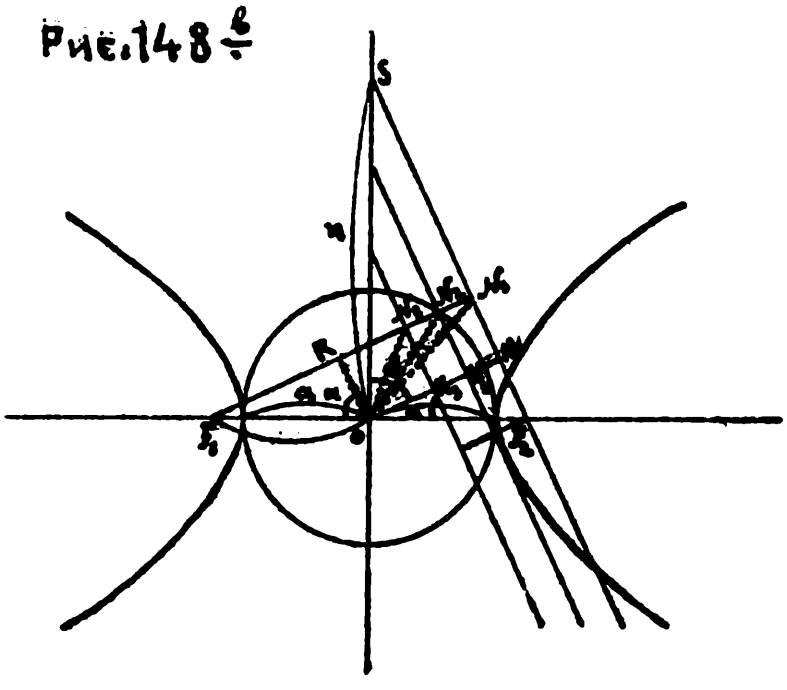
1) <u>є січною еліпси, коли мети на неї вогнищ кривої лежать на полі приймітного кола;</u>

2) <u>є дотичною до еліпси, коли мети на неї вогнищ лежать на обводі приймітного кола</u>

і 3) <u>є мимобіжною еліпси, коли мети на неї вогнищ лежать поза приймітним колом.</u>

приладемо аналогічні міркування й до гіперболи (рис. 148 б)

Рис. 148 б



1) З $\triangle F_1RO$ маємо: $OR = eCs\alpha = K_1N_1$

2) У $\triangle K_1SO$ маємо $\angle K_1OS = \alpha$; $OS = n$, тому $OK_1 = OSCs\alpha = nCs\alpha$.

Отже з $\triangle K_1N_1O$ маємо $ON_1^2 = K_1N_1^2 + OK_1^2$, або $ON_1^2 = e^2Cs^2\alpha + n^2Cs^2\alpha = (e^2+n^2)Cs^2\alpha$.

Тому тепер $a^2 \leqslant ON_1^2$, або $\underline{ON_1 \geqslant a}$

Ця нерівність показує, що для трьох різних положень даної простої згідно гіперболи точка N_1 лежить або поза прилеглим колом, або на обводі його, або на кругі його, а тому:

дана пряма:

1) <u>є січною гіперболи, коли вона на ній вогнищ кривої лежать</u>

лежать поза прикметним ко-
лом гіперболи;

2) є дотичною гіперболи, коли
дані на ній вогнищ лежать
на обводі прикметного кола й

3) є мимобіжною гіперболи, ко-
ли дані на ній вогнищ лежать
на кругі прикметного кола.

Висновок. Прямі, сущені з
вогнищ еліпси або гіперболи
на їх дотичну, завжди прохо-
дять через перехресний цієї
дотичної з прикметним ко-
лом кривої.

Розглянемо тепер випадок,
коли в знаменателі вартості
значників гіперболи x_1, y_1 міс-
титься: $a^2m^2 - b^2 = 0$ . . . . . (a)

З цього рівняння можна визна-
чити кутовий змінник про-
стої:

$$m = \pm \frac{b}{a}$$

Коли ми безпосередно встави-
мо цю вартість m у визначен-
ня $x_{1,2}$, то одержимо неозна-
ченість $\frac{0}{0}$. Щоб позбавитися
від неї, ми мусимо помножити

чисельник й знаменник дробу вартості $x_{1,2} = \frac{-a^2mn \pm \sqrt{b^2 - a^2m^2 + n^2}}{a^2m^2 - b^2}$ на число:

$-a^2mn \mp ab\sqrt{b^2 - a^2m^2 + n^2}$, звідки ми одержимо:

$$x_{1,2} = \frac{a^4m^2n^2 - a^2b^4 + a^4b^2m^2 - a^2b^2n^2}{(a^2m^2 - b^2)(-a^2mn \mp ab\sqrt{b^2 - a^2m^2 + n^2})}$$

Коли ми згрупуємо члени рівності подвоєв й винесемо спільних множників за дужку, то одержимо (після скорочення на $a^2m^2 - b^2$):

$$x_{1,2} = \frac{a^2(n^2 + b^2)}{a(-amn \mp \sqrt{b^2 - a^2m^2 + n^2})} = \frac{a(n^2 + b^2)}{-amn \mp bn},$$

або $x_1 = \frac{a(n^2 + b^2)}{-n(am + b)}$; $x_2 = \frac{a(n^2 + b^2)}{-n(am - b)}$

Вставляючи сюди вартість $m = \pm\frac{b}{a}$, будемо мати:

$$x_1 = -\frac{a(n^2 + b^2)}{2nb}, \quad x_2 = -\frac{a(n^2 + b^2)}{0} = \infty$$

далі:

$y_1 = mx_1 + n$; $y_1 = \frac{b}{a}\left[-\frac{a(n^2 + b^2)}{2nb}\right] + n =$

$= \frac{-n^2 - b^2 + 2n^2}{2n} = \frac{n^2 - b^2}{2n}$; $y_2 = mx_2 + n =$

$= m \cdot \infty + n = \infty$.

Випадок $a^2mn - b^2 = 0$ характеризує прості, що мають дві

точки перехрестя з гіперболою, а саме одну $\left(-\frac{a(n^2+b^2)}{2nb}, \frac{n^2-b^2}{2n}\right)$, а другу на безмежності. Ці прості є рівнобіжні між собою і мають кут спаду $\alpha = \operatorname{arctg} \pm \frac{b}{a}$. Та з цих простих, що проходить через початок координат (має $n=0$) носить назву асимптоти гіперболи. Обчислимо точки перехрестя асимптоти з гіперболою. Для цього у вартості x_1, y_1 вставляємо $n=0$ і маємо:

$$x_1 = \frac{-a(0+b^2)}{2 \cdot 0 \cdot b} = \infty; \quad y_1 = \frac{0-b^2}{2 \cdot 0} = \infty;$$

А вартості x_2 та y_2 як і вказані:

$x_2 = \infty$; $y_2 = \infty$. Асимптот дві, перша має кутовий змінник $m = +\frac{b}{a}$, а друга: $m = -\frac{b}{a}$. Асимптоти перехрещуються з гіперболою у двох точках на безмежності (рис. 149)

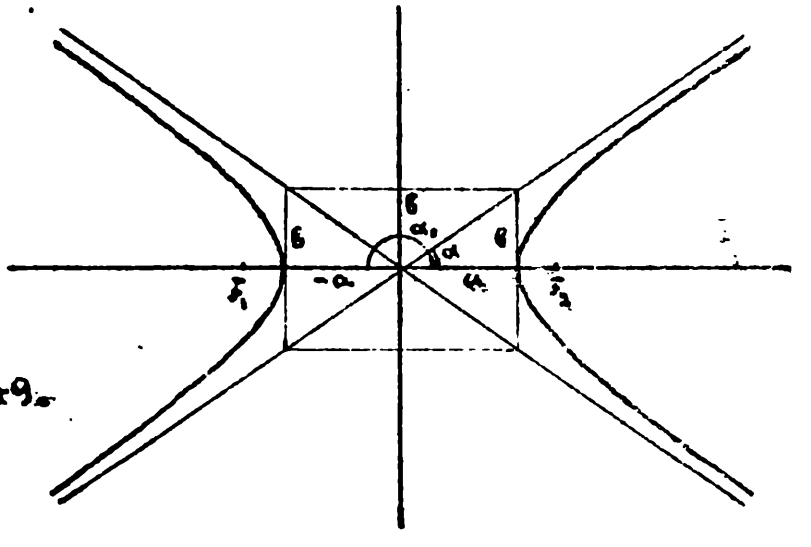


Рис. 149.

§ 64. Дотична еліпси та гіперболи.

Припустимо, що нашим завданням є написати рівняння дотичної до еліпси або гіперболи, проведеної через точку на обводі їх $M(x_1, y_1)$.

Ми знаємо, що рівняння кожної прямої, що проходить через задану цю точку $M(x_1, y_1)$ має вигляд:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \ldots (a).$$

А тому нам лишається ще вибрати для кутового множника m таку вартість, якаб задовольняла умову дотичності цієї прямої до еліпси або гіперболи.

Цю умову дотичності, а саме:

$$D = b^2 \pm (a^2 m^2 - n^2) = 0 \ldots (b)$$

ми вже доводили при розгляді положення прямої згідно цих кривих.

Щоб можна було з рівности (b) визначити вартість потрібного нам кутового множника m, ми мусимо спочатку виключити з неї величину n.

Це останнє легко визначити

з рівняння (a), а саме:

$y-y_1 = mx-mx_1$, або $y = mx+(y_1-mx_1)$,

отже $n = y_1-mx_1$.

Вставляючи тепер в умову (B) замість n, ми маємо рівняння: $b^2 \pm [a^2m^2-(y_1-mx_1)^2] = 0$

З цього буде нам легко визначити сам зміннік m, а саме:

$b^2 \pm (a^2m-y^2+2mx_1y_1-m^2x_1^2) = 0$ або $b^2 \pm [m^2(a^2-x_1^2)+2mx_1y_1-y_1^2] = 0$

Розіб'ємо це рівняння окремо для: I) еліпси: $b^2+m^2(a^2-x_1^2)+2mx_1y_1-y_1^2 = 0$

II) гіперболи: $b^2-m^2(a^2-x_1^2)-2mx_1y^1+y_1^2 = 0$

I.) <u>Розв'яжемо перше рівняння.</u>

$b^2+m^2(a^2-x_1^2)+2mx_1y_1-y_1^2 = 0$, або

$m^2(a^2-x_1^2)+2mx_1y_1+(b^2-y_1^2) = 0$

але з рівняння еліпси $b^2x_1^2+a^2y_1^2 = a^2b^2$, маємо:

$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}$; $x_1 = \frac{a}{b}\sqrt{b^2y_1^2}$, звідки

$a^2-x_1^2 = \frac{a^2}{b^2}y_1^2$; $b^2-y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}x_1^2$.

Тому, вставляючи в наше рівняння вартості $(a^2-x_1^2)$ і $(b^2-y_1^2)$, будемо мати:

$\frac{a^2}{b^2}y_1^2m^2+2mx_1y_1+\frac{b^2}{a^2}x_1^2 = 0$ або

$m^2 + 2\frac{b^2 x_1 y_1}{a^2 y_1^2} m + \frac{b^2 x_1^2 b^2}{a^2 \cdot a^2 y_1^2} = 0$, або

$m^2 + 2\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1} m + \frac{b^4}{a^4}\frac{x_1^2}{y_1^2} = 0$, що є рівне: $\left(m + \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}\right)^2 = 0$

тому $m = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$

Вставляємо вартість m у рівняння (а) й одержуємо таке рівняння дотичної до еліпси, поведеної через точку $M(x_1, y_1)$:

$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$, або $a^2 yy_1 - a^2 y_1^2 = -b^2 xx_1 + b^2 x_1^2$,

звідси: $b^2 xx_1 + a^2 yy_1 = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2$, але

$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, тому: $b^2 xx_1 + a^2 yy_1 = a^2 b^2$.

Звідси, поділивши всі члени рівняння на вільний член, маємо:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

Це і є рівняння дотичної до еліпси, поведеної через точку $M(x_1, y_1)$ на ній

II. розв'яжемо друге рівняння, що визначає кутовий змінник дотичної до гіперболи: $b^2 - m^2(a^2 - x_1^2) - 2mx_1 y_1 + y^2 = 0$, або: $-m^2(a^2 - x_1^2) - 2mx_1 y_1 + (b^2 + y^2) = 0$.

Не вставляючи вартости x_1 та y_1 у рівняння гіперболи: $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 =$

зглядно x_1 та y_1, маємо:

$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2}$; $x_1 = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y_1^2}$, а звідси:

$x_1^2 - a^2 = \frac{a^2}{b^2} y_1^2$, або $a^2 - x^2 = -\frac{a^2}{b^2} y_1^2$; $b^2 + x^2 = \frac{b^2}{a^2} x_1^2$, тому наше рівняння має вигляд:

$$m^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} y_1^2 - 2mx_1 y_1 + \frac{b^2}{a^2} x_1^2 = 0,$$

а це рівнозначне:

$\left(m \cdot \frac{a}{b} y_1 - \frac{b}{a} x_1\right)^2 = 0$; $m\frac{a}{b} y_1 = \frac{b}{a} x_1$; звідси

$$\underline{\underline{m = \frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1}}}$$

Таким чином рівняння дотичної буде:

$y - y_1 = \frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$, або $a^2 y y_1 - a^2 y_1^2 = b^2 x x_1 - b^2 x_1^2$, звідси:

$b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2$; але $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, тому рівняння дотичної до гіперболи приймає вигляд:

$$b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = a^2 b^2$$

або:

$$\underline{\underline{\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1}}$$

Ми бачимо, що рівняння дотичних в якій небудь точці еліпси або гіперболи напишеться:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & b^2 x x_1 \pm a^2 y y_1 = a^2 b^2 \\ 2) & \frac{x x_1}{a^2} \pm \frac{y y_1}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \cdots (121)$$

(де „+" відповідає дотичній еліпси, а „-" - дотичній гіперболи)

Очевидно, що правило написання дотичних до еліпси та гіперболи є однакове з правилом написання дотичних до кола й параболи.

По аналогії напишемо рівняння дотичних до еліпси й гіперболи, що визначаються такими рівняннями:

1) Для загального рівняння:

$$\frac{(x-m)(x_1-m)}{a^2} \pm \frac{(y-n)(y_1-n)}{b^2} = 1 \ldots (122)$$

2) Для вершинового рівняння:

$$yy_1 = p(x+x_1) \mp \frac{p}{a} xx_1 \ldots\ldots (123)$$

§65. Властивості дотичної до еліпси

Визначення:

1) Лучі-вектори прямові до дотичної, своїм продовженням проходять через перехрестя дотичної з приметним колом.

2) Дотична переполовинює зовнішній кут поміж лучами-векторами, поведеними через точку

дотичну.

3) Дотична творить з променями-векторами, проведеними через точку дотику, кути, рівні між собою.

4) Відтинок променя-вектора, проведеного через точку дотику до зустрічі з другим променем вектором, паралельним до дотичної, є рівний великій півосі еліпса (2a). Коло, окреслене цим відтинком (2a) з вогнища, як центра, носить назву <u>направляючого</u>.

Перша властивість уже доведена нами при розгляді положення простої відносно еліпса. Тепер доведемо решту, а саме: кожна пряма, що проходить через точку перехрестя на обводі еліпса променів-векторів і переполовинює зовнішній між ними кут, є неодмінно дотичною еліпса.

Припустимо, що (рис. 150) через точку M перехрестя двох променів-векторів F_1M і F_2M проведено пряму AA, що переполовинює [illegible]

пінний між даними променями кут $\angle \alpha MF_2 = 2\alpha$.

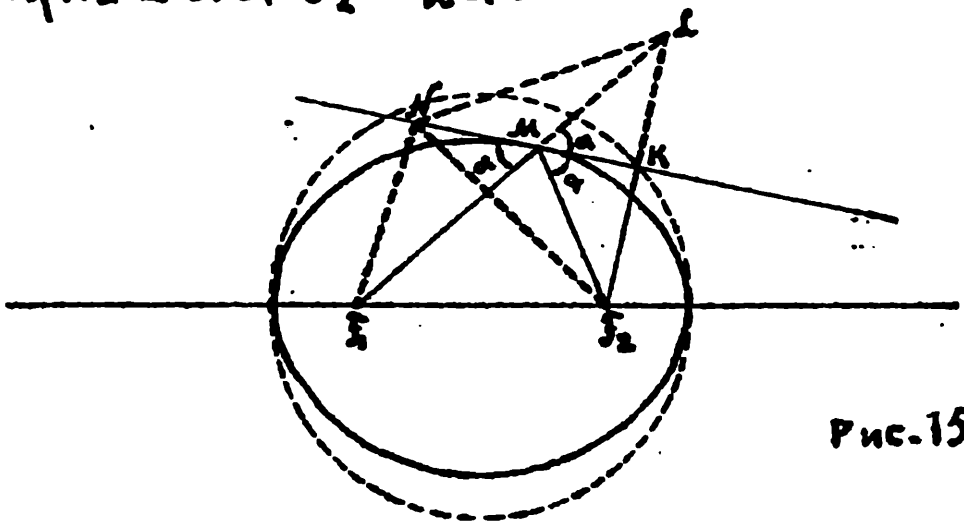


Рис. 150.

На продовженні променя-вектора F_1M відкладемо відтинок $ML = MF_2$. Тоді утворюється $\triangle F_2ML$ рівнобедрений, а тому пряма MK, що є його симетральною, є одночасно й осередком (перепоновинює LF_2, себто $F_2K = KL$) й висотою трикутника (себто $MK \perp F_2L$). Таким чином MK є симетральною відтинка F_2L. Доведемо, що пряма MK є дотичною еліпса, себто крім точки M вона не має інших спільних точок з еліпсом. Візьмемо яку небудь довільну точку N на прямій MK й покажемо, що пряма MK є симетральною відтинку LF_2, то похилі: $NF_2 = NL$. Розглядаючи $\triangle F_1NL$, ми

бачимо, що $F_1N + NL > F_1L_1$, але $NL = NF_2$; $F_1L = F_1M + ML = F_1M + MF_2 = 2a$. Таким чином:

$$F_1N + F_2N > 2a.$$

Отже сума віддалень точки N від вогнищ F_1 і F_2 більша за $2a$, а тому точка N лежить поза елісою. Аналогічним способом можна довести, що кожна точка простої MK (крім точки M) лежить поза елісою, а тому MK є дотична еліси.

Таким чином: дотична до еліси в якійсь його точці переполовинює зовнішній кут між променями-векторами, поведеними через точку дотику.

1-й висновок. $\angle NMF_1 = \angle LMK$, як вертикалі, а тому маємо третю властивість дотичної еліси: дотична еліси творить рівні кути з променями-векторами, поведеними через точку дотику.

2-й висновок. Ми вже довели, що відтинок $F_1L = 2a$. Таким чином

відтинок променя-вектора, поведеного через точку дотику до перетину з другим променем-вектором, паралельним до дотичної, є рівний великій півосі еліпса. Точка перетину цих векторів носить назву зеркальної точки вогнища відносно даної дотичної.

§ 66. Властивості дотичної до гіперболи.

Визначення.

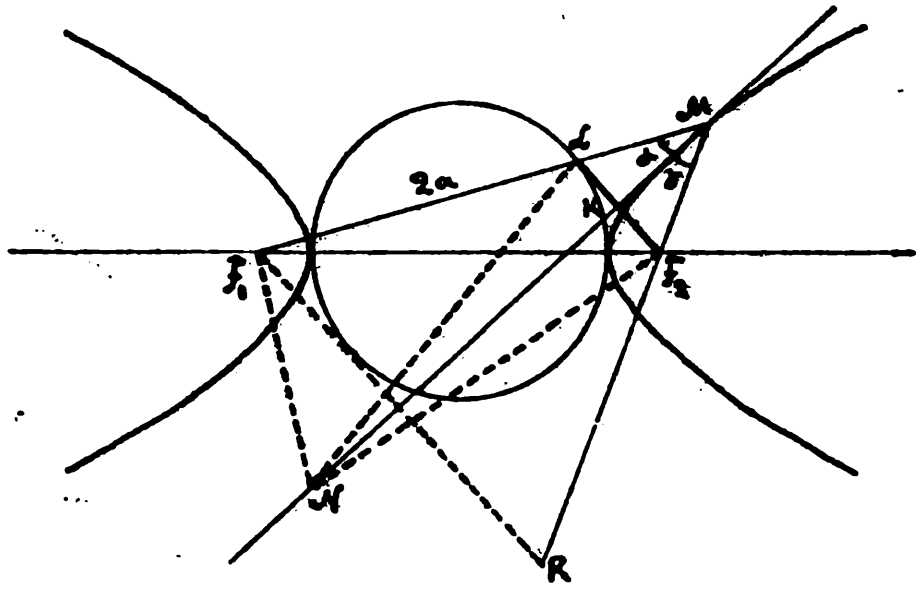
1) Промені-вектори, паралельні до дотичної, проходять через перетин цієї дотичної з приємним колом.

2) Дотична до гіперболи перекреслює внутрішній кут між променями-векторами, поведеними через точку дотику.

3) Промінь-вектор, паралельний до дотичної, відтинає від другого променя-вектора, поведеного через точку дотику, відтинок рівний основній півосі (2a).

Перша властивість нами вже доведена при розгляді положення прямої відносно гіперболи. Доведемо ще другу властивість цієї дотичної, себто теорему, що - **дотична проста, проведена через точку перетину на обводі гіперболи променів-векторів є дотичною, коли переполовлює внутрішній кут між цими променями.**

Рис. 151.



Проводимо в точку дотику промені-вектори: F_1M і F_2M і від точки M відкладаємо відтинок $ML = MF_2$. Одержуємо рівнобедрений $\triangle LMF_2$, де пряма MK є серединним перпендикуляром LF_2 і одночасно симетральною кута $\angle LMF_2$

Дальший доказ що-до того, що пряма MN немає инших спільних точок з гіперболою, крім M, аналогичний до попереднього доказу для дотичної еліпса, а тому цей доказ доручається самим студіюючим.

Відтинок $LM = MF_2 = r_2$, тому $LF_1 = r_1 - r_2 = 2a$, що підтверджує третю властивість дотичної. Точка L зветься зеркальною точкою вогнища F_2 відносно дотичної гіперболи.

Коло, очеркнуте з вогнища F_1, як центру, відтинком $F_1L = 2a$ (або з вогнища F_2 відтинком F_2R) зветься направляючим колом гіперболи.

§ 67. Рівнання прямової (нормалі) еліпси або гіперболи.

Рівнання дотичної до еліпса й гіперболи є:

$$b^2xx_1 \pm a^2yy_1 = a^2b^2$$

Визначаючи з нього y маємо:

$$y = \mp\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\cdot x + \frac{a^2b^2}{a^2y_1}$$

З другого боку, рівнання простої,

що проходить через точку M, буде: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Щоб ця пряма була прямою дотичною до кривої необхідно підібрати величину змінника m так, щоб задовольнялася умова прямої дотичності його з дотичною, себто мусить бути:

$$m = -\left(\mp \frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1}\right) = \pm \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$$

Отже рівняння прямої до еліпси або гіперболи буде:

$$y - y_1 = \pm \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1) \quad \ldots (124)$$

Зводячи до спільного знаменника і роблячи зведення однорідних членів, одержимо:

$b^2 y x_1 \mp a^2 x y_1 = (b^2 \mp a^2) x_1 y_1$, але; для еліпси: $a^2 - b^2 = e^2$, а для гіперболи $a^2 + b^2 = e^2$, тому $b^2 y x_1 \mp a^2 x y_1 = \mp e^2 x_1 y_1$, або після поділу членів рівняння на вільний член, ми матимемо:

$$\frac{a^2}{e^2}\frac{x}{x_1} \mp \frac{b^2}{e^2}\frac{y}{y_1} = 1 \quad \ldots (125)$$

Вже з розгляду теорем про властивості дотичних легко довести,

що:

1) прямова еліпси переполовинює внутрішній кут, заключений променями-векторами, поведеними через точку дотику;

2) прямова гіперболи переполовинює зовнішній кут, заключений променями-векторами, поведеними через точку дотику.

Примітка. Прямові еліпси й гіперболи проходять через їх центри лише тоді, коли точки дотику лежать у вершках кривих.

§ 68. Будування дотичних та прямових еліпси, або гіперболи,

що поведені через точку обводу цієї кривих є дуже просте, бо зводиться до звичайного геометричного будування симетральних зовнішніх та внутрішніх кутів між променями-векторами, поведеними через точку дотику.

§ 69. Дотична до еліпси або гіперболи, поведена з точки поза кривою.

Для складення рівняння дотичної до еліпса, або гіперболи, поведеної до них з точки поза кривою $M(x_0, y_0)$, скористуємося загальним способом, який ми вживали вже для складення рівнянь такого роду дотичних до кола й параболи.

Будемо тимчасово вважати точку дотику шуканої дотичної до еліпса або гіперболи відомою і значення її x_1 та y_1 за дані.

Тоді рівняння дотичної, що ще проходитиме через цю точку, як відомо, буде: $b^2 x x_1 \pm a^2 y y_1 = a^2 b^2$ (де верхній знак „+" відповідає дотичній до еліпса, а нижній „−" — дотичній до гіперболи)

Але ця сама дотична мусить також проходити і через дану точку $M(x_0 y_0)$, тому значення точки M задовольняють рівнянню дотичної, себто: $b^2 x_1 x_0 \pm a^2 y_1 y_0 = a^2 b^2$.

Ця рівність, з огляду на те, що в дійсності x_1 та y_1 не є дані, уявляє з себе не тотожність,

а рівняння згідно цих невідомих x_1, y_1.

Щоб визначити їх, нам треба розв'язати систему рівнянь:

$$b^2 x_1 x_0 \pm a^2 y_1 y_0 = a^2 b^2$$

$$b^2 x_1^2 \pm a^2 y_1^2 = a^2 b^2$$ (бо точка $A(x_1, y_1)$ лежить і на обводі кривої)

Ця система рівнянь другого й першого ступня дасть нам дві розв'язки, а саме:

$$x_{1,2} = \frac{(\pm a^2 b^2 x_0) \pm a^2 y_0 \sqrt{a^2 y_0^2 \pm (b^2 x_0^2 - a^2 b^2)}}{a^2 y_0^2 \pm b^2 x_0^2}$$

а $y_{1,2} = \pm \frac{a^2 b^2 - b^2 x_{1,2} x_0}{a^2 y_0^2}$ (де ми вставляємо по черзі вартості x_1 та x_2)

[подвійні знаки $\pm$ читаються так: „+" для точки (x_1, y_1) на елипсі, а „−" - для точки дотику на гіперболі]

Розглянемо вираз $D = y^2 y_0^2 \pm (b^2 x_0^2 - a^2 b^2)$.

1) Коли $D > 0$, то точки дотику дві [з точки $M(x_0 y_0)$ можна повести дві дотичних до елипса (+) або до гіперболи (−)],

2) Коли $D = 0$, то точка дотику одна (одна дотичка)

і 3) Коли $D < 0$, то точок дотику немає (вартості $x_{1,2}$ та $y_{1,2}$ є уявні).

Для геометричного зображення розглянемо попередній випадок $D=0$, себто $a^2y_0^2 \pm (b^2x_0^2 - a^2b^2) = 0$ або $\pm a^2y_0^2 + b^2x_0^2 - a^2b^2 = 0$, звідси:

$$\underline{b^2x_0^2 \pm a^2y_0^2 = a^2b^2}$$

Порівнюючи одержану тотожність з рівняннями еліпса та гіперболи: $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$, ми бачимо, що при $D=0$ значення точки $M(x_0, y_0)$ задовольняють цим рівнянням, себто точка M лежить на кривій (одна дотична). При $D>0$ маємо: $b^2x_0^2 \pm a^2y_0^2 - a^2b^2 > 0$, а це показує, що точка M лежить поза кривими (дві дотичні) і, нарешті, при $D<0$ маємо: $b^2x_0^2 \pm a^2y_0^2 - a^2b^2 < 0$, себто точка M лежить на полі кривої (жадної дотичної). Розглянемо для гіперболи ще той випадок, коли знаменатель: $a^2y_0^2 - b^2x_0^2 = 0$ (себто значення точки $M(x_0y_0)$ пропорційні півосям: $\frac{y_0}{x_0} = \pm\frac{b}{a} = m$. В цьому разі знаходимо точку дотику $x_1 = \infty$ і $y_1 = \infty$, себто одна з дотичних до гіперболи, побудована з цієї точки, паралельна до асимптоти та другої не перетинає

ності (є її асимптотою).
Друга точка x_2, y_2 буде реальною й на обмеженому віддаленню від вершина. Це пропонується довести самим студіюючим. Так довести, що обидві дотичні до гіперболи поводять з центру й є асимптотами (точки до: тичну на безмежності).
Ми ми в. практикувати ра: ніші для кола й параболи, так і для еліпси й гіперболи, про: ши:

$$\left.\begin{aligned} b^2 x x_0 \pm a^2 y y_0 &= a^2 b^2 \\ \frac{x x_0}{a^2} \pm \frac{y y_0}{b^2} &= a^2 b^2 \end{aligned}\right\}$$

є бігуною (полярою) еліпси (+), або гіперболи (-) згідно точки $M(x_0, y_0)$, як її бігуна.

§ 70. Збудування дотичної до еліпси або гіперболи, поведених з точки поза ними.

Для збудування дотичної, поведеної з точки A (поза кривою) до еліпси або гіперболи, скорис: стуємося першою властивістю дотичних, поведених до згаданих

кривих, а саме, що:
<u>луч-вектор, поведений з якого небудь вогнища еліпси, або гіперболи через перехрестну дотичної з прилеглим колом, є прямою до дотичної.</u>

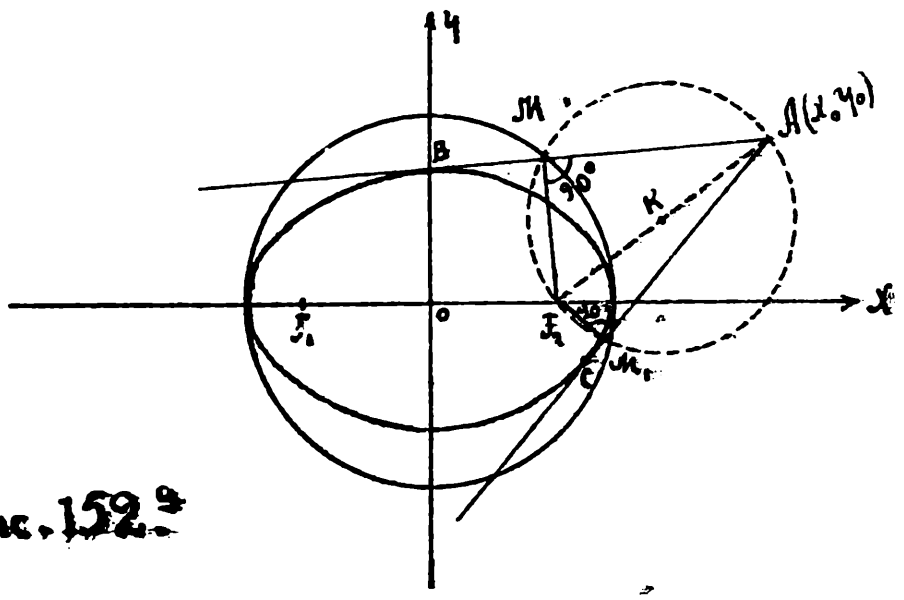


Рис. 152 а

Таким чином, коли припустимо, що AM (рис. 152 а-б) є дотична до еліпси або гіперболи, то луч-вектор F_2M буде прямою до дотичної AM, себто цими простими завжди утворюється прямий кут AMF_2, що спирається на точки A і F_2. З геометрії нам відомо, що вершок такого прямого кута неодмінно лежить на обводі кола (обвід кола є геометричний осередок цих вершків), збудованого

на відстанях AF_2, як на поперечниках. Але з властивости дотичної ясно, що цей же вершок прямого кута мусить лежати й на прямолінійному колі. Тому точка M (друга точка дотику кола з A) буде лежати на перехресті цих двох кіл: кола, збудованого на AF_2, як на поперечнику і прямолінійного кола. Точок перехрестя двох кіл є дві: M і M_1, тому ми одержимо й дві дотичних: AM і AM_1.

Ці пояснення дають такий спосіб збудування дотичних до еліпси або гіперболи, поведених до них з точки A поза кривою: (рис. 152 а і б)

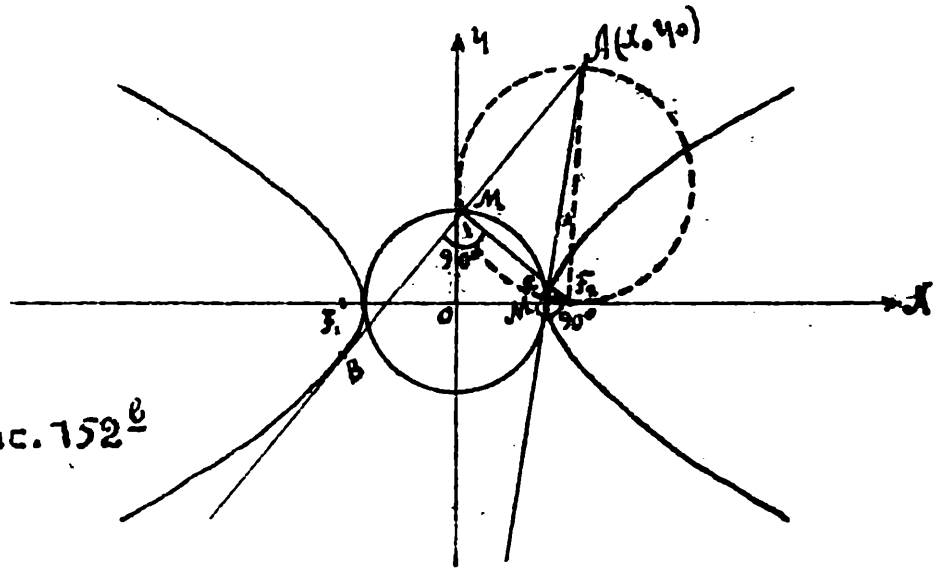


Рис. 152 б

Одержимо прямолінійні кола,

2) сполучаємо одно з вогнищ кривої з точкою A й на цьому відтинку A, як на поперечнику, будуємо коло і 3) а) через точку A і точку M, б) через точку A і точку M_1 (де M і M_1 є перехрестя збудованого кола з притягненим) зводимо кресла проводимо прості. Ці прості й будуть дотичними до даних кривих

Задачі.

ч. 269. Написати рівняння: I. еліпси, коли 1) велика вісь рівнобіжна вісі X-ів, а центр її (3,5) й півосі: a = 7, b = 4.

2) велика вісь рівнобіжна вісі Y-ів, центр еліпси (2,3), а півосі a = 5, b = 2.

II. Гіперболи, коли 1) велика вісь ∥ вісі Y-ів, центр (2,−5), a = 4, b = 6; 2) велика вісь ∥ вісі Y-ів, центр (3,2) a = 6, b = 4.

ч. 270. Перетворити дані рівняння в загальні:

1) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$; 2) $9x^2 + 16x + 36x + 96y + 36 = 0$; 3) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y = 11$.

4) $9x^2 - 16y^2 - 90x - 64y + 17 = 0$;

5) $4x^2 - y^2 + 24x + 32 = 0$; 6) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$; 7) $x^2 - 9y^2 + 7x + 9y + 10 = 0$; 8) $5x^2 - 4y^2 + 10x - 16y = 0$.

№ 271. Визначити взаємне положення кривої й прямої

1) $x^2 + 4y^2 = 4$; $2x + 3y - 5 = 0$; 2) $25x^2 - 9y^2 = 225$ і $12x + 25y = 45$; 3) $25x^2 + 36y^2 = 900$ і $10x - 9y - 25 = 0$; 4) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ і $4x - 5y + 2 = 0$; 5) $4x^2 + 9y^2 = 36$ і $8x = 9y$; $36x^2 + 100y^2 - 360 = 0$; $y = 0{,}6x$.

№ 272. Написати рівняння гіперболи, що має асимптоту $y = 2x$ і проходить через точку $(1, \sqrt{3})$

№ 273. Знайти точки перетину еліпса $9x^2 + 16y^2 = 144$ з прямими 1) $y = 3x + 5$; 2) $y = x + 5$, 3) $y = 2x - 9$.

Те саме, для гіперболи: $4x^2 - 9y^2 = 36$ і прямих 1) $3y = 4x + 6$; 2) $y = 2x - 8$ і 3) $y = \frac{5}{6}x - 65$.

№ 274. 1) Через точку $(-3, \frac{7}{5})$ провести дотичну до еліпса: $x^2 + 25y^2 = 25$ і накреслити її, 2) те саме, через точку $(6\frac{2}{3}, 4)$ провести дотичну до гіперболи: $9x^2 - 16y^2 = 144$ і накреслити її.

№ 275. Через точку $(3, 8)$ провести

дотичні до еліпса: $9x^2+16y^2=144$.

2) тем, через точку $(8, 5\frac{1}{4})$ повести дотичні до гіперболи $9x^2-16y^2=144$. Написати їх рівняння, рівняння прямих у точках дотику і накреслити їх.

№ 276. Написати рівняння дотичної та прямої до даних кривих у даних точках:

1) $4x^2+25y^2=100$; $(3, y>0)$; 2) $\frac{(x+3)^2}{100}+\frac{(y-5)^2}{64}=1$, $(5, y>0)$; 3) $4x^2-6y^2=36$, $(5, y<0)$

№ 277. Написати рівняння дотичних (а також бічної точки дотику): 1) до кривої: $4x^2+9y^2=36$ рівнобічної до прямої $2x+4y=15$.

2) тем: $4x^2-9y^2=36$ рівнобічної до прямої $y=\frac{3}{15}x+2$.

3) тем: $9x^2+25y^2=225$, прямої до прямої $4y-5x=6$.

4) тем: $x^2-4y^2=4$, прямої до прямої $3x+2y=5$.

№ 278. – до еліпса: $x^2+4y^2=100$ повести дотичні в точках (8.3) і $(6;-4)$ Знайти точку їх перехрестя та кут між ними

№.279. Знайти відрізки від точки (x_1, y_1) лежної до еліпса & центр. Розв'язати в загальному вигляді і взяти, коли рівняння еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, а точка дотику (3,8)

№.280. Написати бісеве рівняння кривої:

1) еліпса, коли $\ell=2$ і рівняння дотичної $2x+3y+9=0$

2) гіперболи, коли $e=5$ і рівняння дотичної $15x-16y=36$.

№.281. Написати рівняння бічних, коли:

1) рівняння кривої: $5x^2+9y^2=45$, а бічною точка $(2,-1\frac{2}{3})$

2) теж: $9x^2-4y^2=36$, —"— $(-2,-3)$

3) теж: $9x^2+25y^2=225$, —"— $(-5,9)$

4) теж: $x^2-2y^2=1$, —"— $(-1,3)$

№.282. Знайти кути перехрещення кривих:

1) $3x^2+5y^2=15$ і $x^2+y^2=4$; 2) $9x^2+9y^2=544$ і $9x^2-16y^2=144$; 3) $x^2+4y^2=4$; $4x^2+y^2=4$. 4) $x^2-4y^2=4$ і $4x^2-y^2=4$.

№.283. Обчислити бік квадрату, вписаного в еліпс $9x^2+16y^2=144$ та, вписаного в еліпс: $4x^2+9y^2=144$.

№.284. Під яким кутом зорю вид-

ко елипсу $x^2+4y^2=4$ з точки (5,3),
2) тепе, $9x^2+16y^2=144$ — " — (6,1).

§21. Обчислення довжини дотичної, піддотичної, прямової та підпрямової відрізка або точки.

I спосіб. (рис. 153а)

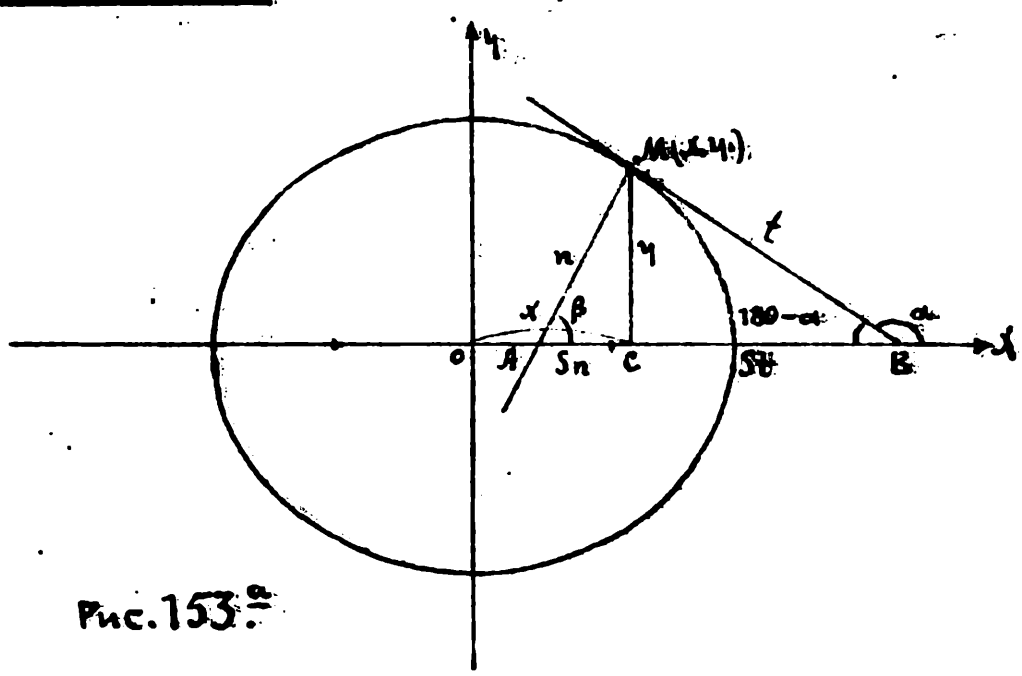


Рис. 153а

З $\triangle MCB$ маємо: $St = y_1 \operatorname{ctg}(180-\alpha) = -y_1 \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{y_1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

З $\triangle AMC$ маємо: $Sn = y_1 \operatorname{ctg}\beta = \frac{y_1}{\operatorname{tg}\beta}$.

Але ми вже довели, що кутові з'язки: 1) дотичної елипси $m = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$; 2) прямової елипси: $k = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$;

тому 1) $\underline{St = -y_1 : \left(-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}\right) = \frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1}}$. Й коли тепер вставити вартість $y_1 =$

$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}$, то можна одержати:

$$S_t = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$$

2) $S_n = y_1 : \left(\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right) = \frac{b^2 x_1}{a^2}$

3) З а МСВ і а АМС за теоремою Пі-
тагора маємо:

1) $t^2 = y_1^2 + S_t^2$; 2) $n = y_1^2 + S_n^2$; або

$$t^2 = y_1^2 + \left(\frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1}\right)^2 = y_1^2 + \frac{a^4 y_1^4}{b^4 x_1^2} = \frac{y_1^2}{b^4 x_1^2}\left(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2\right)$$

Звідси:

$$t = \frac{y_1}{b^2 x_1}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}$$

4) $n = y_1^2 + \left(\frac{b^2 x_1}{a^2}\right) = \frac{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}{a^4}$;

$$n = \frac{1}{a^2}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}$$

II гіпербола. (рис. 153 б)

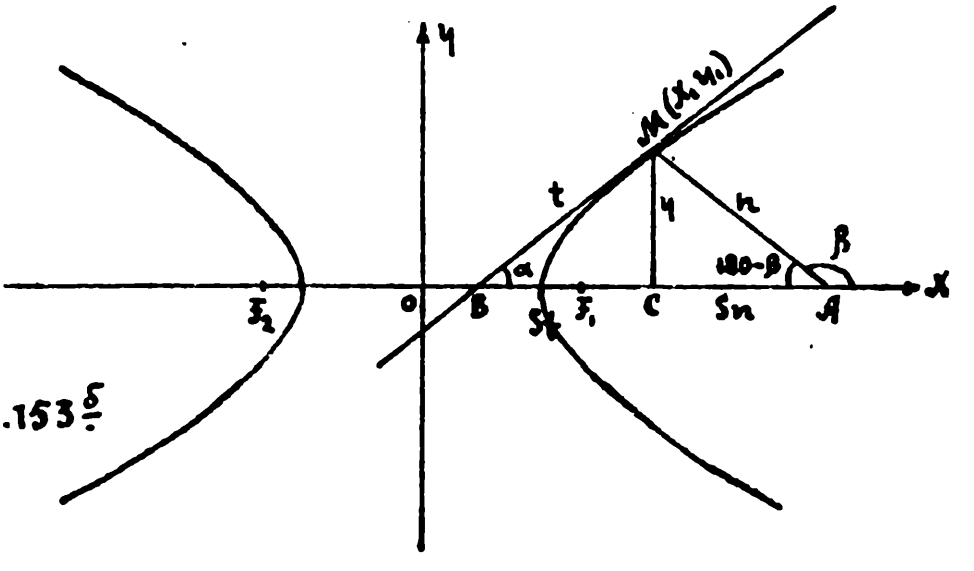


Рис. 153 б

З а ВСМ маємо: $S_t = y_1 \operatorname{ctg}\alpha = \frac{y_1}{\operatorname{tg}\alpha}$

З а АМС маємо: $S_n = y_1 \operatorname{ctg}(180 - \beta) = -y_1 \operatorname{ctg}\beta =$

$= -\frac{y_1}{tg\beta}$. Але кутовий коефіцієнт дотичної до гіперболи $m = tg\alpha = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$, а кутовий коефіцієнт прямої до гіперболи $k = -\frac{1}{m} = tg\beta = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$, тому: $S_t = \frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1}$, а вставляючи $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ матимемо:

$$S_t = \frac{x^2 - a^2}{x_1} = -\frac{a^2 - x^2}{x_1}$$

Так само:

$$S_n = -y_1 : \left(-\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right) = \frac{b^2 x_1}{a^2}$$

З тих же прямокутників за теоремою Піфагора маємо:

$$t = \sqrt{y_1^2 + \left(\frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1}\right)^2} = \frac{y_1}{b^2 x_1}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}$$

$$n = \sqrt{\left(\frac{b^2 x_1}{a^2}\right)^2 + y_1^2} = \frac{1}{a^2}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}$$

Таким чином величини дотичної будуть:

Відтинок:

1) дотичної еліпси й гіперболи $t = \frac{y_1}{b^2 x_1}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}$
2) піддотичної " " " $S_t = \pm\frac{a^2 - x_1^2}{x_1^2}$
3) прямової " " " $n = \frac{1}{a^2}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}$
4) підпрямової " " " $S_n = \frac{b^2 x_1}{a^2}$

(126)

(де подвійний знак ± відповідає: „+" - для еліпси, а „−" для гіперболи)

§ 72. Поперечники еліпси и гіперболи.

Визначення. Поперечником еліпса або гіперболи зветься відрізок прямої, що проходить через їх центр і сполучує точки, взяті на обабіч цих кривих.

Доведено такі теореми:

1) Кожний поперечник еліпса або гіперболи переполовинюється центром кривої.

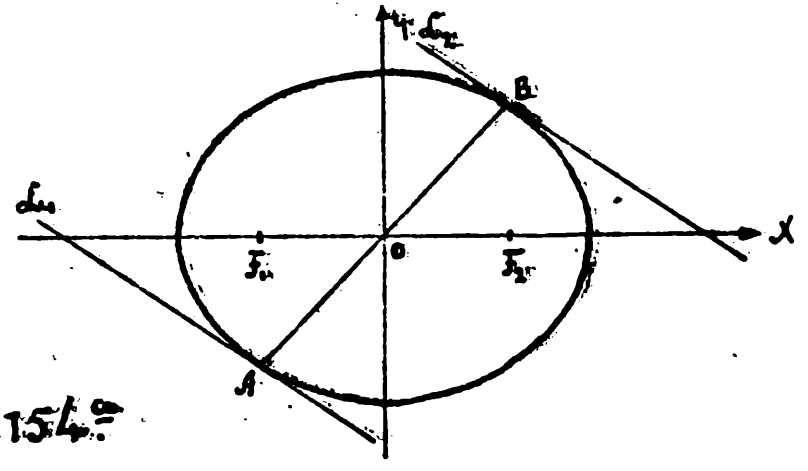


Рис. 154а

Рівняння поперечників (еліпса й гіперболи), як прямих, що проходять через початок бісектрис O (рис. 154а і б), можна написати:

$$y = mx.$$

З другого боку, взявши рівняння самих кривих:

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$$

і розв'язавши його спільно з першим, ми знайдемо значення кінців цього поперечника, а са-

ме:

$$b^2x^2 \pm a^2m^2x^2 = a^2b^2,$$

звідси: $x^2(b^2 \pm a^2m^2) = a^2b^2$.

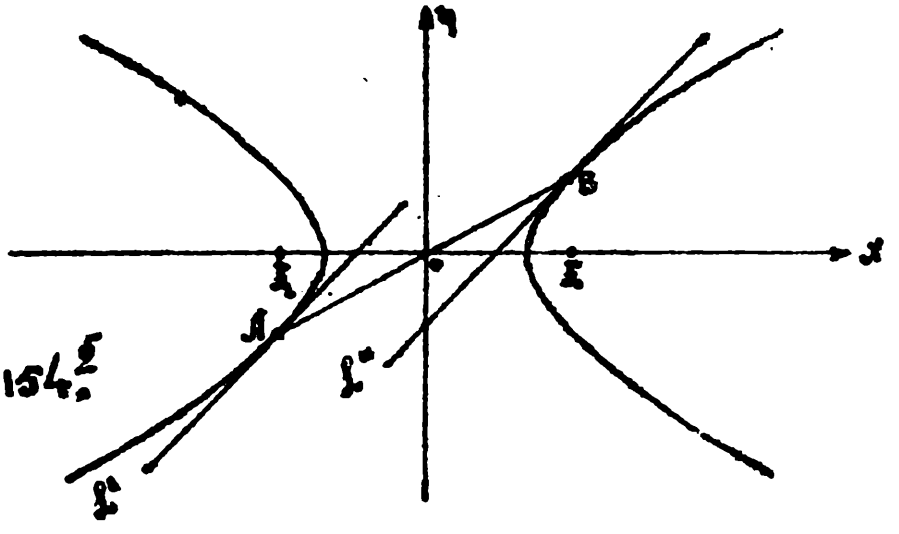


Рис. 154.

Ми бачимо, що для визначення x ми одержали неповне квадратове рівняння, у якого сочинник при першій степені x є нуль. Отже й сума розв'язків цього рівняння є нуль. А через те вартість середини поперечника $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ є також нуль. Коли $x_0 = 0$, то й $y_0 = mx_0$ також є рівне нулю, себто $y_0 = 0$.

Таким чином доводиться доведення лежить у середині поперечника еліпси або гіперболи, себто цей поперечник переполовинюється центром кривої.

2) Дотичні поведені до еліпса або гіперболи через кінці якогось поперечника їх є рівнобіжні.

З доведів попередньої теореми ми бачимо, що коли значення одного кінця поперечника еліпса або гіперболи означимо через x', y', то значення другого кінця неодмінно будуть рівні значенням першого кінця по величині й протилежні знаком, себто $-x', -y'$ (бо сума їх є нуль). Напишемо рівняння дотичних до еліпса й гіперболи, поведені через кінці якогось поперечника, себто - через точки: $A(x', y')$ і $B(-x', -y')$. Ці рівняння будуть:

$$1)\ b^2xx' \pm a^2yy' = a^2b^2$$

$$2)\ -b^2xx' \pm (-a^2yy') = a^2b^2, \text{ або}$$

$$b^2xx' \pm a^2yy' = -a^2b^2$$

Ми бачимо, що рівняння цих дотичних різняться лише знаком вільного члена (себто мають кутові з'ліпки однакові), а тому вони є рівнобіжні.

1) Кожний поперечник еліпса або гіперболи є зарухений з тятив, рівнобіжних даному, поведеним через кінці цього поперечника. Инакше кажучи, кожний поперечник еліпса або гіперболи є геометричним осе-редком середин тятив рівнобіжних даному, поведеним через кінці цього поперечника.

Припустимо, що ми маємо через рівнобіжних між собою тятив: $y = mx + n$; $y = mx + n$, і т. д. Знайдемо кінці якоїсь із цих тятив, напр. $y = mx + n$. Для цього нам треба буде розв'язати систему рівнань: $y = mx + n$ і $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$.

Вставляючи вартість y в друге рівнання, матимемо:

$$b^2x^2 \pm a^2(mx + n)^2 = a^2b^2, \text{ або}$$

$$b^2x^2 \pm (a^2m^2x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2) = a^2b^2, \text{ або}$$

$$x^2(b^2 \pm a^2m^2) \pm 2a^2mnx - (a^2b^2 \mp a^2n^2) = 0$$

звідки маємо:

$$x^2 \pm 2\frac{a^2mn}{b^2 \pm a^2m^2}x - \frac{a^2b^2 \mp a^2n^2}{b^2 \pm a^2m^2} = 0$$

(де верхній знак відповідає еліпсі, а нижній гіперболі).

З властивости квадратового рівняння маємо: $x_1+x_2=\mp 2\frac{a^2mn}{b^2\pm a^2m^2}$, а тому відповідна середина буде:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\mp\frac{a^2mn}{b^2\pm a^2m^2}$$

Але x_0 та y_0 мусять задовольняти рівнанню прямої, а через те $y_0=mx_0+n$, звідси:

$$y_0=\mp\frac{a^2m^2n}{b^2\pm a^2m^2}+n=\frac{\mp a^2m^2n+b^2n\pm a^2m^2n}{b^2\pm a^2m^2}=$$

$$=\frac{b^2n}{b^2\pm a^2m^2}$$

Коли рівнання прямої відріжеться лише вартостею вільних членів, то й вартости x_0 та y_0 будуть для різних прямих відрізнятися вартостями цих вільних членів „n", а тому щоб знайти геометричний осередок усіх цих прямих ми мусимо з вартостей x_0 та y_0 виключити цю вартість вільного члена n. Цього ми досягнемо, коли поділимо вартість x_0 на y_0:

$$\frac{x_0}{y_0}=\mp\frac{a^2m\cdot n(b^2\pm a^2m^2)}{b^2n(b^2\pm a^2m^2)}=\pm\frac{a^2m}{b^2}$$

Звідси рівняння геометричного середину середин рівнобіжних хорд еліпса або гіперболи буде:

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2 m} x \quad \ldots \quad (127)$$

(де „−" — для еліпса „+" — для гіперб.)

З форми рівняння ми можемо зробити висновок, що ця пряма повинна проходити через початок координат, себто через центр даної кривої, тому вона є поперечником цієї кривої.

Лишається ще нам довести, що її хорди є також рівнобіжні дотичним, поведеним через кінець одержаного нами поперечника. $y = \mp \frac{b^2}{a^2 m} x$.

Означимо значення якого кінця поперечника через x_1, y_1. Моді дотична, поведена через цю точку, буде мати рівняння

$$b^2 x x_1 \pm a^2 y y_1 = a^2 b^2 \quad \begin{pmatrix} + \text{ — еліпса} \\ - \text{ — гіпербола} \end{pmatrix}$$

звідси: $y = \mp \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x \pm \frac{a^2 b^2}{a^2 y_1}$.

Знайдемо вартість відношення $\frac{x_1}{y_1}$. Точка (x_1, y_1) є кінець поле-

ренника $y = \mp \frac{b^2}{a^2 m} x$, тому значення x_1 та y_1 мусять задовольняти цьому рівнанню, себто $y_1 = \mp \frac{b^2}{a^2 m} x_1$, а звідси $\frac{x_1}{y_1} = \mp \frac{a^2 m}{b^2}$.

Вставляючи знайдену вартість $\frac{x_1}{y_1}$ у рівнання дотичної, ми одержимо: $y = \mp \frac{b^2}{a^2} \cdot \mp \frac{a^2 m}{b^2} x \pm \frac{b^2}{y_1}$

Після спрощення рівнання дотичної приймає вигляд:

$$y = mx \pm \frac{b^2}{y_1}$$

Кутовий змінник дотичної т однаковий з кутовим зміннико̀м діяметрів, а тому дані діяметри є рівнобіжні до дотичних, поведених через кінці зарученого з ними поперечника.

4) <u>Поперечник еліпси або гіперболи рівнобіжний до діяметрів зарученим з другим поперечником, у свою чергу є зарученим з діяметрами, рівнобіжними цьому другому поперечнику.</u>

Ми мали через рівнобіжних діяметрів: $y = mx + n$; $y = mx + n_1$, і тоді; очевидно, що поперечник, рівнобіжний цим діяметрам, матиме рівнання: $y = mx$, а другий поперечник, що з ним зару-

женій з цими тяготами матиме рівнання: $y = \mp \frac{b^2}{a^2 m} x$, або $y = m_1 x$, де $m_1 = \mp \frac{b^2}{a^2 m}$

Коли збудуємо перелік повних тяготів, рівнобіжних попереднім $y = m_1 x$, зарученому з першими тяготами, то їх рівнання будуть мати вигляд:

$$y = m_1 x + k_1, \quad y = m_1 x + k_2 \text{ і т.д.}$$

Грунтуючися на попередній теоремі, ми також можемо написати й рівнання поперечника, зарученого з цими новими тяготами, а саме:

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2 m_1} x$$

Коли в це рівнання вставимо вартість $m_1 = \mp \frac{b^2}{a^2 m}$, то одержимо:

$$y = \left[\mp \frac{b^2}{a^2} : \left(\mp \frac{b^2}{a^2 m} \right) \right] x, \text{ або } \underline{y = mx}$$

таким чином переконуємося, що це є рівнанням попереднього, рівнобіжного першому ряду тяготів.

<u>Такі поперечники носять назву зарученних, а тяготи рівнобіжні їм – взаємно зарученних.</u>

З означення $m_1 = \mp \frac{b^2}{a^2 m}$ ми одержуємо ознаку зв'язності двох поперечників, а саме: $m_1 m = \mp \frac{b^2}{a^2}$ (128)

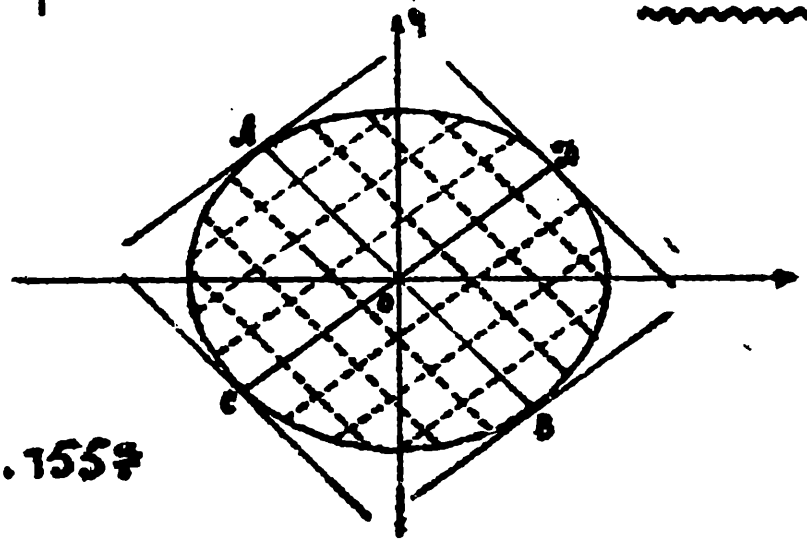


Рис. 155а

Два поперечника гіперболи або еліпса є зв'язні, коли здобуток їх кутових злітників є рівний відношенню квадратів малої півосі до великої, при чому для гіперболи це відношення є додатне, а для еліпса - від'ємне.

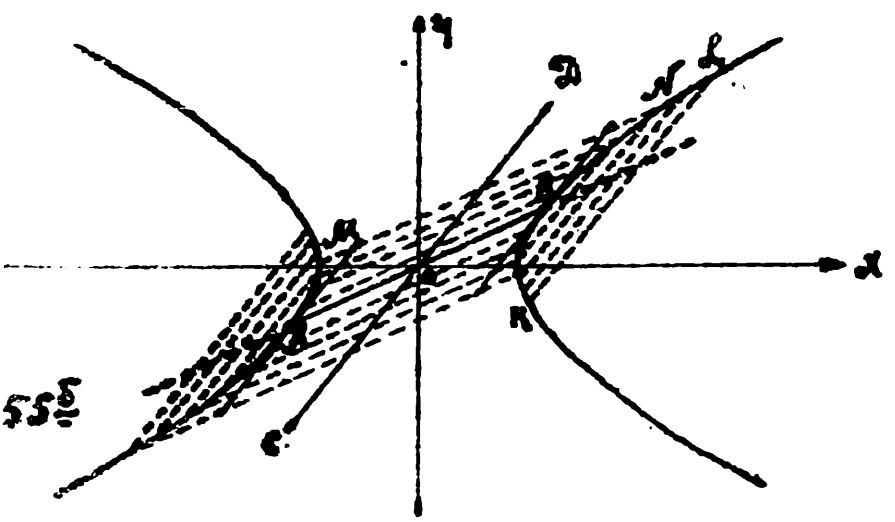


Рис. 155б

Що до гіперболи, то її мнимі вісі (рис. 155б) будемо поділяти на мнимі внутрішні (напр. Kd) і мнимі зовнішні (напр. MN). Кожному пучку рівновеликих між собою внутрішніх мнимих вісей відповідає пучок рівновеликих між собою зовнішніх, взаємно зрушених з першими. Тому зрушеному з внутрішніми мнимими поперечнику завжди відповідає зрушений йому поперечник зовнішніх мнимих вісей. Таким чином зрушені поперечники гіперболи завжди лежать по обидва боки асимптот. Поперечник, зрушений зовнішніми мнимими вісями гіперболи є безконечний, бо ніколи не зустрічає гіперболи.

§73. Поле еліпса.

Доведемо попередньо такі теореми: ряді точок на еліпсі та на її приналежному колі, що мають спільну відтинкову, відносяться між собою

ні мала до великої півосі (рис. 156), себто

$$\frac{y_1}{n} = \frac{b}{a} ?$$

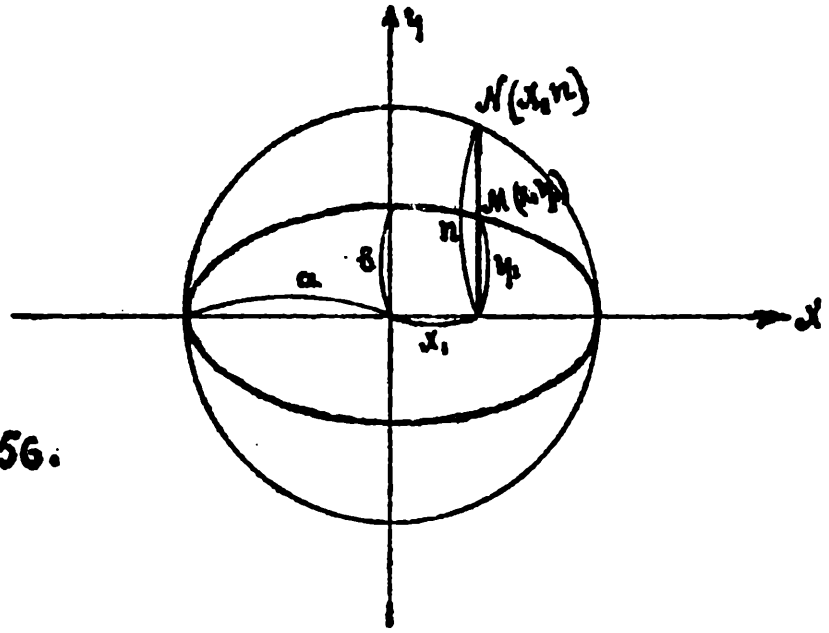


Рис. 156.

Рівняння еліпса: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Вставивши в це рівняння замість відповідної x_1 ми знайдемо ординату: $y_1 = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}$. Подібним чином з рівняння кола: $x^2 + y^2 = a^2$ знаходимо величину ординати $n = \pm\sqrt{a^2 - x_1^2}$. Взявши відношення знайдених величин y_1 та n, матимемо:

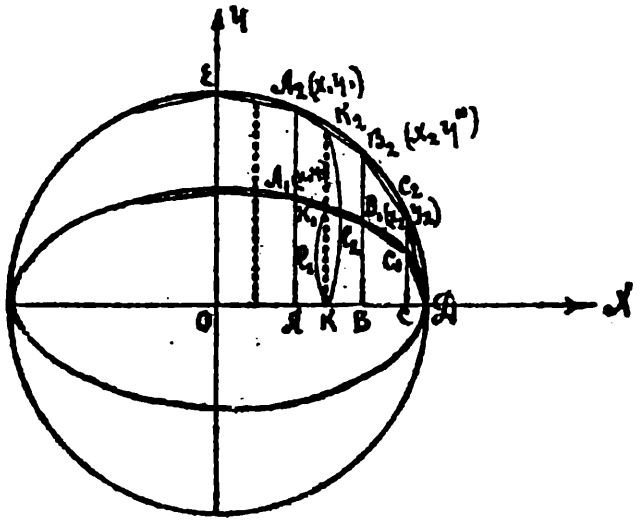
$$\frac{y_1}{n} = \frac{\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}}{\pm\sqrt{a^2 - x_1^2}} = \frac{b}{a}$$

що й треба було довести.

Тепер введемо в практику ще два правильних твердження:

ми і з вершин його спустимо прямі на вісь X-ів. Перехрещення цих прямих з обводом еліпса (A_1, B_1 і т.д.) сполучимо між собою хордами (рис.157). Тоді одержимо в кожній зверху кола й еліпси зокрема ряд трапецій і один прямокутний трикутник.

Рис. 157.



Кожному довільно взятому трапезу AA_2BB_2, утвореному цим способом у колі, завжди відповідатиме в еліпсі другий трапез AA_1, BB_1, що спирається боком на той же відтинок осі X-ів AB.

З геометрії відомо, що:

1) поле трапезу $AA_2.BB_2$ буде: $P = KK_2 \cdot AB$ (де KK_2 – середня цього тра-

пезу),

2) Поле трапезу AA_1B_1B, також буде: $S = KK_1 \cdot AB$ (де KK_1 є середня цього трапезу), тому відношення цих полів

$$\frac{S}{P} = \frac{KK_1 \cdot AB}{KK_2 \cdot AB} = \frac{KK_1}{KK_2} = \frac{l_1}{l_2} \quad (A)$$

Доведемо, що й відношення середніх $\frac{KK_1}{KK_2}$ також. рівне відношенню малої до великої підвісі.

Справді: $KK_1 = l_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2}$; $KK_2 = l_2 = \frac{AA_2 + BB_2}{2}$, тому $\frac{KK_1}{KK_2} = \frac{l_1}{l_2} =$

$= \frac{AA_1 + BB_1}{AA_2 + BB_2} = \frac{y_1 + y_2}{y' + y''}$, але на підставі попередньої теореми ми можемо написати пропорцію:

$$\frac{y_1}{y'} = \frac{y_2}{y''} = \frac{b}{a}, \text{ і з неї одержимо}$$

ми також похідну: $\frac{y_1 + y_2}{y' + y''} = \frac{y_1}{y'} = \frac{b}{a}$.

Таким чином $\frac{KK_1}{KK_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{b}{a}$, через те відношення полів трапезів (A) буде:

$$\frac{S}{P} = \frac{b}{a}$$

Таким же чином можна довести,

що й відношення полів прямокутників C_1CD і $\triangle C_2CD$ є також рівне: $\frac{s_n}{p_n} = \frac{b}{a}$ (бо ці трикутники мають спільну висоту CD, а основами CC_1 і CC_2, що є рядки многокутника й кола, які наближаються відповідно до 0.)

Припустимо далі, що правильний многокутник, який ми вписали у дане коло, має n боків. Тоді поле кожного з цього кола містить в собі $(n-1)$ трапецій (таких, як напр. AA_2BB_2) і один прямокутний трикутник (напр. C_2CD). Цим трапецям (і трикутникові) завжди відповідають $(n-1)$ трапецій (таких як напр. AA_1BB_1) і один трикутник (напр. CC_1D), що будуть вписані у відповідній частині кола.

Ми вже довели, що відношення полів довільно взятих, а тому й кожної пари, таких трапецій (і трикутників) є стале, а саме $\frac{s}{p} = \frac{b}{a}$, а тому ми можемо написати пропорцію:

$$\frac{S_1}{p_1} = \frac{S_2}{p_2} = \frac{S_3}{p_3} \cdot \ldots = \frac{S_n}{p_n} = \frac{b}{a}$$

Або (складаючи послідні пропорції):

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \ldots + S_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n} = \frac{b}{a};$$

інакше кажучи:

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} S}{\sum_{i=1}^{i=n} p} = \frac{b}{a}$$

Будемо подвоювати число боків многокутника до безмежности, тоді $\sum_{i=1}^{i=n} S$ і $\sum_{i=1}^{i=n} p$ будуть прямувати, дві до своєї межі, перша - до поля чвертини еліпси, а друга - до поля чвертини кола, тому:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{i=n} S}{\sum_{i=1}^{i=n} p} = \frac{b}{a}$$

або - поле чвертини еліпси відноситься до поля чвертини прикметного поля, як $\frac{b}{a}$, звідси можна твердити, що: Поле еліпси відноситься до прикметного круга, як мала вісь еліпси до великої.

$$\frac{S_e}{S_н} = \frac{2b}{2a} \quad \ldots\ldots (129)$$

З елементарної геометрії нам відомо, що поле кола (круг): $S_н = \pi r^2 = \pi a^2$, тому $\frac{S_e}{\pi a^2} = \frac{b}{a}$, а звідси

$$S_e = \pi a b \quad \ldots (130)$$

Цим способом можна обчислити й поле якої завгодно частини поля еліпса.

Щож торкається до поля відрізку гіперболи, то на жаль ми його не в силі обчислити за допомогою лише елементарної математики.

Асімптоти гіперболи

§ 74. Рівняння асімптот гіперболи

При розгляді взаємного положення простої й гіперболи, ми визначили, що асімптотами гіперболи звуться ті прості, що проходять через центр її (початок осей) і дотикаються до неї на безконечности й мають цього-

вий змінний $m = \pm \frac{b}{a}$.

Узагальнюючи всі ці приклади асимптот, дуже легко скласти їх рівняння, а саме:

1) Асимптоти проходять через початок вісей, а тому їх рівняння має загальний вигляд: $y = mx$.

2) Кутовий змінний асимптоб є: $m = \pm \frac{b}{a}$, а тому, (вставляючи ці величини) ми одержимо такі рівняння асимптот гіперболи з вісями $2a$ і $2b$:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

або

$$ay \mp bx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

§ 25. Креслення асимптоб гіперболи.

Щоб накреслити асимптоби гіперболи, досить провести носії прямокутника, збудованого на вісях гіперболи, як на середницях. Доведемо це: вершини цього прямокутника належатимуть до то-

ком асимптот, бо значення їх (абсолютною величиною) є рівні півосі a та через те задовольняють спільне відповідне рівняння (легко переконатися звичайного підставлення).

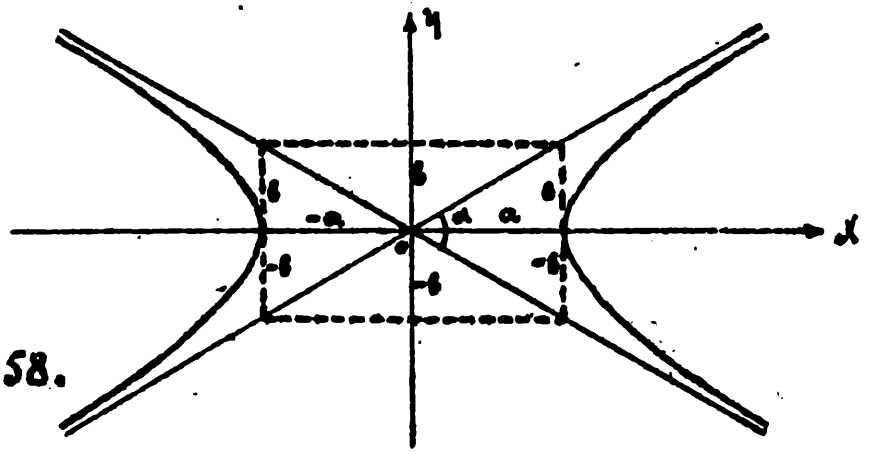


Рис. 158.

§76. Асимптотичне рівняння гіперболи.

(рівняння гіперболи відносно її асимптот як координатних осей).

Надзвичайно просту форму має рівняння гіперболи, відносно її асимптот (себто, коли за осі координат прийнято самі асимптоти). До цього часу ми у своєму елементарному курсі уникали користуватись системою визначних (координатних) осей не прямовоположених

(тобто, що мають між собою кут $\neq 90°$). Але з огляду на простоту і зручність рівнань гіперболи відносно її асимптот, ми в цьому разі зробимо відступлення і скористуємося косокутною системою координат, яку утворюють із себе асимптоти гіперболи.

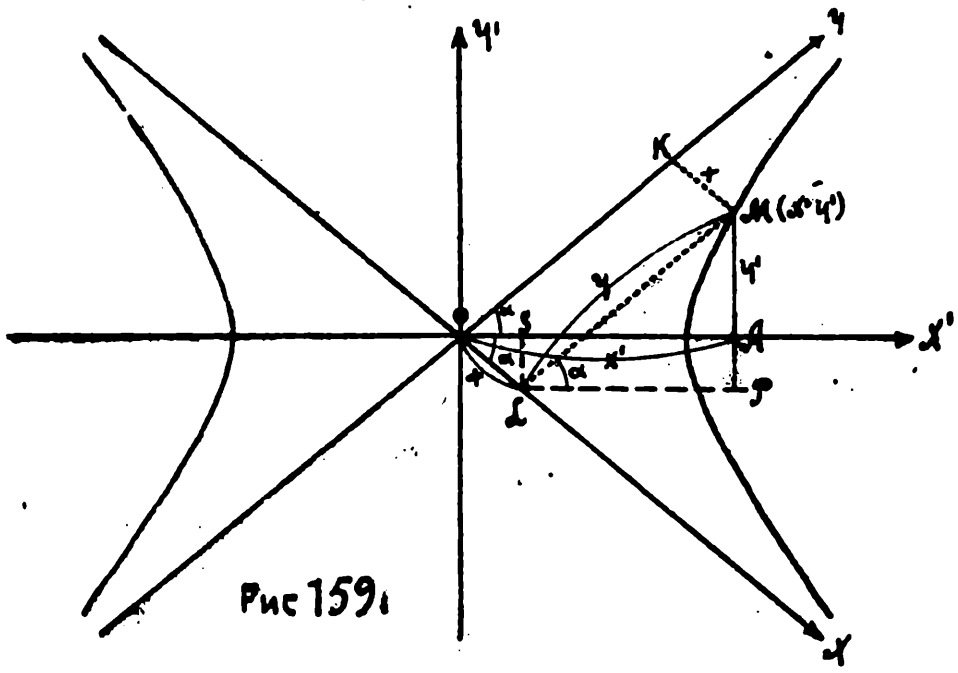


Рис 159.

На рис. 154 означимо: 1) старі прямокутні координати через $x'y'$, 2) нові, що утворюють асимптоти, через xy і 3) кут, який заключають асимптоти з віссю x-ів - через α. Коли ми візьмемо яку довільну точку M на гіперболі зі знаними x', y' знайдемо старих відносно старих осей, (рис. 159) і проведемо через точку

М прості рівнобіжні асимптоти, то одержимо значення λ, у цієї точки М згадано нових осей. Тепер у нас виникає дати, щоб скласти взори переходу від одної системи координат до другої, а саме: провівши через точку λ просту, рівнобіжну OX', і означивши через P точку перехрестя цієї простої з продовженням радіуса ΔM, ми одержимо $\Delta\lambda MP$, з якого маємо:

$MP = M\lambda \sin\alpha$, або $y' + AP = y\sin\alpha$, але AP обчислюємо з $\Delta O S\lambda$: $AP = \lambda S = O\lambda \sin\alpha = x\sin\alpha$, тому: $y' + x\sin\alpha = y\sin\alpha$, а звідси

$$\underline{y' = y\sin\alpha - x\sin\alpha} \quad \ldots (1)$$

так само $x' = OA = OS + \lambda P$; OS (з $\Delta OS\lambda$) $= x\cos\alpha$, а λP (з $\Delta\lambda MP$) $= y\cos\alpha$, тому

$$\underline{x' = y\cos\alpha + x\cos\alpha} \quad \ldots (2)$$

Тепер подивимося, який вигляд матиме рівняння гіперболи (взяте згадано старих осей): $b^2x'^2 - a^2y'^2 = a^2b^2$, коли перетворимо його згадано нових координатних осей? Для цього вставимо в рівняння вартості x' та

У обчислені взорами переходять (1) і (2)

$$b^2(y\cos\alpha + x\cos\alpha)^2 - a^2(y\sin\alpha - x\sin\alpha) = a^2b^2$$

або $b^2y^2\cos^2\alpha + b^2x^2\cos^2\alpha + 2b^2xy\cos^2\alpha - a^2y^2\sin^2\alpha - a^2x^2\sin^2\alpha + 2a^2xy\sin^2\alpha = a^2b^2$

Звідси: $x^2(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha) + y^2(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha) + 2xy(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) = a^2b^2$ . . . . . (A)

Обчислимо тепер вартості множників у дужках.

Ми знаємо, що нутовий знімний асимптот заданої кіссей є: $m = \frac{b}{a}$, але $m = tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Тому $b\cos\alpha = a\sin\alpha$. Звідси:

1) $b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha = 0$. 2) $b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha = 2b^2\cos^2\alpha = 2a^2\sin^2\alpha$.

Вставляючи в наше рівняння (A) по черзі вартості 1) і 2), матимемо:

1) $x^2\cdot 0 + y^2\cdot 0 + 4xyb^2\cos^2\alpha = a^2b^2$. 2) $x^2\,0 + y\cdot 0 + 4xya^2\sin^2\alpha = a^2b^2$, що дає нам рівняння:

$$4xy\cos^2\alpha = a^2$$
$$4xy\sin^2\alpha = b^2.$$

Щоб виключити (цуте α), ці два рівняння складаємо й одержуємо:

$$4xy(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = a^2 + b^2$$

А звідси:

$$xy = \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{c^2}{4} = \text{Const} \quad . \quad . \quad (131)$$

Це й є рівняння гіперболи, віднесене до асимптот її, як визначених вісей.

Визначення. Дві гіперболи, що мають спільні асимптоти, але положені в різних кутах між ними, звуться зопряженими (рис. 160).

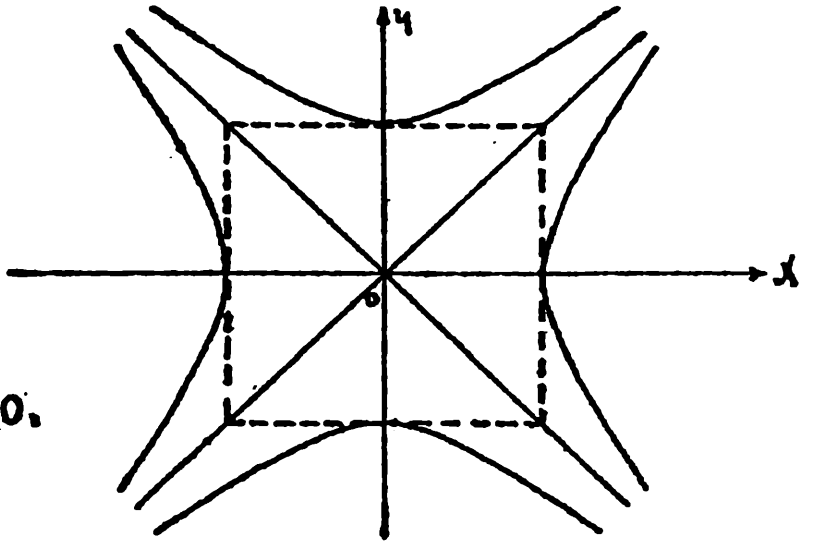


Рис. 160.

Коли ми напишемо асимптотичне рівняння даної гіперболи так:

$$xy = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

то рівняння зопряженої з нею гіперболи буде:

$$xy = -k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

так само зопряжені гіперболи в прямокутних координатах

визначаються рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

§77. Рівнобічна гіпербола.

Рівнобічною гіперболою буде: мо звати таку, що має обид: ві свої вісі однаковими. Рівняння її легко одержати, коли вважати $a=b$, тоді:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = \pm 1$$

Звідси рівняння зрушених рівнобічних гіпербол буде:

$$x^2 - y^2 = \pm a^2 \quad \ldots \quad (134)$$

Коли зрушені рівнобічні гіперболи віднесені до асимптот, то їх рівняння буде:

$$xy = \pm \frac{a^2 + a^2}{4} = \pm \frac{a^2}{2} \quad \ldots \quad (135)$$

Асимптоти рівнобічних гіпербол є взаємно прямові.

Справді; кутовий змінник асимптоти є $m = \pm \frac{b}{a}$, тому для рівнобічної гіперболи $b=a$, то кутовий змінник її асимптоти буде $m = \pm 1$, а це, як під:

стані кутові напрямності двох простих. показує, що рівняння асимптот: $y=x$; $y=-x$, є рівняння простих, прямолінійних одна-одній

Задачі.

Ч.285. Обчислити відстані підфокальної, підпрямової, фокальної та прямової, повернутих до:
1) еліпси: $4x^2+25y^2=100$ в точці $(4,1,2)$
2) гіперболи: $4x^2-9y^2=1$ в точці $(9,y>0)$
3) еліпси: $16x^2+25y^2=400$ в точці $(4,y>0)$

Ч.286. Написати рівняння і довжину поперечника, зрушеного: 1) з вершини еліпси $16x^2+25y^2=400$, коли цей вершина має кутовий зміщення $m=\frac{5}{4}$; 2) з вершини гіперболи $5x^2+9y^2=180$ з кутовим зміщенням $m=-\frac{1}{3}$; 3) з вершини $5x-8y+25=0$ еліпси: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$;
4) з вершини $y=2x+1$ кривої $4x^2+9y^2=36$; 5) з вершини $y=\frac{15}{8}x-\frac{11}{2}$ кривої $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

Ч.287. Написати рівняння вершин: 1) еліпси $x^2+4y^2=36$, яка

перетворюється в точці (4,2); 2) гіперболи: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, що перетворюється точкою (3,2).

№.288. Користуючись властивістю зарухомих перетинів, написати рівняння дотичної до кривої:

1) $3x^2+4y^2=300$, яка є рівнобіжна до прямої: $y=\frac{3}{2}x-20$

2) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{81}=1$ " " " $45x+4y=180$

№.289. Обчислити поле еліпси: 1) Коли відомо: $a=8$; $\varepsilon=\frac{3}{4}$; 2) Коли відомо: $b=3$; $e=4$; 3) рівняння еліпси $4x^2+9y^2=36$; 4) рівняння еліпси: $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$.

№.290. Написати рівняння еліпси, що має: $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$. $S=6\pi$.

№.291. Обчислити поле відрізків, обмежених другою: 1) еліпси $9x^2+16y^2=144$ і її параметром; 2) еліпси: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ і простого $x=4$.

№.292. Написати рівняння асимптот, обчислити кут між ними і поле трикутника, обмеженого асимптотами і дотичною в точці (10, 4) до гіперболи

$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

№293. Написати рівняння дотичних (і обчислити їх довжини) до гіперболи $x^2 - y^2 = 1$ 1) в точці $(\frac{3}{2}; \frac{3}{4})$; 2) що має кутовий коефіцієнт $m = 2$.

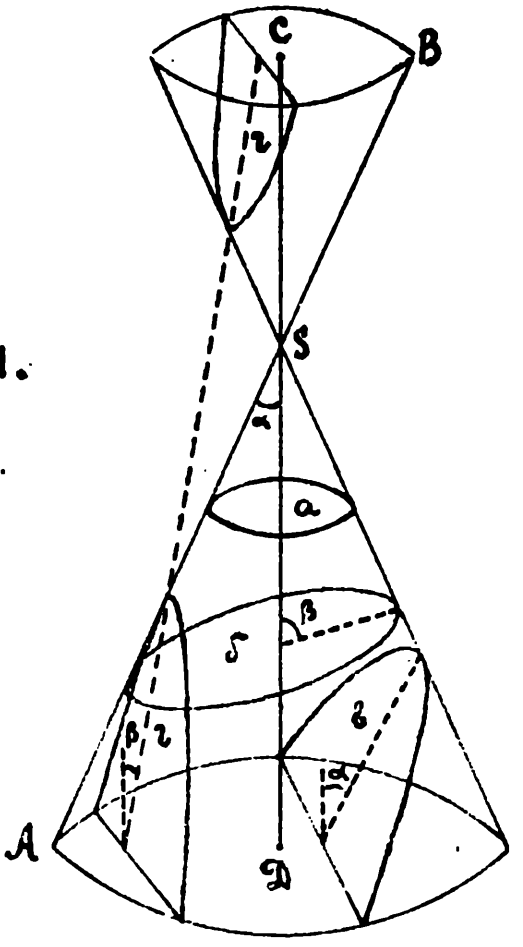
№294. Написати рівняння асимптот гіперболи і самої гіперболи зазначивши асимптоти, коли 1) $e = 10$; $a = 5$; 2) $e = 10$, $b = 4$.

§78. Спільні перерізи і аналіза загального рівняння другого степеня.

З геометрії нам відомо, що коли взяти вісь CD і пряму AB, що перехрещуватиме дану вісь під якимсь кутом α, то при обертанню простої очертяться спільні поверхні, що матимуть спільний вершок у перехрестю твірної простої з віссю. Розглянемо всі можливі перерізи спільної поверхні площиною.

курсі не ставимо собі в обов'язок доводити правдивість своїх тверджень, а лише беремося познайомити з характером цих перерізів.

Рис.161.



Отже, коли 1) переріз стіжка прямовий до вісі, то він є коло (рис.161, переріз a). Величина кола залежить від віддалення перерізу од вершка S стіжка. R кола, починаючи від нуля (переріз проходить через вершок) зростає до безмежности.

2) Кожний похилий переріз circ-
ка, до якого вісь стіжка похи-
лена під кутом більшим
творчого кута $\alpha - (\beta > \alpha)$, є <u>еліп-
са</u>. Вісі еліпси також зростa-
ють від нуля до ∞ (рис. 161, пе-
реріз б). Коло є лише частковий
випадок еліпси, коли нахил
вісі стіжка до перерізу є 90°.

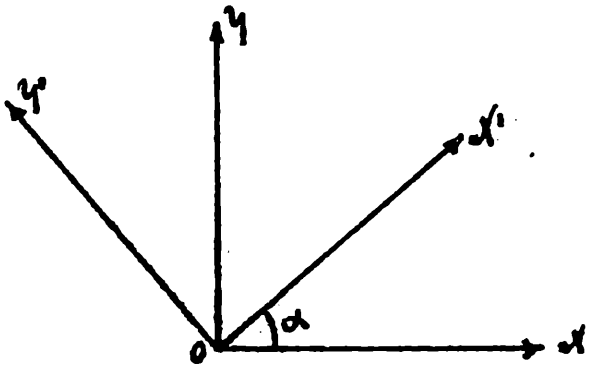
3) Кожний переріз стіжка,
рівнобіжний до його творчої,
є <u>парабола</u> (рис. 161, переріз в)
Цей переріз переходить у
пряму, коли площа перерізу
прилягає до творчої (дотикаєть-
ся поверхні стіжка).

4) Кожний похилий переріз
стіжка, до якого вісь стіжка
нахилена під кутом $\beta < \alpha$ - є
<u>гіперболою</u>. Коли цей переріз
проходить через вершок S, то
перетворюється у дві прості,
перехресні у точці S.

Звідси ми бачимо, що всі роз-
глянені нами геометричні
образи (не виключаючи навіть
точки й простої) є відповідними
перерізами стіжка.

При аналітичному розгляді всіх цих геометричних образів, ми переконались, що вони визначаються або рівнянням першого ступіня (пряма), або рівнянням другого ступіня (еліпса з колом, парабола й гіпербола) При цьому ми спостерегли, що всі рівнання другого ступіня, які висловлюють розглянені нами геометричні образи (стійкові перерізи), ніколи не мають члена, що містить у собі здобуток змінних (xy). Таким чином може повстати два припущення: або 1) рівнання другого ступіня з двома змінними в загальному своєму вигляді ніколи не визначає якогось геометричного образу, або 2) таке загальне рівнання не визначає жадного геометричного образу лише тому, що нами невідповідно бралося положення системи координат, себто можна довести, що завжди можна вибрати таке положення координатних вісей, що загальне алгебричне рів-

нами одного стрижня визначатиме при тих або інших умовах деякий небудь з даних стійкових перерізів.



Припустимо, що ми при повороті координатних вісей на деякий кут α, досягли того, що загальне алгебричне рівняння прийняло форму, яка визначає один з стійкових перерізів (себто загальне алгебричне рівняння при цьому повороті малоб сомножника при здобутковій XY рівного нулю). В цьому разі питання наше було розв'язане. Лишається нам переконатися, чи існує такий кут α?

Для цього припустимо, що при даному положенню системи визначних вісей (XY), якась крива визначається самим загальним алгебричним рівнянням: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ . . . . (1)

Повернемо вісі координат навколо свого початку на якийсь кут α. Тоді, як ми вже довели, взори перетворення будуть:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \quad \ldots (2)$$

Вставляючи вартості x і y з рівнань (2) у рівнання (1), одержимо: $A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + B(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + C(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0$.

Після зведення членів і винесення за дужки маємо:
$x'^2(A\sin^2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha + B\sin^2\alpha) + x'y'(-A\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha) + y'^2(A\sin^2\alpha - C\sin\alpha\cos\alpha + B\cos^2\alpha) + x'(D\cos\alpha + E\sin\alpha) + y'(-D\sin\alpha + E\cos\alpha) + F = 0$; звідси ми бачимо, що від члена, який містить в собі добуток невідомих $x'y'$, можемо позбавитися лише тоді, коли підберемо $\angle\alpha$ так, щоб сполучник $-A\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha = 0$, тому для визначення потрібної вартості кута α треба розв'язати тригонометричне рівнання: $-A\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha = 0$, або $C\cos 2\alpha - (A-B)\sin 2\alpha = 0$; звідси $C\cos 2\alpha = (A-B)\sin 2\alpha$, або $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{C}{A-B}$.

Проаналізуємо дріб $\frac{C}{A-B}$; Коли $C \neq 0$, а $A = B$, то $tg\,2\alpha = \infty$, кут $2\alpha = 90°$, $\alpha = 45°$, коли $C = 0$, то само алгебричне рівняння (вже рівняння) стикового переріза без перетворення. (і дійсно: $tg\,2\alpha = \frac{0}{A-B} = 0$, $\alpha = 0$). Коли $C = 0$ і $A = B$, тоді $tg\,2\alpha = \frac{0}{0}$ - неозначеність. Це є правдиво, бо при $C = 0$ і $A = B$ - алгебричне рівняння вже до перетворення є рівнянням кола. Рівняння кола не міняє своєї форми при всякому повороті визначних вісей на який бажано кут. Нарешті в загальному випадкові, коли $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$; $A \neq B$, ми завжди знайдемо відповідний кут $\angle\alpha$, бо $tg\,\alpha$ може приймати які бажано вартости, від $-\infty$ до $+\infty$. Таким чином ми довели, що кожне алгебричне рівняння 2-го ступіня від двох змінних завжди визначає який небудь з стикових перерізів і може бути переведене до тої звичної форми алгебричних рівнянь стикових перерізів звичайними

обертанням на відповідний кут визначених вісей навколо їх початку.

Висновком з цього є, що загальне алгебричне рівняння другого ступіня виглядає:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

завжди можна привести до вигляду:

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \ldots (P)$$

А це рівняння, як ми доводили при проходженню курса, завжди визначає який-будь спіяновий переріз, а саме:

I) Коли $A \neq B \neq 0$, і знаки у A і B є однакові, то це алгебричне рівняння визначає еліпсу

В окремому випадку, коли $A = B \neq 0$, рівнянням кола

II) Коли $A \neq B \neq 0$ і знаки в A і B є різні, то це алгебричне рівняння визначає гіперболу

В окремому випадку, коли $A = B \neq 0$, є рівнянням рівнобічної гіперболи.

III). Коли $A = 0$, $B \neq 0$, або $A \neq 0$, $B = 0$, то це алгебричне рівняння

буде рівнянням параболи.

Розглянемо ще деякі можливі випадки змін алгебричного рівняння від перетворення системи координатних осей.

I. Коли при перетворенню до нових координат в алгебричному рівнянню (P) сочинники $D=E=F=0$, то рівняння $Ax^2+By^2=0$ визначає або точку (бо вісі $a=b=0$), або нічого не уявляє, коли дає уявні вартости x та y.

II. Коли при перетворенню до нових координат рівняння обертається в $Ax^2-By^2=0$, то воно визначає пару перехрестя двох простих:

$$(x\sqrt{A}+y\sqrt{B})(x\sqrt{A}-y\sqrt{B})=0;\quad y=-\sqrt{\frac{A}{B}}x;\quad y=+\sqrt{\frac{A}{B}}x$$

III. Коли при перетворенню до нових координат в алгебричному рівнянню (P) одночасно $A=D=0$, або $B=E=0$, то одержані рівняння 1) $By^2+Ey+F=0$, 2) $Ax^2+Dx+F=0$ визначають або рівнобіжні прості, або одну просту, бо ці квадратові рівняння є здобутком лінійних чинників, а саме, коли будемо вважати α, β, γ і δ дорівнюючи даний р-нь:

1) $B(y-\alpha)(y-\beta)=0$, 2) $A(x-\gamma)(x-\delta)=0$
А звідси маємо: 1) $y=\alpha$; $y=\beta$; 2) $x=\gamma$; $x=\delta$. Це є або 1) дві прості рівності, коли $\alpha\neq\beta$; $\gamma\neq\delta$, або 2) одна пряма, коли 1) $\alpha=\beta$, 2) $\gamma=\delta$, або, нарешті, 3) жадної геометричної величини, коли 1) α,β, 2) γ і β є уявні величини:

IV. Нарешті, коли після перетворення до нових координат алгебричне рівняння обертається в: $Cxy+F=0$,
то це, як ми вже раніше доводили, є рівняння гіперболи зв'язаної асимптотами, прийнятими за координатні вісі.

§ 79. Вираз (дискримінант) рівняння другого ступня.

Аналізом алгебричного рівняння 2го ступня ми переконалися, що повне рівняння другого ступня з двома змінними завжди визначає який небудь з сімох геометричних перерізів (крім випадків, коли це рівняння має уявні розв'язки). Цілком зрозуміло, що виникає питання: чи не мож-

на відрізку без перетворення до нових осей дізнаються, який самеперерізів стіжка визначає дане алгебричне рівняння в своїй загальній формі:

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0.$$

Для цього зробимо деякі висновки з попередніх аналіз взаємного положення простої і кривої другого ступіня, а саме:

1) <u>Еліпса</u> завжди перехрещується з простою на обмеженому віддаленню (не існує точок перехрестя на безмежності)

2) <u>Парабола</u> може перехрещуватися на безмежності лише з однією простою, (поперечною) що проходить через дану точку площі (рівнобіжно осі параболи)

і 3) <u>Гіпербола</u> може перехрещуватися на безмежності разом з двома простими, що проходять через дану точку площі (центр гіперболи). Ці прості, як ми знаємо, звуться асимптотами.

Ознайомлюємося з цих приміток кривих для нашої мети.

Візьмемо якусь криву, що визначається рівнянням:

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$ і

прямі $y=mx$, що проходять через початок вісей і знайдемо точки їх перехрестя (для чого ми мусимо розв'язати дані рівняння як систему). Вставивши з другого рівняння в перше вартість y, одержимо:

$$(A+Cm+Bm^2)x^2+(D+Em)x+F=0$$

звідки

$$x=\frac{-(D+Em)\pm\sqrt{(D+Em)^2-4F(A+Cm+Bm^2)}}{2(A+Cm+Bm^2)}$$

Щоб дана пряма мала перехрестя з кривою на безмежності (хоч в одній точці) мусить неодмінно у вартості x знаменатель рівнятися 0, себто

$$A+Cm+Bm^2=0.$$

Звідси ми визначаємо кутовий зайнятий прямої m

$$m=\frac{-C\pm\sqrt{C^2-4AB}}{2B}$$

Розглянемо вираз під рівнанням:

$$D=C^2-4AB$$

Коли: 1) $C^2-4AB<0$ - то вартості зайнятого m є уявні, себто прямі, що перехрещуються з

кривою на безмежності не має. Тому, згідно з висновком 1) ця крива є <u>елінсою</u>.

II) $C^2-4AB>0$ - тоді кутовий змінник має 2 вартости $\left[m=\frac{-C\sqrt{D}}{2B}\right]$. Тому існує дві простих, які проходять через початок вісей і перехрещуються з кривою на безмежности. Згідно з висновком 3) ця крива є <u>гіперболою</u>.

III.) $C^2-4AB=0$ - тоді кутовий змінник має лише одну вартість $\left[m=\frac{-C}{2B}\right]$, тому існує лише одна проста, яка проходить через початок вісей і перехрещується з кривою на безмежности. Згідно з висновком 2) ця крива є <u>параболою.</u> (а проста вісею II)

Таким чином

<u>Різниця між квадратом середнього при здобутковій невідомих і четвертим здобутком середників при квадратах невідомих (C^2-4AB) зветься виразником рівняння другого степеня, бо він означує безпосередньо вид кривої, яку визначає да-</u>

не алгебричне рівняння.

А саме кривою буде:

I) Елінса, коли $C^2-4AB<0$

II) Гіпербола, коли $C^2-4AB>0$

III) Парабола, коли $C^2-4AB=0$ } (136)

§80. Задачі до розділу III

Криві другого ступеня

№ 295. Написати рівняння параболи: 1) що має вісь || вісі x-ів і проходить через точки: $A(0,3)$, $B(1,-1)$, $C(4,6)$, або через точки: $M(7,3)$ $N(3,2)$ і $P(1,1)$;

2) що має вісь || вісі y-ів і проходить через точки: $A(1,6\frac{2}{3})$, $B(-1,17\frac{1}{2})$ і $C(-1,10)$; [1) $19y^2-84x-59y+6=0$; $(y-\frac{3}{2})^2=(x-\frac{3}{4})$; 2) $(x-5)^2=6(y-4)$]

№ 296. Написати рівняння спільної дотичної до парабол: $y^2=6x$ і $x^2=48y$? [$x+2y+6=0$]

№ 297. Через точки перетину прямої $x+y=3$ з параболою $y^2=4x$, провести дотичні та обчислити поле трикутника, що утворюють ці дотичні з даною прямою? $S=32$ кв. од.

№ 298. Знайти точки перетя-

ння парабол: $y^2 = 2x$ з колами:
а) $x^2 + y^2 = 80$; б) $(x-10)^2 + y^2 = 100$
[$M_1(8,4)$, $M_2(8,-4)$ 2) $N_1(00)$; $N_2(18,6)$ $N_3(18,-6)$]

№ 299. Перехрестя прямої $y = x+1$ з параболою $y^2 = 6x$, спонучені з вогнищем. Обчислити поле трикутника, заміненого цими прямими. [$S = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ кв. од].

№ 300. Вершок параболи лежить у центрі кола, а вогнище її на обводі кола: $x^2 + y^2 = 81$. Якщо $y =$ у кола обіймає парабола?
[Точки перехрестя $x_1 = 9(\sqrt{5}-2)$, $y_1 = \pm 18\sqrt{\sqrt{5}-2}$, центральний кут $2\alpha = 152°41'30"$].

№ 301. В точці, якої рядна $= \frac{p}{2}$ параболи $y^2 = 12x$ поведено дотичну й прямову. Обчислити відстані цих дотичної й прямової, а також піддотичну й підпрямову їх. [$t = n = 6\sqrt{2}$; $Sn = St = 6$]

№ 302. Правильний трикутник вписано в параболу так, що один з його вершків співпадається на вершок параболи
2) тот, правильний Δ-к співпадає

ся своїми вершками на вісі= нищі і дуги параболи. Обчи= слити боки цих Δ-ів. [$a=12(2+\sqrt{3})$, $b=12(2-\sqrt{3})$.

Ч. 303. Написати рівняння траєкторії, що очерчує ті= ло, кинуте рівнобіжно до по= верхні з початковою швидкістю $V_0 = 200$ м/сек (за прискорення тя= жіння g прийняти наближену величину 1000 см. у секунду). [$y^2 = -\frac{x^2}{8000}$]

Ч. 304. Довести, що дотичні, по= ведені до параболи з якої небудь точки директриси є взаємно прямові і навпаки- довести, що директриса параболи є геометричне місце перехре= стя взаємно прямовиїх дотич= них, поведених до параболи.

Ч. 305. під яким кутом зору вид= но параболу $y^2 = 6x$ з точки $M(2,4)$? [150°15'20"]

Ч. 306. Написати рівняння дотичних до параболи: $9y^2 - 4x = 0$, рівнобіжної та прямової до простої $y = 5x + 40$ [$y = 5x + \frac{1}{45}$]

Ч.307. Обчислити відрізки 1) параболи $y^2=20x$ відтяті січною: $3y=5x+5$; 2) параболи $y^2=24$ відтяті січною: $2y-2x=9$; 3) параболи $y^2=8x$ відтяті січною $2y=x$? [1) $\frac{64}{15}$ кв.од. 2) 12 кв.од. 3) 85,3 кв.од.].

Ч.308. Яке відділення від вершина параболи: $y^2=10x$, зрушеної з віссю параболи тятиви, коли вона утворює відрізок рівний 40 кв.од. [$d=\sqrt{90}$]

Ч.309. Обчислити поле площі, замкненої дугами кола: $x^2+y^2-2x=8$, та параболи: $y^2=2x$? [$S=\frac{x_1y_1}{3}+\frac{\pi a}{40^\circ}=8,535$ кв.од.]

Ч.310. Знайти перехрестя кривих з простою: 1) $\frac{x^2}{25}+y^2=1$; $3x=5(4x+5)$; 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; $y=2x-10$; 3) $x^2-4y^2=4$; $y=2(x-1)$; 4) $4x^2+9y^2-24x-18y+9=0$ і $3y-2x=3$; 5) $9x^2-4y^2-18x-16y+29=0$.

Ч.311. Написати рівняння дотичних до еліпси $3x^2+5y^2=75$ рівнобіжних 1) до прямої $x-5y=10$; 2) до прямої $2y+x=0$. Тепер написати рівняння дотич-

ної в точці $(x>0, 12)$ до гіперболи $25x^2-36y^2=900$. [1) $\pm(x-5y)=20$, 2) $y=-\frac{1}{2}x+5$; $y=-\frac{x}{2}-7$; $65x-72y=150$]

ч. 312. Провести через точку $(-3,2; 1,8)$ дотичну й прямову до еліпси: $9x^2+16y^2=144$ і обчислити відрізки їх, а також піддотичну й піднрямову. [$t=n=\frac{9}{5}\sqrt{2}$; $st=5n\ 1,8$]

ч. 313. У яких точках гіперболи $9x^2-7y^2=63$, проведені через них променеві вектори є взаємно прямі. [$x=\pm\frac{5}{4}\sqrt{7}$; $y=\pm\frac{9}{4}$]

ч. 314. Написати рівняння дотичних до гіперболи: $4x^2-9y^2=-900$ 1) рівнобіжної 2) прямовісної до прямої $6x+5y=6$.

ч. 315. Через пункти перетину кола: $x^2+y^2=16$ і еліпси $9x^2+25y^2=225$, провести дотичні і обчислити кут, замкнений ними [$\alpha=61°55'38''$]

ч. 316. Написати рівняння дотичних до гіперболи $4x^2-9y^2=36$ прямових до прямої $9x+10y=0$. Тепер написати рівняння прямової до гіперболи $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{100}=1$ рівнобіжну до прямої:

$x = 1 - \frac{5}{6}y$. [1) $9y = 10x \pm 24$; 2) $(18x + 15y = \pm$
± 650]

Ч. 317. Довести, що еліпса: $9x^2 +$
$+ 25y^2 = 225$ і гіпербола: $3x^2 - y^2 = 12$
перехрещуються під прямим
кутом.

Ч. 318. Написати рівняння
гіперболи, що має головну вісь
$2a = 6$, а кут між асимпто-
тами $2\alpha = 60°$? [$x^2 - 3y^2 = 9$]

Ч. 319. Обчислити кут між
асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{9} -$
$- \frac{y^2}{4} = 1$. [$2\alpha = 67° 22' 42''$]

Ч. 320. Обчислити відстань
вогнища гіперболи від асимп-
тот? [$d = b$]

Ч. 321. Ексцентриситет лінійної
гіперболи = 12, а числовий
= 3. Обчислити кут між асимп-
тотами [$2\alpha = 141° 3' 26''$]

Ч. 322. Найти точки пере-
хрестя кола: $x^2 + y^2 - 10x = 0$ з
асимптотами гіперболи:
$16x^2 - 9y^2 = 144$? [$x_1 = y_1 = 0$; $x_{2,3} = 3{,}6$; $y = \pm 4{,}8$]

Ч. 323. Для яких точок гіпер-
боли: $x^2 - 16y^2 = 16$ які - вектори
утворюють прямокутник з

почем 52 кв. од. $[x_{1,2} = \pm 8, y_{1,2} = \pm\sqrt{3}]$

ч. 324. Знайти геометричний осередок центрів кол, що проходять через дану точку A і дотикаються даного кола з радіусом r.

Розв'язок. Початок вісей беремо в центрі даного кола, а за вісь x-ів — пряму, що сполучає центр з даною точкою A. Припустимо, що точка задана віддаленням d від центру даного кола. Тоді значення точки A будуть: $A(d, 0)$. Означимо значення центру рухомого кола через $O_0(x, y)$, а радіус його через ρ

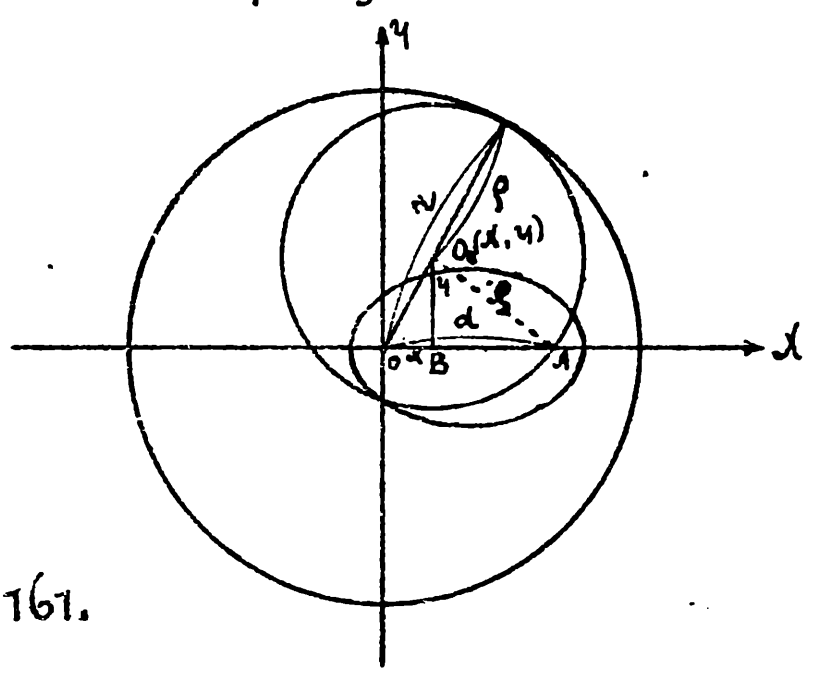


Рис. 161.

1° випадок: $d < r$, тоді з ΔOO_0B ма-

ємо: $OO_1^2 = BO_1^2 + OB^2$ або $(r-\rho)^2 = x^2 + y^2$, але з ΔBO_1A маємо $O_1A^2 = BO_1^2 + BA^2$ або $\rho^2 = (d-x)^2 + y^2$. Тому $r - \sqrt{(d-x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2+y^2}$, а звідси одержимо рівняння:

$$(r^2-d^2)x^2 + r^2y^2 - d(r^2-d^2)x - \left(\frac{r^2-d^2}{2}\right)^2 = 0$$

Це є рівняння еліпса. Знайти значення центру, півосей і значення вогнищ?

2-ий випадок, коли $d > r$. Розв'язується так само. Геометричний осередок є гіпербола

№ 325. Знайти геометричний осередок вершин трикутників, що мають сталий обвід $2p = 24$ і дану основу $a = 8$?

№ 326. Знайти геометричний осередок точок, віддалення яких від даної прямої і від даної точки є у відношенні а) 2:1, б) 1:2;

№ 327. У еліпсу $a^2x + b^2y = a^2b^2$ ввести квадрат і довести, що його бік є рівний висоті рівнобічника, що має вершини

у вершинах еліпса.

№ 328. Точки перехрестя еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ з прямою $2x+5y=10$ сполучити з центром еліпса і обчислити поле утвореного Δ-ка? [S=8 кв.од]

№ 329. Точки перехрестя прямої $2y=3$ з еліпсом $4x^2+9y^2=36$ сполучити з кінцями великої вісі й обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням одержаного трапезу навколо вісі x-ів $\left[V=\frac{9\pi(2+\sqrt{7})}{4}\right]$

№ 330. Поверхня рівнобічного стіжка є рівна поверхні еліпса, що має малу вісь $2b=12$, а ексцентриситет $e=2\sqrt{7}$. Обчислити луч основи стіжка? $\left[r=\sqrt{\frac{b\sqrt{b^2+e^2}}{3}}=4\right]$

№ 331. Еліптичний похилий конус має основу з вісями: $2a=34$, $2b=30$. Віддалення вершка конуса від центру основи $t=10$. Знайти об'єм стіжка, коли висота його падає у

вогнутце еліпси? [$V = 1602{,}21$ куб.од]

Т.332. Обчислити висоту h прямого стіжка, що має основою коло: $3x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$, а бічною поле еліпси: $9y^2 + 4x^2 = 36$? [$h = \frac{\sqrt{3291}}{15} \approx 3{,}2$].

Т.333: Поле еліпси $16x^2 + 25y^2 = 1600$ є рівне поверхні прямого стіжкового тіла, що має центри основ $R = 5$; $r = 4$. Знайти висоту стіжка?

$$h = \frac{2}{R+r}\sqrt{Rr(R-2r)(r-2R)} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$

Т.334. Еліптичний стоячий прямий конус має висоту $h = 10$, а вісі більшої основи: $2a = 12$ і $2b = 8$. Відношення великих вісей основ є рівне $m : n = 2 : 1$. Обчислити об'єм стоячого конуса? [$V = \frac{\pi abh}{3m^2}(m^2 + n^2 + mn) = 140\pi$.]

Від видавництва.

Після виходу з друку „Курсу тригонометрії" пр. Іваненка, дехто з читачів підійшов до цих записок лекцій з незалежного

критичного підходу, як до справжнього підручника. Тому, бажаючи застерегти себе надалі від хибного погляду на такого роду видання, ми мусимо подати до відому, що й це видання початків аналітичної геометрії також не є в широкому розумінні підручником, а лише записками лекцій, що читав пр. Е. Іваненко на матур. курсах. Тому ці записки не мають властивої їм специфічної прикмети, а саме - повинну елементарність і доказовість (навіть, другорядних, часто алгебричних операцій). Цих двох властивостей іноді приходилося досягати з утратою наукової строгости викладу. Але цього вимагав сам склад аудиторії, який мусів тритижневий (а для кого-небудь семитижневий) курс реальної школи засвоїти за рік і при тому при дуже й дуже слабій підготовці (одні з слухачів були узяті ще під революційного часу, а другі опустили школу ще

з початку революції й на протязі кількох років перейшли всі стадії революційної боротьби, а тому розгубили навіть і те, що засвоїли були за час перебування у школі). Отож при складанню цих записок було поставлено метою всі питання, що вимагаються програмою вищих реальних, викласти найприступнішим і найлегшим абстрагентним способом, зрозумілим для вищезазначеного складу аудиторії.
До курсу приложена найтотожніше більша кількість задач для вправ.
Література: 1) Проф. Dr. K. Zahradník: Analytická geometrie. 2) Проф. Dr. F. Studnička: Úvod do analytické geometrie. 3) Проф. Dr. M. Simon: Analytische Geometrie 4) Проф. Бєлюстін: Аналитическая геометрія. 5) Проф. Ермаков: Аналитическая геометрія. 6) Проф. Граве: лекціи по аналитической геометріи (литогр. курс).

7) Dr J. Vojtěch: Analytická geometrie 8) Dr F. Močník: Analytická geometrie 9) Prof. G. Salmon (nim. překlad): Analytische geometrie 3 elementárních kursů: 10) Prof. O. Lobeck: Аналитическая геометрія (pod. překlad). 11) M. Trnčák: Učebnik geometrii. 12) Dr E. Savinský - Geometrija.

Zadání vybrání hlavním nám jsou 1) Zadavníka J. Krause: (Zbiór zadań matematycznych) 2) z Geometrii E. Savinského. 3) D-ra Vojtěcha a m. j. Bratrství nám skládacího duše nebeský nikoliv zadání.

Зміст

§§		Сторінка.
	Вступні розуміння.	
1	Вимір відрізків на площині	3
2	Вимір відрізків на площині	5
3	Положення відтинку на площині	8
4.	Кут між простими	21
5	Поле трикутника й многокутника . .	23
	Розділ I. Проста лінія.	
6	Рівняння простої	28.
7	Основні задачі на просту	47
	Алгебричне рівняння простої	62
8	Визначення положення простої на площині .	67
9	Відтинкове рівняння простої	75
10	Прямове (нормальне) рівняння простої . .	78
11	Перетворення одної форми рівняння простої у иншу	83
12	Точка перехрещення двох простих . . .	95

13	Відстань точки від прямої	106
14	Пет точки на пряму	118
15	Жмутки прямих .	119
16	Умова перехрещення трьох прямих в одній точці	132
17	Деякі способи складання рівнянь прямих, як геометричних осередків .	138
18	Задачі до 1го розділу .	143
19	Перетворення визначних вісей	157
20	Розділ 2ий. Коло. Основне рівняння кола	168
21	Центральне рівняння кола	172
	Алгебрична форма рівняння кола	182
22	Взаємне положення кола і прямої	195
23	Дотична до кола . .	204
24	Прямова до кола . .	210
25	Визначення рівняння дотичної, поведеної до кола з точки поза ним	213
26	Вітузка	223
27	Кут січної з колом	227
28	Піддотична й піднормаль	228

29	Положення точки щодо кола	230
30	Взаємне положення кол	241
	Степінь точки щодо кол	246
31	Жмуток кол	247
	Задачі до розділу II. §. 163-225	253
32	Деякі зауваження до розді-	
	лу II^{го}	273
	Розділ III. Криві 2го ступня	
33	Парабола (вершкове її рівн.)	276
34	Геометричне визначення	
	точок параболи і її креслення	281
35	Інші форми рівняння	
	параболи	293
36	Алгебричне рівняння па-	
	раболи	304
37	Взаємне положення пря-	
	мої й параболи . . .	316
38	Зарисні поперечники	
	параболи	327
39	Поле відрізку параболи	336
40	Дотична до параболи	
41	Властивости дотичної	
	до параболи	353
42	Приклади параболи	355
43	Відтинок дотичної, при-	
	мової, піддотичної й під-	
	приямової до параболи .	357

44	Креслення дотичної та прямової параболи . . .	358
45	Дотична, поведена з точки поза параболою . .	361
46	Будування дотичних, поведених до кола з точки поза нею	364
47	Бічники параболи . .	366
48	Центрові рівняння елипси й гіперболи . . .	372
49	Канонічна форма рівняння елипси й гіперболи	377
50	Аналіза канонічного рівняння елипси . . .	378
51	Креслення елипси . .	383
52	Аналіза канонічного рівняння гіперболи . .	384
53	Креслення гіперболи	387
54	Порівняння рівнань елипси й гіперболи . .	389
55	Обчислення мір. зближення і центрового відсалення	390
56	Вертикове рівняння елипси й гіперболи . . .	395
57	Узагальнення вертикового рівняння для всіх кривих 2^{20} сїуп.	398

58	Будування еліпси . .	399
59	Будування гіперболи	401
60	Загальне рівняння еліпси та гіперболи . .	406
61	Алгебричне рівняння еліпси та гіперболи	409
62	Механічний спосіб перетворення алгебричного рівняння еліпси та гіперболи у загальне . . .	413
63	Положення простої згідно еліпси або гіперболи	414
64	Рівняння дотичної до еліпси або гіперболи . . .	422
65	Властивості дотичної до еліпси . . .	426
66	Властивості дотичної до гіперболи . . .	430
67	Рівняння прямової еліпси або гіперболи . . .	432
68	Будування дотичних за прямових до еліпси або гіперболи	434
69	Дотичні до еліпси та до гіперболи, повелені до них з точки поза кривою	434

70	Збудування даної фігури	438
71	Обчислення відрізків дотичності до еліпси або гіперболи	445
72	Поперечники еліпси та гіперболи	447.
73	Поле еліпси	457
74	Рівняння асимптот гіперболи	463
75	Креслення асимптот гіперболи	464
76	Асимптотичне рівняння гіперболи . . .	465
77	Рівнобічна гіпербола	470
78	Стискові перерізи й аналіза загального рівняння другого степіня	473
79	Вираз'ник рівняння другого степіня . .	482
80	Задачи до розділу III.	486

Обкладинка праці
П.П. Холодного


Накладом
Укр. Гром. Кооп.
в
У. С. Р
Подебради
1923