Ч. 56.

На правах рукопису
[627(02)]

І. Шовгенів

Професор Української Господарської Академії в Ч. С. Р.

ГИДРАВЛИКА

Ч. І.

Гидростатика

Nečekal

1923

м. Подєбради

Видання „Видавничого Т-ва при Українській Господарській Академії".

J. Šovheniv,

Profesor Ukrajinské Hospodářské Akademie v Č. S. R.

HYDRAULIKA

D. I.

Hydrostatika

Přednášky konané pro posluchače s.-h. inženýrské fakulty Ukrajinské Hospodářské Akademie v Poděbradech roku 1923.

1923
Poděbrady

Вступ

Короткий огляд розвитку гидротехники й гидравлики від прадавніх часів до сучасної доби.

Історичні й археологічні матер'яли показують нам, що вже за часів далекої, найглибшої старовини були своєрідні техники, які хотіли й уміли обертати велитенські сили природи на користь та добро людей. Цю творчу чинність людини особливо викликала вода, без якої не може існувати ні одна жива тварина і яка завжди таїла в собі й таїть або життєдайні, або руйнуючі сили.

Перші великі людські угруповання, перші держави утворились під небом південним, там, де підсоння тепле, а земля родюча, але родюча лише тоді, коли вона в достатній мірі зрошується. Тут дуже ясно й помітно було видно все значіння води, тут виникли перші думки про заволодіння потоками; проведені були перші, може спочатку невдалі, а потім все більш та й більш досконалі гидротехничні спорудження; тут же почалося й вивчення води, як певного фізичного тіла, а також і тих законів, яким вона підлягає в спокою і в русі.

Природа не легко відкриває свої таємниці. Тисячі років понадобилися для того, щоб створити сучасну науку про воду, а з'окрема науку про закони спокою й руху води; але й ця наука не є ще досконалою і потрібує все нової й нової праці над проблемами її.

Щоб хоч трохи освітити значіння цієї праці, важливість водяного господарства в минулому й сучасному життю людини, і необхідність постійного вивчення води, та явищ з нею звязаних, приведу далі де-які данні про переведені гидротехничні праці як в минулому, так і в добу сучасну.

Найстаршого, відомого з археолоичних розкопок, державою була, так звана, Суміро-Аккадійська, що займала простір у водозборі річок Тигра і Ефрата сучасної Месопотамії. Вона існувала вже за 6.000 років до Р.Х. Земля сумірійців була покрита цілою сіткою зрошувательних каналів, які розносили воду з річки на поля і тим забезпечували існування цілого народу.

Цей нарід за допомогою своїх інженерів, імя яких мусіло б бути прославленими вище царів та воєначальників, створив осеред пустель велику культурну державу з сотнями міст і тисячами селянських осель, з інтенсивною системою хліборобства. Держава суміро-аккадійців - це, можливо, і є якраз той рай земний, про який згадує Біблія. Пастушеське бідне племя жидів не застало вже сумірійців в долині Тигра і Ефрата, але від вавилонян, які заняли місце перших насельників, вони могли багато чути про високу культуру попередніх часів і витворити в своїй уяві картини дійсного раю на землі.

Для того, щоб перевести ці найстаріші інженерні роботи, треба було мати тоді вже досить великі знання відносно всієї системи річок Тигра і Ефрата, відносно нахилу цих річок і земель між ними. Крім зго

Крім згаданих каналів, були тоді ж збудовані ще й охоронні вали, які забезпечували прибережні землі від затоплення. Можна припустити, що тоді ж були вже застосовані різні прості черпадла для підняття води на вищий рівень поля.

За цих же старих часів сумірійці, а після них вавилоняни та ассіріяни будували величезні греблі для водозбірників з метою регулювання стоку води. Біля Моссулу ще й зараз видні забутки греблі (Sakr el Nymrud), яка складена з таких велитенських масивів, що будівля її, навіть і тепер, потрібувала б дуже багато часу й праці.

Царі вавилонські і самі добре розуміли всю важливість своїх гідротехнічних робіт, бо вони завжди в записках про свої діла на першу чергу ставили гидротехнічні спорудження, а потім уже військові та інші події.

Цариця Семірамида за 4000 р. до Р.Х. залишила після себе такий надпис: „Я примусила річки текти туди, куди я забажала, а бажала я так, щоб це було людям на користь; неродючі землі я зробила врожайними, тому що я зросила їх моїми річками.”

Халдійський цар Хамму-Рага (за 2000 років до Р.Х.) написав про себе так: „За той час, коли боги Ану та Юбіль дали мені скипетр для господарювання над народами Сумір та Аккад, вирив я канал Хамму-Рагис, який несе в собі воду повіді для цих народів. Береги канала призначив я під засіви хліба. Текучу на завжди воду дав я народам Сумір та Аккад.”

На протязі десятків віків згадані гидротехнічні спорудження то в більшій, то в меншій мірі, в залежности від того стану, в якому вони підтринувались, давали життя мільйонам людей, аж до того часу, коли р. 1258 же після Р.Х вони були цілковито руйновані; після цього библейський рай на довгі століття перетворився в більшій своїй частині в дику пустелю, і лише тепер заходами англійців по проектах інженера Willcoks'а землі поріччя Тигра та Ефрата знову зрошуються й покриваються пишною рослинністю.

Друга велика держава стародавности - Египет - існувала тако ж завдяки високо-розвиненій на ті часи гидротехніці, розумінню важливости доброго водяного господарства - і, що було скрізь за старовинних часів (особливо у народів, що жили осідло), - необмеженій можливости численного рабського труду.

Спорудження Египтян, які були поставлені за 3000-2000 років до Р.Х, а саме: охоронні вали, водозбірні греблі, водорозводні канали, - заслуговують часто більшого подиву, ніж світознані пирамиди. Так, наприклад, водозбірник (озеро) Мерис, що називається нині Биркет-ель-Керун, був, як то свідчить Геродот, викопаний штучно (2221 - 2179 р.р. до Р.Х) і служив для регуляції повідневої хвилі р. Нила. Озеро Мерис мало обвід біля 530 кілометрів, а глибину біля 80 метрів; отже для утворення його треба було викопати казковий об'єм землі в 1.760.000.000.000 куб. метрів, тоді коли найбільша виїмка сучасної доби на каналі Панамському була - 200.000.000 куб. метрів, себ-то в 880 разів меньша.

В XIV і XIII віках до Р.Х були переведені великі гидротехнічні роботи в забагненій дельті річки Ніла: вирита ціла сітка каналів, засипані штучно, або закольматовані низькі забагнені місця; після цього вся дельта стала на довгий час, аж до нападу арабів, житницею для всього побережжя Середоземного моря.

В других старих державах, Китаю та Індії, до яких хліборобська культура була занесена від сумірійців водяне господарство було тако ж високо поставлено.

Залишилися до наших днів історичні оповідання з року 2297 до Р.Х про надзвичайні повіді річок Хуанг-Хо і Янгце-Кіянг. Для полагодження всіх шкод, що їх вода причинила, а такоже і для забезпечення від них і на майбутнє, богдихан Яо закликав інженера Ю. Цей інженер, перший на світі, ім'я якого нам відомо, працював над дорученою йому задачею 10 років, але нарешті привів і природні води, і штучні раніш уже існувавші канали в належний порядок, і після цього написав:

„Я відкрив путі річкам десяти країн і направив їх в море. Я поглибив тако ж канали і довів їх до річок. Десять країн живе тепер у спокою і може чистій радости віддатися."

Дальша історія річок Хуанг-Хо і Янг-це-Кіанга подає картину безперестанної боротьби людини з руйнуючою силою води і обуздання цієї сили величними гідротехнічними спорудженнями.

В Індії річки навіть обожествлялися. Вся історія культури Індії тісно зплітається з історією ірригації. Історично відомі роботи по зрошенню земель за 1000 років до Р.Х. Велике число каналів та водозбірників, збудованна за Великого Могола (б. 1000 р. до Р.Х), явилися підставою дальшого добробуту Індії. В одній провінції Мадрас нараховується зараз до 60.000 гребель, більшість яких залишилася від давніх часів.

Крім гідротехнічних споруджень, збудованих в стародавні часи для потреб хліборобства, численні гідротехнічні праці з прадавніх часів відомі також і в инших галузях водяного господарства.

Так, для задоволення питтьових потреб стали копати колодязі вже принаймні за 2500 років до Р.Х. Китайці вміли ще тоді робити колодязі глибиною до 500 метрів. Колодязі часто згадуються і в Біблії, при чому де-які з останніх, як наприклад, колодязь Якова біля Сихрони, що його витесано в скелі на глибину 32 метра, зберігся до наших днів.

Єрусалим одержував питтьову воду по водоводу, який було збудовано за 1000 років до Р.Х і який, між иншим, мав тунель довжиною в 537 метрів.

Стародавні греки відзначалися своїм особливим умінням будувати водоводи, колодязі, водограї. За 600 років до Р.Х. Солон піклувався вже про те, щоб Афини були забезпечені колодязями для кожного подвірря.

Рим почав будувати велитенські водоводи за чотирі віка до Р.Х. За Нерона в Римі було вже 9 водоводів довжиною 436 кілометрів, при чому більше як на 60 кіл. було проведено кам'яними акведуками. Цими водоводами пишалися й самі римляни, добре розуміючи їх, навіть, державне значіння, і вважали свої гідротехнічні спорудження більш подиву гідними, ніж чудеса тодішнього світу: єгипетські піраміди та грецькі храми.

Користання водою, яко транспортовим шляхом, роспочалося, мабудь, ще на світанку людського життя, коли людина помітила, що дерево, яке впало в воду, і само не тоне, і ще може нести на собі будь-який тягар. Спочатку люди навчилися сплавляти плоти, а потім поступнево перейшли до будови човнів і великих кораблів.

Археологічні роскопки в долині Тигра і Ефрата дали цілу бібліотеку на глиняних дощечках, де між иншим була вичитана історія Хазі-Садри, майже дослівно така, як і історія Ноя та всесвітнього потопу, з тією лише різницею, що наказ від Бога Хазі-Садрі про те, як будувати судно (ковчег), є більш детальний, ніж приведений в Біблії.

Цікаво відмітити, що майже по цьому, за тисячі років до нашої ери даному, рецепту будуються і тепер найпростіші судна місцевої конструкції

Отже, як видно, судноплавство існувало вже за 3-4 тисячі років до Р.Х. За 600 років до Р.Х. фінікійці обїхали вже на своїх судах всю Африку.

Середні віка прославились в цьому відношенню плаванням Колумба р. 1492 й Магеллана (1519-1521), а також винаходом камерних шлюзів (р. 1253).

Але особливо інтензивний розвиток судноплавства почався лише з того моменту, коли Фультон р. 1807 перший раз проплив своїм пароплавом по р. Гудзону і практично довів можливість пароплавства.

Використання енергії води розпочалося тако ж за часів дуже старих, але в цьому напрямку геній людський не зробив великих успіхів майже до наших днів, до часу винаходу турбин (р. 1837).

Із цього короткого нарису гідротехнічних праць, виконаних за давні часи, видно, що вже й тоді будувалися такі грандіозні та технічно досконалі спорудження, які цілком відповідали своєму призначенню, а збудовані були так міцно, що функціонують іноді аж до наших днів.

Отже, тепер виникає питання, чи знали стародавні інженери всі ті гідромеханічні й гідротехнічні закони, які вже нам відомі; а коли не знали, то як же вони могли провадити такі споруджения без тих попередніх теоретичних розрахунків, які ми тепер вважаємо необхідними?

Історія розвитку гидромеханики показує, що питання гидростатики були поставлені і в значній мірі розвязані лише Архимедом за 2 віка до Р.Х; закони ж руху води стали з'ясовуватися лише з XVI віку; таким чином, можна сказати, що теоретичні підстави гидромеханики стародавнім інженерам не були відомі і що досконалість роботи їх базувалася не на попередніх розрахунках, а на чому сь иншому.

Отсим иншим фундаментом всього стародавнього господарства, всього будівництва було рабство, цілковите поневолення однієї частини людности другою, необмежена влада над майном, здоровлям і життям мільйонів рабів і нижчих кляс населення.

Які вимоги ставиться сучасному інженерові коли він береться за виконання будь-якого проекту?

Вимога така: робота мусить бути проведена: по-перше, в умовах, які ні життю, ні здоровлю людей не загрожують; по друге - швидко, кріпко й дешево, себто з найменьшими затратами матер'ялів і робочої сили.

Перед стародавнім же інженером першої турботи зовсім не було, а з останніх трьох важливою була одна вимога - збудувати кріпко.

Для ілюстрації цієї думки наведемо де-які порівняння.

Будівля Хеопсової піраміди тяглася більш, як 30 років, при чому весь час працювало в самих тяжских умовах біля 100.000 рабів.

Ейфелева вежа (вдвоє вище Хеопсової піраміди, а саме 300 метрів) збудована в $1\frac{1}{2}$ рока, при чому на праці не було одночасно більше 450 робітників і 5 інженерів.

Суецький канал будовано було де-кілька разів, починаючи від XIV віку до Р. Х. Геродот подав відомости про той канал, який проводився за 600 років до Р. Х, при чому при будівлі цього канала загинуло біля 120.000 рабів. Лессепс збудував цей канал за 10 років (1859-1869) за 536 мільйонів франків при обставинах праці тяжких, але при близьких до нормально-санітарних.

Американці при будівлі Панамського каналу широко застосовували машини, звернули особливу увагу на санітарний стан праці і досягли збільшення продукції в відношенню до одного робітника в 15-20 раз в порівнанню з роботами Лессепса, а смертність понизили з 7% до 2½%.

Береги Ладожського каналу вимощені кістками українських козаків, що були по наказу царя Петра насильно поставлені на цю роботу, і працювали там десятки років; а шлюзування р.р. Дінця, Дону, Оки продовжувалося не більше $2^{х}$-$3^{х}$ років при нормальній смертності працьовників.

Туркестанський Голодний Степ біля Ташкенту носить на собі сліди стародавніх каналів, якими невідомі вже чам гідротехники пробували вивести воду р. Сир-Дар'ї на родючі ґрунти степу; тут наочно видні ті методи старої техники, якими вона в решті решт добивалася успіху: численні варіанти, проби, але не на папері, як це робиться тепер, а прямо на землі; бо людей було не жалко, а часу теж було досить. Із десяти проб одна вдавалася - і цим задовольнялися. Така метода зберіглася серед сартів та киргизів і до наших днів; тому вони не хотіли вірити, що по каналу, запроектованому р. 1910 російськими інженерами для зрошення 65.000 десятин і будованого вже на підставі стадоміряння, - вода „схоче" потекти. Коли при відкриттю цього каналу (р. 1913) були підняті заставки, що відділяли воду р. Сир-Дар'ї від каналу, і вода хлинула в канал, сарти цілим кінним відділом кинулися вздовж каналу і скакали десятки верст, чекаючи й бажаючи, щоб вода зупинилася і „не захотіла" йти далі. Але закони гідравлики і геодезії оказалися правильними: во-ця пройшла по всьому степу і оживила його з казковою скорістю та пишністю.

Індійські земляні греблі насипані з величезним запасом певности; для будівлі їх зганялося все населення нижчих каст: мужчини, жінки, діти; і весь цей нарід копав землю простими лопатами, носив її в греблю в кошиках, а уминав ногами. Скілько часу тривала така будівля, скільки вона коштувала б на наші часи, - трудно собі й уявити.

Сучасні американські бетонові греблі з висотою натиску в 50 сажнів мають надзвичайно малий профіль, вибраний на підставі теоретичних міркувань.

Водоводи старого Риму, що дивують нас і до цього часу, проводилися з великими проти дійсної потреби запасами води. Вони постачали за добу до 1,5 мільйона куб. метрів води, що виносило до 1500 літрів за добу на людину; тоді, як зараз для великих міст дається не більше 250-300 літрів за добу на душу (Берлін - 78, Любек - 259, Цюрих - 174).

Судноплавство старих часів відбувалося на судах малих и тихоходних, а тому і час, потрібний для обміну крамом різних земель, був дуже великий. При поході, напр., Олега на Царгород лод'ї було багато, до 2000, але кожна з них умiщала лише до 40 вояків

Каравела Колумба мала довжину не більше 9 сажнів, а під'ємність до 300 тонн, а плив він до Америки 35 доби. Магеллан від берегів Европи до островів Філіпінських плив 1 рік і 8 місяців.

Сучасні пароплави мають довжину до 150 сажнів, а підємність до 60.000 тон і проходять вони від Ліверпуля до Нью-Иорка в 5 діб.

Водяна енергія використовувалася на млинах ще за часів Юлія Цезаря, але це використовання було дуже примітивним і то безпосередньо на місці невеликого перепаду води.

Тепер же справність однієї турбини досягає 40000 кінських сил; спад води, що використовується для здобуття енергії, досягає 1650 метрів (Fully в Wallis), а віддалення передачі добутої сили, перевищує вже 1000 кілометрів (пороги Вікторії на р. Замбезе)

Відмічена в показаних прикладах різниця метод старовинного і новітнього гідротехнічного будівництва стала можливою в наслідок неупинної людської думки, безперестанної праці над розгадкою таємниць природи, над зрозумінням її законів взагалі, а з'окрема законів що до спокою й руху води.

Можна гадати, що де-які з цих законів були відомі вже й прадавнім будівничим, але історично відомо нам, що лише з часів Архимеда вода стала об'єктом теоретичного вивчування; при чому від Архимеда і до XVI віку вза після Р.Х в цьому вивчуванню була якась довга (майже цілковита) перерва аж до XVI віку п. Р.Х, після чого вже почалася систематична наукова праця, яка продовжується й тепер.

В наслідок всіх праць по вивченню обставин спокою й руху теч, и також руху сторонніх предметів в течах.

Створилася окрема наука, яка потім поділилася на різні підвідділи. Одна частина науки про течі стала оперувати з, так званими, течами ідеальними і застосовувати до явищ спокою й руху загальні закони механіки, — таким чином утворилася гідромеханіка.

Спроби прикладення теоретичних висновків гідромеханіки до реальних теч і в реальних обставинах показали, що тут теорія і практика, а особливо при русі теч, так далеко росходилися, що користування з висновків гідромеханіки не було можливим. З огляду на це розвинулася друга частина науки про течі, а саме гідравлика*), яка, спира-

---

*) Слово гідравлика походить від грецьких слів: ὑδωρ — вода і αὐλος — флейта, дудка; цим словом спочатку означалася раніш штука будування органів, у яких воздух вганявся в дудку натиском води.

ючись на дані гидромеханики, шукав експеріментальним шляхом причин відхилення реальних явищ від теоретично-принятих, і, вводячи різні поправки в теоретичні висновки, а саме різні коефіціенти (сочинники), - дає нові закони і правила для тих реальних.

Над питаннями гидравлики й гидромеханики працював довгий ряд учених, як теоретично, так і експериментально.

Не претендуючи в дальшому дати історію розвитку гидромеханики й гидравлики, привожу *) все ж таки перелік видатнищих творців цих наук і де-яких з основних творів.

Головні підвалини по гидростатиці були покладені переважно слідуючими ученими: Archimedes (281 - 212 до Р. Х), Stevin (1548 - 1620), Galilej (1564 - 1642), Pascal (1623 - 1662, Traité de l'équilibre des liquers), Huygens (1629 - 1695, Dissertatio de causa gravitatis), Newton (1643 - 1727, Philosophiae naturalis principia mathematika),

---

*) Lorenz, Technische Hydromechanik

Clairaut (1713-1765, Theorie de la figure de la terre).

Основні підвалини теоретичної гідродинаміки, дефініції тиснення, тиску, математичний вираз для тяглости течі, взори для руху течі розробили вчені: Castelli (1576-1644) - Dalle misure del l'acqua corrente (1628-1629), Torricelli (1608-1647) - De motu gravium naturaliter accelerato (1644), Guglielmini (1655-1710), Grandi (1671-1742), Newton (1714р.), Mariotte - Traité du mouvement des eaux (1700), Brahms (1754) - Anfangsgründen der Deich- und Wasserbaukunst, Johan Bernoulli (батько) - Nouvelle Hydraulique, Daniel Bernoulli (1700-1782, „Hydrodynamica"), D'Alembert (1717-1783) - „Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides" (1744) i „Essai d'une nouvelle théorie sur la resistance des fluides" (1753), Bouguer (Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements, 1743), Leonard Euler (1707-1783) - „Principes généreaux du mouvement des fluides" (1755), Novi Commentarii der Petersburger Akademie (1770), Lagrange (1736-1813)-

Mécanique analitique (1788), Sur les Onde (1776), Gerstner (1756–1832), Theorie der Wellen samt einer daraus abgeleiteten Theorie der Deichprofile, Poisson (1781–1840), Memoire sur la Theorie des ondes. E. i W. Weber (Wellenlehre, auf Experimente gegründet, 1825), Skott Russel (On Waves, 1844), Stokes (1847), Helmholz (1858), Cauch (1827), W. Thomson (1868), Kirchhof (1869), Dirichlet (1852), Bjerkens (Hydrodinamische Fernkräfte (1900), J. J. Thomson (Treatise on the motion of vortex rings, 1883), Wien (Hydrodynamix), Clairaut, Maclaurin i Jakobi (1834), Poincaré (1885), Darwin (1887, „Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem").

Питання про тертя в течіях та в'язкість їх вирішували: Newton, Navier (1827), Poisson (1831), Stokes („On the theories of internal friction of fluids in motion," 1845), Poiseuille (1846);
над питаннями про турбуленцію працювали: Hagen (1839), Reynolds (1863), H. A. Lorenz (1897)

Явища поверхньового натягнення

обслідували: Clairaut (1743), Laplace (Théorie de l'action capillaire, 1807), Segner (1781), Young (Essay on the cohesion of fluids, 1805), Gauss (Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrio, 1830), Poisson (Nouvelle théorie de l'action capillaire, 1831).

Над питаннями про ріжні гідравлічні коефіцієнти для наближення теоретичних висновків до дійсности, рівномірним і нерівномірним рухом води в річках, рухом підземних вод і опором твердих тіл текучій воді, — працювали: Borda (Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases, 1766), Bossut (Traité élémentaire d'hydrodynamique, 1771), Dubuat (Principes d'hydraulique, 1754), Chézy (1775), Prony (Recherches physico-mathématiques sur la théorie du mouvement des eaux courantes, 1804), Weisbach (1840), Darcy (Les fontaines publiques de la ville de Dijon, 1856), Bazin (1865 і 1897), Ganguillet і Kutter (1869), Coriolis (1836), Bresse (1860), Dupuit (Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux, 1863), De St. Venant (1850), Boussinesq (Essai sur la théorie des eaux courantes, 1877, 1903), Forchheimer (1886), Maillet (Essais d'hydraulique souterraine et fluviale, 1905), Flamant (Hydraulique, 1900), Boulanger (Hydravlique, 1909) Bourgois (Mémoires sur la resistance de l'eaux au mouvement des corps et particulièrement des bâtiments de mer, 1857), Rankin (1864-1870), Froude i син (1872-1878), Michell (1898), Lorenz (Beitrag zur Theorie des Schiffswiderstandes, 1907)

Із російських та українських гидравликів, крім Euler'a, який був професором в Петроградi, в царині гидравлики та гидротехники відзначились такі: проф. Евневич (Гидравлика в 1890^{х} роках), Зброжек (Курс водяних сообщеній), Бахметев (О неравномѣрномъ движеніi жидкостей), Клейбер (О землечерпательных работах на р. Волгѣ), проф. Тимоновъ (О землечерпаніi, как коренном методѣ улучшенія рѣк), Лелявский (О направленіи струй в рѣчном руслѣ), Максимовичъ (Днѣпръ), Оппоков (Режимъ рѣчного стока в бассейнѣ р. Днѣпра), проф. Жуковский (1921. Кинематика жидкого тѣла; объ ударѣ двухъ шаровъ, изъ которыхъ одинъ плаваетъ в жидкости; теоретическое изслѣдование о движеніи подпочвенныхъ водъ; о движеній твердого тѣла, имѣющаго полости; о формѣ судов і др.)

Гідравлика

Розділ I
Вступні поняття та опреде-лення.

§1 Опреділення тіл. Всі тіл природи поспіля по їх фізичних властивостях відносно до зміні з на[illegible] [illegible] де тіла тверді, або [illegible], до тіл рідких, або тек, до тіл газовидних, або газів; останні дві класи часто об'єднуються під загальною назвою тіл.

Тілько враховані називаються тікі тіла, окремі молекули якого з най звичайною легкістю можуть бути переміщені одна відносно другої.

§2 Опреділення тіл ідеальних та тіл реальних. Механічні власти вості тіл природи, умови поведін ня їх в стані спокою чи в стані ру ху, вивчає механіка. Та частина ме ханіки, яка досліджує тіло, назива ється гідромеханікою. Обєктом гі дромеханіки являються ті тіла при

Гидравлика.

Розділ I.

Вступні поняття та опреділення.

§1. Опреділення течі. Всі тіла в природі можна по їх фізичних властивостях віднести до однієї з наступних кляс: до тіл твердих, або певних; до тіл рідких, або теч; до тіл плинних, або газів; останні дві кляси часто обєднуються під загальною назвою теч.

Течею взагалі називається таке тіло, окремі молекули якого з надзвичайною легкістю можуть бути переміщені одна відносно другої.

§2. Опреділення течі ідеальної та течі реальної. Механичні властивости тіл природи, умови перебування їх в стані супокою чи в стані руху, вивчає механика. Та частина механики, яка досліджує течі, називається гидромеханикою. Обєктом гидромеханики являються як течі крапельні, так і течі газовидні, але при сучасному розвитку науки про гази, гідромеханика газів від'окремлюється в особу частину механики — аеромеханику. — Для находження законів спокою й руху тіл, приходиться фізичні властивости їх у деякій мірі зміняти, упрощувати, утворювати в уявленню тіла ідеальні.

Так, для тіл твердих, які деформуються мало, необхідно було приняти, що окремі молекули його з'єднані в таку матеріальну сістему, в якій деформацій зовсім не має. Для досліджения течі приймається також *теча ідеальна*. Теча ідеальна має такі властивости:

вона складається з молекул, які не мають між собою жадного звязку і можуть вільно переміщатися одна зглядно другої;

вона цілком тягла, так що пор не має зовсім;

вона не має власної певної форми навіть при найменьших об'ємах, а приймає форму посудини, яку виповнює.

Зовнішні сили можуть лише стискувати течу нормально до її поверхні, при чому об'єм течі не зменшується, бо вона не має пор. Ніяких сил тертя в течі не існує. Ідеальну течу уявляємо собі, як цілком одноманітну (гомогенну), при чому певний об'єм її можна ділити до безмежности.

Течі дійсні або реальні мають властивости, якими вони більше або менше відхиляються від теч ідеальних. Особливо важливою в життю течею являється вода; її ж можна вважати представником теч реальних. Отже фізичні властивости води такі: Вода складається з молекул, між якими існують помітні внутрішні сили сцілення. Ці сили виявляються наочно в формі поверхньового натягання й волоскуватости. Між молекулами води існують, хоч і дуже малі, пори. Вода ставить опір не лише силам, що стискують її об'єм, а ще й силам, що розривають її об'єм, перерізають його, або зсувають один шар її по другому.

Стискуванню вода ставить великий опір і об'єм її зменшується всього на 0,000047 при збільшенню тиснення на одну нову атмосферу, або 1 кілограм на 1 кв. сантіметр, опір же води останнім силам дуже малий; так, на розтягання при 12°C не більше 0,00037 $\frac{\text{кілогр.}}{\text{см}^2}$ [для заліза - 4000 $\frac{\text{кіл.}}{\text{см}^2}$]; на перерізання при 12°C - 0,00026 $\frac{\text{кіл.}}{\text{см}^2}$ [для заліза - 2800 $\frac{\text{кіл.}}{\text{см}^2}$]. При русі одного шару води по другому проявляються сили тертя, відносно яких існує така гіпотеза Ньютона: Сила гідравлічного тертя є пропорційного полю поверхні з тертя, відносній скорости двох шарів при віддаленню між ними, рівному одиниці довжини, не залежить від тиску на течу, а залежить від властивостей течі.

Коли згідно цьому силу внутрішнього тертя на площі AB (рис. 1) означимо через f, а різницю скоростей двох суміжних точок a і в, що віддалені одна від другої на dx, означимо через $(v + dv - v) = dv$, тоді зміна скорости на одиницю довжини буде $\frac{dv}{dx}$, а силу f

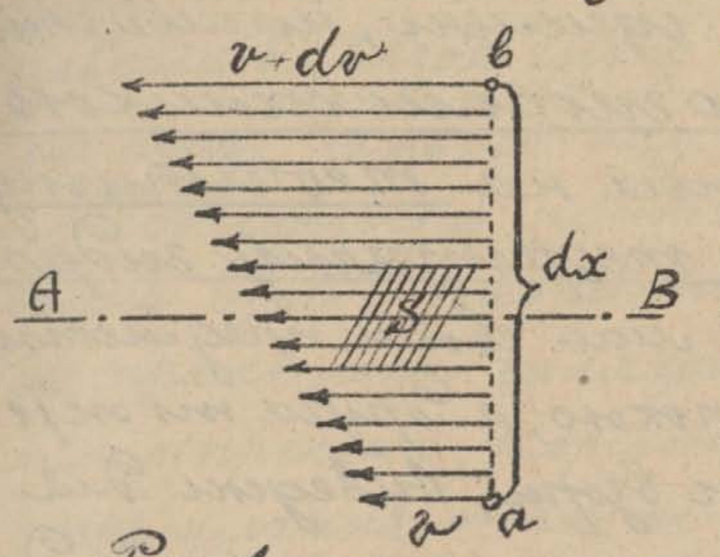


Рис. 1.

можна виразити так:

$$f = \eta . S . \frac{dv}{dx} \ldots (1),$$

де η - сочинник внутрішнього тертя або сочинник чінкости, а S - поле поверхні тертя.

В укладі CGS сила f є рівна одній дині, при умові, що поле тертя S = одному кв. сантиметрові, а зміна скорости на віддаленню в 1 сантиметр буде також рівна одному сантиметру.

Коли поле тертя задається в кв. метрах, а скорости та віддалення в метрах, тоді для води при темпер. $t = 20°$ $\eta = 0,0001 \frac{\text{кілогр.} \times \text{сек.}}{\text{метр}^2}$.

Коли вода, або инша реальна теча перебуває відносно своєї посудини в супокою, тоді сили тертя не існують; при русі ж течі, особливо, коли ріжні шари її мають значно відмінну скорість, сили тертя приймають помітні значіння.

§3. Опреділення гидравлики. Відділ теоретичної механики, в якому [illegible] глядаються течі ідеальні, називається теоретичною гідромеханікою. Ця наука поділяється на теоретичну гідростатику і теоретичну гідродинаміку; перша має своїм предметом ідеальні течі в супокою, а друга ті ж течі в руху. Закони і взори, виведені для теч ідеальних, можна прикладати до теч реальних лише в таких випадках, коли теча реальна наближається по своїх властивостях до течі ідеальної. Так наприклад, коли теча перебуває в супокою і під невеликим тисненням, тоді можна вважати, що вона нестискаєма і що внутрішніх сил тертя не має, і що, таким чином, вона подібна до течі ідеальної. Але в більшости випадків практики реальна теча перебуває в стані руху — і тут уже, як це виявилося на спостереженнях, виводи теоретичної гідромеханіки не можна без поправок прикладати до теч реальних; крім того, де які явища руху реальних теч в реальних обставинах о стільки складні, як наприклад, рух води в природніх коритах, що вивід теоретичними методами взорів, які давали б звязок між всіма елементами руху, до цього часу не можливий.

Необхідність найти засоби пристосування взорів теоретичної гидромеханіки до практики шляхом введення різних упрощень, коректуючих сочинників, стремління також найти емпіричним шляхом хоч би приблизні такі закони рухів тіч, які ще не виведені теоретично - все це утворило окрему пристосовану до практичних питань науку - *гидравлику*.

Отже *гидравлика являється гидромеханикою, пристосованою до практичних завдань шляхом введення емпіричних сочинників і емпіричних взорів та правил.*

Гидравлику поділяють на: *Загальну гидравлику*, яка вивчає загальні закони що до спокою й до руху тіч, і на *спеціальну гидравлику*, яку можна б назвати прикладною; ця остання має на меті теорію и описання механизмів та споруджень, ділання яких залежать від механичних властивостей тіч.

Предметом нашого курса являтся

лише *загальна гидравлика крапельних теч*, до якої власне будемо прикладати назву „гидравлики".

Гидравлика поділяється на три підвідділа: 1) *Гидростатику*, яка розглядає умови, при яких теча, а також тіла в течі перебувають в супокою.

2) *Гидродинаміку*, яка розглядає умови перебування течі в русі, а також обставини руху тіл в течі і

3) *гидрометрію*, яка дає опис засобів і пристроїв для міряння скоростей та відтоків течі.

§4. Сили, що ділають на течу.

Сили, які можуть ділати на течу, поділяються на дві категорії:

а) сили зовнішні і б) сили внутрішні.

Зовнішніми силами наз. ті, які походять від причин, зовнішніх виділеному для розгляду об'єму течі, і не викликані властивостями виділеної течі; ці сили бувають або *об'ємні* — такі, що ділають на кожну одиницю об'єму течі, або *поверхньові*; до перших відносяться сили тягару землі і відосередня сила, а до других: тиск течі ні поверхню виділеного обьему, так атмосфери, так стінок, обмежуючих течу, і т.и.

Відповідно опреділенню ідеальної течі зовнішні сили можуть, при рівновазі течі, бути направленими лише по внутрішніх нормалях до поверхней, що обмежують виділений об'єм.

Дійсно, коли б сила в будь якій точці течі була направлена не нормально до поверхні, то цю силу можна було б роскласти на дві: одну, що пішла б по нормалі, а другу - дотичну до поверхні в даній точці; ця остання сила примусила б частинки течі, до яких вона прикладена, зсуватися по поверхні; себ-то вивела б течу з того стану рівноваги, в якому ми її уявляли. Так само, зовнішні сили не можуть мати напрямку по нормалі, зовнішній до обмежуючої поверхні, бо в цьому випадку такі сили відривали б без всякого відпору частинки течі, до яких прикладені, від виділеного об'єму течі; отже, зовнішні сили, ділаючі на даний об'єм ідеальної течі, що перебуває в рівновазі, можуть бути лише силами, які цей об'єм стискують.

Для реальної течі, як це видно із определення її, можуть бути, хоч і дуже малі, сили як тангенціальні, так і направлені по зовнішніх нормалях.

Внутрішніми силами називаються сили, які проявляються внутрі виділеного об'єму течі, і являються наслідком або зовнішніх сил і властивостей течі, або сил молекулярних; в течі ідеальній можуть бути лише сили першого порядку, а саме сили гідромеханічного тиснення, а в течі реальній до того добавляються ще сили зціплення і сили тертя. –

Гидромеханічне тиснення. Виділимо в ідеальній течі будь який об'єм (рис. 2) і припустимо, що він перебуває в рівновазі. Візьмем на поверхні цього об'єму будь

Рис. 2.

яку точку A, а навколо неї безмежно

малу поверхню ΔF. Кожна частинка цеї поверхні витримує з боку останньої течі, що оточує виділений об'єм, якесь ділання; це ділання можна замінити відповідними силами p і p. Означені сили взагалі між собою не рівні, вони направлені по внутрішнім нормалям і утворюють тиснення. Поверхню ΔF можна взяти безмірно-малою і тоді можна її вважати за площину; при цій умові всі сили p будуть рівнобіжними, а вислідна з них сила ΔP буде рівнятися алгебраїчній сумі всіх тиснень p. Тиснення на одиницю поля площинки ΔF буде $= \frac{\Delta P}{\Delta F}$; це тиснення $\frac{\Delta P}{\Delta F}$ називається пересічним гідромеханічним тисненням на площинці ΔF.

Коли ми площинку ΔF будемо зменшувати до нуля, але так, щоб точка A весь час залишалася в площинці, тоді відношення $\frac{\Delta P}{\Delta F}$ буде наближатися до певного граничного значіння і це граничне тиснення наз. гідромеханічним тисненням в точці A, або специфічним тисненням течі в точці A

Гідромеханічне тиснення в точці А будемо означати так: p_A.
Отже: $p_A = \left|\frac{\Delta P}{\Delta F}\right|_{\Delta F=0}$ .... (2). Фізичний вимір цього тиснення буде =
$= \frac{(\text{кілограм})}{(\text{метр})^2}$

Пересічне гідромеханічне тиснення для безмежно малої площинки $\Delta F = \frac{\Delta P}{\Delta F}$ не буде рівнятися гідромеханичному тисненню $\left(\frac{\Delta P}{\Delta F}\right)_{\text{при } \Delta F=0}$, а буде відрізнятися від останнього на величину ε - безмежно малу, себ-то буде: $\frac{\Delta P}{\Delta F} = p_A + \varepsilon$ ...(3)
У цьому взорі (3) p_A є величина конечна, и ε безмежно мала.

Гідромеханічне тиснення наз. *гідростатичним тисненням*, коли воно відноситься до течі, що перебуває в спокою, і *гідродинамічним тисненням*, коли воно відноситься до течі, що перебуває в русі.

Сили зціплення. На кожну молекулу реальної течі ділають особливого характеру сили, які ніби виходять від усіх сусідніх молекул. Ці особливі сили мають помітну величину лише при дуже малих віддаленнях між молекулами; називаються вони *Силами*

<u>Сціплення</u>. Ці молекулярні сили сціплення не підлягають законові Ньютона, бо зменшуються скоріш, ніж збільшується квадрат віддалення між ними. Істота цих сил ще досконально не відома, але існування їх в тілах не підлягає сумніву, бо вони спостерігаються ясно на поверхні течі. Помітне проявлення сил сціплення у поверхні течі можна з'ясувати в слідуючий спосіб. Нехай MN (рис. 3) буде поверхня течі. Візьмемо в цій течі три молекули: одну

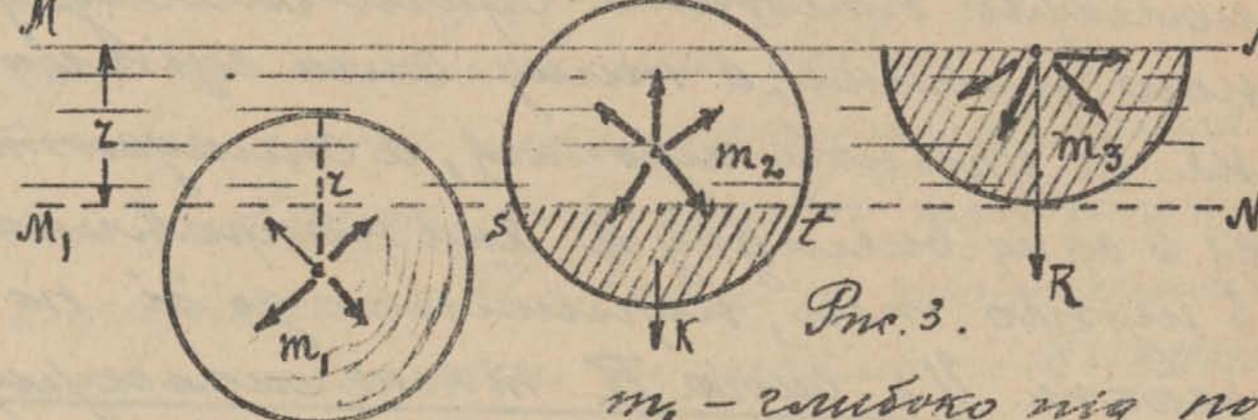


Рис. 3.

m_1 – глибоко під поверхнею, другу m_2 близько до поверхні і третю m_3 – зовсім у поверхні. Молекула m_1 оточена з усіх боків другими молекулами, які ділають на неї силами сціплення; можна вважати, що сили сціплення мають помітне значіння лише в певній сфері, * в центрі якої лежить наша молекула

m_1. Ця сфера називається сферою молекулярного ділання. Як що молекула m_1 лежать в центрі повної сфери молекулярного ділання, тоді на неї ділають такі сили, що кожна з них має собі рівну й протилежну, а тому вислідна всіх цих сил буде рівна нулю. З огляду на це сили зціплення в нутрі течі не помітні.

Для молекули m_3, взятої у самої поверхні течі, явище має инший характер. На цю молекулу можуть ділати лише молекули половини сфери молекулярного ділання, а тому сили зціплення не урівноважуються, а складаються в одну вислідну R, яка направлена в нутро течі, нормально до її поверхні. Ця сила R тягне молекулу в нутро течі. Подібного роду втягаючі сили проявляються не лише для молекул, що лежать на самій поверхні, але й для таких m_2, що лежать в течі на віддаленню від поверхні меньшому луча r — сфери молекулярних ділань. Так, наприклад, на молекулу m_2 ділають сили зціплення не на повній сфері. Частина цих сил взаємно рівноважиться, а частина, що виходить з кулевого сегменту Skt, ділає на молекулу m_2, тягнучі її до низу.

Площа M_1N_1, що проходить від поверхні MN на віддаленню, рівному лучу r сфери молекулярного ділання, являється нижньою межою <u>поверхньової плеви</u>, всі молекули якої підлягають силам, направленим від поверхні до низу. Ця поверхньова плева утворює на течу особливого роду тиск, який можна уподобити тиску від ростягнутої гумової кулі на оточений нею воздух.

Луч сфери молекулярного ділання (або товщина поверхньової плеви) був опреділений Plateau із спостережень над мильними пухирями і $\varepsilon=0,0000567$ міліметрів. Сили сціплення відограють помітну ролю лише при дуже малих об'ємах течі. В цьому випадку сили сціплення, що стремлять втягнути в нутро поверхньові молекули, спонукають, щоб для взятого малого об'єму течі утворилася найменьша поверхня; найменшу же поверхню при однакових об'ємах має куля, а тому малі обєми течі самі приймають форму кулі.

В техниці приходиться мати діло з такими масами теч, для яких сили суцілення не відограють помітної ролі, а тому на ці сили в дальшому не звертається увага.

Сили внутрішнього тертя. При опреділенню ідеальної течі було вже сказано про сили внутрішнього тертя і показано, що сила $f = \eta . S . \frac{dv}{dx}$.

Для води, коли величини дані в метрах, а $t^\circ = 20^\circ$, $\eta = 0{,}0001 \frac{\text{кгр.} \times \text{сек}}{\text{метр}^2}$.

Щоб уявити собі порядок величини цих сил, візьмемо такий приклад: поле торкання двох шарів води $S = 10 \times 10 = 100$ кв. метрів; зміна скорости на один метр $= 0{,}5$ м./с.; тоді $f = 0{,}0001 \times 100 \times 0{,}5 = 0{,}005$ кгр.

Отже, як бачим, сила f має дуже незначну величину, а тому її часто зовсім не приймають на увагу; але при русі великих обємів течі, або при значних змінах скоростей між шарами течі, це внутрішне тертя відкидати не можна.

§5. *Густота течі*. Уявимо собі будь який безмежно-малий об'єм ідеальної течі, охоплюючий точку A. Означимо величину цього об'єму через Δv, а масу його через ΔM. *Густота течі чисельно є рівна масі течі в одиниці об'єму.* При наших означеннях маса течі в одиниці об'єму буде $\frac{\Delta M}{\Delta v}$; це *відношення називається пересічною густотою течі в об'ємі Δv*. Для ідеальної нестискальної течі об'єм Δv весь час залишається незмінним, де б ми його не взяли, а тому й $\frac{\Delta M}{\Delta v}$ буде постійним, себ-то *для ідеальної течі густота її скрізь однакова*. Для реальної течі густота міняється в залежности від тиску і теплоти, а тому тут можна говорити або про пересічну густоту течі, або про густоту в даній точці.

Коли ми об'єм Δv реальної течі будемо зменьшувати до нуля так, щоб точка A весь час не виходила з цього об'єму, тоді відношення $\frac{\Delta M}{\Delta v}$ буде наближатися до певної граничної вартости, яка називається *густотою те* чі в точці А. Будемо означати її літерою δ з відповідними значками. Отже буде: $\delta_A = \left|\frac{\Delta M}{\Delta v}\right|_{\Delta v=0}$ . . . . (4)

Пересічна густота об'єму $= \frac{\Delta M}{\Delta v}$ відрізняється від густоти течі в точці А $= \delta = \left|\frac{\Delta M}{\Delta v}\right|_{\Delta v=0}$ на величину безмежно малу, а тому:

$\frac{\Delta M}{\Delta v} = \delta_A + \beta$ . . . . (5).

З цьому взорі δ_A є величина конечна, а β – безмежно-мала.

§6. Основна властивість гідромеханічного тиснення.

Візьмемо в ідеальній течі довільну точку А (рис. 4) і віднесем її до просторового прямокутного укладу координат, звязаного з течею. Нехай координати точки А будуть x, y і z. Виділимо з течі безмежно малий граняк (тетраедр) ABCD з вершком в А і з трьома взаємно простопадними ребрами: AB, AC і AD, рівнобіжними координатним осям OX, OY, OZ. Нехай довжини ребер будуть відповідно: dx, dy і dz. Крім того, поле трикутника ACD назовемо ΔF_x, поле трикутника ADB – ΔF_y, поле трикутника ABC – ΔF_z і поле косокутного трикутника BCD . . . . ΔF_n; із рисунка 4 видно, що $\Delta F_x = \frac{dy.dz}{2}$, $\Delta F_y = \frac{dx\,dz}{2}$, $\Delta F_z = \frac{dx.dy}{2}$.

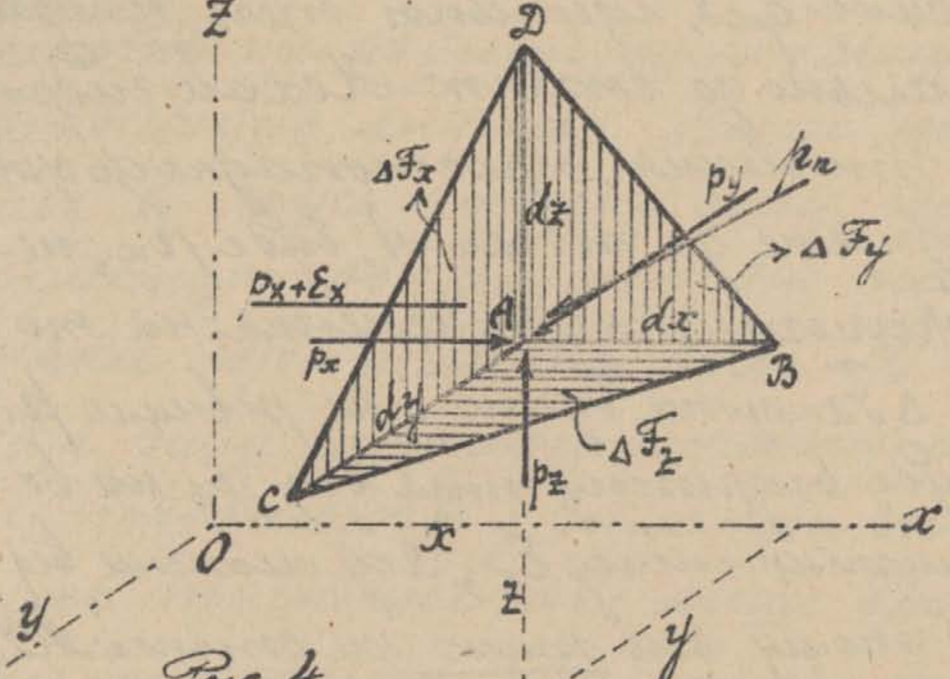


Рис. 4.

Виділений граняк будемо розглядати, як наче б-то тіло тверде, і для находження умов рівноваги його скористаємося виведеним для твердого тіла законом механіки, який гласить: „Для рівноваги вільного твердого тіла необхідно й досить, щоб алгебраїчні суми метів всіх сил на простокутні осі координат були рівні нулю, та щоб алгебраїчні суми статичних моментів всіх сил відносно кожної з осей координат також рівнялись нулю."

З'ясуємо тепер, які сили ділають на виділений граняк і пристосуємо до них приведений закон.

На кожну трикутну стінку граняка ділає сила гидромеханичного тиснення, що походить від течі, яка оточує граняк. Ці сили для ідеальної течі направлені нормально до стінок. Нехай гидромеханичне тиснення, простопадне до стінки ACD, віднесене до точки A, буде p_x; пересічне гидромеханичне тиснення на ту ж стінку ΔF_x може бути і не рівним p_x, але воно буде відріжнятися від p_x на величину безмежно-малу ε_x, яку можна відкинути, а тому весь тиск на стінку ACD напишеться так: $\Delta P_x = (p_x + \varepsilon_x)\Delta F_x = p_x \Delta F_x + \varepsilon_x \Delta F_x$.

В правій частині останнього взору величина p_x є конечна, тому $p_x \Delta F_x = p_x . \frac{dy . dz}{2}$, а $\varepsilon_x \Delta F_x = \frac{\varepsilon_x dy . dz}{2}$. Понеже ε_x - величина безмежно мала, то член $\frac{\varepsilon_x . dy . dz}{2}$ є безмежно малим порівнюючи з членом $\frac{p_x . dy . dz}{2}$ і тому він може бути відкинутим; після цього тиск на стінку ACD напишеться так:

$$\Delta P_x = p_x \Delta F_x .$$

По аналогії можемо написати:

$$\left.\begin{aligned} \Delta P_x &= p_x \Delta F_x \\ \Delta P_y &= p_y \Delta F_y \\ \Delta P_z &= p_z \Delta F_z \\ \Delta P_n &= p_n \Delta F_n \end{aligned}\right\} (5) ;$$

в останньому рівнанні p_n - гідромеханічне тиснення в будь якій точці стінки BCD.

Крім сил тиснення на тетраедр ділають ще об'ємні сили (сила тягару, відосередня, інерції). Коли назвати через k якусь конечну силу, що ділає на одиницю об'єму, тоді на весь об'єм граняка буде ділати сила $K = \frac{k.dx.dy.dz}{6}$ Ця сила третього порядку малости і, порівнюючи з силами гідромеханічного тиснення, які лише другого порядку малости, являється безмежно малою, а тому її можно далі відкинути. Таким чином, умовам рівноваги мусять задовольнити лише сили гідромеханічного тиснення. Напишемо спочатку суму метів сил гідромеханічного тиснення на осі координат.

На вісь X-ів дадуть мети лише сили: ΔP_x і ΔP_n; мети останніх сил, яко нормальних до осі X-ів, будуть $= 0$.

Мет сили ΔP_x буде $= \Delta P_x$; мет сили ΔP_n буде рівнятися цій силі, помноженій на cos кута між цією силою, або між нормалью n до площі BCD, та віссю X-ів, який означимо так: $\cos(n, x)$; отже $\Delta P_{nx} = -\Delta P_n \cos(n,x)$; знак (−) поставлено тут тому, що сила P_{nx} має напрямок, протилежний позітівному напрямкові осі $X^{\text{ів}}$ Таким чином, сума метів сил на вісь X-ів буде: $\Delta P_x - \Delta P_n \cos(n, x) = 0$; аналогічно одержим на:

вісь Y'ів — $\Delta P_y - \Delta P_n \cos(n,y) = 0$

вісь Z'ів — $\Delta P_z - \Delta P_n \cos(n, z) = 0$, або

з рівнань (5): $p_x \Delta F_x - p_n \Delta F_n \cos(n,x) = 0$

$$p_y \Delta F_y - p_n \Delta F_n \cos(n,y) = 0$$

$$p_z \Delta F_z - p_n \Delta F_n \cos(n,z) = 0$$

Але з аналітичної геометрії відомо, що $\Delta F_n \cos(n,x)$ це є мет площинки BCD на координатну площу yz і рівняється полю ΔF_x; так само $\Delta F_n \cos(n,y) = \Delta F_y$, а $F_n \cos(n,z) = \Delta F_z$; принявши це на увагу, можемо попередні рівнання написати в такій формі:

$$p_x \Delta F_x - p_n \cdot \Delta F_x = 0;$$

$$p_y \Delta F_y - p_n \cdot \Delta F_y = 0;$$

$$p_z \Delta F_z - p_n \cdot \Delta F_z = 0;$$ відкіля:

$$p_x - p_n = 0$$

$$p_y - p_n = 0$$

$$p_z - p_n = 0$$, або нарешті:

$$p_x = p_y = p_z = p_n \ldots\ldots\ldots (6)$$

Моменти сил гідромеханічного тиснення відносно осей x, y, z будуть величинами безмежно малими, порівнюючи з самими силами тиснення, тому що для одержання моменту необхідно силу тиснення помножати на величину, меншу від dx, або dy, або dz; з огляду на це умову прирівнання моментів нулю можна зовсім відкинути.

Таким чином, для гідромеханічного тиснення маємо лише одно рівнання (6). Для виводу цього рівнання як ребра граняка, так і нахил стінки BCD взяті цілком довільно, а тому можна сказати: Гідромеханічне тиснення в довільній точці ідеальної течі, яка перебуває в спокою чи в русі, має одну й туж величину по всіх напрямках, або інакше: Гідромеханічне тиснення в ідеальній течі не залежить від напрямку площинки, проведеної через дану точку, а залежить лише від положення цієї точки в просторі та від часу спостереження, себ-то, являється функцією лише координат та часу:

$$p = \Phi(x, y, z, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

В тому випадку, коли теча перебуває в супокою, тиснення з бігом часу не міняється, а тому воно залежить тоді лише від координат:

$$p = f(x, y, z) \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Вимір гидромеханичного тиснення

$$p = \left|\frac{\Delta P}{\Delta F}\right|_{\Delta F=0} = \frac{\text{сила}}{\text{площа}} = \frac{\text{кілогр.}}{\text{метр}^2}.$$

§7. Гидромеханичне тиснення для реальної течі.

Виводи, зроблені в попередньому §, являються справедливими лише для течі ідеальної. Коли ж перейти до течій реальних, тоді необхідно приняти на увагу як сили, що ростягають граняк, так і сили тангенціальні, що проявляються вздовж стінок граняка. Через це зроблені вище виводи не можуть бути прикладені без поправок і до теч реальних. В дальшому, одначе, рівнання (6) прикладається і до теч реальних, чим вноситься де-яка неточність, степень якої залежить від властивостей течі та стану, в якому вона перебуває, і може бути встановлена лише спостереженнями.

Розділ II.

Гидростатика.

§8. Рівняння рівноваги ідеальної течі.

Для знаходження виду функції: $p = f(x,y,z)$ виведемо рівняння рівноваги для елементарного об'єму ідеальної течі. Виділимо осеред течі, що перебуває в рівновазі, елементарний рівнобіжностінник MABC (рис 5); ребра його візьмемо безмежно-малі $= dx$, dy і dz, а напрямок із рівнобіжними осями прямокутних координат OX, OY, OZ. Для того, щоб цей рівнобіжностінник залишався в стані супокою, необхідно, щоб алгебраїчні суми метів всіх прикладених до нього сил на осі координат OX, OY, OZ були рівні нулю і щоб алгебраїчні суми статичних моментів тих сил відносно тих же осей координат були рівні нулю.

З'ясуймо тепер, які сили ділають на виділений рівнобіжностінник і прикладемо до них приведене правило. Нехай гидростатичне тиснення в точці M буде p, тоді й для всієї стінки MBC, поле якої $= dy.dz$, можна приняти (згідно §6) ти-

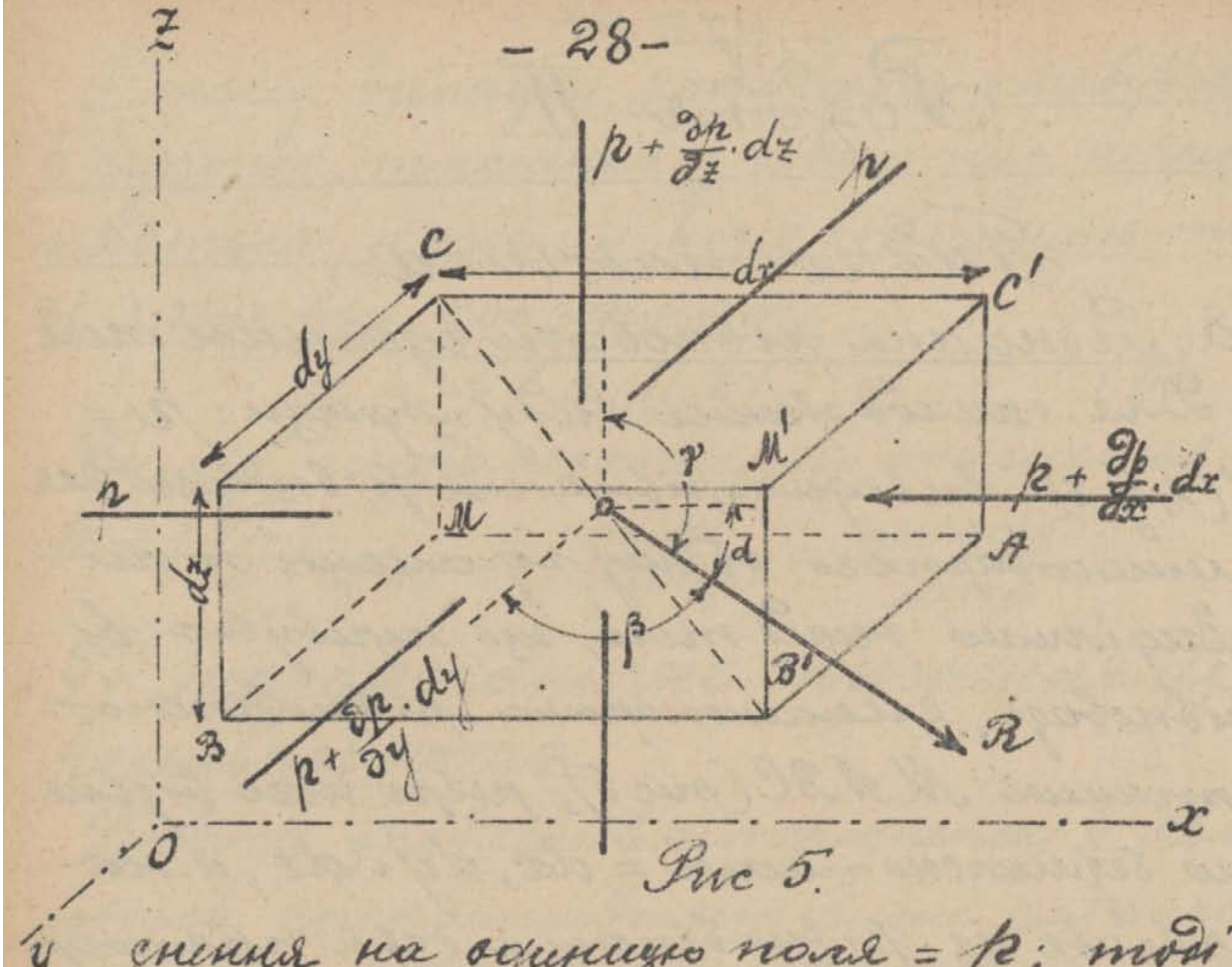


Рис 5.

снення на одиницю поля = p; тоді весь тиск на стінку MBC буде = p.dy.dz.

Напрямок цього тиску такий, як і позитивної осі OX. Перейдемо тепер до стінки AB'C'; ця стінка рівнобіжна стінці MBC і віддалена від останньої на безмежно малу величину dx; тиснення в течі зміняється тягло, а тому на безмежно-малому віддаленню тиснення зміниться також на безмежно малу величину dp. Як було показано в §6, тиснення p є функція координат (x, y, z), а тому повний диференціал функції p

$$= dp = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz.$$

Координати осі вибрані так, що

стінки MBC і $AB'C'$ рівнобіжні площі YZ; при безмежно малих розмірах MBC і $AB'C'$ при переході від MBC до $AB'C'$ можна приняти, що лише координата x змінилася на $x+dx$, координати ж y і z залишилися без зміни; при такому припущенню $dy=0$ і $dz=0$, а тому $dp=\frac{\partial f}{\partial x}.dx$, або нарешті $dp=\frac{\partial p}{\partial x}.dx$, а тиснення на стінку $AB'C'$ буде $=p+\frac{\partial p}{\partial x}.dx$, а тиск на всю стінку $=(p+\frac{\partial p}{\partial x}.dx).dy.dz$.

Це тиснення має напрямок, противний напрямкові тиснення на стінку MBC.

Анальогічно можна показати, що тиск на стінку $MAC=p.dx.dz$, а на стінку $M'B'B=(p+\frac{\partial p}{\partial y}.dy)\,dx.dz$; тиск на стінку $MAB=p.dx.dy$, а на стінку $CC'M'=(p+\frac{\partial p}{\partial z}.dz)dx.dy$.

Крім внутрішніх сил тиснення, на рівнобіжностінник ділають ще зовнішні об'ємні сили. Нехай вислідна об'ємних сил буде R (рис. 5) і творить з осями координат кути: α, β, γ. Назвемо зовнішню силу, що ділає на одиницю маси течі через φ, а густоту течі через δ, тоді маса всього рівнобіжностінника буде $=\delta.dx.dy.dz$, а об'ємна сила $R = q.\delta dx.dy.dz$.

Мет цієї сили на вісь X-ів буде:

$R\cos\alpha = q.\cos\alpha.\delta dxdydz$.

Примітка. Зогляду на те, що сила є по числовій величині рівна масі тіла, помноженій на прискорення руху, сила q, що приходиться на одиницю маси, є рівна по числовій величині прискоренню ($q = m.\frac{dv}{dt}$; при $m=1$, $q = \frac{dv}{dt}$).

Мет сили q на вісь X-ів $= q\cos\alpha$, (або мет прискорення руху на ту ж вісь) назовемо через X; тоді:

$R\cos\alpha = X\delta dxdydz$;

Аналогічно можемо написати:

$R\cos\beta = Y\delta dxdydz$;

$R\cos\gamma = Z.\delta dxdydz$; де Y і Z — мети сили q на осі Y-ів і Z-ів.

Возьмемо тепер суми метів всіх сил на координатні осі, спочатку на вісь X-ів.

На цю вісь спроектуються:

1) цілком сила $pdydz$ зі знаком (+);

2) сила $(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz$ зі знаком (−);

3) сила $R\cos\alpha = X\delta dxdydz$ зі знаком (+);

мети останніх сил, яко нормальних до осі OX, будуть $= 0$; тому алгебраїчна сума метів сил на вісь OX буде:

$p\,dy\,dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x}\,dx)\,dy\,dz + X\delta\,dx\,dy\,dz = 0;$

відсіля: $-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + X\delta\,dx\,dy\,dz = 0$ . . .(9')

Після скорочення на $dx\,dy\,dz$ (не рівне нулю), одержимо: $\frac{\partial p}{\partial x} = \delta . X$;

Взявши мети сил на други осі, одержимо аналогічно:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \delta Y$$

$$\text{і } \frac{\partial p}{\partial z} = \delta . Z \quad . . . . (9)$$

Ці три рівнання мають назву *Ейлерових діференціальних рівнань рівноваги ідеальної течі* (Виведені Ейлером р. 1755).

Для рівноваги тіла необхідно ще, щоб сума моментів сил відносно осей координат рівнялась нулю, але величини цих моментів відносно осей, проведених через рівнобіженостінник, будуть безмежно малі в порівнанню з самими силами і тому їх можна відкинути. Дійсно, момент сил від тисків, рівнобіжних осі Х-ів відносно осі Y-ів, віддаленої від сил на $\frac{dz}{n}$, буде такий:

$$p.dy.dz.\frac{dz}{n} - (p + \frac{\partial p}{\partial x}.dx)dy.dz.\frac{dz}{n} =$$

$= -\frac{\partial p}{\partial x}.dx\,dy\,dz.\frac{dz}{n}$, себ-то четвертого порядку малости, тоді коли мет сил був лише третього порядку малости.

Момент від зовнішньої сили буде $\underline{X}\delta dxdydz \cdot \frac{dz}{n}$, себ-то теж величина четвертого порядку малости.

§9. Підросподіл теч по характеру їх густоти.

У виведені рівняння входить величина густоти течі, або маса одиниці об'єму її, яку ми означимо літерою δ. Ця густота може бути або залежною від тиснення, або незалежною від нього. До першого роду теч належать гази, або течі стискаємі, для них $\delta = F(p)$, цих теч ми не розглядаємо; до другого роду належать крапельні течі, або нестискаємі. Ці крапельні течі можуть бути: а) во всіх точках об'єму однородними, себ-то скрізь мати однакову густоту, яка в цьому випадкові не залежить від координат, а є величиною сталою: $\delta = \text{const}$; або, в) мати в ріжних точках об'єму ріжну густоту, себ-то бути неоднородними.

В неоднородних течах густота є функцією від координат: $\delta = \Phi(x, y, z)$.

Прикладом однородної течі може бути дестильована вода при однаковій по всьому об'єму теплоті; прикладом неоднородної течі може бути сумішок води з будь яким маслом або спиртом. Природні течі всі до де-якої міри стискальні і міняють свою густоту при зміні теплоти; але ці зміни об'єму й густоти так малі, що їх приймають на увагу лише в виключних випадках.

§10. Находження величини гідромеханічного тиснення.

З §8 були виведені взори (9), які дають звязок між похідними тиснення p та густотою течі δ і метами зовнішньої сили: X, Y, Z на осі координат; покажемо тепер, як по цих взорах найти величину тиснення в даній точці ідеальної течі.

Помножимо кожне з трьох рівнянь (9) відповідно на dx, dy, dz, тоді одержимо:

$$\frac{\partial p}{\partial x} . dx = \delta . X . dx;$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} . dy = \delta . Y dy;$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} . dz = \delta . Z . dz;$$

Складемо тепер ці рівняння:

$$\frac{\partial p}{\partial x}.dx + \frac{\partial p}{\partial y}.dy + \frac{\partial p}{\partial z}.dz =$$
$$= \delta(Xdx + Ydy + Zdz) \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Коли ми розглядаємо течу в супокою, то, згідно сказаному в §6, тиснення p є функцією <u>лише</u> трьох координат x, y, z, а тому вираз: $\frac{\partial p}{\partial x}.dx + \frac{\partial p}{\partial y}.dy + \frac{\partial p}{\partial z}.dz$ буде, як відомо з діференціяльного рахування, <u>повним діференціалом</u> функції p, себ-то буде $= dp$: тому можна рівняння (10) переписати так:

$$dp = \delta(Xdx + Ydy + Zdz) \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Для того, щоб теча була в рівновазі, необхідно, щоб її права половина рівняння (11) уявляла повний діференціял певної функції від (x, y, z); при яких же умовах це можливо? Тут може бути два випадки: перший, коли густота δ - є величина стала, а другий, коли вона також залежить від координат. В першому випадку, для того, що б $\delta(Xdx + Ydy + Zdz)$ було повним діференціалом, необхідно, щоб повним діференціалом був лише член в дужках, себ-то необхідно, щоб існувала така функція координат U, діференціал якої dU був би рівен $Xdx + Ydy + Zdz$; таке рівенство можливе тоді, коли: $\frac{\partial U}{\partial x} = X$; $\frac{\partial U}{\partial y} = Y$; $\frac{\partial U}{\partial z} = Z$.

Як що сили задані нами їх митами $\underline{X}$, $\underline{Y}$, $\underline{Z}$, тоді для існування функції U необхідно, щоб були такі відношення:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x};$$

Коли ці умови задовольняються, тоді існує функція: $U = \int Xdx + Ydy + Zdz + Const.$ Ця функція назив. **потенціальною функцією**, а про сили, які означаються такою функцією, кажуть, що вони мають **потенціал**. При існуванні функції U тиснення p при постійному δ буде:

$$p = \delta \int Xdx + Ydy + Zdz + C,$$ або:

$$\underline{p = \delta U + C} \ldots\ldots (12)$$

Коли тіча неоднородна, себ-то δ — не постійне, тоді друга половина рівнання (11) може бути повним діференціалом лише тоді, коли вираз в дужках буде повним діференціалом функції U, а густота тічі δ буде функцією від функції U, себ то, необхідно, щоб було:

$$dp = \delta(\underline{\bar{X}}dx + \underline{\bar{Y}}dy + \underline{\bar{Z}}dz) = \varphi(U)\,dU \ldots (13)$$

Вираз $\varphi(U)dU$ є повним діференціалом певної функції координат $\Psi(U)$, а тому:

$$dp = \delta(Xdx + \underline{Y}dy + Zdz) = d[\Psi(U)] \ldots (13')$$

В цьому випадку необхідно, щоб були такі взаємовідношення:

$$\frac{\partial \Psi(U)}{\partial x} = \delta X; \; \frac{\partial \Psi(U)}{\partial y} = \delta Y; \; \frac{\partial \Psi(U)}{\partial z} = \delta Z;$$

або коли задані δ, X, Y і Z, то такі:

$$\frac{\partial(\delta X)}{\partial y} = \frac{\partial(\delta Y)}{\partial x}; \; \frac{\partial(\delta Y)}{\partial z} = \frac{\partial(\delta Z)}{\partial z};$$

$$\frac{\partial(\delta X)}{\partial z} = \frac{\partial(\delta Z)}{\partial x};$$

Проінтегрувавши рівнання (13), одержимо: $\underline{p = \Psi(U) + C}$

Рівнання (11):

$\underline{dp = \delta(Xdx + Ydy + Zdz)}$ називається <u>Основним рівнанням гідростатики</u>, або <u>рівнанням Ейлера</u>.

Рівнання це має певний механічний зміст. З теоретичної механіці доводиться, що <u>механічна робота сили K на протязі ds, або за час dt, є рівна сумі механічних робіт за той же час трьох складових сили K на координатні осі</u>, що виражається таким взором:

$$\underline{dA = Kds} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

або $\underline{dA = Xdx + Ydy + Zdz}$ . . . . (15').

На підставі цього можна рівнання (11) висловити так: *диференціал гідростатичного в певній точці тиснення є рівний елементарній роботі зовнішніх сил, ділаючих на масу течі δ, що включає дану точку, при елементарному зрушенню цієї маси.*

Рівнання (12) і (14) не дають ще опреділеної відповіді на питання про тиснення в певній точці, бо стала інтеграції C, яка входить в ці рівнання, не є покищо нам відома. Отже треба ще найти значіння сталої C. Для находження C потрібно написати *особливі рівнання для* таких точок в течі, для яких і тиснення, *і функція U, або Ψ(U) відомі*, тоді ми знайдемо C а вставивши знайдене C до рівнання (12) або (14), одержимо значіння p в даній точці. Найчастіш такі допоможені точки беруться на вільній поверхні течі, де гідростатичне тиснення p є рівне тисненню атмосфери P_0; для таких допоможних точок особливе рівнання буде: $p = P_0$. Із фізики відомо, що сила (напр. вага) є рівна чисельно добутку з маси на прискорення. Коли ми вагу одиниці об'єму течі, або специфічну вагу, назвемо через γ, а прискорення від сили земного тягару через g, тоді густота течі, або маса одиниці об'єму $\delta = \frac{\gamma}{g}$; вставивши цей вираз у основне рівнання гидростатики 11), можемо написати його і в такому вигляді:

$$dp = \frac{\gamma}{g}\left(Xdx + Ydy + Zdz\right) \quad \ldots\ldots (16)$$

або: $$\frac{dp}{\gamma} = \frac{1}{g}\left(Xdx + Ydy + Zdz\right) \ldots (16');$$

також: $$dp = \frac{\gamma}{g} K ds \quad \ldots\ldots (16'')$$

§11. Закон Паскаля. Коли нам дана неоднородна крапельна теча, а діляючі на неї об'ємні сили задані потенціяльною функцією координат: $U(x, y, z)$, тоді тиснення в кожній точці течі знайдеться з рівнань (12) або (14), коли буде відомо C.

Для будь-якої точки (x_0, y_0, z_0), що лежить на поверхні течі, гидростатичне тиснення $p_0 =$, як уже сказано, зовнішньому атмосферному тисненню P_0, а функція $U(x, y, z)$ прийме вигляд $U(x_0, y_0, z_0)$; тому можемо для цієї точки написати:

$$P_0 = \psi(U_0) + C.$$

Відсіля опреділиться $C = P_0 - \Psi(U_0)$.

Гідростатичне тиснення для будь-якої точки (x, y, z) буде: $p = \Psi(U) + C$; вставивши сюди замісць C його значіння, одержимо: $$p = P_0 + \left\{\Psi(U) - \Psi(U_0)\right\} \ldots\ldots (17)$$

або: $$p = P_0 + \left\{\Psi(x, y, z) - \Psi(x_0, y_0, z_0)\right\} \ldots (17')$$

Маючи це рівнання, задамо собі питання, як буде мінятися тиснення в даній точці (x, y, z), коли буде мінятися зовнішнє, в даному разі атмосфери, тиснення. В рівнанню (17) або (17') вираз у великих дужках залежить лише від координат розглядаємої точки, та координат тієї, цілком також опреділеної точки, яку ми взяли на поверхні течі; отже цей вираз при зміні P_0 залишається постійним, а тому гідростатичне тиснення в точці буде збільшуватися або зменшуватися настільки, на скільки зміниться зовнішнє тиснення. Точку (x, y, z) ми взяли в течі довільно, а тому виведене зараз твердження відноситься до кожної точки в течі.

Таким чином, можемо сказати: *Всяке зовнішнє тиснення, що його утворено в будь якій точці крапельної* однородної або неоднородної, перебуваючої в рівновазі течі, передасться в усі точки течі без зміни.

Закон цей був винайдений Паскалем (1623–1662) досвідним шляхом і носить назву „Закона Паскаля."

Вивід закону Паскаля можна подати і трохи в иншій формі. Уявимо собі посудину, яка виповнена течею (рис. 6). Нехай на поверхню цієї течі тисне така сила P_0, що витворює на одиницю поля поверхні тиснення $= p_0$; припустимо далі, що ніяких об'ємних сил, в тому числі й сили тягару, не існує, себ-то $\underline{X}=0$, $\underline{Y}=0$; $\underline{Z}=0$, тоді рівняння (11) напишеться так: $dp = \delta.(0)=0$;

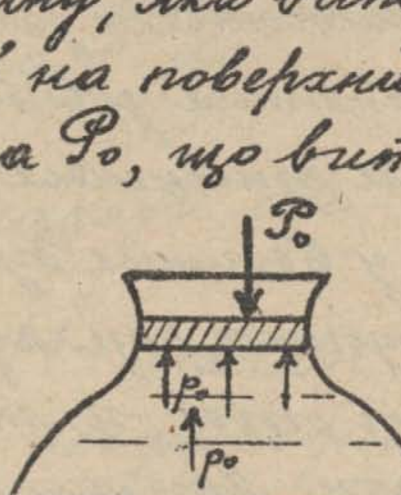


Рис. 6.

відсіля тиснення p в довільній точці течі буде = Const; тиснення у самої поверхні є рівне й протилежне зовнішньому тисненню p_0, а тому Const $= p_0$ і $p = p_0$ для усіх точок течі, себ-то, зовнішнє тиснення передається в усі точки течі без зміни.

Наочне пояснення цього закону можна зробити в такий спосіб: візьмемо вальцову посудину M з поземним дном і кришкою (рис. 7); нехай в цій посудині мається три толока K_1, K_2, K_3, що входять в поземні також рурки, поля цих толоків нехай відповідно будуть: F_1, F_2, F_3. Вся посудина виповнена течею. Коли на толок K_1 натиснути силою P_1, тоді на одиницю поля толока, а значить і течі коло нього, прийдеться тиснення $p = \frac{P_1}{F_1}$; це тиснення перейде без зміни в кожну точку посудини (на силу тягару завдяки поземному положенню посудини й толоків можна не звертати уваги), в тім числі й на толоки K_2 і K_3; що б толоки не висовувалися, необхідно, згідно закону Паскаля, приложити до них відпорні сили $P_2 = p\,F_2$ і $P_3 = p\,F_3$, що в дійсності й

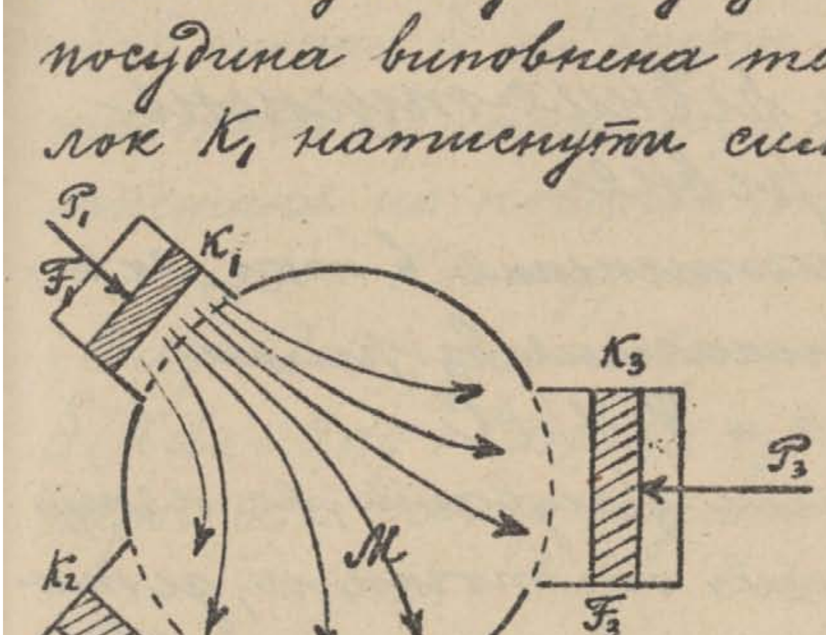


Рис. 7
(Поземний розсік).

спостерігається. — З огляду на то, що $p = \frac{P_1}{F_1} = \frac{P_2}{F_2} = \frac{P_3}{F_3}$, можна написати, що: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{F_1}{F_2}$; $\frac{P_2}{P_3} = \frac{F_2}{F_3}$; $\frac{P_1}{P_3} = \frac{F_1}{F_3}$, себ-то, для запевнення рівноваги сили, що ділають на толоки, мусять бути пропорційними їх полям. Закон Паскаля, як побачимо далі, має велике значіння в технічній практиці.

§12. Поверхні рівних тиснень або поверхні рівня.

Гидростатичне тиснення в течі, як нами виведено, визначається взорами:

$$p = \delta U + C \quad і \quad p = \Psi(U) + C.$$

Коли б ми хотіли з'ясувати, як лягають в просторі серед течі ті точки її, де тиснення однакові, то для цього треба в наведених взорах покласти p рівним також постійній величині C_1; тоді:

$\delta U = C_1 - C$; відкіля U — Const., або:

$\Psi(U) = C_1 - C$, або $\Psi(U)$ — Const.

Отже, виходить, що гидростатичне тиснення в течі може змінитися лише за зміною функції U, або $\Psi(U)$; U і $\Psi(U)$ суть функції трьох координат (x, y, z), а тому геометрично вони означають, як це доводиться в аналітичній геометрії просторньовій, - поверхні. Таким чином, *геометричним місцем точок з однаковими гідростатичними тисненнями будуть поверхні, які називаються поверхнями рівного тиснення*, або *поверхнями рівня*.

При переході на поверхні рівня від однієї точки її до другої, тиснення залишається незмінним, а тому приріст тиснення на поверхні рівня dp буде $= 0 \ldots (18)$. З огляду на те, що $dp = \delta(Xdx + Ydy + Zdz)$, для поверхні рівня буде: $\delta(Xdx + Ydy + Zdz) = 0$; густота течі δ завжди > 0, а тому мусить бути:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \ldots\ldots (18')$$

Проінтегрувавши це рівняння, найдемо: $F(x, y, z) + C$, які дають безмежну кількість подібних поверхней, що відрізняються лише постійною C; одна з таких поверхней пройде через нашу точку і дасть геометричне місце однакових тиснень, рівних p.

З'ясуємо тепер де-які властивости поверхней рівня. Возьмемо будь-яку поверхню рівня, віднесену до прямокутного укладу координат OX, OY, OZ (рис. 8). Намітимо на ній дві безмежно близьких точки A і B з координатами: x, y, z та x+dx, y+dy, z+dz і означимо віддалення між цими точками ds. При безмежній малості віддалення ds цю лінію AB можна вважати простою, а частину поверхні рівня, на якій ця лінія проведена, плоскою. Означимо далі кут між AB та напрямком осей X'ів, Y'ів та Z'ів через λ, μ і ν; тоді: $\cos\lambda = \frac{dx}{ds}$; $\cos\mu = \frac{dy}{ds}$; $\cos\nu = \frac{dz}{ds}$;

Поділимо рівняння 18 на ds, тоді одержимо: $X.\frac{dx}{ds} + Y.\frac{dy}{ds} + Z.\frac{dz}{ds} = 0.$

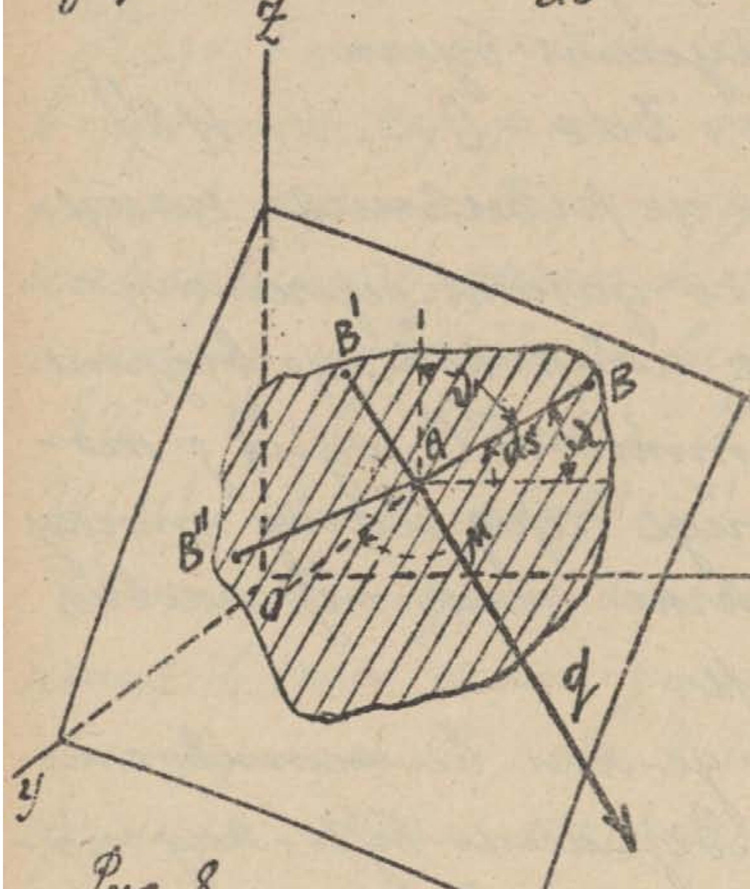


Рис. 8

Пригадуємо до цього з §8, що $X = q.\cos\alpha$; відповідно $Y = q\cos\beta$; $Z = q\cos\gamma$ і вставимо ці значіння X, Y, Z в рівняння (18), тоді одержимо:

$$q\cos\alpha\cos\lambda + q\cos\beta.\cos\mu + q\cos\gamma.\cos\nu = 0$$

або $q(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta.\cos\mu + \cos\gamma.\cos\nu) = 0$;
в аналітичній геомет доводиться, що вираз в дужках є рівним cos'ові кута між напрямком сили q та лінією ds, себ то:

$\cos\alpha.\cos\lambda + \cos\beta.\cos\mu + \cos\gamma.\cos\nu = \cos(q, ds)$,
а тому буде: $q\cos(q, ds) = 0$;
з огляду на те, що сила q не $= 0$, мусить бути: $\cos(q, ds) = 0$, а це означає, що зовнішня сила q направлена до лінії AB, проведеної з точки A по поверхні рівня, — нормально. Проста AB проведена з точки A довільно, тому сила q буде нормальна до кожної простої AB', AB'', проведеної з точки A по поверхні рівня, а значить вона буде нормальною до самої поверхні рівня в даній точці A.

Покажемо тепер, що на поверхні рівня густота течі буде сталою і в тому випадку, коли теча неоднородна.

Для рівноваги неоднородної течі необхідно, як показано в §10, щоб існувало рівенство (13): $dp = S(U)\,dU$;
Для поверхні рівня $dp = 0$, тому:
$S(U)\,dU = 0$;
$S(U)$ означає густоту течі і не може рівнятися нулю, а значить $dU = 0$; від-

сіля $U = Const.$; коли ж функція U є величина постійна, то й $\varphi(U) = \delta$ буде також величиною постійною; отже виходить, що на поверхні рівня $\delta = \varphi(U)$ мусить бути величиною сталою. Зогляду на те, що в важких тілах специфічна вага, чи вага одиниці об'єму, яку ми назвали через $\gamma = \delta g$, то можна сказати, що на поверхні рівня, де δ - величина постійна, специфічна вага γ, яко добуток двох постійних величин δ і g, буде також величиною сталою.

В термодинаміці ще до цього доводиться, що на поверхні рівня і теплина течі скрізь однакова.—

Резюмуючи зроблені висновки, можна сказати, що поверхні рівня мають такі властивості:

1. Вид поверхні рівня залежить від потенціальної функції U.
2. Гідростатичне тиснення на поверхні рівня, як в однородних, так і в неоднородних точах скрізь однакове або иншими словами, зміна тиснення при переході від однієї точки до другої на тій же самій поверхні рівня є рів-

на нулю.

3. Густота течі і специфічна вага її на поверхні рівня скрізь залишаються однаковими.

4. Теплина течі на поверхні рівня скрізь однакова.

5. Вислідні зовнішніх об'ємних сил або вислідні прискорення мають напрямок, нормальний до поверхні рівня в кожній точці її. Ортогональні до поверхні рівня лінії дають так звані силові лінії.

6. Дві поверхні рівня, побудовані для двох різних точок, не мають спільних точок.

§ 13. Приклад находження вида поверхні рівня.

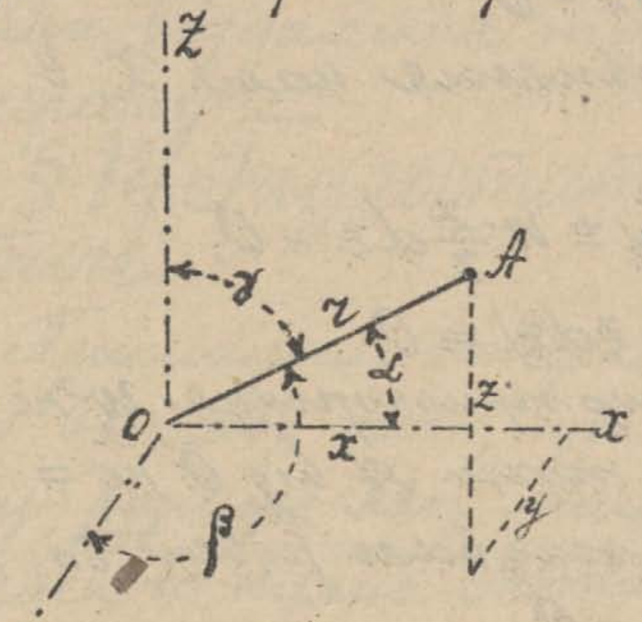


Рис. 9.

Нехай на довільну точку ідеальної течі A (рис. 9) ділають обьмні сили, які направлені від точки або в точку O; прискорення цих сил w є функцією віддалення A від O, себ-то: $w = f(r)$, коли OA означим через r.

Возьмемо точку O за початок прямокутних координат, відносно яких координати точки A будуть: x, y, z; кути між напрямком OA і осями координат нехай будуть: α, β і γ. Мети на координатні осі сили, діючої на одиницю маси, рівні, як уже відомо, по числовій величині, метам прискорення, а прискорення нам відомо; тому:

$$\underline{X} = \pm w \cos\alpha = \pm w \cdot \frac{x}{r};$$

$$\underline{Y} = \pm w \cdot \cos\beta = \pm w \cdot \frac{y}{r};$$

$$\underline{Z} = \pm w \cdot \cos\gamma = \pm w \cdot \frac{z}{r};$$

Основне диференціальне рівняння поверхні рівня є: $dp = \delta(Xdx + Ydy + Zdz) = 0$

Густота тіла $\delta > 0$, а тому:

$$\underline{X}dx + \underline{Y}dy + \underline{Z}dz = 0;$$

Вставивши в це рівняння наші $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$ одержимо:

$$\pm w\frac{x}{r}dx \pm w\frac{y}{r}dy \pm w\frac{z}{r}dz = 0,$$

або: $\pm \frac{w}{r}(xdx + ydy + zdz) = 0$

З огляду на те, що прискорення w не $= 0$, а віддалення r точки A від O не $= \infty$, необхідно, щоб існувало рівенство:

$$xdx + ydy + zdz = 0.$$

Ліва половина цього рівняння є повним діференціялом такої функції:

$U = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$, тому можна написати:

$d\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right) = 0$, і відсіля маємо:

$x^2+y^2+z^2 = Const. =$ також і r^2.

Останній вираз: $x^2+y^2+z^2=r^2$ дає сферу, яка проходить через точку A.

В аналітичній геометрії доводиться, що такий звязок між координатами є лише у поверхні кулі; тому наші поверхні рівня будуть сферами зі спільним осередком O і різноманітними лучами. Одна сфера, що описана лучем r, проходить через точку A. Коли ж навпаки, було б відомо, що поверхні рівня для певної течі суть сфери, тоді необхідно зробити висновок, що об'ємні сили направлені до одного осередку, або від нього, і що вони являються функціями віддалення точки течі від того осередку.

§ 14. Гидростатика важкої течі.

Прикладемо виведені взори та висновки до важкої течі, що виповнює посудину, розміри якої малі порівнюючи з земною кулею. В такій посудині сили земного тягару можна вважати доземними, рівнобіжними і для всіх точок течі рівними.

1.) Находження поверхней рівня.

Возьмем осеред течі точку A і віднесем її до прямокутного укладу координат (рис. 10) $0X$, $0Y$, $0Z$, у якого площа $0XY$ поземна, а вісь Z-ів направлена догори. Нехай на точку A ділає лише сила тягару с прискоренням:

$$g = (9{,}81 \,{}^{м}/_{с^2}).$$

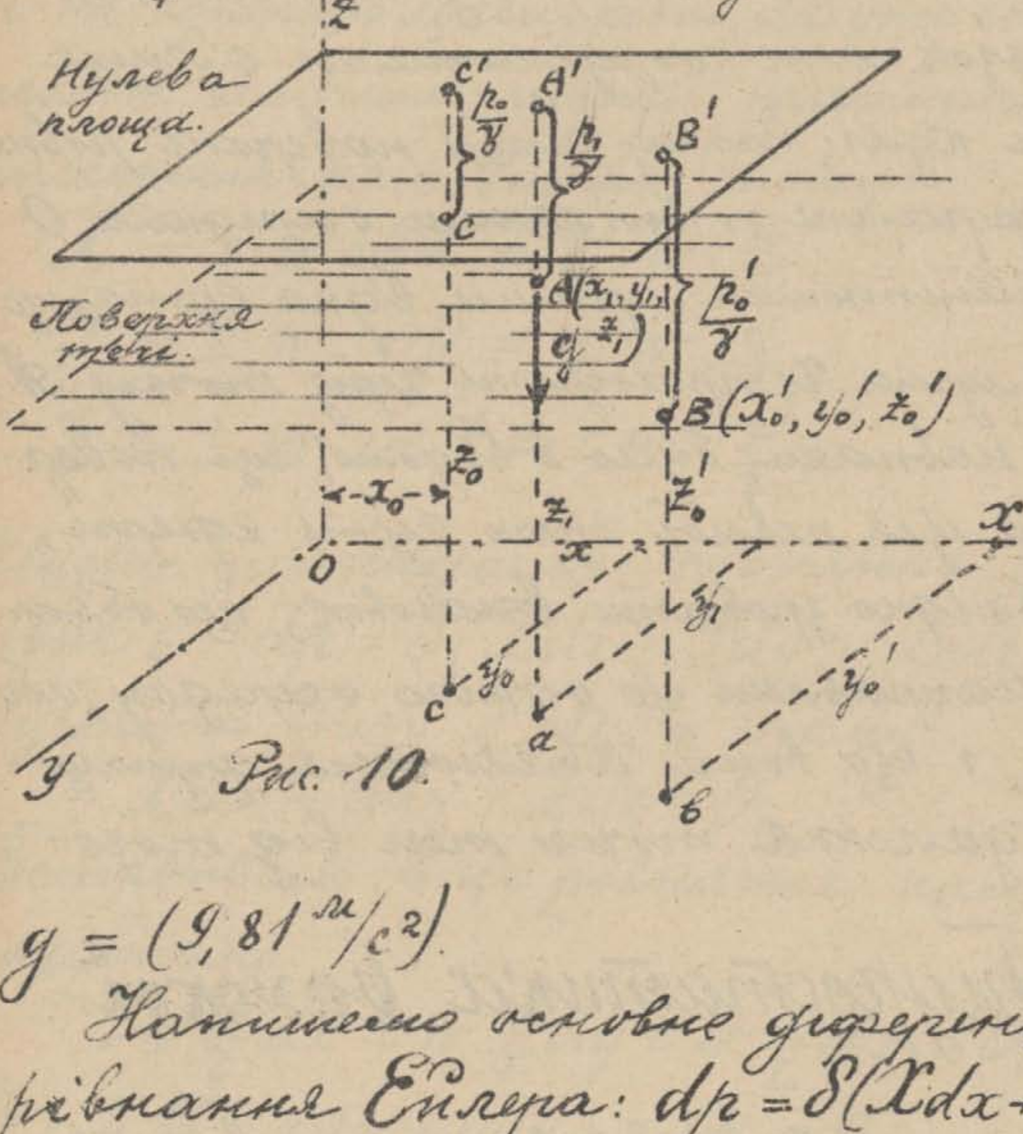


Рис. 10.

Напишемо основне диференціальне рівнання Ейлера: $dp = \delta(Xdx + Ydy + Zdz)$.

Мет об'ємної сили, або прискорення цієї сили на вісь X-ів, в даному разі мет прискорення сили тягару g, $X = 0$; мет на вісь Y-ів тако ж $= 0$; мет на вісь Z-ів $= -g$; тому: $dp = \delta(-g dz) = -\delta g dz$

$$\ldots\ldots\ldots (19)$$

Для находження тепер рівнання поверхні рівня, необхідно надати, згідно §12, приростові тиснення dp значіння нуля: $dp = 0$, або: $-\delta g dz = 0$; в останньому рівнанню δ і g не рівні нулю, а тому мусить бути: $dz = 0$, а відсіля:

$$z = Const. \ldots\ldots (20)$$

Це останнє рівнання показує, що для важкої, перебуваючої в спокою течі, на яку ділають лише сили тягару, віддалення точок однакового тиснення від основної поземної площі є стале, себто, всі точки одинакового тиснення лежать на площі, рівнобіжній координатній площі XOY; инакше: *для важкої, перебуваючої в спокою течі, на яку ділають лише сили тягару, поверхні рівня будуть поземні площі.*

В числі постійних величин (рівн. 20) може бути і z, (координата точки A); тоді $z = z$, і поверхня рівня пройде через точку A.

На вільній поверхні важкої течі гідростатичне тиснення є рівне зовнішньому тисненню: $p = P_0$,
тому, коли на поверхню течі тисне рівномірно атмосфера, пар, або який газ,

то гідростатичне тиснення p в точках цієї поверхні буде скрізь однакове, себто зміна тиснення на вільній поверхні dp буде = 0, а тому, вільна поверхня течі буде поверхнею рівня, а значить поверхнею поземною.

В рівнання (20) z = Const не входить зовсім форма посудини, яку виповнює теча, тому гідростатичне тиснення для всіх точок однієї поземної площі будь яких з'єднаних між собою посудин (рис. 11) буде однакове. Ця властивість важкої течі використовується, між иншим, у водяному спадомірі, яким можна находити ріжницю вишин двох точок. Цей простіший спадомір має дві шклянних рурки, з'єднаних між собою гумовою руркою, яку можна взяти відповідної до потреби довжини. Коло

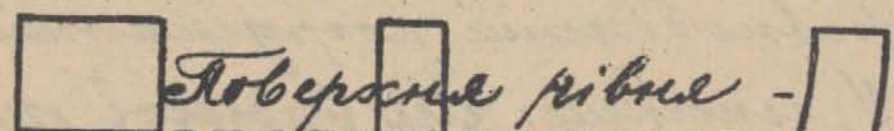


Рис. 11.

шклянних рурок прикріплені шкали, розділені на сантиметри, або ж інші одиниці довжини. Весь пристрій заповнюється водою. Днище однієї рурки ставиться на одну дану точку M (рис. 12), а днище другої на другу N, яка, припустим, буде

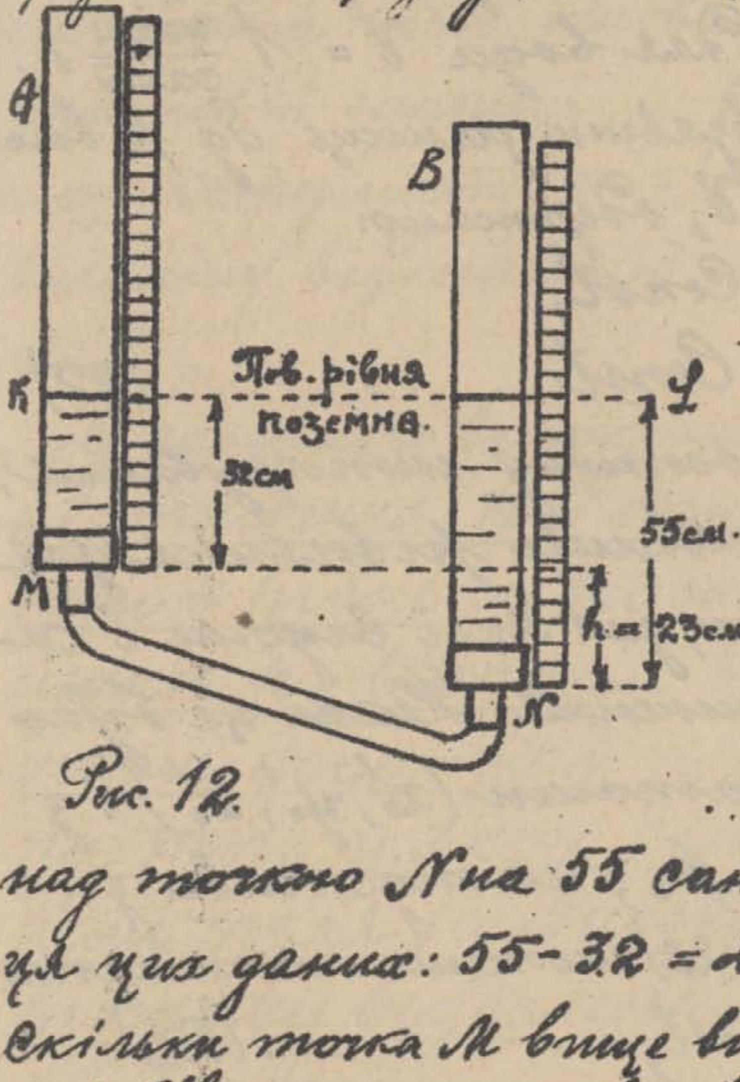


Рис. 12.

нижче від M; рурки A і B поставимо доземно. Тоді в рурках установиться поземна поверхня рівня KL, яка нехай буде лежать над точкою M на 32 сантиметри, а над точкою N на 55 сантиметрів. Різниця цих даних: 55-32 = 23 см. і покаже, на скільки точка M вище від точки N.

2). Находження величини гідростатичного тиснення.

Для важкої однородної течі, яка має сталу густоту δ і на яку ділає лише сила тягару, гідростатичне тиснення найдемо також з основного рівняння (11)

$dp = \delta (X dx + Y dy + Z dz)$, прийнявши на увагу, що $X = 0; Y = 0; Z = -g$.

$$dp = -\delta g dz;$$

$$\int dp = \int -\delta g dz = -\delta g \int dz + Const$$

$$p = -\delta g z + const \ldots\ldots (21),$$

але добуток $\delta g = \gamma$ – вазі одиниці об'єму важкої течі; для води $\gamma = 1 \frac{грам}{сант^3}$, або $1000 \frac{кілогр.}{метр^3}$; взявши замісць δg рівне цьому добутку γ, одержимо:

$$p = -\gamma z + Const,$$

або: $p + \gamma z = Const \ldots\ldots\ldots (22)$

Щоб знайти постійну интеґрування, необхідно мати особливе рівняння для такої точки течі, для якої відомі і координати, її й тиснення. Нехай це буде точка B з координатами (x_0', y_0', z_0') і з тисненням в ній p_0; на підставі загального рівняння (22) можемо написати:

$$p_0' + \gamma z_0' = Const; \ldots\ldots (23)$$

в цьому рівнянню всі члени лівої частини р-ння відомі, а тому й постійна величина (Const) опреділяється.

Вставимо тепер значіння постійної $= p_0 + \gamma z_0$ в рівняння (22) і одержимо: $\underline{p + \gamma z = p_0' + \gamma z_0'} \ldots\ldots (24)$

або: $p = p_0' + \gamma(z_0' - z)$ . . . . (25)

З огляду на те, що в нас точка B взята так, що $z_0 < z$, рівняння (24) можна переписати инакше:

$p = p_0 + [-\gamma(z - z_0)]$, або $p = p_0 - \gamma(z - z_0')$.

Вираз $\gamma(z - z_0')$, або $\gamma.1.(z_0' - z)$ дає вагу стовпа течі, основа якого = одній квадратовій одиниці, а висота рівна ріжниці координат $(z - z_0')$, або рівна прямовисному віддаленню точки A від точки B.

Із сказаного виходить, що гидростатичне тиснення p в одній точці важкої течі є рівне гидростатичному тисненню p_0 в другій її точці з алгебраїчним додатком до нього ваги стовпа течі, у якого основа рівна одиниці поля, а висота рівна прямовисному віддаленню одної точки від другої.

Найчастіще буває відомим тиснення P_0 на поверхні течі; коли рівняння (23) прикласти до поверхньової точки $C(x_0, y_0, z_0)$, тоді $Const. = P_0 + \gamma z_0$ і тоді тиснення в точці A буде: $p = P_0 + \gamma(z_0 - z)$;

тут $z_0 - z = Cc - Aa$ = глибині точки A від вільної поверхні; назвавши цю глибину через h, одержимо:

$$p = P_0 + \gamma h \; \ldots\ldots \; (26).$$

Таким чином, гідростатичне тиснення в будь якій точці важкої течі рівняється гідростатичному тисненню на поверхні цієї течі з додатком до нього ваги стовпа течі, у якого основа є площа з полем, рівним одиниці, а висота рівна глибині занурення точки від поверхні.

Розглянувши рівняння (26), можна вивести такі висновки:

1) Тиснення в важкій течі збільшується зі збільшенням глибини.
2) Тиснення тим більше, чим більша специфічна вага течі;
3) Тиснення P_0, яке існує на поверхні течі, передається в усі точки течі без зміни.
4) Форма посудини, яку виповнює теча, не входить в рівняння, а тому вона не має впливу на величину тиснення.

Тиснення в течі p дається:

в грамах на квадратовий сантіметр, в кілограмах на кв. см, в кілогр на кв. метр, в атмосферах, а також, як побачимо далі, висотою стовпів течі.

Науковою або старою атмосферою називається тиснення абсолютно сухого воздуху на поверхні океану під широтою 45°, при теплині = 0° і при відсутности вітра. Це тиснення урівноважується стовпом ртути вишиною 76 см. і виносить на квадратовий сантіметр, при вазі куб. сант. ртути = 0,013596 кілограма,

$$76 \times 0{,}013596 = \underline{1{,}0333\ \frac{\text{кілогр.}}{\text{см}^2}}$$

В технічній практиці за одиницю тиснення береться тиснення в *1 кілограм на квадратовий сантіметр*, або 10.000 кілогр. на кв. метр, і ця одиниця наз. *новою атмосферою*.

Пригадаємо ще, що $\gamma = 1$ гр (см³), або: 0,001 кілогр (см³), або 1000 кілогр (метр³)

Таким чином, тиснення в даній точці можна написати так:

$$p\ \frac{\text{грамів}}{\text{сант}^2} = 1033\,\text{гр.} + 1\,\text{гр.} \times h\ (\text{сантіметрів}).$$

$$p\ \frac{\text{кілогр}}{\text{см}^2} = 1{,}033 + 0{,}001.h\ (\text{сантім}).$$

$$p\ \frac{\text{кілогр.}}{\text{метр}^2} = 10333 + 1000.\,h\ (\text{метрів}).$$

$$(= 10333 + 10.\,h\ (\text{сантім})).$$

$$p(\text{в старих атм.}) = 1 + \frac{1\text{гр.} \times h(\text{сант})}{1033};$$

$$p(\text{в нових атм.}) = \frac{1033 + 1 \times h\ (\text{сант})}{1000};$$

Приклад. Найти тиснення в воді на глибині $h = 15$ метрів?

$$p = P_0 + \gamma . h;$$

$$p\,\frac{\text{гр.}}{\text{см}^2} = 1033 + 1 . 1500 = 2533\ \text{гр.}/\text{см}^2$$

$$p\,\frac{\text{кіл.}}{\text{см}^2} = 1{,}033 + 0{,}001 \times 1500 = 2{,}533\ \text{кіл}/\text{см}^2$$

$$p\,\frac{\text{кіл.}}{\text{метр}^2} = 10333 + 1000 \times 15 = 25333\ \text{кіл.}/\text{метр}^2$$

$$p(\text{старих атм.}) = 1 + \frac{1 \times 1500}{1033} = 2{,}45\ \text{атм.}$$

$$p(\text{нових атм.}) = \frac{1033 + 1 \times 1500}{1000} = 2{,}533\ \text{нов.ат.}$$

§15. Находження величини атмосферного тиснення.

Величина атмосферного тиснення приведена в попередньому §. Пригадаємо, як ця величина була найдена. Італійський вчений Торричелі р. 1664 досвідним шляхом найшов, що тиснення атмосфери урівноважує тиснення стовпа ртути, вишиною біля 76 см., або стовпа води вишиною біля 10,33 метра. Досвід цей був переведений в такий спосіб. Торрічелі взяв залютовану з одного кінця довгу шкляну рурку (рис 13) АВ, виповнив її ртуттю, закрив пальцем відкритий кінець і занурив рурку цим кінцем в посудину C зі ртуттю на глибину z; після цього ртуть в рурці опустилася до якоїсь риски D і стала, при чому поверх ртуті в рурці залишилась майже порожнеча, яка має нині назву Торрічелієвої порожнечі. Вишина стовпа ртути H_0 від поверхні ртути в посудині C до лінії D відповідала тисненню воздуха.

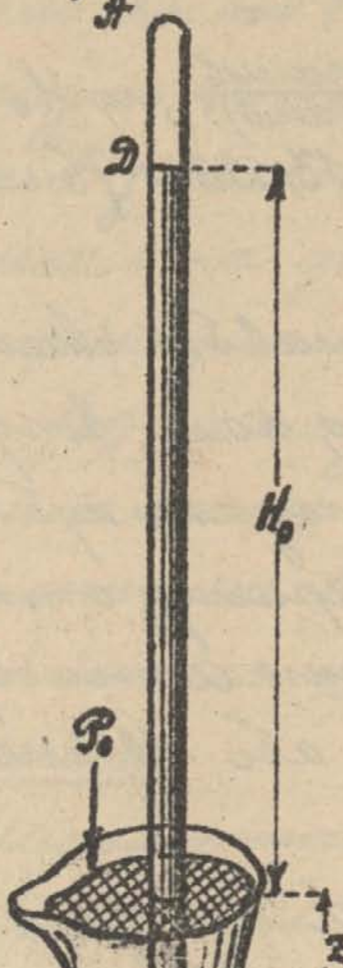


Рис. 13.

Отже, тиснення p течі в точці B дна рурки згідно виведених теоретичних міркувань буде:

$$p = p_0 + \gamma_1 (H_0 + z),$$

де γ_1 - вага одиниці об'єму ртути, а p_0 - тиснення на вільну поверхню ртути <u>в рурці</u>. Це тиснення з огляду на те, що над поверхнею D утворилася порожнеча, буде = 0, а тому $p = \gamma_1 (H_0 + z)$.

Тиснення в тій же точці B, коли розглядати течу в посудині C, буде:

$p_1 = P_0 + \gamma_1 . z$, де P_0 – є тиснення атмосфери на вільну поверхню ртути в посудині.

Поневже ми розглядаємо тиснення в одній точці, то: $p = p_1$, а тому:

$$\gamma_1 (H_0 + z) = P_0 + \gamma_1 z;$$

відціля: $\underline{P_0 = \gamma_1 H_0}$

Приймаючи, що $\gamma_1 = 13,596 \frac{грамів}{(сант)^3}$, а $H_0 =$ $= 76$ сантім., одержимо, що $P_0 = 13,596 \times 76 =$ $= 1033 \frac{грамів}{см^2}$.

Стовп води, який урівноважив би своєю вагою це тиснення, найдемо, коли вагу 1033 грама поділимо на вагу одного куб. сантіметра води, яка = 1 граму; отже, стовп води, рівний тисненню атмосфери буде $= \frac{1033}{1} = 1033$ см, або 10,33 метра.

§16. Тиск важкої течі на дно посудини. Гідростатичний парадокс.

Нехай посудина з поземним дном, а стінками будь якої форми й нахилу (рис. 14) виповнена важкою течею, яка має специфічну вагу γ;

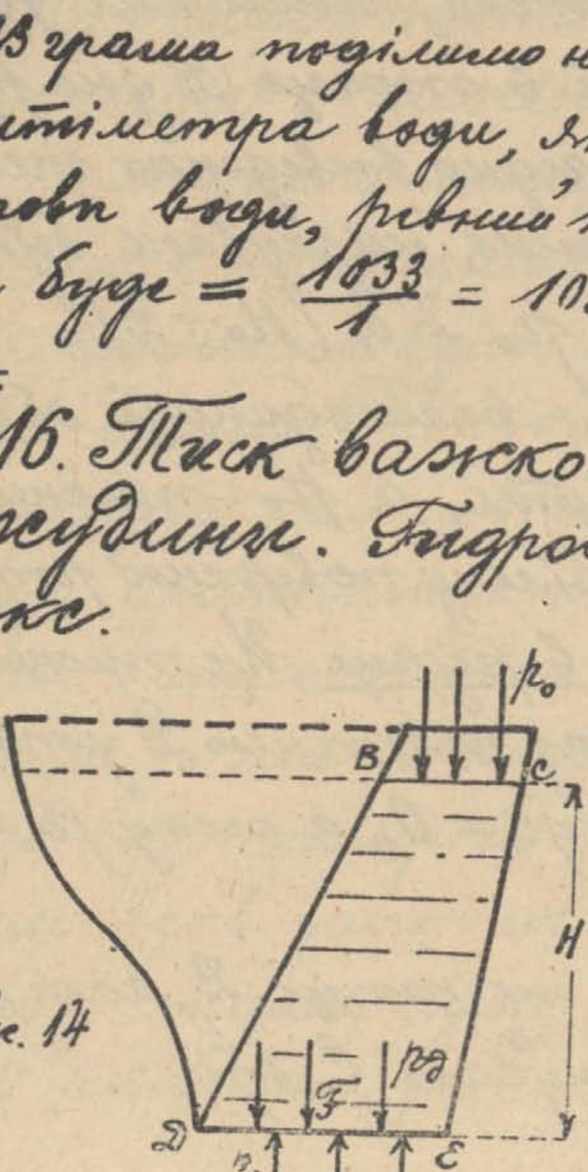


Рис. 14

поле дна DE означимо F; прямовисне віддалення дна від вільної поверхні ABC через H; тиснення на вільну поверхню BC нехай буде p_0. При цих означеннях тиснення на дні $p_{д} = p_0 + \gamma H$.

Оточення, в якому перебуває посудина з течею, як то воздух, пар, чи будь який газ, тиснуть не лише на вільну поверхню течі, але з такою же силою і на стінки посудини і на дно її. В техниці найчастіше потрібно знати не повне тиснення на дно $p_{д}$, а те дійсне тиснення, яке дно мусить витримувати, і яке є рівне різниці тиснень $p_{д}$ і p_0; це тиснення $p_{д} - p_0$ називається **манометричним тисненням**.

Манометричне тиснення на дно нашої посудини буде $p_{м} = p_{д} - p_0 = p_0 + \gamma H - p_0 = \gamma H$.

Тиск на дно, поле якого є = F, буде рівне тисненню, себ-то тискові на одиницю поля, помноженому на поле дна:

$$P = p_{м} \times F = \gamma F H \ldots\ldots (27)$$

Вираз $\gamma F H$ – це є вага стовпа течі, у якого основа рівна полю дна, а висота рівна прямовисному віддаленню дна від вільної поверхні. Як видно зі взору (27), тиск на дно залежить лише від специфічної ваги течі, поля дна і висоти H; форма посудини, або нахил стінок її в цей взір не входять, а тому й тиск від них не залежить. Тому тиск на дно DE буде однаковий і в посудині BDEC, і в більшій ADEC. Це твердження, яке на перший погляд здається неможливим, називається *гидростатичним парадоксом*.

Відкрив його досвідним шляхом Stewin р. 1586. При проходженню фізики цей парадокс завжди демонструється на спеціальних посудинах. Користаючись останньою властивістю важкої течі, можна витворити дуже великі тиснення малим порівнюючи об'ємом течі, коли взяти посудину відповідної форми. Возьмемо, наприклад, посудину (рис. 15) з широким днищем, яке має поле F, і

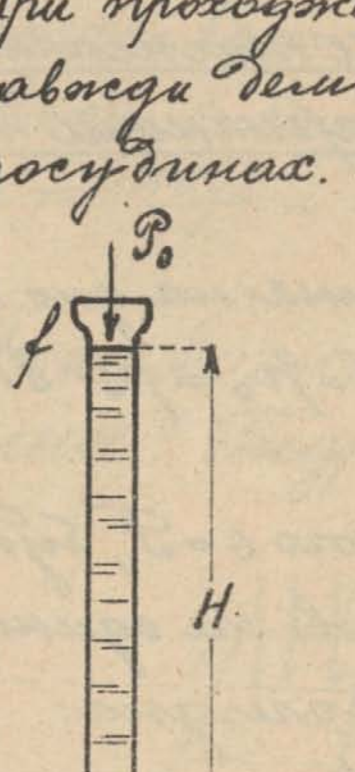


Рис. 15.

з високою, тонкою, але не капілярною шийкою, з полем розсіку = f. Нехай вся посудина заповнена течею. На вільну поверхню течі тисне атмосфера з силою = P_0.

Повний тиск на дно буде:

$$P_{д_з} = (P_0 + \gamma H)F,$$ а тиск манометричний буде:

$$P_м = (P_0 + \gamma H - P_0)F = \gamma HF,$$ себ-то рівний вазі такого стовпа течі, який основою має поле дна, а висотою всю висоту H.

В подібний спосіб находиться тиск не лише на дно посудини, а взагалі на поземні поверхні її. Так, наприклад, манометричний тиск течі на площу F_1 посудини (рис. 16) при віддаленню цієї площі від вільної поверхні течі = h буде:

$$P_м = (p_0 + \gamma h - p_0)F_1 =$$
$$= \gamma F_1 h.$$

Цей тиск буде направлений з низу до гори.

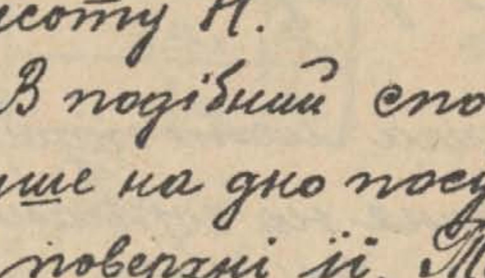


Рис. 16.

В де яких випадках практики тиснення від оточення p_0 не повинно відніматти від повного на дно тиснення; це може бути, наприклад, тоді, коли будь-яка плитка лежить на дні так щільно, що виявляє з ним як би одне ціле, і треба знайти зусилля для її підняття. Нехай плитка з площею F, товщиною h лежить на дні посудини, в якій глибина течі $= H$; при тисненню на поверхні течі $= p_0$ повний тиск на плитку буде:

$$P_n = [p_0 + \gamma(H-h)] . F$$

Коли ж навпаки, теча може підійти під плитку, тоді тиснення на горішню поверхню плитки буде: $p_0 + \gamma(H-h)$, а на нижню $-(p_0 + \gamma H)$, що в сумі дасть:

$p_0 + \gamma H - \gamma h - p_0 - \gamma H = -\gamma h$, а тиск на всю плитку буде: $-\gamma h F$.

Коли в одну посудину налити де-кілька різних теч, які між собою не змішуються (рис. 17), тоді ці течі розмістяться згідно своєї специфічної ваги: найтяжча теча буде в долі, найлегша на горі; розділятися вони будуть поземними поверхнями рівня.

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots \gamma_n$ будуть специф. ваги теч;

—,,— $h_1, h_2, \dots, h_n$ висоти їх;

—,,— $p_0, p_1, \dots, p_n$ тиснення на поверхню кожної течі; тоді будемо поступово мати: тиснення на вільну поверхню I .... p_0;

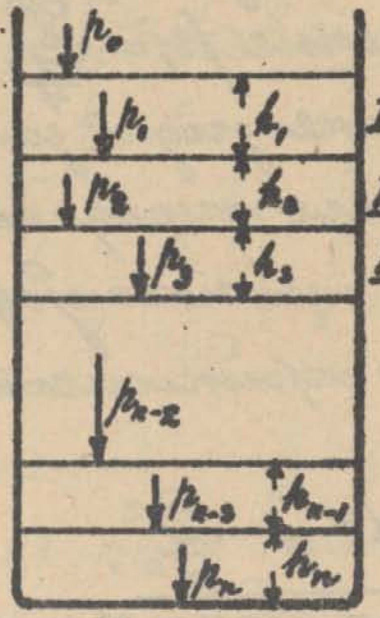


Рис. 17.

тиснення на поверхню течі II ... $p_1 = p_0 + \gamma_1 h_1$;

тиснення на поверхню течі III: $p_2 = p_1 + \gamma_2 h_2 = p_0 + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2$;

тиснення на поверхню течі IV: $p_3 = p_2 + \gamma_3 h_3 = p_0 + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3$.

Аналогічно тиснення на дно буде: $p_n = p_0 + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 + \dots + \gamma_n h_n$ ...(28),

або: $p_n = p_0 + \sum_1^n (\gamma h)$;

§17. Використання закона Паскаля в техниці.

Властивість течі передавати без убутку одержане нею від будь-якої сили тиснення, спричинилося до будівлі цілого ряда пристроїв, як то: чав, акумуляторів, під'ємників і т.н., в яких невеликою силою при допомозі течі витворюється великі тиски. Коли взяти дві сполучені вальцові посудини (рис. 18) з поперечниками d і D, виповнити їх течею і на толок K_1 натискуємо силою P, то під толоком утвориться тиснення $p_1 = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}}$; це тиснення згідно закону Паскаля передається і на толок K_2, і для того, щоб його удержати на місті, необхідно приклaсти силу $Q = p_1 \cdot \frac{\pi D^2}{4}$.

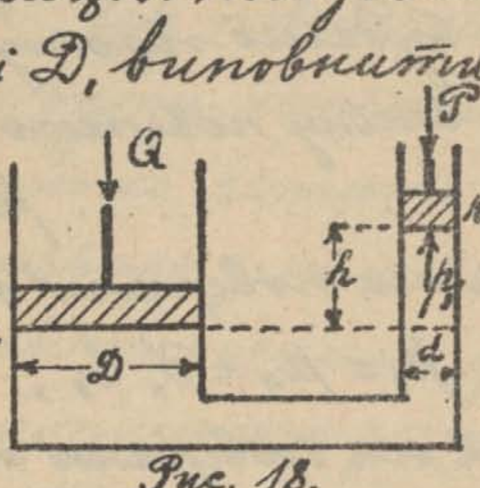


Рис. 18.

Відсіля: $\frac{Q}{P} = p_1 \cdot \frac{\pi D^2}{4} : p_1 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{D^2}{d^2}$;

Як що взяти, наприклад, поперечник малого вальця = 3 сантіметра, а великого - 30 сантіметрів, тоді $\frac{Q}{P} = \frac{30^2}{3^2} = \frac{900}{9} = 100$; себто сила P може урівноважити вагу в 100 раз більшу.

Закон Паскаля застосовується точно лише для того випадку, коли толоки стоять на одному рівню; коли ж один з толоків опускається, а другий підіймається, тоді для хвилевої рівноваги необхідно ще приймати на увагу вагу стовпа течі в одному з комін, в даному разі вишиною h, і тертя толоків об стінки вальців, або об специяльні муфти. Що до ваги стовпа течі, той, з огляду на порівнюючу малість, відкидають, сили ж тертя можна вирахувати, як це буде далі показано.

Гідравличні (Bramah'ови р. 1748-1827) чави

Як видно зі схеми гідравличної чави Брамаха, зовнішня сила R підоймою передається на толок A, на який витворює тиск P; при поперечнику толока = d тиснення під цим толоком $p = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}}$; по рурці теча нагнітається при тисненню p в другий валець і там тисне на толок з поперечником D, витворюючи теоретично тиск $Q = p . \frac{\pi D^2}{4}$. В дійсности сила Q, дякуючи тертю в манжетах толока A і B, буде меньша. Для того, щоб теча не пройшла під тиском між толоком, а шийками посудини, в ці шийки вставляються шкіряні манжети, одна з яких показана на рис. 19 під літерою M. Манжета ця так пристосована, що теча під тиском входить під неї і притискує одну її половину до стінки посудини, а другу до стінки толока на вишині t в малому толоку і на вишину Г в більшому. Сила тертя є пропорційна силі, з якою одно

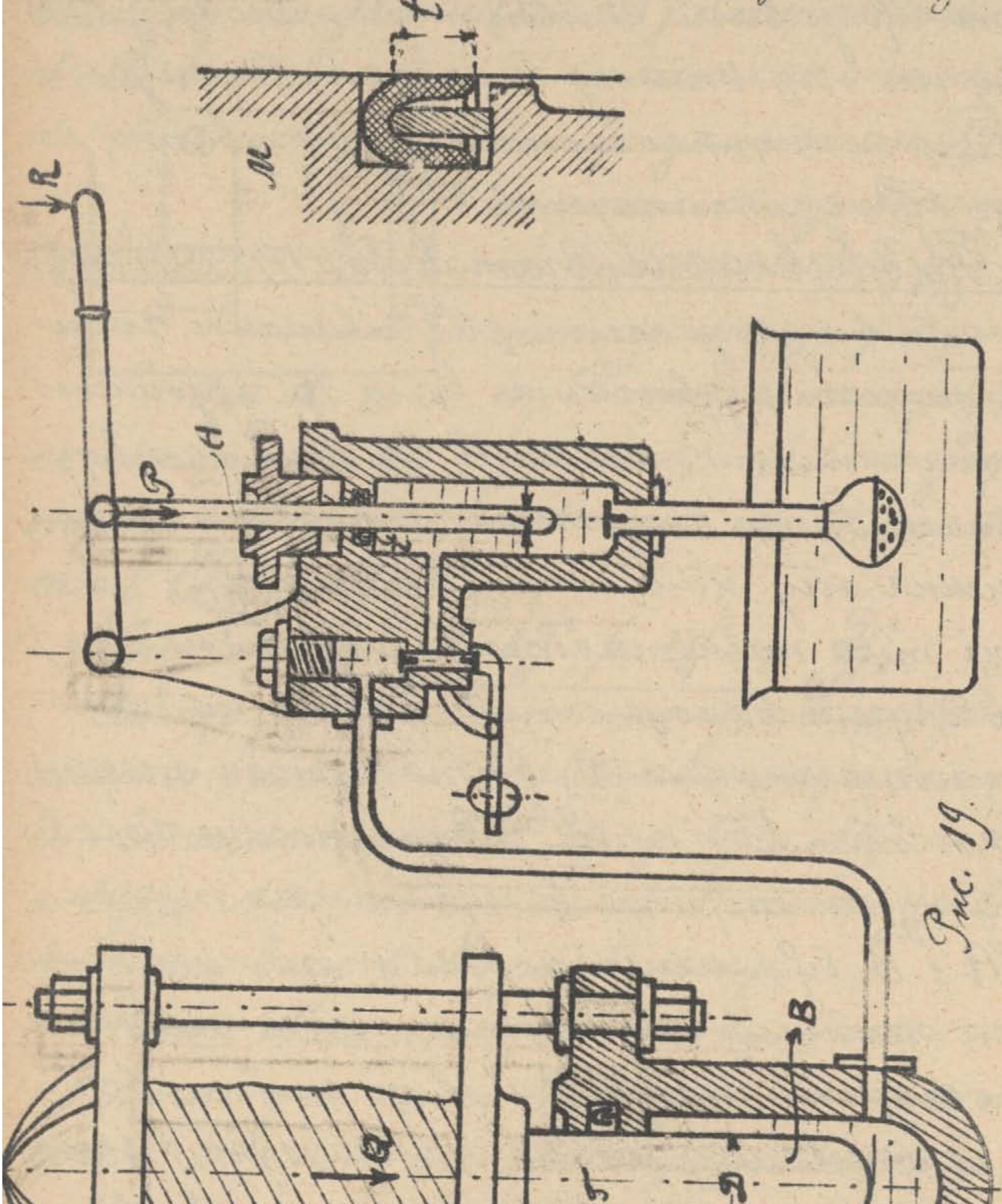


Рис. 19

тіло притискується до другого; для малого толока сила тертя $R_1 = \varphi . p\pi . dt$, де φ - сочинник тертя між шкірою та залізом (від 0,03 до 0,15, пересічно 0,08). Для більшого толока $R_2 = \varphi p . \pi d . T$.

Сила натиску P зменьшується на величину тертя і тому $P_d = P - \varphi . p\pi . dt$, а вага, яку треба підняти - Q, наче збільшується на величину тертя R_2:

$$Q_d = Q + \varphi p \pi D T$$

Відсіля: $P_d = p . \frac{\pi d^2}{4} = P - \varphi p \pi d t$;

$$Q_d = p . \frac{\pi D^2}{4} = Q + \varphi p \pi D T;$$

Відсіля: $P = p\pi\left(\frac{d^2}{4} + \varphi . d . t\right)$;

$$Q = p\pi\left(\frac{D^2}{4} - \varphi . D . T\right);$$

$$p = \frac{P}{\pi(d^2/4 + \varphi dt)} = \frac{Q}{\pi\left(\frac{D^2}{4} - \varphi D T\right)}$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{D^2 - 4\varphi D T}{d^2 + 4\varphi d t}, \text{ або } \frac{D^2}{d^2}\left(\frac{1 - \frac{4\varphi T}{D}}{1 + \frac{4\varphi t}{d}}\right) = \eta \frac{D^2}{d^2}.$$

Тут η означає сочинник виконности чави; при добре збудованих чавах $\eta = 0,85$.

Гідравлічні чави бувають дуже великої міцности; так, напр. в Дюсельдорфу для обробки панцерних стальових плит, товщиною в 30-35 см, фірмою На-під поставлена чава, яка дає силу тиску в 12500 тон.

Водяні акумулятори.

Ці пристрої побудовані на тому принципі, що теча, якій поступнево надано велике тиснення, може потім це тиснення передати на різні працюючі пристрої і привести їх в рух

Уявимо собі, що в вальцю I (рис. 20) ходить толок A, який нагнітає воду в валець II під толок B. Толок B є звязаний в одно ціле з великими вальцовими скринями C, C, які виповнюються залізом, камінням, або взагалі важким матерялом. Коли толок B підіймається з вальцями C, то тим самим утворюються

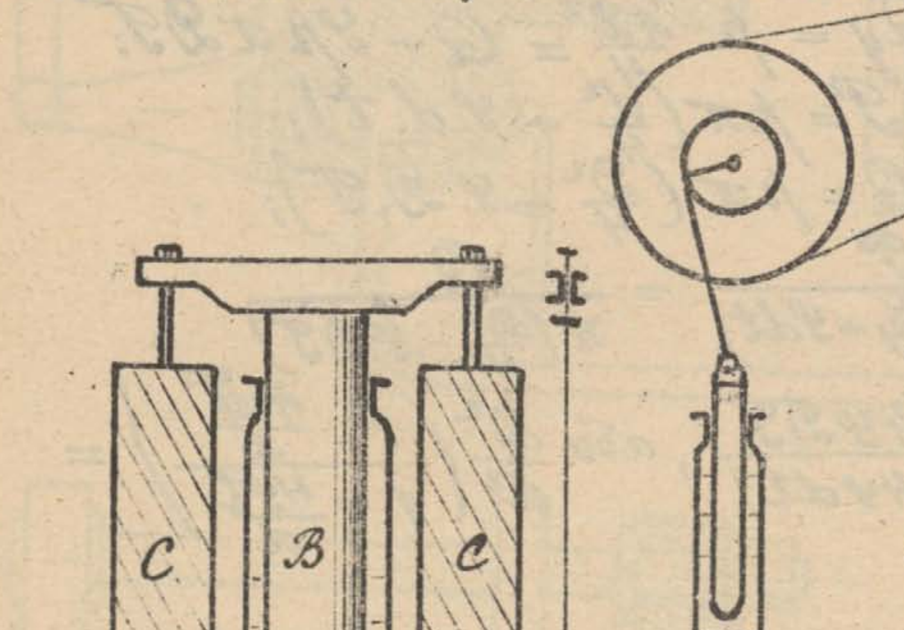


Рис. 20

запас потенціяльної енергії. Після того, як толок B підійметься до свого найвищого положення, під ним буде обєм води V, який має тиснення, рівне вазі толока B. Як що тепер дати цій воді через руру E, відкривши для цього кран M, доступ до моторів, які можуть працювати від тиснення води, тоді ці мотори будуть виконувати певну роботу

Обчислення праці й виконности водяного акумулятора.

Нехай толок B має поперечник D, а найбільшу вишину підйому H, вагу толока з вальцями C означимо через Q; тиснення на толок = p; обєм води, який можно в акумулятор ввести – V; тоді: $V = \frac{\pi D^2}{4} . H$; $p = Q / \frac{\pi d^2}{4}$;

Коли на тертя не звертати уваги, тоді робота, потрібна на виповнення акумулятора, буде:

$$L_{теор.} = Q . H = p . \frac{\pi D^2}{4} . H, \text{ або } p . V$$

Але в дійсности робота, потрібна на піднесення толока, буде більша, а саме $L_1 = \frac{p . V}{\eta_1}$, де η_1 – є сочинник виконности акумулятора (пересічно біля 0, яким вводиться вплив убутків роботи в помпі, манжетах, від тертя в самій течі і т.п.

Стиснута теча розводиться руркою Е до працюючих пристроїв, де знов будуть убутки первісної теоретичної роботи, які можна виразити сочинником η_2 (де η_2 = біля 0,8 – 0,9). Таким чином дійсна робота буде:

$$L_2 = \eta_2 p V$$

Відношення цієї роботи до тієї роботи, що потрібна на заповнення акумулятора буде:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\eta_2 p V}{\frac{pV}{\eta_1}} = \eta_1 \eta_2,$$

що в числах дає біля 0,9 × (0,8 – 0,9) = 0,72 – – 0,81, і аж до 0,85.

§18. П'єзометричні висоти точки. Нулева площа.

Для важкої течі було виведено, що $p + \gamma z = Const$ (§14, рівн. 22); коли теча однородна і γ є величиною сталою, тоді рівняння (22) можно перетворити в таке: $\frac{p + \gamma z}{\gamma} = \frac{Const}{\gamma} =$ також Const;

або: $$\frac{p}{\gamma} + z = Const \;\ldots\ldots (22')$$

Відношення тиснення p до ваги одиниці об'єму γ має вимір довжини, бо $p = \frac{\text{сила}}{(\text{довжина})^2}$, а $\gamma = \frac{\text{вага}(=\text{сила})}{(\text{довжина})^3}$, а тому $\frac{p}{\gamma} = (\text{довжина})$; ця довжина $\frac{p}{\gamma} = t$ називається висотою, відповідною тисненню p ($\gamma t = p$), або інакше п'єзометричною висотою точки (x,y,z), то б то висотою такого стовпа течі, вага якого $\gamma . t . 1$ є рівна гидростатичному тисненню p в даній точці.

Означивши $\frac{p}{\gamma}$ через t, можна написат

$$t + z = Const \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22'')$$

Отже, для всіх точок важкої течі, яка перебуває в спокою, сума висот: геометричної z відносно принятої поземної координатної площі, та п'єзометричної t є величина стала. Коли на продовженню ординат точок C, A і B (рис. 10) відкласти відповідно висоти: $\frac{p_0}{\gamma}$, $\frac{p_1}{\gamma}$, $\frac{p_0'}{\gamma}$, то горішні кінці цих ординат: C', A', B' будуть лежати на однаковому віддаленню від площі XOY, інакше, в точки C', A' і B' будуть в одній поземній площі, яка називається нулевою площею.

Вираз $\frac{p}{\gamma}+z=Const$ можна ще механічно висловити так: потенціяльна енергія одиниці ваги течі відносно координатної площі XOY буде величиною сталою $[1 \text{ ваги} \times \frac{p}{\gamma} + 1 \text{ ваги} \times z = 1 \text{ ваги} (\frac{p}{\gamma}+z)]$.

Вираз $p+\gamma z=Const.$, або $\gamma(\frac{p}{\gamma}+z)=$ Const означає, що потенціяльна енергія частини течі обєма $=1$, а вагою $=\gamma$ для однієї течі в супокою є величина постійна.

Установивши поняття про пєзометричну висоту, можна замісць тиснення на поверхні течі p_0 уявити над нею стовп тієї ж течі висотою $t=\frac{p_0}{\gamma}$, при чому в гидравличному відношенню однаково, чи на вільну поверхню діляє якесь зовнішне тиснення, напр. пружність пари, воздуху і т.п., чи це тиснення заміщено стовпом течі висотою $\frac{p_0}{\gamma}$; приймаючи останнє, ми вільну поверхню течі як би підносимо собі рівнобіжно на висоту $\frac{p_0}{\gamma}$, при чому на цю нову, піднесену поверхню вже більше ніякого тиснення не істнує.

Із опредїлення п'єзометричної висоти виникає можливість всяке взагалі тиснення в течі міряти також висотою відповідного стовпа течі. Наприклад, можна сказати, що тиснення в 4 наукових атмосфери є рівне 304 сантіметрам ртутного стовпа, або 13,6× ×304 = 4134 см водяного стовпа, або 41,34 метра водяного стовпа.

Приклади.

1) Найти тиснення p в посудині, виповненій спиртом, на глибині 2 метра від поверхні, на яку тисне 2 атмосфери. Питома вага спирту = 0,8; вага одиниці об'єму води, саме одного куб. сантіметра = 1 граму.

Тиснення $p = P_0 + \delta_1 h$ (див. рівн. 26).

P_0 в нас $= 2$ атм. $= 1{,}033 \frac{\text{кіл}}{\text{см}^2} \times 2 = 2{,}066 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$

$\delta_1 = 0{,}8 \times 1 = 0{,}8 \frac{\text{грам}}{\text{см}^2}$, або $= 0{,}0008 \frac{\text{кіл}}{\text{см}^2}$

$h = 2$ метра, або 200 см; отже:

$$p = 2{,}066 + 0{,}0008 \times 200 = 2{,}066 + 0{,}160 = $$
$$= 2{,}226 \frac{\text{кіл.}}{\text{см}^2}.$$

Стовп спирту, який може замінити це тиснення $H_1 = \frac{2{,}226}{\delta_1} = \frac{2{,}226}{0{,}0008} = 2782{,}5$ см, або 27,825 метра.

Стовп води, рівнозначний тисненню p буде: $H_2 = \frac{p}{\gamma} = \frac{2,226}{0,001} = 2226$ см, або 22, 26 м.

2) На якій глибині під вільною поверхнею води манометричне тиснення p_1 є = одній атмосфері?

Знов напишемо: $p = P_0 + \gamma h$.

p мусить бути рівним 1 атм + P_0, але в нас P_0 = також 1 атм; тому p = 2 ат.

$\gamma = 0,001$ кіл.; $h = ?$

$$h = \frac{p - P_0}{\gamma} = \frac{(2-1) \text{атм}}{0,001} = \frac{1,033}{0,001} = 1033 \text{ см}$$

або: h = 10, 33 метра

§19. З'єднані посудини з різними течами.

Візьмемо дві з'єднані між собою посудини A і B (рис. 21); в ці посудини налито дві течі різної специфічної ваги: γ_1 і γ_2. Тиснення на вільні поверхні в обох посудинах нехай будуть однакові = P_0. Течі відділяються

Рис 21.

одна від другої поверхнею CD, яка буде, згідно раніш доведеного, поземною площею рівня. Візьмемо на цій площі довільну точку M; ця точка перебуває в рівновазі, а тому тиснення на неї зверху й знизу мусить бути однаковим. Тиснення зверху буде: $p_2 = P_0 + \gamma_2 h_2$; тиснення знизу — $p_{\text{н}} = P_0 + \gamma_1 h_1$;

$p_2 = p_{\text{н}}$, а тому: $P_0 + \gamma_2 h_2 = P_0 + \gamma_1 h_1$;

відсіля: $\gamma_2 h_2 = \gamma_1 h_1$ і $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ . . . (29).

себ-то: *в з'єднаних посудинах висоти теч різної густоти над площею розділу їх будуть відворотно пропорційні специфичним (або питомим) тягарам теч, коли тиснення на вільні поверхні однакові.*

Коли з'єднані посудини виповнені течею однородною, але тиснення на вільні поверхні різні, тоді ці вільні поверхні будуть лежати вже не в одній, а в різних поземних площах, при чому прямовисне віддалення між цими площами буде рівне ріжниці п'єзометричних висот для точок на цих поверхнях.

Дійсно, нехай з'єднані між собою посудини: A і B (рис. 22) виповнені однією течею, яка має вагу γ. На поверхні течі в посудині A ділає тиснення P_1, а в посудині B - тиснення P_2, при чому $P_2 > P_1$.

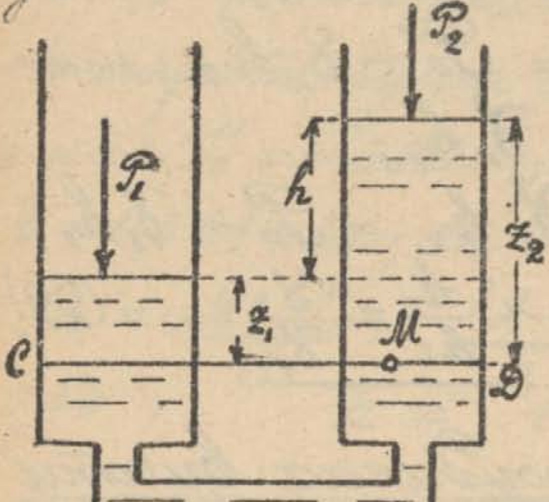


Рис. 22.

При цій умові поверхня течі в посудині A стане нижче поверхні в посудині B на якусь величину h; цю величину найдемо в такий спосіб: Візьмемо будь яку поверхню рівня CD і на ній точку M. Тиснення в цій точці від течі зі сторони посудини A буде $p_1 = P_1 + \gamma z_1$; тиснення на ту ж точку зі сторони B буде:

$$p_2 = P_2 + \gamma z_2;$$

$p_1 = p_2$, а тому: $P_1 + \gamma z_1 = P_2 + \gamma z_2$, або:

$$\gamma (z_2 - z_1) = P_1 - P_2;$$

$$z_2 - z_1 = h = \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} \ldots\ldots (30),$$

що відповідає висловленому твердженню, бо $\frac{P_1}{\gamma}$ і $\frac{P_2}{\gamma}$ - це п'єзометричні висоти для точок на вільних поверхнях посудин.

Приклад. На поверхню води в одному коліні сполучених посудин тисне атмосфера, а на поверхню в другому коліні газ, пружливість якого $= 0,4 \frac{кіл.}{см^2}$, яка буде різниця висот стовпів води в цих колінах?

По взору (30) $h = \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma}$; P_1 у нас $=$ $= 1$ атмосфері, або $1,033 \frac{кіл.}{см^2}$; $P_2 = 0,4 \frac{кіл.}{см^2}$; $\gamma = 0,001 \frac{кілогр.}{см^3}$;

тому: $h = \frac{1,033 - 0,400}{0,001} = \frac{0,633}{0,001} = 633$ сант. або 6,33 метра.

§20 Гидростатичний тиск на плоску стінку.

До цього часу ми розглянули засоби находження тиснення в будь-якій точці течі, а також тиснення и тиску на поземне дно посудини, або на рівнобіжні йому площі; покажемо тепер як находиться величина тиску, напрямок його і точка приклаження для будь-якої плоскої стінки.

а). Величина тиску. На плоскій стінці (рис. 23), що нахилена до поземної поверхні води під кутом α, відмемо будь-яку замкнуту фігуру з полем F. Лінію зустрічі стінки з поверхнею води приймемо за вісь ординат У, а простопадну до неї поземну лінію OX за вісь X-ів. Вісь Z-ів направимо доземно.

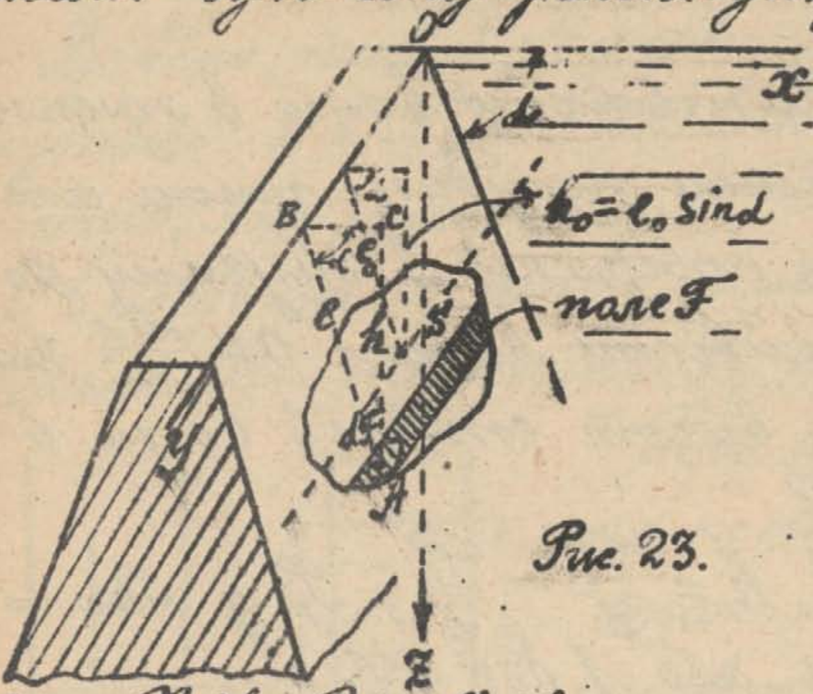


Рис. 23.

При цих умовах тиснення в будь-якій точці A, яка має ординату $Z =$ глибині h, буде: $p = P_0 + \gamma h$, де P_0 - тиснення атмосфери. В більшости випадків стінка буває в таких умовах, що на неї з другого, сухого боку тисне також атмосфера, і тому практичне значіння має лише манометричне тиснення $p' = P_0 + \gamma h - P_0 = \gamma h$, яке далі ми й будемо приймати. Але коли б тиск течі був на стінку будь-якого резервуару з газом, тиснення в якому меньше атмосферного $= P_0'$, тоді в рахунок треба ввести ще різницю тиснень $P_0 - P_0'$, і для цього поверхню течі як би перенести до гори на $\frac{P_0-P_0'}{8}$.

Точку A можна уявляти положеною серед елементарної безмежно-малої площі dF, для якої тиснення можна вважати таким усе, як і в точці A; тоді тиск на площинку dF буде: $dP_{\text{м}} = p'dF = \gamma h.dF$.

В трикутнику ABC кут ABC є рівний куту α, а тому, коли назвати через e віддалення точки A від оси Y-ів, то глибина $h = e\sin\alpha$, і $dP_{\text{м}} = \gamma e\sin\alpha.dF$ . . . . .(31).

Тиск на все поле F буде складатися з суми тисків на безмежну кількість безмежно малих площинок dF, се бто він буде інтегралом виразу (31).

$$\int dP = \int \gamma.\sin\alpha.e dF$$

$$P_{\text{м}} = \gamma\sin\alpha\int e dF \text{ . . . .(32)}$$

В статиці доводиться, що $\int edF$ - це є статичний момент поля F відносно оси Y; момент цей рівняється добутку з поля F на віддалення центра тягару цього поля від тієї ж оси OY. Коли назвемо через e_0 віддалення центра тягару S' фігури F, то:

$$\int edF = Fe_0,$$

а $P_{\text{м}} = \gamma Fe_0\sin\alpha$ . . . .(33)

Із рисунка (23) видно, що $e_0 \sin\alpha = h_0$, де h_0 є глибина точки S' під поверхнею води; тому нарешті величина тиску на поле F буде: $P_M = \gamma F h_0$ . . . . (34), що можна висловити так: Манометричний тиск на плоску фігуру з полем F є рівний вазі водяного стовпа, основою якого є поле натиснутої фігури, а висота рівна заглибленню центра тягару фігури F під поверхнею води.

В тому разі, коли б було потрібно вираховувати тиск на стінку при умові, що з другого боку стінки жадного тиснення не має, тоді повний тиск був би:

$$P_n' = P_0 F + \gamma F h_0 \text{, або:}$$

$$P_n = (P_0 + \gamma h_0) F \text{ . . . . (35),}$$

що можна висловити так: повний тиск на плоску стінку є рівний гідростатичному тисненню в центрі тягару стінки, помноженому на величину поля стінки.

Із наведених взорів видно, що тиск на стінку залежить лише від питомої ваги течі, від величини поля стінки і від заглиблення центра тягару—

стінки під поверхнею води; кут нахилу стінки в остаточні наші взори не входить, а тому ці взори годні і для тиску на дно, для якого кут $\alpha = 0$. Коли віддалення центра тягару дна від поверхні води назовемо через H, тоді тиск на дно з полем F буде:

$P_n = (P_0 + \gamma H)F$, а манометричний тиск на дно буде:

$$P_m = P_n - P_0 = \gamma F H \ldots\ldots (27);$$

цей вираз був уже інакше виведений в §15.

b) Напрямок тиску течі на плоску стінку.

Сили елементарних тисків dP на елементарні площинки dF направлені, як це відомо, простопадно до площинок; тиск на всю площу F є вислідним зо всіх елементарних тисків, а тому він направлений тако ж простопадно до площі стінки F.

c) Точка приложення сили тиску.

Вислідна всіх тисків на стінку F приложена в певній точці поля F, і ця точка називається центром гідростатичного тиску, або точкою прикладення гідростатичного тиску. Взагалі центр тиску не збігається з центром тягару фігури і віддалення його від координатної осі OY необхідно вирахувати.

Виділимо на фігурі F (рис. 23) смужку, що проходить через точку A рівнобіжно осі Y-ів і має довжину будь-яку b, а ширину безмежно-малу dl; всі елементи цієї смужки будуть лежати на глибині h; центр тягару її буде лежати на тій же глибині; тоді, згідно сказаного в абзаці a) манометричний тиск dP на цю смужку буде:

$$dP = \gamma.(b.dl)h = \gamma(bdl)l\sin\alpha;$$

В статиці доводиться, що статичний момент будь яких сил відносно довільної осі є рівний статичному моменту вислідної цих сил відносно тієї ж оси.

Візьмемо суму статичних моментів відносно оси Y-ів сил, що діяють на наші елементарні смужки, і статичний момент тиску на все поле F відносно тієї ж оси і порівняємо їх між собою.

Статичний момент від dP відносно оси Y буде: $dM_1 = dP . e = \gamma (bde) e \sin\alpha . e =$
$= \gamma e^2 \sin\alpha\, bde;$

Сума всіх цих моментів буде:

$$\underline{M_1 = \int \gamma e^2 \sin\alpha\, bde = \gamma \sin\alpha \int (bde) e^2 \ldots (36)}$$

Останній вираз під знаком $\int$ є добутком полей елементарних смужок (bde) на квадрат віддалення їх від оси Y-ів, а це є відомий в механіці <u>момент інерції (або безвладности)</u> поля F відносно оси Y-ів. Момент цей прийнято означати літерою J, або так: J_F^y; принявши на увагу це означення, можна рівняння (36) переписати так: $M_1 = \gamma \sin\alpha\, J_F^y \ldots (37)$

Статичний момент всього тиску на поле F відносно оси Y-ів буде також: $M_2 = P\eta$, де η означає віддалення точки прикладення сили P на площі F, яка на рис. 23 означена літерою D; поневже $P = \gamma \sin\alpha\, Fe_0$, то $M_2 = \gamma \sin\alpha\, Fe_0 . \eta$, а Fe_0 - це є статичний момент поля F відносно оси Y-ів, який означим так: M_F^y;

Отже, можемо тепер написати $M_1 = M_2$, тому: $\gamma \sin\alpha . J_F^y = \gamma \sin\alpha\, M_F^y . \eta$, відсіля

$$\eta = \frac{J_F^y}{M_F^y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38),$$ що висловлюється так:

Простопадне віддалення η точки D прикладення гідростатичного тиску на замкнену плоску фігуру F до лінії зустрічі площі фігури з поверхнею води є рівне частці від поділу моменту інерції поля фігури на статичний момент того ж поля відносно згаданої лінії.

Коли площа F має вісь сіметрії, яка направлена простопадно до оси Y-ів, тоді точка прикладення вислідної тиску лежить на цій осі сіметрії, так що для находження її необхідно лише вирахувати координату η. Цей випадок зустрічається в гідротехниці найчастіше (заставки в греблях, шлюзові брами, поворотні клапани і т.и.), а тому його лише й будемо мати далі на увазі.

В статиці доводиться, що момент інерції будь якого поля F (рис. 24) відносно оси OY є рівний моменту інерції того ж поля відносно рівнобіжної оси SS, яка проходить через центр тяга-

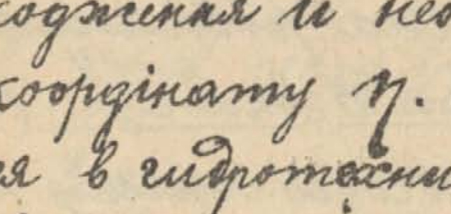


Рис. 24.

ру поля F, з додатком до нього добутка Fe_0^2, де e_0 - є віддалення оси OY від оси SS, себто істнує таке відношення:

$$J_F^y = J_F^s + Fe_0^2 \ldots\ldots (39)$$

Принявши це на увагу, можна взір (38) переписати в такому вигляді:

$$\eta = \frac{J_F^y}{M_F^y} = \frac{J_F^s + Fe_0^2}{Fe_0} = \frac{J_F^s}{Fe_0} + e_0 \ldots\ldots (40)$$

Останній взір показує, що <u>η завжди більше e_0, себто, що осередок тиску лежить нижче осередку тягару для взятої площі.</u>

Коли нашу площу F брати все на більшій глибині, тоді віддалення центра тягару e_0 буде все збільшуватися, а момент інерції відносно оси SS залишається постійним; при $e_0 = \infty$ $\frac{J_F^s}{Fe_0} = 0$, а тому тоді $\eta = e_0$, себ-то, <u>на безмежно великій глибині занурення площі F центр прикладення тиску і центр тягару поля F збігаються в одну точку.</u>

Коли F є поземна площа, тоді кут нахилу її до поверхні води $\alpha = 0$, а перетинення розглядаємої площі з поверхнею відходить в безмежність $e_0 = \infty$; в цьому випадку η також $= e_0$, себ-то *центр тиску на будь-яку поземну площу збігається з центром тягару поля тієї ж площі.*

§21. Особливі випадки тиску.

Покажемо тепер, як, користуючись виведеними правилами, найти тиск на прямокутну бокову стінку.

а) Нехай прямокутна стінка (рис. 25) OABC нахилена до поверхні води під

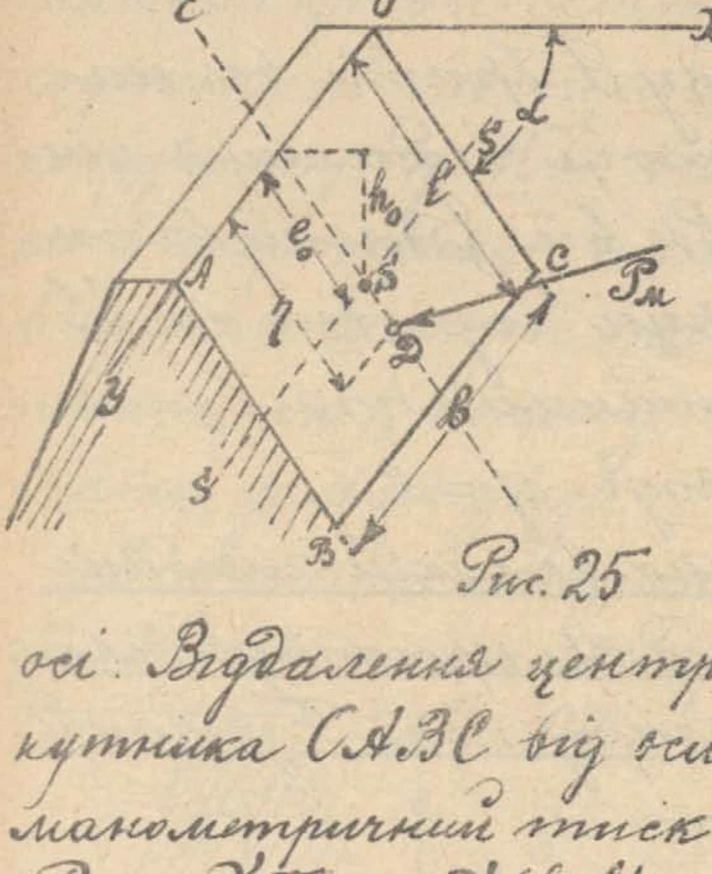


Рис. 25

кутом α, має ширину $OA = BC = b$ і довжину $AB = l$. Ця площа буде мати вісь симетрії EE, а тому центр тягару і центр тиску будуть на цій осі. Віддалення центра тягару прямокутника OABC від оси OY буде: $e_0 = \frac{l}{2}$; манометричний тиск на стінку буде: $P_м = \gamma F h_0 = \gamma (b.l) e_0 \sin\alpha = \gamma bl.\frac{l}{2}\sin\alpha = \underline{\frac{\gamma . bl^2}{2}.\sin\alpha}$; ордината $\eta = \frac{J_F^s}{Fe_0} + e_0$;

Момент інерції прямокутника відносно осі, що проходить через центр тягару, є рівний $\frac{bl^3}{12}$; тому:

$$\eta = \frac{\frac{bl^3}{12}}{\frac{bl^2}{2}} + \frac{l}{2} = \frac{l}{6} + \frac{l}{2} = \frac{4}{6}l = \underline{\frac{2}{3}l};$$

б) Коли стінка, на яку тисне вода, стоїть прямовисно, тоді кут нахилу $\alpha = 90°$; тиск $P_м = \gamma F h_0 = \gamma F e_0 \sin\alpha = \gamma F e_0$, бо $\sin\alpha = 1$.

$$P_{м.} = \gamma F e_0 = \gamma b l e_0; \; e_0 = \frac{l}{2};$$ тому:

$$\underline{P_м = \gamma \cdot \frac{bl^2}{2}};$$

$$\eta = \frac{J_F^s}{Fe_0} + e_0 = \frac{\frac{bl^3}{12}}{\frac{bl^2}{2}} + \frac{l}{2} = \frac{2}{3}l;$$

Таким чином, тиск $P_м$ в обох випадках росте пропорційно квадрату довжини l і пропорційно ширині b; напрямок його нормальний до стінки, а точка прикладення вислідної тиску лежить на $\frac{2}{3}$ довжини l, рахуючи від поверхні. З огляду на те, що тиск на прямокутну стінку росте пропорційно (прямо) ширині стінки, в практичних обчисленнях береться ширина стінки = 1-ці, найчастіш = 1 метру.

§22. Приклади находження гидростатичного тиску на плоскі стінки.

Нехай рис. 26 уявляє поперечний профіль стінки, при допомозі якої утворено водозбірник. В цій стінці вирізаємо площами, нормальними до її подовжного напрямку, частину, довжиною в 1 метр, і на цей вирізок стіни находимо тиск по його величині, напрямку і по точці прикладення вислідної тиску.

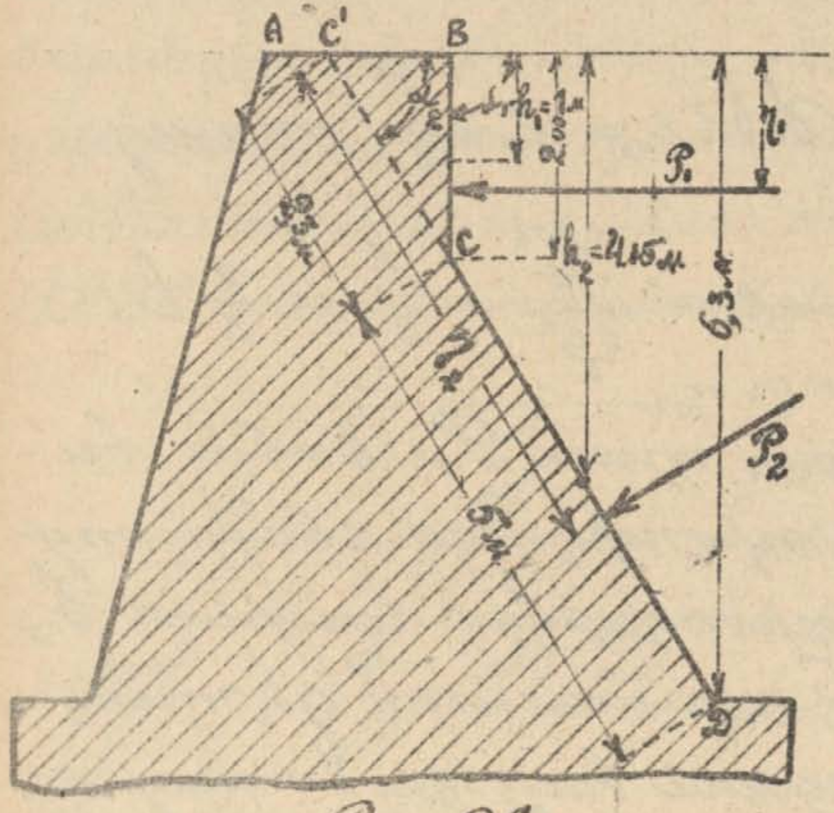


Рис. 26

Найдемо тиск окремо для частин BC, CD, які рiжно нахилені до поверхні води. Кут нахилу першої частини – $\alpha_1 = 90°$, а другої $\alpha_2 = 60°$. Довжина першої частини $l_1 = 2$ м.; а другої $l_2 = 5$ м. Решта розмірів – на рисунку.

Манометричний тиск P_1 буде $= \gamma F_1 h_1 =$
$= 1000 (2 \times 1) \times 1 = 2000$ кгр.

Ордіната точки прикладення тиску

$\eta_1 = \frac{2}{3} BC = \frac{2}{3} \times 2 = 1,33$ м.

Тиск P_2 на площу CD буде:

$P_2 = \gamma F_2 h_2 = 1000.(5\times1).4,15 = 20750$ кілг.

Ордіната точки прикладення тиску:

$$\eta_2 = \frac{J^s_F}{Fe_0} + e_0;\quad J^s_F = \frac{bh^3}{12} = \frac{1\times5^3}{12};$$

$F = 5\times1 = 5$ кв. м.; $e_0 = 2,5 + 2,32 = 4,8$ м.

тому: $\eta_2 = \frac{125/12}{5\times4,8} + 4,8 = 0,43 + 4,82 = 5,25$ м.

Напрямок сили P_2 - нормальний до стінки CD.

2) Найти силу, яка здвигає греблю, що має довжину 10 метрів, коли величина натиску води H=4 метрам, а довжина підводного откосу l = 5 метрів (рис. 27)

Рис. 27.

Тиск манометричний

$P_м = \gamma F h =$
$= 1000\times10\times5\times2 =$
$= 100.000$ клг.

Ордіната

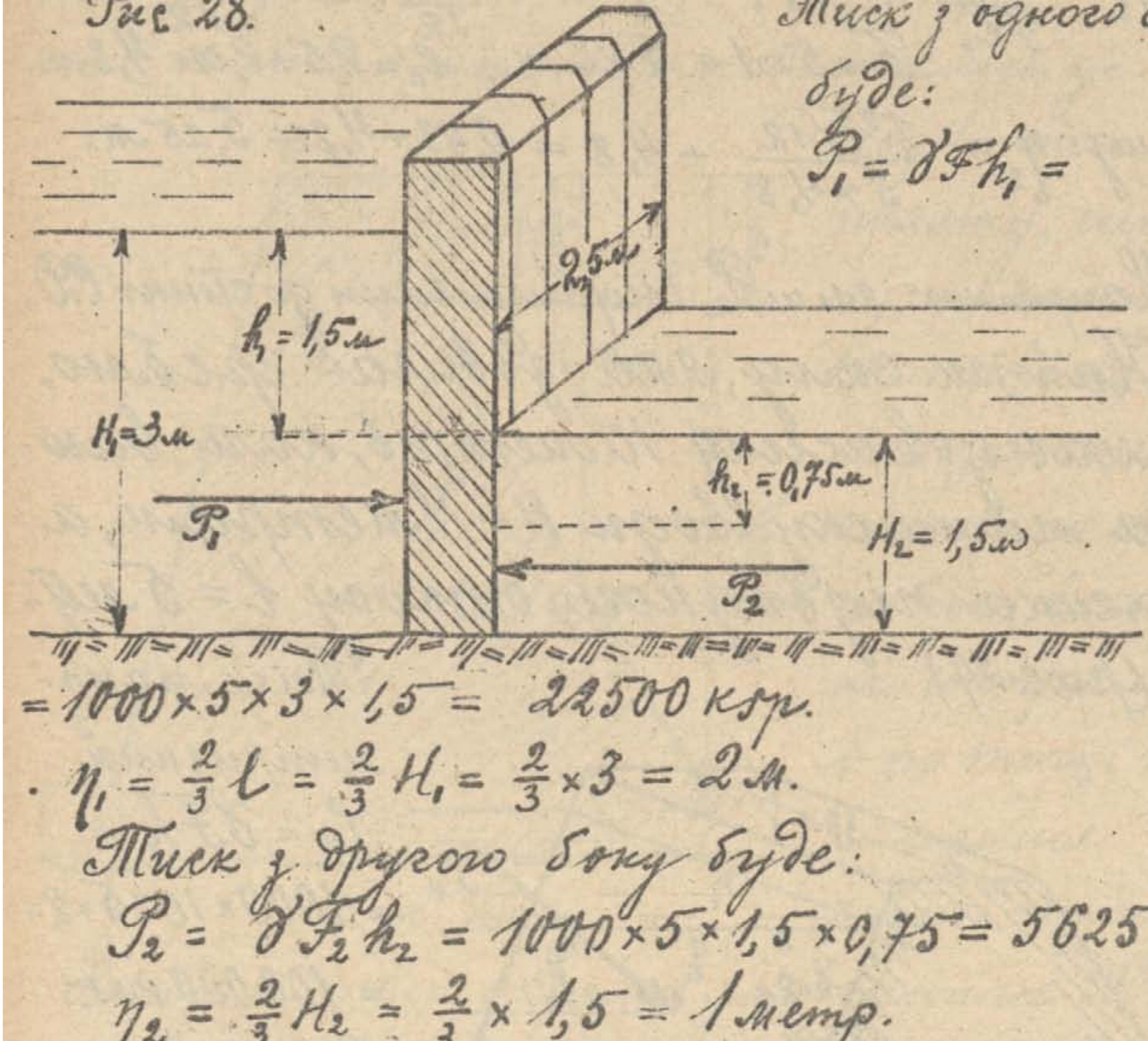
$\eta = \frac{2}{3} l =$
$= \frac{2}{3}.5 = 3,33$ м.

Не вся сила $P_м$ здвигає греблю, а лише поземна її складова $P_{мx}$, яка буде $= P_м.\cos\beta$; $\cos\beta = \frac{H}{l} = 4/5$; тому:

$P_x = 10000 \times \frac{4}{5} = 80.000$ кг.

3) Найти силу, яка ділає на підпорку стінку (рис. 28), довжиною в 5 метрів, коли з одного боку її глибина води 3 метра, а з другого 1,5 метра

Рис. 28.



Тиск з одного боку буде:

$P_1 = \gamma F h_1 =$

$= 1000 \times 5 \times 3 \times 1,5 = 22500$ кгр.

$\eta_1 = \frac{2}{3} l = \frac{2}{3} H_1 = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ м.

Тиск з другого боку буде:

$P_2 = \gamma F_2 h_2 = 1000 \times 5 \times 1,5 \times 0,75 = 5625$ кгр.

$\eta_2 = \frac{2}{3} H_2 = \frac{2}{3} \times 1,5 = 1$ метр.

Вислідна цих двох сил $= P_1 - P_2 =$
$= 22500 - 5625 = 16875$ кілогр.

4). В прямовисній заставці AB (рис. 29) вирізана кругла відтулина, яка прикривається круглою ж кришкою, що може повертатися коло точки C;

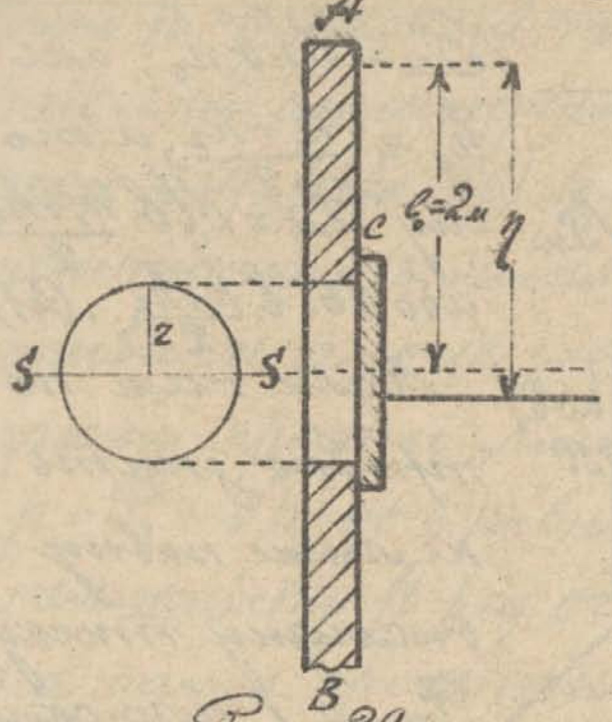


Рис. 29.

луч кришки $r = 20$ см.; віддалення осередку кришки від поверхні $l_0 = 2$ метра. Найти тиск на кришку і точку і точку прикладення його.

Манометричний тиск $P_м = \gamma F h = \gamma . \pi r^2 . l_0 = 1000 \times 3,14 \times 0,2^2 \times 2 = 251,2$ кгр.

$\eta = \frac{J_F^S}{F l_0} + l_0$; момент інерції кола відносно оси SS' — $J_F^S = \frac{\pi r^4}{4}$, а тому $\eta = \frac{\pi r^4}{4 \pi r^2 l_0} + l_0 = \frac{r^2}{4.2} + 2 = \frac{0,2^2}{8} + 2 = 2,005$ м.

§23. Обчислення гидростатичного тиску, коли задані глибини занурення верхньої і нижньої грані стінки.

Коли с прямокутної стінки AB, що нахилена під кутом α до поверхні води (рис 30), відомі віддалення точки A і точки B від вільної поверхні, тоді тиск можна виразити взором, в якім замісць віддалення центра тягару C від поверхні війдуть дані глибини: h_1 і h_2. Дійсно, $P_м = \gamma F h_0$; при ширині стінки $= b$, поле $F = lb$, а

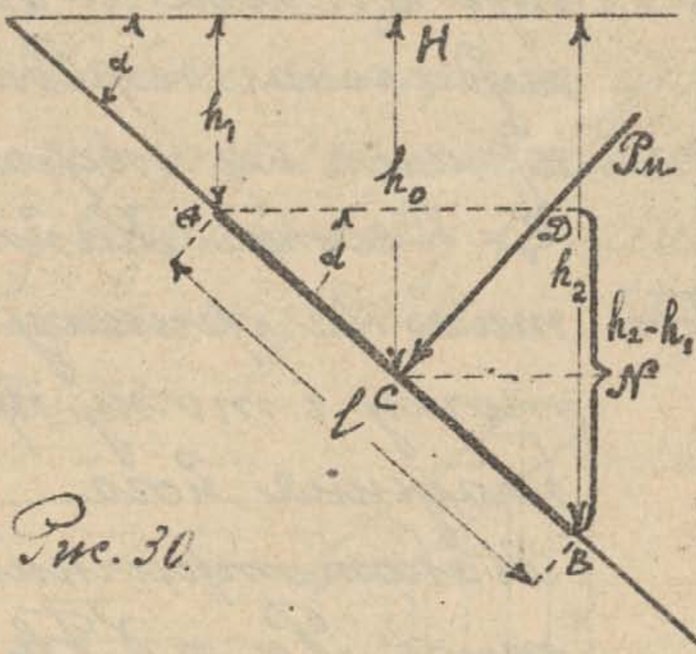


Рис. 30.

$P_м = \gamma H b h_0$; але $h_0 = \frac{h_1+h_2}{2}$, а тому $P_м = \gamma H b \frac{h_1+h_2}{2}$, або $\gamma b. l. \frac{h_1+h_2}{2}$ . . . (41)

Коли нам потрібно знать не лише повну вислідну тиску $P_м$, а і його складові: поземну H і доземну N, тоді ці останні обчисляєм так:

$H = P_м \sin\alpha$; $\sin\alpha$, як видко з рисунка $= \frac{h_2-h_1}{l}$, а тому $H = P_м . \frac{h_2-h_1}{l} =$

$= \gamma b l . \frac{h_1+h_2}{2} . \frac{h_2-h_1}{l} = \gamma b . \frac{h_2^2-h_1^2}{2}$ . . . . (42)

$\underline{N = P_м . \cos\alpha}$; $\cos\alpha = \frac{AD}{l}$;

$AD = \sqrt{l^2-(h_2-h_1)^2} = d$;

$N = \gamma b l \, \frac{h_1+h_2}{2} . \frac{d}{l} = \gamma b d . \frac{h_1+h_2}{2}$ . . . . . (43)

Коли в той чи інший спосіб найдені поземна H і доземна N складові гідростатичного тиску $P_м$; тоді сам гідростатичний тиск $P_м = \sqrt{H^2+N^2}$ . . . . . . (44)

§24. Графічні методи означення й находження тиснення, тиску, а також точок прикладення тиску.

а) <u>Діаграма тиснення</u>. Тиснення на глабині h у важкій течі, над вільною поверхнею якої атмосфера, виражається взором (§14, рівн. 26) $p = P_0 + \gamma h$; при P_0 і γ постійних, p міняється лише за зміною глибини h, і ця зміна відбувається по закону простої лінії, бо властиво взір: $p = P_0 + \gamma h$ це є рівнання простої; тому залежність p від останніх величин можна дати графічно.

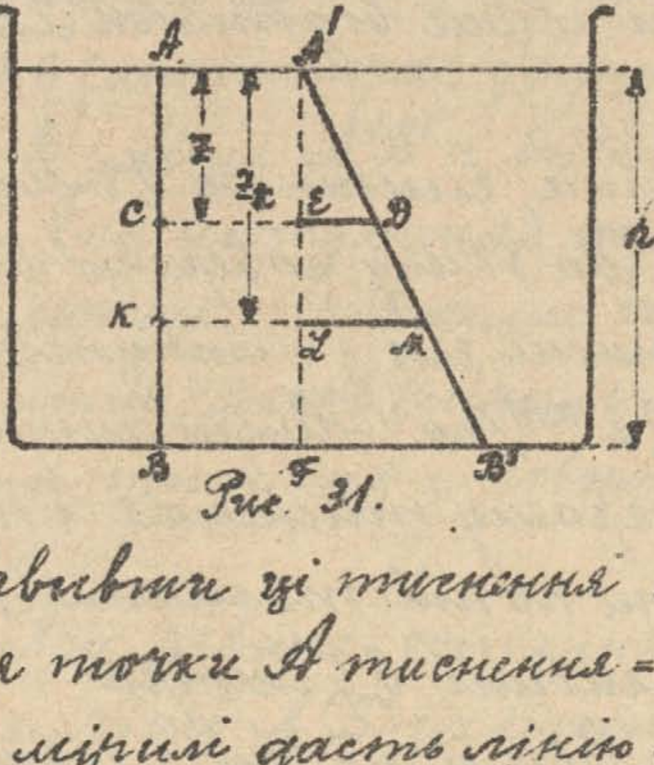


Рис. 31.

Уявимо собі посудину з водою (рис. 31); возьмемо в ній доземну лінію AB і відкладемо в будь якому мірилі для точок A і B тиснення в цих точках, направивши ці тиснення нормально до AB. Для точки A тиснення = P_0, яке в вибраному мірилі дасть лінію AA'; для точки B матимемо = $P_0 + \gamma h$; відклавши його від B, одержимо відтинок BB'; з'єднаємо тепер точки A' і B'; лінія A'B' і буде лінією або діаграмою зміни тиснення. Дійсно, візьмемо точку C на будь-якій глибині

z і проведемо через неї поземну лінію до перетинення з $A'B'$ в точці D; тоді CD в нашому мірилі дасть величину тиснення в точці C, що видно з слідуючого:

$CE = AA' = P_0$; $ED:z = FB':h$; але $FB' = \gamma h$, тому $ED = \frac{\gamma h \times z}{h} = \gamma z$.

Отже, $\underline{CD = CE + ED = P_0 + \gamma z}$.

Коли б ми хотіли найти для точки K лише манометричне тиснення, тоді проводимо через K поземну просту і беремо в нашому мірилі лише відтинок LM, який буде $= \gamma . z_K$.

<u>Приклад</u>. Посудина, глибиною 0,8 метра, виповнена водою. На вільну поверхню води тисне газ з напруженням 0,2 $^{кіл.}/см^2$. Накреслити діаграму тиснення і найти по ній тиснення на глибині 0,6 метра.

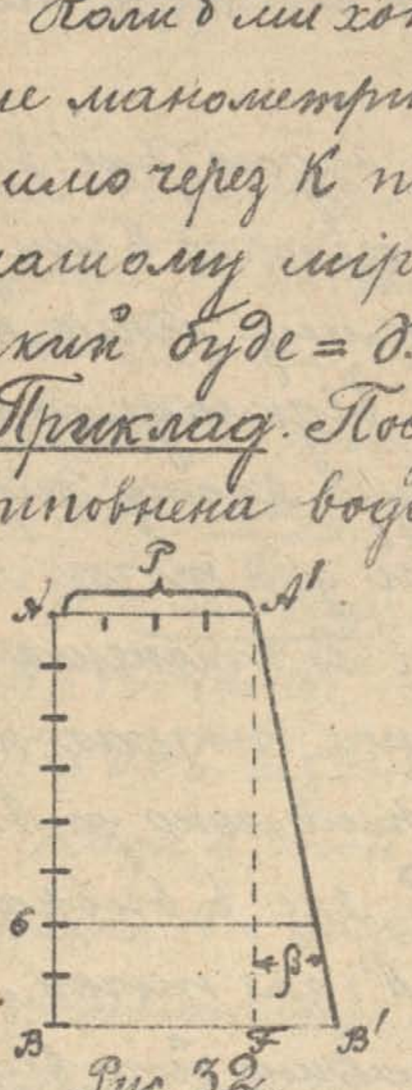


Рис. 32.

Візьмемо для глибин довільне мірило, наприклад: за 1 метр - 10 сантиметрів; тоді глибина нашої посудини буде $0,8 \times 10 = 8$ сантиметрів. Відкладемо цю лінію $AB = 8$ см доземно (рис. 32); для тиснення візьмемо мірило також довільно, наприклад, 20 сантіметрів за 1 кілогр./см²; при цьому мірилі тиснення на вільну поверхню $P = 0,2 \frac{кг}{см^2} = 0,2 \times 20 = 4$ сантіметра. Відкладаємо 4 сантіметра нормально до AB і одержимо відтинок AA'.

З точці B тиснення буде $p_B = P + \gamma h$; γ у нас $= 0,001$ кіл/см²; $h = 0,8$ метра, або 80 см. Тому $p_B = 0,2 + 0,001 . 80 = (0,2 + 0,08) \frac{кіл.}{см^2}$

Відкладаємо від B нормально до AB відтинок $BF = AA'$, а потім $FB' = (0,08) . 20 = 1,6$ сантіметра; з'єднуємо тепер точки A' і B'; лінія A'B' і буде епюрою тиснення. Для находження тиснення на глибині 0,6 метра, проводимо через точку 6 поземну лінію, яка в мірилі сил і дасть величину тиснення і повного, і манометричного.

При рівних останніх обставинах нахил лінії A'B' залежить від специфічної ваги течі; чим більш γ, тим більше буде кут β (рис. 32); це видно із самого рівняння: $p = \gamma h + P_0$, де γ є кутовий сочинник простої і рівняється $tg\beta$, як це відомо з аналітичної геометрії.

Коли до посудини налито де-кілька теч, що мають ріжну густоту і між собою не змішуються, тоді діаграма тиснень прийме вигляд ломаної лінії, як показано на рис. 33; тому що зверху буде теча сама лехка, для якої γ_1 буде найменша, то перша частина діаграми AB буде мати з доземною простою кут β найменший; кут β_3 буде, навпаки, найбільший.

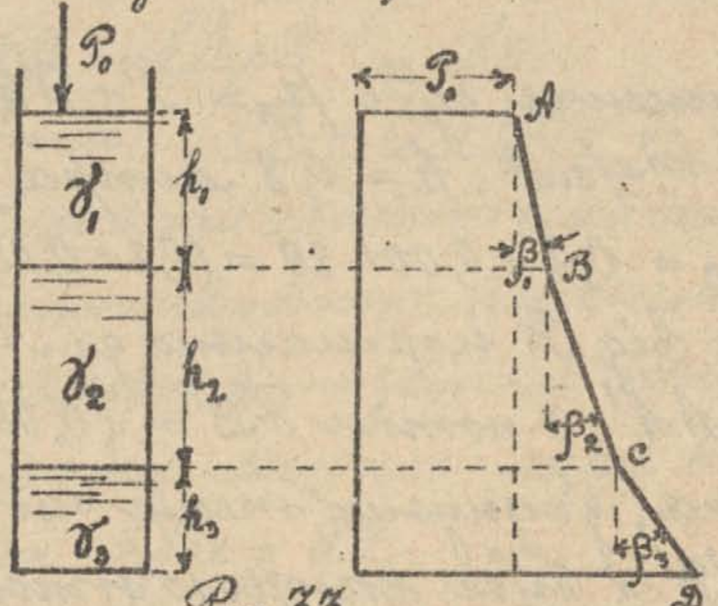


Рис. 33.

б) Діаграма тиску.

Візьмемо знову плоску, нахилену під кутом α до поверхні води стінку, на яку тисне з одного боку вода, що доходить до самого верху стінки (рис. 34) і віднесемо її, як раніш, до прямокутного укладу координат. На частину стінки OABC ділає манометричний тиск: $P = \gamma F h_1' = \gamma b l_1 \cdot \frac{l_1}{2} \sin\alpha =$

$= \frac{\gamma b l_1^2}{2} \sin\alpha.$

На частину стінки OAB_0C_0 ділає

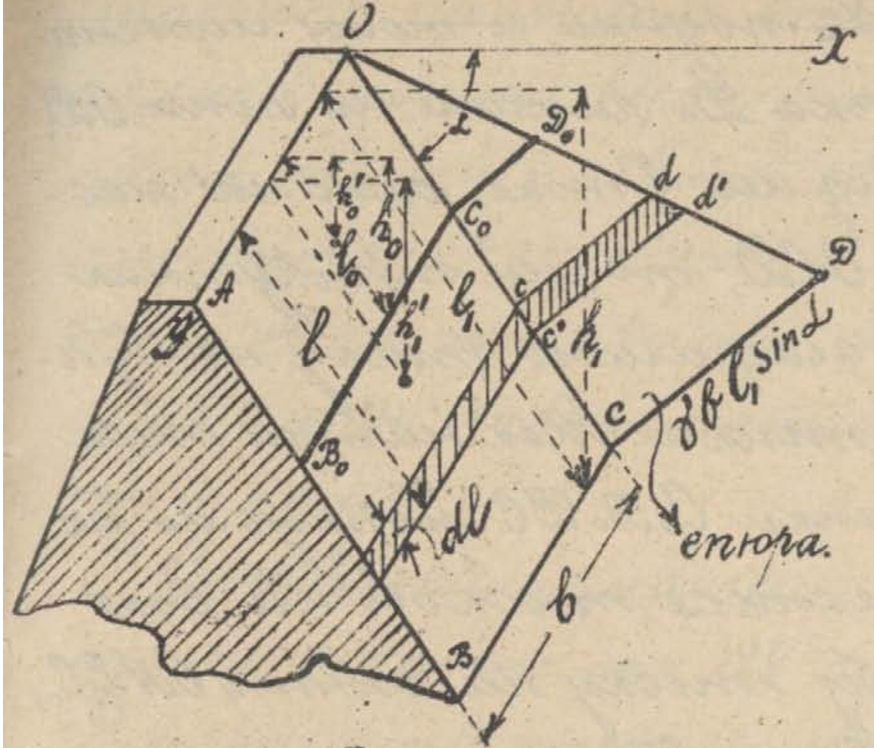


Рис. 34.

тиск $P_0 = \gamma F_1 h_0' = \gamma b l_0 \frac{l_0}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{\gamma b l_0^2}{2} \sin\alpha$.

Ці аналітичні вирази для тисків можна виразити графічно в такий спосіб: проведемо в точці OC простопад до лінії AB і відкладаємо на ньому такий відтинок BD, щоб поле трикутника ABD мало стільки одиниць поля, скільки одиниць тиску приходиться на стінку OABC; для цього необхідно, щоб істнувало рівенство:

$$\frac{OC \cdot CD}{2} = \frac{\gamma b l_1^2}{2} \cdot \sin\alpha, \text{ або}$$

$$\frac{l_1 \cdot CD}{2} = \frac{\gamma b l_1^2}{2} \cdot \sin\alpha;$$

відсіля: $CD = \gamma b l_1 \sin\alpha$, або $\gamma b h_1$.

Тиск на $OAB_0C_0 = P_0$ можна виразити графічно полем трикутника OC_0D_0, в якому $C_0D_0 = \gamma b l_0 \sin\alpha$, або $\gamma b h_0$

Коли взяти відношення $\frac{CD}{C_0D_0} = \frac{\gamma b l_1 \sin\alpha}{\gamma b l_0 \sin\alpha} = l_1/l_0$, то з нього видно, що трикутники OCD і OC_0D_0 подібні, а тому можна вивести, що точка D_0 лежить на лінії OD, а не в стороні від неї. Отже, коли ми маємо трикутник OCD, то цей трикутник являється вже діаграмою тиску на будь-яку частину стінки. Щоб найти тиск на частину стінки C_0B_0BC міркуємо так: цей тиск рівняється тискові на всю стінку $OABC$ без тиску на стінку OAB_0C_0, а тому йому буде еквівалентно поле діаграми $OCD - OC_0D_0$ = полю трапезу C_0D_0DC.

Таким чином, можна дати правило. Гідростатичний тиск на прямокутну частину B_0C_0CB плоскої прямокутної стінки $OABC$ є рівний чисельно полю відповідного трапезу C_0D_0DC діаграми тиску, накресленої для всієї стінки.

Згідно цього положення тиск dP на елементарну смужку стінки dF, що лежить на віддаленню l від оси OA, і має вишину - dl, є рівний по кількости одиниць полю безмежно-малого трапезу $cddc$

Щоб найти тепер точку прикладення вислідної тиску на стінку B_0C_0CB, скориставлюся правилом статики, що статичний момент висхідної сили відносно точки або оси є рівний сумі моментів статичних складових сил відносно тієї ж точки або оси. Замісць сил будемо брати еквівалентні їм поля діаграми тиску.

Статичний момент M_1 від висхідної тиску відносно оси OY буде $\underline{M_1 = P.\eta}$, де P-висхідний тиск, а η - віддалення точки прикладання його від оси OY.

Висхідна P є рівна полю трапецу C_0D_0DC, а тому $\underline{M_1 = C_0D_0DC.\eta}$ . . . . . . (α)

Момент M_2 суми складових сил буде:

$M_2 = \int dP.l$, або $\int dF.l = \int cdd'c'.l$; останній $\int$ є рівний, як уже було, також указано, добуткові з поля фігури на віддалення центра тягару її від оси OY, що $= e_0$.

$M_2 = \int cdd'c'.l = C_0D_0DC.e_0$ . . . . (β);

Але $M_1 = M_2$, а тому:

$$C_0D_0DC.\eta = C_0D_0DC.e_0$$; відкіля виходить, що $\eta = e_0$, себ-то, що точка прикладання висхідної тиску має таку ж ординату η, як і центр тягару діаграми тиску e_0.

Таким чином, для того, щоб найти точку прикладення тиску на будь яку частину стінки, необхідно найти центр тягару відповідного поля діаграми тиску, взяти віддалення його від оси OY і це віддалення відкласти від оси Y-ів по осі симетрії стінки; на кінці цього відтинка і буде точка прикладення тиску.

Для находження тиску від води діаграма тиску викреслюється більш просто, ніж було описано. Основа трикутника-діаграми CD є рівна $\delta b l_1 \sin\alpha$, але, перш за все при обчисленнях беруть ширину стінки $b=1$, а тому CD буде $= \delta l_1 \sin\alpha$; крім того, для води $\delta = 1$ граму в куб. сантім., або 1 тонні в куб. метрі, а тому, коли довжини беруть в сантіметрах, δ не пишеться, а лишень потім треба пам'ятати, що тиск буде в грамах; коли же довжини міряються в метрах, то δ знов можна не писати, але тиск уже буде в тоннах. Отже, після цих скорочень основа трикутника CD буде $= l_1 \sin\alpha$, або $=$ глибині точки $C = h_1$; тому діаграма будується так: до лінії

OK в точці C проводиться простопад і на ньому вкладається заглиблення точки C = h_1 до точки D і точка O з'єднується з D; або від точки C відкладається на простопаді до C_0C лінія $C_0D_0 = h_0$ і точка D_0 з'єднується з D, чим викреслюється трапез C_0D_0DC.

Тиск P від води на одиницю довжини стінки буде $P = \frac{l_1^2}{2} \cdot \sin\alpha$, або $\frac{l_1 h_1}{2}$; це тоді, коли стінка доходить до поверхні. Коли ж вона не доходить, то тиск:

$$P = \frac{l_1^2 - l_2^2}{2} \cdot \sin\alpha \text{, або} = \frac{l_1h_1 - l_2h_2}{2}.$$

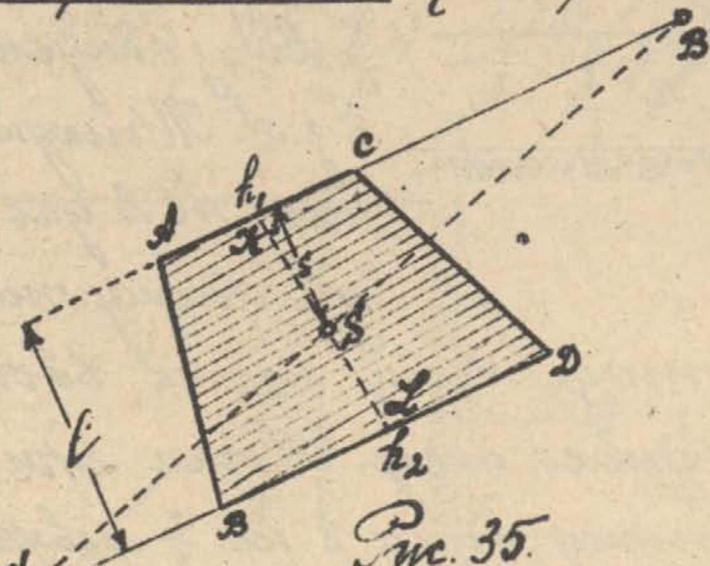


Рис. 35.

Примітка. Центр тягару трикутника лежить на віддаленні $\frac{2}{3}$ його вишини, числючи від вершика; центр тягару трапезу або дається взором: $s = \frac{l}{3} \cdot \frac{h_1 + 2h_2}{h_1 + h_2}$ (рис. 35), або находиться графично, для чого бік AC продовжуємо і відкладаємо CB' = BD, потім продовжуємо бік BD і відкладаємо BC' = AC; з'єднуємо точки B' і C', проводимо лінію KL, що половинить боки AC і BD; перетинення лінії B'C' і KL дасть точку S, яка й буде осередком поля трапезу.

Коли на стінку тисне вода з обох боків, тоді графічно вислідна тиску і точка його прикладення находяться так, як показано на рис. 36. Від точки B стінки проводимо лінію простопадну до AB і на ній відкладаємо глибину точки B = h (закреслюємо дугу лучем = h до перетинення з BE); з'єднуємо E з A. Трикутник AEB дає діаграму тиску на стінку AB тоді, коли тиск води існує лише з одного боку. Точка прикладення цього тиску була б на $\frac{2}{3}$ довжини AB, і сама сила P_1 буде нормальною до AB. Для тиску води з другого боку будуємо діаграму тиску так: на лінії BE відкладаємо $BL = h_2$ і точку L з'єднуємо з K. Трикутник KLB дасть силу тиску P_2 з другого боку; ця сила направлена від

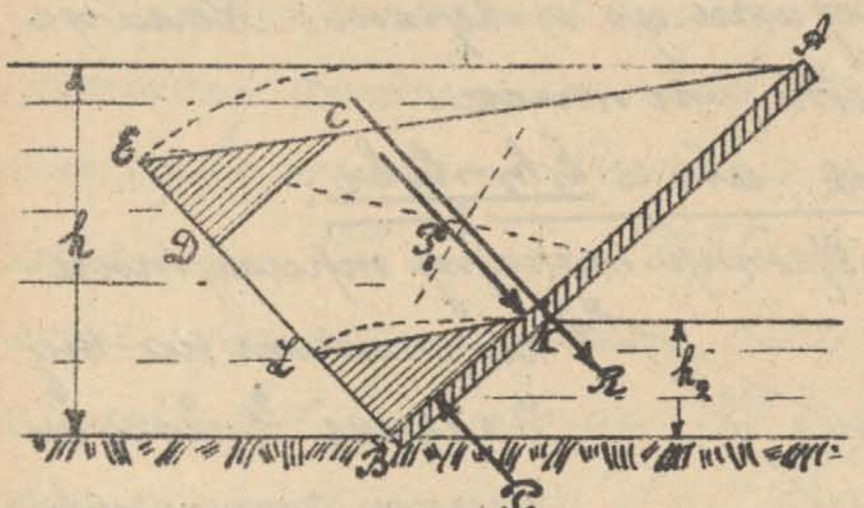


Рис. 36.

воротно сили P_1, а прикладена вона на 2/3 КВ. Вислідна двох сил $P_1 - P_2 = R$ графично дається або фигурою AELK, або рівною їй фигурою ACDB, і проходить через центр тягару цього останнього трапезу.

Для розвязання де-яких інженерних задач буває иноді вигідним накреслити иншу діаграму тиску, яка показувала б відразу величину тиску від поверхні течі до взятого поземного ребра стінки; назовемо цю діаграму *підсумковою діаграмою тиску*. Будується вона в такий спосіб. Нехай AB (рис. 37) буде доземна стінка, на яку тисне з одного боку вода. Звичайною діаграмою тиску буде трикутник CDB, у якого DB = h.

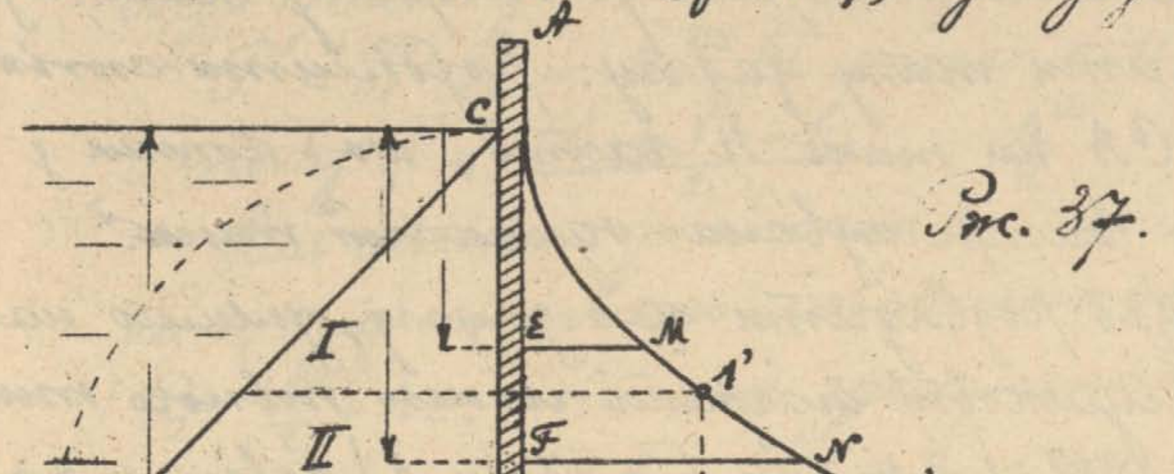


Рис. 37.

Тиск на частину стінки від поверхні

до точки E буде при ширині стінки = і $\gamma = 1$, $P_1 = \frac{z_1^2}{2}.1$ тонн. Прибравши дл P_1 відповідне рисунку мірило, відкладем в ньому $\frac{z_1^2}{2}$, як відтинок EM; для точки F тиск на всю стінку CF. 1 буде $P_2 = \frac{z_2^2}{2}.1$ тонн і виразиться відтинком FN. Нарешті для точки B – $P_3 = \frac{h^2}{2}.1$ тонн $= BQ$.

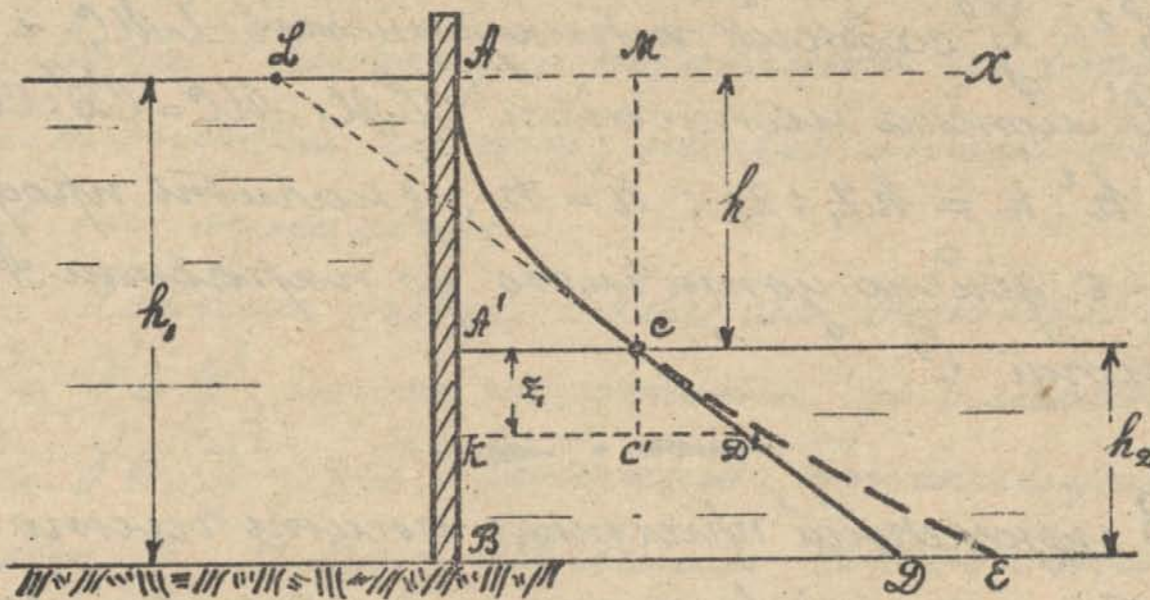
Коли тиски P_1, P_2.... вважати за абсцис а глибини z_1, z_2, h за ординати, тоді видно, що лінія CMNQ буде параболою з вершком в точці C і параметром 1. $(z^2 = 2P)$

Маючи підсумкову діаграму легко розвязати таку задачу: розділити стінку CB на такі n частей, щоб кожна з них витримувала однаковий тиск?

Щоб розвязати цю задачу, ділимо на підсумковій діаграмі лінію повного тиску BQ на n (на рис. 37 на 3) рівних частей і через точки поділу проводимо доземні до їх перетинання з кривою CMNQ; від точок 1' і 2' проводимо поземні, які розділять стінку і діаграму тиску на потрібні частини.

В тому разі, коли на стінку вод

тисне з обох боків, тиск з одного боку $P_1 = \frac{\gamma b h_1^2}{2}$, а з другого $P_2 = \frac{\gamma в h_2^2}{2}$ (рис. 38)
При $в=1$, $\gamma=1$ $P_1 = \frac{h_1^2}{2}$, а $P_2 = \frac{h_2^2}{2}$.



Тиск на частину стінки A'B, на яку вода тисне з обох боків, буде:

$P' = P_1 - P_2 = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2}$ тонн, але $h_1 = h + h_2$

а тому $P' = \frac{(h+h_2)^2 - h_2^2}{2} = \frac{h^2}{2} + h . h_2$;

Для стінки до точки K, що лежит на z_1 під нижньою поверхнею води тис $P_z = \frac{h^2}{2} + hz$, себ-то він графічно складається із части I $= A'C = \frac{h^2}{2}$ і части II $= CD' = hz_1$; ця друга частина представляється графічно простою лінією CD, яка являється дотичною до параболи в точ ці C. Дійсно, властивість дотичної д параболи така, що вона перетинає ві абсціс на віддаленню від початку, рі нім абсцисі точки торкання. У нас віссю абсцис (X-ів) являється лінія AX, точкою торкання - C, абсциса її $= AM = A'C = \frac{h^2}{2}$; тому AL буде також $\frac{h^2}{2}$, а $AM = = h^2$. Із схожих трикутників LMC і $CC'D'$ можна написати $LM : MC = C'D' : CC'$, або $h^2 : h = hz_1 : z_1$; $h = h$; значить проста CD - є дійсно дотичною до параболи ACE в точці C.

◆

В інженерній практиці досить часто бувають і такі випадки, коли підсумкова діаграма взагалі не потрібна, необхідно ж лише розвязати задачу про поділ певної стінки на рівнонатиснуті части;

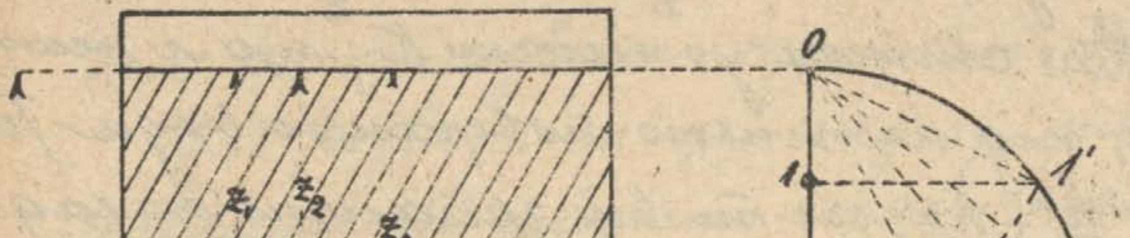


Рис. 39.

так було, наприклад, при

1.1

проектуванню ригельних шлюзних воріт. Завдання це розвязується в такий спосіб: нехай маємо ворота, вишиною h, шириною b (рис. 39); на них тисне з одного боку вода. Необхідно розділити ці ворота на n таких частин, на які тиск води був би однаковий.

Повний тиск води на ворота буде $P = \gamma b \frac{h^2}{2}$; тиск на ворота до глибини z $P_z = \gamma b . \frac{z^2}{2}$; цей останній тиск мусить бути в n раз меньшим повного тиску, а тому: $P_z = P/n$, або $\frac{1}{2}\gamma b z^2 = \frac{1}{2n}\gamma b h^2$; відсіля: $z^2 = \frac{h^2}{n}$, або $h . \frac{h}{n}$;

$$z = \sqrt{h . h/n} \ldots\ldots \quad (45),$$

себ-то z є середня пропорційна між всею глибиною h і h/n.

Коли P_z мусить бути $= \frac{2}{n}$ повного тиску, тоді: $P_z = 2 . \frac{P}{n}$; $\frac{1}{2}\gamma b z^2 = \frac{2\gamma b h^2}{2n}$;

$$z^2 = h . \frac{2h}{n}, \quad z = \sqrt{h . \frac{2h}{n}},$$

Графично ці глибини z находяться так: проводимо довжину лінію рівну h; ділимо її на n рівних частин, описуємо на цій лінії, як на поперечнику, півколо, коли через точки поділу 1, 2, 3, . . . провести лінії 11', 22', . . до перетинення з колом.

то лінії $O1'$, $O2'$, і т. д. будуть тими глибинами z, які нам потрібні; залишається перенести їх на рисунок воріт і задача розвязана.

Коли стінка складається з де-кілька площ, тоді діаграма тиску викреслюється для кожної площі з окрема (рис. 40) і для кожної з окрема вираховується по діаграмі величина тиску, а також находиться точка прикладення його. Після цього будується многокутник сил (рис. 40б), а потім шнуровий многокутник I II III IV (рис. 40) і находиться висідна всіх сил R, напрямок її та точка її прикладення.

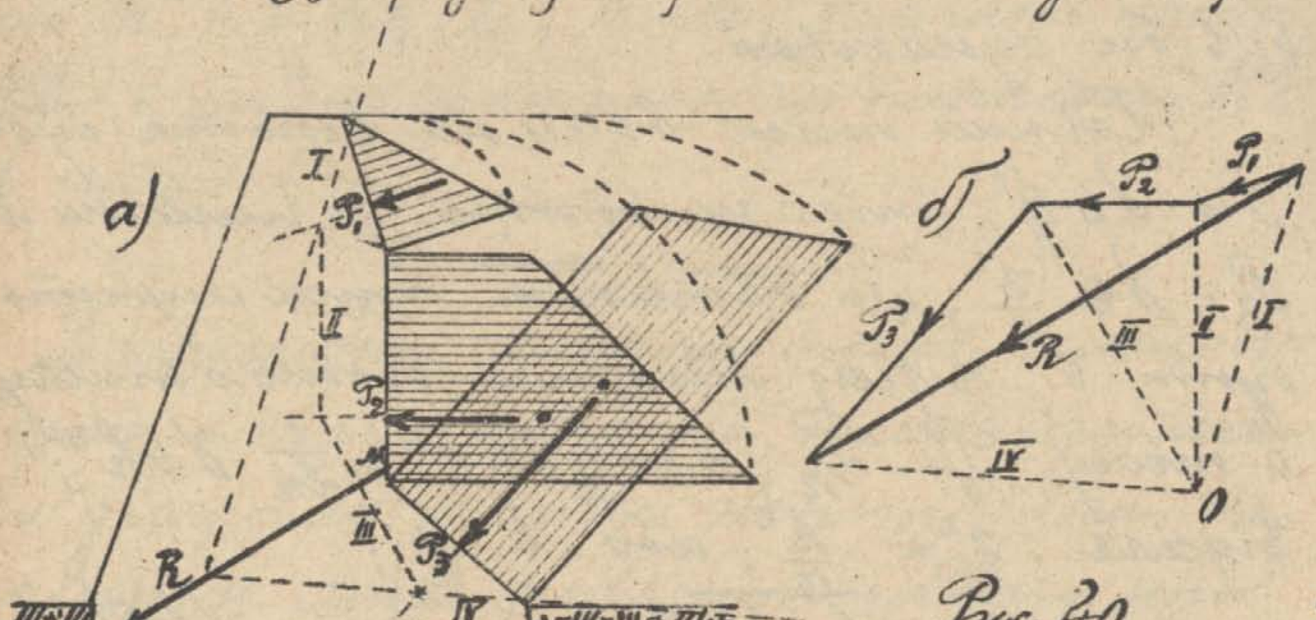


Рис. 40.

◆

Находження графічним методом поземної й доземної складових тиску.

В §   було вирахувано, що поземна складова сила тиску $H = \gamma b \frac{h_2^2 - h_1^2}{2}$, а доземна $N = \gamma b d . \frac{h_2+h_1}{2}$. Візьмемо стінку AB (рис 41), верхнє ребро якої лежить на глибині h_1, а нижнє на глибині h_2; проведемо через точку B просту, рівнобіжну поверхні, і відкладемо на ній $BD = h_2$; через точку A проведемо таку ж поземну лінію і на ній від A' відкладемо $A'C = h_1$; з'єднаємо точки O і D; поле трапезу A'CDB буде $= \frac{A'C+BD}{2} \times A'B = \frac{h_1+h_2}{2}(h_2-h_1) = \frac{h_2^2-h_1^2}{2}$, себ-то як раз буде = H, коли γ і $b = 1$. Поле трапезу $KLBA = \frac{KA+LB}{2} \times KL = \frac{h_1+h_2}{2} . d$; це й буде = N при $\gamma=1$ і $b=1$.

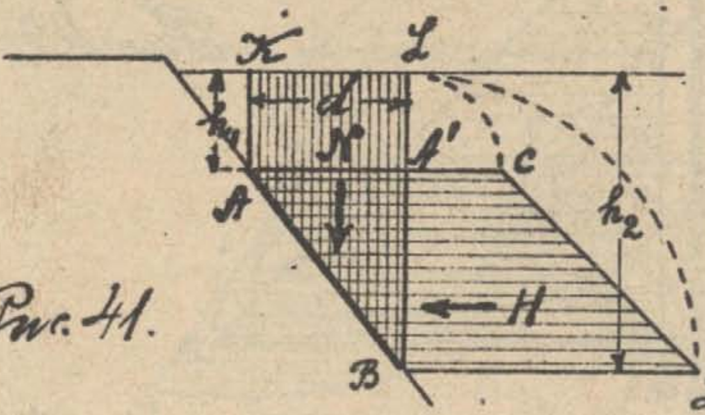


Рис. 41.

Сили H і N проходять через центри тягару своїх площ. Діаграма тиску (рис. 41) показує наочно, що поземна складова тиску на похилену площу AB є рівна тискові на мет площі AB на доземну площу, а доземна складова є рівна вазі стовпа течі, що стоїть над стінкою AB.

Коли стінка має профіль ломаний (рис. 42), тоді поземна складова буде

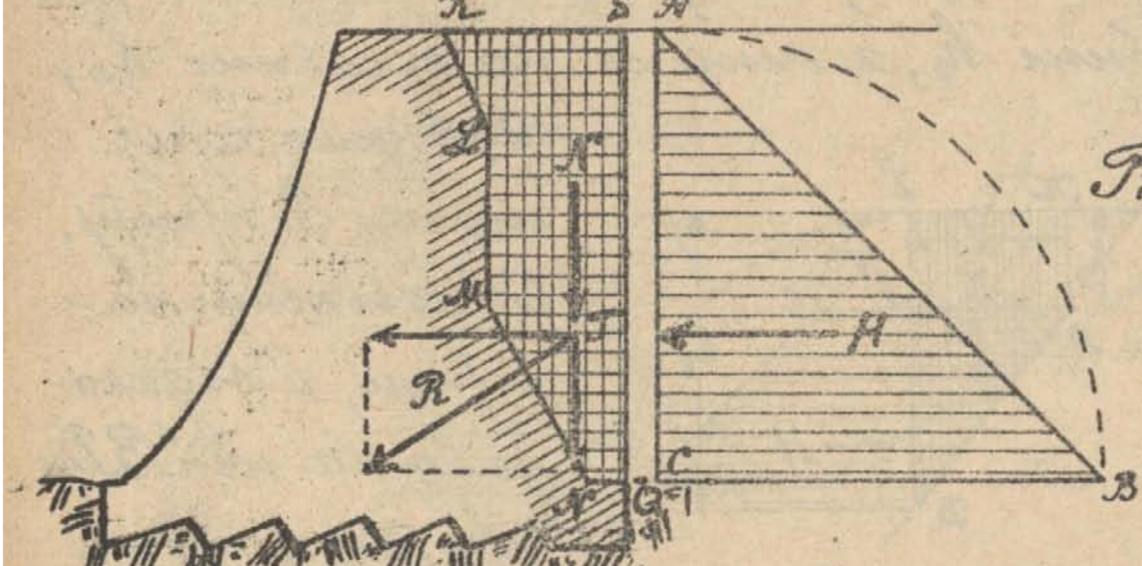


Рис. 42.

по величині = полю трикутника ABC, а напрямок сили пройде на $2/3$ AC від точки A; доземна ж складова буде рівна половині многокутника KLMNQS і пройде через центр тягару цього многокутника; точка T перетинення сил H і N буде точкою, через яку пройде висідна силу; величина й напрямок висідної R одержимо із рівнобіжника сил.

§25. Гидростатичний тиск на закривлені поверхні.

а) Величина тиску. Візьмемо будь яку посудину з закривленими стінками; розсічем її трьома довільними прямокутними координатними площами так, щоб частина посудини була обмежена: площею XOY, площею XOZ, площею YOZ і кривою поверхнею UVW (рис. 43).

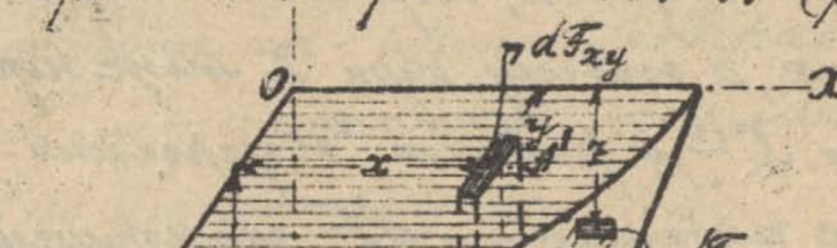



Рис. 43.

Нехай на цю поверхню тисне з одного боку теча, тоді манометричне тиснення p в будь-якій довільній точці A цієї поверхні, коли глибина точки $A = z$, буде: $p = \gamma z$.

тиск течі на елемент поверхні dF буде:

$$dP = \gamma dF \cdot z$$

Напрямок цієї сили буде по нормалі AN до площі dF, проведеній через A.

Нехай кути між напрямком нормалі AN, або сили dP і позитивними осями координат X, Y, Z будуть відповідно: λ, μ і ν ; тоді мет сили dP на вісь X-ів буде: $dP_x = dP\cos\lambda = \gamma dF z\cos\lambda = \gamma z(dF\cos\lambda)$;
на вісь Y-ів: $dP_y = dP\cos\mu - \gamma dF.z.\cos\mu = \gamma z.(dF\cos\mu)$;
на вісь Z-ів: $dP_z = dP\cos\nu - \gamma.dF.z.\cos\nu = \gamma z.(dF\cos\nu)$;

Але кут між двома простими є рівний з куту між площами, нормальними до цих простих, а тому кут λ між нормалю та віссю X-ів є рівний двугранному кутові між площами - dF, що нормальна до AN, і координатною площею YOZ, що нормальна до OX; на тих же підставах кут μ є кутом між площею dF і площею XOZ; кут ν - між площею dF і площею XOY. Тому вираз $dF\cos\lambda$ є метом елементарної площинки dF на площу YOZ = $= dF_{yz}$; $dF\cos\mu$ є мет площинки dF на площу XOZ $= dF_{xz}$, і $dF\cos\nu$ є мет площинки dF на площу XOY $= dF_{xy}$.

Отже,
$$\left.\begin{aligned} dP_x &= \gamma z.\,dF_{yz}\\ dP_y &= \gamma z.\,dP_{xz}\\ dP_z &= \gamma z.\,dP_{xy}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(46)$$

Перші два рівняння дають тиск на мети від взятого елементу поверхні на координатні площі YOZ і XOZ, а третє рівняння дав вагу стовпа течі, основою якого є мет елемента dF на поверхню течі, а вишиною є глибина z занурення елементу під поверхнею.

Цей висновок годиться для кожного елемента кривої поверхні, а тому можна сказати:

Тиск на криву поверхню можна обчислити як три окремих тиска:

1) по напрямку осі OX;
2) по напрямку осі OY;
3) по напрямку осі OZ.

Перша сила тиску є рівна тискові на мет кривої поверхні, кинутий на площу, нормальну осі OX; друга сила тиску є рівна тискові на мет кривої поверхні, кинутий на площу, нормальну осі OY; третя сила тиску є рівна вазі стовпа течі, який є обмежений самою кривою поверхнею, метом її на вільну поверхню і метовою творчою поверхнею.

Координатні осі взяті були цілком довільно, а тому можно зробити висновок, що складова від тиску течі на криву поверхню, взята по будь-якому поземному напрямку, є рівна тискові на мет кривої поверхні, кинутий на площу, нормальну вибраному напрямку.

Примітка: Коли крива поверхня має таку форму, що метовий валець на будь яку площу, торкається поверхні по замкненій лінії, тоді ця лінія розділяє взяту поверхню на дві частини (рис. 44), причому ці частини дають мети на одну координатну площу, які налягають один на другий. Ці мети можна вважати з різними знаками. На рис. 44 лінія KLM є лінія торкання метового вальця з тілом A; частина тіла вліво від лінії KLM дасть на площі YOZ мет $F_ь$ зі знаком, припустим, +, частина тіла A вправо від лінії KLM, що являє незамкнену сферовидну поверхню, дасть на ту ж площу YOZ мет F_m, кільцевого вигляду, який треба вже бра-

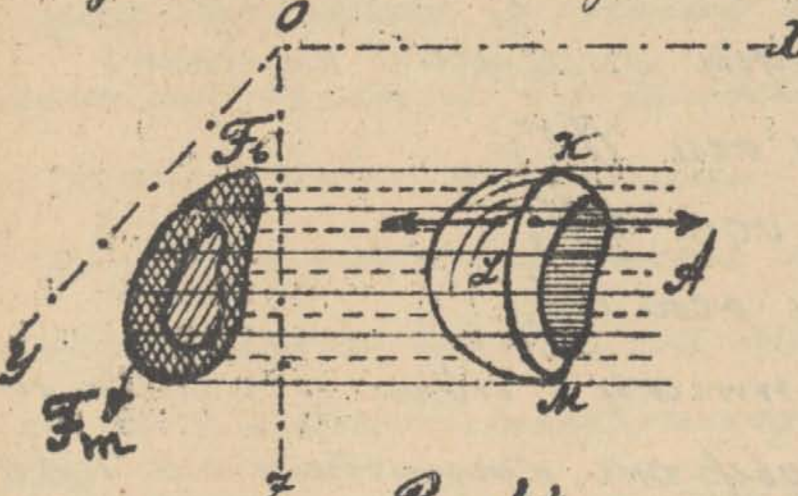


Рис. 44.

ти зі знаком –. Коли б на площу YOZ проектувалося тіло замкнене, то обидва листи його були б однакові, але мали б різні знаки (див. §27, рис 55), а сума їх була б рівна нулю.

Нехай, наприклад, посудина з водою має форму, показану на рис. 45. На площу XOY частина AB проектується з одним знаком, а частина BC з відворотним. Тому доземна складова тиску на частину $AB = +N_1$, а на частину $BC = = -N_2$.

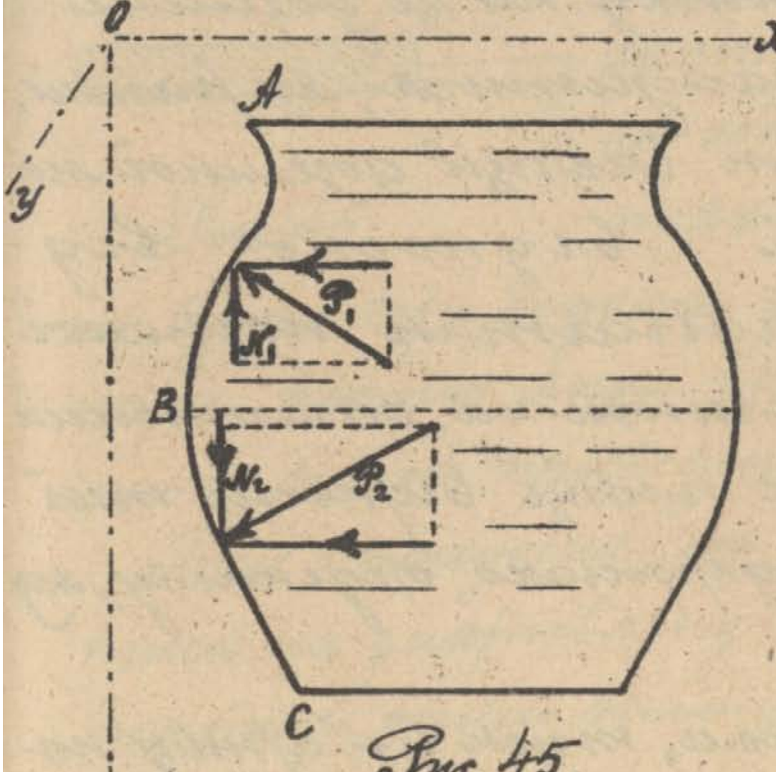


Рис. 45.

б) Точки прикладення складових сил тиску.

Ми вже знаємо, що складова сили тиску на будь яку поземну віс X-ів – $dP_x = = \gamma z\, dF_{yz}$, а на поземну віс Y-ів – $dP_y = = \gamma z\, dF_{xz}$, себ то, рівняються манометричному тисненню на глибині, відповідній точці A кривої поверхні, помноженому на мет елементарної площинки dF на кривій поверхні. Отже, тиснення на площі, що являються метами на доземних координатних площах, мають таку ж величину і розпреділяються Так, як це було виведено для тиску на плоскі стінки, а тому центри прикладення складових сил тиску на ці доземні мети будуть находитися, як раніш, а саме: момент інерції доземної метової площі відносно відповідної координатної поземної оси треба поділити на статичний момент тієї ж площі відносно тієї ж оси, і тоді одержимо ординату, яку ми означали η.

Таким чином, тиск на криву поверхню буде в нас опреділений величиною й напрямком трьох його складових і точками прикладення їх. Як бачимо, поземні складові тиску на криві поверхні не залежать від форми самої поверхні, а лише від величин метів цієї поверхні на доземні площі; тому, посудина такої, наприклад, форми, як показано на рис. 45, поставлена на поплавку, не буде двигатися в бік довшої стінки, бо мет її на довшу площу буде такий же, як і мет протилежної стінки.

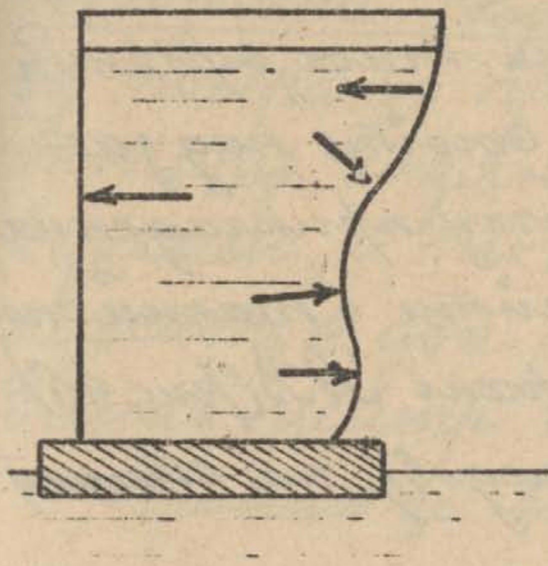


Рис. 45.

Із теоретичної механіки відомо, що всяка система сил, що діає на сталу систему матеріальних точок, може бути приведена до однієї сили і до пари, вектор якої іде по цій силі (або може бути приведена до <u>дінами</u>).

Три складових, на які розкладається тиск на закривлену поверхню, не лежать в одній площі і тому в загальному випадку вони не можуть бути зведеними до однієї вислідної, а лише на основі приведеного закону механіки, до однієї сили і до однієї пари; але в інженерній практиці мають місце найголовнішим чином такі випадки, коли або всі складові сходяться в одній точці і тоді можна найти вислідний тиск, або завданням вимагається найти лише складову тиску в певному напрямку.

Доземна складова тиснення $dP_z = \gamma z dF_{xy}$, а весь доземний тиск є рівний вазі стовпа течі, що стоїть над закривленою поверхнею. Точку прикладення цього тиску можна найти в такий спосіб. На закривленій поверхні AB (рис. 46) розглянемо доземну складову на елемент dF.

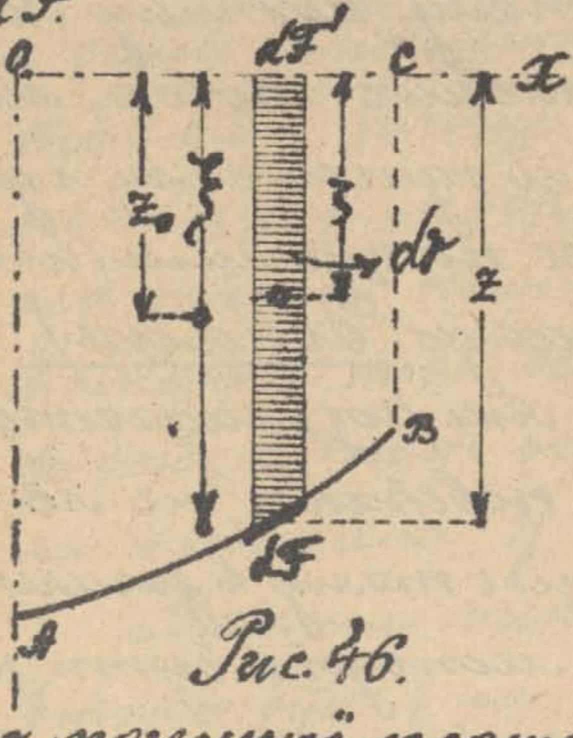


Рис. 46.

$dP_z = \gamma z\, dF_{xy}$ або $\gamma z dF'$, але $z.dF'$ = елементарному об'єму = dV; тому $dP_z = \gamma dV$; а все $P_z = \gamma V$.

Щоб найти тепер віддалення центра цього тиску відносно поземної площі, напишемо так:

$$P_z \cdot \xi = \int z\, dP_z;$$

розділимо це рівенство на γ, тоді одержимо: $\frac{P_z}{\gamma} \cdot \xi = \int z . \frac{dP_z}{\gamma}$, що — $V \cdot \xi = \int z\, dV$; замітивши, що $z = 2\zeta$, напишемо:

$$V\xi = \int 2\zeta . dV = 2\int dV; \zeta$$

$\int dV . \zeta =$, як відомо вже, Vz_0, де z_0 — є віддалення центру тягару стовпа течі OABC, а тому: $\xi = 2z_0$ . . . . . . (47)

Доземна складова тиску на криву поверхню проходить через центр тягару водяного стовпа над поверхнею, а точка прикладення її лежить в два рази глибше, ніж згаданий центр тягару.

Правило це вірне й тоді, коли теча тисне на криву поверхню не згори, а знизу, як це показано на рисунку 47.

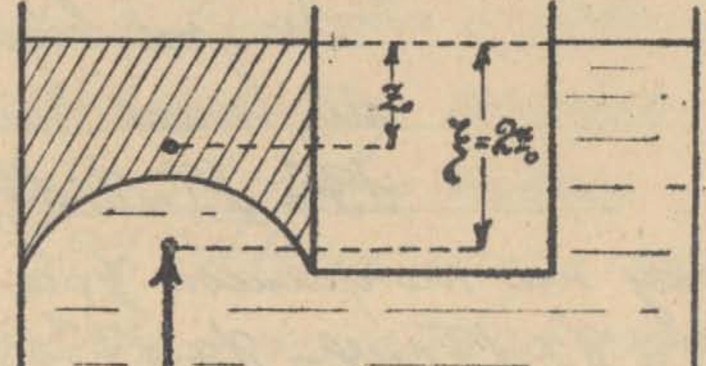


Рис. 47.

§26. Гидростатичний на криву поверхню тиск в довільному напрямку.

На практиці бувають випадки, коли від тиску на криву поверхню необхідно знати складову лише одного напрямку, який не є ні поземним, ні доземним. Цю задачу можна розвязати лише в де-яких, особливих випадках.

Візьмемо криву поверхню (рис. 48) і

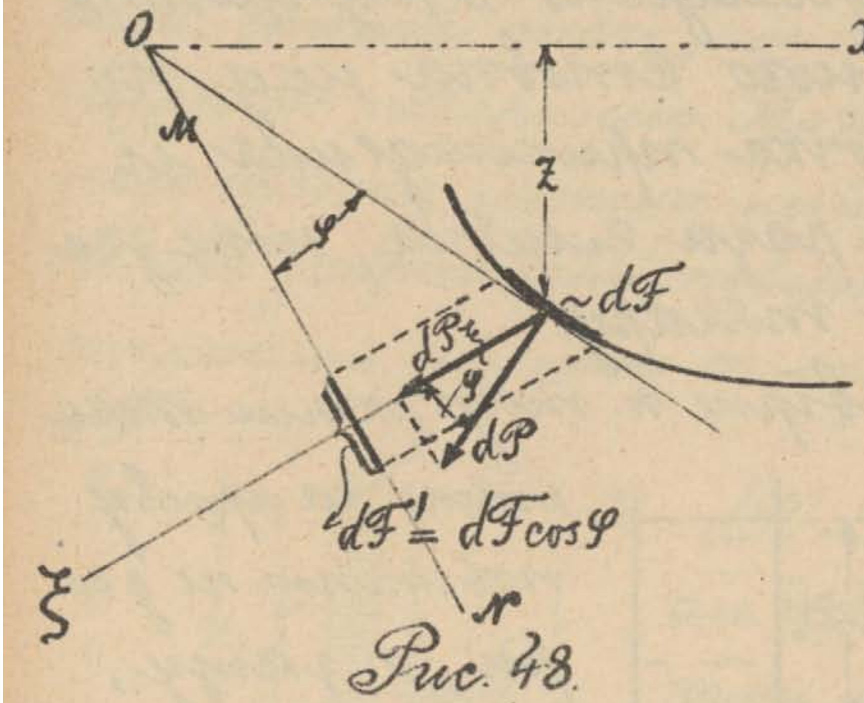


Рис. 48.

на ній елемент dF; найдемо складову тиску на dF в напрямку ξ.

Як уже відомо, тиск на $dF = dP = \gamma z dF$; складова цього тиску на напрямок ξ, а саме $dP_\xi = dP. \cos\varphi = \gamma z\, dF \cos\varphi = \gamma z\, dF'$; відсіля:

$$\underline{P_\xi = \gamma \int z\, dF'} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (48)$$

Рівняння (48) можна розвязати тоді, коли дана залежність між z і dF'; але в де-яких випадках, коли всі елементи dF кривої поверхні нахилені до площі метів MN однаково, задача розвязується простіш.

Тоді $dP_\xi = \gamma z\, dF \cos\varphi$; $\cos\varphi = const$;

$P_\xi = \gamma . \cos\varphi \int z\, dF$; останній $\int$ є статичний момент кривої поверхні відносно вільної поверхні OX; він є рівний всьому полю даної по-

верхні F, помноженому на z_0 - віддалення центру тягару даного поля від тієї ж поверхні; отже $P_\xi =$
$= \gamma \cos\varphi \cdot F z_0$; $F\cos\varphi = F'$;

$$P_\xi = \gamma F' z_0 \quad \ldots\ldots\ldots (49)$$

Складова тиску на задану вісь є рівна, в цьому випадку, вазі стовпа течі, в якого основою є мет кривої поверхні на площу нормальну до заданої вісі, а висота є рівна віддаленню центра тягару кривої поверхні від вільної поверхні течі.

§27. Приклади находження гідростатичного тиску на закривлені поверхні.

1. Найти величину тиску і точку прикладення його на стінку параболічного профілю, яка тримає воду, підняту до самої корони стінки.

Віднесем нашу стінку (рис. 49) до прямокутної системи координат: OX, OY, OZ; нехай координати найнижчої точки B параболи будуть: $x = 3$ м, $z_0 = h = 10$ м. Довжина стінки в напрямку Y — $в = 5$ м.

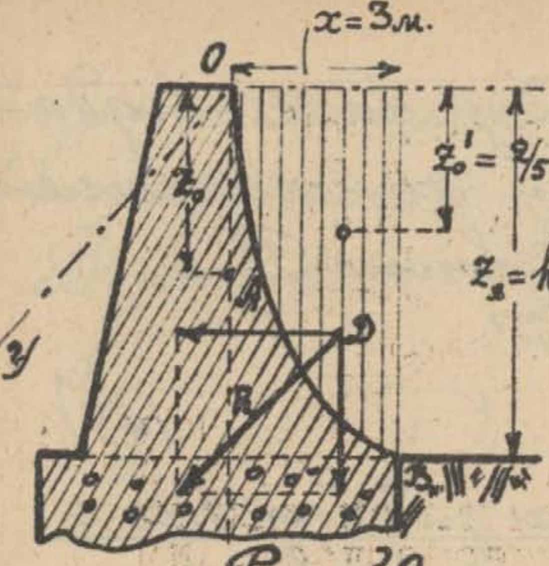


Рис. 49

Находимо спочатку складові тиску в напрямках осей OX, OY, OZ, а потім уже, з них, обчислимо й висліднии тиск. Складова сила в напрямку OX є рівна тискові на мет параболичної поверхні OAB, кинутий на координатну площу ZOY; цей мет $F_{yz} = 10 \times 5 = 50$ кв. м.

1) Тиск $P_x = \gamma . F_{yz} . z_0$, де $z_0 = \frac{h}{2} = 5$ м.; $\gamma = 1000$ кілогр.; $P_x = 1000 \times 50 \times 5 = 250.000$ кілограмів.

2) Тиск $P_y = \gamma . F_{xz} . z_0$; мет параболичної поверхні на площу XOZ буде лише лінія OA.B, а тому поле $F_{xz} = 0$ і тиск $P_y = 0$.

3) Тиск P_z = вазі стовпа води, рівного полю OABC, помноженому на довжину стінки = 5 метрів. Поле OABC, як поле части параболи, є $= \frac{2}{3} . x . h = \frac{2}{3} \times 3 \times 10 = 20 [\text{метр}]^2$

$P_z = \gamma V = 1000 \times 20 \times 5 = 100.000$ кілогр.

Найдемо тепер точки прикладення найдених складових тиску.

Поземний тиск P_x пройде на $\frac{2}{3}h$ від поверхні води, себто на $\frac{20}{3}$ метра від поверхні і на середині довжини стінки, або на 2,5 метра від одного її краю.

Доземний тиск P_z пройде через центр тягару стовпа води; цей центр найдеться в центрі даної части поля параболи, взятої нормально до стінки, на середині її довжини. Центр тягару части параболи має координати: $x_0' = \frac{5}{8}x$; $z_0' = \frac{2}{5}h$; у нас $x_0 = \frac{5}{8} \times 3 = \frac{15}{8}$ метра, а $z_0' = \frac{2}{5} \times 10 = 4$ метра.

Поземна і доземна висліді тиску лежать в одній і тій же площі, що проходить через середину довжини стінки і нормально до поверхні її; тому обидві ці сили перетинаються в одній точці D і повний тиск R може бути або вирахуваний по взору $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$, або найдений графічно, як це показано на рисунку; $P = \sqrt{250.000^2 + 100.000^2} = \sim 269.000$ кілогр.

Координати точки D будуть $x_0 = \frac{15}{8}$ м., а $z_0 = \frac{20}{3}$ метра.

2. На півкулю (рис. 50) тисне знизу вода, що виповнює вальцову частину посудини на висоту h; найти величину тиску знизу до гори P?

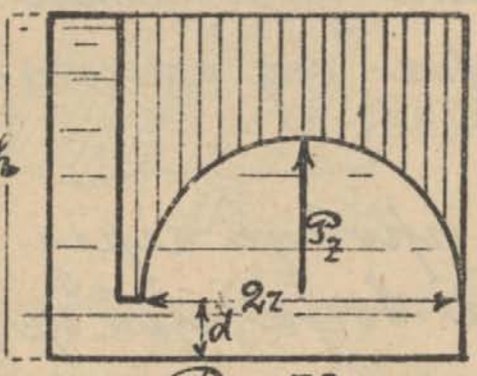


Рис. 50

Доземна складова тиску на криву поверхню є рівна вазі стовпа течі над нею до вільної поверхні в посудині. В даному разі P_z є $= \gamma.\pi r^2.(h-d) - \frac{\gamma\frac{4}{3}\pi r^3}{2}$;

$$P_z = \gamma\pi r^2\left(h-d-\frac{2}{3}r\right).$$

3. До нахиленої стінки посудини з водою щільно приставлено правильний прямий стіжок (рис. 51); найти складову тиску, яка має напрямок оси стіжка. Луч основи стіжка $= r$; вишина його $= h$; $MN \perp CD$.

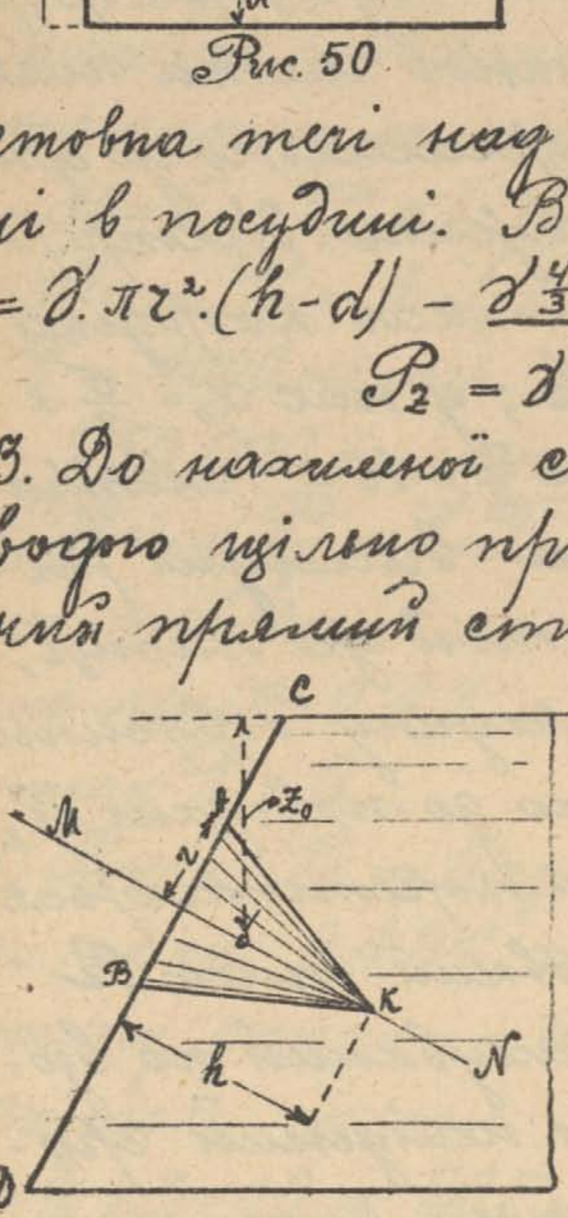


Рис. 51.

Згідно доведеного в § 26, $P_\xi = \gamma F'.z_0$; F' = мету стінки на площу $CD = \pi r^2$; z_0 — це віддалення центра тягару поверхні стіжка від поверхні води; γ - вага води. Із статики відомо, що центр тягару поверхні стіжка лежить на його оси у віддаленню $\frac{2}{3}h$ від вершка; отже z_0 буде заглиблення точки 0 під поверхнею води.

4. Найти доземну висліду тиску води на стінки стіжка, коли цей стіжок виповнений водою; найти також центр цього тиску?

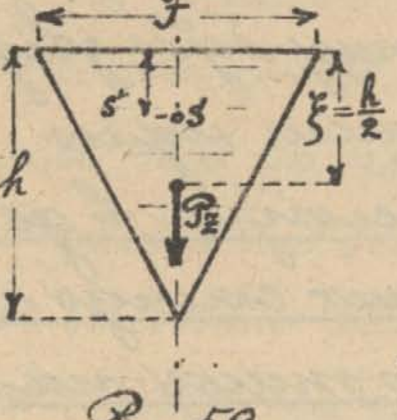


Рис. 52.

P_z = вазі стіжка води =

$$= \frac{\gamma . F . h}{3}.$$

Центр прикладення цього тиску лежить двічі далі від поверхні, ніж центр тягару s стіжка води; останній же лежить на $\frac{h}{4}$, а тому: $\xi = 2s = 2\cdot\frac{h}{4} = \frac{h}{2}$

5. Найти доземну висліду тиску води на поверхню стіжка, який щільно стоїть на дні посудини; вода доходить до вершка стіжка (рис. 53).

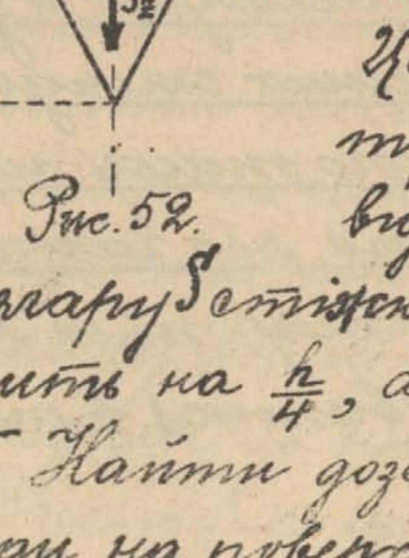


Рис. 53.

P_z = вазі стовпа води, який налягає на стіжок; об'єм цього стовна є рівний об'єму вальця САВД без об'єму нашого стіжка.

$$P_z = \gamma F h - \frac{\gamma F h}{3} = \frac{2}{3}\gamma F h.$$

§28. Тіла, занурені в течу. Підйомна сила течі (Закон Архімеда).

Коли тіло будь-якого виду цілком або частинно занурено в течу, тоді повний мет поверхні тіла на кожну доземну координатну площу буде, згідно примітки до §25, рівним нулю.

Відсіля виходить, що висліда в довільному напрямку поземних складових сил гідростатичного тиску на поверхню зануреного цілком, або частинно тіла рівна нулю; тому тіло не має тенденції пересовуватись в течі в напрямках поземних.

Розглянемо тепер, які сили доземні виникають при зануренню тіла в течу, який напрямок вислідної цих сил і де буде точка її прикладення.

Коли тіло М (рис.54) цілком занурено в течу, тоді можна уявити собі, що воно ніби розділено на безмеж-

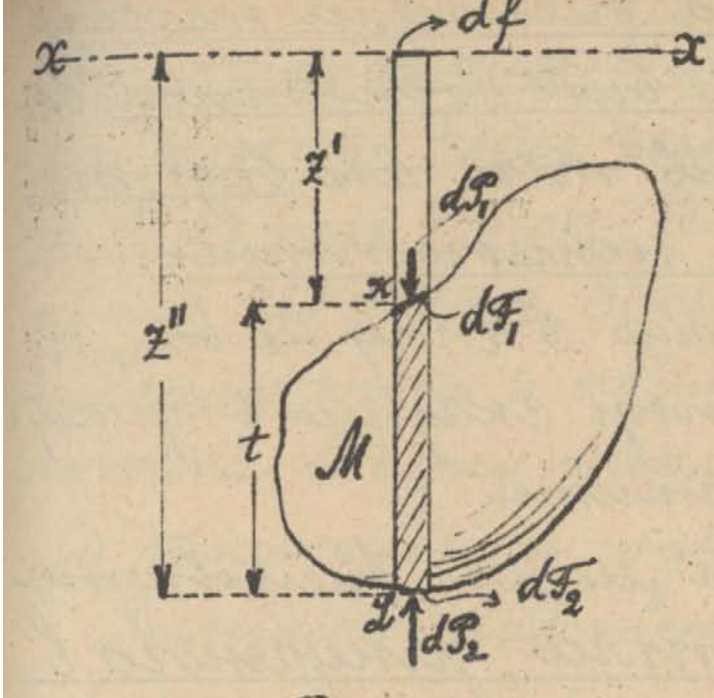


Рис. 54.

но-велику кількість щільно притулених один до одного безмежно тонких доземних стовпчиків KL з основами dF_1 і dF_2; ці основи з огляду на їх малість можна вважати площинами. Продовження доземної поверхні стовпчика KL до перетинення її з поверхнею XX дасть на останній площинку df, яка буде метом площинок і dF_1 і dF_2. Доземний тиск на площу dF_2 буде: $dP_2 = \gamma . df . z''$; він буде тиснути до гори. Доземний тиск на площу dF_1 буде: $dP_1 = \gamma . df . z'$; він буде тиснути до низу.

Вислідна цих двох тисків буде:

$$\underline{dP} = dP_2 - dP_1 = \gamma df (z'' - z') = \underline{\gamma . df . t} \ldots . (50)$$

Ця вислідна є вагою стовпа течі, об'єм якого рівняється об'єму стовпа тіла KL. Такий же висновок можна зробити відносно кожного з елементарних стовпчиків, на які розділено тіло, а тому величина вислідна тиску на занурене тіло буде рівнятися вазі всіх стовпчиків течі, або вазі течі, що має об'єм нашого тіла.

Коли тіло занурено в течу не все, а лише частиною, тоді сказане відноситься до зануреної частини.

Наведений закон можно висловити ще й так: Вага тіла, зануреного в течу, зменьшується на стільки, скільки важить теча в об'ємі зануреного тіла, або зануреної части тіла.

В цій останній формі закон був досвідним шляхом відкритий ще Архімедом (р. 287-212 до Р.Х), а тому він носить назву закона Архімеда.

Тиск течі знизу до гори називається підйомною силою течі; в дальшому прийнято для нього термін „підтиск".

Для кожного елементарного стовпчика підтиск проходить через центр його тягару, а тому вислідна цих елементарних підтисків, або підтиск для всього зануреного тіла пройде через центр тягару течі в об'ємі тіла. Необхідно мати на увазі, що центр тягару тіла Б і центр тягару течі в об'ємі тіла И збігаються в одну точку лише тоді, коли тіло цілком однородне (гомогенне).

Залишається тепер найти точку прикладення підтиску. Точка прикладення підтиску буде на дозеній лінії, що проходить через центр тягару об'єму течі (И), але вона має віддалення від поверхні вдвоє більше, ніж віддалення точки И від тієї ж поверхні.

Це твердження можна довести в слідуючий спосіб. Уявимо собі знову занурене тіло M (рис. 55). Нехай металевий валець торкається поверхні тіла по лінії торкання KL. Поверхнею, що проходить через KL, тіло ніби розділяється на дві частини, але мет кожної з них на площу XX буде однаковий. Найдемо тиски на кожну частину тіла; тиск на кож-

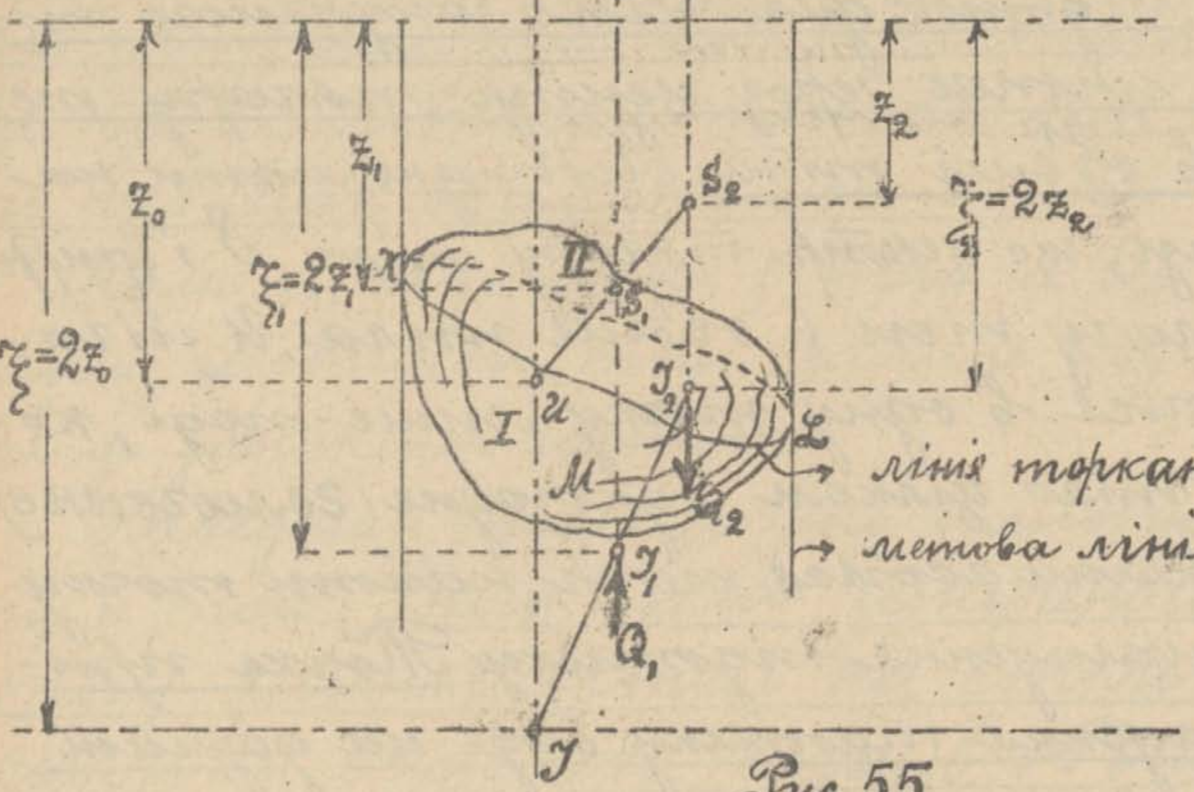


Рис. 55.

ню половину буде рівнятися вазі стовпа течі, що стоїть над поверхнею KML; назовемо його Q_1. Проходить він через центр тягару цього стовпа; точка прикладення його буде лежати на глибині вдвоє більшій, ніж заглиблення центра тягару стовпа – S_1. Коли ордината точки $S_1 = z_1$, то ордината точки J_1 прикладення тиску для частини I буде $\zeta_1 = 2z_1$

Аналогічно, тиск на частину II – Q_2 буде рівний вазі відповідного стовпа течі; він проходить через центр тягару цього стовпа – S_2, який має ордінату z_2. Точка прикладення цього тиску J_2 буде мати ордінату $\xi_2 = 2z_2$.

Підтиск A є рівний різниці тисків Q_1 і Q_2: $A = Q_1 - Q_2$.

Щоб найти ордінату всього підтиску ξ напишемо рівняння моментів відносно площі XX:

$$A.\xi = Q_1.\xi_1 - Q_2.\xi_2\text{; але}$$

$Q_1 = \partial V_1$; $Q_2 = \partial V_2$; тому $A = \partial(V_1 - V_2) = \partial V$, де V - об'єм тіла.

$$\partial V.\xi = \partial.V_1.2z_1 - \partial.V_2.2z_2;$$

$$\xi = 2.\frac{V_1z_1 - V_2z_2}{V} = 2.\frac{V.z_0}{V} = 2z_0,$$ де z_0 - ордіната центру тягару об'єму води в об'ємі тіла, а ξ - ордіната центру підтиску J, який лежить на доземній лінії, що проходить через центр тягару всього об'єму води. Отже, висловлене положення доведено.

На практиці не буває необхідности находити находити точку прикладення підтиску; досить найти його величину й осередок тягару випхнутої течі, через який підтиск проходить.

Закон Архімеда дає можливість розвязувати ріжні практичні задачі.

Приклади. 1) Камінь важить на воздусі $g = 75$ кіл.; цей же камінь має в дестильованій воді при 4°C вагу $Q = 45$ кіл., а в олії - вагу $R = 51$ кіл. Найти питому вагу каменя й олії?

Згідно закону Архімеда вага води в об'ємі каменя буде рівна убуткові ваги тіла в воді; в нас цей убуток рівняється $g - Q = 75 - 45 = 40$ кіл.; на тій же підставі вага олії в об'ємі нашого тіла буде $g - R = 75 - 51 = 24$ кіл.

Питома вага кожного тіла находиться поділом ваги тіла на вагу рівного об'єму води при 4°C; у нас питома вага каменя буде:

$$\delta_1 = \frac{g}{g-Q} = \frac{75}{30} = 2,5$$

Питома вага олії:

$$\delta = \frac{g-R}{g-Q} = \frac{24}{30} = 0,8$$

2) Пікнометр з водою важить $p_1 = 1,1$ кіл. тіло, питомий тягар якого невідомий, важить $p_2 = 2,7$ кіл. З пікнометра, після

того, як до нього вкинули досліджуване тіло, вилилося води p_3 грамів і він став важити — $p_1+p_2-p_3 = 2,9$ кілгр. Найти питомий тягар тіла δ?

$1,1+2,7-p_3 = 2,9$ кіл.; відсіля $p_3 = 0,9$ кіл. p_3 — це є вага води як раз в об'ємі вкинутого до пікнометру тіла, а тому: $\delta = \frac{p_2}{p_3} = \frac{2,7}{0,9} = 3$.

§. 29. Плавання тіл в течі.

Коли вага тіла Q, зануреного в течу, більше ваги течі в об'ємі цього тіла, або більше повного підтиску A_1 ($Q-A_1>0$), тоді тіло в воді опускається все нижче й нижче, тіло потопає.

Коли вага тіла Q як раз рівна вазі течі в об'ємі тіла ($Q-A_1=0$), тоді це тіло в довільному місці серед течі залишається в супокою;

нарешті, коли вага всього тіла меньша ваги течі в об'ємі тіла ($Q-A_1<0$), тоді тіло спливає й висовується над течею на стільки, щоб підтиск на занурену його частину A_1 був би рівний вазі всього тіла Q.

Отже, для того, щоб тіло плавало, необхідна умова: $A = Q$ . . . . (52),
де A - підтиск на занурену частину тіла, а Q - повна вага всього тіла. Коли означити через $V_з$ обєм зануреної частини тіла, через V повний його об'єм, через γ - вагу води, а через δ - вагу одиниці об'єму тіла, тоді рівняння $A = Q$ можна написати так:

$$\gamma . V_з = \delta . V \quad . . . . (53),$$

або: $V_з = \frac{\delta}{\gamma} . V$ . . . . (54);
коли $\frac{\delta}{\gamma}$ означити через ε, тоді:
$V_з = \varepsilon . V$, або $\frac{V_з}{V} = \varepsilon$.

Це рівняння дає можливість розвязувати ряд практичних питань.

Примітка. Поземний розсік плаваючого тіла нарівні дзеркала води називається *площею плавання*; обвід цієї площі називається *ватерлінією*; обєм води V_1, витиснутий зануреною частиною тіла, будемо називати „**витиском**" (deplacement)

Приклади.

1) В течі, питома вага якої є γ, плаває рівнобіжностінник (рис. 56),

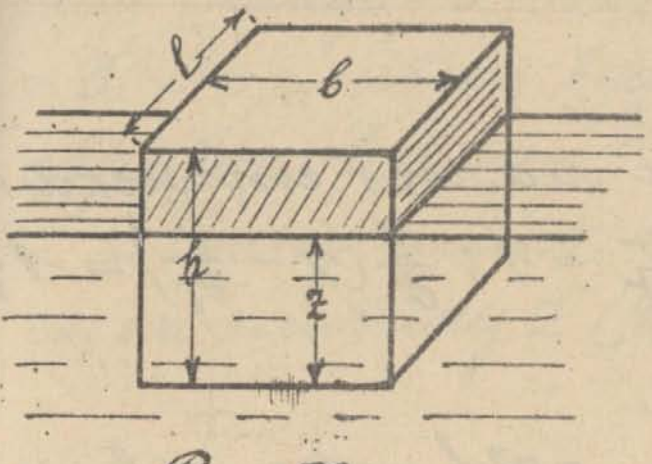


Рис. 56.

питома вага якого є δ; вишина рівнобіжностінника $= h$; ширина його $= в$, довжина $= l$. Найти глибину занурення тіла?

Вага зануреної частини тіла або підтиск $A = \gamma . в . l . z$, де z та невідома ще глибина занурення тіла, яку треба найти. Згідно рівнянь (52) і (53) $A = Q$; повна вага рівнобіжностінника $Q = \delta . в . l . h$. Отже, можемо написати: $\gamma . в . l . z = \delta . в . l . h$; відсіля:

$$\underline{z = \frac{\delta}{\gamma} . h = \varepsilon . h}$$

2). Стіжок питомої ваги δ плаває в воді основою до низу (рис. 57); луч основи $= R$; вишина стіжка $= h$; найти глибину z занурення стіжка.

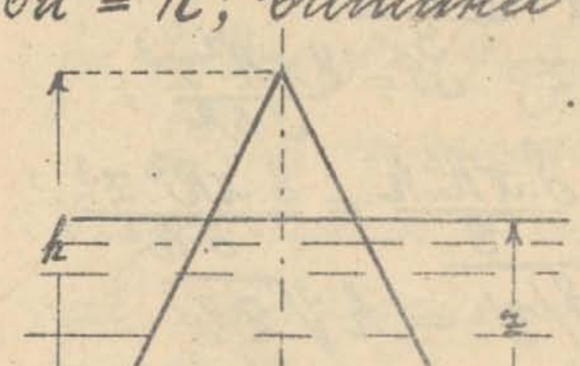


Рис. 57.

$Q = \delta . V_1$; $A = \gamma . V_2$, де $V_1 =$ об'ем усього стіжка, а V_2 – об'ем стятого стіжка, вишиного z.

$$\frac{A}{Q} = \frac{\gamma V_2}{\delta V_1} = 1$$

$V_2 = V_1 - v$, де v – обєм малого стіжка на водою. $\frac{A}{Q} = \frac{\gamma V_1}{\delta V_1} - \frac{\gamma v}{\delta V_1} = 1$; $\frac{\gamma}{\delta}\left(1 - \frac{v}{V_1}\right) = 1$;

$$1 - \frac{v}{V_1} = \frac{\delta}{\gamma};$$

$$v = \frac{\pi R^2 (h-z)^3}{3h^2};\ V_1 = \frac{\pi R^2 h}{3};\ \frac{v}{V_1} = \frac{(h-z)^3}{h^3};$$

$$1 - \frac{(h-z)^3}{h^3} = \frac{\delta}{\gamma};\ (h-z)^3 = h^3\left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\right);$$

$h - z = h\sqrt{1-\delta/\gamma}$; відсіля можна найти вже z;

$$z = h\left[1 - \sqrt[3]{1-\delta/\gamma}\right] = h\left[1 - \sqrt[3]{1-\varepsilon}\right].$$

3) Такий же стіжок плаває в воді верхком до низу. Найти глибину його занурення (рис. 58).

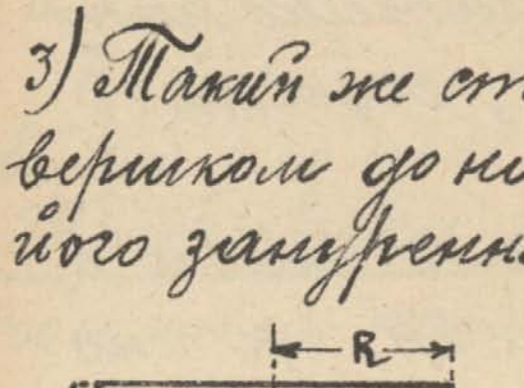


Рис. 58.

$$Q = \delta.\ \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$A = \gamma.\ \frac{\pi r^2 z}{3}$$

$$r = \frac{R.z}{h};\ A = \frac{8\pi R^2 z^3}{3h^2};$$

$$Q = A;\ \frac{\delta.\pi R^2.h}{3} = \frac{8.\pi R^2.z^3}{3h^2};$$

$$z = h\sqrt[3]{\delta/\gamma} = h\sqrt[3]{\varepsilon}$$

4) На воді плаває деревляний вальцевий обрубок, луч круглих основ якого $= R$; довжина $= l$; пито-

мий тягар = δ; питомий тягар води = γ. Як глибоко буде занурений цей обрубок в воду?

Припустимо, що обрубок зануриться на глибину z (рис. 59), при чому кут ACB нехай буде = φ; тоді $z = CD - CE =$

$$= R - R\cos \varphi/2 =$$
$$= \underline{R(1 - \cos \varphi/2)};$$

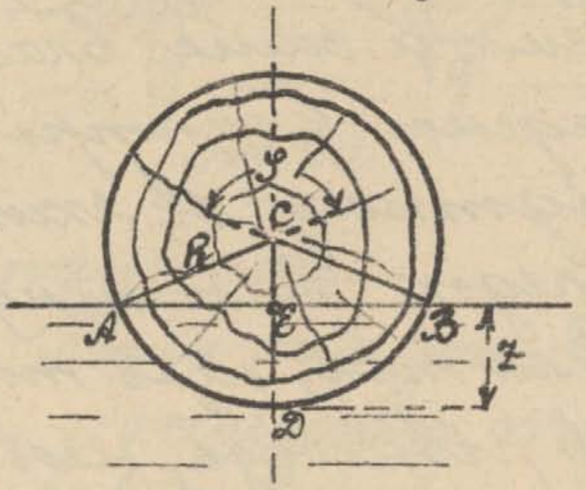


Рис. 59.

$A = \gamma . V$; $V = ACBD . l - ACBE . l =$

$$= l(ACBD - ACBE) =$$
$$= l\left(\frac{R^2\varphi}{2} - R^2 \sin\frac{\varphi}{2} . \cos\frac{\varphi}{2}\right) =$$
$$= \frac{lR^2}{2}(\varphi - \sin\varphi); \quad A = \frac{\gamma l R^2}{2}(\varphi - \sin\varphi);$$
$$A = g; \quad g = \delta . \pi . R^2 . l$$
$$\underline{\varphi - \sin\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\gamma} = 2\pi\varepsilon.}$$

$\sin\varphi$ можна розкласти в ряд і взяти з нього певну кількість членів; тоді буде: $\varphi - \left[\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2\ldots7}\right] = 2\pi\varepsilon$

Для першого наближення можно відкинути члени, починаючи з φ^5; тоді одержимо:

$$\varphi - \varphi + \frac{\varphi^3}{1.2.3} = 2\pi\varepsilon;$$
$$\varphi^3 = 12\pi\varepsilon; \quad \varphi = \sqrt[3]{12\pi\varepsilon};$$

Найшовши φ, обчислимо вже і z:

$$z = R\left(1 - \cos\frac{\mathcal{L}}{2}\right).$$

§30 Стійкість плаваючого тіла.

Тверде тіло, занурене в течу, підлягає діланню двох сил, а саме: власної ваги Q, прикладеної в центрі тягару тіла, і підтиску A, який проходить через осередок витиснутого об'єму води. Для того, щоб тіло при цьому було в рівновазі, необхідно, щоб ці сили були між собою рівні, а по напрямку прямо-протилежні. Отже, тіло буде в рівновазі, коли $Q = A$ і обидві ці сили ділають в одній доземній лінії, але ця рівновага може бути різного характеру.

Коли осередок ваги тіла лежить нижче осередку витиснутої течі, тоді тіло буде плавати в *рівновазі завжди стійкій*, бо коли його вивести з первісного доземного становища, відхиливши на бік (рис. 60), то утвориться в новому положенню

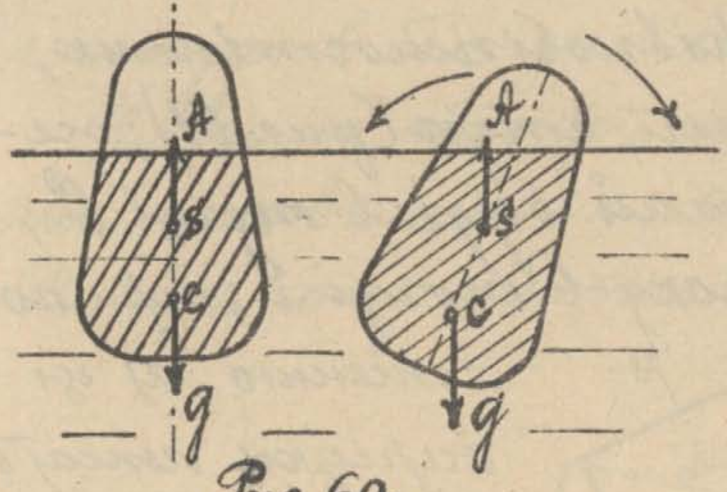


Рис. 60.

пара сил A - g, яка буде повертати тіло в бік, протилежний зробленому нахилу, аж поки тіло не прийде в попереднє становище.

Коли осередок ваги тіла збігається з осередком підтиску, тоді тіло плаває в довільному місці течі і в будь-якому положенню (куля, питома вага котрої одинакова з вагою води). Коли ж осередок ваги тіла буде лежати вище осередку підтиску, тоді тіло може бути в трьох станах рівноваги: а) хиткому (labil), б) стійкому (stabil) і г) байдужому (indifferent), в залежності від напрямку і величини моменту сил, який повертає після відхилення тіла від того попереднього стану рівноваги, коли центри тягару сили g і сили підтиску A лежать на одній доземній.

Уявимо собі рівнобіжностінник, який плаває в течі сторч (рис. 61); осередок ваги його нехай буде в точці C, а осередок підтиску в точці S; при положенню а) ці осередки лежать на одній доземній лінії YY; тіло перебуває в рівновазі. Коли ми його відхилимо в положення б), тоді точка C залишиться на оси YY, але точка S перейде в S' і сили A і Q не підуть вже по одній лінії, а напрямок сили A перетне вісь YY в точці M нижче точки C, при чому утвориться пара сил; в нашому випадку ця пара буде повертати рівнобіжностінник в тому же напрямку, в якому його відхилили, а через це виходить, що рівновага тіла в стані а) була рівновага хитка, з якої тіло вихо-

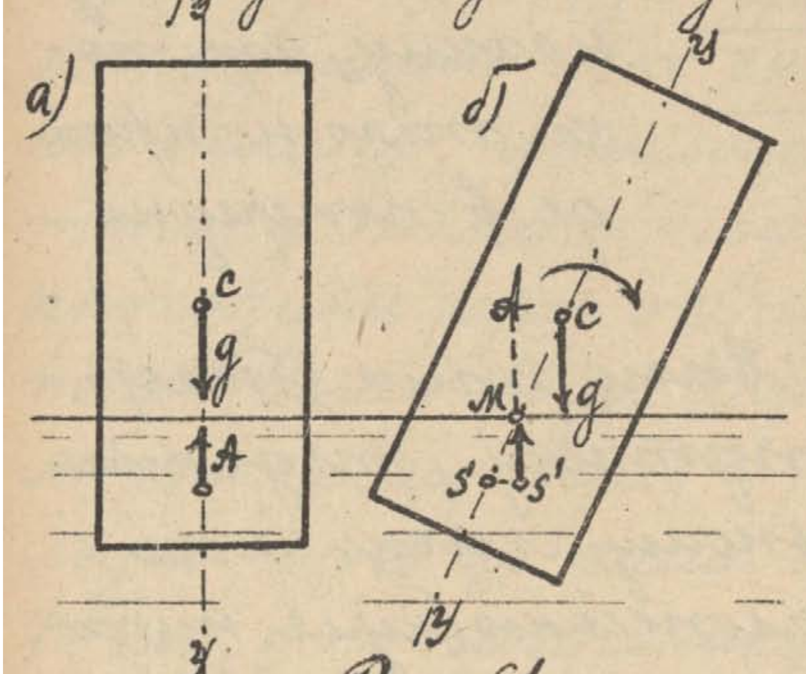


Рис. 61.

дить при найменьшому відхиленню і падає в бік зробленого нахилу.

Уявимо тепер, що рівнобічностінник плаває так, як показано на рис. 62, при чому центр ваги C також лежить вище точки S; але після повороту тіла на будь-який кут в положення б) підтиск A пройде вже так, що він перетне вісь YY в точці M вище точки C, при чому утвориться момент сил, який буде повертати тіло в попереднє становище. В цьому випадку тіло плаває в рівновазі стійкій (stabil).

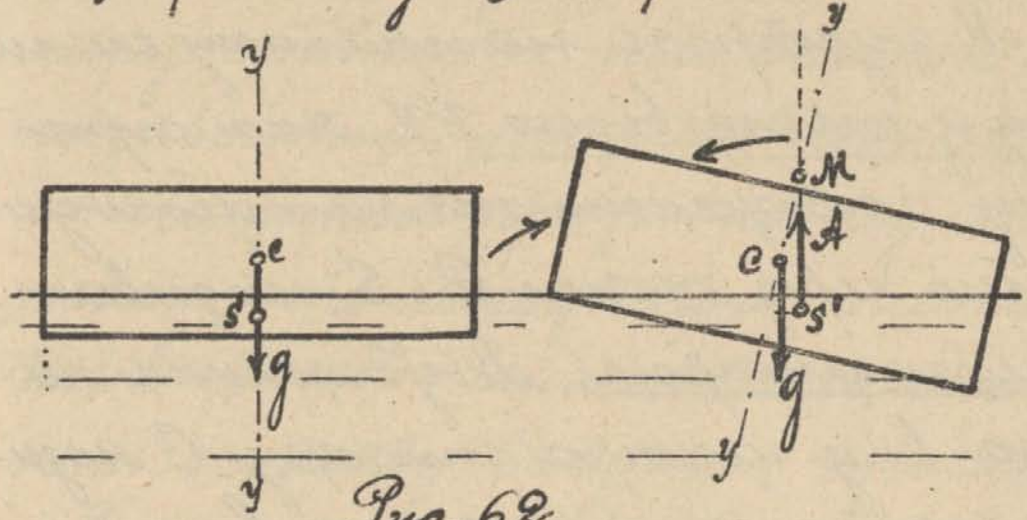


Рис. 62.

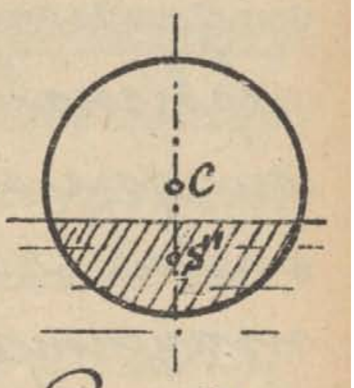


Рис. 63.

Візьмемо тепер кулю, питома вага якої $\delta <$ ваги води ∂; така куля буде плавати в воді зануреною частинно (рис. 63); в кожному положенню цієї кулі точка S' буде лежати на одній доземній з точкою C, а тому така куля буде в рівновазі в довільному положенню її, -; буде в рівновазі байдужій".

Точка M зустрічі напрямку сили підтиску з тією віссю YY, яка при первісному положенню тіла проходила доземно через точки C і S, називається метацентром. Віддалення метацентра від центра тягару C називається метацентричною вишиною. Коли метацентр M лежить нижче центра тягару C, тоді тіло буде в стані хиткої рівноваги; коли метацентр збігається з точкою C, тоді тіло буде в стані байдужої рівноваги і нарешті, коли метацентр лежить вище точки S, тоді тіло буде в стані стійкої рівноваги.

Момент M, який утворюється парою сил A і Q при відхиленню тіла на кут φ від первісного становища, буде такий: $M = Q.h.\sin\varphi$, (або

$A.h.\sin\varphi)$ . . . . (51); де h - є метацентрична висота.

Момент цей, як видно, залежить від ваги тіла, від метацентричної висоти, та від кута нахилу φ; він дає міру стійкости плаваючого тіла і називається *моментом стійкости*.

Питання про рівновагу плаваючого тіла, про находження метацентричної висоти і момента стійкости мають особливу вагу при проектуванню суден, які мусять бути стійкими і не хиткими як в подовжному, так і в поперечному напрямках. Тому ці питання обслідуються в усіх деталях в курсах суднобудівництва. Тут же умови стійкости судна розглянемо лише в самих загальних рисах.

Великі судна мають ватерлінію (див. § 29) приблизно такого виду, як показано на рис. 64. За виключенням порівнюючи коротких корми (К) і носа (Н) остання частина судна на протязі l має характер майже правильного прямокутника; коли зро-

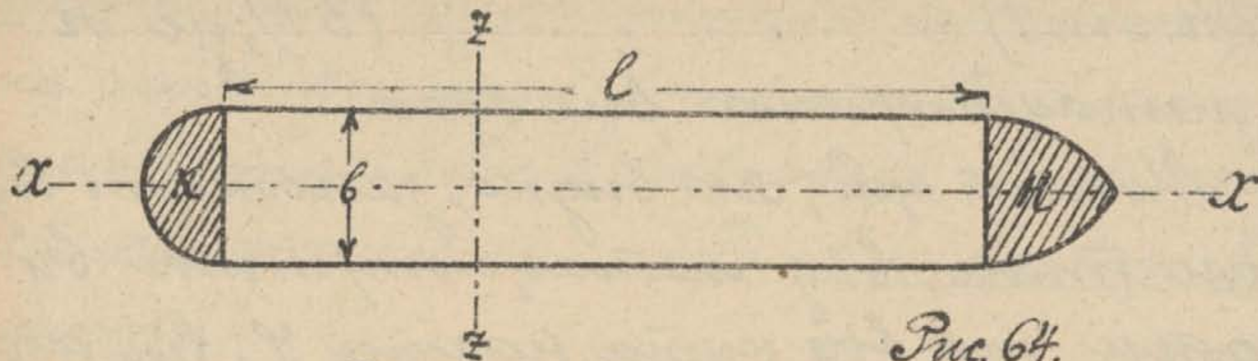


Рис. 64.

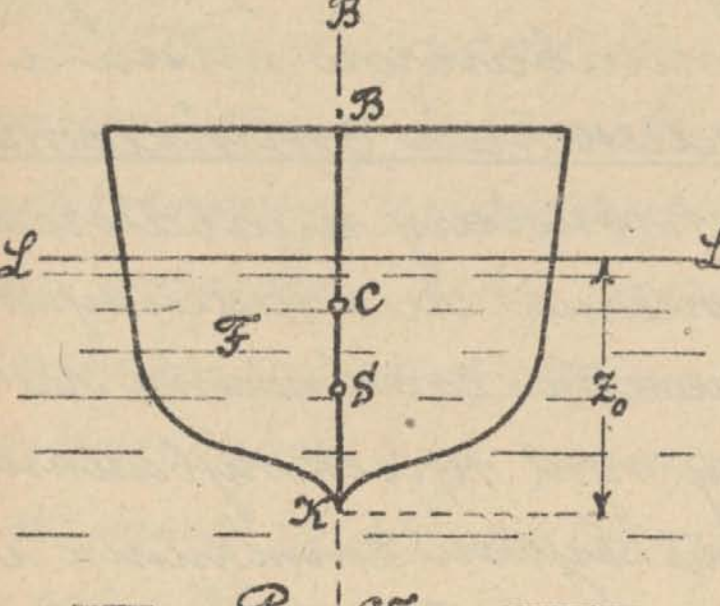


Рис. 65.

бити поперечний розсік по лінії ZZ в будь-якому місці по довжині цього прямокутника, то будемо мати скрізь приблизно однакову фігуру (рис. 65); в ній доземна лінія BK наз. *нормальною віссю плавання*; заглиблення киля K – Z_0 наз. зануренням (осадкою) судна.

Коли підводне поле розсіку судна LKL означити через F, тоді об'єм витиснутої води V буде приблизно $= F.l$; вага води в цьому об'ємі, або підтиск $A = \gamma F l$ і ця вага = вазі всього судна Q.

Коли судно нахилиться на кут φ, тоді точка прикладання сили під-

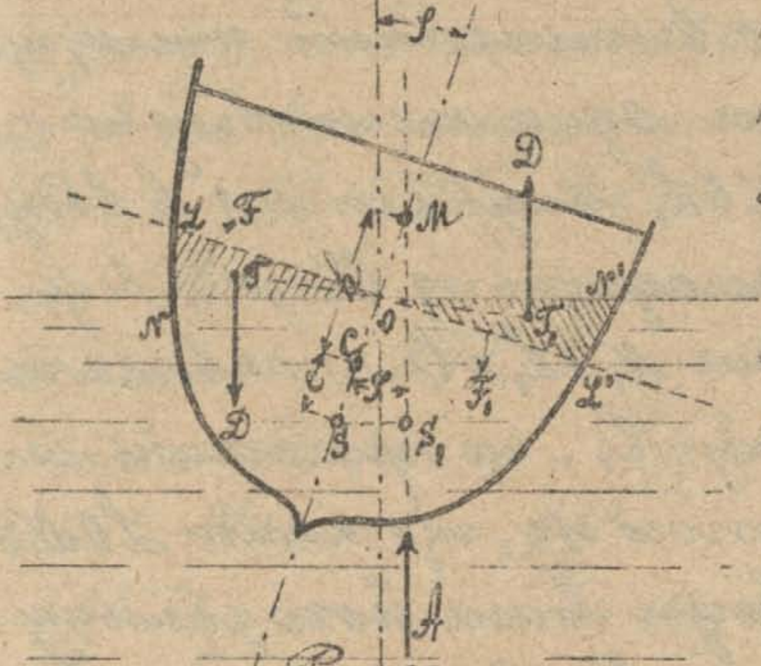


Рис. 63.

точку A пересунеться від S в S_1; лінію SS_1 можно вважати за просту, рівнобіжну поверхні води.

Всі розміри судна відомі, а тому відомі також: повна вага судна - Q і підтиск - A; при цих даних для находження момента стійкости M необхідно лише, задавшись кутом φ, найти для нього метацентричну вишину. Найдемо цю вишину в елементарний спосіб.

Підтиск A проходить через точку S_1 і перетинає нормальну вісь судна в метацентрі M; віддалення $MC = h$; віддалення між точками C і S, яке для даного судна також не відоме, назовемо через e; тоді: $MS = (h+e)$

$$SS_1 = MS \sin\varphi = (h+e)\sin\varphi$$

Момент підтиску A відносно попередньої своєї точки прикладення S буде:

$M = A . SS_1$, або $M = A(h+e)\sin\varphi$;

$$\mathcal{M} = \gamma F l (h+e) \sin\varphi = \gamma . V (h+e) \sin\varphi \; \dots \; (52)$$

Цей момент є викликаний тим, що при нахилі судна одна клиновидна частина його N_1OL_1 занурюється в воду, а друга LON виходить із води; від агруження клина $N_1OL_1 \times l$ проявляється сила підтиску D_1, що проходить через точку T_1; від того ж, що клин $LON \times l$ виходить з води вага його збільшується на вагу води в об'ємі цього клина, а ця вага D рівна підтискові D_1. Сили D і D_1 прикладені на віддаленню $\frac{2}{3}\left(\frac{b}{2}\right)$ від точки O, вони утворюють пару сил D_1 з плечем $TT_1 = 2 . \left(\frac{2}{3} . \frac{b}{2}\right) = \frac{2}{3} b$. Момент цієї пари $\underline{\mathcal{M}' = D_1 . TT_1}$

Сила D_1 є рівна вазі води в об'ємі клина $N_1OL_1 \times l$; прийнявши N_1OL_1 за прямокутний трикутник, можемо написати вираз для його поля так:

$$\Delta N_1OL_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2} . \frac{b}{2} \sin\varphi\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 . \sin\varphi \text{, а}$$

$$D_1 = \gamma l \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \sin\varphi;$$

тоді $$\mathcal{M}' = \gamma l \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \sin\varphi . \frac{2}{3} b = \gamma . \frac{lb^3}{12} . \sin\varphi \; \dots\dots \; (53)$$

В теоретичній механіці доводиться, що віддалення SS_1 так відноситься до віддалення TT_1, як сила підтиску D_1 на занурений клин N_1OL_1 до сили підтиску A на всю занурену частину судна, себто: $SS_1 : TT_1 = D_1 : A$, або $A \cdot SS_1 = D_1 \cdot TT_1$, або $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$; на підставі цього можна написати: $\delta Fl(h+e)\sin\varphi = \delta \cdot \frac{lb^3}{12} \cdot \sin\varphi$, відсіля

$$Fl(h+e) = \frac{lb^3}{12} \quad \ldots\ldots \quad (54).$$

або

$$V(h+e) = \frac{lb^3}{12} \quad \ldots\ldots \quad (54')$$

$\frac{lb^3}{12}$ це є момент безвладности площі плавання судна відносно продовжної оси xx (рис 64), себ-то найменший момент безвладности; означимо його через J_x, тоді: $MS = h + e = \frac{J_x}{V}$;

$$a\ h = \frac{J_x}{V} - e \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

Таким чином, маємо, що метацентрична висота h є рівна частці від поділу найменшого моменту інерції площі плавання судна на об'єм витиснутої води (deplacement, витиск) без віддалення центра тягару судна від центру витиснутої води при первісному стані судна в супокою.

Найшовши в такий спосіб величину h, можна вже обчислити і момент стійкости $\mathfrak{M} = Q \cdot h \cdot \sin\varphi$ та порівняти його з моментами хороших існуючих суден.

Коли з попереднього взору $h = \frac{J_x}{v} - e$ виходить додатним, тоді точка M метацентру лежить вище точки C, момент $\mathfrak{M}$ буде додатним, рівновага судна - стійка.

Коли $h = 0$, тоді $\mathfrak{M} = 0$, судно буде в рівновазі байдужій.

Коли нарешті $h < 0$, тоді точка M попаде нижче точки C; момент $\mathfrak{M}$ буде відємний, а рівновага судна - хитка.

Коли значіння e від'ємне, себто коли точка S лежить над точкою C, тоді вираз для $h = \frac{J_x}{v} - e$ буде завжди позітивним; момент $\mathfrak{M}$ буде додатним, а рівновага - стала.

Кут нахилення судна буває не більше 15°.

γ для морської води доходить до $1025\ кg/м^3$.

Приклад. При яких відношеннях вишини h до ширини b порушиться стійка рівновага плаваючого рівнобізностінника, питомий тягар якого $\delta = 0,9$ (рис. 67)?

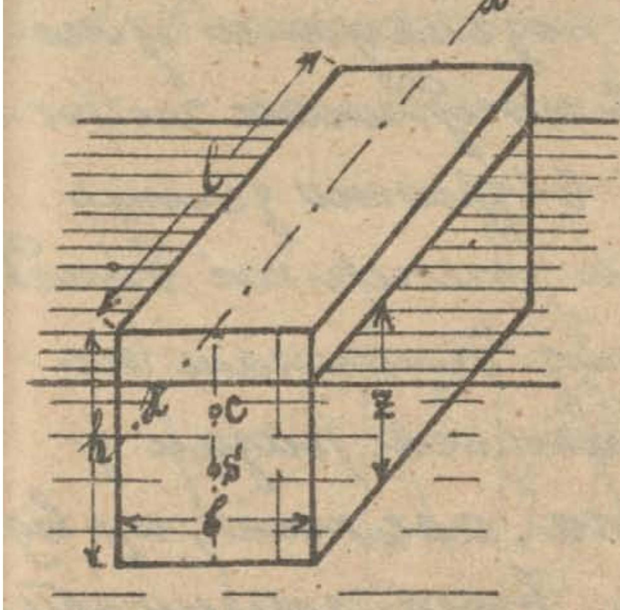


Рис. 67.

Вага тіла $Q = 0.9 . b . h . l$;

Підтиск $A = 1 . bzl$;

відсіля: $0,9 . bhl = bzl$;

$z = 0,9 . h$

Центр тягару C лежить на $0,5 h$.

Центр витиску S' на $0,45h$ від позему.

$e = S'C = 0,50\,h - 0.45\,h = 0,05\,h$; $MS' = \frac{J_x}{V} = \frac{lb^3}{12} : 0,9\,bhl = \frac{b^2}{10,8h}$

Рівновага тіла буде стійкою доти, доки $MS' > CS'$; коли MS' зробилось би $= CS'$, тоді метацентр попав би в центр тягару тіла і умови рівноваги змінилися б. Отже, зміна умов рівноваги буде при $MS' = CS'$, себто при $\frac{b^2}{10,8h} = 0,05h$; $b^2 = 0,54h^2$;

$$\left(\frac{b}{h}\right)^2 = 0,54 ; \quad \frac{b}{h} = 0,74.$$

Таким чином, при $b = 0,74h$ стійкість порушується.

§31. Відносна рівновага течі в рухаючихся посудинах.

До цього часу ми розглядали умови рівноваги течі в посудинах чи резервуарах, які самі відносно землі не рухалися. Розберем тепер ті випадки, коли посудина під діланням на неї сталої сили рухається, разом з нею рухається й теча, але так, що відносно самої посудини вона залишається в супокою, перебуває в відносній рівновазі. В цих випадках, як і раніш, необхідно буває найти: поверхні рівня, величину тиснення в довільній точці течі і напрямок його.

З огляду на те, що теча відносно посудини ніякого руху не має, на кожну частинку її ділають лише сили тягару і сила інерції, рівна й протилежна силі, що порушує посудину; тому лише ці сили, або їх прискорення, входять далі в Ейлерові рівняння.

Розглянемо тепер різні окремі випадки відносної рівноваги.

А. Посудина рухається простолінійно.

1. Нехай посудина К (рис. 68) під діланням сталої сили Р рухається простолінійно з прискоренням с; напрямок цього прискорення утворює з напрямком прискорення сили тягару кут α.

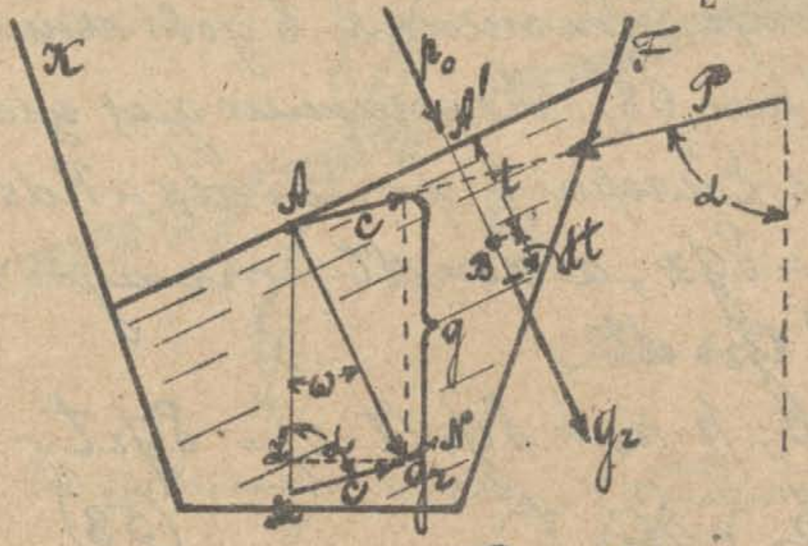


Рис. 68.

Довільна точка А течі буде підлягати двом силам: силі земного тягару, з прискоренням g і силі інерції з прискоренням $(-c)$; вислідна цих прискорень буде $g_r = \sqrt{g^2+c^2-2gc\cos\alpha}$ . . . . (56)

Для всіх частинок течі величина вислідної буде однакова; напрямок її, як видно з рисунка, дається кутом ω, а $tg\alpha = \frac{LN}{AL} = \frac{LM}{AM-LM} = \frac{c\sin\alpha}{g-c\cos\alpha}$ . . (57); в цьому взорі величини c, g і α постійні, а тому і кут ω для кожної точки течі буде однаковий.

Поверхні рівня, як відомо в-же, нор

мально до вихідної зовнішних сил, а тому ці поверхні будуть площами, нормальними до вихідних g_z, або нахиленими до позему під кутом ω.

Найдемо тепер тиснення в довільній точці течі B (рис. 68). Напишемо для цієї точки рівняння Ейлера в формі $dp = Rds$ (№ 15); у нас $R = \delta g_z$, а $ds = dt$, тому:

$$dp = \delta . g_z . dt$$

$$\int_A^B dp = \delta \int_0^t g_z \, dt ; \; p - p_0 = \delta g_z (t - 0) = \delta . g_z . t$$

$$r = p_0 + \delta . g_z . t \; \ldots\ldots \; (58)$$

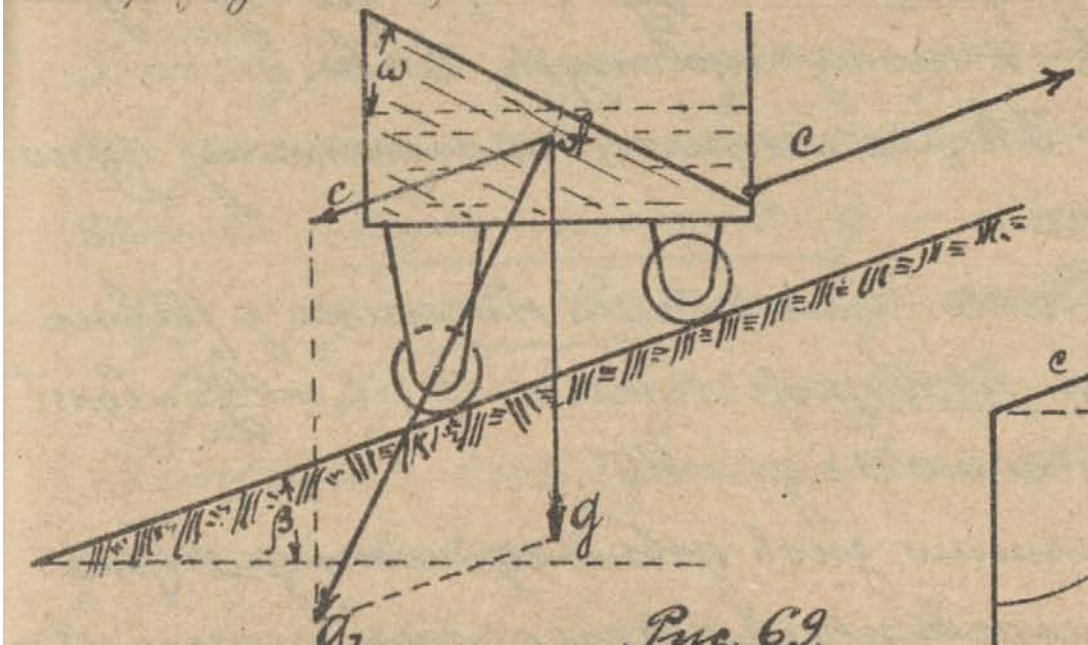
або

$$p = p_0 + \delta . t . \frac{g_z}{g} \; \ldots\ldots \; (58')$$

Рівняння 58, 58' показують, що в цьому випадку гідростатичне тиснення в точці на простопадному від поверхні віддаленню її $= t$ буде більше тиснення на такій же глибині $h = t$ в течі, що виповнює посудину нерухому, де $p = p_0 + \delta h$

2. Виповнена водою комора рухається по нахиленій площі (рис. 69) під діланням сили P, рівнобіжній нахиленій площі. Кут нахилу площі до позему $= \beta$. Найти кут α, під яким стане рівень води в коморі до позему під

часруху комори ?



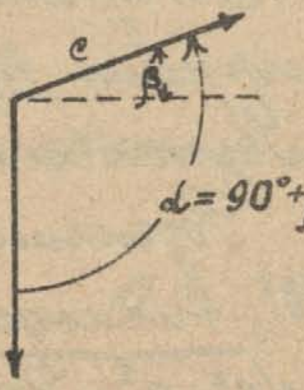


Рис. 69.

На довільну точку A будуть ділати дві сили: 1) земного тягару з прискоренням g і 2) сила інерції, прискорення якої по величині буде рівне прискоренню від сили P, а по напрямку буде протилежним силі P. Згідно рівняння (57): $\operatorname{tg}\omega = \frac{c \sin\alpha}{g - c\cos\alpha}$, де α - кут між напрямками P і $g_1 = 90° + \beta$; тому $\operatorname{tg}\omega = \frac{c.\cos\beta}{g + c.\sin\beta}$; віділя находиться кут ω.

3. Коли камора рухається без прискорення, тоді: $c = 0$; $\operatorname{tg}\omega = \frac{0}{g} = 0$; вислідна прискорення зовнішних сил буде рівна прискоренню g, а тому поверхні рівня і вільна поверхня будуть поземними площами.

Тиснення $p = p_0 + \gamma t . \frac{g_r}{g}$; при $g_r = g$ буде $= p_0 + \gamma t$, а тому що тут $t = h$,

$p = p_0 + \gamma h$, як і при абсолютному супокою течі

4. Посудина рухається поземно з рівномірним прискоренням c; $c = \frac{du}{dx} = Const.$

Кут ∠ між c і $g = 90°$

Розглянемо знов довільну точку A (рис. 70); вислідна прискорень для точки $g_r = \sqrt{c^2+g^2-2gc.\cos 90°} = \sqrt{c^2+g^2}$.

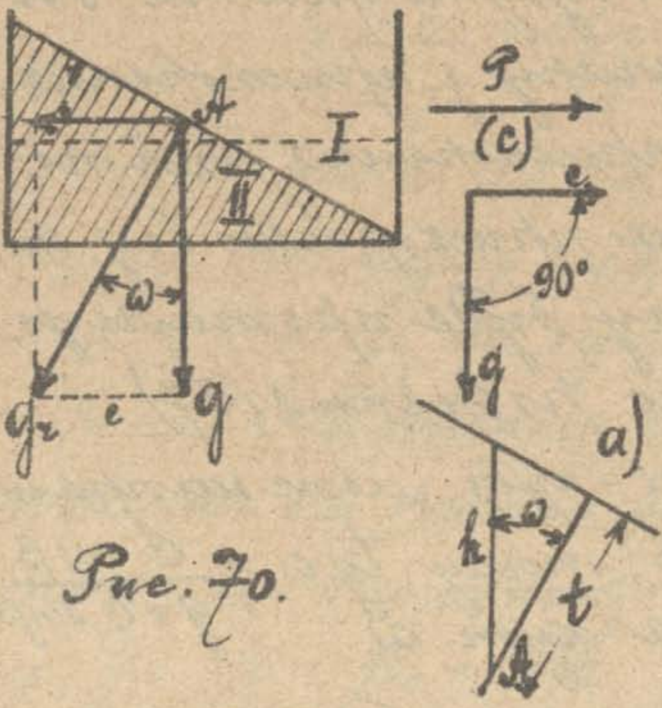


Рис. 70.

Напрямок вислідної прискорень находим по куту ω;

$tg\omega = \frac{c \sin 90°}{g - c.\cos 90°} = \frac{c}{g}$.

Поверхні рівня підуть нормально до вислідної g_r; а вільна поверхня пройде так, щоб об'єми течі в I і II положеннях були однакові.

Тиснення p в точці A буде:

$p = p_0 + \gamma . \frac{g_r}{g} . t = p_0 + \gamma . t . \frac{\sqrt{c^2+g^2}}{g}$, але $\frac{\sqrt{c^2+g^2}}{g} = \frac{1}{\cos\omega}$; $p = p_0 + \frac{\gamma t}{\cos\omega}$; із рисунка 70а) видно, що $\frac{t}{\cos\omega} = h$, доземному віддаленню точки A від поверхні течі; отже, можна ще написати: $\underline{p = p_0 + \gamma . h}$.

5. Посудина рухається доземно:

а) до гори з постійним прискоренням c. Кут між c і g — $\alpha = 180^\circ$.

$$g_r = \sqrt{g^2+c^2-2gc.\cos\alpha}\ ;\ \cos\alpha = -1;$$

$$g_r = \sqrt{g^2+c^2+2gc} = \underline{g+c}.$$

Напрямок висідного прискорення найдемо з рівняння:

$$tg\,\omega = \frac{c.\sin\alpha}{g-c.\cos\alpha} = \frac{0}{g+c} = 0$$

Поверхні рівня будуть поземні.

Гідростатичне тиснення $p = p_0 + \gamma.h.\frac{g_r}{g} = p_0 + \gamma.h.\frac{g+c}{g} =$

$$= p_0 + \gamma h\left(1+\frac{c}{g}\right) \ldots\ldots (59)$$

$$p_0 + \gamma h(1+c/g) > p_0 + \gamma.h;$$

б) до низу з постійним прискоренням c.

Кут α і тут є $= 0$; $g_r = \sqrt{g^2+c^2-2gc\cos\alpha} = \sqrt{g^2+c^2-2gc} = g-c$.

$$tg\,\omega = \frac{c\sin\alpha}{y-c.\cos\alpha} = \frac{0}{g-c} = 0;$$

Поверхні рівня поземні.

$$p = p_0 + \gamma h.\frac{g_z}{g} = p_0 + \gamma h.\frac{g-c}{g} =$$

$$\underline{= r_0 + \gamma h\left(1-\frac{c}{g}\right) < p_0 + \gamma h.}$$

Коли прискорення руху вниз $c = g$, се

о то, коли посудина з течею вільно падає, тоді $p = p_0 + \gamma h\ (1 - g/g) =$
$= p_0 + \gamma . h \times 0 = p_0$; в цьому випадку гідростатичне тиснення в кожній точці течі однакове й рівне зовнішньому тисненню p_0

Приклад до п. 5. При будівлі вежі необхідно підіймати в спеціальній коморці цементний розчин. Коморка має розміри (рис. 71) такі: $l = 1,2$ метра, $в = 0,9$ м.; h заповнення розчином $= 0,8$ м.; одинична вага розчину $\gamma = 1800\ kg/м^3$. Найбільше прискорення $1,2\ м/сек^2$. Найти тиск на дно за час руху?

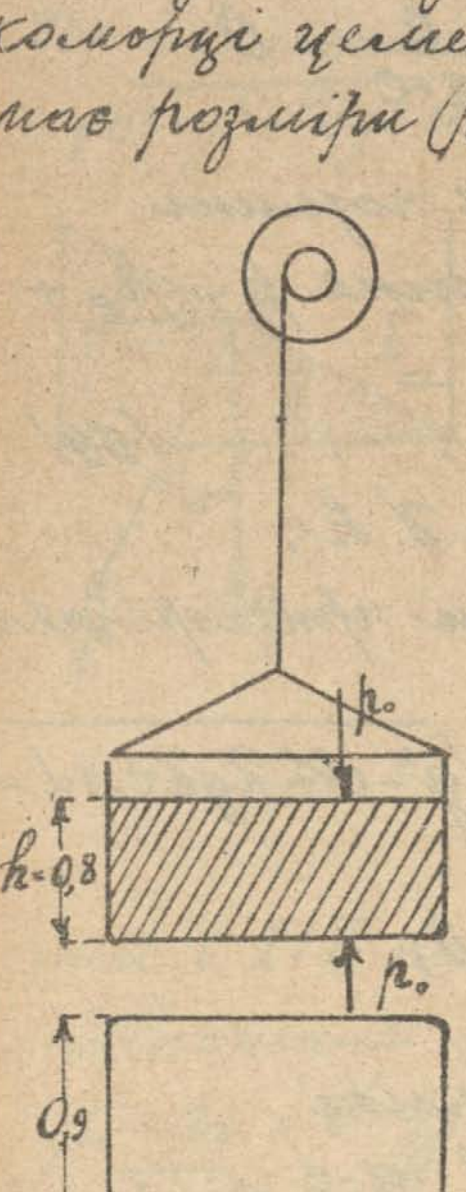


Рис. 71.

Тиснення на дно згідно взору (59) буде:
$p = p_0 + \gamma . h . (1 + \frac{c}{g})$, але і знизу на дно тиснення є $= p_0$, тому манометричне тиснення $p = \gamma h\ (1 + c/g)$.

$p = 1800 \times 0{,}8 \left(1 + \frac{1{,}2}{9{,}81}\right) = 1615$ кg/м²

(При спокійному стані комори

$p = \gamma . h = 1800 \times 0{,}8 = 1440$ кg/м²).

Тиск на дно буде $P = p . F$

$P = 1615 \times (1{,}2 . 0{,}9) = 1775$ кгр.

(Коли б комора не рухалась, P' було б $= 1440 (1{,}2 \times 0{,}9) = 1580$ кгр.

Як що нам треба найти грубину линви, якою підіймається коморка, тоді треба ще знати вагу самої коморки Q_1 і приблизну вагу линви Q_2. Повна сила, що буде ділати на линву: $Q = P + Q_1 + Q_2$.

По цій силі, знаючи допускаєме на одиницю поля линви напруження, можна вже найти поле розріку всієї линви.

6. Посудина, яка має форму тіла обертання, рухається навколо своєї доземної осі.

Нехай маємо вальцову посудину (р. 72), яка рівномірно обертається коло своєї доземної осі Oz з кутовою скорістю ω *).

---

*) Кутовою скорістю рівномірного обертового руху називається відношення кута, закрес-

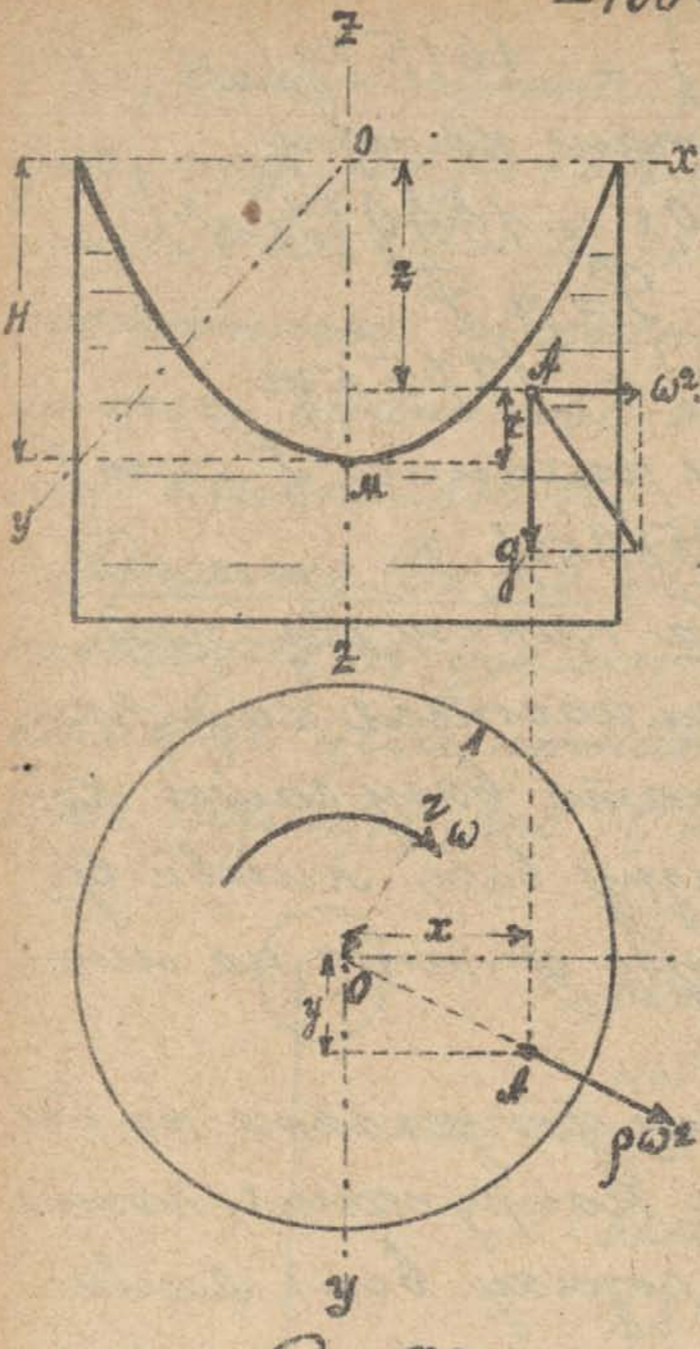


Рис. 72

Через це який час теча, що виповнює посудину, прийме таку ж скорість, як і посудина й стане відносно неї в спокою; після цього на течу будуть ділати лише сила тягару та сила відосереджня. Виділимо з маси води часточку A з безмежно малою масою dm; виберемо уклад координат так, щоб поземна площа XOY пройшла по вільній поверхні спокійної течі, а вісь Z по осі посудини. На цю частинку A x, y, z/ ді-

---

ного лучем певної точки тіла за певний протяг часу, до величини цього протягу часу. Одиницею кутової скорости назив. скорість такого руху, при якому луч в одиницю часу закреслює кут, рівний одиниці; $\omega = \frac{2\pi . n}{60}$, де n число оборотів на мінуту, або $\omega = 0{,}10472 n = \infty\, ^{n}/_{10}$.

лає сила тягару $dm.g$ і сила відосередня $dm.\varrho.\omega^2$, яка лежить в площі поземній, проведеній через точку A, і направлена по лучу OA; віддалення точки A від оси OZ буде: $OA = \varrho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Сили, що ділають на одиницю маси в точці A, (або прискорення цих сил) будуть: $\frac{dm.g}{dm} = g$ і $\frac{dm.\varrho.\omega^2}{dm} = \varrho.\omega^2$.

Напишемо для точки A основне рівняння Ейлера: $dp = \delta(Xdx + Ydy + Zdz)$.

Найдемо тепер мети вислідної зовнішних сил X, Y, Z. Мети вислідної сил на осі x, y, z рівні сумі метів на тіже оси складових сил, які спочатку й визначим.

Мет прискорення сили тягару на вісь x-ів – $X_1 = 0$; на вісь y-ків $Y_1 = 0$; на вісь z-ів – $Z_1 = +g$.

Мет прискорення відосередньої сили на вісь x-ів, як видно з рис. 72 – $X_2 = \varrho.\omega^2 . \cos(\varrho\omega^2; x) = \varrho.\omega^2 \cos\alpha = \varrho.\omega^2 \frac{x}{\varrho} \underline{= \omega^2 x;}$

на вісь Y-ків – $Y_2 = \varrho.\omega^2 . \cos(\varrho\omega^2; y) =$
$= \varrho.\omega^2 . \sin\alpha = \varrho.\omega^2 . y/\varrho = \underline{\omega^2 . y;}$

на вісь $Z^{ів}$ – $Z_2 \underline{= 0.}$

$X_1 + X_2 = X = \omega^2 x$; $Y_1 + Y_2 = Y = \omega^2 y$;
$Z_1 + Z_2 = Z = + g$.

Тому, $\underline{dp = \delta(\omega^2 x.dx + \omega^2 y.dy + g dz)}$ ...(60)

З цього рівняння можемо найти поверхню рівня і силу тиснення в довільній точці.

а) Для находження поверхней рівня покладемо $dp = 0$.

Тоді при δ сталому буде:

$$\omega^2 x.dx + \omega^2 y.dy + g.dz = 0.$$

Відсіля, після інтеграції, одержимо: $\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} + gz = C$, або

$$\omega^2 \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} + gz = C \quad \ldots\ldots\ldots (61).$$

Останнє рівняння ідає рівняння поверхні рівня; ці поверхні будуть, як це доводиться в аналітичній геометрії, параболоїдами обертання навколо осі Z; дійсно, коли ми розріжемо цю поверхню площею, рівнобіжною XOY, або введем замісць z якусь сталу величину $z = m$, тоді одержимо: $x^2 + y^2 = \frac{2c - 2gm}{\omega^2}$; сталій C можемо завжди дати значіння $> mg$, а тоді $x^2 + y^2 = \frac{2c - 2gm}{\omega^2}$ = будь якому K^2; це є рівняння кола з осередком в O.

Отже розсіки нашої поверхні поземними площами дають кола. Розсічем тепер її поверхнею XOZ, для чого покладем $y=0$ і це значіння y-а вставимо в рівняння (61); одержимо: $\frac{\omega^2x^2}{2}+gz=C$, або $x^2=-\frac{2g}{\omega^2}.z+\frac{2c}{\omega^2}$; це є рівняння параболи, сіметрічної відносно оси z; таку ж саму параболу одержимо й в напрямку y.

Із сказаного видно, що поверхні рівня будуть правильними параболоїдами; пересічення цього параболоїда площами, які проходять через вісь z-ів дають однакові параболи, а тому далі можна розглядати параболу, що одержим пересіченням параболоїда площею ZOX, а саме: $\frac{\omega^2x^2}{2}+gz=C$ . . . .(62)

В цьому рівнянню треба ще визначити постійну інтеграції C, для чого треба написати особливі рівняння. Візьмемо останнє для поверхньової точки M, яка займе найнижче положення в параболоїді, і для поверхньової ж точки N, що займе найвище або найдальше від оси z-ів положення.

1) Для точки M: $x=0$; $z=H$, а тому

$\frac{\omega^2 x^2}{2} + gz = C$ буде: $0 + gH = C$

$$\underline{C = g.H}$$

2) для точки N: — $x = r$; $z = 0$; а тому $\frac{\omega^2 x^2}{2} + gz = C$ буде: $\frac{\omega^2 r^2}{2} = C$

Тому що C для однієї поверхні рівня, або для однієї параболи мусить бути однаковим, можна написати:

$$gH = \frac{\omega^2 r^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Вставивши в рівняння (62) замість C одно з його значінь рівняння (63), одержимо:

$$\left.\begin{array}{ll} & \frac{\omega^2 x^2}{2} + gz = gH, \\ \text{або} & \frac{\omega^2 x^2}{2} + gz = \frac{\omega^2 r^2}{2} \end{array}\right\} \ldots\ldots (64),$$

які і будуть рівняннями поверхні для даних x i z.

Рівняння $\frac{\omega^2 x^2}{2} + gz = gH$, можна перетворити в таке:

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2}(H - z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

а означивши віддалення точки A від найближчої точки M, що є $= (H - z)$, через t, одержимо:

$$\underline{x^2 = \frac{2g}{\omega^2}.\, t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

Рівняння (63)... $gH = \frac{\omega^2 r^2}{2}$ дає можливість находити кутову скорість швидко обертаючихся валів, коли обертальний рух їх передати на посудину з течею, в якій тоді повстане параболоїдна поверхня. Найшовши величину H цього параболоїда, можемо вираховувати й ω:

$$\omega = \frac{\sqrt{2gH}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (67),$$

і навпаки: $H = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad \ldots\ldots (67')$.

Віддалення вершка параболоїда M від дна посудини можна найти, приймаючи на увагу, що об'єм течі до початку обертання і за час цього руху однакові. Із рис. 73 видно, що до ротації вишина течі над дном була h, а в час ротації вона піднялась до висоти H+a.

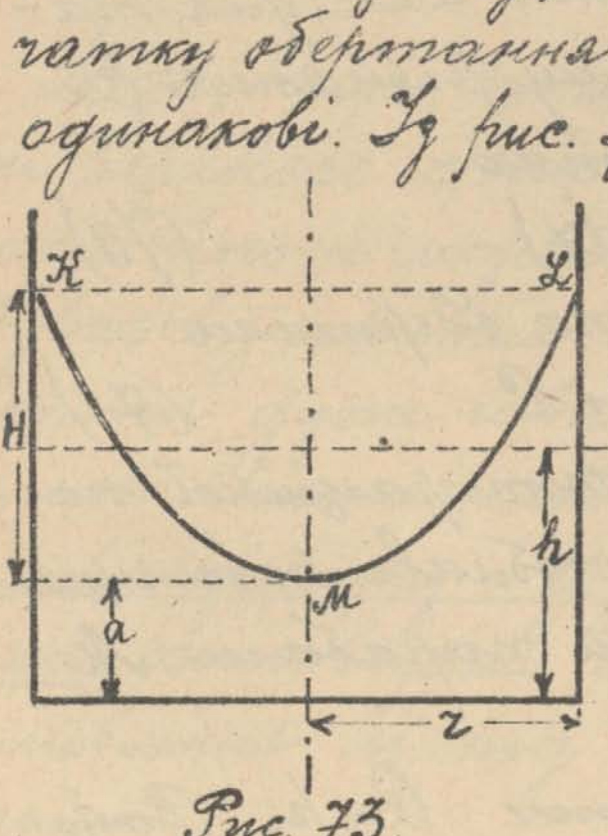


Рис. 73

Об'єм течі в стані супокою був:

$$V = \pi . r^2 . h$$

При ротації той же обєм: $V = \pi . r^2 . a + \frac{1}{2} . \pi r^2 . H$.

Тому: $\pi r^2 h = \pi . r^2 . a + \frac{1}{2} . \pi . r^2 . H$.

$$\pi r^2 h = \pi r^2 \left(a + \frac{H}{2}\right)$$

Із рівняння (63) $H = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$, а тому:

$\pi r^2 h = \pi r^2 \left(a + \frac{\omega^2 r^2}{4g}\right)$; $h = a + \frac{\omega^2 r^2}{4g}$, а відсіля $a = h - \frac{\omega^2 r^2}{4g}$ . . . . (68)

З огляду на те, що $\omega^2 r^2 = v^2$, останній взір можна написати ще так: $a = h - \frac{v^2}{4g}$,

або $a = \frac{1}{2}\left(2h - \frac{v^2}{2g}\right)$ . . . . . (69)

в) Для находження гідростатичного тиснення будемо розглядати точку A в площі координатній XOZ; для такої точки $y=0$, а тому рівняння Ейлера напишеться так:

$dp = \delta(\omega^2 \cdot x dx + g . dz)$ . . . . . . (70)

Проінтегрувавши його, одержимо:

$p = \frac{\delta}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{x^2}{2} + \delta z + C$ . . . . . (71)

Для находження інтеграційної постійної C возьмемо особливе рівняння для найнижчої точки параболи M $(x=0,\ z=0)$, $p = p_0$.

$p_0 = 0 + 0 + C$; отже, $C = p_0$. Вставивши це значіння C в рівняння (71), одержимо: $p = p_0 + \delta . \frac{\omega^2 x^2}{2g} + \delta z$ . . . . (72),

або: $\frac{p - p_0}{\delta} = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + z$ . . . . . . (73)

Це рівняння дає можливість находити тиснення p в довільній точці, коли відомі координати: x і z; остання є віддалення від найвищого краю параболоїда, а тому необхідно знати це віддалення. Знаючи a (взір 68) і значіння H (взір 67'), можна найти віддалення точки K від дна, яке $є = a + H = h - \frac{\omega^2 r^2}{4g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g} =$ $= h + \frac{\omega^2 r^2}{4g}$, або:

$$h + \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \underline{h + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_r^2}{2g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (74)$$

Може, одначе, бути в практиці так, що ні верхнего краю параболоїда, ні вершка його не можна спостерегти, як це буває в закритих посудинах, що обертаються дуже швидко (рис. 74); при цій умові можна найти приріст тиснення в поземному й доземному напрямках, коли відома абсциса точки і заглиблення її під поверхнею параболоїда.

Візьмемо знову загальне рівняння для тиснення в точці A (70):

$$dp = \delta(\omega^2 x dx + g dz).$$

Для находження приросту тиснення лише в напрямку поземному, покладемо $dz = 0$; тоді:

$$dp_x = \delta.\omega^2 x dx = \frac{\gamma}{g}.\omega^2.xdx;$$

$$\int_{p_0}^{p_x} dp_x = \frac{\gamma}{g}\omega^2\int_{x_0}^{x} xdx;$$

$$p_x - p_0 = \frac{\gamma}{2g}.\omega^2(x^2 - x_0^2) = \frac{\gamma}{2g}(v^2 - v_0^2),$$

або:

$$\frac{p_x - p_0}{\gamma} = \frac{v_x^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} \ldots \text{(75)}$$

Таким чином, приріст п'єзометричної висоти в поземному напрямку є рівен приростові висот, відповідаючих лінійним скоростям в точці $A(x)$ і в начальній точці $(x = x_0)$, і для того, щоб його найти, треба знати лише кутову скорість ω, абсцису точки $A = x$ і абсцису точки B на поверхні параболоїда $= x_0$ на тій же вишині z, яку має точка A.

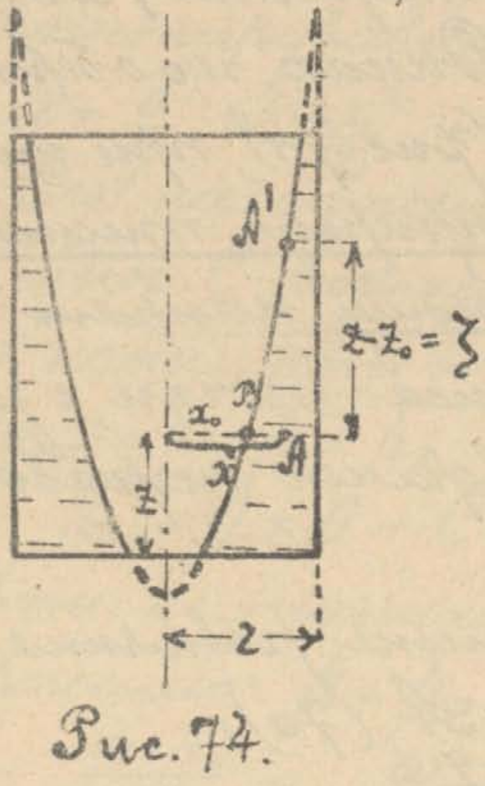


Рис. 74.

Для находження приросту тиснення в напрямку доземному, покладем в рівнянню (70) $dx = 0$, тоді:

$$dp_z = \delta g dz; \int_{p=p_0}^{p=p_z} dp_z = \delta g\int_{z=z_0}^{z=z} dz;$$

$$\underline{p_z - p_0} = \delta.g(z - z_0) = \underline{\gamma.(z - z_0)} = \underline{\gamma.\zeta}$$

$$\frac{p_z - p_0}{\gamma} = \zeta \quad \ldots\ldots\ldots (76)$$

Найбільше p_z буде при найбільшому ζ, у самої стінки (рис. 74).

7. Розглянемо тепер такий випадок відносної рівноваги важкої течі, коли вона цілковито виповнює валець, який обертається навколо своєї подовжної оси, що лежить поземно. Які тут будуть поверхні рівня і яке тиснення?

Нехай валець (рис. 75) обертається довкола оси O, що проходить нормально до рисунка, з кутовою скорістю ω. Віднесем поперечний розсік вальця до укладу координат OX, OZ; координатна вісь OY піде нормально рисункові, але вона нам не буде потрібна, бо всі сили тут, як побачим, ділають лише в площах доземних, простопадних оси Y-ів, а тому мети їх на вісь Y = 0.

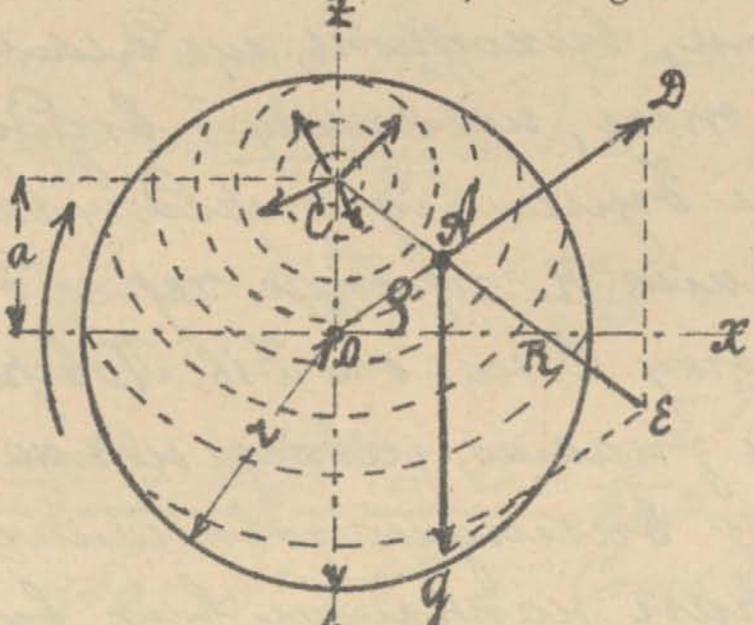


Рис. 75.

Візьмем будь-яку точку A на віддаленню ρ від центру O; на цю точку з масою dm ділають такі сили: сила тягару $= dm.g$ і відосередня сила $dm.\rho.\omega^2$, направлена по OA; ці сили AD і Ag дають вислідну AE, яка перетинає вісь OZ в точці C; із охожих трикутників AOC і ADE можна написати:

$$\frac{CO}{DE} = \frac{OA}{AD}, \text{ або } \frac{CO}{dm.g} = \frac{\rho}{dm.\rho.\omega^2};$$

відсіля $\underline{CO = \frac{g}{\omega^2} = Const}$ . . . . . (77)

Таким чином, виходить, що для кожної точки течі, на якому б віддаленню вона не була від осередку вальця, вислідна сила R пройде через одну й ту ж точку C на осі Z-ів. Поверхні рівня, як ми знаємо, завжди нормальні до напрямку вислідної зовнішних сил; в даному разі напрямки всіх вислідних проходять через одну точку O, яка являється їх центром, а тому поверхні рівня будуть вальцями, поперечні розрізи яких будуть колами з центрами в O. Це твердження можна довести ще в такий спосіб: перенесемо вісь X-ів рівнобіжно собі до гори на віддалення g/ω^2, щоб вона пройшла через точку C; напишемо загальне рівняння Ейлера для першого укладу координат, а потім для другого.

$$dp = \delta(Xdx + Ydy + Zdz)$$

X у нас $= \omega^2 x$; $Y = 0$; $Z = \omega^2 z - g$.

$$dp = \delta(\omega^2 x dx + \omega^2 z dz - g dz) \ldots\ldots (78)$$

$$dp = 0; \quad \omega^2 x dx + \omega^2 z dz - g dz = 0.$$

$$\underline{\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 z^2}{2} - gz = C}$$

В новому укладі: $z_1 = z - g/\omega^2$; $x_1 = x$

або: $z = z_1 + g/\omega^2$; $x = x_1$

$$\frac{\omega x_1}{2}^2 + \frac{\omega^2(z_1 + g/\omega^2)}{2} - g(z_1 + g/\omega^2) = C$$

$$\frac{\omega x^2}{2} + \frac{\omega^2 z_1^2}{2} + \frac{\omega^2 z_1 g}{\omega^2} + \frac{\omega^2 g^2}{2\omega^4} - gz_1 - g^2/\omega^2 = C.$$

$$\underline{\frac{\omega . x^2}{2} + \frac{\omega^2 z_1^2}{2} = C + \frac{g^2}{2\omega^2} = Const.}$$

$$\text{або: } x^2 + z^2 = Const$$

Це є рівняння кол з центрами в точці C.

Щоб найти тиснення в довільній точці течі проінтегруємо р-ння (78):

$dp = \delta(\omega^2 x dx + \omega^2 z dz - g dz$ і одержимо:

$p = \delta\left(\frac{\omega^2 x^2 + \omega^2 z^2}{2} - gz\right) + Const$, або

$$p=\frac{\delta}{g}\left[\frac{\omega^2(x^2+z^2)}{2}-gz\right]+Const\ldots\ldots(79)$$

Для находження сталої інтеграції прикладемо це рівняння до осередньої точки $O(x=0, z=0)$: $p_0=\frac{\delta}{g}[0]+Const$.
Отже, стала інтеграції $Const=p_0$

Чому ж рівняється тиснення p_0 в осередку вальця? Для точки в самому осередкові відосередня сила є $=0$, а тому і складова тиснення, що залежить від обертання, буде $=0$; само ж тиснення для важкої течі, при зовнішньому для вальця тисненню $=P_0$, буде тиснення гидростатичне і рівне: $p_0=P_0+\delta h$;
понеже h - глибина занурення точки O буде рівна лучу r, то:

$$p_0=P_0+\delta r=Const$$

Вставивши значіння сталої (Const) в рівняння (79), дістанемо:

$$p=P_0+\delta r+\delta/g\left[\frac{\omega^2(x^2+z^2)}{2}-gz\right],$$

або $p=P_0+\delta(r-z)+\frac{\delta}{2g}\rho^2\omega^2\ldots\ldots(80)$,
де $\rho^2=x^2+z^2$

Поділивши всі члени цього рівняння на δ, дістанем:

$$\frac{p}{\delta}=\frac{P_0}{\delta}+(r-z)+\frac{\rho^2\omega^2}{2g}\ldots\ldots(81)$$

В останньому рівнянню вираз $\frac{P_0}{\gamma}+(r-z)$ дає п'єзометричну висоту гидростатичного тиснення, коли б валець не обертався; а член $\frac{\varrho^2\omega^2}{2g}$ дає п'єзометричну висоту тиснення в тій же точці для випадку, коли б валець обертався, але на течу сила тягару не ділала б.

Для точок течі, які лежать на доземній оси z, ϱ буде $= z$, а тому рівняння (80) прийме такий вигляд:

$$p = P_0 + \gamma(r-z) + \frac{\gamma\omega^2}{2g} \cdot z^2$$

Найменьше значіння тиснення p найдем, взявши від p похідну по z і прирівнявши її нулю:

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma + \frac{\gamma . \omega^2}{g} \cdot z = 0.$$

відсіля: $z = \frac{g}{\omega^2} = l$ [Друга похідна є додатна].

Се б то найменьше тиснення буде в точці C, яка віддалена на $l = g/\omega^2$ від осередка O.

$$\text{Minim. } p = P_0 + \gamma\left(r - \frac{g}{\omega^2}\right) + \frac{\gamma\omega^2}{2g} \cdot \frac{g^2}{\omega^4} =$$

$$= P_0 + \gamma\left(r - \frac{g}{2\omega^2}\right):$$

$$\text{Min. } p = P_0 + \gamma\left(r - \frac{l}{2}\right)$$

$$\text{Max. } p = P_0 + \gamma(r+r) + \frac{\gamma.\omega^2.r^2}{2g} =$$
$$= P_0 + \gamma\left[2r + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right].$$

Аналітичний вираз (81) можна подати і в графічному вигляді в такий спосіб: проводимо лінію KL, рівнобіжну осі ZZ' нашого вальця (рис. 76). Від цієї лінії збудуємо вліво діаграму гідростатичного надтиснення, яка буде трикутником з основою, рівною $r - z = r - (-z) = 2r$; вправо збудуємо діаграму для зовнішнього тиснення $= \frac{P_0}{\gamma}$, яка буде простою MN, рівнобіжною лінії KL; од цієї простої збудуємо далі діаграму тиснення при круговому обертанню течі без впливу на неї ваги; ця діаграма буде параболою з вершком в точці P, $\left[\frac{\omega^2 z^2}{2g} = x \text{ або } z^2 = 2.\left(\frac{g}{\omega^2}\right).x\right]$; довжина MS і NQ буде $= \frac{r^2.\omega^2}{2g}$.

Відтинки поземних ліній між простою KE і параболою SPQ дадуть в принятому мірилі п'єзометричну висоту тиснення в відповідній точці на лінії ZZ' вальця; так, наприклад, відтинок ab дасть тис-

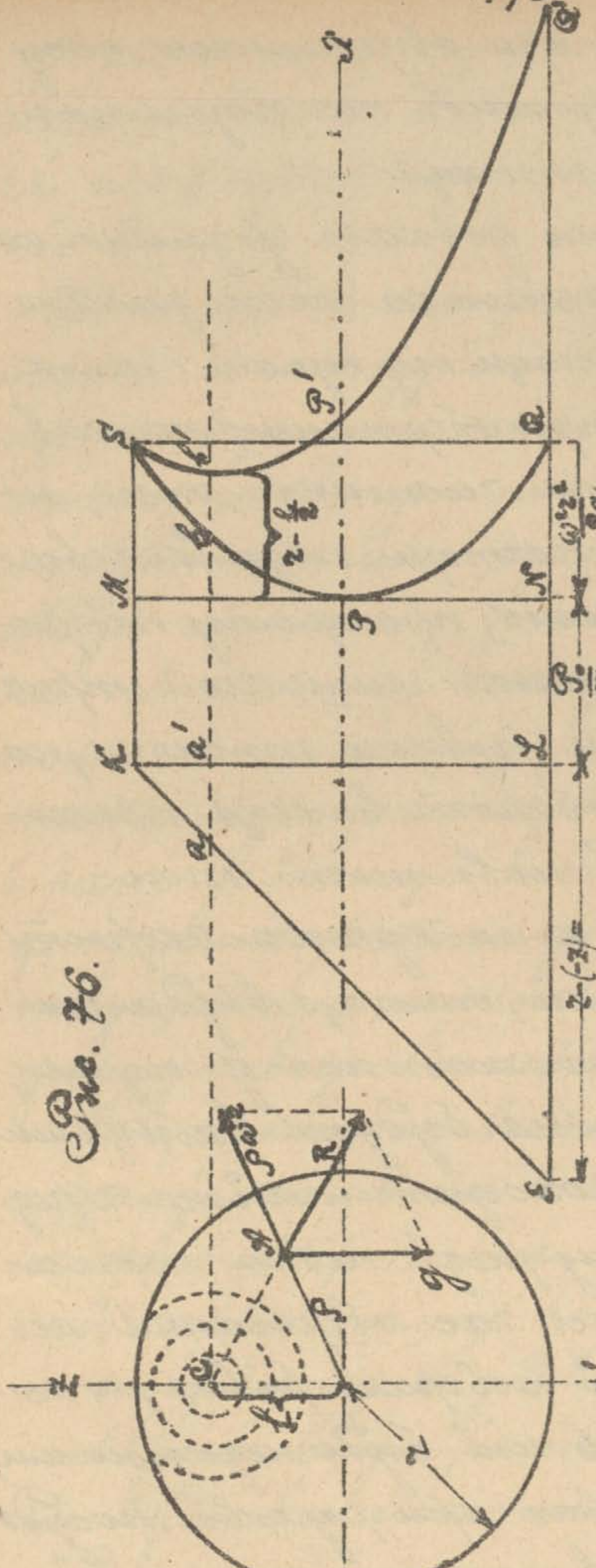


Рис. 76.

нення в точці. С.

Цій діаграмі можна надати трохи інший вигляд, який ясніш показує характер зміни тиснення.

Для цього всі абсциси тиснення будем відкладати від простої KL вправо, тоді одержимо криву-(те ж параболу) SPQ' з вершком в точці в', що відповідає точці C вальця.

Між двома розібраними випадками відносної рівноваги при обертанню посудини довкола доземної та поземної осей є річева різниця.

При обертанню довкола доземної оси одна й та ж частинка течі залишається весь час ротації під одним і тим же тисненням; при обертанню ж навколо поземної оси частинка течі, міняючи місце в просторі, підпадає все різному тисненню; при цьому поверхні рівня являються лише геометричними місцями рівних тиснень, на які за повний оборот вальця приходять все нові й нові точки течі.

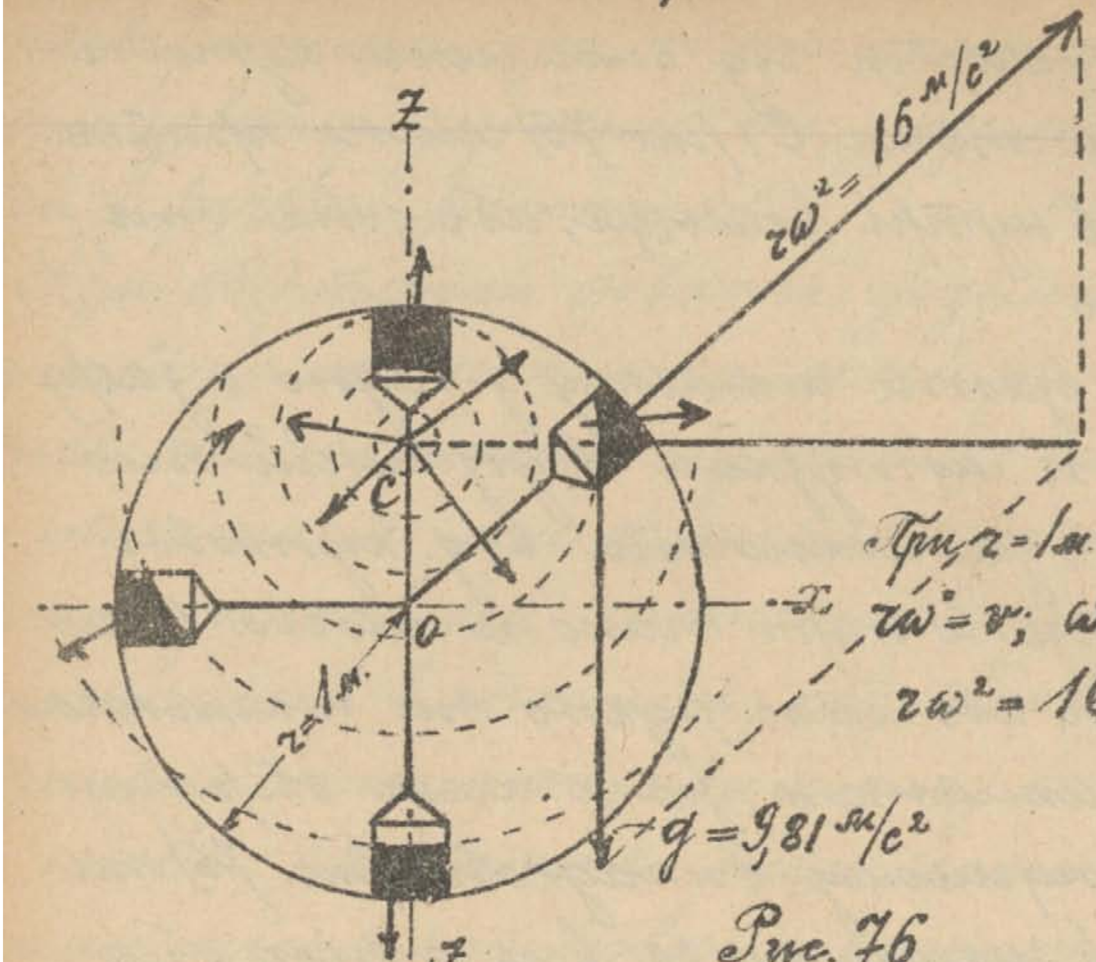
Лише тоді, коли кутова скорість ω є дуже велика, так що віддалення $\frac{g}{\omega^2}$ буде наближатися до нуля, то поверхні рівня будуть вальцями з віссю, яка проходить майже через точку O; в цьому разі певна точка течі буде за весь час обертання лежати на одній поверхні рівня, а тому тиснення в ній буде незмінним, так, як це буває при рухові посудини з течею довкола оси доземної.

В залежности від величини кутової скорости точка C (рис. 75) може прийтися або в нутрі вальця, або зовні стінок його.

Коли взяти шклянку з водою і закрутити її мотузком в доземній площі, то в залежности від кутової скорости ω тут також точка C може бути або між рукою та шклянкою, або за шклянкою, зовні кола обертання. В першому випадкові (рис. 76) тиснення в шклянці за весь період обертання буде збільшуватися від поверхні до днища шклянки; вода буде притискуватись до днища навіть тоді, коли шклянка буде йти верх дном, - і вода виливатися не буде.

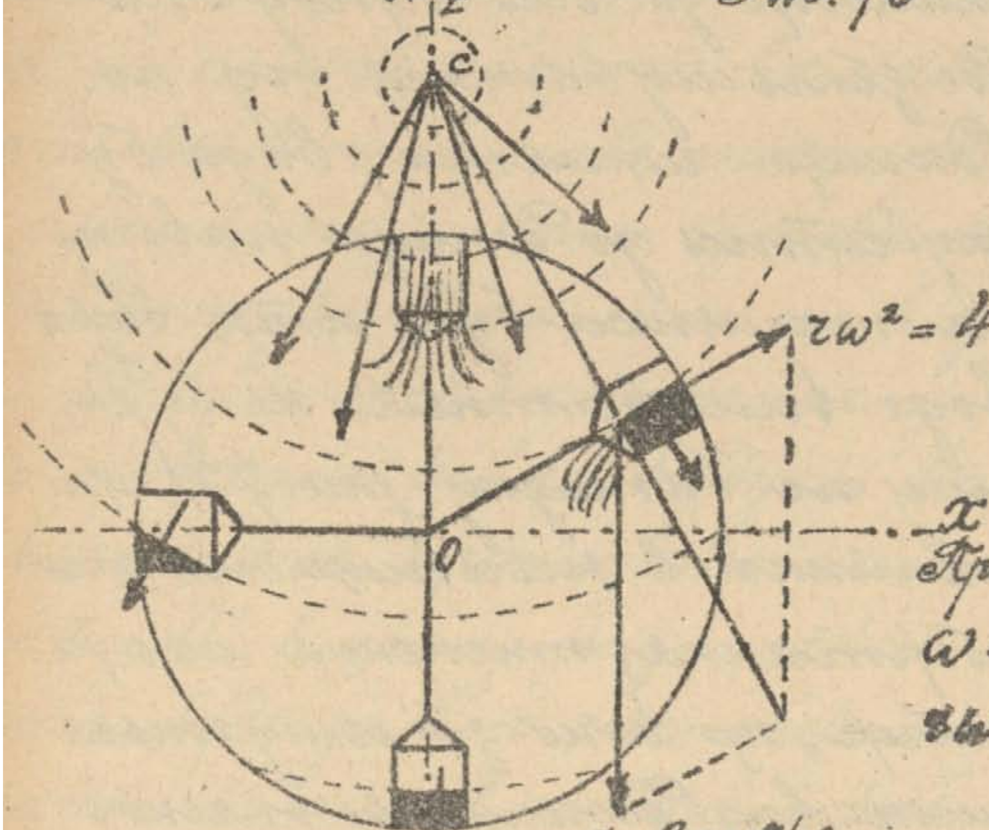
В другому ж випадку (рис. 77), при переході шклянки в найвище положення кола обертання, тиснення має такий характер, що воно збільшується по напрямку від днища до вільної поверхні води, а тому вода зі шклянки буде виливатися.

В наливних колесах водяних мли-



При r=1м. і v=4м/сек.
$r\omega^{\circ} = v$; $\omega = 4/сек^2$;
$r\omega^2 = 16 м/с^2$;

Рис. 76



При r=1; v=2м/с.
$\omega = 2/сек^2$
$r\omega^2 = 4 м/сек^2$;

Рис. 77

нів поверхня води в окремих скриньках

колеса приймає також форму вальцових поверхней рівня. Скорість ω тут буває не великою і вода зі скриньок виливається.

§32. Апарати для міряння тиснення в течах.

В технічній практиці постійно зустрічається необхідність міряти тиснення в течах, як то, наприклад в різних парових казанах, у водяних акумуляторах, чавах і т. п. Для міряння цих тиснень істнують різного роду пристрої.

Для невеликих тиснень, до $\frac{1}{2}$ атмосфери (зверх тиснення атмосфери) вживаються так звані п'єзометри. Це є шкляна або метальова зі шкляною насадкою рурка (рис. 78) A, яка з'єднана з посудиною, виповненою течею під тиском. В рурці теча мусить стояти на такій висоті H над точкою C, яка відповідає тисненню p_1 в цій точці, себ-то $H = \frac{p_1}{\gamma}$; відсіля манометричне тиснення $p_1 = \gamma H$, а повне тиснення $P_1 = P_0 + \gamma H$.

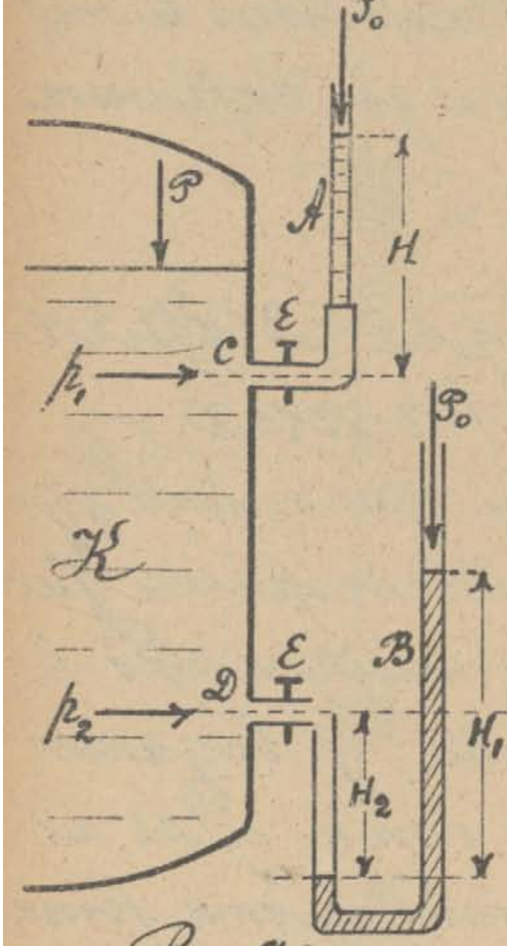


Рис. 78.

Коли р буде більше, як ½ атмосфери, тоді H виходить дуже великим і практично не вигідним; тому при тисненнях від ½ до 1 атмосфери п'єзометр робиться спочатку відогнутим до низу: його заповнюють ртуттю, яка при замкненому крантові Е стане в обох колінах рурки В на одному рівню; після з'єднання рурки з течею в посудині К, ртуть в одному коліні опуститься, а в другому підніметься до такої вишини, щоб установилася рівновага тиснень, а саме, щоб було:

$p_2 + \gamma H_2 = \gamma_1 H_1$; відкіля манометричне $p_2 = \gamma_1 H_1 - \gamma H_2$.

Повне тиснення: $P_2 = P_0 + \gamma H_1 - \gamma H_2$

Для тиснень, більших атмосфери, вживаються метальові манометри, які бувають двох типів: рурчасті і скриньчасті.

а) Рурчастий манометр Бурдона (рис. 79) має зігнуту в кільце порожню рурку овального розсіку, що з'єднується з течею, тиснення в якій треба знати. Коли тиснення збільшується, тоді поперечний розсік рурки наближається до круглого, а поперечник кільця, в яке рурка зігнута, робиться більшим; при цьому кінець рурки А, вільно з'єднаний з невеличкою підоймою, що може обертатися довкола центру С, повертає при допомозі зубчаток стрілочку S, яка і вказує на ціферблаті відповідне тиснення. Таріровка манометру переводиться в той спосіб, що його з'єднують з тисненнями вже відомими.

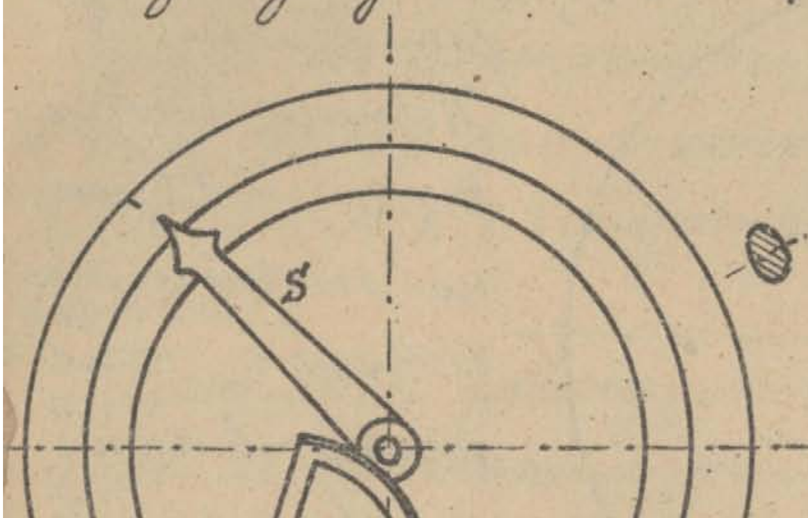


Рис. 79.

б) Скриньчастий манометр (рис. 80) має скриньку А, посеред якої защімлено хвилясту бляшану мембрану S. Нижню частину скриньки (L) можна сполучати з течею, тиснення в якій треба найти. З частини скриньки (K) воздух в значній м рі виполновується. При зм ні тиснення мембрана S більш або менш вгинається, а цей рух її передається сістемою підоймочок на колісцятко O зі стрілкою, яка і вказує цифру, відповідаючу тисненню.

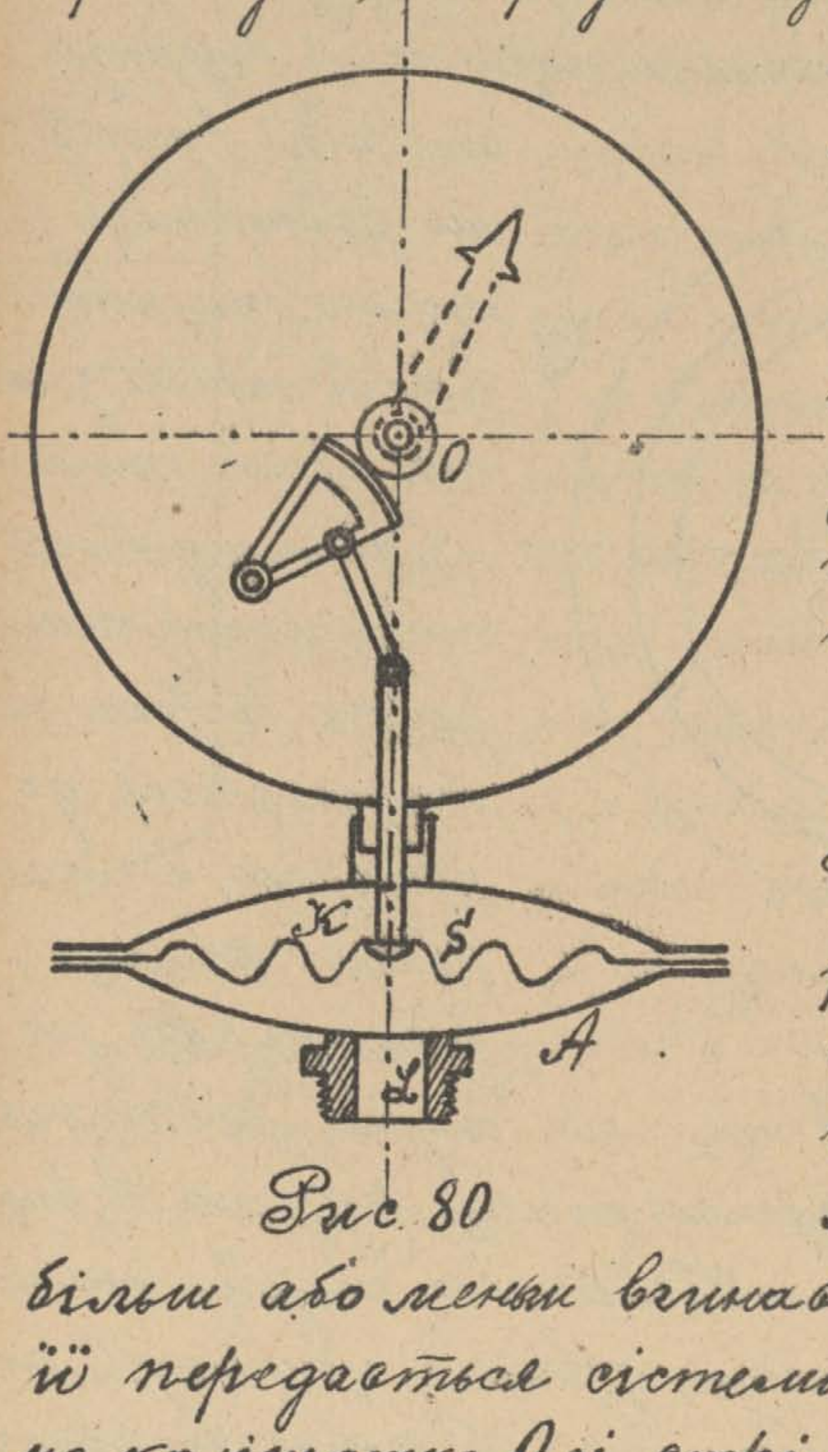


Рис. 80

Всі цифри для тиснень, більших атмосферного, показують звичайно манометричне тиснення в атмосферах; для тиснень, менших атмосферного, цифри показують висоти ртутного сто па в міліметрах.

<u>Приклад</u>. Манометр парового казана показує 4,5 атмосфери, а барометр в той же час дає тиснення атмосфер = 700 мм. Яке абсолютне тиснення в казані?

Манометр завжди показує ріжниц між абсолютним тисненням в теч і тисненням зовнішньої атмосфери, а тому, щоб найти абсолютне тиснення в течі, необхідно до показання манометра додати ще показання барометра, перевівши їх до одинакової міри.

$$P = 4{,}5 + \frac{700}{760} = 4{,}5 + 0{,}92 = 5{,}42 \text{ атм}$$

$$\text{або } P = 4{,}5 \cdot 760 + 700 = 4120 \text{ мм. ртути}$$

Тиснення можна визначати в ріжних мірах, як про це було вже сказано в §14; для зручности переводу одніх мір в други додаємо нижче окрему таблицю.

Тиснення р.	в кілограм. на кв. сант, або в нових атмосферах	в тонах на кв. метр.	в старих або наукових атмосферах.	о метрах водяного стовпа	в сантиметрах водяного стовпа	в сантиметрах ртутного стовпа
1 $\frac{кіл.}{см^2}$, або нова атм.	1	10	0,96700	10,0000	1000,00	73,5500
1 тона/метр^2	0,1000	1	0,0967	1,0000	100,00	7,3550
1 стара атмосф.	1,0333	10,333	1	10,333	1033,30	76,0000
1 метр вод. стовпа	0,1000	1	0,0967	1	100,00	7,3550
1 сант. вод. стовпа	0,0010	0,010	0,00097	0,010	1	0,0735
1 сант. ртутного стовпа	0,0135	0,1359	0,01315	0,1359	13,59	1

Матеріали, що їх було використано при складанню курса гидростатики.

А.- в мові українській:

Лисянський. Фізика. ч. 1 (механіка). 1923.

Др. В. Левицький. Фізика. (Львів). 1912.

Шовгенів. Аналітична геометрия на площі. 1923.

В.- в мові російській:

Проф. Ризенкампф. Проблемы орошенія Туркестана. в. 1. 1921.

Есьман. Гидравлика. 1915.

К. Акулов. Судоходные каналы и ихъ устройство. 1912.

Проф. В. Глубер. Гидравлика. Перевод инж. Крамаренкова.

Проф. Жуковскій. Теоретическая механика. ч-I и II. 1922.

С.- в мові чеській:

Prof. Jilek. Hydraulika. Літографований курс. 1918.

Prof. W. Felber. Hydraulika. Літ. курс. 1920.

Prof. Sýkora. Hydromechanika. Літографований конспект лекцій. 1919.

S. Fleischner. Technicka kultura. 1922.

D.- в мові польській:

F. Kucharzewski. Hydraulika. Kurs szkoły politechnicznÿ. 1918

E.- в мові французській:

C. Monteil. Cours d'hydraulique théorique. 1920.

F.- в мові німецькій:

A. Budau. Kurzgefasstes Lehrbuch der Hydraulik. . . . . . 1920.

R. Mises. Elemente der technischen Hydromechanik.

H. Lorenz. Technische Hydromechanik.

Friedrich. Kulturtechnisches Wasserbau. B.I. 1923.

R. Weyrauch. Hydraulisches Rechnen. 1921.

Wittenbauer. Aufgaben aus der technischen Mechanik. 1921.

R. Weyrauch. Die Technik, ihr Wezen und ihre Beziehungen zu andern Lebensgebieten. 1922.

H. Engels. Handbuch des Wasserbaues. 1 Band. 1922.

Forchheimer. Grundgriss der Hydraulik. 1920.

Зміст.

Українське Видавниче Товариство при У.Г.А.

1. Проф. Шовгенів. **Водяне господарство на Україні,** 12 ст.	2·50
2. Проф. Іваницький. **Ліс і біологічні типи дерев. пород,** 17 ст.	3·20
3. Доцент Чередіїв. **Ботаника,** 119 ст.	21·60
4. Доцент Тимошенко. **Економична Географія,** 66 ст.	18·—
5. Проф. Шадлун. **Кристалографія,** 52 ст.	5·—
6. Проф. Щербина. **Статистика,** 133 ст.	25·20
7. Лєк. Іваненко. **Ґеометрія,** 200 ст.	21·—
10. Доц. Сокович. **Нарисна геометрія,** 464 ст.	43·60
11. Б. І. **Таблиці до визначення дерев. рослин по листях,** 40 ст.	5·—
13. Лєк. Лисянський. **Фізика ч. І. (механика),** 198 ст.	26·50
15. Проф. Шовгенів. **Аналітична геометрія,** 190 ст.	22·50
16. Проф. Іваницький. **Курс лісівництва ч. І.,** 60 ст.	7·—
18. Проф. Шереметинський. **Скотарство ч. І.,** 156 ст.	20·—
22. Доц. Чернявський. **Мінеральогія (сістематика)** (друк.)	—·—
25. Доц. Грабина. **Геодезія. (Вступ)** 35 ст.	8·—
26. Проф. Мицюк. **Історія політич. економії** 254 ст.	33·60
28. Проф. Іваницький. **Лісівництво ч. II.,** 75 ст.	11·—
29. Лєк. Іваненко. **Тригонометрія,** 420 ст.	32·30
31. Лєк. Русова. **Підручник французької мови,** 360 ст.	24·40
33. Проф. Іваницький. **Таблиці до визнач. дерев. пород.** 15 ст.	2·90
37. Доц. Комарецький. **Аналітична хемія ч. II.,** 286 ст.	21·30
38. Лєк. Лисянський. **Фізика ч. II.,** 120 ст.	24·25
39. Лєк. Вілінський. **Нарисна геометрія,** 288 ст.	25·10
40. Др. Левицький. **Теорія українського письменства,** 61 ст.	7·—
41. Доц. Грабина. **Геодезія ч. І.,** 460 ст.	54·50
42. Лєк. Коваленко. **Курс діференц. рахунку,** 239 ст.	17·10
43. Доц. Тимошенко. **Вчення про світовий ринок** (друк.)	—·—
44. Доц. Мартос. **Теорія кооперації** (друкується)	—·—
45. Доц. Гольдельман. **Економика й політика промисловости** (друкується)	—·—
47. Доц. Фролов. **Хемічна технологія продуктів с.-г.**	25·—
49. **Терміногічний словник** (друкується)	—·—
50. Доц. Фролов. **Хемічна технологія води,** 320 ст.	23·—
51. Королів-Старий. **Повстання органичного життя на землі,** 100 ст.	6·—
52. Проф. Щербина. **Земська статистика** (друкується)	—·—
53. І. Б. **Таблиці до визначення насіння і сходів,** 13 ст.	2·—
54. Проф. Старосольський. **Держава і політичне право** (друк.)	—·—
55. Лєк. Лисянський. **Фізика ч. III. (тепло),** 104 ст.	16·90
56. Проф. Шовгенів. **Гидравлика.**	—·—
57. Проф. Шадлун. **Мінеральогія,** 200 ст.	14·40
58. С. Романовський. **Repetitorium до інтегрального рахування**	12·70
59. Проф. Іваницький. **Лісівництво ч. III.,** 400 ст.	28·—
61. Проф. Мицюк. **Історія політичної економії ч. II.**	—·—
62. Лєк. Лисянський. **Термодінамика,** 133 ст.	12·16
64. І. Білий. **Гидростатика. — Задачи.**	6·36
65. **Збірник нот українських пісень,** 48 ст.	15·—
68. **Таблиці до визначення жуків до роду,** 36 ст.	—·—
71. В. Королів. **Записки по фізіології тварин,** 250 ст.	—·—
72. Доц. Коваленко. **Курс аналітичної ґеометрії в просторині**	—·—

Книгарня Видавництва Č. S. R., m. Poděbrady.

Накладом Української Господарської Академії.