U. 14554

SLAV. ABT.
SLOV. ODD.

На правах рукопису

Ч. 15. [516 (02)]

Шовгенів І.

Професор Української Господарської Академії в Ч. С. Р.

Аналітична геометрія

На площі



1923

ПОДЄБРАДИ

Видання „Видавничого Товариства при Укр. Госп. Академії“

На правах рукопису.

№ 15 [516(02)].

Шовгенів, Ів.
професор Укр. Госп. Академії в Ч.С.Р.

Аналітична ГЕОМЕТРІЯ

на площі

Конспект лекцій, що викладалися студентам інжін. відділу Укр. Госп. Акад. на I сем. 1922-3 н. р.

1923
Подєбради
Видання „Вид. Т-ва при У. Г. А".

Dupl.
14 B 448

U. 14554

Litografováno 150 přípisů.

dou 4814/42.

SLOVANSKÁ KNIHOVNA
3186245794

Зміст:

Методa координат . . . . . Ст. 1.

§1. Предмет аналітичної геометрії – 1. §2. Определ. я положення точки на прямій – 2. §3. Опр-ня положення точки на площ. – 3. §4. Опр-ня положення точки в просторі – 6. §5. Перехід від одного прямокутного укладу координат до другого рівнобіжного – 6. §6. Перехід від одного прямокутного укладу до такого ж, повернутого відносно першого на довільний кут – 7. §7. Вираховування координат точки, що поділяє даний відрізок в даному відношенню – 8. §8. Віддалення між двома точками – 11. §9. Находження полей фігур на площі – 12. §10. Аналітична форма геометричних образів – 15. §11. Звязок координат рівняннями – 19.

Проста лінія . . . . . Ст. 24.

§12. Рівнання простої з кутовим сочинником – 24. §13. Загальне рівнання простої – 26. §14. Р-ння простої, яка проходить через початок координат і дану точку – 28. §15. Р-ння простої, що проходить через дану точку – 29. §16. Р-ння простої, що проходить через дві дані точки – 29. §17. Задача – 30. §18. Р-ння простої в відтинках на осях координат – 31. §19. Нормальне р-ння простої – 32. §20. Кут між двома простими – 34. §21. Віддалення точки

від даної прості – 36. §22. Р-ння перетинаючих ся простих – 39. §23. Перетинання трох простих в одній точці – 41. §24. Геометричні місця – 45.

Вістякові перерізи . . . . . Ст. 47.

§25. Вістякові перерізи – 47.

Лінії другого степеня.

Коло . . . . . Ст. 53.

§26. Рівнання кола – 53. §27. Обслідування кола – 54. §28. Р-ння кола з осередком в початку координат – 56. §29. Степень кола відносно точки – 58. §30. Проведення кола через три дані точки – 60. §31. Коло й проста – 62. §32. Р-ння дотичної до кола в точці на обводі – 63. §33. Р-ння нормалі – 66. §34. Довжина нормалі й дотичної – 66. §35. Загальне р-ння дотичної – 67. §36. Дотична із зовнішньої точки – 67. §37. Полярна проста – 68. §38. Дотична, ∥-на даній простій – 70. §39. Кут між простою, що перетинає коло, й дотичною – 71. §40. Загальне р-ння лінії, що проходить через точки перетину двох других ліній – 72. §41. Находження координат точок перетину двох кол – 73. §42. Жмут кол – 73. §43. Рівностепенна вісь – 76. §44. Рівностепенний осередок кол – 79.

Еліпса . . . . . Ст. 80.

§45. Рівнання еліпси – 80. §46. Обслідуван-

ня р-ння еліпси – 83. §47. Зміна значінь a і b – 84. §48. Р-ння еліпси не канонічне – 85. §49. Еліпса й точка – 87. §50. Еліпса й пряста – 88. §51. Р-ння дотичної – 94. §52. Р-ння нормальної – 95. §53. Різні властивости дотичної – 95. §54. Кути між дотичною й провідними лучами – 97. §55. Провідні лучі пропорційні відаленню очима від дотичної – 98. §56. Добуток із проспопадів на дотичну – 100. §57. Описане коло – 100. §58. Направляюче коло – 101. §59. Довжини дотичної, нормальної – 102. §60. Будування дотичних – 103. §61. Директриси еліпси – 107. §62. Сопряжені поперечники – 110. §63. Довжини сопряжених полупоперечників – 114. §64. Сума квадратів сопряжених поперечників – 115. §81. Ректіфікація обводу еліпси – 142. §82. Поле еліпси – 144.

Гіпербола . . . . . Ст. 117.

§65. Рівнання гіперболи – 117. §66. Обслідування р-ння гіперболи – 119. §67. Будування гіперболи – 124. §68. Гіпербола й точка – 125. §69. Р-ння дотичної й нормальної – 126. §70. Властивости дотичної – 126. §71. Будівля дотичної до гіперболи – 128. §72. Дотична із зовнішньої точки – 130. §73. Довжина дотичної й нормальної – 131. §74. Директриси гіперболи – 131. §75. Поперечники гіперболи – Сопряжені поп-ки – 133. §76. Р-ння

гіперболи відносно вершка її – 136. §77. Р-ння гіперболи, віднесене до асімптот – 136. §78. Відтинки січної між асімптотами і гіперболою – 139. §79. Поле трикутника, один бік котрого торкається гіперболи, а другі лежать на асімптотах – 140. §80. Спряжені гіперболи – 142. §83. Поле сектора гіперболи – 144.

Парабола . . . . . Стр. 145.

§84. Рівнання параболи – 145. §85. Будування параболи – 148. §86. Парабола й проста – 150. §87. Р-ння дотичної до параболи – 152. §88. Довжина дотичної та нормальної – 155. §89. Будування дотичної з зовнішньої точки – 155. §90. Поперечники параболи – 157. §91. Рівнання параболи в інших прямокутних укладах – 160. §92. Рівнання лінії, яку вигинає тіло, кинуте в порожнечі під довільним кутом до поверху – 166. §93. Довжина дуги параболи – 172. §94. Поле параболи – 173.

Загальне рівнання кривих другого порядку. Стр. 173

§95. Загальне р-ння кривих другого порядку – 173. §96. Дискримінант рівнання другого ступеня – 178.

Полярні координати . . . . . Стр. 181

§97. Поняття про полярні координати – 181. §98. Звязок між прямокутними і полярними координатами – 182. §99. Рівнання простої

в полярних координатах – 183. § 100. Рівняння кола в полярних координатах. – 184. § 101. Полярне рівняння еліпси, гіперболи й параболи – 185.

Метода координат.

§1 Предмет аналітичної геометрії.

Задачі математичного змісту можна розв'язувати або методом аналітичним, для цього дають засоби: арітметика, алгебра, вищий аналіз: диференціальне та інтегральне рахування, або методом геометричним, методом побудови, який вживається в геометрії, та нарисній геометрії. Перший метод має свою перевагу в його загальності, а другий - в наочності. Бажання використати загальність висновків з наочністю їх уявлення спонукали давно все математичну думку до сполучення цих двох методів, до утворення окремої математичної дісципліни, яка б дала можливість переводити математичні думки з мови геометричної на аналітичну й, навпаки, надавала б геометричним образам аналітичний вираз. -

Той відділ математики, в якому установлюються правила для згаданого переводу носить назву аналітичної геометрії.

Предметом аналітичної геометрії являється обслідування властивостей геометричних образів або инакше просторових форм (ліній, поверхонь, фігур, тіл) методом рахування. При цьому в аналітичній геометрії змагаються звести

всі геометричні питання, не лише про розмір фігури, але й про форму положення її до аналітичних виразів. Іншими словами аналітична геометрія має своєю метою виявити математичний звязок між простором та часом або числом та числом. Начало цій науці дав французький вчений Descartes, який в 1637 році написав „Geometrie" про геометрію на площі.*)

Всяка фігура визначається цілком положеннями тих точок, які до неї належать. Тому при аналіточному обслідуванню фігур необхідно попереду усього уміти виявляти положення точки при допомозі чисел.

. Загальне питання про определення положення точки можна розбити на три задачі:
1) Знайти положення точки на простій
2) Знайти положення точки на площі.
3) Знайти положення точки в просторі. –

§2. Определення положення точки на прямій. Положення точки на простій можна означити одним числом. Візьмемо будь яку пряму (рис 1), означимо на ній довільну точку O як початкову точку. Нехай точка A буде тією точкою, положення якої треба определити за допомогою числа. Точка A може бути або з правого, або з лівого боку початкової точки O, тому для определення положення точки A необхідно знати, на якому від O відаленню в умовно прийнятих одиницях довжини й у якому напрямі лежить A. Відалення A від O, або відтинок простої OA можна виявити числом, коли вимірять OA якою небудь

*) René Descartes Дуррекон. (Renatus Cartesius). 1596–1650. Батько новітньої філозофії, математики, фізики й анатомії.

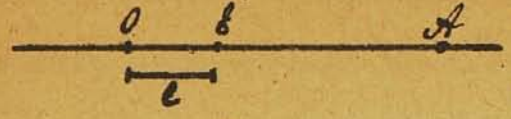


Рис. 1.

одиницею міри, напр. $OE = e$; абсолютна величина цього числа буде $\frac{OA}{OE} = x$; число далі умовимося напрям від O вправо рахувати додатним, а вліво від'ємним. При цій умові у нас $x = \frac{OA}{OE}$ буде додатним або — наз. координатою*) точки A, а сукупування даних: 1) прямої, на якій лежать определені точки 2) початкова точка O на прямій, 3) одиниця міри і 4) установлений додатний, а значить і від'ємний напрямок наз. укладом координат**).

Коли система координат на прямій установлена, тоді кожній точці на прямій відповідає властива їй координата (число), і, навпаки, кожному числу, як координаті, відповідає певна точка на прямій.

Приклад. Найти на даній прямій AB (рис 2) з початковою точкою O й додатним напрямком від O до B точку з координатою -5, коли одиниця міри $e = 3$ мм. Від точки O відкладемо вліво 3 e, себто у нас 9 мм.; і тоді точка M буде та, яку шукаємо.



Рис. 2.

§3. Определення положення точки на площі.

Для определення точки на площі одного числа вже не вистарчає. Ми можемо координувати точку, як приміщену на якійсь прямій і тоді положення точки на цій прямій зможемо знайти по попередньому, але, крім того, необхідно установити місце самої

*) сполученої
**) укладом сполучених

простої на площі. Для цього потрібно знати відалення простої, яка проходить через нашу точку, до другої простої, прийнятої за початкову, себ-то треба знати друге число. Таким чином, для определення точки на площі треба знати два числа; дві координати; одно число определить нам просту на площі, а друге місце точки на прості.

Виберемо тепер початкові дані, якими б установлена була побудова точок на площі.

Одну з рівнобіжних, напр. OA на площі (рис 3) приймемо за початкову. Ця проста розділяє поле площі на дві частини: верхню й нижню. Умовимся зміщення від OA вверх рахувати додатними, а вниз від'ємними. Далі умовимся початкові точки простих OA брати на одній простій OB, при чому знова зміщення точки на прості OA вправо від O будемо рахувати з +, а вліво з -

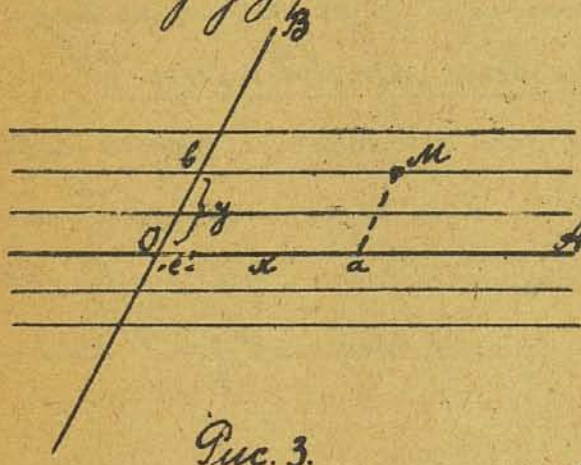


Рис. 3.

Умовимся ще відалення рівнобіжних від початкової прості OA рахувати по OB, або по простій, їй рівнобіжній.

Нарешті виберемо одиницю міри e. Всі ці початкові дані в їх купі дають засіб означення координат точки на площі й являються укладом координат на площі

Прості OA й OB називаються осями координат; точка O початком координат. Число, яке дає положення точки на одній з

рівнобіжних прямих, або инше, зміщення точки від прямої АВ називається абсцісою (відрізок) точки й означається буквою x (рис. 3).

Число, що дає положення прямої, на якій лежить точка, або показує зміщення прямої відносно початкової прямої ОА називається ординатою (рядна) точки й означається буквою y

Абсциси відкладають від осі OB в напрямку осі OA або на самій осі OA, тому вона наз. віссю абсцис або ікс-ів; ординати відкладають від осі OA в напрямку OB, або по самій осі OB, яка й має назву осі ординат або ігреків.

Точка O наз. початком координат, її координати (0;0) кут $\omega = AOB$, або xOy називається координатним кутом ω. Якщо кут $\omega = 90°$, тоді уклад координат наз. прямокутним, або декартовим при куті $\alpha \neq 90°$ уклад координат наз. косокутним.

Цей і другий уклади носять назву укладів рівнобіжних координат. Крім цього укладу, є ще уклад полярних координат. В цім укладі положення точки дається також двома числами; відданням ρ точки A від початку координат O (рис 4) і кутом φ який міряється від осі ox по напрямку проти ходу годинникової стрілки. ρ наз. радіус-вектором (рух-вектор), φ - полярний кут. Точка, означена в одному укладі координат, може бути легко означеною і в другому укладі, але перехід від укладу рівнобіжного до укладу полярного буде розглянутий пізніше.

В найближчих наших викладах будемо ко-

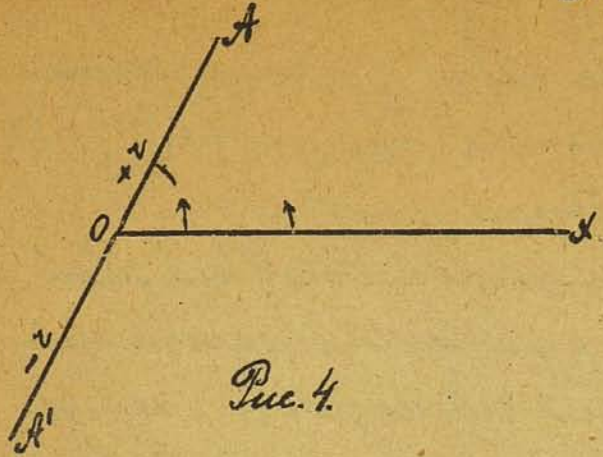


Рис. 4.

ристуватися лише прямокутними або Декартовими укладом координат і для цих координат покажемо засоби переходу від одного укладу до другого йому рівнобіжного або до укладу, повернутого на певний кут відносно першого

§4. Определення положення точки в просторі

Для определення точки в просторі двох координат або двох чисел вже не вистарчає, а необхідно, щоб було три координати.

Дійсно, простір ми можемо уявити собі як наслідок руху площі рівнобіжно самій собі; одно з положень такої площі можна прийняти початковим положенням точки в тій площі, яка проходить через точку, цілком определяється двома координатами її x і y, а положення самої площі відносно площі початкової определиться відданням лінії лише, яке означено літерою z, цих трьох даних x, y, z цілком вистарчає для определення місця точки й, навпаки точка A (x, y, z) може бути при прийнятому укладу координат найдена.

§5. Перехід від одного прямокутного укладу координат до другого рівнобіжного

Нехай у нас дана точка A (рис. 5), яка в укладі координат ox, oy має координати x і y. [Примітка. Точка A, що має координати x і y означається так A(x, y)] Необхідно знайти коорді-

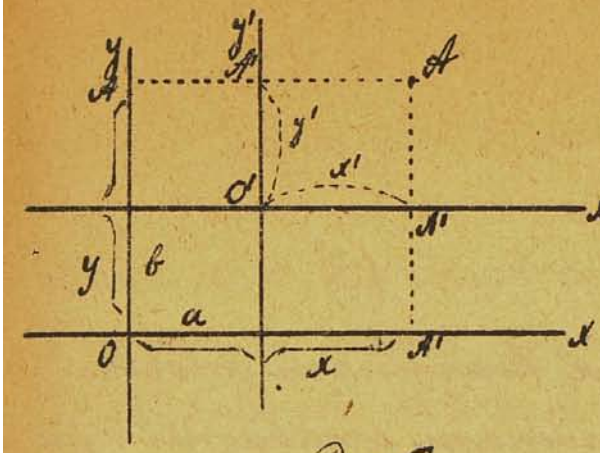


Рис. 5

нати цієї точки в новому укладі координат ox', oy', в якому o'x' ∥ ox, а o'y' ∥ oy. Координати точки O' по відношенню до першого укладу означимо через a і b; тоді із рисунка видно, що абсциса точки A в новому укладі координат

$$x' = x - a$$

а ордината

$$y' = y - b \quad \ldots\ldots (1)$$

відсіля можна мати й такі відношення

$$x = a + x'$$
$$y = b + y' \quad \ldots\ldots (2)$$

Не трудно показати, що взори 1 і 2 вжиті при всякому a і b, як позитивному так і негативному, себто важні для точок в усіх 4^х кутах нашої координатної системи.

§6. Перехід від одного прямокутного укладу до другого прямокутного, повернутого відносно першого на довільний кут.

Нехай у нас є один уклад координат oxy і другий x'oy' (рис. 6) повернутий відносно першого навколо точки O на кут α від осі ox. Треба знайти взаємовідношення координат точки P в першому й другому укладах.

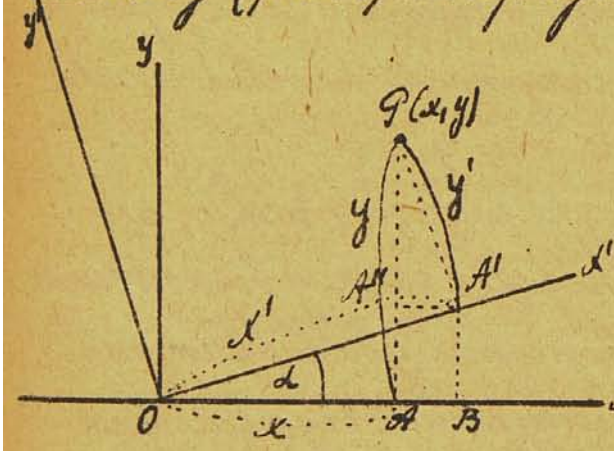


Рис. 6.

На рис. 6 $OA = x$; $OA' = x'$; $AP = y$; $A'P = y'$. Даний $\angle AOA' = \angle A''PA = \alpha$. Проведемо ще прямовисні $A'B$ і $A''A$, тоді по рисунку бачимо

$OA = OB - AB = OB - A'A''$

$AB = AA'' + A''B = BA' + A''B$

відсіля $OA = OA' \cos\alpha - A'B \sin\alpha$

себто: $x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$

$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$ } ..... (3)

Примітка. Для означення координат точки, будемо значіння цих координат ставити при назвах точок в дужках; напр. $A(2, -3)$ буде означати, що точка A має абсцісу $+2$ і ординату -3.

Задачі. 1) Знайти координати даної на площі точки при даній системі координат.

2) Знайти точку по даних її координатах $x = -6$, $y = 4$.

3) Як лягнуть на площі точки, які мають абсцису $x = a$, а рінчі ординати y?

4) Який геометричний образ виділиться на площі, коли в попередній задачі постійному a давати рінчі значіння, себто розглядати його як параметр? теж, коли для $y = b$, розглядати b, як параметр.

5) Якими рінчими засобами можна побудувати точку, коли дані її координати $x = a$, $y = b$, і навпаки, по даній точці найти її координати

6) Якими координатами означаться точки а) які лежать на осі x і в, б) на осі y і в.

§7. Вираховування координат точки, що поділяє даний відрізок в даному відношенню.

Коли ми знаємо координати двох яких точок, а також знаємо геометричні відношення третьої точки до цих двох, тоді можна вираховати й координати згаданої третьої точки. Розглянемо, наприклад, таке завдання.

Дані дві точки $A(x_1, y_1)$. $B(x_2, y_2)$

точка M поділяє відрізок AB (рис 7.) в відношенню $\frac{AM}{MB} = \lambda$. Знайти координати точки M.

Точку M можна брати не лише між точками A і B, а також і зовні відрізка AB, як показано на рис. 8, причому кажуть, що точка M поділяє відрізок AB зовнішнім засобом. При останньому положенню точки M напрямок відрізка в один бік будемо вважати додатним, а в протилежному йому - від'ємним; напр., AM'' буде зі знаком +, а $M''B$ зі знаком -, тоді M_1B треба брати вже з -; AM'' зі знаком -, а $M''B$ - зі знаком +; при цій умові відношення $\frac{AM'}{M_1B}$, $\frac{AM''}{M''B}$ будуть від'ємними, а по абсолютній величині $\frac{AM'}{M_1B}$ буде > 1, а $\frac{AM''}{M''B} < 1$. Після цих попередніх пояснень приступимо

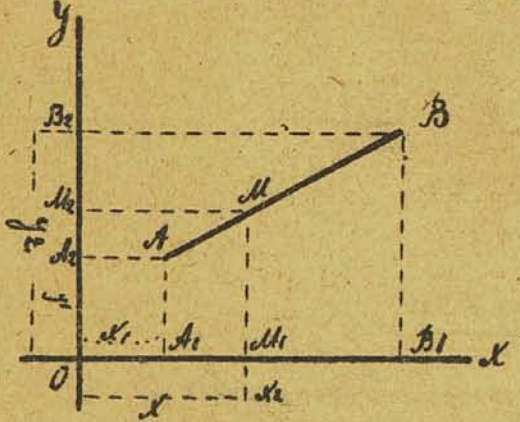


Рис. 7.

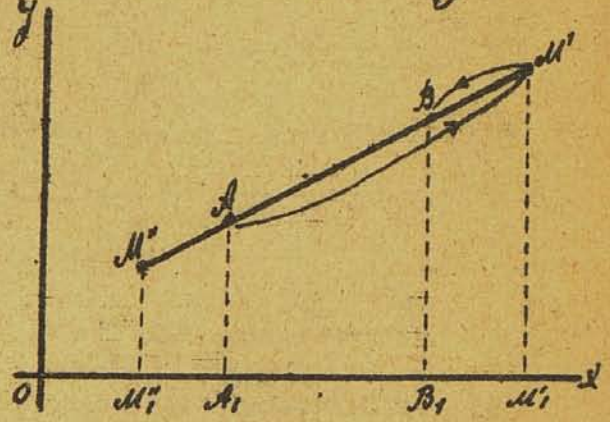


Рис. 8.

ло тепер до розв'язання нашої задачі.

Побудуємо координати точок A, M, B (рис. 7

Проекції AA_1, BB_1, MM_1 - рівнобіжні, а тому маємо пропорцію $\frac{A_1M_1}{M_1B} = \frac{AM}{MB}$.

Далі $A_1M_1 = A_1O + OM_1$, або $-OA_1 + OM_1$, або $x - x_1$.

$M_1B_1 = M_1O + OB_1 = -OM_1 + OB_1 = x_2 - x$

відсіля $\frac{AM}{MB} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$.

Розв'язуючи ці рівняння відносно x, будемо мати

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \text{ або } (1+\lambda)x = x_1 + \lambda x_2$$

відкіля $$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6.$$

В той же спосіб можемо написати $\frac{A_2M_2}{M_2B_2} = \frac{AM}{MB}$,

$$A_2M_2 = A_2O + OM_2 = -OA_2 + OM_2 = -y_1 + y = y - y_1$$

$$M_2B_2 = M_2O + OB_2 = -OM_2 + OB_2 = y_2 - y.$$

відкіля $$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6^a$$

Такі ж самі відношення можна вивести і для випадку, показаного на рис. 2.

Коли точка M лежить по середині відрізка AB, тоді відношення $\frac{AM}{MB} = 1$, а значить $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \ldots 7$

а координат $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7^a$

Задача 1. Знайти координати точки перетинання медіян трикутника $A(x_1 y_1)$, $B(x_2 y_2)$, $C(x_3 y_3)$

Розв'язання. Координати середини AB – M_1

$$x' = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y' = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\frac{M_1M_0}{M_0C} = \lambda = \frac{1}{2};$$

Координати M_0 – $x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_3}{1+\lambda} = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{2}x_3}{1+\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

Координата $y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Задача 2. У вершках трикутника $A(x_1; y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$ прикріплені однакові маси. Виражувати координати осередка тягару цих мас.

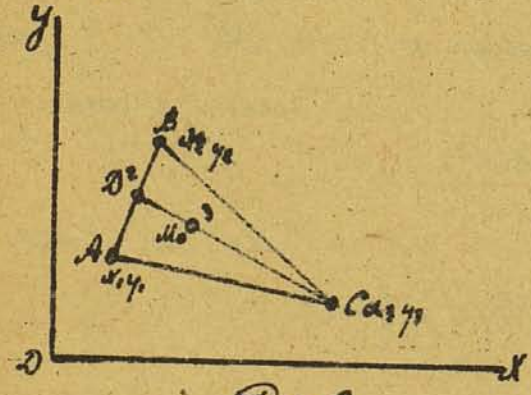


Рис. 2.

Уявимо собі що в точках A, B, C прикладені маси = 1. Тоді рівнодіюча мас, прикладених в A і B (рис. 2) буде = 2 і прикладена в середині AB в точці D. Координати цієї точки

$$x_D = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_D = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

§8 Відалення між двома точками.-

Дві точки A і B дані в прямокутному укладі координат своїми координатами x_1, y_1 і x_2, y_2 $A(x_1, y_1)$. $B(x_2, y_2)$. Потрібно аналітично знайти відалення між цими точками.

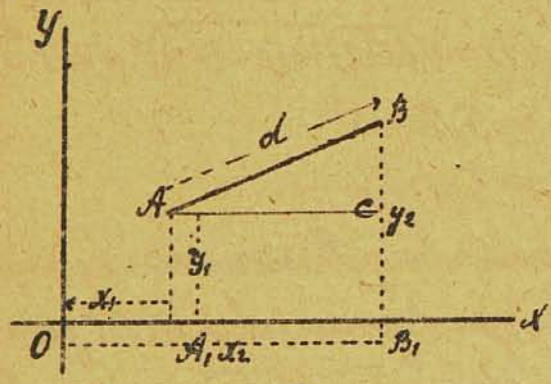


Рис.10.

Накреслимо координати даних точок (рис.10). Проведемо далі пряму AC, рівнобіжну осі Ox, і розглянемо прикутник ACB. По теоремі Піфагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$, але прямокутного прикутника можна виразити через координати точок A і B, а саме:

$$AC = OB_1 - OA_1 = x_2 - x_1; \quad BC = BB_1 - CB_1 = y_2 - y_1.$$

Отже $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ..... (5)

сб-то, відалення між двома точками рівняється кореню квадратовому із суми квадратів різниць відповідних координат цих точок. Висновок цей можна отримати й иншим шляхом. Візьмемо знову рисунок 11, подібний рис.10.

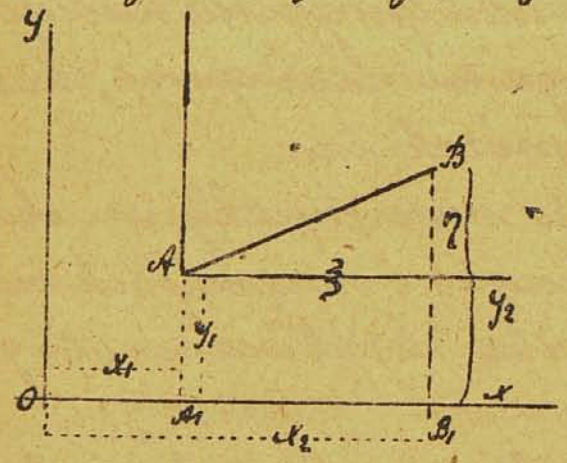


Рис.11.

Перевернемо уклад координат хоч рівнобіжно собі так, щоб початкова точка приймалася в точці A; тоді по рис.11

$$AB^2 = \xi^2 + \eta^2$$

але $x_2 = x_1 + \xi$; $y_2 = y_1 + \eta$

$\xi = x_2 - x_1$; $\eta = y_2 - y_1$

Відсіля $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .....

Знак перед коренем треба брати завжди +...

Задача 1. Даний трикутник координатами своїх вершків $A(5,3)$, $B(2,-1)$, $C(-1,4)$ знайти довжину його боків

По формулі (взору) для відалення між двома точками маємо, що $AB = \sqrt{(5-2)^2+[3-(-1)]^2} = \sqrt{25} = 5$

$BC = \sqrt{(2+1)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{34} = \backsim 5,8$

$CA = \sqrt{(5+1)^2+(3-4)^2} = \sqrt{37} = \backsim 6,1$

Задача 2. Вирахувати координати осередка кола, описаного коло трикутника ABC заданих.

Нехай M буде осередок описаного кола (рис. 12.)

$MA = MB = MC$.

$MA = \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$

$MB = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$

$MC = \sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}$

Отже для определення двох невідомих x, y маємо

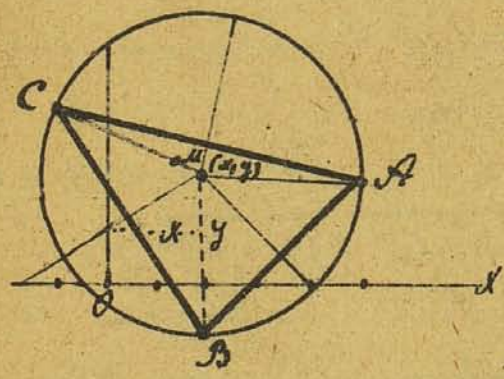


Рис. 12.

два рівнання $MA = MB$; $MA = MC$; відкіля й найдено $x = 1\frac{43}{54}$, $y = 2\frac{5}{18}$.

§9. Находження полей фігур на площі.

Покажемо, як находити поля фігур, коли відомі координати точок їх.

Задача 1. Знайти поле трикутника, один вершок якого лежить в початковій точці, а два останніх мають координати (x_1, y_1) і (x_2, y_2) (рис 13)

Розвяжемо спочатку цю задачу в координатах полярних, а потім перейдемо до ортогональних.

Означимо кут AOx через φ_1, а кут BOx через φ_2; довжину OA означимо через r_1, а довжину OB через r_2.

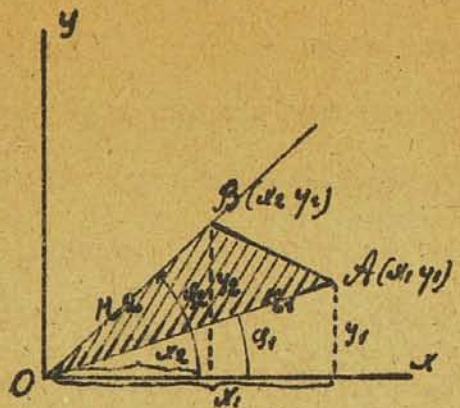


Рис. 13.

Із тригонометрії ми знаємо, що поле трикутника $AOB = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin AOB =$
$= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ ..... 8^a
або $\frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)$
но $r_2 \sin\varphi_2 = y_2$; $r_1 \cos\varphi_1 = x_1$;
$r_2 \cos\varphi_2 = x_2$; $r_1 \cos\varphi_1 = y_1$

тому $\Delta = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$ ..... 8^b

Цей взір означають умовно ще так:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9$$

вираз між рисами наз. детермінантом. Взір (8^b) може бути позитивним, або негативним, в залежності від того, який знак має різниця кутів $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Коли вираховується поле одного трикутника, тоді знак взору (8^b) не має значіння, бо для поля треба взяти знак +; але в тому разі, коли треба знайти поле многокутника, приходиться звертати увагу й на знак взору (8^b), або (9), як це побачимо далі.

Приклад. Знайти поле трикутника OAB, координати вершків якого дані: O(0,0), A(5,3); B(4,4)

$$\Delta AOB = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(5 \cdot 4 - 4 \cdot 3) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$$

Примітка. Коли б ми розглядали цей не трикутник, але з іншим чергуванням кутів, так що кут φ_1 – AOA, а кут φ_2 – BOA; тоді $\varphi_2 - \varphi_1$ буде мати знак — координати O(0,0); A(5,3); B(4,4)

$$\Delta AOB = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(5 \cdot 4 - 4 \cdot 3) = 4.$$

Задача № 2. *Найти поле многоугольника, вершины которого даны в координатах*

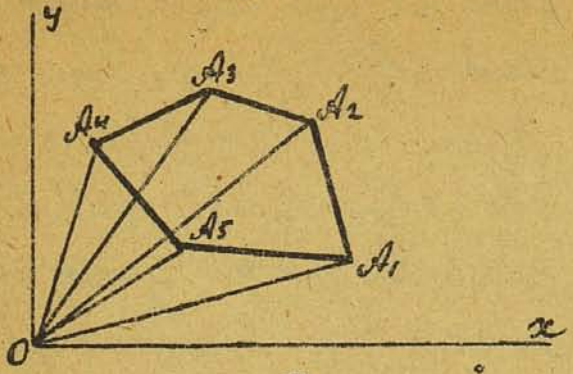


Рис. 14.

Нехай ми маємо в прямокутному уладі координат (рис. 14) многокутник $A_1A_2A_3A_4A_5$ з чергуванням вершин проти ходу годинникової стрілки. Для знаходження поля цього многокутника проведемо прості від O до кожного з вершин; тепер у нас поле $A_1A_2A_3A_4A_5$ можна розглядати, як різницю між сумою полей прикутників A_1OA_2; A_2OA_3; A_3OA_4 і прикутників A_4OA_5 і A_5OA_1. В трьох перших прикутниках чергування вершин таке, що поля прикутників будуть після рахунку мати знак (+); в двох останніх чергування вершин іде по напрямку годинникової стрілки, а тому після обрахування будемо мати для них знаки −; з цього можна вивести, що в формулі для многокутника треба всі члени алгебрайчного ряду взяти зі знаком (+)

Отже для поля многокутника будемо мати взір такий:

$$\text{Поле } A_1A_2A_3A_4A_5 = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\} \dots (10)$$

Задача № 3. *Виведений тільки що взір відноситься й до прикутника, який не має ні одного свого вершка в початку координат (рис 15).*

$$\Delta A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$\Delta A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - y_2x_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\right\} \dots\dots (11)$$

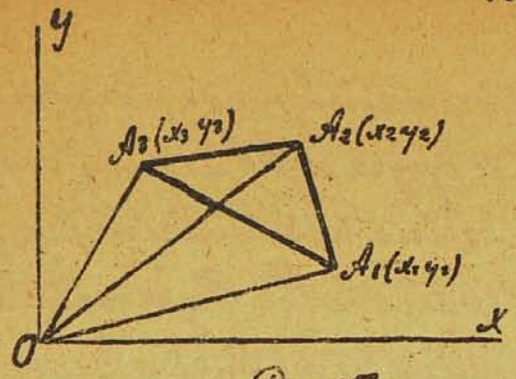


Рис. 15.

Приклад. Знайти поле трикутника ABC, координати вершків якого дані: A(5, 3); B(2, -1); C(-1, 4).

Маємо: $x_1 = 5$; $y_1 = 3$; $x_2 = 2$; $y_2 = -1$; $x_3 = -1$; $y_3 = 4$.

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left\{\left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{matrix}\right|\right\}$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left\{\left|\begin{matrix} 5, & 3 \\ 2, & -1 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} 2, & -1 \\ -1, & 4 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} -1, & 4 \\ 5, & 3 \end{matrix}\right|\right\}$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left\{(-5-6)+(8-1)+(-3-20)\right\} = \frac{1}{2}\left\{-11+7-23\right\} = -\frac{27}{2} = -13\frac{1}{2}.$$

відповідь одержали зі знаком — через те, що черговання вершків у нашому випадкові йде по годинн. стрілці. Дійсна величина поля трикутника буде = $13\frac{1}{2}$.

§10. Таким чином, ми маємо тепер можливість, знаючи координати точок, знаходити місце їх, вираховувати відалення між точками, вираховувати поля різних фігур, себ-то маємо можливість звязати величину геометричних образів з математичними виразами. Покажемо тепер, як виявити аналітично форму геометричних образів, і навпаки, як аналітичні взори перетворити в геометричні образи.

Розвяжемо де-кілька задач, із яких виявиться ясно зрова на замічність.

Задача 1. Якому рівнанню задовольняють координати точок, що знаходяться на однаковому відаленню від двох даних точок?

Розвязання. Одну з двох даних точок

можна уявити собі (рис 16) в початку координат О, а друга буде мати визначені координати (m, n). Нехай точка P з координатами (x, y) буде однією з тих точок, що лежать від O і A на однаковому відстані, так що PO = PA.

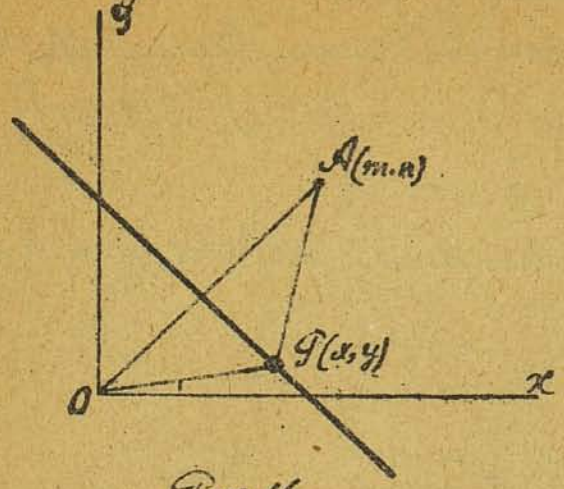


Рис. 16.

По раніше виведеному ми знаємо, що $PO = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$;

$PA = \sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}$;

але тому що $PO = PA$ і $(x^2+y^2) = (x-m)^2+(y-n)^2$

Відсіля $x^2+y^2 = x^2-2mx+m^2+y^2-2ny+n^2$, або

(12)..... $2mx+2ny-(m^2+n^2) = 0$

Таким рівнянням означиться геометричне місце точок, рівновідалених від O і A; але ми знаємо з геометрії, що таке геометричне місце є цілком определена одна простa, яка проходить прямовисно до OA і через її середину. Таким чином, геометричний образ - проста лінія - означається аналітично рівнянням першого ступеня з двома невідомими. Кожну просту можна вважати геометричним місцем точок, рівновідалених від двох даних точок, а тому кожну просту можна означити рівнянням першого ступеня з двома невідомими.

Задача Найти геометричну залежність між невідомими, які звязані між собою рівнянням $3x-4y-5=0$.

Розвяжемо це рівняння відносно y;

$y = \frac{3x-5}{4}$. Як що тепер давати x довільні додатні

або відємні значіння, тоді для y будуть вираховуватися відповідні значіння, при чому кожному малому приростку x буде відповідати малий приріст y. Кожну пару звязаних між собою значінь x, y можна розглядати як пару координат одної точки, які й можемо побудувати в прийнятому укладі координат.

Нехай x буде = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5

тоді y — = $-4\frac{1}{4}$, $-3\frac{1}{2}$, $-2\frac{3}{4}$ -2, $-1\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ 1, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$.

Наміткивши означені пари координатами точки, можна побачити й доказати, що всі точки лежать на одній простій KL (рис. 17), себто виявиться, що взяте наше рівняння першого ступеня з двома невідомими має геометричним своїм образом

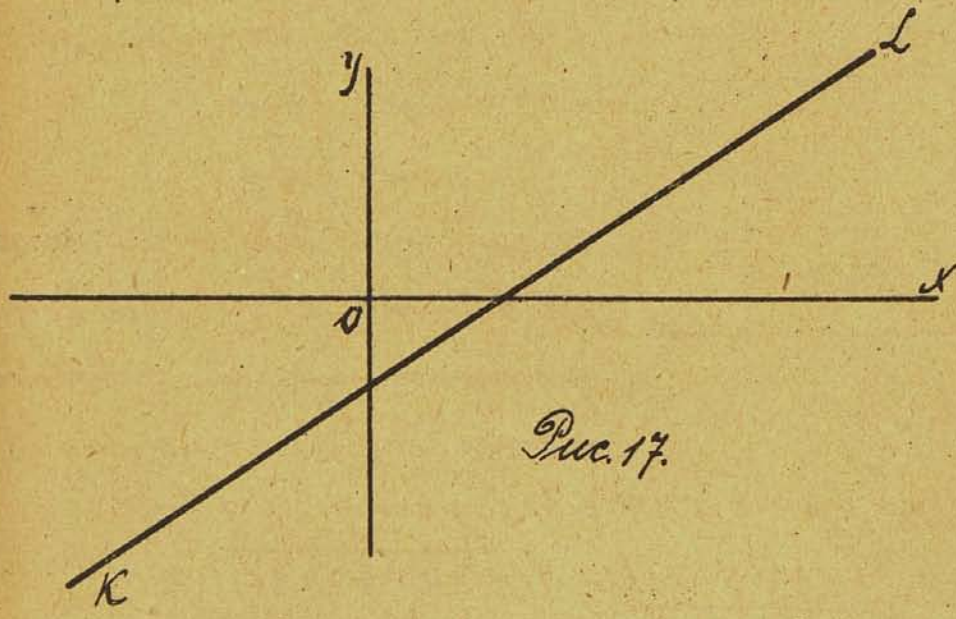


Рис. 17.

просту лінію. Далі буде доказано, що всяке рівняння першого ступеня відносно двох невідомих означає собою просту лінію.

Приклад 1. Написати рівняння, якому задовольняють координати точок, рівновіддалених від даних точок A(2,3). B(5,6)

Перенесем початок координат в точку A (рис 18) тоді координати точки A(0,0), а точка B $m = 5-2 = 3$, $n = 6-3 = 3$.

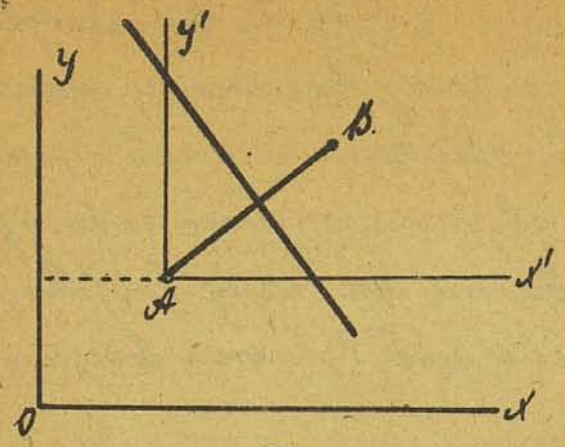


Рис. 18.

$$\frac{2m\xi + 2n\eta - (m^2+n^2) = 0.}{6\xi + 2\eta - (m^2+n^2) = 0}$$

по $\xi = x-2$; $\eta = y-3$

$6(x-2)+6(y-3)-18 = 6x+6y-48=$

$x+y=8.$

Приклад 2. Знайти координати точки M (рис. 19), рівновідаленої від точок $A(2,3)$; $B(5.6)$, яка лежить на відаленню $\sqrt{50}$ від початкової точки O.

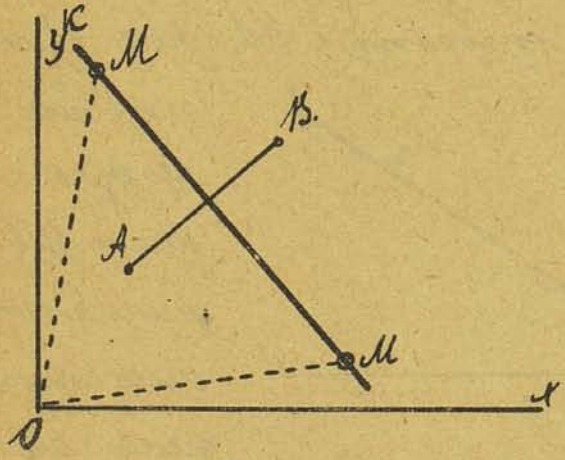


Рис. 19.

Рівняння прямої, точки якої рівновідалені від A і B знайдено при даних A і B вище; воно є

$x+y=8.$

Нехай координати точки M будуть x'. y'. Ці координати мусять задовольняти й рівняння $x+y=8$, себто мусить бути $x'+y'=8$; відкіля $y'=8-x'$.

Відалення від O до $M = \sqrt{(x'+0)^2+(y'+0)^2} =$

$= \sqrt{x'^2+(8-x')^2}$. і це $= \sqrt{50}$

$x'^2+(8-x')^2 = 50$; $x' = 4 \pm 3$

$x_1' = 7$; $x_2' = 1.$

$y_1' = 1$; $y_2' = 7.$

Задача. Написати рівняння, якому мусять задовольняти координати точок кола, малого середок в точці $M(a,b)$ і луч (радіус) $= r$

Розв'язання. Возьмемо на колі довільну точку P (рис. 20) з координатами (x,y) Відалення M від $P = r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Це і є вірш, що звязує коор-

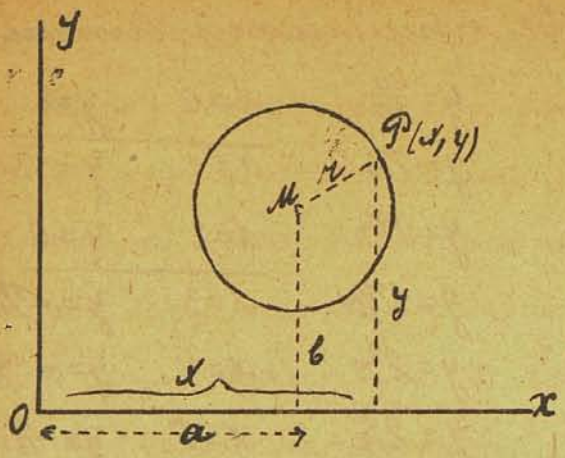


Рис.20.

дінати точок кола.

Як що $a=0$; $b=0$, себто точка M попадає в 0, тоді рівняння для кола буде

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \text{ або}$$

$$x^2+y^2=r^2. \ldots\ldots$$

Приклад. Найти координати точок перетину кола, якого середок $M(5,3)$, і луч $r=6$ з осями абсцис і ординат.

Рівняння кола буде $r=\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}=6$, або

$$(x-5)^2+(y-3)^2=36.$$

Коло перетинає вісь абсцис в точках, які мають ординату $y=0$; при цій умові вище написане рівняння буде таке: $(x-5)^2=36$; $x-5=\pm 6$.

$$x_1=5+6=11;\ x_2=5-6=-1.$$

вісь ординат перетинається в точках, де $x=0$. При цій умові $(y-3)^2=36$; $y-3=\pm 6$

$$y_1=3+6=9;\ y_2=3-6=-3.$$

§11. Звязок координат рівнянням

Коли ми маємо будь яке рівняння з двома невідомими, то придавши одному з невідомих довільне значіння будемо отримувати для другого (в разі, як це рівняння можна розвязати) одно, або декілько значінь.

Возьмемо, наприк. рівняння $(5+x^2)y=5(2-x)$ і розвяжемо його відносно y;

$$y=\frac{5(2-x)}{5+x^2}.$$

Коли будемо x давати різні позітивні і нега-

тивні значіння, то у теж буде приймати рівні значіння. Так, напр.

$x=-6$	$y=\frac{40}{41}$	$x=0$	$y=2$
$x=-5$	$y=1\frac{1}{6}$	$x=1$	$y=\frac{5}{6}$
$x=-4$	$y=1\frac{3}{7}$	$x=2$	$y=0$
$x=-3$	$y=1\frac{11}{14}$	$x=3$	$y=-\frac{5}{14}$
$x=-2$	$y=2\frac{2}{9}$	$x=4$	$y=-\frac{10}{21}$
$x=-1$	$y=2\frac{1}{2}$	$x=5$	$y=-\frac{1}{2}$ і т.д.

Крім цих значінь, можна було б вирахувати будь які інші при цілком довільних значіннях x. Коли взяті значіння пар. – вибраного x і одержаного y мають реальний характер, тоді можна кожну пару вважати координатами точок і збудувати кожну таку точку в вибраному укладі координат. Коли ми виберемо прямокутний уклад, тоді для кожного з вибраних x, як абсціс найдемо точку з ординатою y. При дуже малій зміні x дріб $\frac{2-x}{5+x^2}$ змінюється також дуже мало, а при безмежно малій зміні x і ордината y буде змінятися безмежно мало, а лінія, яка зв'яже кінці ординат, буде мати характер цілком плавної лінії якоїсь кривої. Таким чином, приведене вище рівняння при геометричній інтерпретації його дає рівняння кривої (рис. 21). Але й навпаки, за-

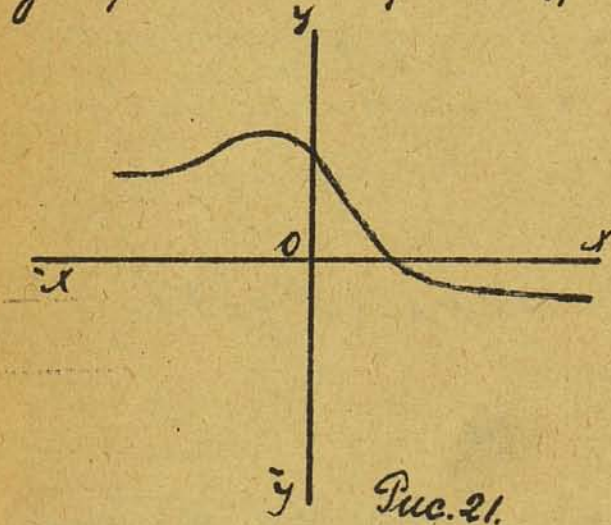


Рис. 21.

кономірно накреслену криву можна характеризувати відповідним рівнянням. Таке геометричне трактування рівнань дуже корисне на практиці й тому воно часто вживається, як

засіб, наочно показуючий властивості даного закону. Візьмемо, наприклад, закон Бойля-Маріотта, що до об'єму й тиснення газів при незмінній температурі. Цей закон каже, що здобуток об'єму V даної маси газу на пружність його p при незмінній температурі є величина постійна C (залежна від температури газу і його властивостей)

$$pv = C.$$

Ми можемо p і v розглядати, як координати й откладати p по осі x'-ів, а відповідно йому v по осі y'-ів.

Коли ми для p візьмемо значіння 0, 1, 2, 3, тоді для $v = \frac{C}{p}$ будемо мати ∞ C, ½C, ⅓C і т. д.

Накреслимо ці дані в прямокутних координатах і будемо мати (рис. 22) криву, яка характеризує т. зв. закон Бойль-Маріотта графічно.

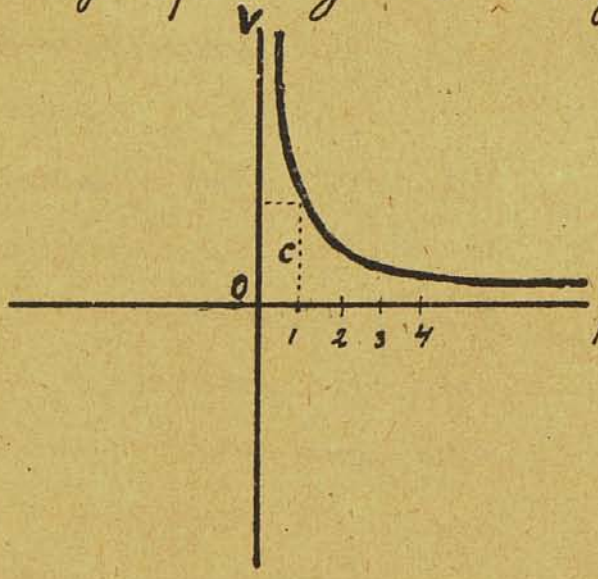


Рис. 22.

Ця крива з одного боку дає наочний вираз рівнання $pv = C$, а з другого дає також можливість для довільної одиці даної p найти відповідне v і, навпаки. Тут ми бачимо, як окремі спостереження можна звязати певним законом, а потім, найшовши закон, находити й такі випадки, яких безпосередньо не спостерігали.

Таким чином, алгебрайчне рівнання з двох-

ма невідомими зображує графічно закономірно побудованими лініями, навпаки, кожна закономірно побудована лінія може бути переведена на мову алгебри в вигляді рівняння між двома змінними. Поясним це твердження прикладом.

Для цієї мети розглянемо ту лінію, яку зачерпне камінь, кинутий в поземному напрямкові. Фізика нас учить, що шлях кинутого тіла можна вважати складеним з двох шляхів – рівномірного в поземному напрямкові, який виходить з початкової точки O, і рівномірно прискореного, як вільно падаючого тіла під дією тягару землі.

Камінь, кинутий поземно, коли б на його не діяла сила тягару, рухався б по закону інерції (безвладності) простолінійно й рівномірно, себ-то після закінчення 1, 2, 3, 4..... секунди він займав би в просторі місце (рис. 23) P_1', P_2', P_3', P_4' ....

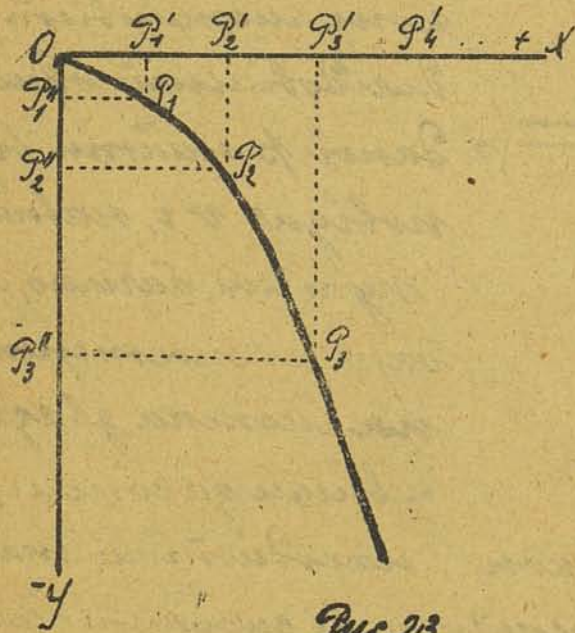


Рис. 23.

Коли взяти координати простокутного укладу так, щоб початок його O припав на точку, з якої кинуто камінь, вісь абсцис ox пішла б в напрямку простолінійного руху каменя, а вісь oy в напрямку діяння сили тягару, коли прийняти простолінійну скорість = c, тоді

абсциса x через t секунд буде:

$$x = ct.$$

в цій точці був би камінь через t секунд, як би він рухався лише по інерції, але на нього діє сила тяжару з прискоренням цієї сили $= g = 9{,}81 \frac{\text{метрів}}{\text{секунду}}$. З фізики ми знаємо, що при рівномірно прискореному русі, коли початкова скорість $= 0$, шлях, який проходить вільно падаюче тіло $y = \frac{gt^2}{2}$; тому через 1" s_1 буде $= OP_1" = \frac{g}{2}$; через 2" $s_2 = OP_2" = 2g$

через 3" $- s_3 = OP_3" = 4{,}5g$ і т. д.

По законові рівнобіжника сил камінь через 1" буде в точці P_1, через 2" - в точці P_2, через 3" - в точці P_3 і т. д. і таким чином, пройде по кривій $OP_1 P_2 P_3 \ldots\ldots$

Коли ми хочемо тепер графічний образ виявити в аналітичній формі, себто знайти звязок між координатами x та y, або написати рівняння лінії, що звязує згадані координати, тоді треба лише з двох рівнань

$$x = ct$$

$$\text{і } y = \frac{gt^2}{2}$$

виключити змінну t; для цього беремо перше рівнання в другому степені

$$x^2 = c^2 t^2$$

$$\text{поділимо } \frac{x^2}{y} = \frac{c^2 t^2}{\frac{g}{2} t^2}$$

$$\text{відсіля } y = \frac{g}{2c^2} x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Рівнання (4) є рівнанням лінії, яке дає звязок між відаленням каміня від початкової точки O і спадом того ж каміня від O.

Маючи це рівнання, ми можемо, напр.,

розв'язати таке питання: З вежі висотою 100 метрів кинуто в горизонтальному напрямкові камінь зі скорістю 30 метрів/сек. Як далеко від вежи упаде цей камінь. Тут нам дано: $y = 100$ м. $g = 9{,}81$ м/сек.; $c = 30$ м/сек.; залишається невідомим одно x

$$100 = \frac{9.81}{2.30^2} x^2$$

$$x = 135{,}5 \text{ м}.$$

З цього прикладу бачимо, як геометричний образ перетворено в алгебраїчне рівняння; в цьому полягає важливе значіння аналітичної геометрії, яка дає методи для дослідження не лише тих геометричних образів, які зустрічались в нижчій геометрії й можуть бути накреслені лінійкою та циркулем, але й різних других кривих

яких вже згаданими засобами накреслити не можна.

Проста лінія.

§ 12. Рівняння простої з кутовим сочинником (коефіцієнтом).

Ми вже бачили, що бігучі координати точки, яка рухається по простій, звязуються при зміні свого положення рівнянням першого ступеня. Це рівняння може мати різний вигляд, при чому сочинники при x і y, а також відомий член рівняння будуть мати різне геометричне значіння.

Нехай проста AC перетинає вісь oy в точці B на відаленні від $O = b$.

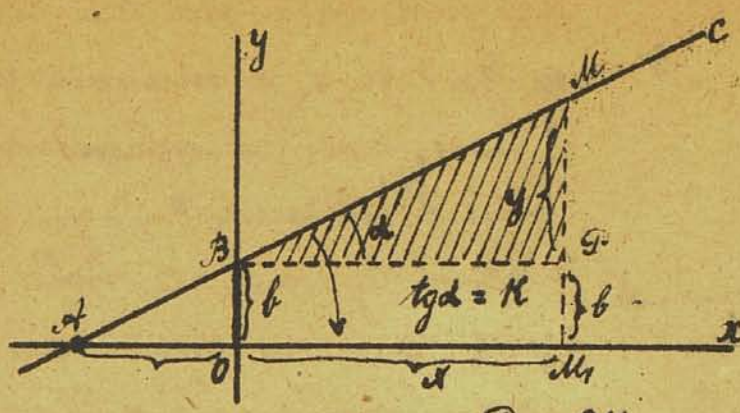


Рис. 24.

Нахилена до додатної вісі ox під кутом α; tg α нехай = k.

Даними величинами k і b положення прямої на площі в прийнятому укладі координат цілком визначається; k і b наз. параметрами прямої. Находимо координати точки M: x = OM₁, y = MM₁. Із точки B проводимо BP ∥ ox; із прямокутного трикутника MBP маємо: $\frac{PM}{BP} = tg\angle PBM$;

PM = y - b; BP = OM₁ = x; ∠PBM = α

таким чином $\frac{y-b}{x} = tg\alpha$

відкіля $y = tg\alpha \cdot x + b$ . . . . . (17)

Замінивши tg α через k, будемо мати таке загальне рівняння прямої лінії

$$y = kx + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Сполучник k наз. кутовим сполучником (коеф.) прямої, а величина b наз. початковою ординатою; при x = 0 y = b.

Обслідуємо рівняння (18) tg α = k може мати всякі значіння, як додатні, так і від'ємні в залежності від величини кута α, під яким нахилена пряма до осі + ox. Коли tg α має знак (+), себто α < 90°, тоді при збільшенню +x, y також буде збільшуватися, як це показано на рисунку 25, де α < 90° і $y_n > y_{n+1}$; при α > 90° tg α буде від'ємним і тоді y при збільшенню +x буде алгебрайчно зменшуватися,

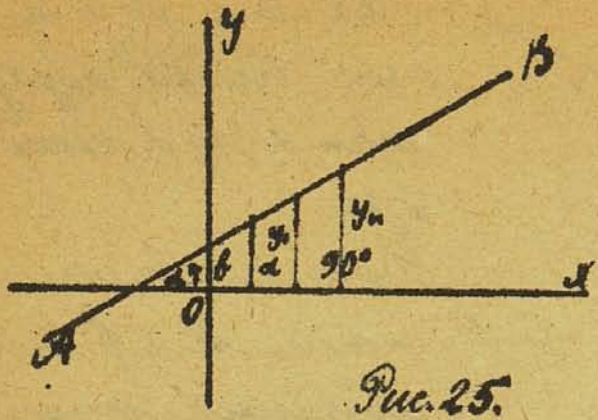


Рис. 25.

як показали на рис. 26. у $y_n < y_{n-1}$, а також $y_{n+1} < y_{n-1}$, хоч по абсолютній величині $y_n > y_{n-1}$. Коли $tg\alpha = k = 0$, тоді $y = b$, себто пряма іде рівнобіжно з віссю ox на відстані b від неї.

Коли $tg\alpha = \infty$, тоді $\alpha = \frac{\pi}{2}$ і пряма йде по осі oy, причому початкова ордината не зберігає свого значення. При зміні параметра b, пряма $y = b$ переміщується рівнобіжно самій собі; при значенню параметра $b = 0$ рівняння прямої $y = kx + b$ не

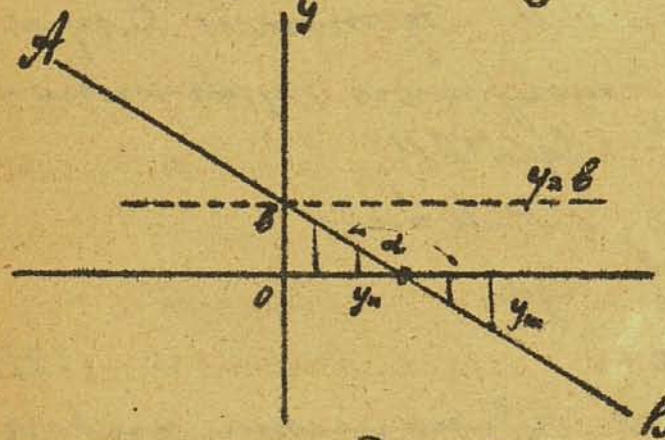


Рис. 26.

перейде в $y = Kx$ ..... (19)
і це буде рівняння прямої, яка проходить через точку O й нахилена до осі ox під кутом α, tg якого $= K$.

§13. Покажемо тепер, що кожне рівняння першого ступеня відносно x, y.

$$Ax + By + C = 0$$

буде рівнянням простої лінії. Определимо з цього рівняння y.

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Найдемо тепер такий кут α, щоб $tg\alpha$ був $= -\frac{A}{B}$, це завжди можна зробити, бо tg може мати значення від $+\infty$ до $-\infty$. Проведемо тепер пряму, яка б відтинала на осі y відрізок $= -\frac{C}{B}$, і була нахилена до вісі x під кутом α, так що $tg\alpha = -\frac{A}{B}$; рівняння цієї простої згідно попереднього §12 буде

(20)..... $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, або

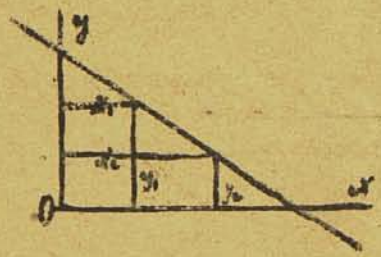
$Ax + By + C = 0$; себ-то якраз таке рівняння, яке ми взяли спочатку; тому загальне рівняння $Ax + By + C = 0$ є рівнянням простої

Для будування простої, даної рівнянням, досить знайти лише дві точки, які належать до простої, а для цього беремо одні координати, напр. x довільні і вираховуємо відповідні координати y, після чого можна вже побудувати ці дві точки і через них провести пряму. За довільні точки часто вибирають точки перетину простої з осями координат, себ-то беруть спочатку $x=0$ і вираховують з рівняння відповідне y, а потім беруть $y=0$ і вираховують x.

Приклад. $x + y = 8$; при $x=0$; $y=8$

при $y=0$ $x=8$; $y = -x + 8$

$tg\alpha = -1$; $\alpha = 90° + 45°$



Можна й так $x_1 = 2$. Тоді $y_1 = 8-2 = 6$

$x_2 = 6$, $y_2 = 8-6 = 2$

$A_1(2,6)$; $A_2(6,2)$.

Задачі. 1) Яке положення простої відносно осей координат, коли в її рівнянні коефіцієнт $A=0$, себ то коли рівняння простої буде $By + C = 0$?

Відповідь. $y=-\frac{C}{B}$; пряма ніде рівнобіжно осі x.

2) Яке положення прямої коли $B=0$;

$Ax+C=0$; $x=-\frac{C}{A}$; пряма ніде $\parallel$ осі $y'x$

3) Коли $C=0$. $Ax+By=0$; $y=-\frac{A}{B}x$. $k=-\frac{A}{B}$; $y=kx$. Пряма проходить через початок координат.

§14. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і через дану точку A.

Нехай координати даної точки будуть x' і y'

Рівняння прямої (19), що проходить через O

$$y=kx$$

Цим рівнянням при незталеному k означаються всякі прямі, які проходять через початкову точку O; пряма m, яка пройде через дану точку A, очевидячки, мусить мати цілком означене k, яке залежить від координат (x', y') точки A. Рівняння $y=kx$, задовольняючись всякими y і x, задовольняється також координатами x', y', себто мусить бути така тотожність:

$$y'=kx'$$

З останнього рівенства находимо значіння

$$k=\frac{y'}{x'}$$

Вставивши знайдене значіння в рівняння (19), знайдемо вид рівняння, яке звязує координати всіх точок прямої, що проходить через O і A

$$y=\frac{y'}{x'}\cdot x, \text{ або}$$

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Приклад. Скласти рівняння прямої, яка проходить через O і $A(5,2)$.

$x' = 5;\ y' = 2$

Рівняння $\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$; або $2x - 5y = 0$

або $y = \frac{2}{5}x$; тут $k = \frac{2}{5}$.

§15. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дану точку $A(x', y')$

Загальне рівняння прямої (18)

$$y = kx + b$$

Коли ця пряма проходить через точку $A(x', y')$, то координати $x'\ y'$ обертають рівняння (18) в тотожність

$$y' = kx' + b.$$

в цих двох рівняннях параметри k і b не определені; при чому один параметр можна вважати вибраним довільно, але незмінним, а другий параметр k може змінюватись доки пряма не попаде на точку A. Коли ми рівняння другe відніємо від першого, тоді будемо мати

$$y - y' = k(x - x') \ldots\ldots\ldots (22)$$

Останнє рівняння і є рівнянням прямої, яка проходить через точку A, бо координати цієї точки обертають рівняння в тотожність: $y' - y' = k(x' - x')$ $0 = к.о.$ Кутовий коефіцієнт k може не є величиною определеною, а може бути довільним, бо, дійсно, через одну точку можна провести пряму в довільному напрямкові.

§16. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $A(x', y')$ і $B(x'', y'')$.

Рівняння прямої, що проходить через дану точку A, напишеться згідно попереднього § так:

$$y - y' = k(x - x') \quad \ldots\ldots (22)$$

Коли ця пряма проходить і через другу точку, то координати її мусять задовольняти рівнанню (22) і обернати його в тотожність себ-то будемо мати

$$(y'' - y') = k(x'' - x') \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

в останньому рівнанню є невідомим показник з рівенства (23) $k = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$; основавши це значіння k в загальне рівнання (22), будемо мати

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$$

або $\frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{x - x'}{x'' - x'} \quad \ldots\ldots\ldots (24)$

Приклад. Скласти рівнання простої, яка проходить через точку $A(-5, -4)$ і $B(7, 3)$.

$x' = -5$; $x'' = 7$

$y' = -4$; $y'' = 3$.

Рівнання простої буде $\frac{y+4}{3+4} = \frac{x+5}{7+5}$

$\frac{y+4}{7} = \frac{x+5}{12}$; $y = \frac{7}{12}(x+5) - 4$

$$y = \frac{7}{12}x - 1\frac{1}{12}$$

§17. Задача. При якій умові при даних точки $A(x'y')$, $B(x_2 y_2)$, $C(x_3 y_3)$ лежать на одній прямій?

Рівнання простої, яка проходить через A; B буде, згідно попереднього §

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

Коли третя точка $(x_3 y_3)$ лежить на цій прямій, тоді координати її, вставлені в рівнання (24), перетворять його в тотожність

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

цій рівності можна надати такий вигляд

.....(25) $y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)=0$

Отже лише при умові, що координати 3-х даних точок задовольняють рівняння (25), пряма проходить через ці три точки.

§18. Рівняння прямої на осях координат.

Нехай дана нам пряма перетинає вісь абсцис в точці A (рис. 27), а вісь ординат в точці B.

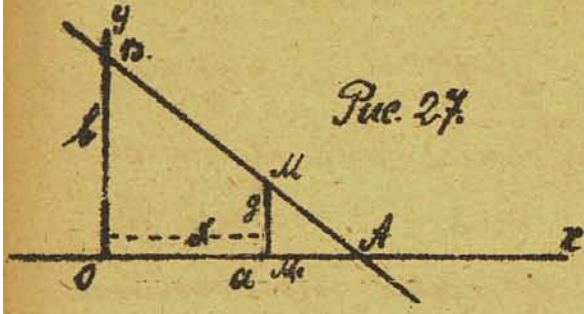


Рис. 27.

$OA=a$, $OB=b$.

Візьмемо на прямій AB довільну точку $M(x,y)$. Тоді з подібних трикутників MM_1A і BOA напишемо $\frac{MM_1}{BO}=\frac{M_1A}{OA}$; $\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}$; звідси

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

це і є рівняння прямої в відрізках. Взяте рівняння прямої загального вигляду

$$Ax+By+C=0,$$

коли C не $=0$; можна привести до вигляду (26). Для цього поділимо загальне рівняння на $-C$, будемо мати

$$\frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y-1=0, \text{ або}$$

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Коли ми далі $-\frac{C}{A}$ назвемо через a, $-\frac{C}{B}$ через b, тоді попереднє рівняння перейде в $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Приклад. $3x-2y+6=0$; тут $A=+3$; $B=-2$; $C=+6$.

по (27,) $\frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1$, або $\frac{x}{\frac{-6}{3}}+\frac{y}{\frac{-6}{-2}}=1$.

або $-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

а вийшло $= -2$; $b = 3$.

§19. Нормальне рівняння прямої.

Положення прямої в прямокутній системі координат цілком визначається, коли відомі: а) довжина перпендикуляра з початку координат на пряму і б) кут, під яким перпендикуляр нахилений до осі X.

Нехай маємо пряму KL (рис. 28), яка перетинає вісь X в точці A і вісь Y в точці B.

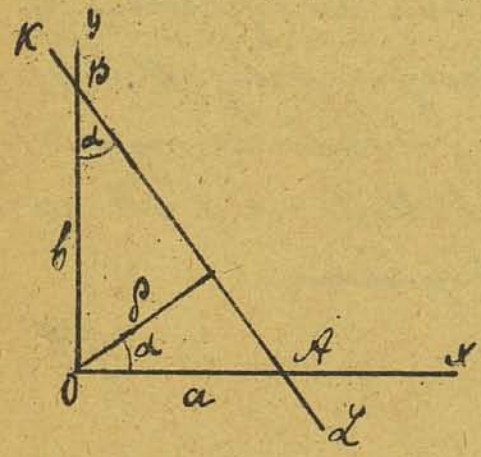


Рис. 28.

Довжина перпендикуляра або нормалі на цю пряму $OP = p$; кут $AOP = \alpha$, кут $OBP =$ також α.

Напишемо рівняння прямої в відтинках її на осях координат:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

із $\triangle AOP$ можна написати $a = \frac{p}{\cos\alpha}$,

із $\triangle BOP$ " " $b = \frac{p}{\sin\alpha}$

Вставимо в рівняння прямої замість a і b їх значіння, тоді будемо мати

$$\frac{x\cos\alpha}{p} + \frac{y\sin\alpha}{p} = 1$$

звідки $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \ldots\ldots (28)$

Це рівняння має характер загальний, воно справедливе для кожного положення прямої і називається нормальним рівнянням прямої.

В нормальному рівнянню прямої, як бачимо, коефіцієнти при x і y менше одиниці

$(\cos\alpha, \sin\alpha)$ і сума квадратів коеф. $= 1$. $(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1)$.

Рівняння прямої загального виду

$$Ax + By + C = 0.$$

Виникає питання, чи можна це рівняння перетворити в нормальне?

Помножимо всі члени загального рівняння на такий множник m, щоб нові коеф. при x і y були менші одиниці, а сума квадратів їх була б рівна одиниці

$$mAx + mBy + mC = 0$$

$$mA = \cos\alpha;\ mB = \sin\alpha;\ mC = \delta$$

$$(m^2A^2 + m^2B^2) = 1.$$

відсіля $m^2(A^2 + B^2) = 1.$

$$m = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$$

Таким чином, виходить, що $\cos\alpha = mA = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$\sin\alpha = mB = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; $-\delta = mC = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Виникає тепер питання, який знак треба брати перед $\sqrt{A^2 + B^2}$? Довжина проекції δ є величина позитивна, тому $-\delta$ буде негативним, для того, щоб вираз $\pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ був негативним, необхідно, щоб перед $\sqrt{}$ стояв знак, протилежний знаку при C.

Після цього рівняння прямої з загального виду перейде в таке нормальне рівняння

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

Приклад. $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 = 0$; коеф. $4/5 \cdot 3/5 < 1$.

$$(4/5)^2 + (3/5)^2 = \frac{16 + 9}{25} = 1.$$

Отже $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 = 0$ є

Рівняння нормальне; $2x+y-3=0$; - не нормальне.

§20. Знаходження кута між двома прямими, які дані своїми рівняннями.

Нехай дві прямі AB і A_1B_1 дані рівняннями

$y = kx + b$; $y = k_1x + b_1$;

ми знаємо, що k це $tg\alpha$, а k_1 — $tg\alpha_1$

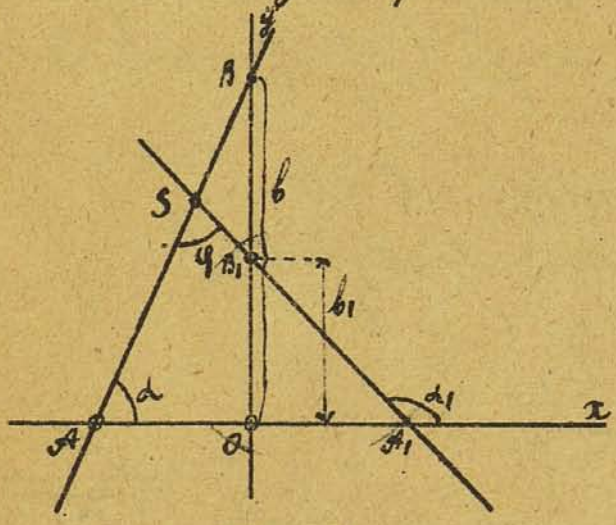


Рис. 29.

Із геометричного образу (рис. 29) видно, що $\varphi = \alpha_1 - \alpha$ ... (3)

Коли ми знаємо $tg\alpha$ і $tg\alpha_1$, то можемо знайти α і α_1, а тоді із рівності (30) і кут φ, але можна також определити спочатку не самий кут φ, а його tg; із рівності (30) бачимо, що

$$tg\,\varphi = tg(\alpha_1 - \alpha);$$ а

$$tg(\alpha_1 - \alpha) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha_1\, tg\alpha};$$ вставляючи сю-

ди вміто $tg\alpha_1$ його значіння k_1, а вміто $tg\alpha$ — k, будемо мати

$$tg\,\varphi = \frac{k_1 - k}{1 + kk_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Коли рівняння прямих маємо в загальній формі $Ax + By + C = 0$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

тоді для розрішення нашої задачи треба спочатку найти кутові їх сочинники (коеф) $m = -\frac{A}{B}$; $m' = \frac{A_1}{B_1}$ і вставити їх у вір (31); тоді будемо мати:

$$tg\varphi = \frac{-\frac{A_1}{B_1} + \frac{A}{B}}{1 + \frac{AA_1}{BB_1}} = \frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1} \quad \ldots\ldots (32)$$

Приклад а) Найти кут між двома прямими.

$x - 3y + 3 = 0$; $6x - 3y + 2 = 0$; $y = \frac{1}{3}x + 1$; $y = 2x + \frac{2}{3}$.

$k = \frac{1}{3}$; $k_1 = 2$. $tg\varphi = \frac{k_1 - k}{1 + kk_1} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1$. $\varphi = 45°$

Умови рівнобіжності ліній.

Коли дві простих рівнобіжні, тоді кут між ними є рівний нулю: $\varphi = 0$ і $tg\varphi = 0$, а тому у взорі (31) $k = k'$ . . . . . (33)

а б (32) $AB_1 = A_1B$, або $\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}$.

Таким чином, для рівнобіжности двох ліній, необхідно, щоб або кутові сочинники були однакові, або при загальній формі рівнання, щоб відношення коеф. при x і y в обох рівняннях були однакові.

Приклади. $y = 5x - 2$; $y = 5x + 7$. Лінії – рівнобіжні.

$2x + 3y + 4 = 0$. $5x + 7{,}5y + 1 = 0$. Проєкції – рівнобіжні, бо $\frac{2}{3} = \frac{5}{7{,}5}$

Умова простопадности. Коли дві проєкції простопадні, тоді кут між ними $\varphi = 90°$; а $tg\varphi = \infty$, для взору (31) це можливо тоді, коли $1 + kk_1 = 0$, себ-то $k_1 = -\frac{1}{k}$ . . . . . (34)

Взір (34) показує, що для простопадности двох ліній необхідно, щоб кутовий сочинник однієї простої був оберненим сочинником другої простої й мав протилежний знак.

$$y = kx + b; \quad y = -\frac{1}{k}x + b,$$

приклад. $\left.\begin{matrix} y = 5x - 2 \\ y = -\frac{1}{5}x + 7 \end{matrix}\right\}$ проєкції простопадні.

Для рівнання даного в загальній формі,

$$Ax + By + C = 0$$

умова протилежності дасть рівняння

$$y = \frac{B}{A}x - \frac{C}{B}, \text{ або}$$

$$Bx - Ay + C' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Приклад. $\left.\begin{aligned} 2x + 3y + 7 &= 0 \\ 3x - 2y + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$ прості - протилежні.

Як що протилеж лисить ще пройти через дану точку $M(x_1, y_1)$, тоді її координати мусять задовольняти рівняння (35) і дати рівність

$$Bx_1 - Ay_1 + C' = 0$$

Виключивши з останнього C', і вставивши його в (35) будемо мати рівняння

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

§ 21. Найти відстань від даної точки $M(x_1, y_1$ від даної простої AB. (рис 30).

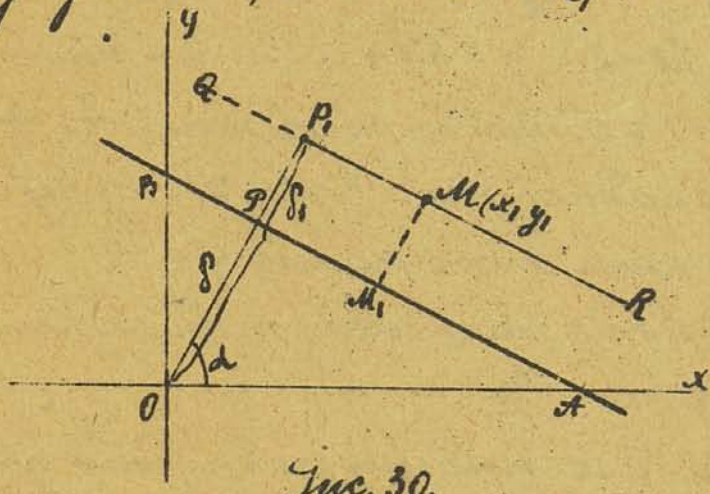


Рис. 30.

Візьмемо рівняння простої нормального виду

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Проведемо через дану точку $M(x_1, y_1)$ допоміжну пряму QR, рівнобіжну AB.

Рівняння цієї простої буде відрізнятися від рівняння AB лише числом p і буде

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0.$$

Відстань $MM_1 = p_1 - p = d$.

Коли дано рівняння AB, тоді p є відомо, для определення p_1 необхідно в рівняння простої QR вставити координати точки $M(x_1, y_1)$, тоді б

цьому рівнанню буде невідомим лише S_1, яке й знайдемо.

тоді $d = S_1 - S = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - S$.

Коли точка M лежить по другий бік простої AB, тоді $d = S - S_1 = -(x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - S)$.

$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - S$ в загальній формі виражається так:

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = d$$

Тому можна дати таке правило: Для нахождения віддалення точки $M(x_1, y_1)$ від простої необхідно рівнання простої привести до нормального виду, вставити в него координати даної точки, тоді перша частина рівнання дасть по абсолютній величині значіння для віддалення. Для точок по один бік простої віддалення будуть зі знаком +; для точок по другий бік простої зі знаком −.

Значіння для віддалення можна знайти і з инших рівнань, а саме з рівнання

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

і $y = kx + b$.

Для цього звернемось знову до нормального рівнання $x \cos\alpha + y \sin\alpha - S = 0$.

$\cos\alpha = \frac{S}{a}$; $\sin\alpha = \frac{S}{b}$; $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

$\frac{S^2}{a^2} + \frac{S^2}{b^2} = 1$; $S^2(a^2+b^2) = a^2b^2$; $S = \frac{ab}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

вставимо в нормальне рівнання значіння $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ і S

$$\frac{xS}{a} + \frac{yS}{b} - S = 0.$$

$$d = S\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} - 1\right), \text{ або } \frac{ab}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} - 1\right)$$

S є величина позітивна тому $\frac{ab}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ мусить бути зі знаком +

Приклад. $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} - 1 = 0$. Найти віддалення від

точки $M(3,4)$

$$d = \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$$

$$d = \frac{5\cdot-2}{-\sqrt{5^2+2^2}}\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{2}-1\right) = \frac{-10}{-\sqrt{29}}(-2{,}4) = -\frac{24}{\sqrt{29}}$$

Возьмемо тепер рівняння $d = p\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}-1\right)$ і напишемо його в такому вигляді

$$d = \frac{c}{b}\left(y_1 + \frac{b}{a}x_1 - b\right)$$

$$d = \frac{ab}{b\sqrt{a^2+b^2}}\left(y_1 - kx_1 - b\right), \text{ де } k = -\frac{b}{a}.$$

$$d = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\left(y_1 - kx_1 - b\right)$$

$$d = \frac{y_1 - kx_1 - b}{\pm\sqrt{1+k^2}}$$ *)

Отже для відалення d маємо такі взори при координатах точки $M(x_1, y_1)$.

1) Коли пряма задана рівнянням в нормальній формі

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p$$

2) Коли пряма задана рівнянням загального виду $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

3) Коли пряма задана рівнянням в відтинках на осях

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1.$$

$$d = \frac{ab}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}-1\right)$$

4) Коли пряма задана рівнянням з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b$$

$$d = \frac{y_1 - kx_1 - b}{\pm\sqrt{1+k^2}}$$

*) Знак +, або − залежить від знаку при b.

§22. Візьмемо рівняння в загальній формі

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Нехай точка перетину цих прямих буде $M(x_0, y_0)$; тоді

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \text{ і } A_2x_0 + B_2y_0 + C_1 = 0$$

Напишемо рівняння

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

Це рівняння є перш за все рівнянням прямої, бо воно є рівнянням першого ступеня, відносно бігучих координат x і y; крім того, воно задовольняється координатами x_0 і y_0, а тому пряма проходить через точку M. Сочинник λ залишається вільним, бо через точку M можна провести безліч прямих. Коли ми накладаємо для прямої, що проходить через M, ще будь-яку одну умову, тоді λ визначиться з тієї умови.

Наведемо це приклади. Нехай пряма, що проходить через точку перетину даних прямих, мусить бути ще рівнобіжною до осі x. Рівняння осі x', в $\in$, як знаємо, $y=0$, себто в ньому кутовий сочинник $K(y = kx+b)=0$. Для рівнобіжности прямих необхідно, щоб кутові сочинники рівнянь були однакові. Находимо з загального рівняння кутовий сочинник

$$(A_1+\lambda A_2)x + (B_1+\lambda B_2)y + C_1 + C_2 = 0$$

$$y = -\frac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}x + \frac{C_1+C_2}{B_1+\lambda B_2}$$; кутовий сочинник $K = -\frac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}$; він мусить, згідно попереднього, бути $= 0$. $-\frac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2} = 0$; Для

рого чисельник $A_1+\lambda A_2$ повинен рівнятися 0; а відси $\lambda = -\frac{A_1}{A_2}$

Задача. Дані дві прості:

1) $2x+3y+4=0$

2) $x+y+3=0$.

Через точку перетину їх провести третю просту, рівнобіжну осі x'ів

$$2x+3y+4+\lambda(x+y+3)=0$$

$$\lambda = -\frac{A_1}{A_2} = -\frac{2}{1} = -2.$$

Рівнання $2x+3y+4-2x-2y-6=0$

$$y-2=0; \quad \underline{y=2}$$

Точка перетину має координати, як легко вивести, $x=-5$; $y=2$.

а наша проста дійсно пройшла через точку перетину й рівнобіжна осі x'ів на відаленню $y=2$

Нехай тепер наша проста мусить бути рівнобіжною осі y'ів; рівнання осі y'ів є $x=0$, а рівнання простої, рівнобіжної до осі y, $x=b$. В нашому рівнанню так треба підобрати λ, щоб сочинник при y обернувся в 0, себ-то, щоб було $B_1+\lambda B_2=0$; відси $\lambda = -\frac{B_1}{B_2}$

Задача. Дані дві прості: $2x+3y+4=0$ і $x+y+3=0$. Через точку перетину їх провести просту, рівнобіжну осі y'ів; $\lambda = -\frac{3}{1} = -3$.

$2x+3y+4-3x-3y-9=0$; $-x-5=0$; $\underline{x=-5}$

Для того, щоб проста була рівнобіжна третій простій $A_3x+B_3y+C_3=0$, необхідно, щоб сочинники при x і y були пропорційні, або щоб купові сочинники були рівні, себ то мусить $\frac{A_1+\lambda A_2}{A_3} = \frac{B_1+\lambda B_2}{B_3}$, або

$-\frac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}=-\frac{A_3}{B_3}$, що зводиться до першого.

Для того т, щоб пряма пройшла через точку M і була протилежна третій прямій, необхідно, щоб кутовий сочинник однієї прямої був відворотним кутовому сочиннику другої прямої й був з відворотним знаком, себто необхідно, щоб $-\frac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}=\frac{B_3}{A_3}$.

Приклад. Через точку перетину прямих

$$2x+3y+4=0 \text{ і } x+y+3=0$$

провести пряму, рівнобіжну прямій

$$2x-5y+1=0$$

$$2x+3y+4+\lambda(x+y+3)=0$$

$$(2+\lambda)x+(3+\lambda)y+4+3\lambda=0$$

$$y=-\frac{2+\lambda}{3+\lambda}x-\frac{4+3\lambda}{3+\lambda}.$$

В третій прямій $y=\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}$.

Для рівнобіжности необхідно, щоб

$$-\frac{2+\lambda}{3+\lambda}=\frac{2}{5}$$

відсіля $-10-5\lambda=6+2\lambda$;

$$7\lambda=-16;\ \lambda=\frac{16}{7}$$

Рівнання $(2-\frac{16}{7})x+(3-\frac{16}{7})y+4-\frac{48}{7}=0$

$$-\frac{2}{7}x+\frac{5}{7}y+\frac{20}{7}=0.$$

$$2x-5y+20=0.$$

Для простопадности необхідно, щоб було

$$\frac{3+\lambda}{2+\lambda}=\frac{2}{5};$$

відсіля $15+5\lambda=4+2\lambda$; $3\lambda=-11$; $\lambda=-\frac{11}{3}$

Рівнання буде $5x+2y+22=0$

§23. Означимо тепер, для скорочення, рівнання $A_1x+B_1y+C_1=0$ через $F_1=0$; рівнання $A_2x+B_2y+C_2=0$ через $F_2=0$. Тоді можна на-

писати $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = F_3 = 0$.

Прості $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ і $F_3 = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ перетинаються в одній точці.

Навпаки, рівняння кожної простої $F_3 = 0$, що проходить через точку перетину двох простих $F_1 = 0$ і $F_2 = 0$, можна виявити в формі $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$.

Для того, щоб це довести, візьмемо на третій простій $F_3 = 0$ будь яку точку (ξ, η) і вставимо координати її в рівняння F_1 і F_2; значіння $F_1(\xi, \eta)$ і $F_2(\xi, \eta)$ не будуть $= 0$, але, маючи вільні λ_1 і λ_2, можемо так їх підобрати, щоб

$$\lambda_1 F_1(\xi, \eta) + \lambda_2 F_2(\xi, \eta) \text{ було } = 0.$$

Коли тепер помножити рівняння F_1 на λ_1, а рівняння F_2 на λ_2 і обидві нові функції скласти й прирівняти нулю, тоді будемо мати рівняння, яке перетворюється в тотожність при значіннях координат точки перетину, а також при координатах ξ і η, а тому рівняння $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ буде рівнянням простої, яка заміняє рівняння $F_3 = 0$ і показує, що три прості $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ і $F_3 = 0$ перетинаються в одній точці.

Коли $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ і $F_3 = 0$ — рівняння таких трьох простих, які перетинаються в одній точці, то завжди можна підобрати такі λ_1 і λ_2, щоб $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F = 0$ цілком совпадало з $F_3 = 0$, або з F_3, помноженим на якийсь множник λ_3, або $-\lambda_3$; при множнику $-\lambda_3$ будемо мати

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = -\lambda_3 F_3, \text{ або}$$

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0.$$

Отже, коли $F_1=0$, $F_2=0$ і $F_3=0$ — рівняння трьох простих, які перетинаються в одній точці, то завжди можна підібрати так λ_1, λ_2 і λ_3, щоб

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0.$$

Коли ж, навпаки, рівняння трьох простих такі, що вони складені вліві (без помноження їх чи з попереднім помноженням на довільні сталі сумішки) дають тотожність, тоді ці прості перетинаються в одній точці.

Дійсно, коли маємо, що $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 \equiv 0$, де знак $\equiv$ означає тотожність, тоді при координатах (x_1, y_1) точки зустрічі двох перших простих, функції $\lambda_1 F_1(x_1 y_1)$ і $\lambda_2 F_2(x_1 y_1)$ будуть $=0$, а через це й $\lambda_3 F_3(x_1 y_1)$ буде рівне 0, себто координати (x_1, y_1) задовольнять рівняння й третьої простої. Правило це має силу й на випадок зустрічі кривих ліній. Коли маємо рівняння кривих $S_1=0$ і $S_2=0$, то рівняння $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = -\lambda_3 S_3$ буде рівнянням третьої кривої, яка проходить через точку перетину двох перших кривих; в цьому випадкові маємо $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 \equiv 0$.

Приклад 1. Показати, що прості

$$a)\ 3x - 4y + 6 = 0;\quad b)\ \tfrac{1}{2}x = 1;\quad c)\ y = 2x - 1.$$

мають спільну точку перетину.-

Із рівняння другого маємо, що $x=2$; вставивши це значіння x в рівняння 3-є, знайдемо, що $y=3$; отже точка зустрічі простих b) і c) має абсцісу 2, а ординату 3; ці координати задовольняють і рівнанню a), а тому перша проста проходить через точку перетину простих b), c).

До цього ж висновку можна прийти на підставі виведеного нами вище правила, розглянувши суму всіх трьох рівнянь.

Напишемо $\lambda_1(3x-4y+6)+\lambda_2(x-2)+\lambda_3(y-2x+1)=0$ відсіля $(3\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3)x+(\lambda_3-4\lambda_1)y+(6\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3)=0$. Для того, щоб це рівняння стало тотожністю при кожному значінню координат x і y, необхідно, щоб сочинники при x, y і вільний член рівнялися 0; себто, щоб було: $3\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3=0$; $\lambda_3-4\lambda_1=0$ і $6\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3=0$. Ці рівняння задовольняються при всяких значінях λ_1, коли $\lambda_2=5\lambda_1$ і $\lambda_3=4\lambda_1$ і сума трьох рівнянь при цих значінях λ робиться тотожно рівною 0; це показує, що прості перетинаються в одній точці.

Приклад 2. Показати, що простопаді, поставлені в серединах боків трикутника, перетинаються в одній точці.

Возьмемо в прямокутному укладі координат трикутник ABC (рис. 31); координати вершків цього трикутника x_1, y_1; x_2, y_2 і x_3, y_3; поставимо простопади в точках D, E, F.

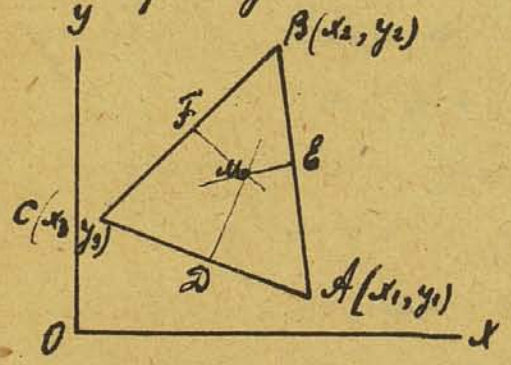


Рис. 31.

Ці простопади можна розглядати як геометричні місця точок, рівновідданих від вершків трикутника, і відповідно цьому написати рівняння. Возьмемо будь яку точку M на простопаді, поставленому в D, нехай координати цієї точки бу-

дуть (x, y); тоді відалення $CM = \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}$, а відалення $AM = CM = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$;

відсіля $(x-x_3)^2+(y-y_3)^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2$; або

$$F_1 = 2(x_3-x_1)x + 2(y_3-y_1)y + x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 = 0$$

це є рівнання простої.

Для простопада EM напишемо по анальогії

$$F_2 = 2(x_1-x_2)x + 2(y_1-y_2)y + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = 0$$

Для простопада FM

$$F_3 = 2(x_2-x_3)x + 2(y_2-y_3)y + x_3^2 - x_2^2 + y_3^2 - y_2^2 = 0$$

Коли скласти ці три рівнання, то вони дають тотожність

$$F_1 + F_2 + F_3 \equiv 0, \text{ а}$$

тому всі три простопади перетинаються в одній точці.-

§24. Задачі на геометричні місця

Під геометричним місцем точки розуміється така лінія, або поверхня, всі точки якої, без виключення, підлягають одному й тому ж певному закону.

При допомозі методів аналітичної геометрії геометричні місця точок можна визначити рівнаннями, як це покажемо на прикладах.

Приклад 1. В трикутнику ABC (рис. 32) дана основа AB і сума S двох других боків. Найти геометричне місце точки, яка лежить на висоті трикутника на відаленню від основи, рівному одному з боків трикутника.

Нехай маємо, що основа $AB = c$; $AC + CB = S$. $DP = CB$. Для другого $\Delta ABC'$; $AC' + C'B = S$; $DP' = BC'$.

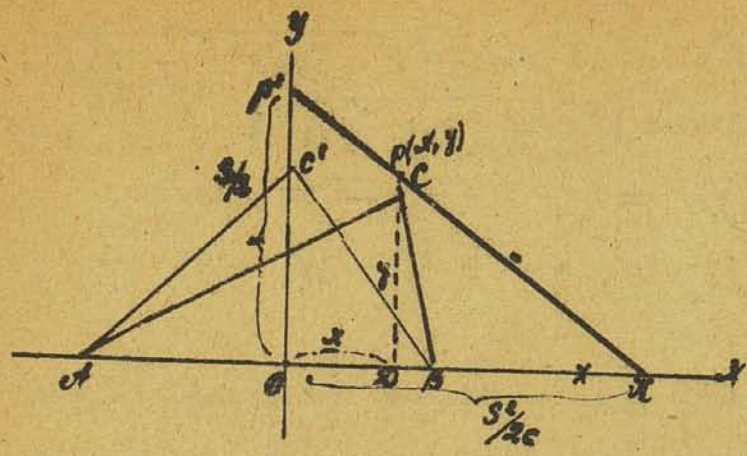


Рис. 32.

Необхідно знайти геометричне місце точок P.

Візьмемо такий уклад координат, щоб вісь x'ів пішла по продовженню AB, а вісь y'ів перпендикулярно до AB, через середину AB; тоді $OD = x$; $DP = BC = y$. $AC = S - y$; $DC^2 = (S-y)^2 - (\frac{c}{2}+x)^2$, а також

$$DC^2 = y^2 - (\frac{c}{2} - x)^2.$$

Відсіля $(S-y)^2 - (\frac{c}{2}+x)^2 = y^2 - (\frac{c}{2}-x)^2$;

після розкриття дужок будемо мати

$$cx + Sy = \frac{S^2}{2},$$

або

$$\frac{x}{(\frac{S^2}{2c})} + \frac{y}{(\frac{S}{2})} = 1,$$

а це рівняння є рівняння прямої, яка відтинає на осі x відтинок $a = \frac{S^2}{2c}$, а на осі y'ів відтинок $b = \frac{S}{2}$ і проведіть, як показано на рис. 32

Приклад 2. В трикутнику є даний кут при вершині й сума двох боків при даному куті. Необхідно знайти геометричне місце точок, які поділяють основу в даному відношенню.

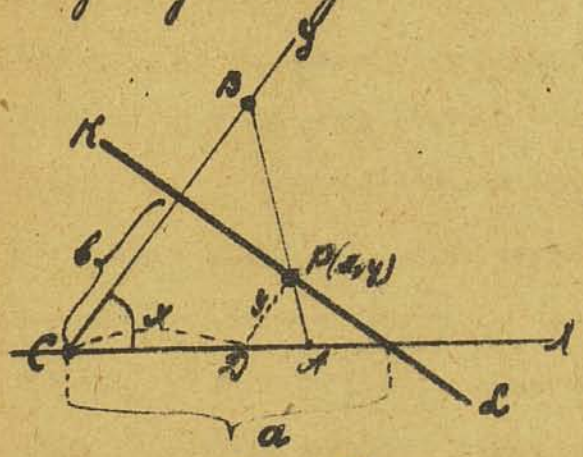


Рис. 33.

В трикутнику ACB дано: кут C і сума (рис. 33) $AC + BC = S$; основа AB поділяється точкою P(x, y) в відношенню $AP : PB = \lambda_1 : \lambda_2$.

Візьмемо косокутній уклад координат з осі-

ми cx, cy; тоді x точки p буде $= cD$, а $y = pD$.
З огляду на те, що $pD \parallel BC$, можемо написати:

$$CD : DA = \lambda_2 : \lambda_1$$

$$CB : pD = (\lambda_1 + \lambda_2) : \lambda_1 ;$$

коли назвати cA через ξ, тоді буде:

$$x : (\xi - x) = \lambda_2 : \lambda_1$$

$$(S - \xi) : y = (\lambda_1 + \lambda_2) : \lambda_1 .$$

Находимо з першого рівняння $\xi = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} \cdot x$ і вставивши його в рівняння друге

$$\left(S - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} x\right) : y = (\lambda_1 + \lambda_2) : \lambda_1 ;$$

відсіля $\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)y = S\lambda_1\lambda_2$;
розділивши все на $S\lambda_1\lambda_2$, будемо мати:

$$\frac{x}{\left(\frac{S\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{S\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)} = 1,$$

це є рівняння простої Kl з відтинками на осях $a = \frac{S\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ і $b = \frac{S\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

§25. Вістрякові перерізи.

Коли проста лінія AB (рис. 34) перетинає другу просту CD в точці S і так обертається навколо точки S, що кінцева точка лінії AB, напр. B, залишається завжди на однаковому від CD відданенню, тоді ця проста AB опише поверхню вістряка обертання, який має дві частини – верхню й нижню, що стикаються вершками в точці S.
Лінія CD називається віссю вістряка, а лінія AB – творчою лінією вістряка, кут між цими двома лініями означимо літерою φ.
Коли такий подвійний вістряк перерізати будь-якою площею, тоді повстануть пере-

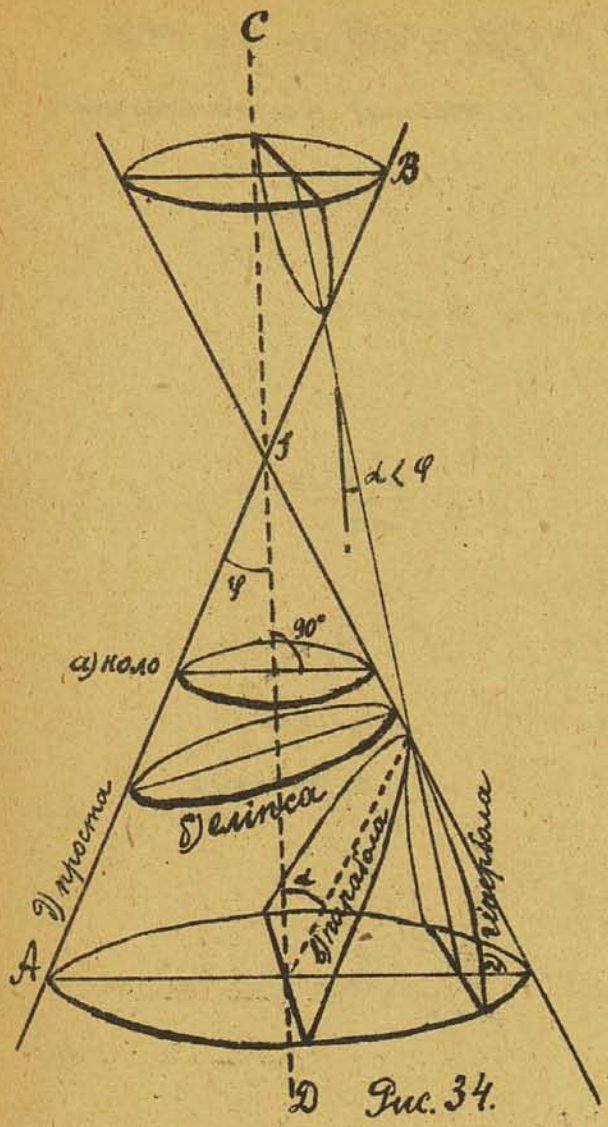


Рис. 34.

ні, в залежності від напрямку площі, фігури перерізу, а саме:

а) Площа перерізає вісь вістряка CD під кутом $\alpha = 90°$, фігурою перерізу буде коло.

б) Площа перерізає вістряк так, що гострий кут $\alpha > \varphi$; фігурою перерізу буде еліпса.

в) Площа перерізає вістряк так, що $\alpha = \varphi$, себто йде рівнобіжно твірній вістряка; фігурою перерізу буде парабола.

г) Площа перерізає вістряк так, що $\alpha < \varphi$, в цьому випадкові будуть розрізані обидві половини вістряка й фігурами перерізу буде гіпербола.

д) Коли, нарешті, площа перерізає вістряк так, що проходить через точку S, тоді фігурою перерізу буде пара простих, які перехрещуються в S.

Дамо тепер определення тих ліній, які повстали від перерізу вістряка площами різних напрямків.

а) Коло. Із самого засобу утворення вістряка видно, що коло є така крива, точки якої лежать на однаковому віддаленню від сталої осередкової точки.

б) Еліпса. Візьмемо вістряк обертання і розтнемо його по еліпсі (рис. 35) $M N$.

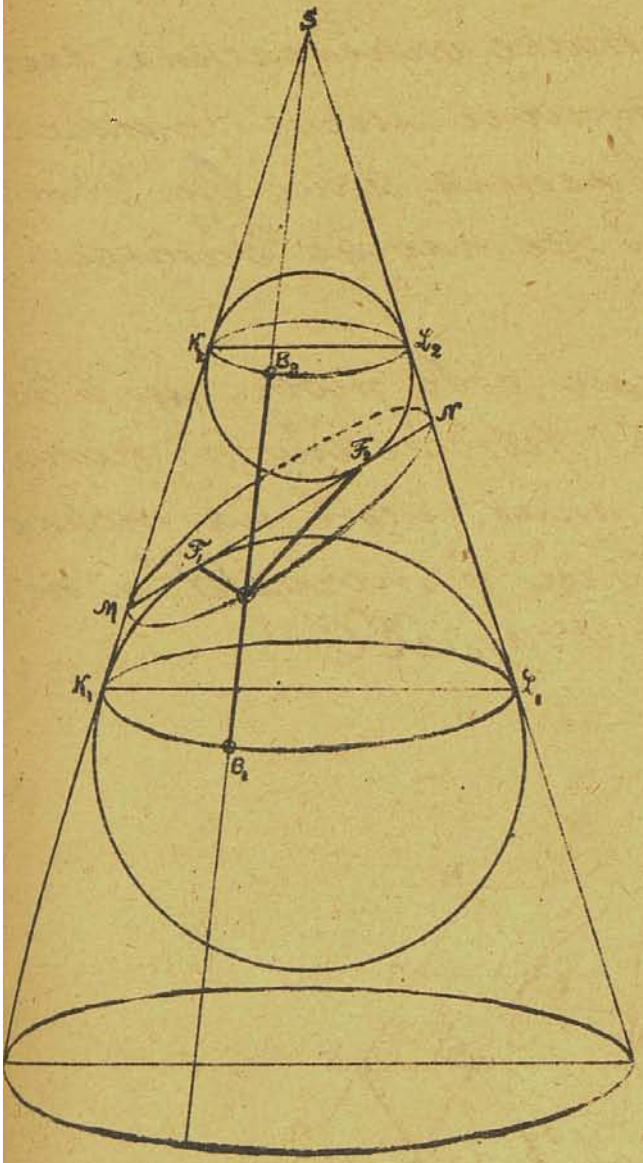


Рис. 35.

Уявимо собі тепер дві кулі таких розмірів і так вписаних у вістряк, щоб вони торкалися площі еліпси в точках F_1 та F_2, а поверхні вістряка по колах K_1L_1 і K_2L_2.

Візьмемо далі на еліпсі будь яку точку P і зєднаємо її з точками F_1 і F_2; проведемо через P і S творчу лінію; ця лінія перетне коло K_2L_2 в точці B_2, а коло K_1L_1 в точці B_1; кола K_1L_1 і K_2L_2 лежать в рівнобіжних площах, а тому $K_1K_2 = L_1L_2 = B_1B_2$ = сталій величині b.

Розглянемо тепер лінії, проведені з точки P.

PB_1 і PF_1 - це дотичні з точки P до даної кулі, а тому $PB_1 = PF_1$; PB_2 і PF_2 - це дотичні з точки P до другої, горішньої кулі, а через це $PB_2 = PF_2$.

Склавши ці два рівняння, будемо мати:

$PF_1 + PF_2 = PB_1 + PB_2 = B_1B_2 = b$

Коли б ми взяли іншу точку P_1, то також найшли б: $P_1F_1 + P_1F_2 = b$

Відсіля виходить таке определення еліпси: Еліпса є геометричне місце таких точок на площі, відалення яких від двох сталих точок в тій же площі дають сталу суму.

б) Парабола. Уявимо собі знову, що в даний бістряк (рис. 36), розсічений по параболі, вкладено кулю так, що вона торкається площі параболи в точці F, а поверхні бістряка по колу KC.

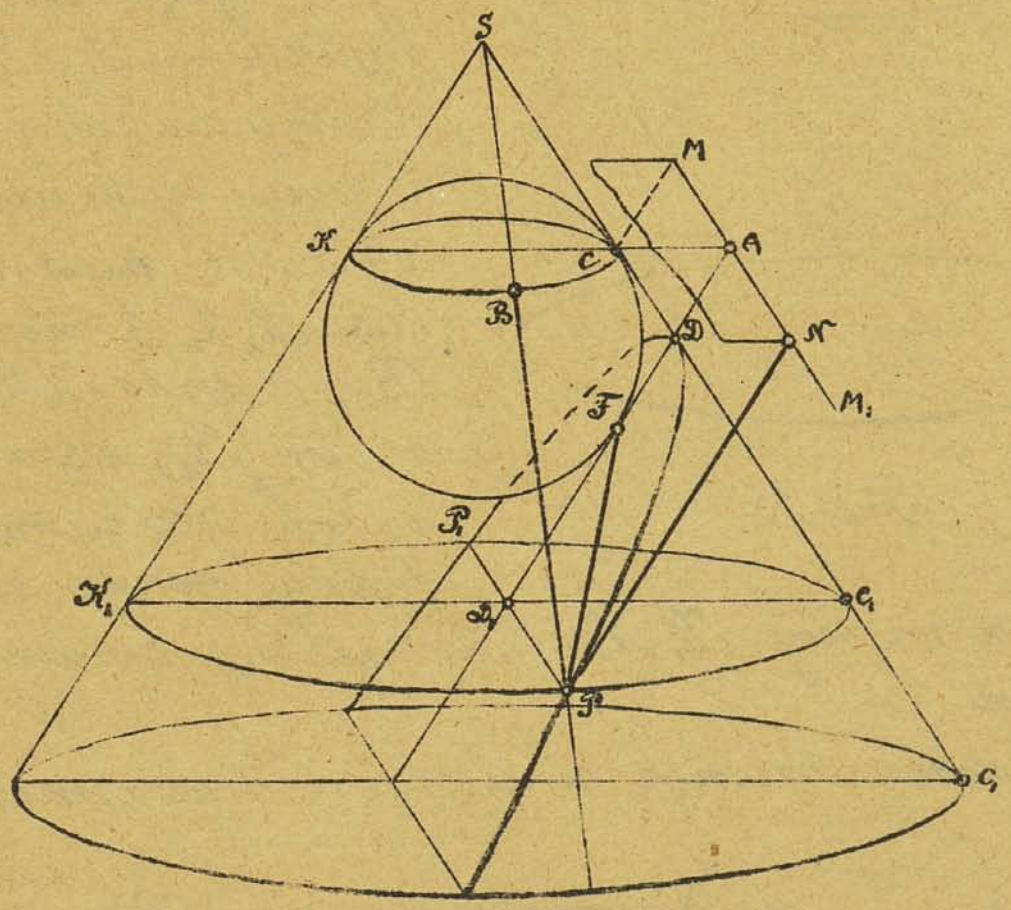


Рис. 36.

Візьмемо на параболі довільну точку P і проведемо через неї: 1) площу, нормальну ос

вістряка, яка перерізує вістряк по колу K_1C_1; 2) творчу PS, яка перетне коло KC в точці B і 3) пряму PF. Продовжимо площі, в яких лежать коло KC і парабола, до зустрічі їх по простій MM'; проведемо лінію D_1A, простопадну MM' і PP' їй рівнобіжну; остання лінія є відаленням точки P від лінії MM'.

Розглянемо далі трикутники CDA і C_1DD_1; в цих трикутниках кут $D_1=C_1$ і кут $C=A$, а тому $DD_1=DC_1$ і $AD=DC$; віднімя $D_1D+DA=CD+DC_1=CC_1$, а $CC_1=PB=KK_1$, себто $D_1A=CC_1=PB$, а також $D_1A=PP'$

Із точки P проведено у нас три прості: PF, PB і PP'; $PF=PB$, як дотичні з точки P до однієї кулі, а $PP'=PB$, а тому $PP'=PF$.

Такий же самий висновок можно зробити і для кожної іншої точки на параболі, а тому для параболи можна дати таке определення:

Парабола є геометричне місце таких точок на площі, які однаково відалені від сталої точки і сталої простої в тій же площі.

г) Гіпербола. Уявимо собі знову, як і при розгляді еліпси, що в обидва стіжки — горішній та долішній — вкладено кулі так, що вони торкаються поверхонь стіжків і поверхонь гіперболи. Означимо точки торкання куль з площами гіперболи через F_1 і F_2 (рис. 37), а ті кола, по яких

кулі торкаються поверхонь стіжків, означимо через K_1 і K_2.

Частини твірної лінії, які лежать між колами K_1 і K_2, напр. E_1E_2, мають довжину $= 2a$.

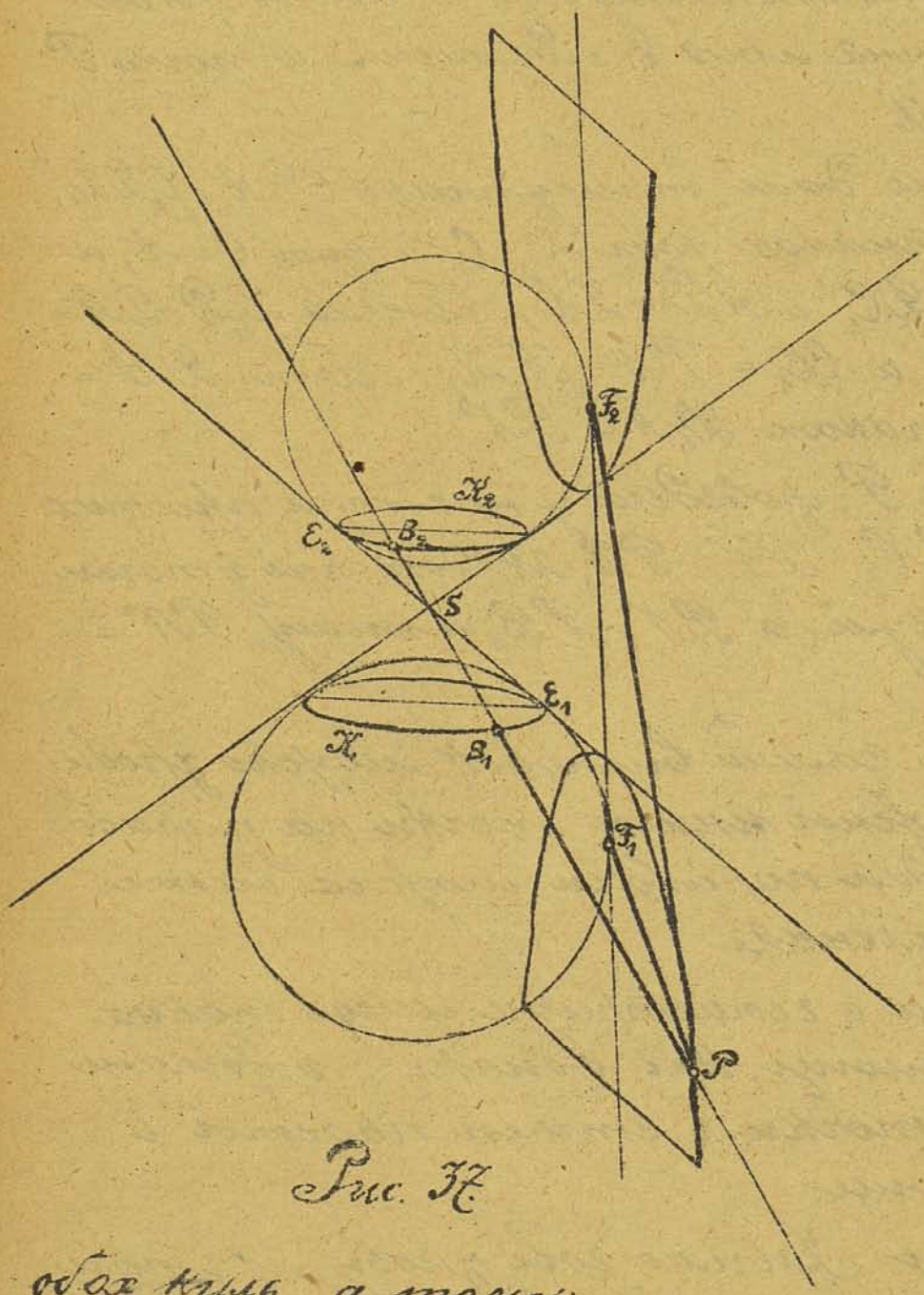


Рис. 37

З'єднаємо довільну точку P гіперболи з точкою стику стіжків S, а також з точками гіперболи F_1 і F_2. Нехай точки перетину прямої PS з колами K_1 і K_2 будуть B_1 і B_2. Дотичні PF_1 і PB_1, а також PF_2 і PB_2 – це дотичні до обох куль, а тому:

$$PF_1 = PB_1$$
$$PF_2 = PB_2$$

Відніймемо тепер перше рівність від другого, тоді одержимо: $PF_2 - PF_1 = PB_2 - PB_1$

Відсіля виходить: $PF_2 - PF_1 = 2a$

Таким чином маємо, що різниця відрізків $F_2 P$ і $F_1 P$ для кожної гіперболи є постійна, а тому можемо дати гіперболі таке определення.

Гіпербола є геометричне місце таких точок, віддалення яких від двох сталих точок має постійну різницю.

Лінії другого ступеня.

А) Коло.

§26. Рівнання кола.

Колом називаємо, як було вже наведено й раніш, геометричне місце точок, рівновіддалених від однієї точки, що називається осередком (або центром) кола. Пряста, що злучує точки обводу кола з осередком, є мірою віддалення точок від цього осередку і називається променем кола (або радіусом). Відтинок прямої, що злучує дві точки обводу кола й проходить через осередок його, наз. поперечником (або діаметром) кола.

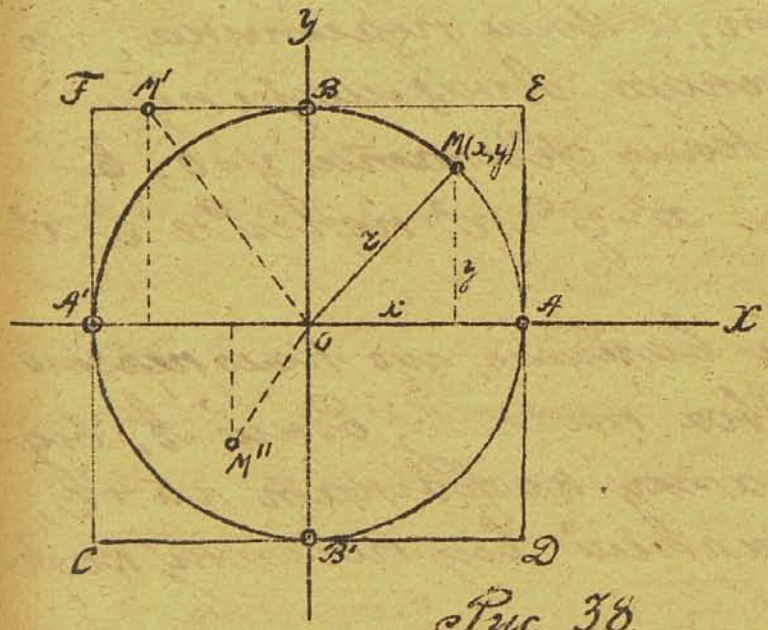


Рис. 38.

Розглянемо спочатку рівнання Кола, віднесеного до прямокутного укладу координат з початком координат в осередку кола. В цьому випадку для кожної точки обводу кола

$M(x,y)$ можна написати:

$x^2+y^2=r^2$ (1), де r є луг кола. Це рівняння і є рівнянням кола в нашому укладі координат; воно тому задовольняють координати кожної точки на обводі кола (рис. 38).

Для точки $M'(x',y')$, що лежить зовні кола, $x'^2+y'^2>r^2$, воно для цих точок приймає $x'^2+y'^2-r^2>0$

Для точки $M''(x'',y'')$, що лежить осередь кола, $x''^2+y''^2<r^2$, воно для таких точок — приймає $x''^2+y''^2-r^2<0$.

Для точок же на самому обводі кола $x^2+y^2-r^2=0$

Значіння цих приймень називається степенем кола відносно точки.

§27. Обслідування кола.

Обслідуємо тепер рівняння кола і виведемо різні властивости цієї кривої. Знайдемо попереду усього, чи перетинає коло осі координат, а коли перетинає, то в яких самі точках. Лінія може перетинати вісь X-ів, коли ордината $y=0$; в цьому випадку $x^2+y^2=r^2$ переходе в $x^2=r^2$, а $x=\pm r$

Таким чином бачимо, що коло перетинає вісь X-ів у двох точках; одній A, віддаленій від початку координат на $+r$, і другій A', віддаленій від початку координат на $-r$.

Для находження точок перетину ко-

кола осей y'ів необхідно розв'язати систему рівнянь: $x^2+y^2=r^2$ і $x=0$; при цьому одержимо $y^2=r^2$; $y=\pm r$, себ-то маємо й тут, що коло перетинає вісь y-ів у двох точках: $y_1=+r$; $y_2=-r$.

Розв'яжемо тепер рівняння кола $x^2+y^2=r^2$ відносно y; $y^2=r^2-x^2$, звідки

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Із цього рівняння ми одержимо для y реальні значіння лише тоді, коли $x<+r$, або $x>-r$.

Коли ж $x>+r$, або $x<-r$, тоді в обох випадках $x^2>r^2$, підзнаком $\sqrt{\ }$ буде від'ємне число і значіння y будуть марівні.

Такий же висновок можемо зробити й відносно x, бо $x=\pm\sqrt{r^2-y^2}$ ..... (3)

Цей вислід показує, що коло не має точок з абсцісами і ординатами більшими $+r$ і меньшими $-r$ і все вміщається в квадраті $CDEF$ (рис. 38).

Коли тепер в рівнанню $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ будемо давати x'у довільні значіння в межах $+r$ і $-r$, то для y будемо одержувати кожний раз два рівних, але протилежних по знаку реальних значіння $y=\pm\beta$, себ-то кожній абсцісі α будуть відповідати: одна точка поверх осі Ox з ординатою $+\beta$, а друга під віссю Ox з ординатою $-\beta$; таким чином, можна сказати, що всі точки кола лежать сімметрично відносно осі Ox.

Із рівнання $x=\pm\sqrt{r^2-y^2}$ такий же висновок можна зробити й відносно осі y'ів.

Точки кола симетричні не лише відносно осей OX і OY, але вони симетричні й відносно осередка кола, себ-то кожній точці на обводі кола відповідає друга точка, що лежить на другому кінці поперечника, проведеного через першу точку. Дійсно, в рівнанню $x^2+y^2=r^2$ можна замість координат (x,y) вставити $(-x,-y)$, себто координати точки, яка лежить симетрично першої відносно осередка O.

При зміні величини луча r, коло буде або збільшуватися, або зменшуватися, але всі кола будуть накреслені концентрично; коли r зменшується до 0, тоді рівнання кола переходить в рівнання $x^2+y^2=0$, що можливо лише при умові $x=0$, $y=0$, себ-то дає одну точку (осередок кола) в початку координат.

§28. Рівнання кола з осередком не в початку координат.

Коли осередок кола не лежить в початку координат, тоді рівнання кола має инший вигір. Нехай коло з лучем = r має осередок C, якого координати в укладі XOY – a і b.

Тоді для точки M можемо написати в допоможеному укладі координат з осередком в точці C:

$$\xi^2+\eta^2=r^2;\ \text{але}\ \xi=x-a;\ \eta=y-b$$

Тому, вставивши замість ξ і η їх значіння, можемо написати:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

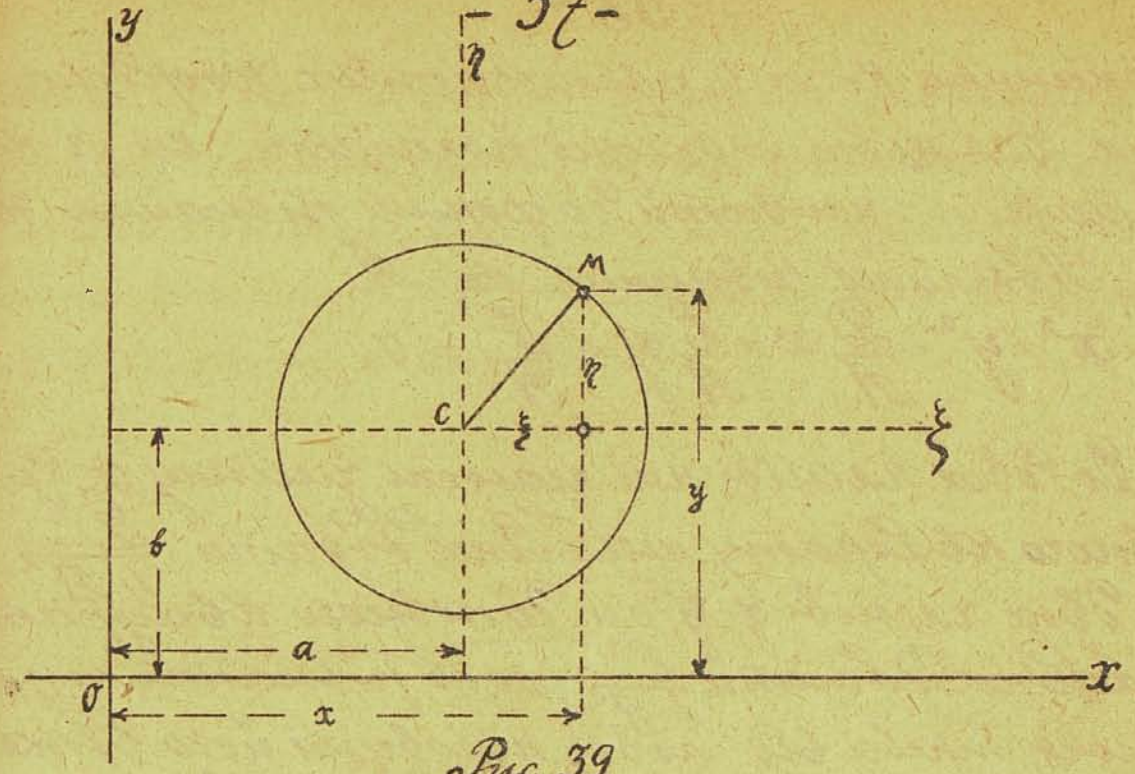


Рис. 39.

це й є загальне рівняння кола, міняючи в якому параметри a, b і r, можливо одержати всі ляні кола. – Так, міняючи a, а залишаючи останні параметри, будемо мати коло, яке переміщується вздовж осі x; при переміні b коло посувається рівнобіжно y; при зміні r - міняється розмір кола

Рівняння кола $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ можна переписати в такому вигляді:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \quad \ldots\ldots (5)$$

Це рівняння кола є окремим випадком загального рівняння другого порядку:

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, коли в останньому сочинники при квадратах змінних рівні, а сочинник при добутковi xy рівнається нулю. Покажемо, що при цих умовах, себ-то, як що $A=C$ та $B=0$, рівняння:

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0 \quad \ldots\ldots (6)$$ буде

рівнанням кола в прямокутних координатах. Для цього необхідно показати, що р-ння (6) можливо привести до форми рівняння кола. Поділимо рівняння на A:

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

До двох членів, які мають змінну x, до повного квадрату необхідно додати $\frac{D^2}{4A^2}$; до двох членів з y-ом до повного квадрату необхідно додати $\frac{E^2}{4A^2}$; щоб рівнання не змінилося, треба від лівої половини його відняти, або до правої додати $\frac{D^2}{4A^2}$ і $\frac{E^2}{4A^2}$; після цього можемо написати так:

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2},\ldots\ldots(7)$$

це рівнання має ту ж форму, що й рівнання:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Відсіля можна вивести, що рівнання (6) – є рівнання кола, координати осередка якого:

$$a=-\frac{D}{2A},\quad b=-\frac{E}{2A},$$

$$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}$$

§29. Степень кола відносно точки при загальному вигляді рівнання кола.

Для рівнання кола самого простого вигляду степенем кола, як ми бачили, є трилен $x_1^2+y_1^2-r^2$, де x_1 і y_1 – координати точки A,

при чому він по своїй величині може бути позітивним, негативним та рівним нулю. Найдемо тепер аналітичний вираз і геометричне значіння степеня кола при загальному вигляді р-ння кола.

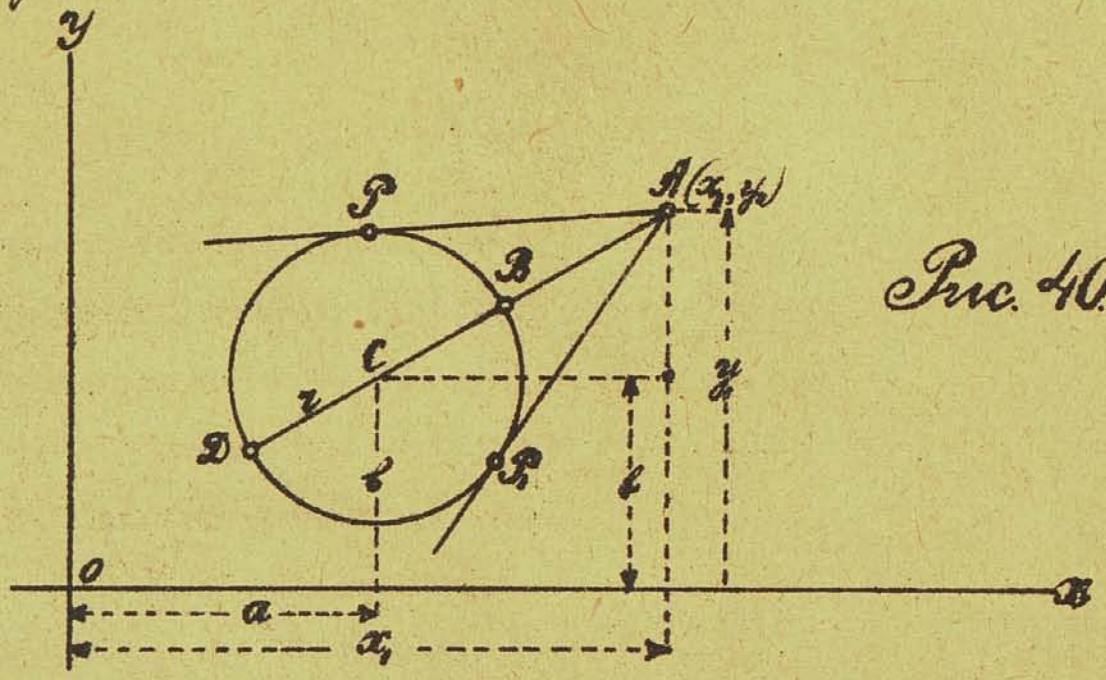


Рис. 40.

Нехай маємо коло: $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ та зовнішню точку $A(x_1,y_1)$. Вставимо в рівняння кола замість x і y координати точки $A(x_1,y_1)$, тоді $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2=K$; по (рис. 40) маємо:

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=\overline{AC}^2;$$

$$\overline{AC}^2-r^2=(\overline{AC}+r)(\overline{AC}-r)=K.$$

$$\overline{AC}+r=\overline{AD};\quad \overline{AC}-r=\overline{AB};$$

$$\overline{AD}\cdot\overline{AB}=\overline{AP}^2=\overline{AP_1}^2$$

Отже: $K=\overline{AP}^2$ ..... (8)

Степень кола відносно зовнішньої точки A рівняється квадрату дотичної з точки A до нашого кола.

При наближенню точки A до кола сте-

пень кола все зменьшується і для точки на обводі кола степень кола = 0.

Для точки A в нутрі кола (рис 41):

$$(x_1^2-a)^2+(y_1-b)^2-r^2=K$$

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=\overline{AC}^2$$

$$\overline{AC}^2-r^2=(AC+r)(AC-r)=\overline{AD}\cdot-\overline{AB}=$$

$$=-\overline{AD}\cdot\overline{AB}=-\overline{AP}^2$$

$$K=-\overline{AP}^2 \ldots\ldots\ldots (8^a)$$

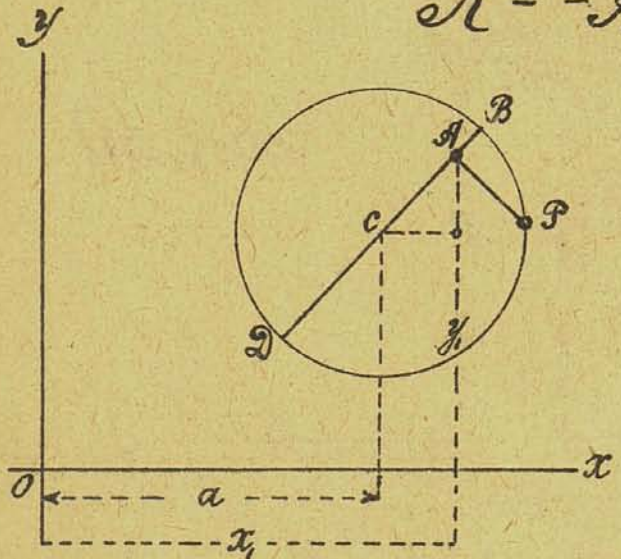


Рис. 41.

Степень кола відносно внутрішньої точки A рівняється квадрату половини найменшої тятиви, яка проходить через A.

Степень кола відносно точки $C(a,b)$ =

$$=(a-a)^2+(b-b)^2-r^2=K$$

$$K=-r^2$$

§30. Провести коло через три дані точки $A(x_1,y_1)$; $B(x_2,y_2)$; $C(x_3,y_3)$.

Напишемо рівнання кола в його загальному виглядові $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, або

$x^2+y^2-2ax-2by+P=0$, де $P=a^2+b^2-r^2$;

Коли обвід цього кола проходить через точки A, B, C, тоді координати цих точок мусять задовольняти рівнанню кола, а тому можемо написати:

$$x_1^2+y_1^2-2ax_1-2by_1+P=0 \ldots\ldots (I)$$

$$x_2^2+y_2^2-2ax_2-2by_2+P=0 \ldots\ldots (II)$$

$$x_3^2+y_3^2-2ax_3-2by_3+P=0 \ldots\ldots (III)$$

З цих трьох рівнань можливо знайти три параметри a, b і P, або a, b і r, а тими самими знайти рівнання кола; написані три рівнання – всі першого ступеня відносно a, b і r, а тому з них одержимо лиш по одному значінню для параметрів; відсіля же виходить, що через три точки можливо провести лише одно коло.

Для розвязання написаних рівнань відніймемо р-ння (II) від (I) та р-ння (III) від (I), то ді одержимо:

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - 2a(x_1 - x_2) - 2b(y_1 - y_2) = 0 \quad \ldots\ldots \text{(IV)}$$

$$x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 - 2a(x_1 - x_3) - 2b(y_1 - y_3) = 0 \quad \ldots\ldots \text{(V)}$$

Помножимо тепер р-ння (IV) на $(x_1 - x_3)$, а р-ння (V) на $(x_1 - x_2)$ і знову відіймемо одно від другого, тоді одержимо:

$$(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2)(x_1 - x_3) - 2a(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) - 2b(y_1 - y_2)(x_1 - x_3) = 0$$

$$-(x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2)(x_1 - x_2) + 2a(x_1 - x_3)(x_1 - x_2) + 2b(y_1 - y_3)(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2)(x_1 - x_3) - (x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2)(x_1 - x_2) =$$

$$= 2b(y_1 - y_2)(x_1 - x_3) - 2b(y_1 - y_3)(x_1 - x_2);$$

відсіля:

$$b = \frac{(x_1 - x_3)(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2) + (x_2 - x_1)(x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2)}{2[(y_1 - y_2)(x_1 - x_3) - (y_1 - y_3)(x_1 - x_2)]} \quad \text{(VI)}$$

аналогічно виведемо, що:

$$a = \frac{(y_1 - y_3)(y_1^2 - y_2^2 + x_1^2 - x_2^2) + (y_2 - y_1)(y_1^2 - y_3^2 + x_1^2 - x_3^2)}{2[(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2)]} \quad \text{(VII)}$$

Найдені вирази для a і b будуть мати реальні значіння доти, доки знаменник не $= 0$; коли же знаменник цей рівнається 0, то-

де a, b, P, а тим самим і r робляться $= \infty$. Знаменник буде $= 0$, коли

$$(y_1 - y_2)(x_1 - x_3) = (y_1 - y_3)(x_1 - x_2),$$

або $\frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}$, а це відношення між координатами трьох точок буває лише тоді, коли всі три точки лежать на одній прямій.

Отже вислід показує, що через три точки, які лежать на одній прямій, реального кола провести не можна, бо в цьому випадкові координати осередку кола і луч кола безмежно великі.

§31. Коло і пряма.

Коли ми маємо коло $x^2 + y^2 = r^2$ та пряму $y = kx + b$, то ці лінії можуть перетинатися, торкатися чи зовсім не мати спільних точок. При яких же умовах буває той чи инший випадок?

Для того, щоб відповісти на це питання, находимо спільні корні двох даних рівнань, вставивши значіння y з другого р-ння в перше: $x^2 + (kx + b)^2 = r^2$;

$$x^2 + k^2x^2 + 2kbx + b^2 = r^2;\quad x^2(1+k^2) + 2kbx = r^2 - b^2$$

$$x^2 + \frac{2kb}{1+k^2} - \frac{r^2 - b^2}{1+k^2} = 0;$$

звідси: $$x = -\frac{kb}{1+k^2} \pm \frac{1}{1+k^2}\sqrt{r^2(1+k^2) - b^2} \quad \ldots\ldots (9)$$

Обслідуємо тепер вираз під знаком $\sqrt{\ }$

1) Коли $r^2(1+k^2)-b^2>0$, або коли $r>\frac{b}{\pm\sqrt{1+k^2}}$, тоді x має два реальних значіння x_1 і x_2, а через це і y має також два значіння y_1 і y_2 (які находимо з рівнання $y=kx+b$, підставивши їй місць x один раз x_1, а другий раз x_2); таким чином при $r>\frac{b}{\pm\sqrt{1+k^2}}$ будемо мати дві точки, спільних колу і простій, дві точки перетину;

2) Коли $r^2(1+k^2)-b^2=0$, або $r=\frac{b}{\pm\sqrt{1+k^2}}$, тоді:

$$x=-\frac{kb}{1+k^2}\pm 0,$$ себ-то $x_1=-\frac{kb}{1+k^2}$, $x_2=-\frac{kb}{1+k^2}$; в цьому випадкові $x_1=x_2$, а також $y_1=y_2$, себ-то коло й проста мають лише одну спільну точку (або дві точки, що злилися в одну), яка буде точкою торкання.

3) Коли $r^2(1+k^2)-b^2<0$, або $r<\frac{b}{\pm\sqrt{1+k^2}}$, тоді під знаком $\sqrt{\ }$ буде величина від'ємна, а через це для x і для y одержимо дві пари мнимих значінь; реальних спільних точок у кола і простої не буде.

Геометричне значіння наведених умов можливо з'ясувати в слідуючий спосіб: приведемо р-ння $y=kx+b$ до нормального вигляду, тоді будемо мати: $$\frac{y-kx-b}{\pm\sqrt{1+k^2}}=0;$$ із цього р-ння видно, що вираз $\frac{b}{\pm\sqrt{1+k^2}}$ ..... (10) є відалення нашої простої від початку координат, а в даному разі й від осередку кола.

§ 32. Рівнання дотичної до кола в точці $S(x_1, y_1)$ на обводі кола.

Нехай маємо коло $x^2+y^2=r^2$ та точку $P(x_1, y_1)$ на обводі цього кола (рис. 42). Необхідно вивести рівняння дотичної в цій точці.

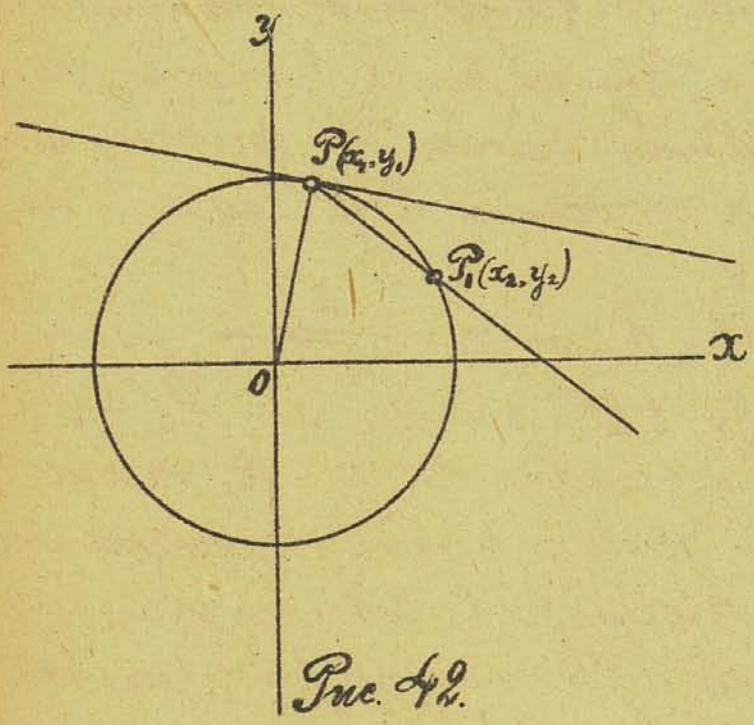


Рис. 42.

Напишемо спочатку рівняння січної, яка проходить через точку P і через другу будь яку точку $P_1(x_2, y_2)$ на обводі кола

Рівняння простої, що проходить через дві точки, таке:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

або $y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$.

Коли точка P_1 наближається до P, тоді різниця між координатами точок P_1 та P все зменшуються і нарешті, коли P_1 зіллється з P, тоді різниця координат зробиться $=0$, а січна перетвориться в дотичну до кола в точці P.

Отже рівняння січної перейде в таке:

$$y-y_1 = \frac{0}{0}(x-x_1);$$

Щоб роскрити неопределеність $\frac{0}{0}$, звернемо увагу на те, що точки x_1, y_1 і x_2, y_2 лежать на обводі кола, а тому:

$$x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2 = r^2;$$

відсіля $x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2=0$

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 0;$$

звідси: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

Вставимо тепер в р-ння січної замість $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ здобутий вираз, тоді:

$$y - y_1 = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}(x - x_1)$$

Коли точка P_1 зіллється з точкою P, тоді x_2 буде $= x_1$, а $y_2 = y_1$ і

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

Це й є рівнання дотичної до кола в точці $P(x_1, y_1)$; його можливо привести до такого вигляду:

$$yy_1 - y_1^2 = xx_1 + x_1^2, \text{ або } x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2,$$

або: $x_1x + y_1y = r^2$ . . . . . (10)

Рання дотичної останнього вигляду можливо вивести ще й в такий спосіб: напишемо нормальне р-ння прямої, яка віддалена від О на r:

$x\cos\varphi + y\sin\varphi = r$

Помножимо обидві половини рівнання на r і одержимо:

$$x \cdot r\cos\varphi + y \cdot r\sin\varphi = r^2,$$

але $r\cos\varphi = x_1$, а $r\sin\varphi = y_1$ (рис. 43), а тому:

$$x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = r^2 \quad (10)$$

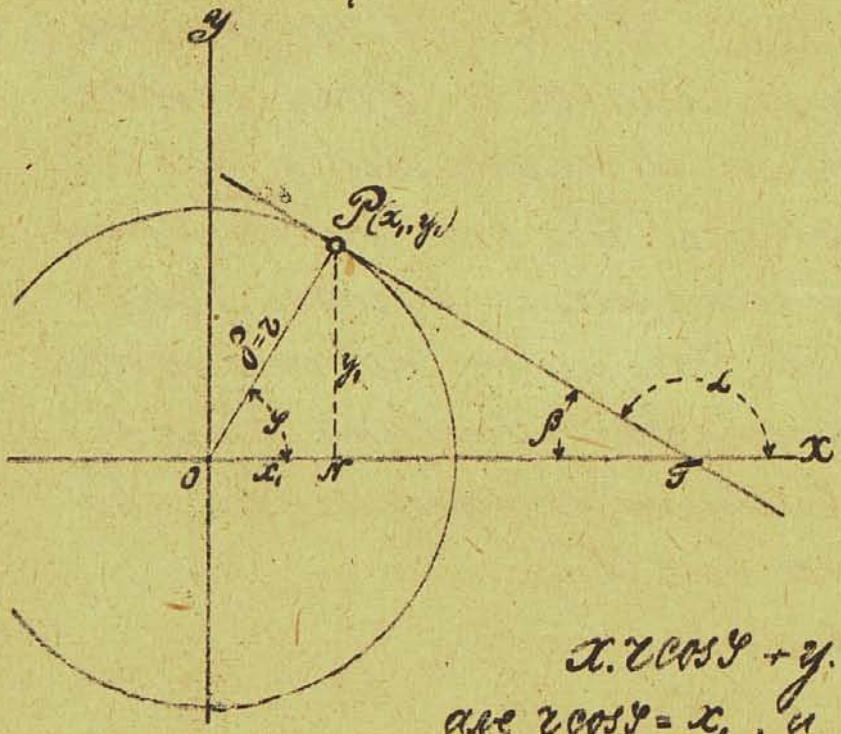


Рис. 43.

§33. Рівняння нормалі ОР.

Луч ОР, проведений в точку торкання, є простопадним дотичній в точці Р, а тому рівнання його можливо вивести в слідуючий спосіб. Із р-ння дотичної маємо:

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{r^2}{y_1};$$

Кутовий сочинник дотичної $k = tg\alpha = -\frac{x_1}{y_1}$

Кутовий сочинник лінії простопадної k_1 буде $= -\frac{1}{k}$ або $k_1 = \frac{y_1}{x_1}$

Рівнання простої, простопадної до дотичної є: $y = \frac{y_1}{x_1}x + b$

Тому ж, що нормаль проходить через $O(0,0)$, $b = 0$ і р-ння нормалі приймає такий вигляд:

$$y = \frac{y_1}{x_1}x \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

§34. Довжина нормалі, піднормалі, підотичної й дотичної.

Довжиною нормалі назив. лінія, що зєднує початок координат з точкою торкання; довжиною піднормалі - проекція нормалі на вісь X'ів; довжиною дотичної наз. відрізок її лежуч точкою торкання Р та віссю абсцисс, а довжиною підотичної - проекція дотичної на вісь X'ів.

Довжина нормалі (рис. 43)

$$OP = r; \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Довжина піднормалі ON = абсцісі x_1; .... (13)

Довжина підотичної $NT = y_1 ctg\beta$, де $\beta = 180° - \alpha$;

$tg\beta = tg(180° - \alpha) = -tg\alpha$;

$tg\alpha$ є кутовий сочинник дотичної $i = -\frac{x_1}{y_1}$; тому $tg\beta = \frac{x_1}{y_1}$; звідси:

$$NT = y_1 \cdot ctg\beta = y_1 \cdot \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1^2}{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Довжина дотичної $PT = \sqrt{PN^2 + NT^2} =$

$$= \sqrt{y_1^2 + \left(\frac{y_1^2}{x_1}\right)^2} = \sqrt{\frac{y_1^2(x_1^2+y_1^2)}{x_1^2}} = \frac{y_1}{x_1}\sqrt{r^2} = \frac{y_1 r}{x_1} \quad \ldots (15)$$

§35. Загальне рівнання дотичної до кола в даній на обводі кола точці.

Як що коло дано р-нням загального виглядy: $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, тоді в рівнанню дотичної $x_1x + y_1y = r^2$, треба замість значінь координат в простїшому уклади, початок якого лежав у осередку кола, вставити координати при новому уклади, при якому осередок нашого кола C має координати (a, b), себ-то треба вставити:

замість x . . . . . $(x-a)$
— „ — y . . . . . $(y-b)$
— „ — x_1 . . . . . (x_1-a)
— „ — y_1 . . . . . (y_1-b)

Тоді одержимо таке загальне рівнання дотичної до кола:

$$(x_1-a)(x-a) + (y_1-b)(y-b) = r^2 \quad \ldots\ldots (16)$$

§36. Дотична до кола з точки, зовнішньої колу.

<u>Задача.</u> Провести дотичну до кола, маючого р-ння $x^2+y^2=r^2$, з точки $A(x_0, y_0)$, зовнішньої

кола.

Загальне р-ння дотичної до кола $x^2+y^2=r^2$ є таке: $x_1x+y_1y=r^2$ (I), де x_1 і y_1 координати точки торкання (рис. 44), а x і y біжучі координати.

Координати x_1 і y_1 звязані між собою, як точки кола, рівнянням: $x_1^2+y_1^2=r^2$ (II);

Крім того, дотична мусить пройти через точку A, а тому р-ння її повинно задовольнитися координатами x_0 і y_0, себто повинно бути: $x_1x_0+y_1y_0=r^2$ . . (III)

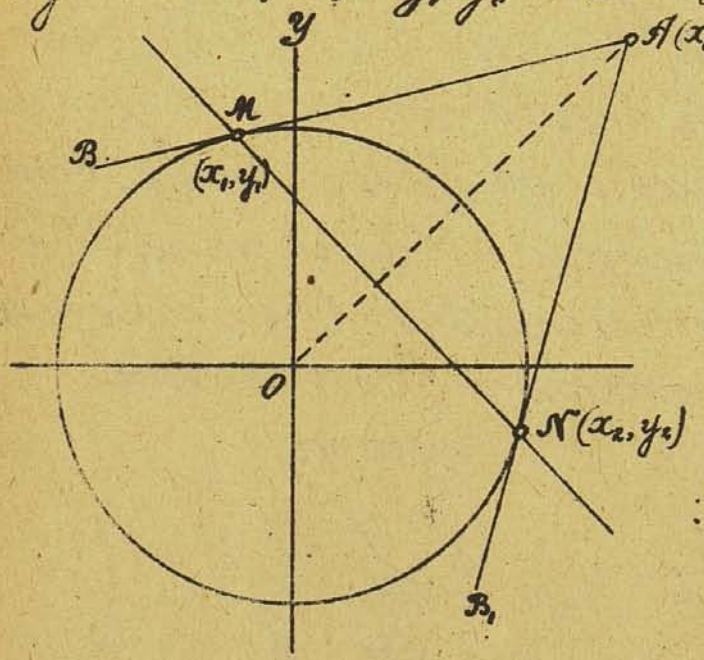


Рис. 44.

З рівнань (II) та (III) можемо знайти x_1 і y_1; тому що одно з рівнань є квадратове, одержимо і для x_1, і для y_1, або 2 реальних різних значіння, коли точка A лежить зовні кола, або 2 реальних однакових значіння, коли A на обводі кола, або 2 марівних, коли A лежить осередка кола.

Знайшовши таким чином x_1 і y_1, вставимо значіння їх в перше р-ння і одержимо рівнання дотичної

§ 37. Полярна проста відносно даної точки. Коли ми в р-ння $x_1x_0+y_1y_0=r^2$ за-

місць x_1 і y_1 поставимо бігучі координати x і y, то замість рівняння будемо мати рівняння прямої: $x_0 x + y_0 y = r^2$ ..... (17)

Це р-ння задовольняється при значеннях $x = x_1$ або x_2, а $y = y_1$ або y_2, а тому р-ння $x_0 x + y_0 y = r^2$ є рівняння прямої, що проходить через точки М і N.

Ця пряма називається полярною (бігуновою) прямою відносно точки А, а сама точка А називається полюсом (бігунком) прямої MN.

Рівняння полярної прямої дає можливість легко знайти координати точок торкання, розв'язавши разом рівняння кола і полярної.

Приклад. Написати рівняння дотичних від точки А(6,8) до кола з лучем $r = 5$ і рівняння полярної відносно А.

$x_1 x + y_1 y = r^2$; $x_1^2 + y_1^2 = r^2$; $x_1 x_0 + y_1 y_0 = r^2$

$$\begin{cases} 6x_1 + 8y_1 = 25 \\ x_1^2 + y_1^2 = 25 \end{cases} \qquad y_1 = \frac{25 - 6x_1}{8}$$

$$x_1^2 + \left(\frac{25 - 6x_1}{8}\right)^2 = 25$$

$$x_1^2 + \frac{625 - 300x_1 + 36x_1^2}{64} = 25$$

$$64x_1^2 + 36x_1^2 - 300x_1 + 625 = 1600; \quad x_1^2 - 3x_1 - 9{,}75 = 0;$$

$$x_1 = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 9{,}75} = 1{,}5 \pm \sqrt{12} = 1{,}5 \pm 3{,}46$$

$x_1 = -1{,}96$; $x_2 = 4{,}96$; $y_1 = 4{,}59$; $y_2 = -0{,}59$;

Рівняння дотичних будуть:

1) $-1{,}96x + 4{,}59y = 25$;

2) $4{,}96x - 0{,}59y = 25$;

Р-ння полярної прямої відносно А буде:

$6x + 8y = 25$;

Рівняння прямої OA (рис. 44) буде:

$y = \frac{y_1}{x_1} x = \frac{8}{6} x$; $k_1 = tg\alpha_1 = 8/6$

Р-ння полярної можливо написати так:

$y = -\frac{6}{8} x + 25$; $k_2 = tg\alpha_2 = -\frac{6}{8}$

$k_1 = -\frac{1}{k_2}$. Прості ці перпендикулярні.

§ 38. Дотична до кола, рівнобіжна даній прямій.

До кола $x^2 + y^2 = r^2$ провести дотичну, рівнобіжну прямій $y = kx + b$.

Загальне р-ння дотичної до кола є:

$x_1 x + y_1 y = r^2$; кутовий сочинник цього р-ння прямої: $k_1 = -\frac{x_1}{y_1}$;

це k_1 мусить бути $= k$, себ-то $-\frac{x_1}{y_1} = k$, а звідси $x_1 = -ky_1$.

Крім цього ми знаємо, що x_1 і y_1 звязані між собою рівнянням: $x_1^2 + y_1^2 = r^2$

Вставляючи сюди замість x_1 = йому $-ky_1$, напишемо: $k^2 y_1^2 + y_1^2 = r^2$ чи $y_1^2(1+k^2) = r^2$

$$y_1^2 = \frac{r^2}{1+k^2} \; ; \quad y_1 = \frac{r}{\pm\sqrt{1+k^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (18),$$

відсіля: $y_1' = \frac{r}{\sqrt{1+k^2}}$; $y_1'' = \frac{r}{-\sqrt{1+k^2}}$;

$$x_1' = -\frac{k_1 r}{\sqrt{1+k^2}} \; ; \quad x_1'' = \frac{k_1 r}{\sqrt{1+k^2}}$$

Определивши координати x_1, y_1 через відомі нам r і k, вставимо їх в рівняння дотичної і одержимо шукані рівняння.

§ 39. Кут між прямою, яка пере-

тинає коло, і дотичною до кола в точках перетину кола прямою.

Рівняння кола: $x^2+y^2=r^2$

Рівняння даної прямої: $y=kx+b$

Необхідно знайти кут φ.

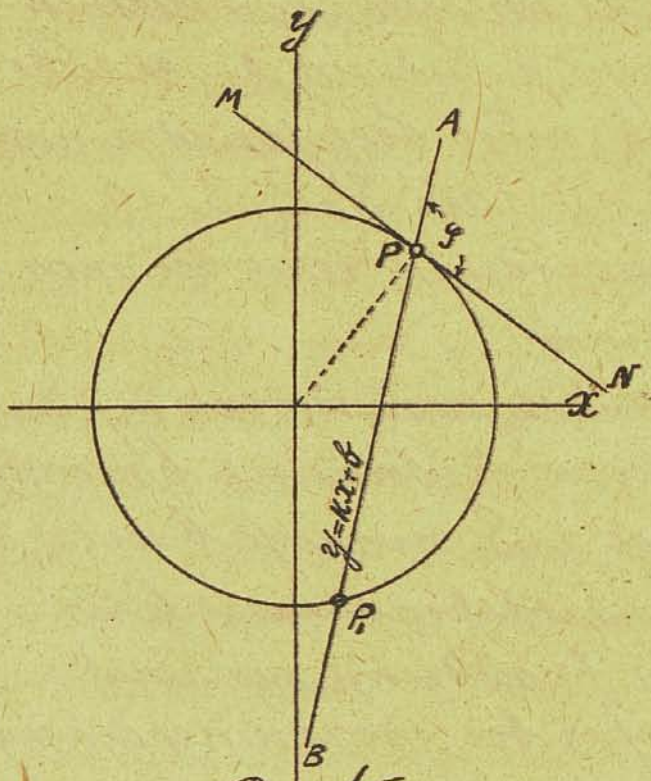


Рис. 45

Із двох рівнянь – кола і прямої находимо координати точок перетину P_1 і P_2 (рис 45). Нехай координати точки P будуть x_1 і y_1, тоді р-ння дотичної в точці P буде: $x_1x+y_1y=r^2$; відсіля $k_1=-\frac{x_1}{y_1}$

Кут $\varphi=\frac{k-k_1}{1+kk_1}$;

Приклад: Найти кут між прямою $y=3x-10$, що перетинає коло $x^2+y^2=100$ і дотичною до цього кола.

$x^2+(3x-10)^2=100$; відсіля: $10x^2-60x=0$

$x(x-6)=0$; $x_1=0$; $x_2=6$; $y_1=-10$; $y_2=8$;

Рівняння дотичних будуть такі:

1) $6x+8y=100$, або $3x+4y=50$;

2) $-10y=100$, або $y=-10$;

1) $tg\varphi=\frac{k-k_1}{1+kk_1}=\frac{3+3/4}{1-3/4}=-3$; $\varphi=108°26'$

2) $tg\varphi=\frac{3-0}{1+0}=3$; $\varphi=71°34'$

§40. Загальне рівнання лінії, що проходить через точки перетину двох других ліній.

Нехай маємо рівнання однієї кривої $S_1 = 0$, другої $S_2 = 0$.

Помножимо перше р-ння на будь який постійний множник λ_1, а друге р-ння на λ_2; складемо тепер нові рівнання, тоді одержимо р-ння нової кривої: $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$, (або $S_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} S_2 = 0$, або $S_1 + \lambda . S_2 = 0$), яка проходить через всі точки перетину даних ліній?

Дійсно, координати кожної точки перетину обертають дані нами рівнання в тотожність, себто S_1 - в нуль і S_2 також в нуль, а тому й остання р-ння обертається в тотожність Відсіля й виходить, що лінія $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$ пройде через всі точки перетину даних ліній.

Множники $\lambda_1 + \lambda_2$ можуть бути також рівними $+1$ і -1; в тому випадку, коли один множник $= +1$, а другий $= -1$, рівнання нової лінії прийме вигляд $S_1 - S_2 = 0$.

Таким чином виходить, що для утворення рівнання лінії, яка проходить через точки перетину двох даних ліній, необхідно збудова або одно з рівнань помножимо на постійний множник і додати одно р-ння до другого.

Коло і коло.

§41. Знаходження координат точок перетину двох кол.

Нехай маємо два кола, задані рівняннями:

$$S_1 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$
$$S_2 = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1^2$$

Необхідно знайти координати точок перетину даних кол. Для знаходження цих координат треба розв'язати систему двох квадратових рівнянь кола, а для цього зробимо так: віднімемо спочатку друге рівняння від першого, тоді одержимо нове р-ння:

$$S_1 - S_2 = 2(a_1-a)x + 2(b_1-b)y + (a^2+b^2-a_1^2-b_1^2-r^2+r_1^2) = 0$$

Це рівняння є р-нням першого ступеня відносно x і y. Таким чином, розв'язання двох квадратових рівнянь звелося тепер до розв'язання другої пари рівнянь: одного квадратового і одного лінійного, себто до знаходження точок перетину кола і прямої. По розв'язанню цих двох рівнянь ми одержимо по 2 значення для x і для y, при чому ці значення можуть бути:

1) реальними і різними, - тоді існує дві дійсних точки перетину;

2) реальними й однаковими, - тоді існує лише одна точка; спільна обом колам, точка торкання;

3) уявними й різними, - тоді кола не перетинаються.

§42. Жмут кол.

Візьмемо знов два рівняння кола

$$S_1 = (x-a)^2+(y-b)^2-r^2 = 0$$
$$S_2 = (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2 = 0$$

Утворимо з цих рівнань нове р-ння $S_1 - \lambda S_2 = 0$, де λ є будь який постійний множник.

Останнє рівняння буде р-нням нової кривої, а при різних значінням параметра λ буде рівнанням цілого зжмута кривих, які проходять, як доведено раніш, через точки перетину даних кол. Ці нові криві будуть також колами, бо яке б не було λ, сочинники при x^2, y^2 будуть однакові, а член з добутком xy і в новому рівнанню не буде. Коли дані кола перетинаються реально, тоді й усі кола зжмута пройдуть через ці точки (рис. 46);

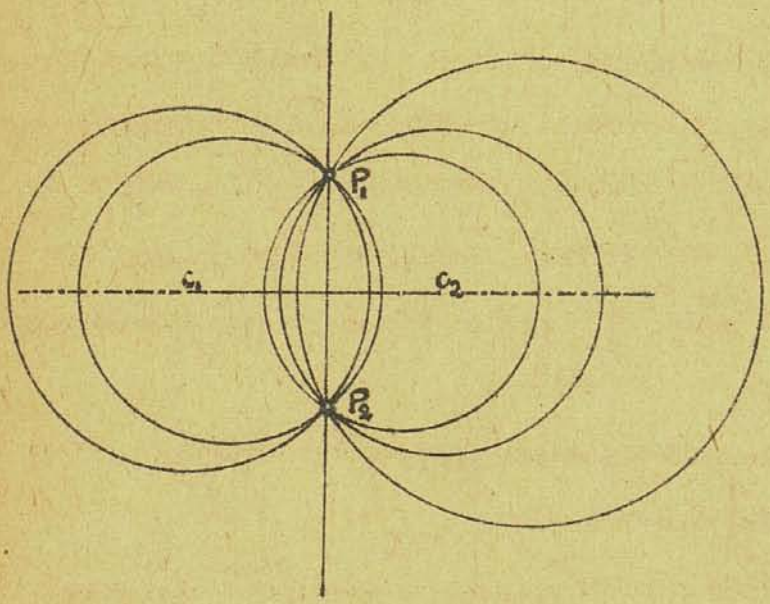


Рис. 46.

коли дані кола торкаються, тоді й усі кола зжмута проходять через цю точку торкання і мають спільну дотичну AB (рис. 47).

Яке ж геометричне значіння має параметр λ в рівнанню $S_1 - \lambda S_2 = 0$?

Р-ння $S_1 - \lambda S_2 = 0$ є рівнання кола; при даному λ останнє рівнання буде р-нням одного з кол,

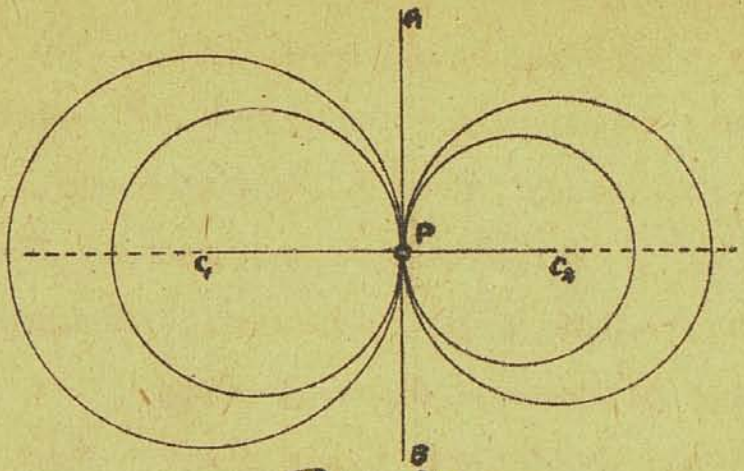


Рис. 47.

що проходять через точки перетину двох даних кол. Нехай це буде коло S_3. Візьмемо на ньому будь яку точку $M(x_1, y_1)$; координати цієї точки задовольняють рівняння $S_1 - \lambda S_2 = 0$, а тому з нього можемо написати: $\lambda = \frac{S_1}{S_2}$;

але по ранійй показаному, вираз S_1, себ-то рівняння першого кола, в яке замість їїжучих координат введено координати будь якої точки, є степенем кола відносно тієї точки і рівняється квадрату довжини дотичної з точки до кола. Тому в даному разі S_1 буде $= \overline{MP_1}^2$; по тих же міркуваннях $S_2 = \overline{MP_2}^2$.

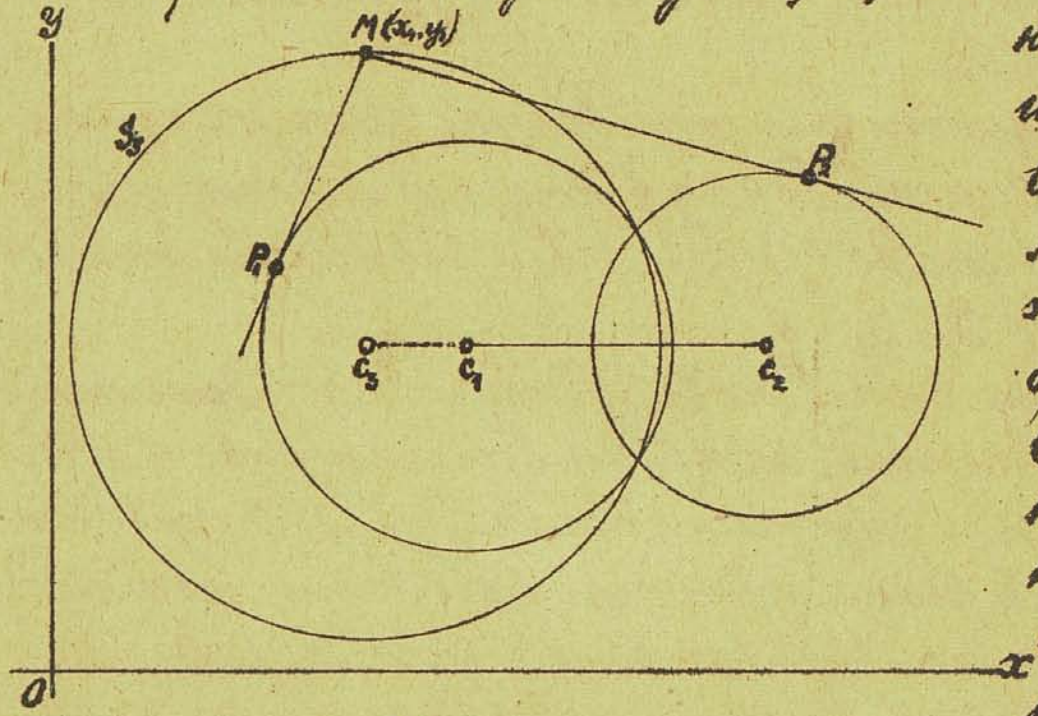


Рис. 48.

Отже виходить, що рівність $\lambda = \frac{S_1}{S_2}$ означає,

що відношення між квадратом довжини дотичної MP_1, проведеної з будь-якої точки M кола $S_1 - \lambda S_2 = 0$ до одного з даних кол, і квадратом довжини дотичної MP_2, проведеної з тієї ж точки до другого даного кола, є величина стала, а тому маємо таку властивість кол:

Геометричне місце точок, для яких відношення довжин дотичних до двох даних кол є величина стала, є коло, що проходить через точки перетину двох даних кол.

§43. Рівностепенна (радикальна) вісь.

Вивчаючи властивості кругу кол $S_1 - \lambda S_2 = 0$, необхідно звернути окрему увагу на той випадок, коли $\lambda = 1$, а рівняння нового кола буде $S_1 - S_2 = 0$.

В цьому випадкові біжучі координати другого ступіня, як це ми бачили вже в §41, зникають, а рівняння кола $S_1 - \lambda S_2 = 0$ перетворюється в р-ння простої (або кола, якого $r = \infty$).

$$2(a_1 - a)x + 2(b_1 - b)y + (a^2 + b^2 - a_1^2 - b_1^2 - r^2 + r_1^2) = 0 \quad (19)$$

Ця проста має ту ж властивість, що й коло $S_1 - \lambda S_2 = 0$, а саме, що відношення квадратів довжин дотичних, проведених з будь якої точки на простій до двох даних кол, є величина стала і $= \lambda$; тому ж, що в даному разі $\lambda = 1$, довжини дотичних, проведених з будь якої точки M на простій до двох даних кол, рівні

між собою (рис. 49). Ця пряма називається рівностепеневою (радикальною) віссю кол $S_1 = 0$; $S_2 = 0$. Згідно сказаного раніше, вона проходить через точки перетину двох даних кол.

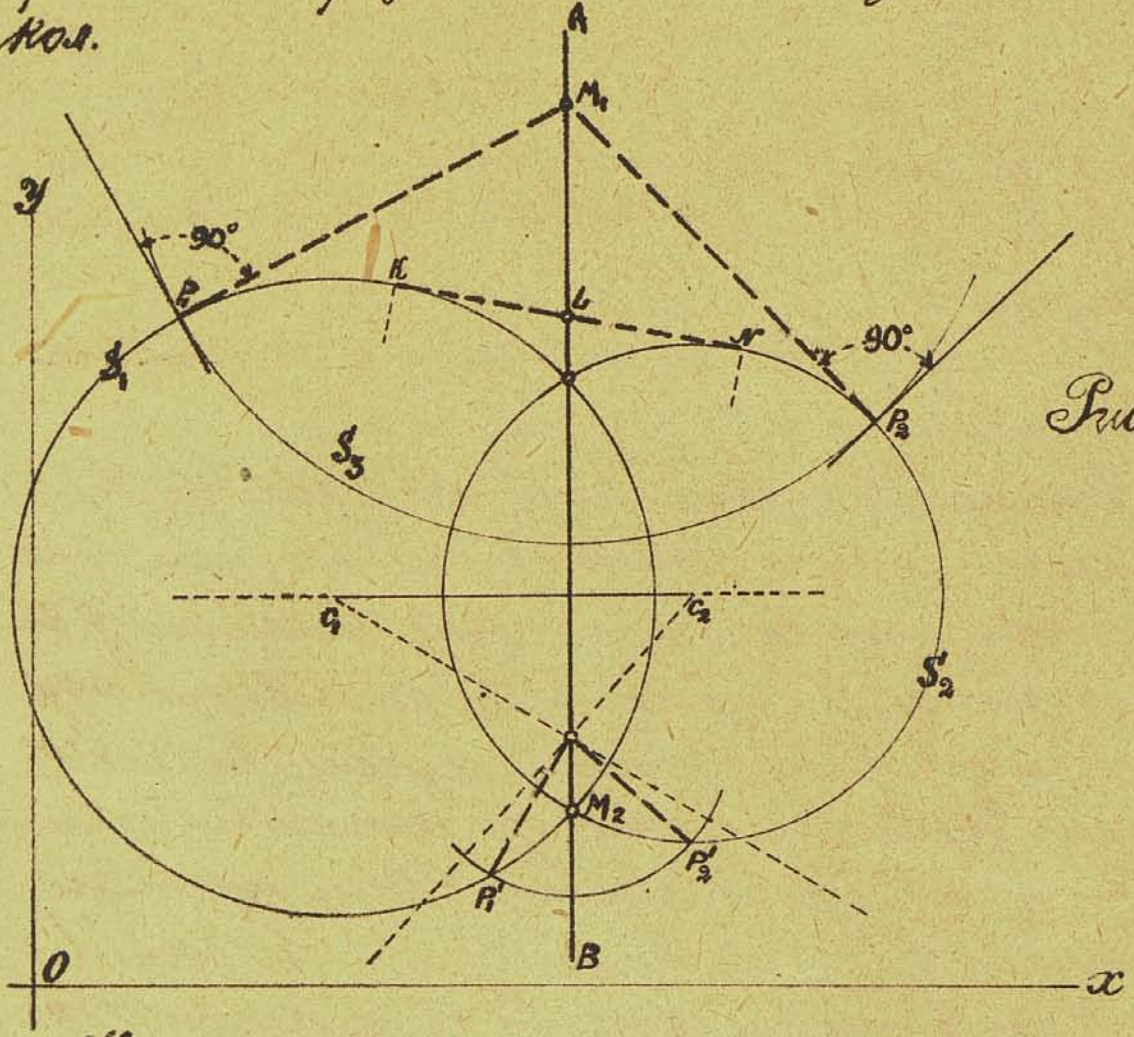


Рис. 49.

Коли точки перетину кол не реальні, а мнимі (уявні), все ж таки рівностепенна вісь дійсно існує, бо рівняння S_1 і $S_2 = 0$ має і в цьому випадкові сполучники дійсні (рис 50).

Для тих точок рівностепеневої осі, що лежать осередь кола, квадрати найменших тятив, або й самі тятиви рівні між собою.

Рівностепенна вісь проходить простопадло до

лінії, яка ділить осередки обох кол. Дійсно, рівняння прямої, що проходить через $C_1(a, b)$ і $C_2(a_1, b_1)$ буде таке:

$$\frac{x-a}{a_1-a} = \frac{y-b}{b_1-b}, \text{ або } (b-b_1)x-(a-a_1)y+(ab_1-ba_1)=0;$$

Кутовий сочинник цього рівняння $k = \frac{b-b_1}{a-a_1}$;

З р-ння же рівностепеневої осі:

$2(a_1-a)x+2(b_1-b)y+(a^2+b^2-a_1^2-b_1^2-r^2+r_1^2)=0$, видно, що кутовий сочинник цієї прямої:

$k_1 = -\frac{a-a_1}{b-b_1}$, себ-то $= -\frac{1}{k}$, а це є умова прямопадності.

Дотичні до обох кол, проведені з будь-якої точки рівностепеневої осі, як було показано, рівні між собою, а тому, коли ми з довільної точки M, що лежить на рівностепеневій осі, накреслимо коло S_3 лучем, рівним довжині дотичної з тієї ж точки до даних кол, то це нове коло перетне дані кола S_1 і S_2 в точках P_1 і P_2 (точках торкання дотичних). Коли в цих точках P_1 і P_2 провести дотичні до кола S_3, то в кожній з цих двох точок кут між дотичними до кол S_1 і S_3, S_2 і S_3 буде прямий; тому ж, що кут між кривими означається кутом між дотичними до кривих в точці їх перетинання між собою, то виходить, що коло S_3 перетинає кола S_1 і S_2 під прямими кутами, або <u>ортогонально</u>. Через це коло S_3 називається ортогональним колом відносно кол S_1 і S_2. Таким чином, гео-

метричне місце осередків кол, ортогональних відносно двох даних, є рівностепенна вісь цих останніх.

§44. Рівностепенний осередок кол.

Нехай ми маємо рівняння трьох кол:

$$S_1 = 0;\ S_2 = 0;\ і\ S_3 = 0;$$

Утворимо рівняння рівностепенних осей для кожної пари цих кол:

1) $S_1 - S_2 = 0$; 2) $S_2 - S_3 = 0$; 3) $S_3 - S_1 = 0$;

Коли складемо ці рівняння, то одержимо тотожність:

$$(S_1 - S_2) + (S_2 - S_3) + (S_3 - S_1) = 0 \ldots\ldots (20),$$

а це показує, що всі три рівностепенних осі кожних трьох кол, що взяті попарно, сходяться в одній точці.

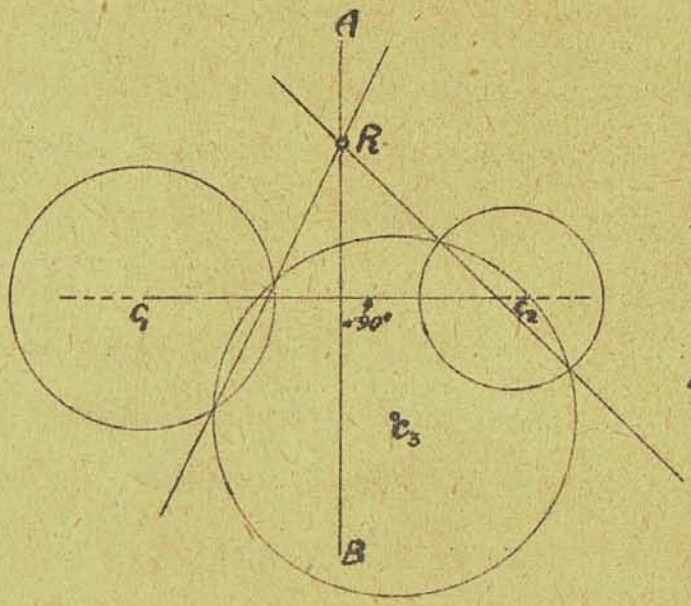


Рис. 50.

Остання властивість рівностепенних осей дає можливість побудувати рівностепенну вісь для двох кол, які між собою не перетинаються.

Припустимо, що ми маємо два кола c_1 і c_2, які не перетинаються; необхідно найти їх рівностепенну вісь. Для цього проводимо довільно третє коло, але так, щоб воно перетяло два перших кола; через точки перетину проводи-

мо рівностепенні осі двох нових пар кол; тоді точка зустрічі цих рівностепенних осей R буде належати і усадженій рівностепенній осі AB, яка мусить пройти через точку R і бути простопадною до простої C_1C_2, що з'єднує осередки двох даних кол.

Еліпса.

§45 Складення рівнання еліпси.

Як було вже показано раніш, еліпса є геометричне місце точок, віддалення яких од двох даних сталих точок F_1 і F_2, що називаються огнищами (фокусами), дають в сумі постійну величину $2a$. Із цього определіння виходить, що еліпсу можно накреслити в такий спосіб: зв'язавши кінці нитки так, щоб довжина утвореного кола була $= 2a + 2c$, де $2c$ є відалення між огнищами, накидають це коло на дві кнопки, застромлені в огнищах F_1 і F_2, натягають нитку олівцем і, тримаючи нитку весь час натягненою, прокреслюють замкнуту лінію, яка й буде елінсою.

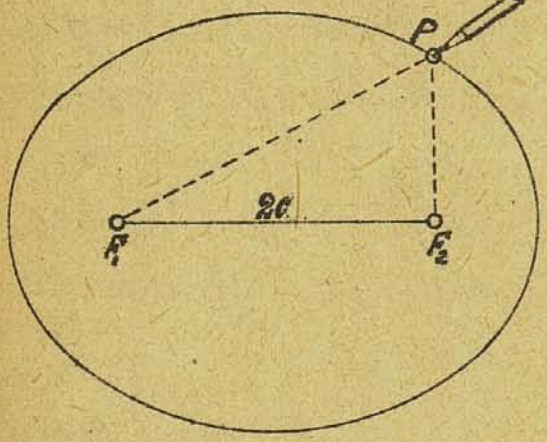


Рис. 51.

Із цього ж определіння еліпси випливає засіб будування точок еліпси при допомозі цир-

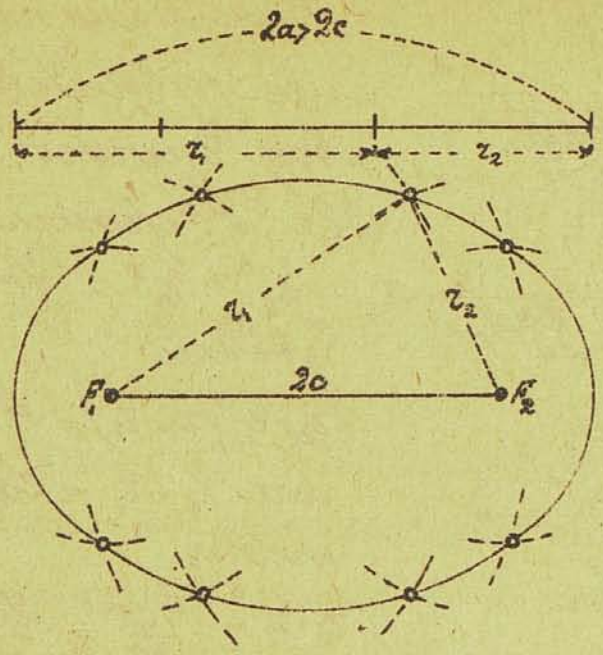


Рис. 52

нуля.

Для цього відтинок простої 2a, більший віддалення між огнищами, поділяємо на дві будь які частини r_1, r_2 (рис. 52) і лучами, рівними цим частинам, закреслюємо з огнищ F_1 і F_2 дуги, які взаємно перетинаються і дають точки еліпси. -

Складемо тепер рівнання, якому будуть задовольняти координати кожної точки еліпси.

Приймемо за вісь абсцис лінію, що проходить через огнища F_1 і F_2, а за вісь ординат простопад до лінії F_1F_2, проведений через її середину. Коли віддалення між огнищами = 2c (рис. 53), то координати огнища F_1 будуть $(+c, 0)$, а огнища $F_2(-c, 0)$. Візьмемо будь яку точку P на еліпсі з координатами (x, y); по самому определенню еліпси: $F_1P + PF_2 = 2a$; віддалення F_1P - луч-вектор (= провідний луч) точки P назовемо через r_1, а віддалення F_2P через r_2, тоді:

$$r_1 + r_2 = 2a$$

Віддалення точки P від $F_1 = r_1$ накинемо так: $r_1 = \sqrt{(c-x)^2+y^2}$ або $r_1^2 = y^2 + (c-x)^2$,

а $r_2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ -, - $r_2^2 = y^2 + (c+x)^2$

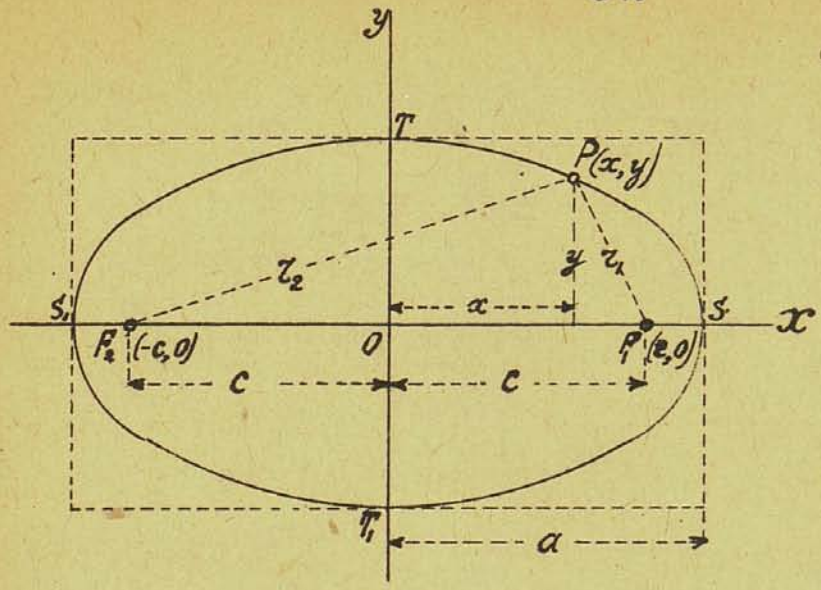


Рис. 53.

Віднімемо перше рівняння від другого, тоді одержимо:

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx;$$

звідки:

$$(r_2+r_1)(r_2-r_1) = 4cx;$$

але $r_2 + r_1 = 2a$;

тому:

$$r_2 - r_1 = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}.$$

Із двох рівностей: $r_2 + r_1 = 2a$;

$$\text{і} \quad r_2 - r_1 = \frac{2cx}{a};$$

одержимо: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$; $r_1 = a - \frac{cx}{a}$; ..... (1)

Підставимо тепер найдене значіння r_1 в рівняння: $r_1^2 = y^2 + (c-x)^2$;

$$\left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 = y^2 + (c-x)^2;$$

$$a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + c^2 - 2cx + x^2;$$

$$a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + c^2 + x^2;$$

$$a^4 + c^2x^2 = a^2y^2 + a^2c^2 + a^2x^2;$$

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

З огляду на те, що $2a = F_2P + PF_1$ завжди $> 2c = F_2F_1$, а тому $a^2 > c^2$; можемо прирівняти $a^2 - c^2$ якомусь b^2; при такому ж означенню будемо мати: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ..... (2), це ж рівняння еліпси; це ж саме рівняння можливо написати так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \text{..... (3),}$$

що називається <u>Канонічною формою</u> рів-

нання еліпси; відсіля:

$$\left.\begin{aligned} y &= \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \ldots\ldots \\ x &= \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right\} (4)$$

§46. Обслідування рівнання еліпси.

Із двох останніх взорів видко, що кожному значінню x відповідають для еліпси два рівних по абсолютній величині, але різних по знаку значіння y і навпаки, – кожному y відповідає два значіння x, які відрізняються один від другого лише знаком; із цього можливо зробити висновок, що елипса є сімметричною відносно координатних осей, або що осі координат являються осями сімметрії еліпси; крім того, кожній точці еліпси з координатами x, y відповідає точка з координатами $-x, -y$, а точці з координатами $-x, +y$ відповідає точка з координатами $+x, -y$, тому тятиви, що проходять через осередок еліпси діляться ним пополовині; такі тятиви називаються поперечниками еліпси; осередок елипси є центром сімметрії еліпси.

Коли в рівнанню $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ дамо x-у значіння 0, тоді $y = \pm b$, при тому стала b є ординатою в початку координат і називається <u>малою полубіссю</u>.

Із рівнання $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ при $y = 0$ одержимо $x = \pm a$; при тому стала a є абсцісою в почат-

ку координат і наз. <u>великою полувіссю</u>.

$T'T$, назив. малою віссю і = $2b$;

$S'S$, назив. великою віссю і = $2a$;

Для значень $x > a$ і $y > b$ значення y і x будуть мнимі (уявні), а тому всі точки еліпса знаходяться осередь прямокутника, обмеженого прямими: $x = a$ і $x = -a$; $y = b$ і $y = -b$.

Величина c називається <u>лінійним ексцентрисітетом</u> (лінійним ексцентром); відношення $\frac{2c}{2a}$ або $\frac{c}{a}$ наз. <u>відносною відосередністю еліпси</u> (числовим, або астрономічним ексцентром).

Ординати еліпси в фокусах її, де $x = c = \sqrt{a^2-b^2}$ знайдемо з рівняння:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,; \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)} = \pm \frac{b^2}{a} = p.$$

Ця подвійна ордината називається <u>параметром еліпси</u>.

$$2p = \frac{2b^2}{a} \ldots\ldots (5)$$

§47. Зміна значень постійних a і b.

1.) Коли в рівнанню еліпси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ <u>$a=b$</u>, тоді $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, або $x^2+y^2=a^2$, що є рівнанням кола.

2.) <u>Коли b остається конечним, а a збільшується до ∞</u>, тоді $y^2=b^2$, або $y=\pm b$, себто еліпса перетворяється в дві рівнобіжних прості.

3.) <u>Коли a - зостається незмінним, а b змінюється</u>, тоді для одних і тих усе x значення

у буде зменшуватися; коли $b=0$, тоді у також $=0$; еліпса переходить в просту SS_1.

§48. Рівняння еліпси не канонічного вигляду.

Рівняння еліпси, осередок якого лежить в початку координат, а головні осі a, b ідуть по осях координат, має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Найдемо тепер рівняння еліпси для того випадку, коли осередок його не лежить в початку координат, а має координати (s,t), а головні осі a і b рівнобіжні осям координат (рис. 54).

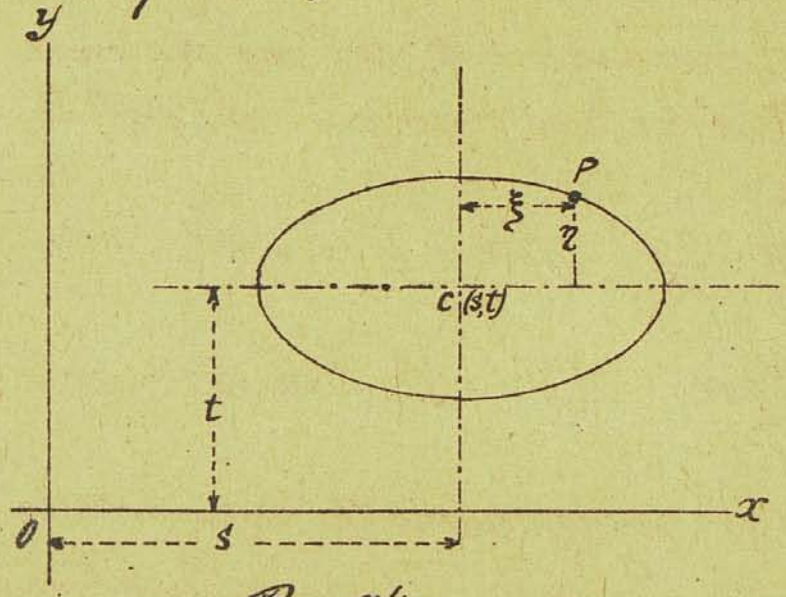


Рис 54.

Проведемо через осередок еліпси $c(s,t)$ допоможні осі координат, рівнобіжні осям Ox, Oy. Відносно цих осей рівняння еліпси буде таке:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1, \ldots (a),$$

але для даного нам укладу координат $\xi=x-s$, а $\eta=y-t$, а тому для виводу рівняння еліпси в даному укладі необхідно в р-ння (a) вставити замість ξ рівне йому $(x-s)$, а замість η — $(y-t)$,

тоді одержимо: $\frac{(x-s)^2}{a^2} + \frac{(y-t)^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots (6)$.

Це рівняння і є рівнянням еліпси для осей OX, OY.

Коли в цьому рівнянню $t=0$, а $s=a$, тоді воно прийме такий вигляд:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ або } \frac{x^2}{a^2} - \frac{2ax}{a^2} + 1 + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

або $y^2 = \frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a}\cdot\frac{x^2}{a}$;

$\frac{b^2}{a}$ – це є величина параметра еліпси, яку ми назвали раніш літерою p, тому можемо написати: $y^2 = 2px - p\cdot\frac{x^2}{a} \ldots\ldots\ldots (7)$; це й є, так зване, <u>верникове рівняння еліпси</u>.

Проаналізуємо це рівняння при різних значіннях перемінної x, а потім параметра a.

При $x=0$, $y^2=0$; у також $=0$, себ-то еліпса перетинає вісь X-ів як раз в початку координат;

при $x=a$; $y^2 = 2pa - \frac{pa^2}{a} = pa = \frac{b^2}{a}\cdot a = b^2$,

а $y = \pm b$;

при $x = 2a$; $y^2 = 4pa - \frac{4a^2p}{a} = 0$; еліпса знов перетинає вісь X-ів.

Коли станемо збільшувати <u>a</u>, не міняючи положення точки F, (рис. 55); тоді для дослідження зміни рівняння (7) необхідно спочатку $p = \frac{b^2}{a}$ написати в такому вигляді:

$$p = \frac{a^2-c^2}{a};$$

означимо $a-c$ через k, тоді $c = a-k$, а $p = \frac{a^2-(a-k)^2}{a} = 2k - \frac{k^2}{a}$, і рівняння (7) прийме вигляд: $y^2 = 2\left(2k - \frac{k^2}{a}\right)x - \frac{2k-\frac{k^2}{a}}{a}x^2$

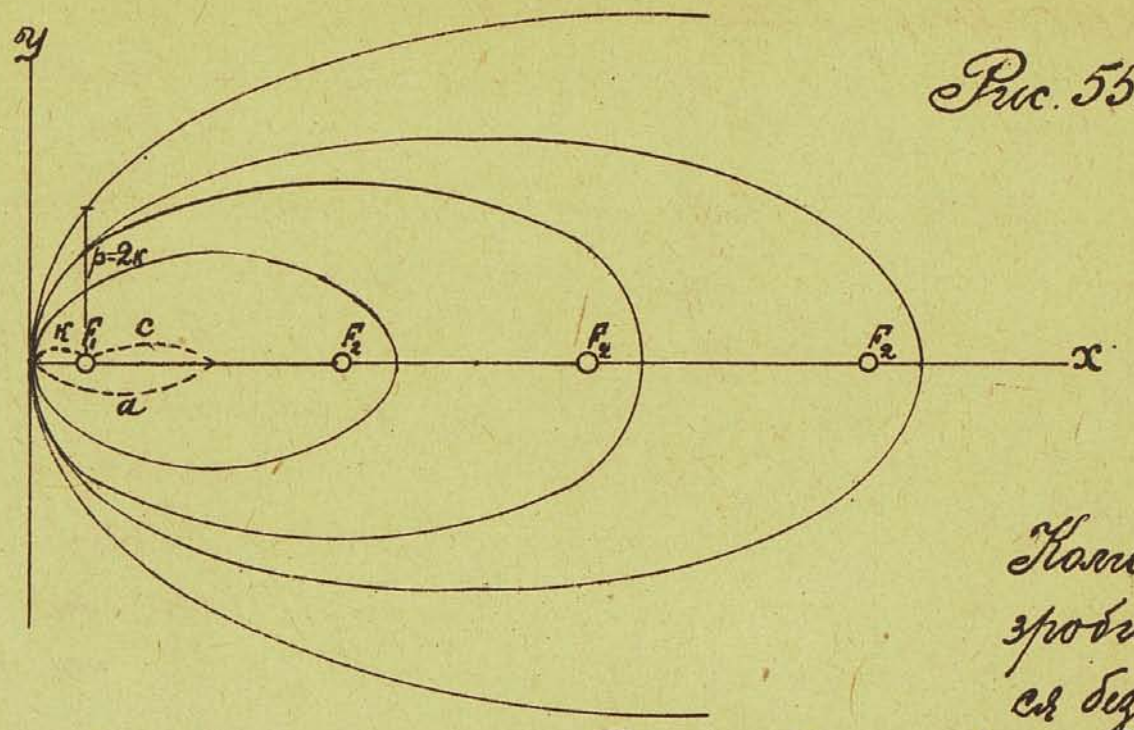


Рис. 55.

Коли a зробиться безмежно великим = ∞, тоді $p = 2k - \frac{k^2}{a}$ буде = $= 2k - 0 = 2k$;

а $y^2 = 2(2k)x - \left(\frac{2k}{a} - \frac{k^2}{a^2}\right)x^2 = 2(2k)x - 0$;

$$y^2 = 2px \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Останнє рівнання є, як побачимо далі, рівнанням параболи.

§49. Еліпса й точка.

Для кожної точки еліпси ми маємо такий звязок між її координатами та параметрами: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, або $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$.

Для тих же точок, що не лежать на еліпсі, такого звязку між координатами, себто й такого рівнання, бути не може: для точок зовнішніх еліпсі будемо мати: $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 > 0$, а для точок осередь

еліпси: $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2<0$.

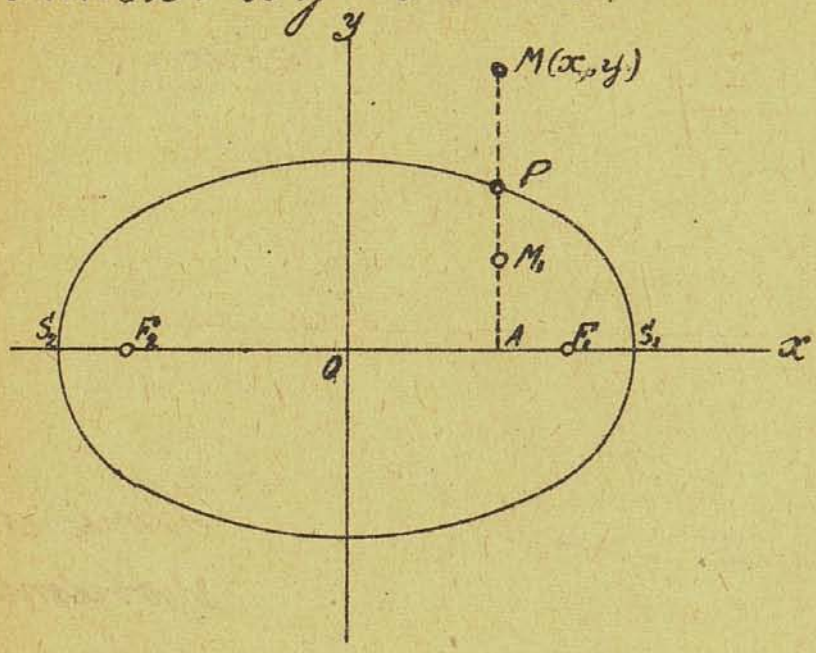


Рис. 56.

Дійсно, візьмемо точку $M(x,y)$ зовні еліпси й опустимо з неї прямопад MA на вісь x-ів, який перетинає еліпсу в точці $P(x_1,y_1)$. Очевидно, що: $\overline{MA}^2>\overline{PA}^2$, себ-то $y^2>y_1^2$, але з рівняння еліпси: $y_1^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, а тому $y^2>\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, або $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2>0$, що й треба було довести.

Для другої точки M_1, яка лежить осеределіпси, – $\overline{M_1A}^2<\overline{PA}^2$, або $y^2<y_1^2$, а відсіля: $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2<0$

§50. Еліпса й пряма.

Для знаходження спільних точок між еліпсою: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$
та прямою: $y=kx+l$ (замість l ми писали b), необхідно ці два рівняння спільно розв'язати, так як ми це робили, розглядаючи Коло. Тоді ми одержимо:

$$b^2x^2+a^2(kx+l)^2=a^2b^2, \text{ звідки:}$$

$$x_{1,2}=\frac{-a^2kb\pm ab\sqrt{a^2k^2+b^2-l^2}}{b^2+a^2k^2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-b^2 l \pm ab\kappa\sqrt{a^2\kappa^2 + b^2 - l^2}}{b^2 + a^2\kappa^2};$$

в цих виразах для x і для y знаменник є завжди додатним і для характеристики координат x, y не є рішаючим. Різні випадки залежать від значіння підкореневого вжору: $(a^2\kappa^2 + b^2 - l^2) = w$; коли $w > 0$, тоді $\sqrt{w}$ є величиною дійсною, й маємо дві пари координат (або дві точки) дійсного пересічення еліпси з простою; коли $w < 0$, тоді $\sqrt{w}$ дає лише уявні значіння і реальних точок пересічення не має; нарешті коли $w = 0$, тоді $\sqrt{w} = 0$ і ми маємо лише одну пару координат (або одну точку), які спільні для простої і для еліпси, себто маємо випадок торкання простої до еліпси (для загальности кажуть, що маємо дві злившихся точки, або дві точки з однаковими координатами). Отже, умовою приторкання простої до еліпси є:

$$a^2\kappa^2 + b^2 - l^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Приклад. Яки якій умові проста $y = x + l$ буде дотичною до еліпси $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$?

Вставимо в рів-ня (9) відомі нам значіння, тоді: $4^2 \cdot 1^2 + 3^2 - l^2 = 0$; маємо одно р-ння відносно одного l; відсіля: $l^2 = 16 + 9 = 25$, а $l = \pm 5$; рівнання дотичної буде: $y = x \pm 5$.

Дотичні мають для кривих ліній дуже велике значіння, бо напрям дотичної, що

проходить через дану точку кривої, приймається за напрямок самої кривої в тій точці й вживається для означення скорости, з якою крива в даній точці підноситься або опадає.

Тому дослідження цього питання займає поважне місце в вищому аналізі.

В диференціальному рахуванню доводиться, що tg кута нахилу дотичної до будь-якої кривої $y = f(x)$ в даній на ній точці (x_1, y_1) є перша похідна функції по x-y, себто: $k = \operatorname{tg}\alpha = y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$;
рівнання ж дотичної в точці (x_1, y_1) буде таке: $y - y_1 = f'(x)(x - x_1)$ ..... (I)
або $y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$
звідси: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{dy}{dx}$

Коли р-ння кривої дано в нерозв'язаній формі $\varphi(x, y) = 0$, тоді:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}},$$

а рівнання дотичної буде:

$$(x - x_1)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (y - y_1)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

Приклади. 1) Найти рівнання дотичної до кола: $x^2 + y^2 = r^2$ в точці (x_1, y_1)

$y^2 = r^2 - x^2$; $d(y^2) = d(r^2 - x^2)$;

$2y\,dy = -2x\,dx$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1}{y_1}$;

Рівняння дотичної буде:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1), \text{ або } yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2;$$

$$yy_1 + xx_1 = r^2.$$

2) Найти рівняння дотичної до еліпси $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці (x_1, y_1).

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2; \quad 2ydy = -2\frac{b^2}{a^2}xdx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$$

Рівняння дотичної буде:

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Рівняння дотичної до еліпси можливо вивести й елементарно в такий спосіб: установимо перш за все саме поняття дотичної, яке виходить вже із розрішення питання про пересічення еліпси й прямої. Дотичною до кривої називається та гранична січна, дві точки пересічення якої з кривою безмежно між собою зближаються; инше це можливо висловить так: дотична - це є пряма, яка зустрічає криві в двох зливаючихся точках, або в двох безмежно близьких точках. Та точка, в якій зливаються дві точки пересічення дотичної з кривою, називається точкою торкання дотичної.

Виведемо, на підставі цього определіння дотичної, рівняння дотичної до еліпси, як це було вже зроблено для кола. Візьмемо на еліпсі (рис. 57) точку $P_1(x_1, y_1)$, через яку мусить

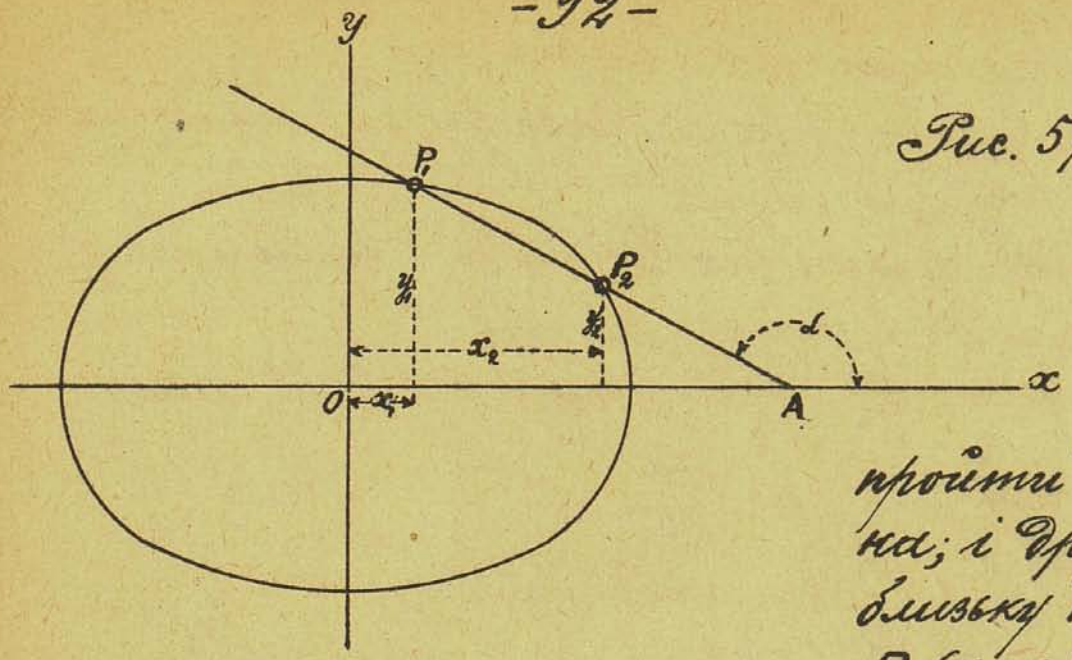


Рис. 57.

пройти дотична; і другу близьку точку $P_2(x_2, y_2)$.

Рівнання січної, що проходить через точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) буде:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \text{ або } y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Сочинник $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ є кутовий сочинник простої AP_1; цей сочинник змінюється по мірі наближення точки (x_2, y_2) до точки (x_1, y_1).

Коли ж обидві точки зіллються, себто, коли x_2 зробиться $= x_1$, а y_2 буде $= y_1$, тоді кутовий сочинник прийме вигляд:

$$\frac{y_1-y_1}{x_1-x_1} = \frac{0}{0};$$

який по своїй неопределенности не дає відповіді. Щоб знайти реальну відповідь необхідно перш за все надати кутовому сочинникові такий вигляд, щоб в ньому не було неопределенности.

Ми знаємо, що точки P_1 і P_2 лежать на

елінсі, а тому координати їх (x_1, y_1) і (x_2, y_2) мусять задовольняти рівнанню елінси, себ-то мусить бути:

$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2$; $a^2y_2^2 + b^2x_2^2 = a^2b^2$;

відніменьо тепер перше рівенство від другого: $a^2(y_2^2 - y_1^2) + b^2(x_2^2 - x_1^2) = 0$, або:

$a^2(y_2+y_1)(y_2-y_1) + b^2(x_2+x_1)(x_2-x_1) = 0$;

відсіля: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$

Таким чином, ми один вираз для кутового сочинника можемо замістити другим і написати рівнання так:

$$(y-y_1) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}(x-x_1);$$

Коли тепер точки січної наближаться до злиття, то рівнання січної перетвориться в рівнання дотичної:

$$y-y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1+x_1}{y_1+y_1}(x-x_1),$$

або $y-y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$ ..... (10)

Це й є рівнання дотичної до елінси в точці (x_1, y_1) з кутовим сочинником $m = tg\alpha = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ Написане рівнання можливо перетворити в инший вигляд, а саме: $a^2yy_1 + b^2xx_1 = a^2y_1^2 + b^2x_1^2$,

або: $a^2y_1y + b^2x_1x = a^2b^2$, і нарешті:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Останнє рівняння нагадує рівняння дотичної до кола:

$x_1 x + y_1 y = r^2$, або: $\frac{x_1 x}{r^2} + \frac{y_1 y}{r^2} = 1$

§ 51. Рівняння дотичної до еліпса можливо дати також в залежності від tg а кута, який утворює дотична з віссю абсцис. Для цього із найденого рівняння дотичної $a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2$, найдемо: $y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1}$;

Кутовий сочинник $-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ означимо через m, тоді: $y = mx + \frac{b^2}{y_1}$;

Замінимо координату y_1 через відомі нам - a, b і m, а для цього розв'яжемо спільно два рівняння:

$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2$ і $-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = m$;

$b^2 x_1 = -m a^2 y_1$; $x_1 = -\frac{m a^2 y_1}{b^2}$

$a^2 y_1^2 + \frac{b^2 m^2 a^4 y_1^2}{b^4} = a^2 b^2$;

$b^2 y_1^2 + m^2 a^2 y_1^2 = b^4$;

$y_1^2 (b^2 + m^2 a^2) = b^4$;

$y_1 = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}$;

вставивши це значіння y_1 в рівняння $y = mx + \frac{b^2}{y_1}$, одержимо:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \quad \ldots\ldots (12).$$

§52. Рівняння нормальної до еліпси.

Дана еліпса: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ і на ній точка $P(x_1, y_1)$; вивести рівняння нормальної до еліпси, яка проходить через дану точку.

Рівняння дотичної до еліпси в точці P буде: $y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$;

Нормальна, що проходить через точку P еліпси, мусить бути простопадлою до дотичної в цій точці; тому рівняння нормальної напишемо так:

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13);$$

в цьому р-нню x та y — це вже біжучі координати нормальної.

Рівнанню цьому можливо дати ще такий вигляд: $b^2x_1y - a^2y_1x + c^2x_1y_1 = 0$ (14)

§53. Різні властивості дотичної до еліпси.

Проаналізуємо рівняння дотичної до еліпси: $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$;

при $x = 0$, $y = \frac{b^2}{y_1}$; це є відтинок, який дотична до еліпси відтинає на осі ординат;

при $y = 0$, $x = \frac{a^2}{x_1}$; це є відтинок, який дотична до еліпси відтинає на осі абсцис.

Як бачимо, значіння відтинка x не залежать від b, себто для кожної еліпси

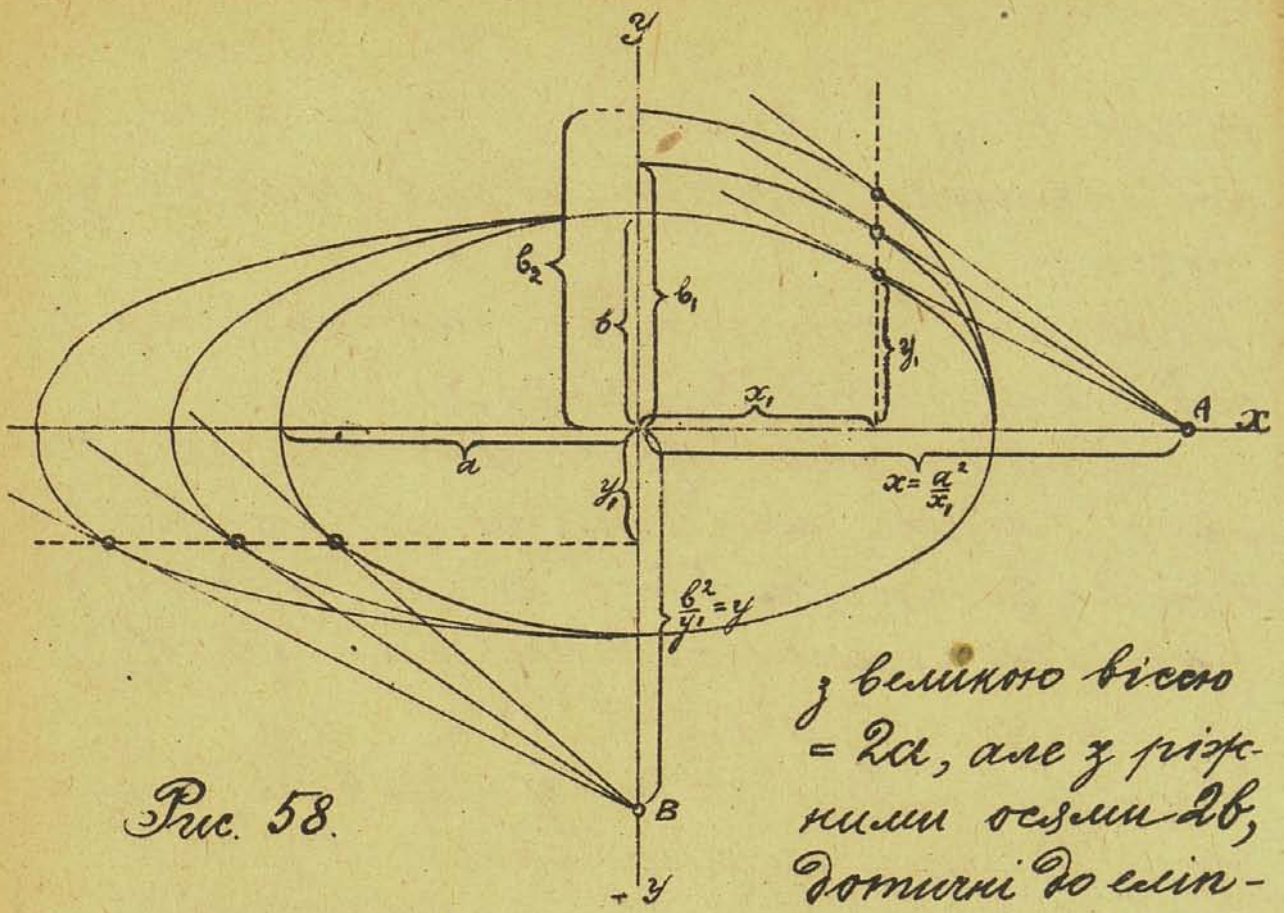


Рис. 58.

з великою віссю = 2a, але з різними осями 2b, дотичні до еліпсів в точках з однаковою абсцісою x, перетинають вісь X-ів в одній і тій же точці (A, рис. 58).

Також для кожної еліпси з малою віссю = 2b, але з різними осями 2a, дотичні до еліпсів, проведені через точки на них з однаковою ординатою y_1, перетинають вісь Y-ів в одній і тій же точці (на рис. 58 точка B).

Коли рівнання дотичної: $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$ перетворити в нормальне: $\frac{b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}} = 0$, то з нього можливо найти віддалення δ від осередку O до дотичної, яке рівняється:

$$\rho = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

§ 54. Кути між дотичною і провідними променями.

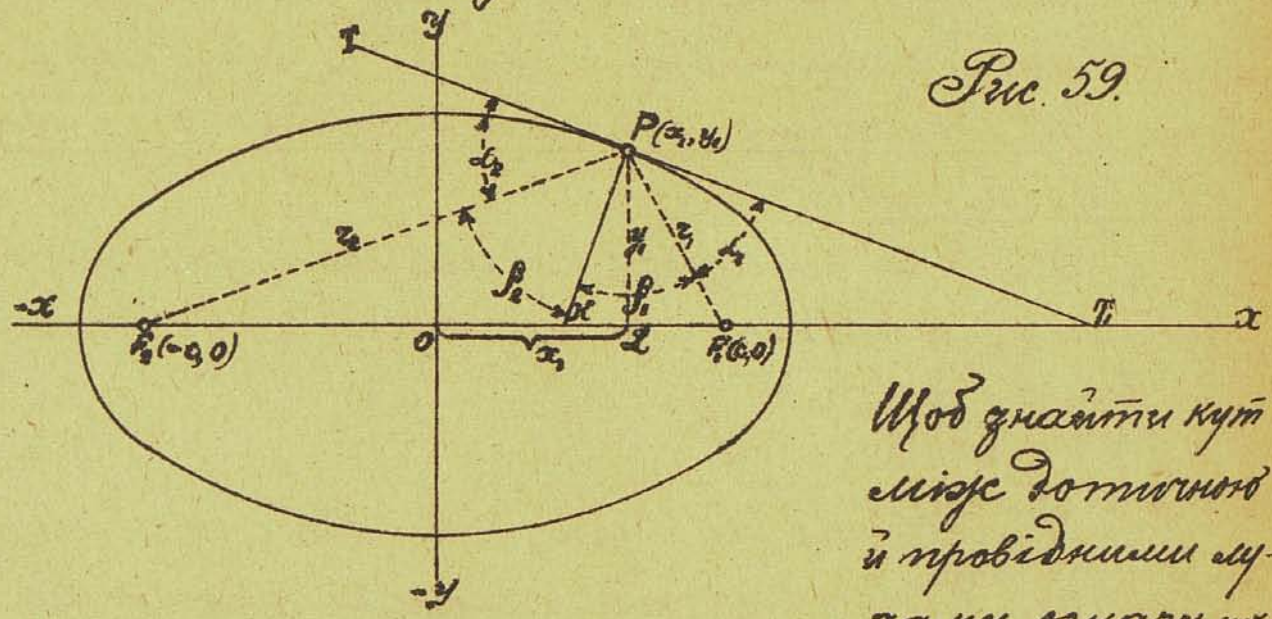


Рис. 59.

Щоб знайти кут між дотичною й провідними променями, означимо кутові сочинники: для простої r_1 —— k_1;

—— " —— r_2 —— k_2;

і для TT_1 —— k_3;

тоді кут між простими r_1 і TT_1 буде $-\alpha_1$, того ж tg рівен: $tg\alpha_1 = \frac{k_3 - k_1}{1 + k_3 k_1}$; кут між простими TT_1 і r_2 буде α_2; того $tg\alpha_2 = \frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3}$

Як видно з рисунку (відношення прямок):

$$k_1 = \frac{y_1}{x_1 - c}; \quad k_2 = \frac{y_1}{x + c}; \quad k_3 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

$$tg\alpha_1 = \frac{-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} - \frac{y_1}{x_1 - c}}{1 - \frac{b^2 x_1 y_1}{a^2 y_1 (x_1 - c)}} = \frac{-b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 + b^2 c x_1}{a^2 y_1 x_1 - a^2 c y_1 - b^2 x_1 y_1} =$$

$$= \frac{-(b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2) + b^2 c x_1}{(a^2 - b^2) x_1 y_1 - a^2 c y_1} = \frac{-b^2 a^2 + b^2 c x_1}{c^2 x_1 y_1 - a^2 c y_1} =$$

$$= \frac{b^2(cx_1 - a^2)}{cy_1(cx_1 - a^2)} = \frac{b^2}{cy_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

$$tg\alpha_2 = \frac{\frac{y_1}{x_1+c} + \frac{b^2x_1}{a^2y_1}}{1 - \frac{b^2x_1y_1}{(x_1+c)a^2y_1}} = \frac{b^2(a^2+cx_1)}{cy_1(a^2+cx_1)} = \frac{b^2}{cy_1}$$

Відсіля виходить, що $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$; тому $\alpha_1 = \alpha_2$

Таким чином дотична до еліпси утворює з провідними лучами в точці торкання рівні кути.

Очевидно далі, що нормальна поділяє кут між провідними лучами r_1 і r_2 також на двоє, себ-то: $\beta_1 = \beta_2$

§ 55. Провідні лучі, проведені з'огнищ еліпси в точку торкання, пропорційні віддаленню огнищ від дотичної

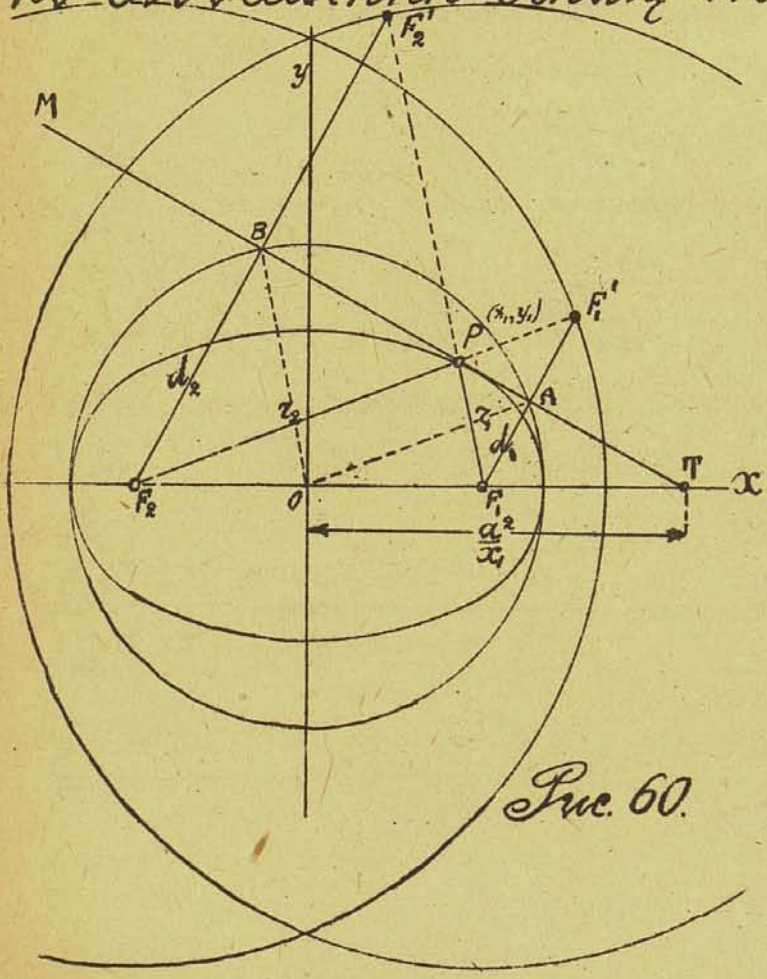


Рис. 60.

Проведемо дотичну до еліпси в точці $P(x_1, y_1)$ і продовжимо цю дотичну до пересічення з віссю X в точці T.

Напишемо р-ння дотичної до еліпси:

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1;$$

поклавши в цьому рівнанню $y=0$, знайдемо x, яке

відповідає абсцисі OT:

$$OT = \frac{a^2}{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Додамо до цього виразу й віднімемо по c, тоді одержимо віддалення очниць від точки T: $F_2T = \frac{a^2}{x_1} + c$;

$$F_1T = \frac{a^2}{x_1} - c$$

Відсіля виводимо відношення:

$$F_1T : F_2T = \left(\frac{a^2}{x_1} - c\right) : \left(\frac{a^2}{x_1} + c\right);$$

Із подібних трикутників TF_2B і TF_1A видко, що: $F_1A : F_2B = \left(\frac{a^2}{x_1} - c\right) : \left(\frac{a^2}{x_1} + c\right)$;

Як було вже раніш доведено, довжини провідних лучів виражаються такими взорами: $F_1P = a - \frac{cx_1}{a}$, або $\frac{a^2 - cx_1}{a}$

$F_2P = a + \frac{cx_1}{a}$, ... $\frac{a^2 + cx_1}{a}$

Відношення провідних лучів буде:

$$F_1P : F_2P = (a^2 - cx_1) : (a^2 + cx_1)$$

Отже звідси бачимо, що:

$$F_1A : F_2B = F_1P : F_2P,$$

або $d_1 : d_2 = r_1 : r_2$ ..... (18)

Цей висновок можливо було вивести також на підставі вже винайденої властивости дотичної, по якій кути між дотичною та провідними лучами рівні; але навпаки із того, що $d_1 : d_2 = r_1 : r_2$ можливо сказати, що трикутники F_1AP та F_2BP подібні між собою, а з цього виходить, що кут APF_1 = кутові BPF_2.

§56. Добуток із простопадів d_1 і $d_2 = b^2$.

Напишемо рівнання дотичної в нормальному вигляді:

$$\frac{b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}} = 0;$$ віддалення d_1 і d_2 одержимо, коли в це рівнання замість x, y вставимо координати $F(c,0)$ і $F_2'(-c,0)$, тоді:

$$d_1 = \frac{b^2cx_1 - a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}} = -b^2 \cdot \frac{a^2 - cx_1}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}$$

$$d_2 = \frac{-b^2cx_1 - a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}} = -b^2 \cdot \frac{a^2 + cx_1}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}$$

звідси: $d_1 d_2 = \frac{b^4(a^4 - c^2x_1^2)}{b^4x_1^2 + a^4y_1^2} = \frac{b^4(a^4 - c^2x_1^2)}{b^4x_1^2 + a^2(a^2b^2 - b^2x_1^2)} =$

$$= \frac{b^4(a^4 - c^2x_1^2)}{b^2(a^4 + b^2x_1^2 - a^2x_1^2)} = \frac{b^2(a^4 - c^2x_1^2)}{a^4 - c^2x_1^2} = b^2$$

§57. Точки перетинення простопадів із огнищ на дотичну до еліпси лежать на обводі кола, проведеного з осередку O лучем $= a$.

Продовжимо F_1A по другий бік дотичної і відкладемо $AF_1' = AF_1$, з'єднаємо P і F_1'; тоді $PF_1' = PF$ і лежить на продовженню простої F_2P; тому довжина простої $F_2F_1' = r_1 + r_2 = 2a$.

Так само можливо довести, що $F_1F_2' = 2a$.

З'єднаємо тепер O з точками A і B; із трикутників $F_2F_1'F_1$ і OAF_1 видно, що:

$$OA = \frac{F_2F_1'}{2} = \frac{2a}{2} = a;$$

а із трикутників $F_2F_2'F_1$ і OBF_2 видно, що:

$$OB = \frac{F_1F_2'}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

Таким чином видно, що основи обох перпендикулярів лежать від точки O на відстані a, себто лежать на колі, описаному з O як центра радіусом a; коло це називається описаним колом. Точку P на еліпсі взяли ми цілком довільно, а тому це правило відноситься до кожної дотичної.

§58. Зеркальні точки одного огнища еліпси відносно дотичних до цієї еліпси лежать на колі, проведеному радіусом = 2a з другого огнища.

Із аналізи того ж рис. 60 видно, що точка F_1', яка являється зеркальною точкою огнища F_1, лежить на колі, описаному з другого огнища радіусом = 2a, і ця властивість відноситься до всіх таких зеркальних для огнища F_1 точок при всяких дотичних; те ж саме буде для точок F_2', які являються зеркальними для огнища F_2: вони лежать на колі, описаному із огнища F_1 радіусом = 2a.

Кола, описані з огнищ F_1 і F_2 радіусом = 2a, називаються направляючими колами.

Кожна точка P еліпси лежить на рівному відаленню від точки F_2 і від кола; тому на еліпсу можемо ще дивитися, як на геометричне місце точок, рівновідалених

від даного кола і точки, даної осереду кола.

§ . Довжина дотичної, піддотичної, нормальної й піднормальної.

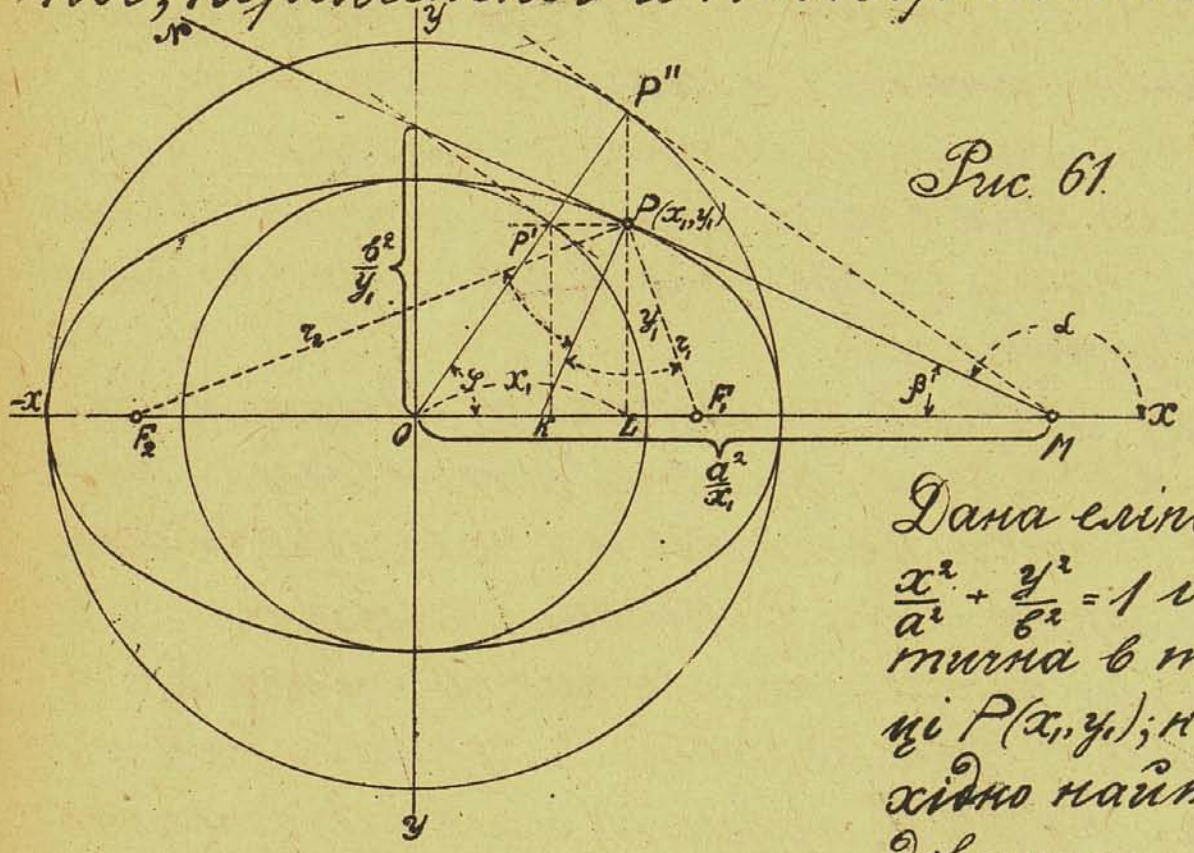


Рис. 61.

Дана елінса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ і дотична в точці $P(x_1,y_1)$; необхідно найти довжини:

LM, PM, KL, PL.

Із рівнання дотичної: $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$, кутовий сочинник $tg\alpha=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$; tg кута $\beta=180°-\alpha=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. Кут KPL є = також β.

1) Довжина піддотичної $LM=y_1\cdot ctg\beta=$

$$=y_1\cdot\frac{a^2y_1}{b^2x_1}=\frac{a^2y_1^2}{b^2x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

2) Довжина дотичної $PM=\sqrt{y_1^2+\frac{a^4y_1^4}{b^4x_1^2}}$, або

$$=\frac{y_1}{b^2x_1}\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

3) Довжина піднормальної $KL=y_1tg\beta=$

$$=y_1\cdot\frac{b^2x_1}{a^2y_1}=\frac{b^2x_1}{a^2} \quad \ldots\ldots (21)$$

4) Довжина нормальної $PK=\sqrt{y_1^2+\left(\frac{b^2x_1}{a^2}\right)^2}=$

$$= \sqrt{y_1^2 + \frac{b^4 x_1^2}{a^4}} = \frac{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}}{a^2} \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

Примітка. Координати точки P можна означити не лише через x_1 і y_1, а також через a, b і тригонометричні функції кута φ, який утворює луч описаного кола, проведений в точку P'' (рис. 61) з віссю x-ів, а саме:

замість x_1 можна взяти $a\cos\varphi$,
а замість y_1 ——"—— $-b\sin\varphi$. } $\ldots$ (23)

Цей кут φ називається ексцентричним кутом.

§60. Будування дотичних до еліпси.

Для будування дотичної до еліпси в точці, даній на еліпсі, можна вжити такі засоби:

1) На підставі тієї властивости дотичних, по якій відтинок їх на осі x-ів не залежить від малої осі еліпси, а відтинок на осі y-ів не залежить від великої осі, проводимо описане і вписане коло для даної еліпси. Від точки P на еліпсі проводимо лінії, рівнобіжні до координатних осей, до перетинання з колами в точках P' і P''; проводимо дотичну до описаного кола в точці P'' до перетинення її з віссю x-ів у точці M; проводимо також дотичну до вписаного кола в точці P' до перетинення її з віссю y-ів в точці N; пряста, яка з'єднає точки M і N буде дотичною до еліпси в точці P.

2) На підставі тієї властивости нормальної, що вона розділяє кут між провідними лучами на-двоє, можемо провести дотичну до еліпси в такий спосіб.

Проводимо (рис. 61) до даної на еліпсі точки провідні лучі r_1 і r_2. Розділяємо кут F_2PF_1 на-двоє і проводимо нормальну PK; в точці P проводимо лінію MN, простопадну до PK, яка й буде дотичною до еліпси в точці P.

При будуванню дотичних до еліпси з зовнішньої точки користаємся властивостями направляючого й описаного кол.

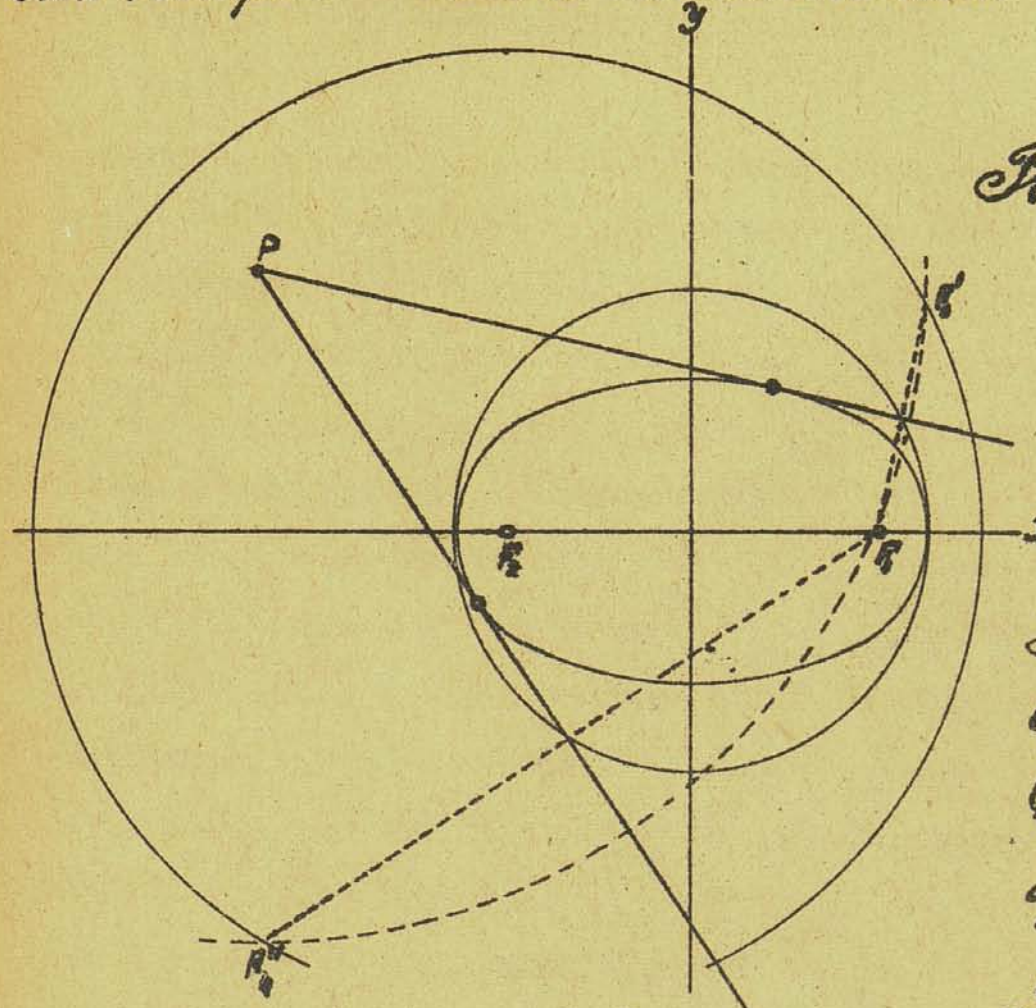


Рис. 62.

Нехай маємо еліпсу (рис. 62), у якої огнища F_1 і F_2, а велика вісь = $2a$; необхідно провести до еліпси

дотичну з точки P. Проводимо з одного огнища F_2 коло лучем = 2a, на якому лежать зеркальні точки другого огнища F_1. Коли б із точки P провести до еліпси дотичні, то зеркальні точки огнища F_1 відносно цих дотичних будуть лежати від P на однаковому віддаленню = PF_1; відсіля виходить засіб будування дотичної:
проводимо із точки P коло лучем = PF_1; це коло перетне направляюче коло в двох точках: F_1' і F_1''; з'єднаємо F_1 з F_1' і з F_1''. Проведем через середини F_1F_1' і F_1F_1'' простопади, вони пройдуть через точку P і будуть дотичними до еліпси.

Для проведення дотичної до еліпси із зовнішньої точки можна також скористатися описаним колом. Нехай маємо еліпсу, в якої відомі: велика вісь і огнища F_1, F_2.

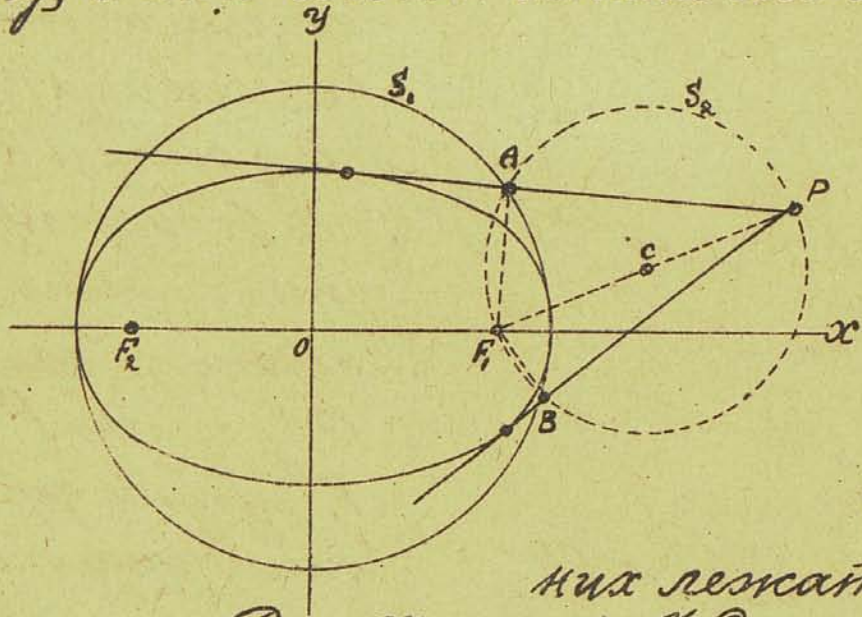


Рис. 63.

Необхідно з точки P провести до еліпси дотичні. Проведем описане коло. Кінці простопадів до дотичних лежать на цьому колі. З другого боку дотичні з простопадами до

них з огнища F_1 утворюють прості кути, що опираються на лінію PF_1, як на поперечник кола, описаного з точки C лучем = половині PF_1. Відсіля виникає такий спосіб розв'язання задачі:

з'єднуємо точку P з F_1; ділимо PF_1 на-двоє; з точки C проводимо коло S_2, а з точки O коло S_1 лучем = a; ці два кола перетинаються в точках A і B. Проводимо через P і A, P і B прості, які будуть дотичними до еліпси.

При допомозі цих же двох кол розв'язується задача про проведення дотичної до еліпси рівнобіжно даній простій (рис. 64).

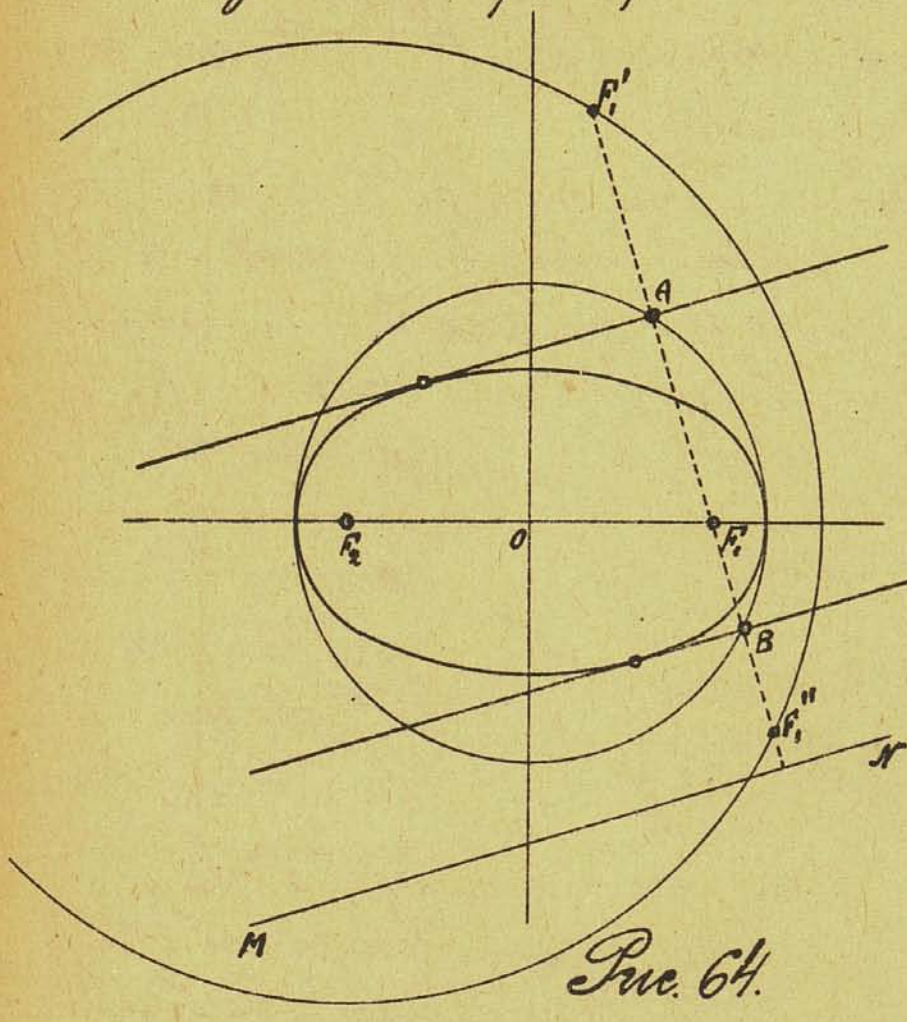


Рис. 64.

Проводимо направляюче коло для дзеркальних точок огнища F_1; через огнище F_1 проводимо просту, простопадно до даної MN; точки F_1', F_1'' будуть дзеркальними точками огнища F_1; прості, рівнобіжні MN, проведені через

середини відтинків F_1F_1' та F_1F_1'' будуть найближчими.

§61. Директриси еліпси.

Директрисами еліпси називаються такі дві прості, які проходять рівнобіжно вісі ординат на віддаленню від неї $= \frac{a^2}{c}$.

Директриси мають ту властивість, що відношення віддалень будь-якої точки еліпси до огнища та до відповідної цьому огнищу директриси є величиною постійною й рівна числовому ексцентрові еліпси $\frac{c}{a}$, який прийнято означати через ε.

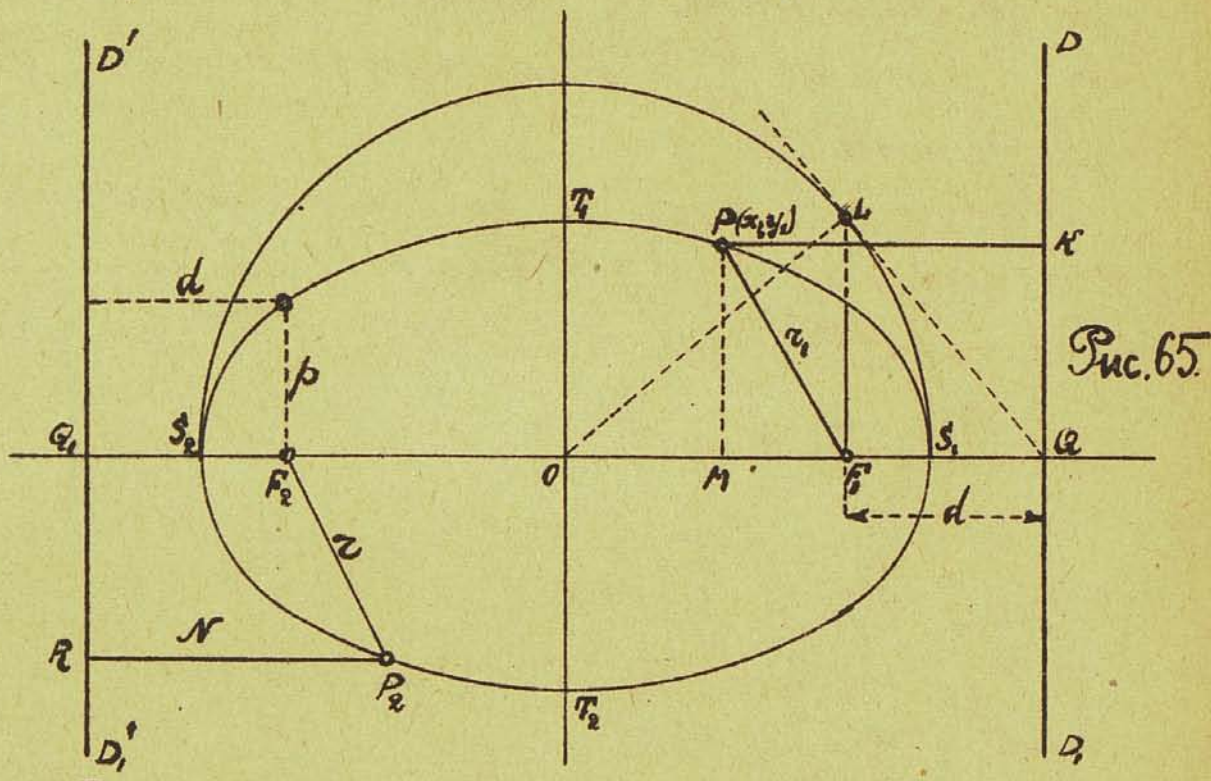


Рис. 65.

Возьмемо еліпсу, на ній точку $P(x_1, y_1)$; проведемо просту DD_1 рівнобіжно осі ординат на віддаленню від початку координат $= \frac{a^2}{c}$; це віддалення буде більше a, бо його

можна написати так:

$$a \cdot \frac{a}{c};\ \frac{a}{c} > 1,\ \text{тому й}\ a \cdot \frac{a}{c} > a;$$

$$OQ = \frac{a^2}{c},\ \text{або}\ OQ \cdot c = a^2.$$

Із цього взору видно, що a є середня пропорціональна між c і OQ, а тому OQ легко найти будуванням:
проводимо описане коло; поставимо простопад із F_1 до OX, із точки L проведемо до кола дотичну, яка й перетне вісь X'іб в деякій точці Q; дійсно, кут OLQ є простий, а тому:
$OQ : OL = OL : OF_1$ або $OQ : a = a : c$;

$$OQ \cdot c = a^2.$$

Проведемо тепер із точки P дві прости: одну в огнище F_1, а другу простопадно до директриси PK.

Довжина луча r_1, як було вже раніш показано, $a - \frac{cx}{a}$ (взір 1), або $a - ex$;
довжина $PK = MQ = OQ - OM = \frac{a^2}{c} - x$; але $\frac{c}{a} = e$, тому $\frac{a^2}{c} = \frac{a}{c/a} = \frac{a}{e}$;

$$r_1 = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a}{e} - x.$$

Отже $PK = \frac{a - ex}{e}$

Відношення PF_1 до PK буде таке:

$$PF_1 : PK = (a - ex) : \left(\frac{a - ex}{a}\right) = e = \frac{c}{a} \quad \ldots (24)$$

Таку ж властивість має друга директриса для другого огнища.

Для кола числовий ексцентр $e = 0$, а огнища зливаються з осередком; для еліп-

ся цього виду PF_1 буде PO, або луч кола r; тоді $r : PK = 0$; це можливо для конечного r лише при безмежному віддаленню директриси від початку координат.

В кожній еліпсі єсть величин: a, b, c, d, e і p. (рис. 65) звязані між собою определеними відношеннями, а саме:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$p = ed \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Далі точка S_2 лежить від F_1 на віддаленню рівному $a+c$, а від директриси DD_1 на віддаленню $d+c+a$; із самого определення директриси, по якому $r = e\,N$, маємо:

$$a+c = e(d+c+a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Та ж точка S_2 від огнища F_2 лежить на $a-c$, а від директриси $D'D_1'$ на $(d+c-a)$, а тому: $a-c = e(d+c-a) \quad \ldots\ldots \text{(IV)}$

Коли ми із означених єдности величин знаємо дві, то останні знайдемо з чотирьох приведених рівнань.

Останні два рівнання можно перефор-мувати в инший вигляд.

Додавши р-ння (III) до (IV), одержимо:

$$a = e(d+c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

Вставимо сюди замість c = йому ea, тоді одержимо:

$$a(1-e^2) = ed \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VI)},$$

або: $a\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right) = ed$ чи $\frac{b^2}{a} = ed$ (VII)

$$\frac{b^2}{a} = \frac{c}{a}\cdot d; \quad cd = b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(VIII)}$$

також з (VI) — $b^2 = aed$; але $ed = p$,
а тому $b^2 = pa$ . . . . . (IX)

Приклад: Для елипси відомі - $a = 5$ та $b = 3$.
Знайти решту величин?

$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$; $c = 4$;

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$;

$cd = b^2$; $d = \frac{b^2}{c} = \frac{9}{4}$

$p = ed$; $p = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{5}$

§62. Поперечники (діаметри) елипси. Сопряжені поперечники.

Поперечником елипси називається кожна хорда, яка проходить через осередок елипси. Геометричне місце середин рівнобіжних хорд є пряста, яка проходить через осередок елипси, себто є поперечником елипси

Рівнання січної елипси, яка перетинає елипсу в двох точках із координатами (x_1, y_1) та (x_2, y_2), було вже виведено в такому вигляді: $y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}(x - x_1)$ (див. вз. 10)

Це рівнання можна перепсати так:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$$

Тому, що січна проходить й через точку (x_2, y_2) справедлива така тотожність:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1},$$

останній вираз можливо перепсати в та-

кій формі: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}(x_2+x_1)}{\frac{1}{2}(y_2+y_1)}$ . . . . . (25)

Вираз $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ є ніщо инше, як tg кута α, під яким січна нахилена до вісі X-ів; назвемо його літерою K; вирази $\frac{1}{2}(x_2+x_1)$ та $\frac{1}{2}(y_2+y_1)$ означають абсцісу й ординату середини хорди; назовемо їх через ξ і η; тоді можемо написати:

$$tg\alpha = K = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\xi}{\eta} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

Для кожної иншої хорди, що рівнобіжна першій, одержимо також

$$tg\alpha = K = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\xi_1}{\eta_1};$$

Відношення $\frac{\xi}{\eta}$ буде для всіх таких хорд однакове: $\frac{\xi}{\eta} = -\frac{a^2}{b^2}tg\alpha$, а тому можемо написати: $\eta = -\frac{b^2}{a^2 tg\alpha}\cdot\xi$ . . . . . (27)

або $\eta = K_1\xi$ . . (28), де $K_1 = -\frac{b^2}{a^2K}$

Рівнання: $\eta = K_1\xi$ є рівнанням простої, яка проходить через початок координат і має кутовий сочинник – $K_1 = -\frac{b^2}{a^2K}$

Отже, можна сказати, що <u>середини рівнобіжних хорд лежать на поперечнику еліпси</u>.

Серед цілого пучку рівнобіжних хорд є одна тятива, яка проходить через осередок еліпси і є, таким чином, поперечником еліпси. Кутовий сочинник цього поперечника, як і кожної рівнобіжної йому тятиви, є = K. Добуток кутового сочинника цього поперечника на кутовий сочинник K,

поперечника, що поділяє по половині тятиви, рівнобіжні першому, є величина стала:

$$k k_1 = k \cdot -\frac{b^2}{a^2 k} = -\frac{b^2}{a^2} \quad \ldots\ldots (29)$$

Такі поперечники, які задовольняють виведений умові, називаються <u>сопряженими</u> (<u>conjugiert, sdružený</u>)

Розглянемо тепер тятиви, рівнобіжні найденому поперечникові: $\eta = k_1 \xi$

Кутовий сочинник всіх цих тятив $\epsilon = k_1$.

Рівнання поперечника, що пройде через середини їх, буде таке:

$$\eta = -\frac{b^2}{a^2 k_1} \cdot \xi,$$

вставивши в цей взір замість k_1 = йому $-\frac{b^2}{a^2 k}$, одержимо, що $\eta = k \xi \quad \ldots\ldots (30)$

Це рівнання показує, що новий поперечник є рівнобіжним першому ряду тятив і є сопряженим з першим поперечником.

Отже, <u>сопряжені поперечники проходять через середини взаємно рівнобіжних тятив.</u>

Ця властивість сопряжених поперечників дає нам можливість найти осередок еліпси, коли дано лише її обвід. Для цього проводимо дві рівнобіжні тятиви одного напрямку і дві рівнобіжних тятиви другого напрямку; сопряжені поперечники цих тятив перетнуться в осередку еліпси.

Із цього ж положення виникає такий спосіб будування сопряжених поперечників. Через кінечні точки A і B будь якого поперек-

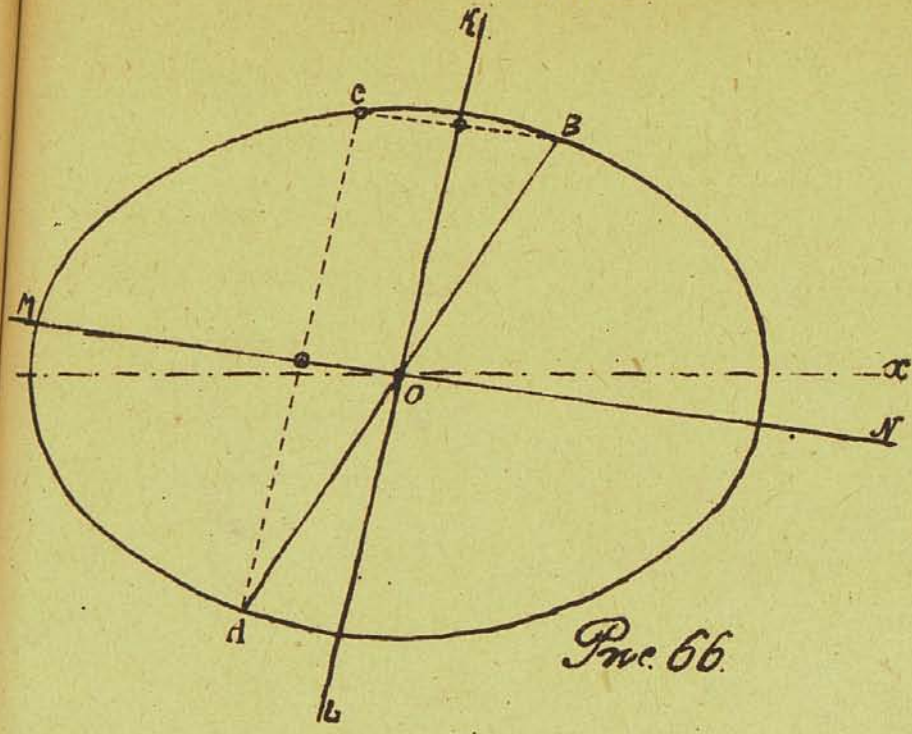


Рис. 66.

ника AB проведемо 2 тятиви так, щоб вони зійшлися в одній точці C; коли тепер провести прості через середини тятив та осередок еліпси, то ці поперечники будуть сопряженими, бо поперечник KL ділить тятиви, рівнобіжні CB, на двоє і, як видно з трикутника ACB, він є рівнобіжним AC; поперечник MN ділить тятиву AC надвоє й є рівнобіжним тятиві CB.

Як особливий випадок сопряжених поперечників треба розглядати головні осі еліпси

Для поперечника, що зливається з головною віссю, кутовий сочинник $k = tg\alpha = 0$; тоді для сопряженого з ним — кутовий сочинник $k_1 = -\frac{b^2}{a^2 k} = -\frac{b^2}{a^2 0} = \infty$.

Відсіля виходить, що сопряжений поперечник йде під кутом 90° до першого, себто зілляється з віссю Y-ів.

Коли еліпса дана лише її обводом, то знайти головні осі можна так: находимо спочатку осередок еліпси, проводимо по-

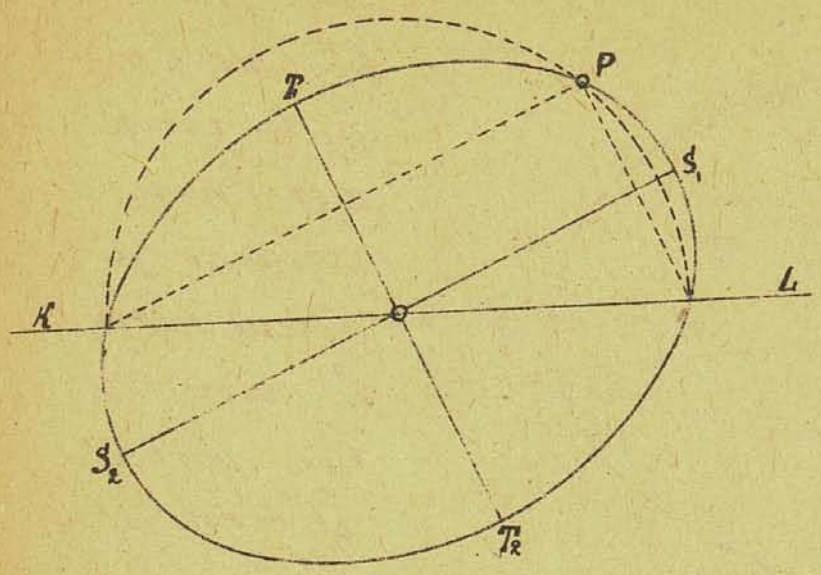


Рис. 67.

тім будь-який поперечник KL, будуємо на ньому півкола, яке перетне еліпсу в точці P; з'єднуємо точку P з точками K і L; тоді тягтиви: KP і PL взаємно простопадні, а поперечники S_1S_2 і T_1T_2, як сопряжені взаємно простопадні, будуть головними осями еліпси.

§63. Найти довжини сопряжених полупоперечників a' і b' (рис. 68).

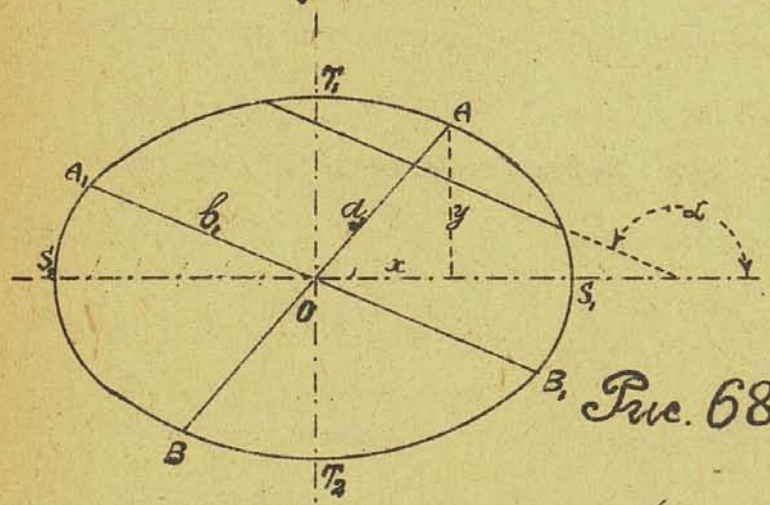


Рис. 68.

Найдемо спочатку координати точки A – точки перетинення поперечника AB з еліпсою. Ці координати мусять задовольняти рівнанням:

$$1)\quad y = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\alpha}\cdot x; \qquad \text{(див. 27)}$$

$$2)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

Із цих двох рівнань дерегуємо:

$$x^2 = \frac{a^4 tg^2\alpha}{b^2 + a^2 tg^2\alpha} \; ; \quad y^2 = \frac{b^4}{b^2 + a^2 tg^2\alpha}$$

Із рис. 68 видно, що $AO^2 = y^2 + x^2 =$

$$= \frac{a^4 tg^2\alpha}{b^2 + a^2 tg^2\alpha} + \frac{b^4}{b^2 + a^2 tg^2\alpha} = \frac{a^4 tg^2\alpha + b^4}{b^2 + a^2 tg^2\alpha} ;$$

$$AO = \sqrt{\frac{a^4 tg^2\alpha + b^4}{b^2 + a^2 tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{a^4 \sin^2\alpha + b^4 \cos^2\alpha}{b^2 \cos^2\alpha + a^2 \sin^2\alpha}}$$

Таким чином довжина полупоперечника:

$$a' = \sqrt{\frac{a^4 \sin^2\alpha + b^4 \cos^2\alpha}{b^2 \cos^2\alpha + a^2 \sin^2\alpha}} \quad \ldots\ldots (31)$$

Знайдемо тепер координати точки A' другого поперечника; рівнання цього поп-ка буде: $y = tg\alpha \cdot x$

Розв'язавши його спільно з рівнанням еліпси: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, одержимо:

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 tg^2\alpha} \; ; \quad y^2 = \frac{a^2 b^2 tg^2\alpha}{b^2 + a^2 tg^2\alpha} ;$$

Відсіля $OA'^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + tg^2\alpha)}{b^2 + a^2 tg^2\alpha}$, або

$$OA' = b' = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2\alpha + a^2 \sin^2\alpha}} \quad \ldots\ldots (32)$$

§64. Сума квадратів двох спряжених полупоперечників є для даної еліпси сталою рівною сумі квадратів півосей.

Із попереднього § маємо, що:

$$a'^2 = \frac{a^4 tg^2\alpha + b^4}{b^2 + a^2 tg^2\alpha} \quad \text{та} \quad b'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + tg^2\alpha)}{b^2 + a^2 tg^2\alpha}$$

Відсіля: $a'^2 + b'^2 =$

$$= \frac{a^4 tg^2\alpha + b^4 + a^2b^2 + a^2b^2 tg^2\alpha}{b^2 + a^2 tg^2\alpha} =$$

$$= \frac{a^2(a^2 tg^2\alpha + b^2) + b^2(a^2 tg^2\alpha + b^2)}{b^2 + a^2 tg^2\alpha} = a^2 + b^2.$$

Отже: $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ . . . . . (33)

При зміні кута α довжини полупоперечників a' і b', як видно зі взорів (31) і (32), будуть також міняться, при чому при значінню $\alpha = 0$: $a' = b$, а $b' = a$; при значінню $\alpha = 90°$: $a' = a$, $b' = b$, а при инших значіннях α: a' і b' будуть $> b$ та $< a$. Нехай дійсно $\alpha = 0$; тоді:

$$a' = \sqrt{\frac{a^4 \sin^2\alpha + b^4 \cos^2\alpha}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{b^4}{b^2}} = |b|;$$

$$b' = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2}} = |a|;$$

при $\alpha = 90°$

$$a' = \sqrt{\frac{a^4}{a^2}} = |a|$$

$$b' = \frac{ab}{\sqrt{a^2}} = |b|$$

Обслідуємо тепер, чому рівняється b' при всякому инчому α: $b' = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}}$; як би ми b в знаменнику цього взору замість b^2 поставили більшу величину a^2, то весь знаменник збільшився б, а дріб зменшився б; і цей зменшений дріб рівнявся б:

$\frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}} = |b|$; дійсний же дріб до заміни b^2 через a^2 буде $> b$;

отже $b' > b$.

Як би в тому же знаменнику замість a^2 написати b^2, то він зменшиться, а дріб

збільшиться і буде = a, а тому $b' < a$

Коли $b' > b$ і $< a$, то з рівняння:

$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$, можливо вивести, що й a' буде $> b$ і $< a$

Гіпербола.

§65. Рівняння гіперболи.

Гіперболою називається, як було раніш уже сказано, геометричне місце точок, відділення яких від двох даних точок (огнищ) дає постійну різницю. На підставі цього определення можно вивести рівняння гіперболи.

Виберемо положення координатних осей таке ж, як при еліпсі, себ-то, щоб вісь X-ів пройшла через дані сталі точки (огнища), а вісь Y-ів пройшла через середину відділення між огнищами. Нехай відділення між огнищами буде = $2c$, а постійна різниця відділень точки гіперболи від огнищ = $2a$

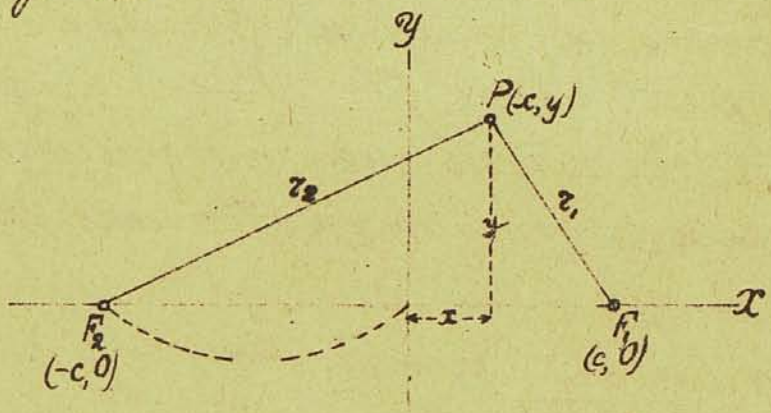


Рис. 69.

Тоді: $F_2P - F_1P = 2a$, або $r_2 - r_1 = 2a$.

По взору для відділення між двома точками маємо: $F_2P = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$; $F_1P = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$;

Згідно определення гіперболи маємо:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \quad \ldots\ldots (1)$$

Це й є рівнання гіперболи відносно прийнятих осей; його можливо упростити, позбавившись від радикалів у такий спосіб: $\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$;

Відсіля: $-a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$;

$$\left(-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = (a^2-cx)^2;$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2);$$

Це рівнання має такий же самий вигляд, як і рівнання еліпси до заміни a^2-c^2 через b^2, але різниця є в тому, що тепер $a<c$, а не більше, як то було при еліпсі. Дійсно, різниця двох боків трикутника F_1F_2 менша третього боку:

$$PF_2 - PF_1 < F_1F_2, \text{ себ-то } 2a < 2c, \text{ або } a < c;$$

тому a^2-c^2 є величина від'ємна, яку можна означити через $(-b^2)$, де b — величина дійсна; тоді: $a^2-c^2 = -b^2 \quad \ldots\ldots (2)$, а рівнання гіперболи прийме вигляд:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \quad \ldots\ldots (3)$$ *)

Розділивши всі члени цього рівнання на $-a^2b^2$, держимо остаточно таке рівнання гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots (4)$

З рівності (2) бачимо, що:

$$c = \sqrt{a^2+b^2};$$

$\frac{c}{x}$ називається лінійним ексцентром гіпер-

*) Рівнання гіперболи можна держати з рівння еліпси: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, коли в останньому замість b^2 вставити $[-b^2]$

боли.

Відношення $\frac{c}{a}$ називається числовим ексцентром гіперболи, означаємо його, як і в еліпсі, літерою e:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = e;$$ числовий ексцентр гіперболи є більше одиниці, бо $c > a$.

Із рівнань: $r_2^2 = (x+c)^2 + y^2$ і $r_1^2 = (x-c)^2 + y^2$ можливо написати: $r_2^2 - r_1^2 = 4cx$ . . . . (5)

$$\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 - r_1} = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}; \quad r_2 + r_1 = \frac{2cx}{a}; \quad r_2 - r_1 = 2a$$

Відсіля: $r_2 = \frac{cx}{a} + a$; $r_1 = \frac{cx}{a} - a$

Тому ж, що $\frac{c}{a} = e$:

$$r_2 = ex + a; \quad r_1 = ex - a \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

(Для еліпси $r_2 = a + ex$; $r_1 = a - ex$).

§66. Обслідування рівнання гіперболи.

Обслідуємо виведене рівнання гіперболи, щоб скласти собі уявленнє відносно вигляду цієї кривої.

1. Поперед усього можна вивести, що гіпербола лежить сімметрично відносно осей координат, і що початок координат являється осередком гіперболи. Дійсно, бі-орсучі координати входять в р-ння гіперболи в другому степені; тому, коли точка $P_1(x_1, y_1)$ лежить на гіперболі, себ-то координати її (x_1, y_1) задовольняють рівнанню гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то і координати точок $P_2(-x_1, y_1)$, $P_3(-x_1, -y_1)$, $P_4(x_1, -y_1)$, що сімметри-

ні з точкою P_1 відносно осей, або відносно початку координат, будуть задовольняти тому ж рівнанню, себ-то, ці точки лежать на гіперболі.

Тятиви гіперболи P_1P_3 проходять <u>очевидячки</u> через початок координат і в цьому початку половиняться ($P_1O = P_3O$). При всякому положенню точки P_1 на гіперболі буде те ж саме. Отже, кожна тятива гіперболи, що проходить через початок координат, ділиться в цьому початку рівно на двоє. Таким чином, <u>початок координат</u> являється <u>осередком гіперболи</u>.

2. Рівнання гіперболи можна написати в вигляді, розв'язаному відносно y:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Із цього рівнання видно, що кожному значінню x відповідає два рівних, але з різними знаками, значіння y, себ-то що гіпербола симетрична відносно осі X-ів.

Із того ж рівнання виходить, що ордината y буде дійсною величиною лише тоді, коли $x \geqq a$; Коли ж $x < a$, то y робиться величиною марівною (мнимою), а се означає, що <u>точок гіперболи з абсцісами, меньшими a, зовсім не існує</u>.

3. Проведемо прості, які означаються рівнаннями: $y = \frac{b}{a} x$; $y = -\frac{b}{a} x$.

і порівняємо, при одних і тих же абсцісах, абсолютні величини ординат точок цих

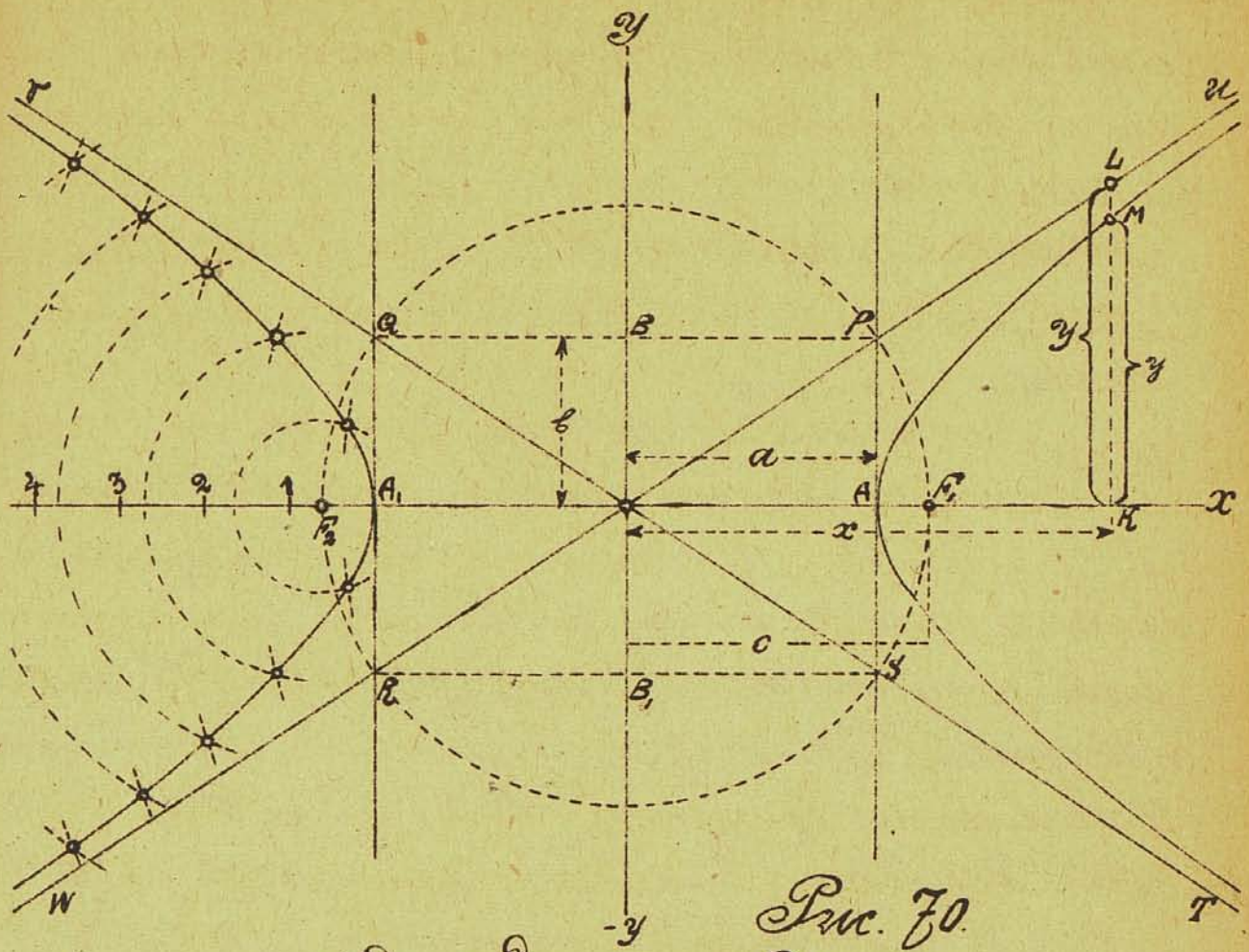


Рис. 70.

простих з відповідними ординатами точок гіперболи.

Проста, що означається рівнянням: $y = \frac{b}{a}x$, проходить через початок координат (рис. 70), точку $P(a, b)$ і точку $R(-a, -b)$, бо координати цих точок задовольняють р-ння $y = \frac{b}{a}x$.

В подібний же спосіб переконуємося, що проста, яка означена рівнянням: $y = -\frac{b}{a}x$, проходить через початок координат і точки $Q(-a, b)$ і $S(a, -b)$.

Означимо через Y ординату будь якої точки однієї з цих простих, а через y відповідну ординату точки гіперболи. Ясна річ, що при $|x| > a$ має місто нерівенство: $x^2 > (x^2 - a^2)$,

або $|x|$ [1] $> \sqrt{x^2-a^2}$,
а тому $\left|\frac{b}{a}x\right| > \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, або $|Y| > |y|$,
себ-то: <u>ординати точок двох накреслених простих завжди більші по абсолютній величині ніж ординати відповідних точок гіперболи.</u>

Це нерівенство показує, що точки гіперболи лежать осереді двох вертикових кутів UOT і YOW, а приймаючи на увагу, що дійсних точок гіперболи не має в безмежній смузі, окресленій простими QR і PS, можна сказати, що гіпербола лежить вся осереді безмежних областей $UPST$ і $YQRW$.

4. Обслідуємо далі питання, як близько підходить гіпербола до меж указаних областей, себ-то: коли $KL = Y$ і $KM = y$, то як велика різниця ML відповідних ординат і ця різниця міняється при збільшенню абсциc. Із рисунка (70) маємо:

$ML = KL - KM = Y - y$, при чому, з огляду на сімєтрію положення гіперболи відносно осей координат, вистарчить обслідувати питання лише для першої четверти, себ-то для тієї части площі, яка лежить між додатніми напрямками осей. Приймаючи x, y і Y додатними, будемо мати:

$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2-a^2}\right)$$

<u>При збільшенню абсциси x ця різниця</u>

[1] Вираз в рисках, як $|x|$, означає абсолютну величину.

міняється, але з одержаного виразу трудно вияснити, чи вона збільшується, чи зменшується. Перетворимо цей вираз в ірраціональний, помноживши й поділивши його через $x+\sqrt{x^2-a^2}$;

$$y-y=\frac{b(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})},$$

звідки: $$y-y=\frac{ab}{x+\sqrt{a^2-x^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Із останнього виразу ясно, що коли додатне x збільшується, то знаменник також збільшується, а чисельник залишається постійним; тому різниця $y-y$ весь час зменшується і, значить, точка гіперболи M по мірі збільшення абсциси все наближається до прямої OH, але досягає цієї прямої лише в безмежності, бо тоді $y-y=\frac{ab}{\infty}=0$.

Пряма, до якої крива все наближається, але її досягає лише в безмежності, називається асимптотою*) цієї кривої.

Гіпербола має дві асимптоти HH і PT.

Гіпербола, як видно з її рівняння, перетинає вісь абсцис в точках $A,(a,0)$ і $A,(-a,0)$, а осі ординат зовсім не перетинає, бо для y при $x=0$ одержуємо мариві значіння:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{-a^2}, \text{ або } y=\pm b\sqrt{-1};$$

Відрізок $AA_1=2a$ називається дійсною віссю гіперболи; відрізок $BB_1=2b$ - маріевою

*) від грецького $\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau\sigma\varsigma$, частина α = не- і $\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau\sigma\varsigma$

віссю гіперболи, а обидві разом - головними осями гіперболи. Точки A і A, називаються вершинами гіперболи.

В тому випадку, коли a=b, рівняння гіперболи приймає такий вигляд:

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

така гіпербола називається рівнобокою, або прямокутною гіперболою.

Коли через точку F, провести ординату, то довжина її $y = \pm \frac{b^2}{a}$ . . . . . (9), ця ордината називається полупараметром гіперболи.

§67. Будування гіперболи.

Нехай маємо рівняння гіперболи в канонічному вигляді: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
як збудувати цю гіперболу, її асімптоти, огнища?

Коли ми знаємо довжину осей гіперболи: 2a і 2b, тоді можемо збудувати прямокутник PQRS (рис. 70), якого боки рівні осям гіперболи й який розміщається сімметрично відносно осей координат. Косини цього прямокутника будуть асімптотами гіперболи, тому що вершки його мають координати: (a, b), (-a, b), (-a, -b) і (a, -b), які задовольняють рівнанням асімптот.

З того ж рисунка видно, що OP, як протиприлежна прямокутного трикутника OAP з прямими a і b рівна $\sqrt{a^2+b^2}$, себто = c,

віддаленню осередку O від огнищ; вигляда виходить, що для находження огнищ треба описати із точки O коло лучем, рівним півосині прямокутника. Точки F_1 і F_2, в яких це коло $\frac{1}{2}$ не вісь X-ів, і будуть огнищами гіперболи.

Для знаходження точок гіперболи можливо скористатися рівнанням її $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, або $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$; коли в останньому взорі надавати x будь які значіння, то будемо дістигувати відповідні значіння для y, і по точках збудуємо гіперболу.

Можна також скористатися тою властивістю гіперболи, що $r_2 - r_1 = 2a$.

Легко найти, скільки забажаємо, таких пар простих, різниця яких була б рівна $2a$; коли лучами, рівними цим простим, нарисуємо кола, одно з огнища F_1, а друге з огнища F_2, то точки перетинення цих кол і будуть точками гіперболи (рис. 70).

§68. Гіпербола й точки.

Тим же засобом, що й для елїпси, можна показати, що для точок гіперболи, які лежать ліпше її боками (осередом гіперболи):

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 < 0;$$

Для точок, що лежать на гіперболі:

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0;$$

Для решти точок на площі:

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 > 0;$$

§69. Рівняння дотичної і нормальної до гіперболи.

Рівняння дотичної до гіперболи виводиться в такий же самий спосіб, як і для еліпси, а різниця в остаточному виводі буде залежати від того, що для гіперболи треба взяти $-b^2$ там, де для еліпси було b^2, а тому взір для дотичної буде такий:

$$y-y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1) \quad \ldots\ldots\ldots (10),$$

або $a^2y_1y - b^2x_1x = -a^2b^2$,

чи: $$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots (11)$$

Рівняння же нормальної до гіперболи в точці (x_1, y_1) буде таке:

$$y-y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1) \quad \ldots\ldots (12)$$

Це рівняння можна дати ще в такому вигляді: $a^2y_1x + b^2x_1y - c^2x_1y_1 = 0 \ldots (13)$

§70. Властивости дотичної до гіперболи.

Дотична до гіперболи в даній точці (x_1, y_1) половинить кут, утворений провідними лучами, проведеними в точку торкання.

Для доказу цього положення вживемо знов того способу, як і при розгляді еліпси. Кутовий сочинник для луча $r_1 = tg\varphi_1 = k_1 = \frac{y_1}{x_1-c}$; кутовий сочинник для луча $r_2 = tg\varphi_2 =$

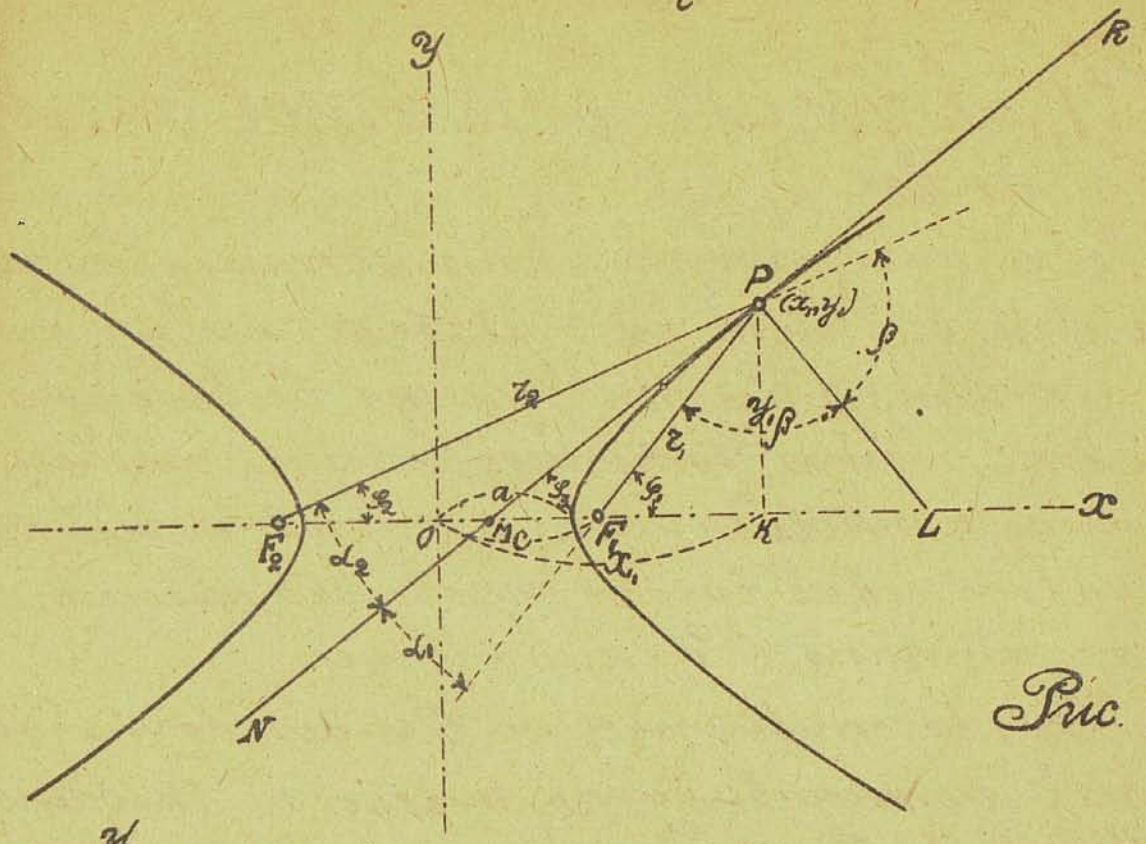


Рис. 71.

$= \frac{y_1}{x_1 + c}$ Кутовий сочинник дотичної в точці $(x_1, y_1) = tg\,\vartheta_3 = K_3 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$;

tg кута α_1 між дотичною RN і лучем r_1:

$$tg\,\alpha_1 = \frac{K_1 - K_3}{1 + K_1 K_3} = \frac{\frac{y_1}{x_1 - c} - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}}{1 + \frac{y_1 b^2 x_1}{(x_1 - c) a^2 y_1}} =$$

$$= \frac{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2 + b^2 c x_1}{a^2 x_1 y_1 - a^2 c y_1 + y_1 b^2 x_1} = \frac{b^2}{c y_1} \cdot \frac{(c x_1 - a^2)}{(c x_1 - a_2)} = \frac{b^2}{c y_1}$$

$$tg\,\alpha_2 = \frac{K_3 - K_2}{1 + K_3 K_2} = \text{також } \frac{b^2}{c y_1} \quad \ldots \quad (14)$$

Таким чином: для гіперболи, як і для еліпси, $tg\,\alpha_1 = tg\,\alpha_2$, або $\alpha_1 = \alpha_2$.

Відсіля ж можна вивести, що кути β між нормальною, одним провідним лучем і продовженням другого — між собою рівні.

§ 71. Будівля дотичної до гіперболи.

Для того, щоб провести дотичну до гіперболи в даній на гіперболі точці, можна скористатися тільки що виведеною властивістю дотичної, а саме: поділити кут між провідними лучами даної точки на дві рівні части; проведена пряста й буде дотичною в даній точці.

На підставі тієї ж властивости дотичної можна вивести наступні теореми:

Простопад із одного огнища гіперболи на дотичну віддалає від провідного луча, проведеного з другого огнища в точку торкання, <u>сталий відтинок</u>, який є рівний дійсній осі гіперболи $2a$.

Дійсно, коли розглянути рис. 72, то видно, що простопад із F_1 на дотичну RN відтинає на провідному лучу F_2P лінію F_2F_1', яка $= F_2P - F_1'P$, або $= F_2P - F_1P$, а це, по властивости гіперболи, $= 2a$. Коли спустити на дотичну простопад з огнища F_2, то він зустріне продовження провідного луча F_1P в точці F_2', і тоді $F_2'F_1$ буде $= F_2F_1' = 2a$.

Ця теорема може бути висловлена й так: геометричне місце зеркального відносно дотичної образу одного огнища гіперболи є коло, луч якого є рівний дійсній осі гіперболи, а осередок лежить в другому ог-

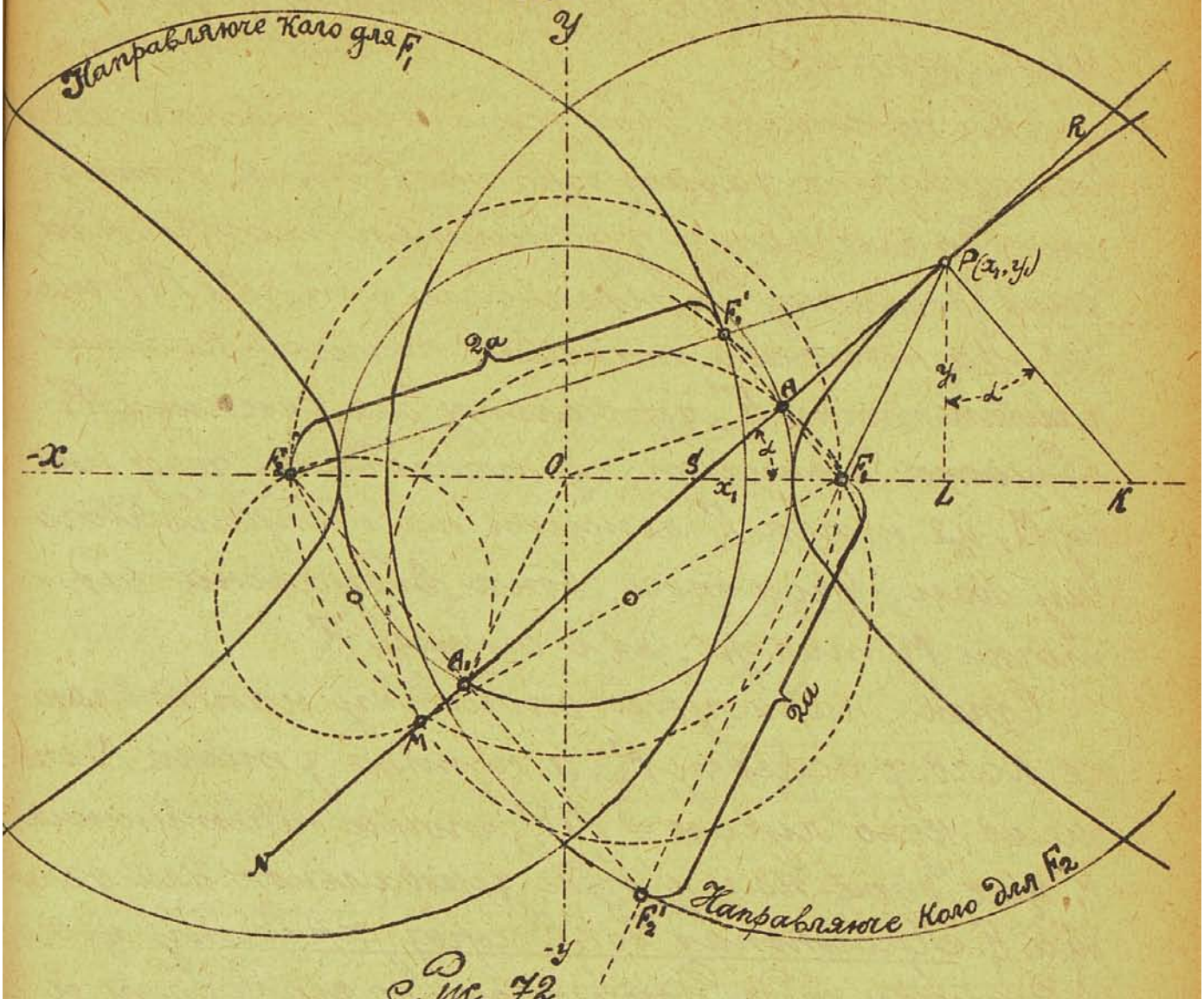


Рис. 72.

щі. Коло це називається направляючим.

Якщо з'єднати точку O з точками A і A_1, то з трикутників $F_1F_2F_1'$ і $F_1F_2F_2'$ видно, що OA є рівнобіжне F_2F_1' і $= \frac{F_2F_1'}{2} = \frac{2a}{2} = a$, а також, що OA_1 – рівнобіжне F_1F_2' і $= \frac{F_1F_2'}{2} = \frac{2a}{a} = a$.

Відсіля виходить, що проступи з огнищ на дотичну до гіперболи зустрічають гіперболу в точках, які лежать на колі, що описане з початку координат як центр радіусом a, що = половині дійсної осі гіперболи. Це коло буде відповідати описаному колу для еліпси.

§72. Дотична до гіперболи з зовнішньої точки.

На підставі двох останніх теорем можна розв'язати задачі про проведення дотичних до гіперболи з зовнішньої точки. Най демо дотичну до гіперболи з точки M (рис. 72). На підставі теореми першої можемо найти точку F_1', зеркальну для огнища F_1 відносно дотичної, що проходить через точку M; ця точка F_1' лежить на направляючому колі; крім того, вона віддалена від точки M так же, як і огнище F_1.

Отже, нарисуємо спочатку направляюче коло з осередку F_2, а потім з точки M опишемо коло лучем $= MF_1$; точка перетинення F_1' цих двох кол і буде зеркальною для огнища F_1. Простопад до F_1F_1' через середину цього відтинку буде дотичною до гіперболи її пройде через M.

На підставі другої теореми дотичну до гіперболи із зовнішньої точки можна провести так:

находимо перш за все точки A і A_1; ці точки, як відомо, лежать на колі, описаному з точки O лучем $= a$; вони ж являються вершиками прямих кутів, що опертi на віддаленню точки M від огнищ F_1 і F_2, як на поперечниках.

Отже, ці точки находяться на попарних

перетиненнях цих трьох кол; тому для нахождення їх проводимо спочатку коло, мучем = a, із осередку O; потім на MF, як на поперечнику, проводимо коло, яке перетне перше коло в точці A; проста, проведена через M і A – і буде дотичною до гіперболи з точки M.

§73. Довжина дотичної, піддотичної, нормальної й піднормальної.

Кутовий сочинник дотичної до гіперболи $tg\alpha = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$; із рис. 72 видно, що:

1) піднормальна $KL = y_1 tg\alpha = y_1 \cdot \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = \frac{b^2 x_1}{a^2}$ . . . . . (15)

2) нормальна $PL = \sqrt{y_1^2 + \frac{b^4 x_1^2}{a^4}} = \frac{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}}{a^2}$ . . . (16)

3) піддотична $SL = y_1 ctg\alpha = y_1 \cdot \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} = \frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1}$ . . . . . (17)

4) дотична $PS = \sqrt{y_1^2 + \frac{a^4 y_1^4}{b^4 x_1^2}} = y_1 \sqrt{\frac{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}{b^4 x_1^2}} = \frac{y_1 \sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}}{b^2 x_1}$ . . . . . (18)

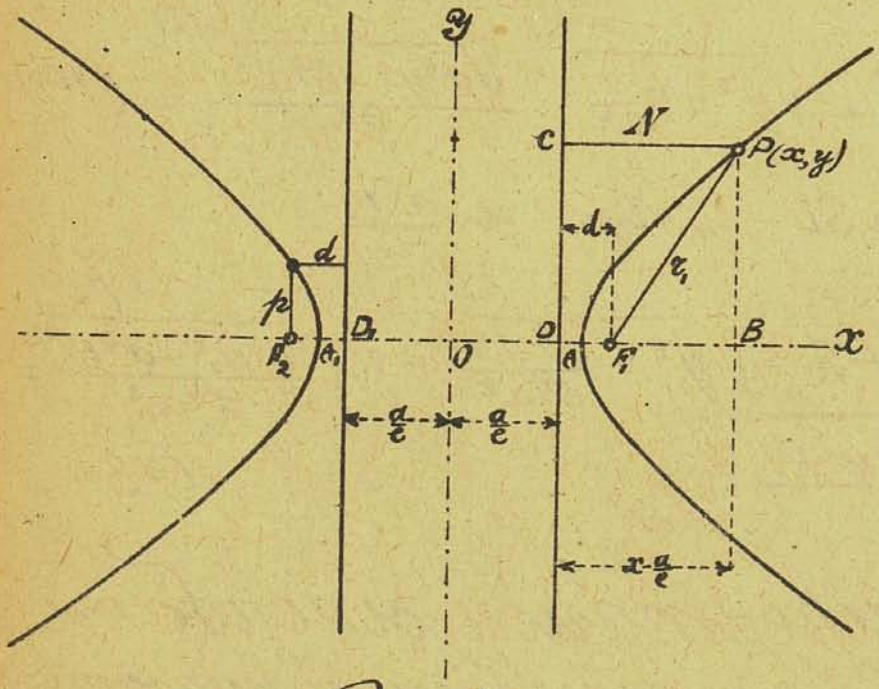
§74. Директриси гіперболи.

Директрисами гіперболи називаються, як і в елінсі, такі дві прості, що проходять рівнобіжно осі ординат на віддаленню від неї $= \frac{a^2}{c}$, або $\frac{a}{e}$. Директриси мають ту властивість, що відношення віддалень будь-якої точки гіперболи до огнища та до відповідної їцьому огнищу директриси є вели-

чиною постійного та рівного числовому ексцентрові гіперболи.

Відкладемо на дійсній осі гіперболи від осередку координат відтинок $OD = \frac{a^2}{c}$, або $\frac{a}{e}$, де e – числовий ексцентр гіперболи. Відтинок цей буде меньший a, бо числовий ексцентр гіперболи $e = \frac{c}{a} > 1$, тому що $c > a$.

Простопад до дійсної осі гіперболи, поставлений в кінці відтинку $= \frac{a^2}{c}$, і буде директрисою. Тому що відтинок $\frac{a^2}{c}$ можна відкласти по обидва боки від точки O, то директрис у гіперболи буде дві.



Фиг. 73.

Візьмемо на гіперболі точку $P(x, y)$, з'єднаємо її з огнищем F_1 і спустимо: простопад PC на директрису, а простопад PB на вісь X-ів. З рисунка маємо:

$$PC = BD = OB - OD = x - \frac{a}{e}.$$

Крім того, ми знаємо, що довжина провідного луча $F_1P = r_1 = ex - a$;

тому: $\frac{PF_1}{PC} = \frac{r_1}{N} = (ex - a) : \frac{ex - a}{e} = e$ ..... (19)

Відсіля, для кожної точки P маємо, що:

$$r_1 = eN \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

Для точки P_1, через яку проходить параметр гіперболи, буде: $p = ed$ . . . . (21)

Тому що $p = \frac{b^2}{a}$, можна написати:

$b^2 = aed$, або $b^2 = cd$ . . . . . (22),

або: $b^2 = c\frac{p}{e} = p \cdot \frac{c}{e} = ap$ . . . . . (23)

Таким чином, для сталих постійних величин гіперболи, а саме для: a, b, c, d, e і p маємо чотири рівняння, які ці величини зв'язують: I. $a^2 + b^2 = c^2$ . . . . . (вз. 2)

II. $e = \frac{c}{a}$.

III. $p = \frac{b^2}{a}$ . . . . . (вз. 9)

IV. $p = ed$ . . . . . (вз. 21)

Із цих рівнянь ми, знаючи дві величини, можемо знайти останні чотири.

§75. Поперечники гіперболи. Спряжені поперечники.

Кожна проста, яка проходить через осередок гіперболи, називається <u>поперечником</u> гіперболи. З огляду на симетричність гіперболи, кожна тятива її, яка перетинає вітки її, поділяється в точці O на рівні. Як і в елінсі, геометричне місце <u>середин рівнобіжних тятив є проста</u>, яка проходить через осередок гіперболи, себ-то є <u>поперечником гіперболи</u>.

На підставі тих же самих міркувань, які були висказані при розгляді елінси, мож-

-на дійти до висновку, що рівняння прямої, яка проходить через середини рівнобіжних тятив, буде мати вигляд:

$$\eta = \frac{b^2}{a^2 k}\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23),$$

де k – означає кутовий сочинник тятив. Це рівняння показує, що геометричним місцем середин тятив є поперечник гіперболи.

На підставі цієї властивости можна осередок гіперболи лехко найти, коли маємо дві рівнобіжних тятиви.

Коли tg кута нахилу поперечника, що половинить дані тятиви, назвемо через k_1, тоді: $k_1 k = \frac{b^2}{a^2 k} \cdot k = \frac{b^2}{a^2} \ldots\ldots\ldots (24)$

Себ-то, добуток кутових сочинників рівнобіжних тятив і поперечника, що їх половинить, є величина постійна і $= \frac{b^2}{a^2}$.

Ці сочинники k і k_1 можна вважати також кутовими сочинниками двох поперечників, які взаємно поділяють на рівно рівнобіжні їм тятиви; такі поперечники називаються сопряженими (або здругженими). З огляду на те, що для гіперболи $kk_1 = \frac{b^2}{a^2}$ є завжди додатнім, виходить, що обидва кути лежать завжди в одній чверті (в елінсі – в різних); тоді один сочинник по абсолютній величині мусить бути $> b/a$, а другий $< \frac{b}{a}$; при цьому той поперечник, якого сочинник $> \frac{b}{a}$ не перетинає гіперболи зовсім, а той, кутовий сочин-

ник якого $< \frac{b}{a}$, <u>перетинає гіперболу в двох точках</u>.

Головні поперечники гіперболи являють собою окремим випадком сполучених поперечників; вони серед всіх сполучених поперечників <u>одні, що напрямлені один до другого прямопадно</u>. Знайти їх можна так, як і в еліпсі. Для цього необхідно провести будь який поперечник гіперболи KL (рис. 74) і збудувати на ньому півкола, які перетнуть гіперболу в точці P. З'єднавши P з точками M і N, будемо мати дві, так звані, <u>дотичні тятиви</u> PM і PN, що будуть взаємно прямопадні.

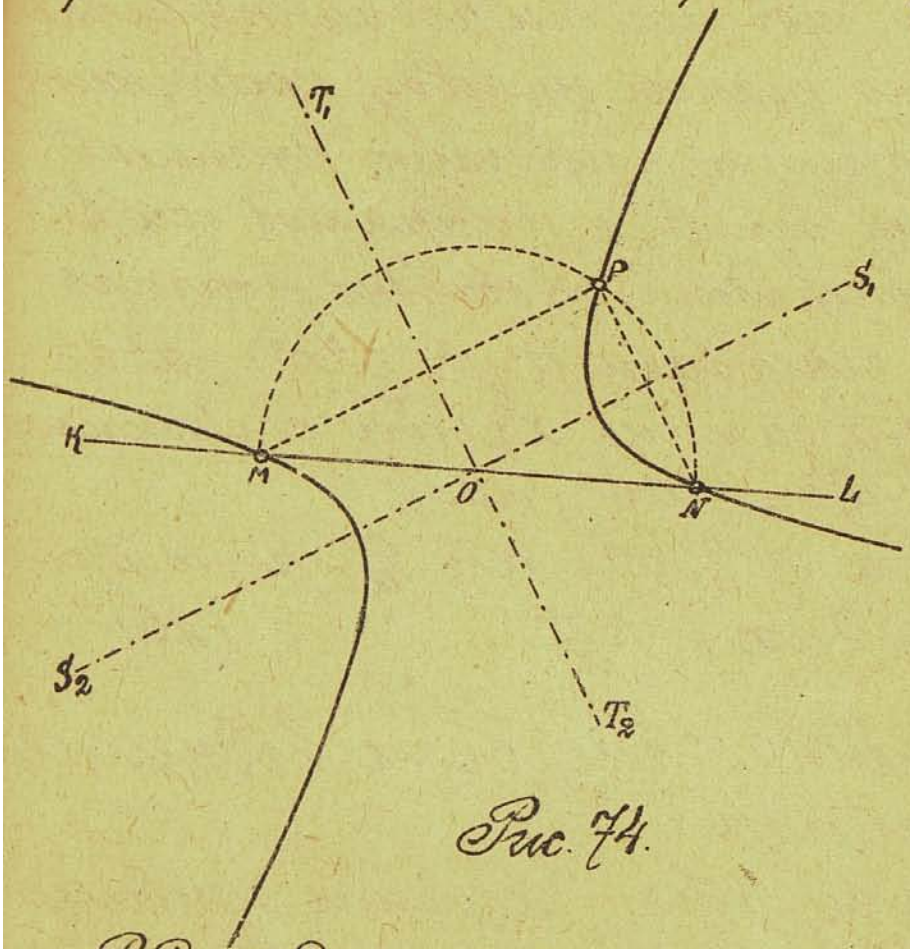


Рис. 74.

Відповідні поперечники, проведені через середини цих тятив, будуть взаємно прямопадні, а тому будуть <u>головними осями</u> гіперболи.

Також, як і для еліпси, дотичні в кінцях будь якого поперечника гіперболи су-

будуть рівнобіжними сполученому поперечникові. Це положення дає ще один спосіб будування дотичної чи то в даній на гіперболі точці, чи то рівнобіжно даному напрямку.

§76. Рівнання гіперболи відносно вершка її.

Для того, щоб найти рівнання гіперболи відносно такого укладу координат, при якому початок координат перенесено в вершок гіперболи A, а напрямок осі X-ів залишено попередній, необхідно в загальне рівнання гіперболи $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ вставити $x+a$ замість x; тоді одержимо:

$$a^2y^2 - b^2(x+a)^2 = -a^2b^2, \text{ або:}$$

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2; \text{ але } \frac{b^2}{a} = p, \text{ а тому: } y^2 = 2px + \frac{px^2}{a} \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

§77. Рівнання гіперболи, віднесене до асімптот.

Рівнання гіперболи приймає найбільш просту форму, коли за осі координат приймемо її асімптоти.

Нехай x_1 і y_1 будуть координати точки P на гіперболі відносно прямокутного укладу координат, а ξ і η - координати тієї ж точки P відносно асімптот, як косокутного укладу координат.

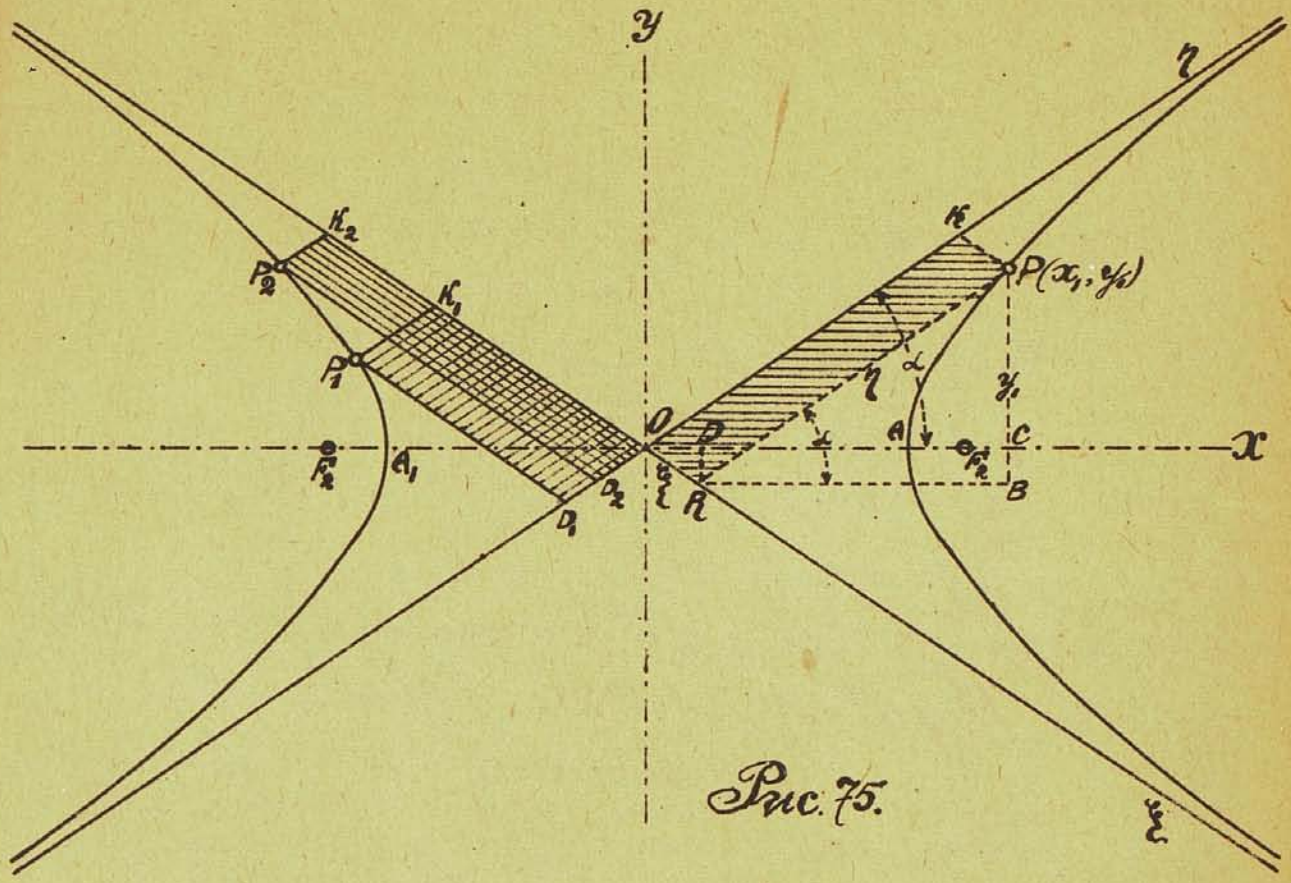


Рис. 75.

Із рисунка видно, що $y_1 = PB - BC = \eta\sin\alpha - \xi\sin\alpha$, а $x_1 = OD + DC = OD + RB = \xi\cos\alpha + \eta\cos\alpha$, або відсіля:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= (\eta - \xi)\sin\alpha \\ x_1 &= (\eta + \xi)\cos\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (26)$$

Вставивши ці вздри в рівняння гіперболи: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, одержимо:

$$b^2(\eta+\xi)^2\cos^2\alpha - a^2(\eta-\xi)^2\sin^2\alpha = a^2b^2;$$

$$b^2\eta^2\cos^2\alpha + 2b^2\xi\eta\cos^2\alpha + b^2\xi^2\cos^2\alpha - a^2\eta^2\sin^2\alpha + 2a^2\xi\eta\sin^2\alpha - a^2\xi^2\sin^2\alpha = a^2b^2 \quad , \text{ або:}$$

$$\xi^2(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha) + \eta^2(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha) + 2\xi\eta(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) = a^2b^2;$$

Маємо, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, або $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a}$;

$a\sin\alpha = b\cos\alpha$; $b^2\cos^2\alpha = a^2\sin^2\alpha$;

$b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha = 0;$

Прийнявши це на увагу, р-ння гіперболи напишемо так: $2\xi\eta(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) = a^2b^2$

В цьому рівнанню замість $b^2\cos^2\alpha$ можно вставити $a^2\sin^2\alpha$ і навпаки, а тому одержимо таких два рівнання:

$$4\xi\eta\, b^2\cos^2\alpha = a^2b^2;$$
$$4\xi\eta\, a^2\sin^2\alpha = a^2b^2;$$

або:
$$\left.\begin{aligned} 4\xi\eta\cos^2\alpha &= a^2 \\ 4\xi\eta\sin^2\alpha &= b^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (27)$$

Перемноживши ці два рівнання, одержимо: $16\xi^2\eta^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = a^2b^2,$

або:
$$4\xi\eta\sin\alpha\cdot\cos\alpha = ab;$$
$$\xi\eta\cdot\sin 2\alpha = \frac{ab}{2} \ldots\ldots\ldots (28)$$

Як відомо, $\xi\eta\cdot\sin 2\alpha$ – це є поле рівнобіжника з боками ξ і η, кут між якими є рівний 2α.

В нашому випадку це є, як раз, поле рівнобіжника, якого боки ξ і η лежать на асімптотах, а один вершок на гіперболі в точці P. Отже виходить таке правило: <u>Всі рівнобіжники з двома боками на асімптотах мають однакові поля, коли один вершок їх лежить на гіперболі.</u>

На рис. 75 поле рівнобіжника $OO_1P_1K_1$ = полю $OO_2P_2K_2$.

Коли скласти рівнання (27), то одержимо: $4\xi\eta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = a^2 + b^2;$

або: $\xi\eta = \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{c^2}{4}$ . . . . . (29)

Таким чином, рівняння гіперболи, віднесене до асимптот, має вигляд:

$$xy = C = const. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

і навпаки, коли добуток двох змінних дає завжди величину постійну, то рівняння, яке звязує ці змінні, є р-нням гіперболи, що віднесене до асимптот.

Із рівняння (29), знаючи ξ і η, можно найти c, бо $c = 2\sqrt{\xi\eta}$, а найшовши c і знаючи асимптоти, легко найти a і b.

§ 78. Відтинки січної між асимптотою і гіперболою рівні між собою.

Проведемо будь яку січну гіперболи до перетинення з асимптотами в точках R і S.

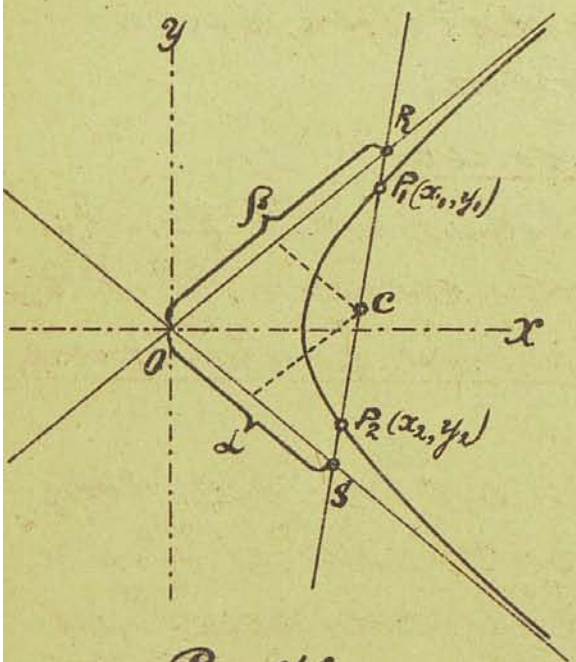


Рис. 76.

Доведемо, що <u>середина відтинку RS</u>, яка приходиться в точці C, <u>буде також серединою січної P_1P_2</u>.

Рівняння простої RS в косокутних координатах, утворених асимптотами, коли ця проста відтинає на асимптотах відтинки $OS = \alpha$; $OR = \beta$ буде таке:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

Цьому рівнанню мусять задовольняти координати точки P_1 і P_2, а тому:

$$\frac{x_1}{\alpha} + \frac{y_1}{\beta} = 1; \quad \frac{x_2}{\alpha} + \frac{y_2}{\beta} = 1;$$

Помноживши перше рівнання на x_1, а друге на $(-x_2)$, одержимо:

$$\frac{x_1^2}{\alpha} + \frac{x_1 y_1}{\beta} = x_1; \quad -\frac{x_2^2}{\alpha} - \frac{x_1 y_1}{\beta} = -x_2$$

Склавши ці рівнання, матимемо:

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{\alpha} + \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{\beta} = x_1 - x_2$$

З огляду на те, що добуток xy для гіперболи (що віднесена до асімптот) є велична постійна $= \frac{c^2}{4}$, член $\frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{\beta} = 0$.

Тоді: $\frac{x_1^2 - x_2^2}{\alpha} = x_1 - x_2$;

x_1 не $= x_2$, а тому обидві частини рівнання можна поділити на $x_1 - x_2$, після чого одержимо: $x_1 + x_2 = \alpha$, або $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\alpha}{2}$;

$\frac{x_1 + x_2}{2}$ – це є абсциса середини відтинку P_1P_2; а $\frac{\alpha}{2}$ – це є абсциса середини відтинка RS відносно асімптот;

<u>отже ці абсциси зливаються.</u>

В подібний же спосіб доведемо, що $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\beta}{2}$.

Таким чином координати середин RS і P_1P_2, <u>а тому й самі точки середин, зливаються,</u> що і треба було довести

§ 79. Всі трикутники, один бік котрих торкається гіперболи, а другі боки лежать на асімптотах, мають однакові поля $= ab$

Дотична до гіперболи є окремий випа-

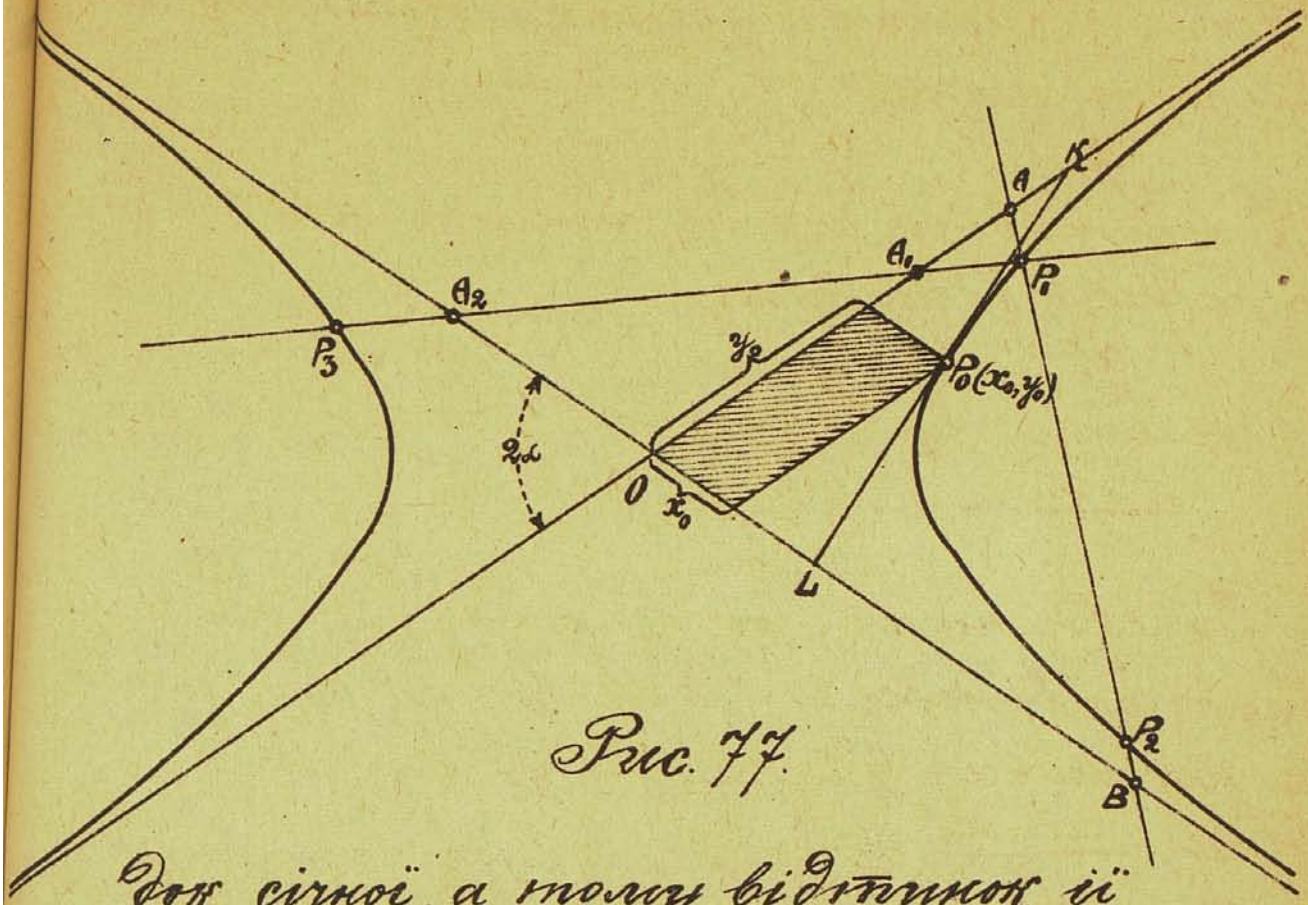


Рис. 77.

бок січної, а тому відтинок її між асимптотами в точці торкання ділиться на рівно. Із рис. 77 видно, що коли точка P_0 є точка торкання, то:

$KP_0 = LP_0$ і $OL = 2x_0$, а $OK = 2y_0$;

Раніш було вже показано, що:

$$x_0 y_0 \sin 2\alpha = \frac{ab}{2}$$

Поле $\Delta LOK = \frac{1}{2} \cdot OL \cdot OK \sin \angle KOL$;

тому: $$\Delta = \frac{2x_0 \, 2y_0 \sin 2\alpha}{2} = 2x_0 y_0 \sin 2\alpha =$$

$= ab$ .. (бз. 28) ..... (31), що й вимагалося довести.

Показані властивости січних дають засіб будування гіперболи, коли відомі <u>асимптоти і одна точка гіперболи, або одна асимптота та дві точки гіперболи.</u>

Проводимо через P_1 довільні прості до перетинання з асимптотами; відкладаємо від точки B відтинок $= P_1A$ і одержимо точку гіперболи P_2; також відтинок $A_2P_3 = A_1P_1$ дає точку P_3.

§80. Сопряжені гіперболи.

Рівнання $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, або $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ є також рівнанням гіперболи з тими ж асимптотами, як і для гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Але для гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ відтинок на осі X був дійсний, а для гіперболи $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ..... (32) дійсним буде відтинок на осі Y-ів.

Ця друга гіперболя буде лежати між тими ж асимптотами, але в доповнюючих кутах.

Дві гіперболи, які мають одні й ті ж асимптоти, але положені в різних кутах, називаються сопряженими.

§81. Випрямлення (ректіфікація) обводу елипси.

Довжина обводу елипси знаходиться в інтегральному рахуванню, виходячи зі взору: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, або $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$, відкіля: $S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$.

Інтеграл цей для елипси точно не береться, але з довільною наближеністю.

Ця довжина вираховується по такому взо-

ру: $U = \pi(a+b)\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \frac{1}{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \frac{1}{256}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \ldots\ldots\right]$ або $U = \pi(a+b) \cdot t \ldots\ldots (34)$,

де через t означено множник в прямих дужках. Для цього множника беруться такі значіння (Hütte, т. I, стор. 129):

при $\frac{a-b}{a+b}$ =	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
t =	1,0025	1,0100	1,0226	1,0404	1,0635	1,0922	1,1267	1,1677	1,2155	1,2732

Для обчислення тієї ж довжини U вживається і більш простий взір:

$$U = \pi(a+b) \cdot \frac{64 - 3\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^4}{64 - 16\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2} \ldots\ldots (35)$$

Простіще, однако ж, користування наведеною нижче таблицею (видання ЗМС'и), в якій дається відношення E довжини всього обводу еліпси до його осі $2a$, при даному відношенню полуосей $\frac{b}{a}$.

$\frac{b}{a}$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
Соч. E	2,000	2,010	2,032	2,063	2,101	2,145	2,193
$\frac{b}{a}$	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
Соч. E	2,245	2,301	2,360	2,422	2,486	2,552	2,620
$\frac{b}{a}$	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
Сочин. E	2,690	2,762	2,836	2,911	2,987	3,064	3,142

Приклад. Коли велика вісь $2a = 12$ см., а мала $2b = 6$ см., тоді $\frac{b}{a} = 0,5$; сочинник $E = 2,422$. Тому довжина обводу еліпси $U = 2,422 \times 2a = 2,422 \times 12 = 29,064$ см.

§82. Поле елїпси.

Поле елїпси знаходиться в елементарний спосіб, приймаючи на увагу, що елїпсу можна уявляти, як коло, в котрого одні тятиви проектуються на площу елїпси без зміни, а другі, простопадні до перших, всі зменшуються в одному відношенню $= \frac{b}{a}$, так що a робиться $= b$; це поле $= \pi ab$ ..... (36)

Поле елїпси з прикладу §81 буде:

$$A = \pi ab = 3{,}14 \times 6 \times 3 = 56{,}55 \text{ кв. см.}$$

§83. Поле сектора гіперболи, обмеженого дугою гіперболи від вершка до даної точки $P(x_1, y_1)$ і координатами її.

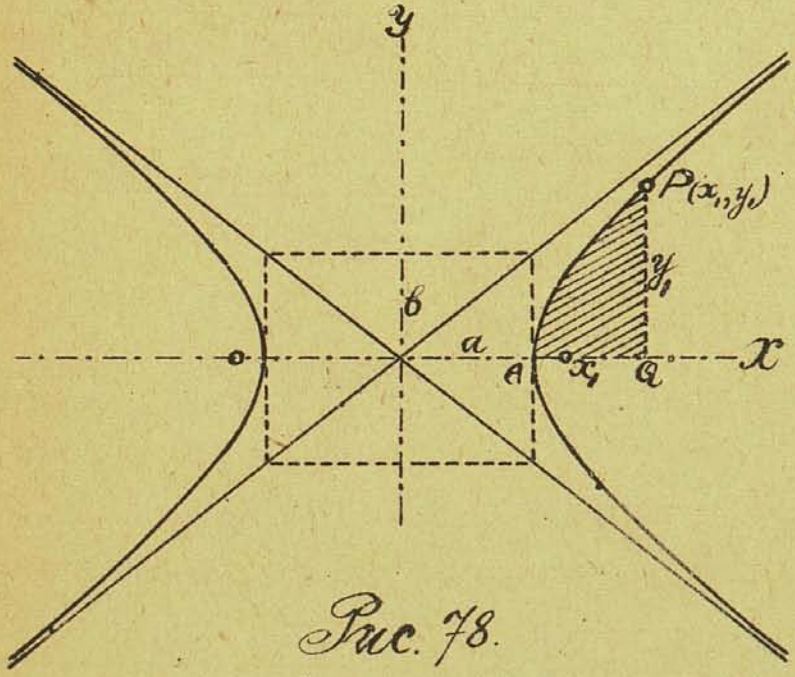


Рис. 78.

Поле сектора APQ находиться по правилах інтегрального рахування; воно дається таким взором:

$$APQ = \frac{x_1 y_1}{2} - \frac{ab}{2} \lg\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) \ldots (33),$$

де $\lg$ означує — Непе-рові логаритми.

Для рівнобокої гіперболи:

$$APQ = \frac{1}{2}\left[x_1 y_1 - \lg(x_1 + y_1)\right] \ldots\ldots\ldots (34)$$

Парабола.

§ 84. Рівняння параболи.

Парабола, як було вже показано, є геометричне місце точок, які рівновіддалені від *сталої точки*, що називається *огнищем*, і *сталої прямої* — *директриси*.

Віддалення огнища від директриси є також постійне; *воно означається літерою p*.

Зведемо тепер рівняння параболи.

Із самого определення параболи виходить, що одна точка її лежить як раз по середині між директрисою й огнищем. Цю точку параболи O приймаємо за початок прямокутних координат, вісь Y-ів направимо рівнобіжно директрисі, а вісь X-ів пробіжде через огнище F.

Коли на рис. 79 точка P(x, y) лежить на параболі, то: $FP^2 = PC^2 = DB^2$, або:

$$\left[\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}\right]^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2;$$

розкривши дужки одержимо:

$$y^2 + x^2 + \frac{p^2}{4} - px = x^2 + \frac{p^2}{4} + px,$$

або: $$y^2 = 2px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Це й є рівняння параболи відносно наших прямокутних осей OX, OY.

Із цього рівняння можна зробити висновки відносно виглядy кривої.

Розв'яжемо рівняння відносно y:

$$y = \pm\sqrt{2px} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

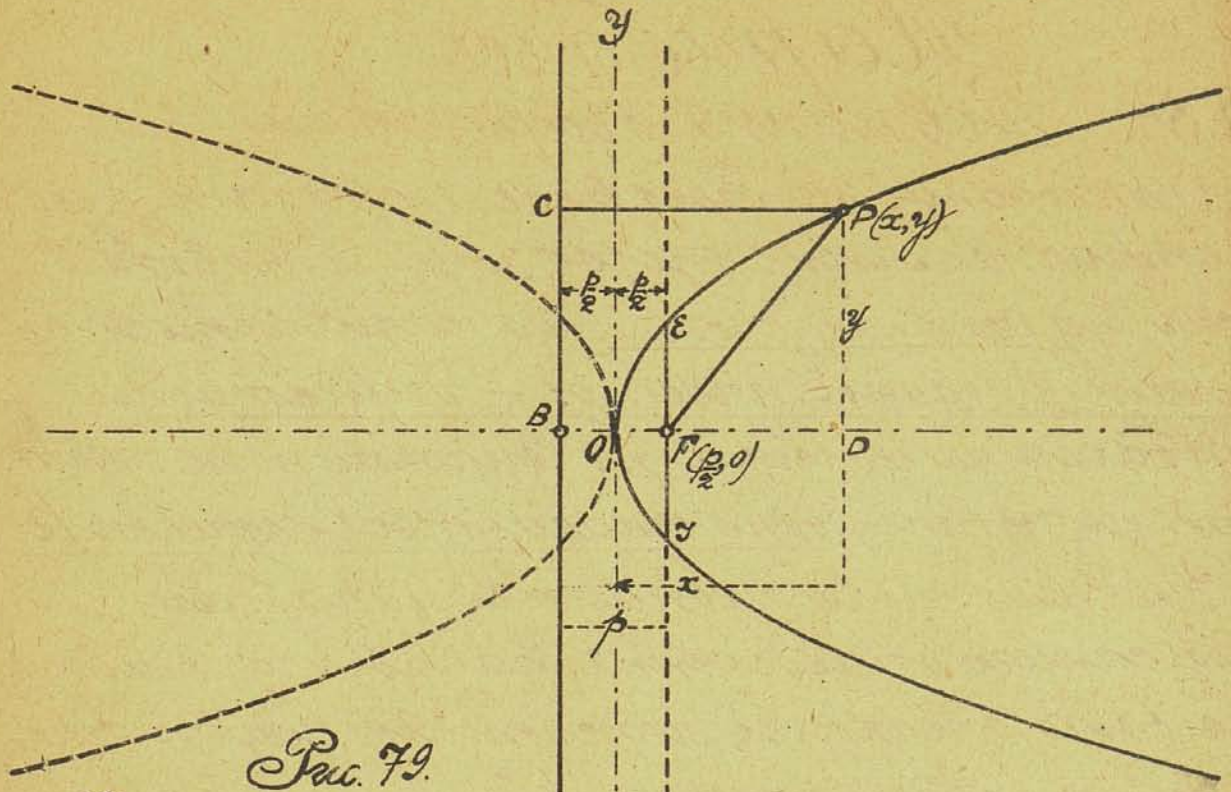


Рис. 79.

Кожному x відповідає два рівних, але різнознакових значіння для y. Це означає, що крива симетрична відносно осі X.

Далі видко, що y має реальні значіння лише для позитивних значінь x'а, а це показує, що всі точки параболи лежать по один бік осі Y-ів, а саме по той бік, в якій абсциси рахуються додатними.

Для $x=0$ приймає y своє найменьше значіння: $y=0$. При збільшенню x'а і ордината y збільшується безмежно від її знаку по безмежности.

Точка перетинення параболи з віссю X-ів, що приходиться в початку координат, лежить ближче всіх точок до директриси; ця точка називається вершиком параболи; виведене нами рівнання пара-

боли називається вершиковим рівнянням параболи. Вісь Y-ів торкається параболи в вершину її.

Коли ми x прийняли $= \frac{p}{2}$, себ-то взяли абсцісу огнища F, то ордината $y = \pm\sqrt{2px} = \pm\sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = \pm p$, а довжина сіткої EJ, що проходить через F рівнобіжно осі Y-ів $= 2p$. Цю величину $2p$ називаємо параметром параболи, а величину p – полупараметром параболи.

Порівняємо тепер вершикові рівнання параболи, елїпси й гіперболи:

Для елїпси: $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ . . . . . I . . (вз. 7)

Для параболи: $y^2 = 2px$ . . . . . II . . (вз. 1)

Для гіперболи: $y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}$ . . . III . . (вз. 25)

В цих рівнаннях $2p$ скрізь означає довжину сїчної, що проходить через огнище простопадно осі X-ів; a – це половина головної осі для елїпси і для гіперболи.

Коли в нас a буде безмежно збільшуватися, але так, щоб p залишалось незмінним, то в рівнаннях (I) і (III) останній член зникає, а рівнання переходить в (IV); тому параболу можна розглядати, як елїпсу, або гіперболу, з безмежно великою віссю.

Звернемо ще увагу на відношення елїпси, гіперболи й параболи до їх директрис. Ми бачили вже, що відношення відалень

точки на кривій до огнища й до директриси у всіх цих кривих постійні, при чому в еліпси це відношення $e<1$, у гіперболи $e>1$, а у параболи $e=1$.

Для кола, яке є окремим винятком еліпси, числовий ексцентр $e=0$, а тому й відношення віддалення точки кола r від середку його до віддалення d до директриси буде, як у еліпси, $=e$; $\frac{r}{d}=e=0$, а це можливе лише при умові, що $d=\infty$, себто, що директриса для кола безмежно віддалена.

При такому розумінню ексцентра і директриси для кола можна висловити загальне положення:

Всі вістряхові перерізи можна вважати геометричними місцями точки, віддалення якої від сталої точки і сталої прямої має постійну величину.

§ 85. Будування параболи.

Надано рівнанню параболи такий вигляд: $2p:y=y:x$ . . . . (4), із якого видно, що y є середня пропорційна між $2p$ і x.

Коли дана директриса і огнище, а тим самим дано p, тоді для кожного x не тяжко знайти будуванням відповідне y; один із засобів такий: на прямій MN беремо точку D перетягнення директ-

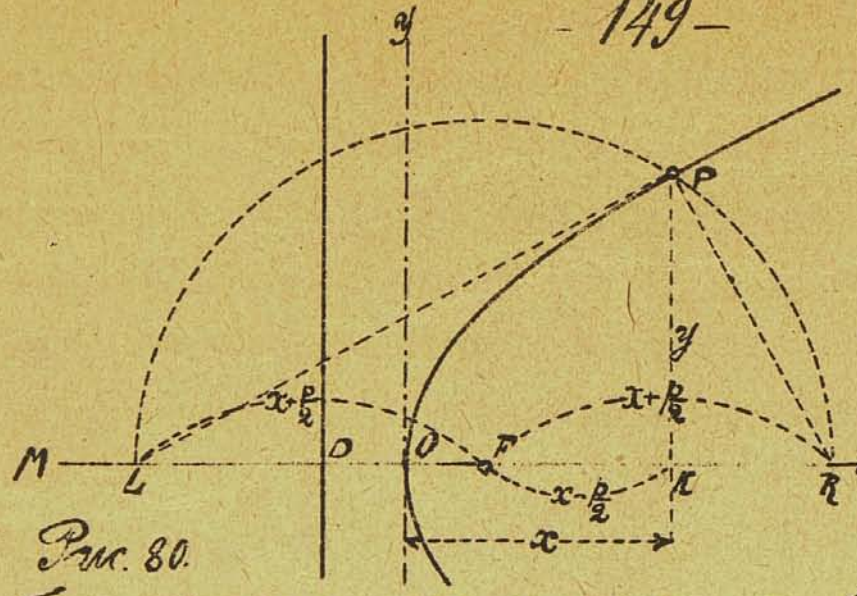


Рис. 80.

тягнеш з простого і точку F – огнище параболи. Ділимо DF навпіл і одержимо точку O, яка є вершком параболи та початком координат. Візьмемо тепер довільну абсцісу $x = OK$ і будемо шукати відповідну ординату y; відкладемо вліво від O відтинок $OL = OK = x$; тоді $KL = 2x$. Опишемо ще FL коло, яке перетне лінію MN в точках L і R; поставимо в точці K простопад KP; цей простопад і буде = y, а точка P буде лежати на параболі. Дійсно:

$FL = 2x - FK$, а $FK = x - \frac{p}{2}$; тому $FL = 2x - (x - \frac{p}{2}) = x + \frac{p}{2}$; $FR = FL = x + \frac{p}{2}$; $KR = x + \frac{p}{2} - (x - \frac{p}{2}) = p$.

$LK : PK = PK : KR$; $2x : PK = PK : p$

$PK^2 = 2px$; тому $PK = y$.

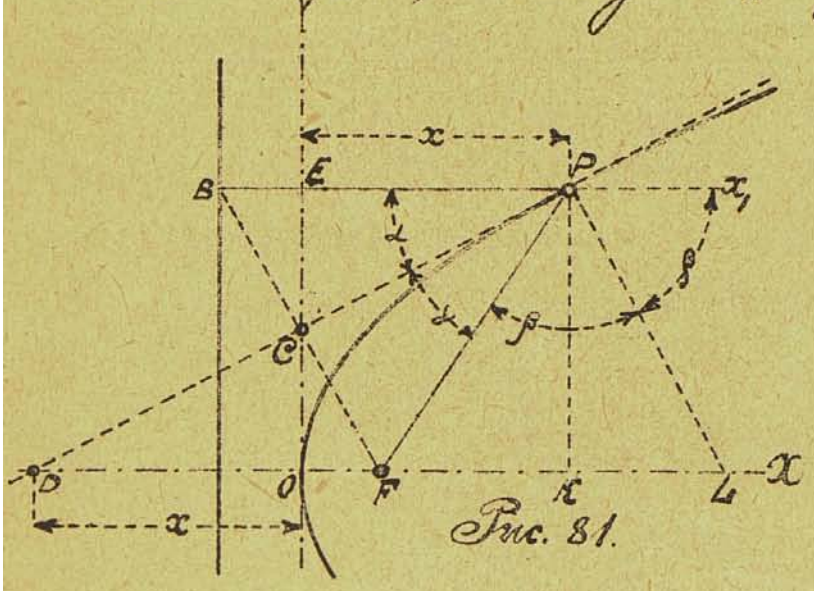


Рис. 81.

Інші засоби будування параболи випікають із тієї її властивости, що кожна точка її рівновіддалена від огнищ

і від директриси. Коли ми знов маємо директрису і огнище (рис. 81), то через довільну точку B директриси проводимо пряму Bx, рівнобіжну осі X; з'єднуємо точки B і F, проводимо через середину BF простопад, який перетне Bx, в точці P, яка й буде точкою параболи, бо дійсно: PB = PF.

§86. Парабола й проста.

Найдемо взаємовідношення між будь якими параболою і простою:

рівняння параболи — $y^2 = 2px$;

рівняння простої — $y = kx + l$;

Розв'яжемо ці рівняння взяті в купі:

$$(kx + l)^2 = 2px$$

$$k^2x^2 + 2(kl - p)x = -l^2 \quad \ldots \quad (5)$$

Виключимо зараз із дальшого розгляду ті випадки, коли $k = 0$, або $k = \infty$; в першому випадкові проста рівнобіжна осі X-ів, а в другому — рівнобіжна осі Y-ів.

Коли $k = 0$, тоді рівняння (5) перетвориться в таке: $2px = l^2$; $x = \frac{l^2}{2p}$; $y = l$, себ-то буде лише <u>одна точка, в якій проста $y = l$ перетинає параболу</u>.

Коли $k = \infty$, то р-ння $y = kx + l$ і (5) не придатні. Тому берем таке рівняння просте: $x = m$ і розв'яжемо його разом з р-ням: $y^2 = 2px$; тоді:

$$y^2 = 2p \cdot m; \quad y = \pm\sqrt{2pm}$$

Відсіля виходить, що проста, рівнобіжна осі Y-ів, перетинає параболу в двох точках, які лежать сіметрично відносно осі X-ів.

Звернемося тепер до загального рівнання (5) і розв'яжемо його відносно x:

$$x = -\frac{kl-p}{k^2} \pm \frac{\sqrt{p(p-2kl)}}{k^2} =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[-(kl-p) \pm \sqrt{p(p-2kl)}\right] \quad \ldots\ldots (6)$$

Тому що полупараметр p має завжди додатний характер, знак виразу під корінем залежить виключно від знаку різниці $p-2kl$, яка може бути більше, менше і рівна нулю, себ-то може бути:

$$p \gtreqless 2kl, \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Коли $p>2kl$, тоді проста й парабола мають дві реальних точки перетинення; коли $p=2kl$, тоді проста і парабола мають лише одну спільну точку, себ-то проста торкається параболи; а коли $p<2kl$, тоді під коренем буде великана відємна і дійсних спільних точок простої й параболи не має.

Нерівенство (7) можна подати ще в такому вигляді: $\frac{p}{2} : tg\alpha \gtreqless l \quad \ldots\ldots (8)$

Геометричне значіння цього останнього виразу легко уявити з рис. 82:

$AF = \frac{p}{2}$; $\angle ASF = \alpha$; $AS = \frac{p}{2} : tg\alpha$; $AR = l$;

Отже, коли $AS = \frac{p}{2} : tg\alpha > AR, > l$, дотя

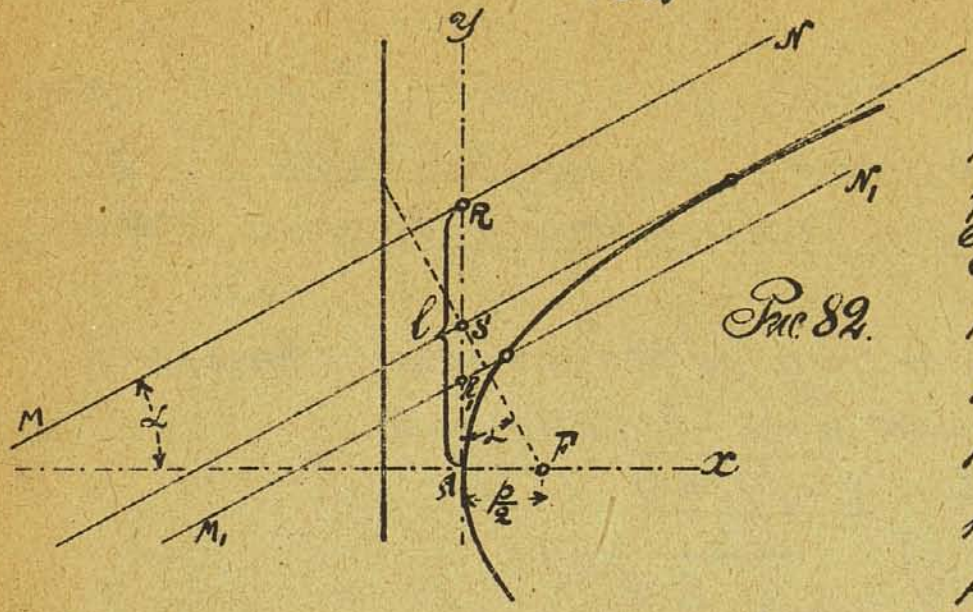


Рис. 82.

сітка M_1N_1 перетинає параболу в двох точках; коли $AS<(l=AR)$, тоді пряма MN зовсім не перетинає параболи; коли же пряма MN проходить як раз через точку S, в якій простопад з вогнища на пряму зустрічає вісь Y-ів, – тоді пряма торкається параболи.

§ 87. Рівнання дотичної до параболи.

Нехай лінія AB буде директрисою, Ox – вісь параболи, O – вершок параболи, F – вогнище, P_1 і P_2 точки на параболі, через які проходить сіткова P_1P_2, що нахилена до осі X-ів під кутом α.

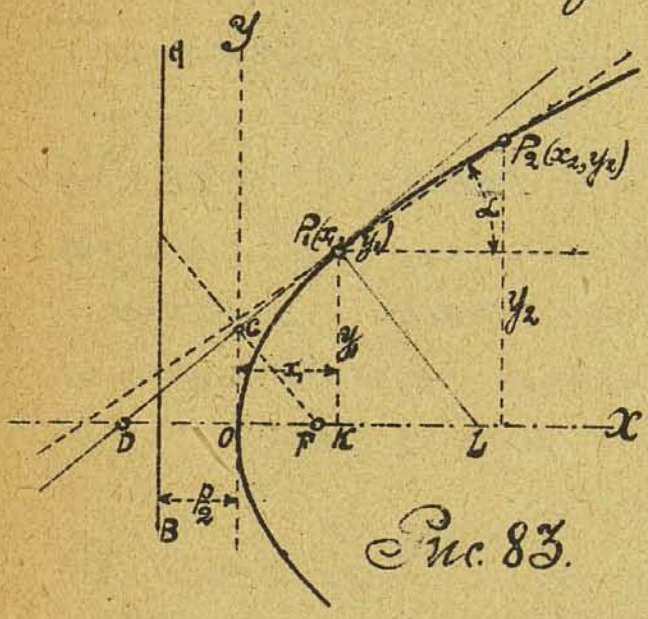


Рис. 83.

Тому що точки P_1 і P_2 лежать на параболі, можна написати такі рівності:

$$y_1^2 = 2px_1 \; ; \; y_2^2 = 2px_2;$$

Відніймемо перше з них від другого:

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1);$$

відсіля: $\frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2 - x_1} = 2p$, або $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1} = tg\alpha$.

Коли точка P_2 буде наближатися до P_1 і нарешті зіллється з нею, тоді січна перетвориться в дотичну і tg кута нахилу її буде: $k = tg\alpha = \frac{p}{y_1}$ . . . . . (9)

Рівнання дотичної, яка проходить через точку $P_1(x_1, y_1)$ буде: $y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$ . . . . (10)

або: $yy_1 - y_1^2 = px - px_1$;

замість y_1^2 можна ввести $2px_1$, тоді одержимо: $yy_1 = p(x + x_1)$ . . . . . (11); це і є рівнання дотичної до параболи в точці (x_1, y_1).

Коли рівнання параболи написати в такому вигляді: $y \cdot y = p \cdot (x + x)$, то для дістання рівнання дотичної необхідно лише в рівнанню параболи одну пару змінних координат: x і y замінити парою координат даної точки: x_1 і y_1.

Відтинки на осях координат, що утворює на них дотична, находимо, даючи для x і для y значіння $= 0$; коли $x = 0$, тоді:

$$y = \frac{px_1}{y_1} = \frac{2px_1}{2y_1} = \frac{y_1^2}{2y_1} = \frac{y_1}{2}.$$

Отже $OC = \frac{y_1}{2}$ (рис. 83).

Коли $y = 0$, тоді $p(x + x_1) = 0$,

$$x = -x_1;$$

Сб-то: $OD = OK = x$

Остання властивість дотичної дає дуже просте правило для знаходження її. Коли

Коли дана точка P, то абсциса її x-є відома; величину абсциси відкладаємо вліво від точки O, і кінець цього відтинка з'єднуємо з точкою P; проведена таким чином лінія буде дотичною.

Повернемося тепер до рис. 81. З нього можемо вивести, що OC = CE (бо CB = CF, а Bx₁ // OX), а тому OD = EP = OK = x. Значить, проста PD, проведена простопадно до BF через середину цієї лінії, є дотичною до параболи в точці P.

Ця дотична, як видно з того ж рисунка, половинить кут між провідним лучем PF і простопадом з точки P до директриси.

Нормальна в точці P половинить кут між тим же провідним лучем і продовженням простопада на директрису.

Таким чином, коли вгнутому дзеркалу надати параболичний вид, то промені, що впадуть на нього рівнобіжно осі X-ів, відбившись попадуть всі в огнище.

З розгляду того ж рисунка можна вивести, що основа простопаду, спущеного з огнища на дотичну, лежить на осі ординат, або що проста, яка з'єднує огнище та точку перетинення дотичної з віссю ординат, є простопадом до дотичної.

Рівнання нормальної в точці $P(x_1, y_1)$ буде таке:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \quad \ldots\ldots (12)$$

§88. Довжина дотичної, піддотичної, нормальної та піднормальної.

Із рівняння нормальної можна найти довжину відтинка на осі X-ів, який відтинає нормальна; для цього дамо у значіння 0, тоді: $-y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$;

$p = x - x_1$; $x = p + x_1$; Відсіля довжина піднормальної KL (рис 83) =

$$= p + x_1 - x_1 = p \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Довжина нормальної: $PL = \sqrt{y_1^2 + p^2}$ . . . . (14)

Довжина піддотичної: $DK = 2x_1$ . . . . (15),

а довжина дотичної: $PD = \sqrt{y_1^2 + 4x_1^2}$ . . . (16).

§89. Будування дотичної до параболи з зовнішньої точки і рівняння такої дотичної.

a) Будування дотичної з даної точки P_0 до параболи грунтується на тому, що точку перетинення бажаної дотичної з віссю Y-ів можна легко найти. Ця точка лежить на колі, описаному на P_0F, як на поперечнику, бо простопадні із F на до-

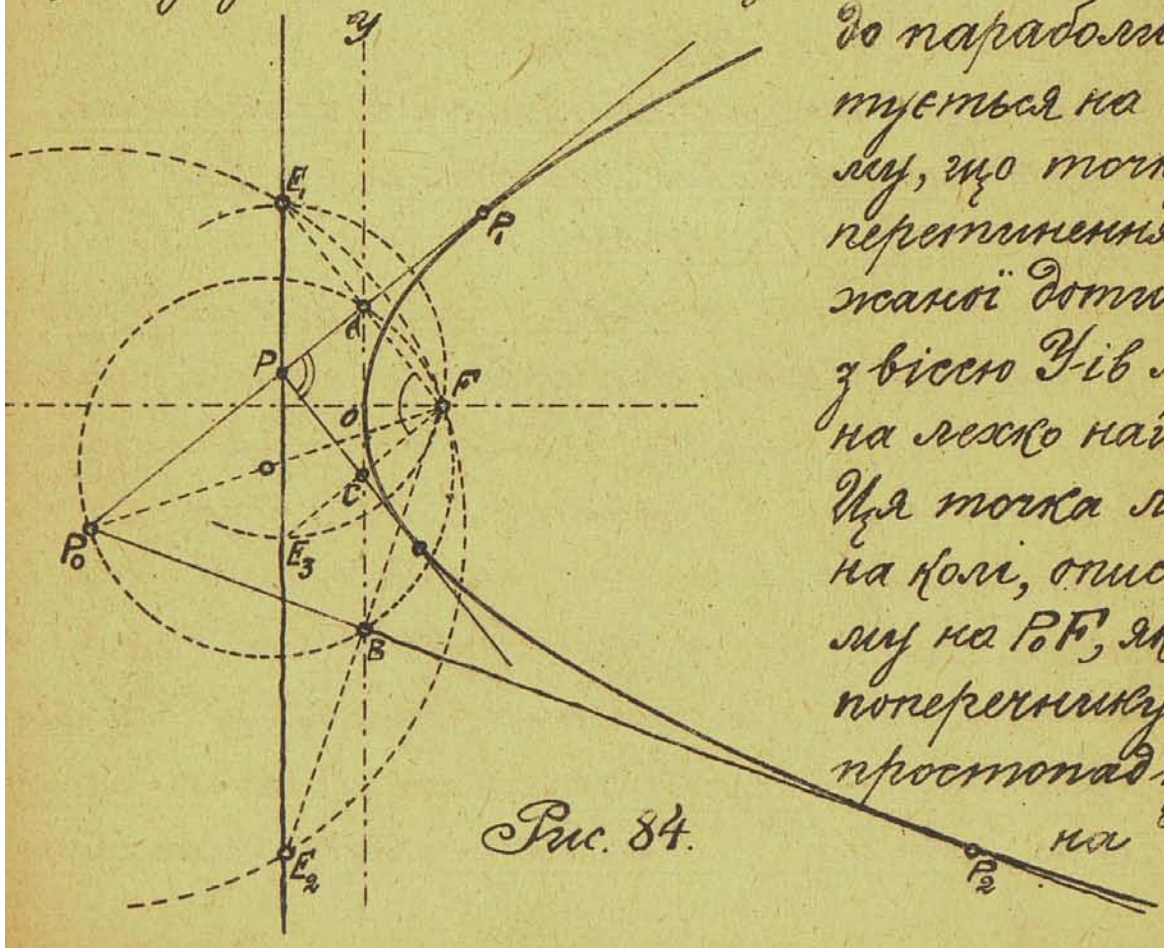


Рис. 84.

тичну зустрічає її, як відомо вже, на осі OY в точці A, або в точці B.

Таким чином, для того, щоб провести дотичну до параболи з точки P_0, з'єднуємо цю точку з огнищем F, на P_0F описуємо коло, яке перетне вісь Y-ів в точках A і B, проводимо через P_0 і A, через P_0 і B дві прості, які і будуть дотичними до параболи.

Можна збудувати дотичні ще в іншій спосіб. Зеркальні точки огнища відносно дотичних лежать у параболи на директрисі, що ми вже вживали раніш; ці точки ми можемо найти, описавши коло лучем, рівним P_0F, до перетинання його з директрисою в точках E_1 і E_2. Коли тепер із середини E_1F та E_2F провести простопади, то вони і будуть дотичними до параболи.

Таким чином, директриса в параболі грає роль направляючого кола, а вісь Y-ів описаного кола у еліпси.

Як що зовнішня точка P лежить на директрисі, то вживаючи попередній спосіб, проводимо із P коло лучем, рівним PF, яке перетне директрису в точках E_1 і E_3; кут E_1FE_3 буде простий, а тому що кути при A і при C також прості, то й кут при P на директрисі буде простий. Отже виходить, що директриса є геометричним місцем перетинання простопадних до себе дотичних параболи.

б) Рівняння дотичної із точки $P_0(x_0, y_0)$ виводиться так: дотична торкається параболи в невідомій, поки що, точці $P_1(x_1, y_1)$ і рівняння дотичної в цій точці: $yy_1 = p(x + x_1)$.

Дві невідомих: x_1 і y_1 знайдемо із двох умов: P_1 лежить на параболі, а, тому

$$y_1^2 = 2px_1,$$

і P_0 лежить на дотичній, а тому

$$y_0 y_1 = p(x_0 + x_1)$$

Із цих двох рівнянь <u>находимо</u> x_1 і y_1:

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p}\ ;\ y_1 = y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2px_0};$$

вставимо ці значіння x_1 і y_1 в рівняння дотичної $yy_1 = p(x + x_1)$; найдемо:

$$y\left(y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2px_0}\right) = px + \frac{py_1^2}{2p}\ ,\ \text{або}$$

$$2y\left(y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2px_0}\right) = 2px + \left(y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2px_0}\right)^2 \ldots (17)$$

с) Рівняння дотичної, рівнобіжної даній прямій, або маючої даний кут нахилу, можна вивести, прийнявши на увагу виведену вже умову, що пряма торкається параболи лише тоді, коли існує рівність:

$p = 2kl$ (вз. 7), відкіля: $l = \frac{p}{2k}$.

Рівняння прямої, що проходить під даним кутом α - є: $y = kx + l$; вставивши сюди знайдене l, найдемо <u>рівняння дотичної</u>: $y = kx + \frac{p}{2k}$ . . . . . (18)

§ 90. Поперечники параболи.

Нехай координати середини тятиви

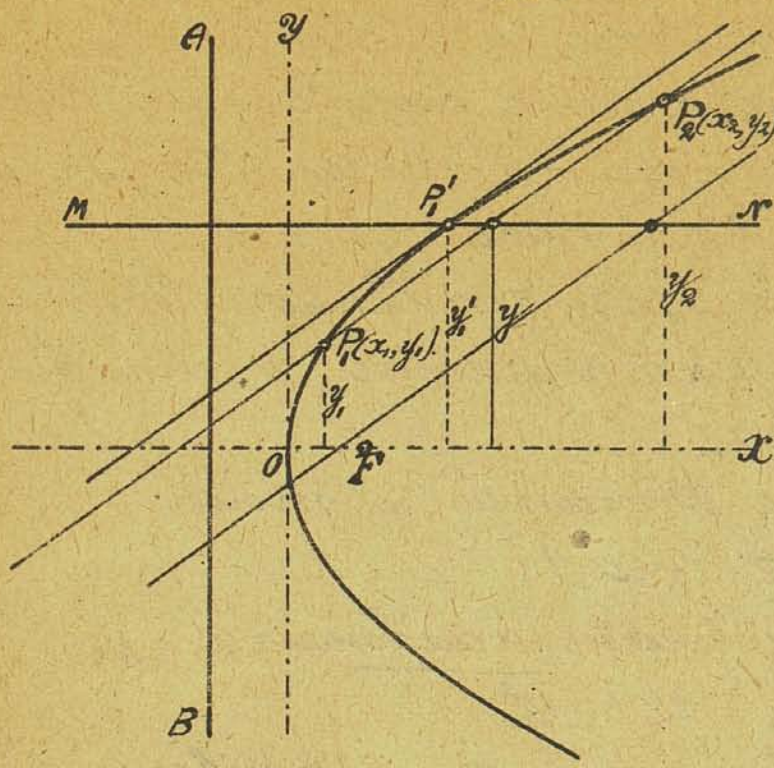


Рис. 85.

P_1P_2 параболи, що нахилена під кутом α, будуть (x,y); AB – директриса параболи, точка F – її огнище. Тоді:

$$y_1^2 = 2px_1$$

$$y_2^2 = 2px_2$$

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1} =$$

$$= p : \frac{y_2 + y_1}{2};$$

але: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\alpha$, а $\frac{y_2 + y_1}{2} = y$.

Отже $\frac{p}{y} = tg\alpha$, або $y = \frac{p}{tg\alpha}$ . . . . . (19),

себ-то величина ординати середини тятиви залежать но від p і від $tg\alpha$; з огляду на те, що p має постійне значіння, ордината y середин всіх тятив, що нахилені до осі X-ів під одним кутом α, себ-то всіх рівнобіжних тятив, залишається однаковою; а тому геометричним місцем середин всіх рівнобіжних тятив параболи є проста $y = \frac{p}{tg\alpha}$, яка рівнобіжна осі X-ів.

Ця проста називається поперечником параболи, а всі поперечники параболи рівнобіжні осі X-ів.

Віддалення поперечника від осі X-ів міняється в залежности від кута α; при $\alpha =$

90°, коли тятиви направлені рівнобіжно осі Y-ів, $y = \frac{p}{2} = 0$, себ-то поперечник зливається з віссю X-ів, а тому вісь X-ів можна розглядати, як поперечник, що половить тятиви, рівнобіжні осі Y-ів.

Поперечник $y = \frac{p}{tg\alpha}$ перетинає параболу в точці, яка має ординату $y_1' = y$. Дотична до параболи в точці y_1' має кутовий сочинник $K = tg\alpha_1 = \frac{p}{y_1'}$; оскільки $y_1' = y$, то і $tg\alpha_1 = \frac{p}{y} = tg\alpha$, а відсіля виходить, що <u>дотична до параболи в кінці поперечника є рівнобіжна тятивам, що половинятьсе поперечником.</u>

Означені властивости поперечників дають можливість для даної на рисунку параболи найти її: вісь, огнище та директрису. Для цього проводимо на параболі дві рівнобіжних тятиви й половинимо їх; проста, проведена через точки подїму тятив, буде поперечником, рівнобіжним осі X-ів; проводимо тепер <u>тятиву, простопадну до поперечника</u>, і половинимо її; поперечник, <u>проведений через середину останньої тятиви є вісь параболи.</u>

Щоб найти тепер огнище, скористаємося тим, що дотична половинить кут між провідним лучем і простопадом до директриси; проводимо через будь яку точку P з абсцісою x дотичну і відкладаємо по другий

бік дотичної кут, який нею утворено з простопадом на директрису; точка перетинання проведеної рамени кута з віссю Х-ів буде огнищем параболи.

Для кожного поперечника можна найти ті тятиви, які він половинить; для цього треба лише в початку поперечника провести дотичну до параболи; вона дасть напрямок тятив.

Аналітично напрямок тятив находимо, знаючи p і відалення поперечника y, бо $tg\alpha = \frac{p}{y}$.

§ 91. Рівнання параболи в инших прямокутних укладах.

При розв'язанню практичних задач виявляється часто необхідність віднести параболу до иншого чим це було досі зроблено укладу координат.

Рівнання $y^2 = 2px$ дає нам параболу в прийнятому укладі координат. Можна поставити питання, яку криву дає рівнання такого вигляду: $y^2 = qx$, де $q \neq 0$.

Тут може бути два випадки: 1) $q > 0$, 2) $q < 0$; коли $q > 0$, тоді рівнання $y^2 = qx$ можна написати так:

$y^2 = 2\left(\frac{q}{2}\right)x$, а означивши $\frac{q}{2}$ через p будемо мати: $y^2 = 2px$, себ-то як раз відоме вже рівнання параболи.

Коли ж $q<0$, тоді введемо спочатку другий уклад координат ξ і η такий, щоб початок і осі ординат обох укладів були спільні, а нова вісь абсцис пішла б не вправо від початку координат, а вліво; тоді $\xi = -x$. Вставивши нові координати в рівняння: $y^2 = 2(\frac{q}{2})x$, одержимо:
$y^2 = -2(\frac{q}{2})\xi$, або $y^2 = 2(-\frac{q}{2})\xi$ . . . . . (20);
це є рівняння також параболи, яка має полупараметр $= -\frac{q}{2}$; ця парабола направлена вліво від осі ординат, як показано пунктиром на рис. 79.

I. Нехай, далі, парабола віднесена до такого укладу координат: вісь Y-ів іде від будь якої точки параболи, що не зливається з вершком її, рівнобіжно осі симетрії, а вісь X-ів перетинає обидві вітки параболи, простопадно до осі Y-ів (рис. 86).

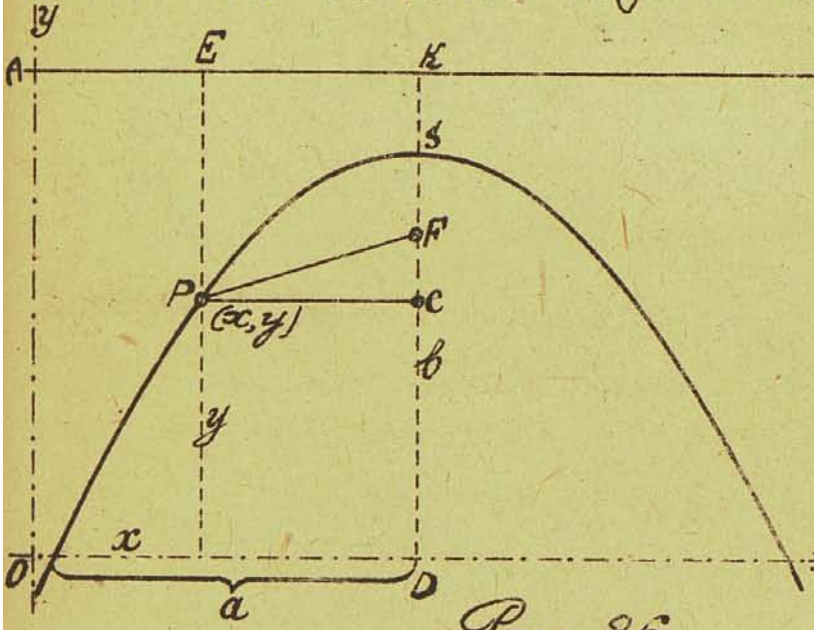


Рис. 86.

Вершок параболи нехай буде мати тоді координати $x=a$ і $y=b$. Возьмемо на параболі довільну точку $P(x,y)$ і з'єднаємо її з огнищем F; крім того проведемо $PC \parallel OX$, тоді: $PF^2 = PC^2 + FC^2$,

але PF = віддаленню точки P до директриси
$AB = PE$; $PE = KC = KS + SC = \frac{p}{2} + SC = \frac{p}{2} + b - y$;
$PC = a - x$; $FC = SD - SF - CD = b - \frac{p}{2} - y$;

Отже $PF^2 = PC^2 + FC^2$, тому:

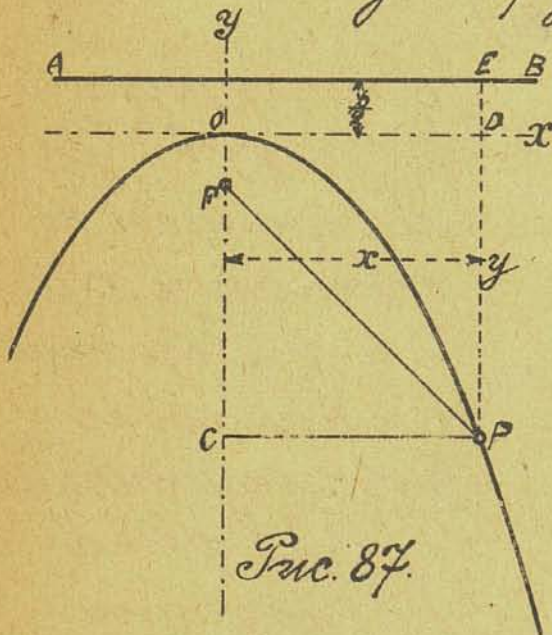
$(\frac{p}{2} + b - y)^2 = (a-x)^2 + (b - \frac{p}{2} - y)^2$, а відсіля:

$a^2 - 2ax + x^2 + 2py - 2bp = 0$ ..... (21)

Коли x надати значіння 0, то для нашого укладу координат y мусить бути також $= 0$. Із останнього рівнання при $x=0$ одержимо: $a^2 + 2py - 2bp = 0$,

відкіля: $y = \frac{2bp - a^2}{2p} = 0$; тому $2bp - a^2$, або $a^2 - 2bp = 0$, а відсіля $p = \frac{a^2}{2b}$ ..... (22) і нарешті рівнання параболи прийме такий вигляд: $x^2 - 2ax + 2py = 0$ ..... (23)

II. Нехай вісь параболи простопадна до осі OX, а вершок параболи приходиться в початку координат.



Фіг. 87.

Проведемо $PC \parallel OL$, тоді:
$PF^2 = FC^2 + PC^2$;
$PF = PE = PD + ED = y + \frac{p}{2}$;
$FC = OC - OF = PD - OF = y - \frac{p}{2}$;
$PC = x$;
Замість $PF^2 = FC^2 + PC^2$ можемо написати:
$(y + \frac{p}{2})^2 = (y - \frac{p}{2})^2 + x^2$,
або: $x^2 = 2py$ ..... (24)

III. В техниці часто приходиться зустрічати випадок, коли для параболічної кри-

вої, по якій будуються ферми моста або арка перекриття, відомі: гипгина перекриття, або тятива параболи, і стріла підвесення параболи, і бажано рівняння параболи подати в цих двох відомих параметрах.

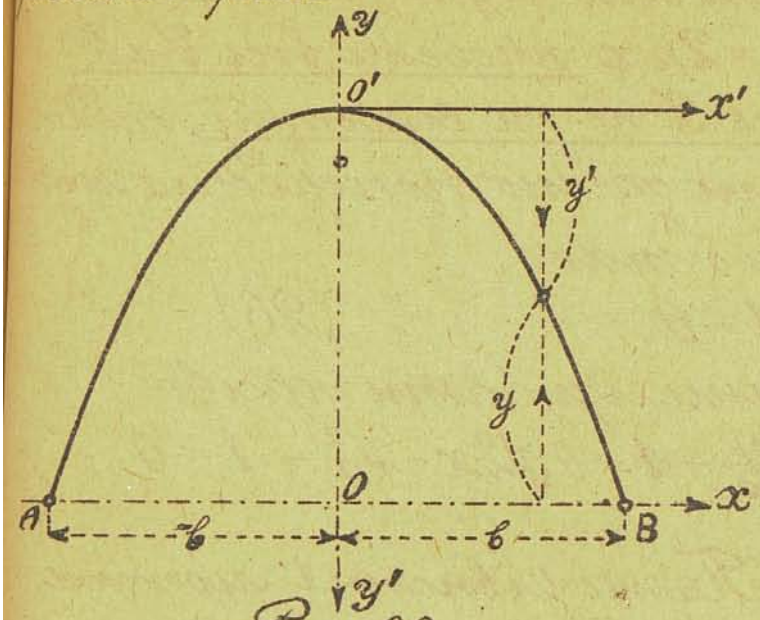


Рис. 88.

Нехай гипгина параболичного перекриття = 2b, а стріла підвесення = a. Для укладу координат O'x' і O'y' рівняння параболи тільки що виведене:

$$x'^2 = 2p y'.$$

Для нового укладу, в якому вісь x піде по тятиві b, а вісь y-ів по стрілі a вгору, абсциси залишаються однакові, а ординати змінюються так, що замість ординати y' в попередньому укладі треба брати a-y; тоді рівняння параболи перетвориться в таке: $x^2 = 2p(a-y)$, або: $x^2 = 2pa - 2py$; $x^2 + 2py - 2pa = 0$; $\frac{x^2}{2pa} + \frac{y}{a} - 1 = 0$.

Значіння 2p найдемо так: точка B лежить на параболі, а тому для координат її (b, 0) буде: $b^2 = 2p(a-0)$; $2p = \frac{b^2}{a}$. Як тільки що

показано: $2pa = b^2$, а тому рівняння параболи можна нарешті написати в такому вигляді: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y}{a} - 1 = 0$ . . . . . (25), це й є рівняння параболи в відтинках.

IV. Коли б ми залишили осі OY, яка є дотичною в вершину параболи і при якій рівняння параболи є: $y^2 = 2px$ провели вісь Y-ів по тятиві b, а вісь X по осі симетрії; тоді рівняння параболи згідно попередніх міркувань одержали б таке:

$$\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Приклади. Проаналізувати криві:

1) $-\frac{x}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$; 2) $x^2 - \frac{y}{2} - 1 = 0$; 3) $2x - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$

4) $x^2 + y + 2 = 0$;

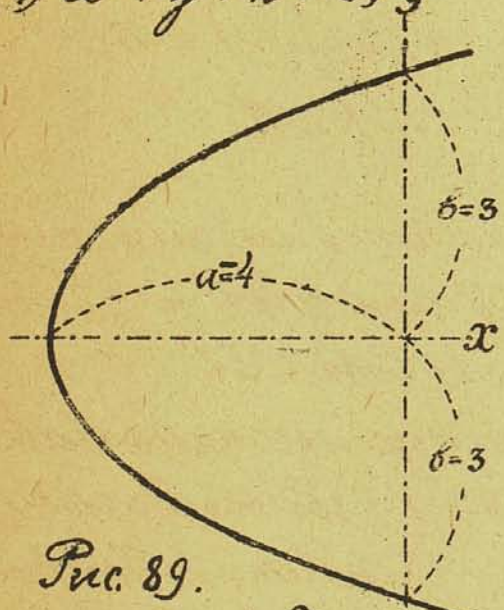


Рис. 89.

Перше рівняння можна написати так:

$\frac{x}{4} + \frac{y^2}{(3)^2} - 1 = 0$; це є рівняння параболи, яка лежить симетрично відносно осі X; $a = 4$; $b = \pm 3$

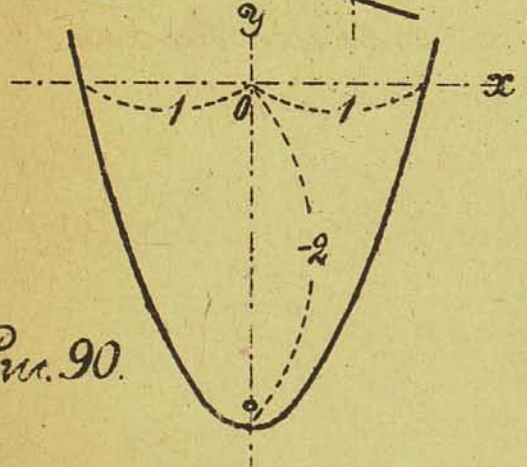


Рис. 90.

Друге рівняння можна написати так:

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y}{-2} - 1 = 0$$

Це є рівняння параболи відносно осей OX, OY; при чому парабола на осі X'ів відтинає від-

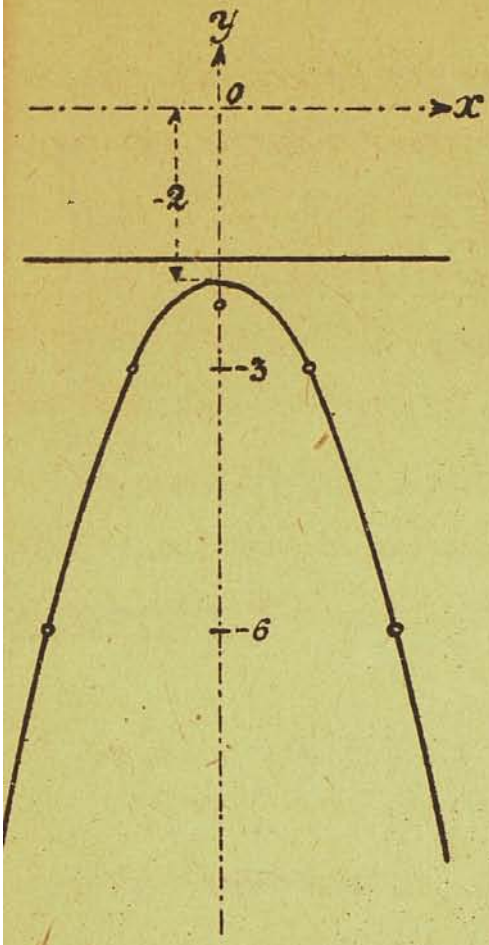


Рис. 91.

точки +1, -1, а на осі Y-ів відтинок: -2 (рис 90).

Третє рівняння напишемо так: $\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{-4} - 1 = 0$
або: $\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{(2i)^2} - 1 = 0;$

Це є парабола, яка на осі Х-ів відтинає $\frac{1}{2}$, а на осі Y-ів $\pm 2i$, себ-то осі Y-ів вона зовсім не перетинає.

Нарешті рівняння: $x^2+y^2+2=0$ можно написати так: $\frac{x^2}{-2} + \frac{y^2}{-2} - 1 = 0;$
$\frac{x^2}{(\sqrt{2}i)^2} + \frac{y^2}{-2} - 1 = 0;$

Це є також рівняння параболи, яка перетинає вісь Y-ів на віддаленню від $0 = -2$, а вісь Х-ів не перетинає зовсім (рис. 91).

V. Коли ми для відтинкових рівнань параболи візьмемо $a = -\frac{1}{2}p$, а $b = p$, себ-то візьмемо огнище за початок координат, тоді рівнання параболи прийме такий вигляд:

$\frac{x}{-\frac{p}{2}} + \frac{y^2}{p} - 1 = 0;$ $\frac{2x}{-p} + \frac{y^2}{p^2} - 1 = 0;$

$$y^2 - 2px - p^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

або: $\frac{x^2}{p^2} + \frac{2y}{-p} - 1 = 0;$ $x^2 - 2py - p^2 \ldots\ldots (28)$

§92. Рівняння лінії, яку вичерчує тіло, кинуте в порожнечі під довільним кутом нахилу до поземи.

Означим: v – початкову швидкість;

t – час в секундах;

h – висоту падання

s – гаризонту падання на поземній площі, яка проходить через точку початку руху, або <u>далекість лету тіла.</u>

α – кут, під яким кинуто тіло (<u>елевацийний кут</u>).

g – прискорення сили земного тягару.

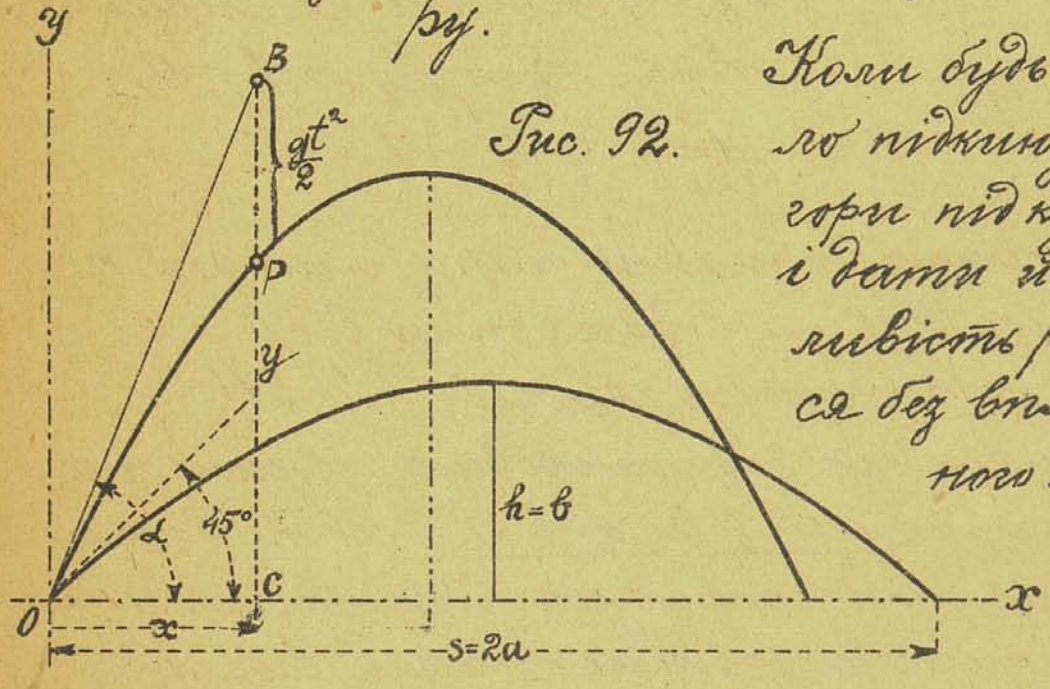


Рис. 92.

Коли будь-яке тіло підкинути до гори під кутом α і дати йому можливість рухатися без впливу земного тягару, тоді тіло пройшло б в t секунд шлях $OB = vt$; але під дією сили земного тягару тіло буде поволі знижуватися і через t секунд воно буде не в точці B, а в точці P нижче B на $\frac{gt^2}{2}$;

Коли координати точки P будуть x і y,

то $x = OC = OB\cos\alpha = vt\cos\alpha$; $y = AC = BC - BP =$
$= vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$;
Найдемо з першого рівнання t: $t = \frac{x}{v\cos\alpha}$
Вставивши це значіння t в рівнання другe, одержимо рівнання, яке зв'язує координати x і y між собою:

$$y = \frac{vx}{v\cos\alpha}\cdot\sin\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v\cos\alpha}\right)^2,$$

або: $\frac{2v^2\cos^2\alpha}{g}\cdot y = \frac{2v^2\cos^2\alpha}{g\cdot\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot x - x^2$;

або: $x^2 - \frac{2v^2x\sin\alpha\cos\alpha}{g} + \frac{2y\cdot v^2\cos^2\alpha}{g} = 0$ x) ... (29)

Коли ми $\frac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$ назовемо .... a,

а $\frac{v^2\cos^2\alpha}{g}$ ..... p, тоді рівнання (29) перетвориться в таке: $x^2 - 2ax + 2py = 0$, а це, як ми бачили (взір 23), є рівнання параболи, віднесене до прямокутних осей координат, початок яких лежить в точці параболи (в нашому випадкові в точці початку руху); вісь X-ів ідe позему, а вісь Y-ів простопадно до неї, причому цирґина тяттиви параболи, яка утворюється віссю X-ів $= 2a$, а вигина підняття верхка параболи $= b = \frac{a^2}{2p}$ (взір 22).

x) В курсі фізики Д. Лисянського на стор. 31 для траекторії подібного руху подано рівнання: $y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2$ (40); це рівнання легко зводиться до вигляду рівнання (29) і являється тому рівнанням параболи.

у нас $a = \frac{v^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$, або $\frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$; тому далекість лету $g = 2a = \frac{2v^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$ . . (30)

висота підняття тіла $b = \frac{a^2}{2p} =$

$$= \frac{v^4 \cdot \sin^2 2\alpha}{4g^2 \cdot 2 \cdot \frac{v^2 \cos^2\alpha}{g}} = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g} \quad \ldots\ldots (31)$$

Найбільше значіння функції $\frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$ буде тоді, коли $\frac{d(v^2 \sin 2\alpha)}{d\alpha} = 0$;

$2v^2 \cos 2\alpha = 0$ або $\cos 2\alpha = 0$;

$2\alpha = 90°$; $\alpha = 45°$.

Найбільше b буде при $\frac{d\left(\frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)}{d\alpha} = 0$;

$\frac{2v^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2g} = 0$; $\sin 2\alpha = 0$; $2\alpha = 180°$; $\alpha = 90°$,

себ-то, найбільша висота підняття кинутого тіла буде при стоячовому киданню його.

Задача I. Тіло кінуте зі швидкістю 300 метрів під кутом 20° до позему. Найти вишину й ширину кидання.

Ширину кидання находимо по взору:

$$s = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{300^2 \sin 40°}{9{,}81} = \sim 5900 \text{ метр.},$$

а вишину по взору:

$$h = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{300^2 \cdot \sin^2 20°}{2 \times 9{,}81} = \sim 537 \text{ метр.}$$

Рівнання ж параболи, яку зачеркне це тіло, буде таке:

$$x^2 - \frac{2 \cdot 300^2 x \sin 20° \cos 20°}{g} + \frac{2y \cdot 300^2 \cos^2 20°}{g} = 0$$

або: $x^2 - 5900x + 16200y = 0$.

Задача 2. В прямовісній, тонкій стінці посудини, що виповнена водою, ластиться відтулина, через яку вода витікається. Якого виду буде струмок води, як що не приймати на увагу опір воздуху?

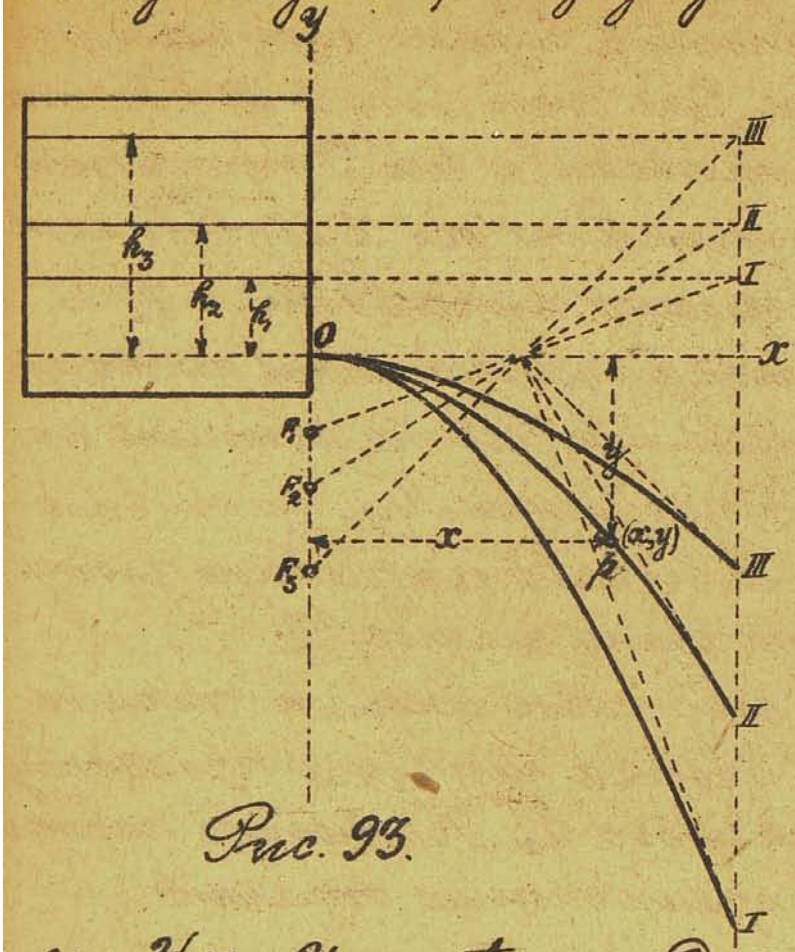


Рис. 93.

Нехай h буде відалення рівня води від середини відтулини O; тоді, як знаємо з фізики, швидкість витікання: $v = \sqrt{2gh}$. Приймемо точку O за початок координат, поземну просту через O - за вісь абсцис, а прямовисну Oy за вісь y-ів. Через t секунд частинка води прийде в положення P, яке має координати x і y; координата x дає довжину того гиляху, який пройшла б частинка води поземно, коли б на неї не діяла сила тягару, цей гилях $x = vt = \sqrt{2gh} \cdot t$; координата y дає довжину того гиляху, який частинка води пройде під дією сили тягару, $y = \frac{gt^2}{2}$.

Коли з цих двох рівнань виключити змінну t, то одержимо зв'язок між x і y, себто

Одержимо рівняння лінії руху частинки води. $t = \frac{x}{\sqrt{2gh}}$; $y = \frac{gx^2}{2 \cdot 2gh} = \frac{x^2}{4h}$;

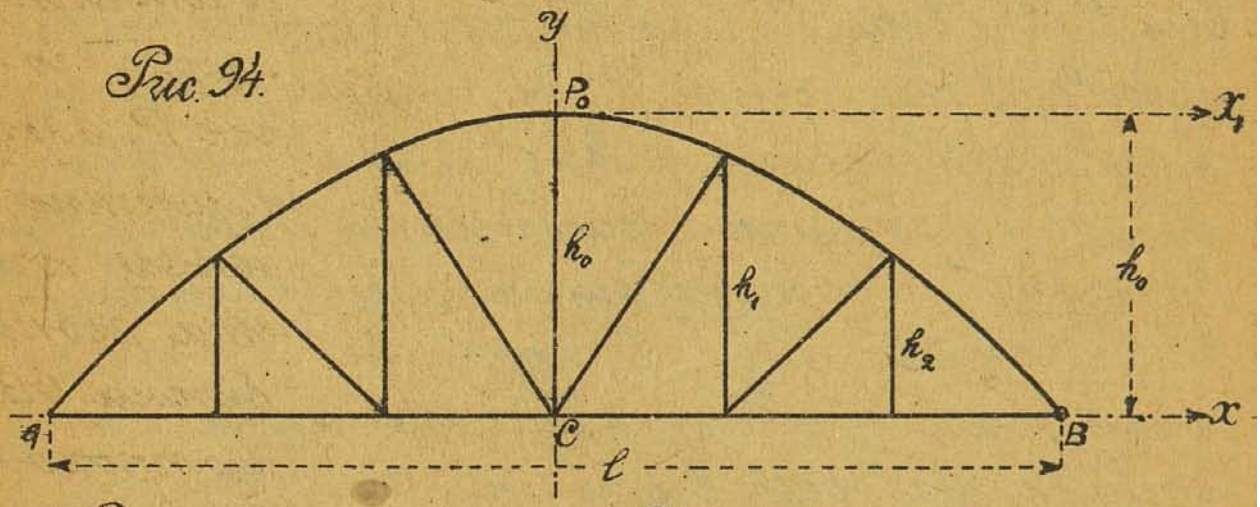
$$x^2 = 4hy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32),$$ або

$x^2 = 2py$, де $p = 2h$.

Останнє рівняння є відоме вже нам рівняння параболи, для якої вісь X-ів є дотичною до вершка параболи, а вісь Y проходить через вершок простопадно осі X-ів; віддалення огнища від вершка параболи $= \frac{p}{2} = \frac{2h}{2} = h$; а директриса лежить також від O на віддаленню $= h$, себ-то лежить на поверхні води в посудині. При зміні височини написку й вигляд параболи зміняється так, як показано на рис. 93.

Задача 3. Для мостової ферми параболичного вигляду відома висота h_0 і прольоту l і середній прямовіс h_0. Необхідно найти висоти решти прямовисних стояків.

Рис. 94.



Візьмемо за осі координат осі P_0X_1 і P_0C, тоді рівняння параболи згідно попередньо-

го буде: $x^2 = 2pg$.

Щоб знайти p, розв'язанемо рівняння параболи для точки $B\left(\frac{l}{2}, h_0\right)$; $\frac{l^2}{4} = 2p \cdot h_0$; відсіля: $p = \frac{l^2}{8h_0}$, а рівняння параболи:

$$x^2 = \frac{l^2}{4h_0} \cdot y \quad \ldots\ldots\ldots (33);$$

відсіля $y = \frac{4h_0 x^2}{l^2}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$;

Довжини h_1, h_2 і т. д. найдемо, як різницю між h_0 і відповідним y_m.

$$h_m = h_0 - y_m = h_0 - \frac{4h_0 x_m^2}{l^2};$$

Як що весь проліт $2l$ розділимо на $2n$ рівних частин, тоді: $x_m = \frac{ml}{2n}$;

$$h_m = h_0 - \frac{4h_0\left(\frac{ml}{2n}\right)^2}{l^2} = h_0 - \frac{4h_0 m^2 l^2}{l^2 \cdot 4n^2}$$

$$h_m = h_0\left[1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots (35)$$

<u>Задача 4.</u> Прямки прямокутного трикутника ABC розділені кожна на n рівних частин, означених відповідно: на стороні AC через $1, 2, 3, \ldots$, а на стороні CB через $1', 2', 3', \ldots$

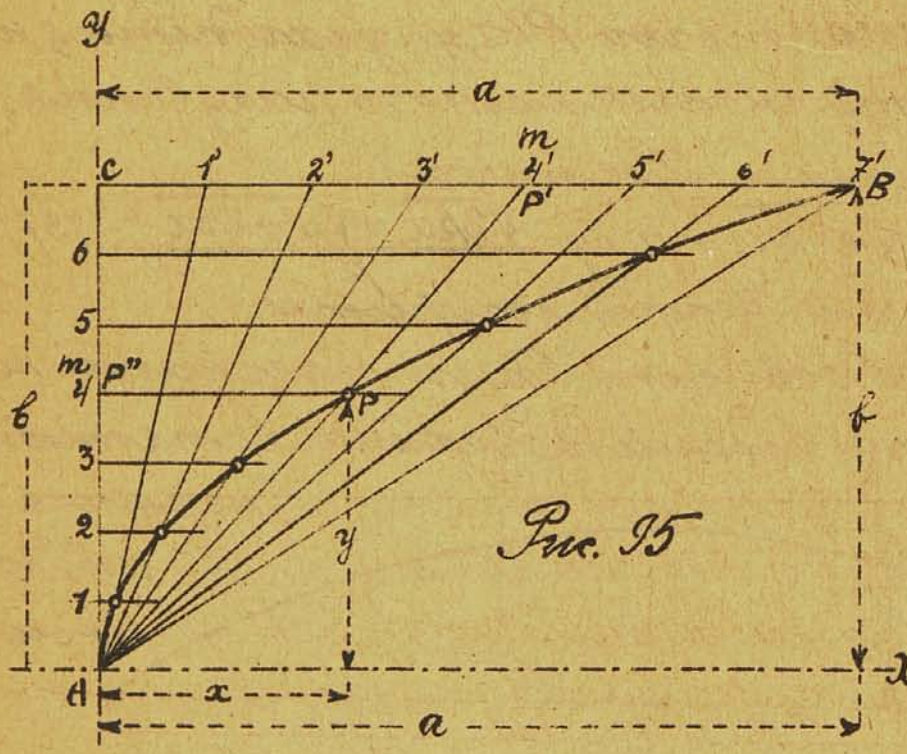


Рис. 95

Найти геометричне місце точок P, в яких перетинаються: проста: рівнобіжна CB, що проходить через точку m

на AC і проста, яка проходить через точку A і точку m на CB.

Візьмемо точку A за початок координат, AC за вісь ординат, а AX за вісь X-ів; означимо $AC = b$, а $CB = a$; тоді $P''P = x$, $AP'' = y$; $CP' = \frac{m}{n} \cdot a$; $y : b = m : n$; $x : \frac{m}{n} \cdot a = m : n$; виключивши з цих двох рівнань m, найдемо звязок між координатами x і y, себто рівнання якоїсь лінії:

$$m = \frac{ny}{b}; \quad x : \frac{ny}{b} \cdot \frac{a}{n} = \frac{ny}{b} : n,$$

або: $$y^2 = \frac{b^2}{a} x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36),$$ а це є рівнання параболи, в якої параметр $p = \frac{b^2}{2a}$.

Розвязана задача показує, як <u>найти графічно точки параболи, коли дані: a і b.</u>

§93. Довжина дуги параболи.

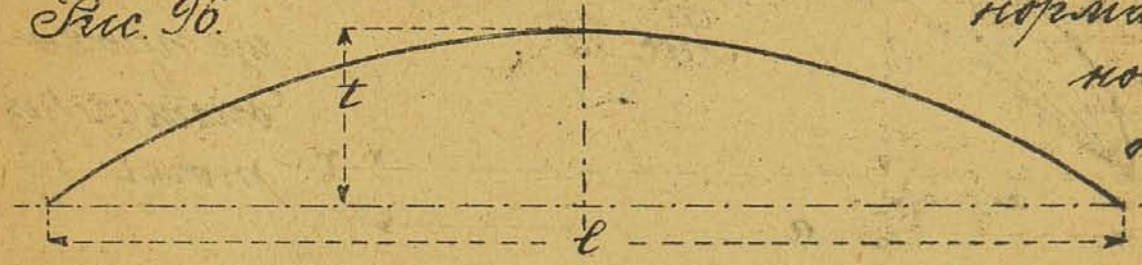
Довжина дуги параболи, від вершка її до будь-якої точки $P(x, y)$, знаходиться по тому ж взору інтегрального рахування, як і для еліпси, і буде така:

$$S = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2x(p+2x)} + p \lg \frac{\sqrt{2px} + \sqrt{p^2+2px}}{p}\right] \ldots (37),$$

де lg – означає Неперів логаритм.

Приблизна довжина дуги плескатої параболи, коли відома довжина l тятиви, нормальної до осі

Рис. 96.



сімметрії, та стрілка підпесення t, буде:

$$s = l\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{t}{l}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38),$$

(Едлич т. II, стор. 171).

§ 94. Поле параболи.

Поле параболи, обмежене дугою OP_1, абсцісою цієї дуги OK і ординатою її KP_1 (рис. 83) $= \frac{2}{3} x_1 y_1$.

§ 95. Загальне рівнання кривих другого порядку.

При виводі рівнання кола було вже показано (§ 28), що воно є окремим випадком загального рівнання другого порядку:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots (1),$$

коли сочинники при x^2, y^2 між собою рівні, а сочинник при $xy = 0$.

Покажемо тепер, що це рівнання є взагалі рівнанням одної з кривих стіжкових перерізів: кола (що було вже показано), еліпси, гіперболи, параболи.

Нехай рівнання $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ характеризує будь яку криву другого порядку в прямокутному укладі координат. Можна показати, що для якогось прямокутного ж укладу координат, повернутого відносно першого на кут α, рівнання тієї ж кривої прийме такий вигляд, що в ньому не буде члена з добутком координат (xy).

В §6 (стор. 8) було показано, що при повороті нового укладу координат відносно старого на кут α абсциса старого укладу:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \text{ та}$$
$$\text{ордината } y = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha \quad \Big\} \ldots\ldots (2),$$

де x' і y' — координати в новому укладі.

Вставивши ці взори перетворення координат в загальне рівняння, одержимо:

$$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 +$$
$$+B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(y'\cos\alpha + x'\sin\alpha)$$
$$+C(y'\cos\alpha + x'\sin\alpha)^2$$
$$+D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)$$
$$+E(y'\cos\alpha + x'\sin\alpha) + F = 0 \ldots\ldots (3)$$

Для того, щоб в цьому рівнянню зник член з добутком $x'y'$, необхідно вибрати кут α так, щоб співчинник при $x'y'$ зробився $= 0$, себ-то мусить бути:

$$-2A\sin\alpha\cos\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0;$$
$$-A\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha + C\sin 2\alpha = 0;$$
$$(-A + C)\sin 2\alpha = -B\cos 2\alpha;$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{A - C} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Таким чином, із цього рівнання ми знаходимо кут, на який мусить бути повернутий уклад координат для того, щоб із загального рівнання зник член з xy.

Отже, в дальшому можно вести обслідування рівнання другого порядку без члена xy і написати його в такому вигляді: $ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0 \ldots (5)$

Доведем тепер, що це рівняння, віднесене до певного прямокутного укладу координат, можна, при допомозі рівнобіжного пересунення осей координат, звести до такого рівняння, в якому членів з лінійними координатами x і y не буде.

В §5 було показано, що при переході від одного укладу координат до другого, йому рівнобіжного, звязок між координатами старого укладу (x і y) та координатами нового, пересунутого рівнобіжно, укладу (x' і y') буде такий: $x = x' + u$

$$y = y' + v,$$

де u і v – координати нового осередку відносно старого укладу.

Пересунувши, як сказано, уклад координат, одержимо рівняння кривої в такому вигляді:

$$a(x'+u)^2 + b(y'+v)^2 + d(x'+u) + e(y'+v) + f = 0,$$

або $ax'^2 + 2aux' + au^2 + by'^2 + 2bvy' + bv^2 + dx' + du + ey' + ev + f = 0.$

Для того, щоб зникли члени з x' і y', необхідно, щоб: $2au + d = 0$, або $u = -\frac{d}{2a}$ . . . . . (6)

$2bv + e = 0$, або $v = -\frac{e}{2b}$ . . . . . (7)

Значіння u і v, координати нового осередку укладу, будуть $= \infty$, коли $a = 0$ і $b = 0$; крім того, вони будуть неопредільні, як що $d = 0$, $a = 0$, або $e = 0$ і $b = 0$.

Розглянемо далі лише такі випадки:

A) $a \gtrless 0$; B) $a = 0$; C) $a \gtrless 0$
$b \gtrless 0$ i $b \gtrless 0$; $b = 0$

Випадок A). Коли a і b не = 0, тоді рівняння кривої приводиться до вигляду:

$$ax^2 + by^2 + f = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Тепер коли: 1) $a > 0$
$b > 0$
$f < 0$,

тоді рівнання $\underline{ax^2 + by^2 - f = 0}$ є рівнанням еліпси;

коли 2) $a > 0$
$b > 0$
$f > 0$,

тоді немає таких точок, які задовольняли б рівнанню $ax^2 + by^2 + f = 0$, бо сума додатних величин не може бути = 0.

коли 3) $a > 0$
$b < 0$
$f < 0$,

тоді буде: $\underline{ax^2 - by^2 - f = 0}$, а це є р-ння гіперболи наречіті 4) $a < 0$
$b > 0$
$f < 0$,

$-ax^2 + by^2 - f = 0$; $\underline{\text{це є також рівнання гіперболи, головна вісь якої йде по осі ординат.}}$

У випадку B) загальне рівнання приймає вигляд: $by^2 + dx + ey + f = 0 \ldots (9)$.

Уклад координат можна перенумути так, що сочинники при y і новий по-

стійний член будуть рівними нулю, тоді будемо мати: $by^2 + dx = 0$ . . . . . (10), а це є рівнання параболи, симетричної відносно осі X-ів.

Коли в загальному рівнанню $by^2 + dx + cy + f = 0$ сочинних при $d = 0$, себ-то не буде члена з координатою x, тоді рівнання перетвориться в таке. $by^2 + cy + f = 0$,

відкіля: $y = -\frac{c}{2b} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4b^2} - f}$, а це є <u>рівнання пло-</u>
<u>скої, рівнобіжної осі абсціс</u>, коли під зна-
ком корня буде число додатне; коли ж $\frac{c^2}{4b^2} < f$, тоді <u>рівнання не уявляє ніякої геом.</u>
<u>тричної фігури.</u>

Випадок C) Рівнання $ax^2 + dx + cy + f = 0$

Можна знов так пересунути уклад координат, що сочинних при x, а також новий постійний член стануть рівними нулю, тоді будемо мати. $ax^2 + cy = 0$ . . . . . (11), а це є <u>рівнання параболи, симетричної від-</u>
<u>носно осі Y-ів.</u>

Якщо $c = 0$, тоді $ax^2 + dx + f = 0$,

відкіля $x = -\frac{d}{2a} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4a^2} - f}$

Останній вираз є рівнанням двох простих, рівнобіжних осі Y-ів, коли $\frac{d^2}{4a^2} - f > 0$; коли ж $\frac{d^2}{4a^2} - f < 0$, тоді рівнання не дає ніякого геометричного образу.

D) Розглянемо ще загальне рівнання. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ в тому випадку, коли $A = 0$. $C = 0$, тоді залишаєть-

ся: $Bxy + Dx + Ey + F = 0$

Рівнобіжним пересуненням координатного укладу можна досягнути того, щоб сочинники при x і при y в рівнанню при новому укладі зникли, тоді будемо мати: $Bx'y' + F = 0$, або $xy = -\frac{F}{B}$ . . . . . (12), а це є рівнання гіперболи відносно її асімптот.

Таким чином, переведено коротке розслідування загального рівнання другого ступеня й показано, що це рівнання уявляє собою: коло, еліпсу, гіперболу, параболу, які в де-яких випадках можуть перетворитись в прості лінії.

§ 96. Діскрімінант рівнання другого ступеня.

Для того, щоб можна було без довгих викладок уявити, яку саме криву означає задане загальне рівнання:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$ розвяжемо це рівнання відносно y, тоді одержимо:

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + (2BE - 4CD)x + E^2 - 4CF}.$$

Нехай тепер:

1. $B^2 - 4AC > 0$

При безмежно великих значіннях x, додатних, чи відємних, останні члени під корінем не будуть мати впливу на знак всього виразу під корінем, і тому при: $B^2 - 4AC > 0$ весь вираз під корінем буде > 0,

а тоді y буде мати для додатнього x два реальних значіння й для від'ємного x також два реальних значіння, а всього для y буде чотирі реальних значіння. – це може бути лише в гіперболи.

2. $B^2 - 4AC < 0$.

В цьому випадку підкореневий вираз при безмежновеликих значіннях x буде від'ємний, а тому реальних значінь для y при безмежно великих значіннях x не буде, себ-то не буде в кривої точок, що лежать в безмежности; крива лежить в обмеженій частині площі, а тому це характеризує еліпсу.

3. $B^2 - 4AC = 0$

В цьому випадку y може мати реальне значіння або при x додатньому, або при від'ємному. При безмежно великому значінню x, взятому з таким знаком, щоб $(2BE - 4CD)x$ було додатнім, y буде мати два реальних значіння.

Таким чином, крива в цьому випадку має дві безмежних вітки, а такою кривою є парабола.

Отже, коли рівнання другого ступеня має геометричне значіння, то воно означає:

гіперболу коли $B^2 - 4AC > 0$
еліпсу — „ — $B^2 - 4AC < 0$
параболу — „ — $B^2 - 4AC = 0$ } ... (13)

Вираз B^2-4AC називається дискримінантом.

Приклад. Обслідувати рівняння:

$$21x^2 - 58xy + 21y^2 + 316x - 284y + 684 = 0.$$

Находимо спочатку той кут, на який треба повернути уклад координат, щоб у новому укладі зник член з xy:

$$tg2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{-58}{21-21} = \infty;\ 2\alpha = 90°;\ \alpha = 45°$$

Взори перетворення координат будуть такі:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = x'\cos 45° - y'\sin 45° = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}};$$

$$y = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha = y'\cos 45° + x'\sin 45° = \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{x'}{\sqrt{2}};$$

Вставимо тепер в дане рівняння x, y нові їх значіння, а тому що x' і y' означають також не якісь определені, а біжучі координати, то значки (') відкинемо, тоді:

$$21\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 58\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right) +$$

$$+ 21\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 316\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right) - 284\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right) + 684 = 0,$$

або: $-8x^2 + 50y^2 + \frac{32}{\sqrt{2}}x - \frac{600}{\sqrt{2}}y + 684 = 0$

$$(ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0)$$

Щоб позбавитись в останньому рівнянню членів з лінійними координатами перенесемо уклад координат так, щоб координати осередку укладу були определені взорами:

$$u = -\frac{d}{2a} = -\frac{32}{\sqrt{2}\cdot 2\cdot(-8)} = \frac{2}{\sqrt{2}};$$

$$v = -\frac{e}{2b} = \frac{600}{\sqrt{2}\,2\cdot 50} = \frac{6}{\sqrt{2}};$$

тоді $x = x' + \frac{2}{\sqrt{2}}$; $y = y' + \frac{6}{\sqrt{2}}$;

Вставивши ці значіння x і y в наше рівняння, тоді одержимо (відкинувши знаки):

$$-8\left(x+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2+50\left(y+\frac{6}{\sqrt{2}}\right)+\frac{32}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)-$$

$$-\frac{600}{\sqrt{2}}\left(y+\frac{6}{\sqrt{2}}\right)+684=0\text{, або}$$

$$-8x^2+50y^2-200=0$$

$$-4x^2+25y^2=100;$$

$$-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{1}=1;\qquad -\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

Це рівняння гіперболи, головна вісь якої іде по осі ординат і $=2$, а побічна вісь $=5$ та іде по осі x-ів.

§.97. Поняття про полярні координати.

З аналітичній геометрії, крім прямолінійних координат, в яких положення точки на площі визначається перетинанням двох простих ліній, вживаються ще й криволінійні координати, в яких положення точки находиться взагалі перетинанням кривих ліній. Найпростіший з таких укладів є уклад полярних координат. З цьому укладі положення точки на площі означається перетинанням простої, яка виходить з постійної точки, що називається полюсом, з колом осередок якого приходиться в полюсі (рис. 97). Постійна лінія OM, що проходить через полюс, називається полярною віссю.

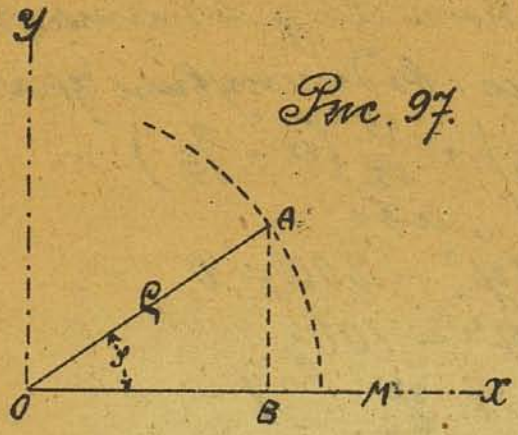


Рис. 97.

Положення точки A на площі цілковито определяється, коли відомі відалення її від полюса та кут φ, що утворює відтинок ρ з полярною віссю.

Величини ρ і φ – являються полярними координатами точки A. Коли кут φ залишається незмінним, а міняється ρ, тоді точка рухається по прямій OA; коли же, навпаки, ρ – постійне, а міняється кут φ, тоді точка рухається по колу, осередок якого лежить в точці O, а луч ρ рівний ρ; кут φ, який міняється від 0 до 2π, вираховується в напрямку проти ходу годинникової стрілки; координата ρ може змінятися в межах від 0 до ∞.

§98. Звязок між прямокутними і полярними координатами.

Щоб знайти звязок між прямокутними і полярними координатами, приймемо полюс O за початок прямокутних координат, а полярну вісь (рис. 97) за вісь X-ів. Накреслимо координати точки A відносно прямокутного укладу координат XOY. Полярні координати точки A будуть ρ і φ, а прямокутні: $OB = x$; $AB = y$. Із простокут-

ного трикутника OBA находимо такий звязок між цими координатами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \\ y &= \varrho \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

§ 99. Рівнання простої в полярних координатах.

Покажемо тепер, як означається проста лінія в полярних координатах. Коли пряма проходить через осередок, тоді рівнання її буде таке: $\vartheta = \alpha$ . . . . . (2), де α - кут, що утворює проста з полярного віссю.

Коли проста не проходить через осередок, тоді рівнання її виводиться так: нехай маємо полярний уклад координат, заданий полюсом O і напрямком полярної осі (рис. 98); лежмо в цьому укладі

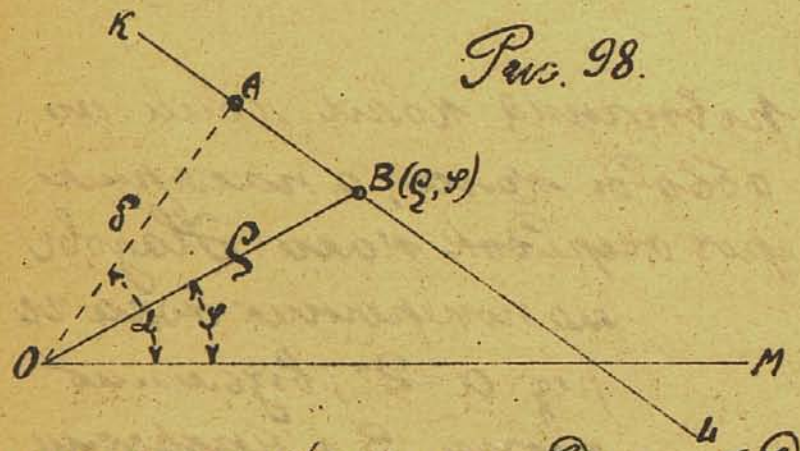


Рис. 98.

просту KL. Опустимо з полюса O простопад, довжиною δ, на просту KL; нехай кут між полярною віссю та цим простопадом буде $= \alpha$. Возьмемо на простій KL будь яку точку B з полярними координатами ϱ і ϑ; із прямокутного трикутника AOB маємо:

$\delta = \rho \cos(\alpha - \varphi)$, або $\rho = \frac{\delta}{\cos(\alpha - \varphi)}$ . . . (3)

Це й є полярне рівняння прямої, бо цьому р-нню задовольняють координати всякої точки на прямій. Тепер саме рівняння одержимо. Коли р-ння-прямої нормального вигляду: $x \cos\alpha + y \sin\alpha = \delta$ перетворимо в рівняння при полярних координатах, замінивши x і y відповідними значеннями в полярних координатах. Після підстановки одержимо:

$\rho \cos\alpha \cos\varphi + \rho \sin\alpha \sin\varphi = \rho \cos(\alpha - \varphi) = \delta$ відкіля: $\rho = \frac{\delta}{\cos(\alpha - \varphi)}$

§100. Рівняння кола в полярних координатах.

Коли полюс лежить в середині кола, тоді рівняння кола буде таке:

$\rho = r$ . . . (4), де

r – рад. кола.

Розглянемо ще рівняння кола, коли полюс лежить на обводі кола, а полярна вісь проходить через середок кола. Назовемо поперечник кола через $a = 2r$; візьмемо точку B і накреслимо її координати ρ і φ; із прямокутного трикутника OBA маємо:

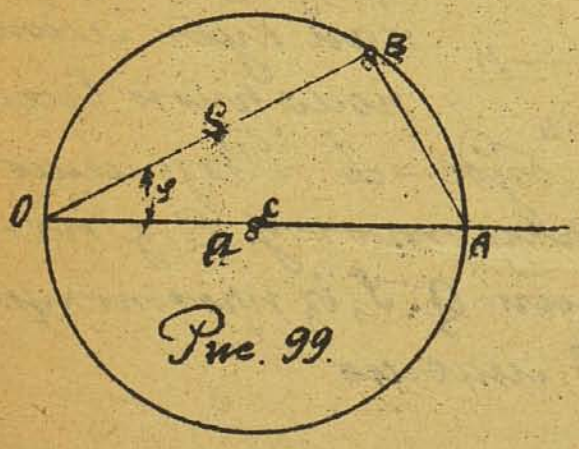


Рис. 99.

$\rho = 2r\cos\varphi$, або $\rho = a\cos\varphi$ . . . . . (5); це й є рівняння даного кола.

§ 101. Полярне рівняння еліпси, гіперболи й параболи.

Приймемо огнище еліпси, гіперболи й параболи за полюс полярного укладу координат, а вісь кривої в напрямку до найближчого вершка кривої за полярну вісь. Координати будь-якої точки P на кривій будуть: ρ і φ; $FP = \rho$; $\angle AFP = \varphi$.

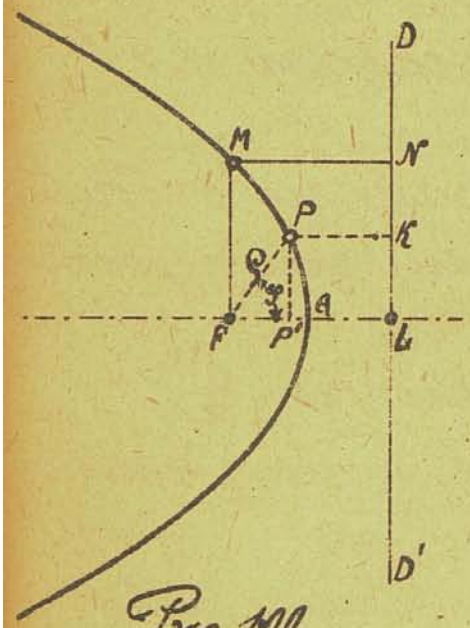


Рис. 100.

Нехай DD' буде директриса кривої. Відношення віддалень довільної точки еліпси, гіперболи чи параболи до огнища й до директриси постійне й рівне числовому ексцентру e; тому: $\frac{FP}{PK}$, або $\frac{\rho}{PK} = e$.

Віддалення PK можна подати через деякі постійні величини та через кут φ. Означимо простопад FM (параметр) через p. Для точки M маємо також:

$$\frac{MF}{MN} = e, \text{ або } \frac{p}{MN} = e;$$

відсіля MN — віддалення огнища від директриси, $= \frac{p}{e}$.

Далі, $PK = MN - FP' = MN - \rho\cos\varphi$;

Отже, $PK = \frac{p}{e} - \rho\cos\varphi$.

Тому можемо написати:

$$\frac{\rho}{\frac{p}{e} - \rho\cos\varphi} = e,$$

або $\rho = p - \rho e\cos\varphi$; $\rho(1 + e\cos\varphi) = p$

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Останнє рівняння й є рівнянням еліпси, гіперболи й параболи;
для еліпси $e < 1$; для гіперболи $e > 1$;
для параболи $e = 1$.

Параметр p для параболи входить явно в рівняння параболи при прості кутових координатах.

Для еліпси й гіперболи $p = \frac{b^2}{a}$.

Важнійші поправки, які необхідно зробити в конспекті лекцій по аналітичній геометрії.

Стор. 7, стрічка 16 згори. Написано „себ-то", треба - „і".

— „ — , — „ — 17 згори. Після слова „системи" треба приписати: при умові, що нові осі направлені так само, як і старі; коли ж будь яка нова вісь координат, напр. вісь X-ів має напрямок протилежний напрямку в старому укладі; тоді взір (2) прийме такий вигляд:

$$\left.\begin{aligned} x &= a - x' \\ y &= b + y' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2')$$

Стор. 8 стрічка 5 згори. Після рівнань (3) треба дописати:

$$\text{або} \quad \left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3')$$

Коли новий уклад координат утворено так, що даний уклад спочатку ніби з'єднуто рівнобіжно самому собі, так що новий початок координат O' має відносно старого укладу координати (a, b), а потім цей зєднутий уклад ще повернуто на кут α, тоді взір (3) перейде в такий:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a \quad \ldots\ldots (4)$$

$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b \quad \ldots\ldots (4)$$

або: $x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha$

$$y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \quad \ldots\ldots (4')$$

Стор. 9, стрічка 10 згори. Написано: AM" буде...; треба: AM' буде зі знаком +, тоді M'B треба брати вже зі знаком —, AM" зі знаком —, а M"B зі знаком +; при цій умові відношення $\frac{AM'}{M'B}$ і $\frac{AM"}{M"B}$ будуть від'ємними, а по абсолютній величині $\frac{AM'}{M'B}$ буде > 1, а $\frac{AM"}{M"B}$ < 1.

Стор. 10. Задача №2 не докінчена, треба дописати:

в точці D прикладена маса = 2 одиницям. Рівнодіюча тягару цієї маси і маси = 1, прикладеної в точці C (x_3, y_3), буде на прямій DC, в такій точці M, що $\frac{DM}{MC} = \lambda = \frac{1}{2}$

Координати середка ваги всіх трьох мас будуть: $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Стор. 13, стрічка 7 згори. Написано: $r_1 \cos\varphi_1 = y_1$; треба: $r_1 \sin\varphi_1 = y_1$

„ — 14, — „ — 1 знизу. Написано:

$$\frac{1}{2}\{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - y_3 x_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\}$$

Треба:

$$\frac{1}{2}\{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\}$$

„ — 15, — „ — 5 знизу. Написано: згода на залежність. Треба: Згадана за —

лежність.

Стор. 19 стрічка 16 згори. Від слів: — ... буде таке — треба написати:

$(x-5)^2+(-3)^2=36$; $(x-5)^2=27$.

$x-5=\pm\sqrt{27}$; $x_1=5+5{,}2=10{,}2$

$x_2=5-5{,}2=-0{,}2$

Вісь ординат перетинається в точках, де $x=0$; при цій умові:

$(-5)^2+(y-3)^2=36$; $(y-3)^2=11$;

$y-3=\pm\sqrt{11}$; $y=3\pm3{,}3$;

$y_1=6{,}3$; $y_2=-0{,}3$

Стор. 31, —„— 5 згори. Треба: — Рівняння прямої в відтинках на осях координат.

—„— „ —„— 15 —„—. Після слова: — в відтинках — треба дописати: — на осях координат.—

—„— 32. На рисунку 28 треба в кінці перпендикуляра із O на KL поставити літеру P.

—„— 33, —„— 14 згори. Написано: $m=\pm\sqrt{A^2+B^2}$; треба: $m=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$

—„— 52. На рис. 37 лінію SB_2 треба провести пунктиром.

—„— 72, стрічка 9 згори. Написано: (або $S_1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}S_2=0$); треба: $S_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}S_2=0$.

—„— 86, —„— 7 згори. Написано: $y^2=\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a}\cdot\frac{x}{a}$; треба: $y=2\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a}\cdot\frac{x}{a}$;

—„—„—, —„— 8 —„—. Написано: — гіперболічні

ри-; треба: — полупараметра -.

Стор. 108, стр. 8 знизу. Написано: $r_1 = \frac{a^2}{c} - x =$
$= \frac{a}{e} - x$; треба: $\frac{a^2}{c} - x = \frac{a}{e} - x$.

— „ — „ — , — „ — 5 — „ —. Написано: $a - ex : \frac{a-ex}{a} =$
e, а треба: $a - ex : \frac{a-ex}{e} = e$.

— „ — 123, — „ — 6 згори. Написано: $y - y = \frac{ab}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$;
треба: $y - y = \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$

— „ — 129, — „ — 5 знизу. Написано: — згустіґа-
ton. ґіперболу —, а треба: — зу-
стрічаються дотичну —

— „ — 165, — „ — 3 „ —. Написано:

$$\frac{x^2}{-\frac{p}{2}} + \frac{y^2}{p} - 1 = 0;$$

треба: $\frac{x^2}{-\frac{p}{2}} + \frac{y^2}{p^2} - 1 = 0$

— „ — „ — ; — „ — 1 — „ —. Написано: $x^2 - 2py - p^2$;
треба: $x^2 - 2py - p^2 = 0$.

3186245794

Видавнича Товариство при Українській Господарській Академії
Č. S. R., Lázně Poděbrady, hotel „U krále Jiřího" č. 42.

Професор І. Шовгенів: Аналітична геометрія
1923