В. Дяконенко

Числення ймовірностей

„Сіяч“
Прага — 1927

Ч. 24.

На правах рукопису.

В. Д я к о н е н к о

Ч И С Л Е Н Н Я Й М О В І Р Н О С Т Е Й

Курс лекцій, читаних ув Укр. Педаґ. Інституті ім. М. Драгоманова в. 1925/26р.

Видавниче т-во С І Ч при Українському Педаґоґічному Інституті ім. М. Драгоманова

Прага - 1927.

П Е Р Е Д М О В А.

Підручник цей має у своїй основі курс числення ймовірностей, читаний автором на Українському Вищому Педагогічному Інституті ім. М. Драгоманова в Празі в 1925-6 шкільному році. Повна відсутність якого-будь підручника числення ймовірностей в українській мові спонукала автора випустити цей курс у світ, не зважаючи на те, що матеріял його вимагає ще дальшого, глибшого оброблення. Складався цей курс під упливом клясичних творів Пуанкаре, Маркова, Бертрана й Чубера.

Автор обмежився лише найголовнішими й найважливішими питаннями, дотримуючися, одначе, при їх викладі можливо більшої повноти й докладности.

Для полекшення засвоєння основних понять і принципів числення ймовірностей, особливо для читача, що звик мислити математично лише категоріями аналіза безконечно - малих, курс має, переважно зпочатку, досить значну кількість прикладів. Ті приклади, що одночасно зустрічаються в кількох авторів і при тому без зазначення, кому саме належить їх авторство, уміщені в курсі також без указівки на авторство вже хоч би тому, що автори їх, очевидячки не відомі. На кінці курсу в формі окремих додатків подано вивід потрібних для числення ймовірностей математичних формул, а також літературу використовану автором при складанню цього підручника.

Що до термінольоґії - автор старався дотримуватися термінольоґії, ухваленої Всеукраїнською Академією Наук - Калинович Ф. Словник математичної термінольоґії (проект) ч. І. Київ. 1925.

Прага В. Л.

ВСТУП.

§1. Предмет та мета числення ймовірностей.

Числення ймовірностей студіює закони випадку. На перший погляд таке визначення видається парадоксом, бо, здавалося б, - закон і випадок - це два поняття, які виключаються взаїмно. Щоб ліпше собі уяснити це визначення, мусимо спинитися на понятті випадку й дати спочатку стисле його визначення. Що таке, власне, випадок? Що треба розуміти під цим словом? Які саме явища й події ми називаємо випадковими?

Основною й характеристичною рисою людської свідомости є поняття причиновости, себто причинового звязку між окремими явищами: жадного явища жадної події ми не можемо мислити без причини. Одначе, нашому знанню доступні причини далеко не всіх явищ. Існує багато явищ, що їх причини нам невідомі і, навіть, при сучасному стані наук, не можуть бути відомі. Ці останні явища ми й будемо називати явищами випадковими. Так: випадкова буде несподівана зустріч двох знайомих на вулиці далекого, чужого для них міста, випадковим ми звемо народження хлопця, або дівчини, випадком є витягнути за першим разом з повної колоди карт, припустимо, короля пік. Таким чином, суть випадкових явищ полягає в їх залежности від причин нам невідомих. Французький математик - філософ Анрі Пуанкаре висловив свій погляд на випадкові явища такими словами: "випадкові явища це ті, що їх закони нам невідомі"[1], а другий, теж французький, математик Е. Борель каже: "випадок - тільки назва для нашого незнання" [2]. Після цього зясування поняття випадкового явища стає очевидне, що в суті річі жадного внутрішнього протиріччя між поняттям закону і поняттям випадку не повинно бути. І дійсно вже поверхове, лише студіювання випадкових явищ показує, що вони теж під-

1) Poincaré H. La science et la Méthode

2) Borel E. Le hasard 1914.

лягають певній закономірности,та що до багатьох із них можно прикласти кількісну оцінку,що дає можливість при студіованню їх приміняти математичну методу. Прикладення математичної методи до відшукування й студіовання законів випадкових явищ, укладене в логічно - математичну систему,-це й є числення ймовірностей.Мета ж числення ймовірностей - це осягнення можливости передбачати випадкові явища з найбільшою докладністю.

За останні півстоліття значіння числення ймовірностей надзвичайно поширилося.Методи числення ймовірностей знаходять прикладення в усіх галузях наук.Так звана статистична метода наукового досліджування,яка набірає в останніх часах що раз більшої ваги,і в соціяльних,і у природничих науках -основана на численню ймовірностей.Успіхи фізики й астрономії показали велику корисність статистичної методи й висунули її на перше місце в сучасному природознавстві.А непереможне значіння цієї методи в соціології та,взагалі,в науках соціяльно-економічних таке загально відоме,що цілком стає ясна та важлива роля,що її віограє в життю модерних держав,цих складних соціяльних орґанізмах , числення ймовірностей,так слушно назване Е.Борелем соціяльною математикою.

§2. Короткий історичний нарис.

Числення ймовірностей є порівнюючи молода математична дисципліна.Саме поняття "ймовірности" уперше зустрічається в одному коментарії до *Divina Commedia* Данте Аліґері,виданому у Венеції в 1477 р.Початок же численню ймовірностей, як самостійній науковій дисципліні,було покладено працями славних французьких математиків Паскаля й Фермата в половині XVII століття.До розвитку числення ймовірностей на самім його початку спричинилися так звані ґазардові гри,які дали привід до перших досліджувань ймовірностей.Перша задача, що її було запропоновано в 1654 р. Паскалю кавалером де-Мере, відомим в свої часи завзятим грачем,була про справедливий росподіл ставки поміж грачами до остаточного закінчення гри; в ріжних способах її розвязання,запропонованих Паскалем і Ферматом, вбачають початок числення ймовірностей.

В 1657 р. було видано Гюйґенсом перший систематичний трактат з числення ймовірностей під назвою *De rationiis in ludo aleae*.

Найвидатнішим явищем в історії розвитку числення ймовірностей треба вважати відкриття Яковом Бернуллі його знаменитої теореми, названої ним законом великих чисел;теорема ця по справедливости являється основною теоремою числення ймовірностей. Опублікована вона була уперше в Базелі в 1713 р., вже після смерти автора,в IV частині його славної праці *Ars conjectandi*.

Далі треба відмітити праці Данила Бернуллі і англійця Байєса.Останній своєю теоремою, відомою під назвою теореми Байєса і опублікованою в 1764 р. після його смерти,розвязав поставлене Данилом Бернуллі питання про так звані ймовірности *a posteriori*.

З початком XIX століття розвиток числення ймовірностей робить великий крок наперед завдяки працям Лежандра й Гауса,які працювали в области примінювання числення ймовірностей до оцінки результатів вимірів : перший дав в 1806 р.методу най менчих квадратів,а другий збудував повну і закінчену теорію похибок вимірів.

В 1812 р.появилася праця Лапласа *Théorie analytique des probabilités* ,яка уявляє дуже добре опрацьований трактат з числення ймовірностей. При допомозі взора Стірлінга Лаплас встановив відому свою формулу,яка носить його імя. Лаплас удосконалив Гаусову теорію похибок і примінив числення ймовірностей до астрономії. Другий відомий твір Лапласа *Essai philosophique sur les probabilités* , який вийшов в 1814 р.,дає в загально доступній формі нарис філософських основ числення ймовірностей.

В 1837 р. Пуасон видав свій твір під назвою *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités* ,в якому дав узагальнення теореми Я. Бернуллі і збудував математичну теорію судівництва В другий же своїй праці - *Mémoires sur la probabilité du tir à la cible* - Пуасон примінив числення ймовірностей до потреб артілерії.

В 1867 р. російський математик П.Чебишов опублікував в *Journale de Liouville* свою відому теорему,яка відноситься до сум незалежних величин і узагальнює теореми Я.Бернуллі і Пуасона.

Із пізніщих творів в области числення ймовірностей треба зазначити клясичні курси числення ймовірностей Ж.Бертрана, А.Пуанкаре, Е.Чубера , А.Маркова і Е.Бореля.

РОЗДІЛ I.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ТЕОРЕМИ.

§ I. Визначення поняття ймовірности

Поняття ймовірности зв'язане з поняттям випадкової події. Не знаючи причин ні законів випадкової події, ми не можемо вирішити, появиться така подія в майбутньому, чи ні; ми можемо лише сказати, що ця подія колись може відбутися, а може і не відбутися, сказати ж, що вона напевне відбудеться, або навпаки, що вона напевне не відбудеться, ми не маємо жадних підстав. Усяка спроба дати на це питання більш конкретну відповідь буде лише припущенням більше, або менше ймовірним, звідси випадкову подію називають іще подією ймовірною. Таким чином, питання ймовірности якоїнебудь події виникає лише тоді, коли ця подія випадкова, й коли вона є в майбутньому, себто ще не відбулася.

Сукупність умов, що при їх виконанню питання появлення чи непоявлення даної події якось розв'язується, будемо звати дослідом.

Припустім, що відносно якоїсь події, визначимо її літерою A, існує n можливих випадків, або, коротче, просто випадків, чи можливостей, таких, що при певному досліді один із них відбувається. Визначимо їх так:

$$C_1, C_2, C_3 \ldots\ldots C_n \qquad (I)$$

Будемо називати можливі випадки: єдиноможливими, коли один із них напевне мусить відбутися, взаємновиключальними, коли кожний із них виключає решту, так що одночасно не може відбуватися кілька випадків, і однаковоможливими, коли немає жадних підстав припускати, що якийсь один із них може наступити з перевагою перед рештою.

В питаннях теоретичного характеру ці терміни не викликають сумніву, у практиці ж часто, щоб задовольняти, бодай приблизно, перечислені умови, доводиться поставлені задачі ідеалізувати.

Припустимо, що можливі випадки (I) задовольняють ці умови, себто вони є однаковоможливі, єдиноможливі і взаємновиключальні. Будемо теж уважати, що ряд (I) вичерпує всі цілковито можливі випадки, що відносяться до події A. Нарешті припустимо, що з усіх n однаковоможливих, єдиноможливих

.а взаємновиключальних випадків (I) m - таких, що при появленню кожного з них подія А відбувається, а решта $n-m$ - таких, що при появленню кожного з них подія А не відбувається. Перші будемо називати сприятливими для події А, а другі - несприятливими для події А.

Коли б усі можливі випадки були сприятливі для події А, то ясно, що тоді вона б напевно відбулася; коли б навпаки всі випадки були несприятливі для події А, то появлення її, очевидячки, було б неможливе. Подію, що напевно відбудеться, будемо звати певною, подію ж, яка напевно не відбудеться, будемо звати неможливою.

Після зроблених уваг ми можемо поняттю имовірности в математичному розумінні дати таке визначення: імовірністю події А зветься дріб, що його чисельник рівняється числу випадків сприятливих для події А, а знаменник - числу всіх випадків, що відносяться до події А, з умовою, що всі ці випадки однаковоможливі, єдиноможливі та взаємновиключальні.

Коли имовірність події А означимо p, то очевидячки:

$$p = \frac{m}{n} \tag{2}$$

Звідси можемо зробити такий висновок: імовірність події це правильний дріб; дійсно: чисельник дробу (2), себто число випадків сприятливих для події, завше менший од знаменника - числа всіх випадків. Граничними вартостями имовірности будуть: одиниця, коли всі випадки, що відносяться до події, будуть для неї сприятливі, чисельник дробу (2) буде тоді рівний знаменникові, а дана подія стане подією певною - імовірність переходить у певність, і нуль, коли чисельник дробу (2), себто число сприятливих випадків, рівний нулю - подія, очевидячки, неможлива.

Подію, яка полягає в тому, що дана подія А не відбудеться, будемо звати подією протилежною події А. Означимо її літерою В. Ясно, що можливі випадки несприятливі для події А будуть сприятливі для події В і навпаки. Означивши q імовірність події В, будемо, очевидячки, мати:

$$q = \frac{n-m}{n},$$

звідки

$$p+q=\frac{m}{n}+\frac{n-m}{n}=1$$

Остання рівність дозволяє нам висловити таке твердження : сума ймовірностей даної події й події їй протилежної рівняється одиниці.

При встановленому так визначенню ймовірність є завше раціональне число в межах від нуля до одиниці ;деякі автори називають таки ймовірности перервними, щоб одрізнити їх од імовірностей неперервних, що визначаються також і числами ірраціональними. Цим останнім імовірностям буде присвячений окремий розділ.

Розглянемо деякі приклади. Почнемо такою задачею. Кидають монету на позему площу, треба найти ймовірність появлення орла. В даному разі : подія, що її ймовірність шукаємо, - це випад орла, з яким ця подія може відбутися, - це кидання монети на площу. Усіх можливих при цьому досліді випадків двоє : поява орла й поява решки. Вони єдиноможливі, бо коли монету кинуто, то один з них конче мусить відбутися, далі - вони взаємновиключальні, бо ясно, що одночасне появлення орла й решки - річ виключена. Нарешті, коли монета - правильний циліндер, зроблений із однородного матеріялу, то ці випадки однаковоможливі. Один із них, а саме - появлення орла, сприяє події, а другий - появлення решки їй несприяє. Згідно з принятим визначенням імовірність p випаду орла буде, очевидячки, половина :

$$p=\frac{1}{2}$$

Ясно, що ймовірність q протилежної події (випад решки) буде теж половина :

$$q=\frac{1}{2}$$

Другий приклад. Кістку до гри в формі куба, що його шість стінок понумеровані числами від I до 6, кидають на позему площу. Яка ймовірність, що випаде паристе число ? В цьому прикладі : подія, що її ймовірність треба знайти,- це випад паристого нумера, дослід - кидання кістки на позему площу. Число всіх можливих випадків при цьому досліді - шість :появлення нумера I, появлення нумера 2, і т. д., нарешті - появлення нумера 6. Ясно, що всі випадки єдиноможливі й взаїмновиключальні. Коли кістка, вжзана до гри, є правильний куб, зроблений із однородного матеріялу, то вони також і однаковоможливі . Сприяють події три випадки, а саме : появлення нумера 2 , появлення нумера 4 й появлення нумера 6 . Решта випадків даній події не сприяє, але сприяє події протилежній - випаду непаристого числа. Коли означимо p ймовірність випаду паристого числа, то

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Імовірність q події протилежної буде, очевидячки, теж $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Нарешті розглянемо ще такий приклад . В урні находиться 7 куль, позначених нумерами від I до 7 ; три кулі з нумерами I-3 є білі, а решта , з нумерами 4-7, - чорні ;усі кулі однакового розміру однакові на дотик і зроблені з того самого матеріялу ;тягнуть наослін одну кулю - яка ймовірність появлення білої кулі ? Подією, що її ймовірність шукаємо, є витяг білої кулі. Дослід, з яким ця подія може відбутися,-це операція витягу кулі з урни . Усіх можливих випадків, що при цьому можуть бути, сім : появлення кулі з нумером I, появлення кулі з нумером 2 і т.д.,нарешті, появлення кулі з нумером 7. Коли дослід переводить свідома людина,то всі ці випадки, очевидячки, єдиноможливі й взаїмновиключальні, а також,при дотриманню умов задачі, і однаковоможливі. Сприяють події три випадки, а саме: появлення кулі з нумером I, появлення кулі з нумером 2 і появлення кулі з нумером 3. Решта випадків даній події не сприяють, а сприяють події протилежній - витягові чорної кулі. Імовірність p витягу білої кулі буде :

$$p = \frac{3}{7}$$

а ймовірність q витягу чорної кулі - :

$$q = \frac{4}{7}$$

Сума ймовірностей p і q , очевидячки, рівна I .

Щоб навести приклад можливих випадків , які не задовольняють умові однаковоможливости,спинимося на такій задачі. Сім куль, із яких 6 є чорних, а I - червона, всі одного розміру, покладені на стіл ;малій дворічній дитині доручено взяти одну якусь кулю - яка ймовірність, що дитина візьме чорну кулю ? Припустимо, що розмір куль такий, що дитина не може взяти в руки більше як одну кулю. Тоді, очевидячки, ми можемо сказати, що всі можливі випадки, число яких є 7, будуть єдиноможливі й взаїмновиключальні. Але, чи будуть вони однаковоможливі ? Беручи на увагу, що яскравий колір червоної кулі передовсім, очевидячки, зверне на себе увагу дитини, треба визнати, що ці випадки умови однаковоможливости не задовольняють : ясно, що червона куля в очах дитини буде мати перевагу перед рештою. І коли при умові однаковоможливости всіх випадків імовірність, що буде взято чорну кулю, була б рівна $6/7$ - дробові близькому одиниці, то в даному разі ми навряд чи помилимося, коли будемо вважати ймовірність, що дитина візьме чорну кулю, за близьку нулю.

§ 2. Задачі на безпосереднє обчислення ймовірностей.

Визначення поняття ймовірности приводить нас безпосередньо к висновку, що для відшукування ймовірности якоїнебудь події мусимо виконати слідуючі операції : І). обчислити кількість усіх можливих випадків, 2). пересвідчитися, що всі вони однаковоможливі, єдиноможливі та взаїмновиключальні, 3). обчислити кількість випадків сприятливих для даної події і 4). перевести операцію ділення.

Це є так зване безпосереднє обчислення ймовірностей. Розвяжемо кілька відповідних задач.

ЗАДАЧА І. Яка ймовірність : І) при двократному киданню монети викинути орла два рази, бодай хоч один раз, ні разу, 2) при трикратному киданню монети викинути орла три рази, бодай хоч два рази, бодай хоч один раз, ні разу.

І). Означивши появлення орла літерою О, а появлення решки - літерою Р, можно всі можливі при двократному киданню монети випадки зясувати такою схемою :

$$OO,\ OP,\ PO,\ PP$$

Число їх - $4 = 2^2$. Усі вони єдиноможливі, взаїмновиключальні і однаковоможливі. Появленню орла два рази сприяє лише один перший випадок (OO), появленню орла бодай хоч один раз - дальші два випадки (OP і PO), останній же появленню орла зовсім не сприяє. Означивши $p_{n,m}$ імовірність появлення орла

m разів при n - кратному киданню монети, будемо мати :

$$p_{2,2}=\frac{1}{4},\ p_{2,1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ p_{2,0}=\frac{1}{4}$$

Задача ця цікава тим, що Даламбер *) помилково зєднав перші два випадки ОО і ОР в один О, який він уважав за однаковоможливий із рештою. Схема Даламбера мала б виглядати так :

О, РО, РР

В дійсности перший випадок Даламбера розбивається на два випадки, однаковоможливі з випадками РО і РР.

2). При трикратному киданню монети всі можливі випадки, очевидячки, будуть зясовані такою схемою :

ООО, ООР, ОРО, РОО, ОРР, РОР, РРО, РРР

Число їх - $8 = 2^3$. Появленню орла три рази сприяє лише один перший випадок, дальші три випадки сприяють появленню орла бодай хоч два рази, дальші три - появленню орла бодай хоч один раз і останній випадок появленню орла зовсім не сприяє. Відповідно до цього відшукувані ймовірности напишемо так :

$$p_{3,3}=\frac{1}{8},\ p_{3,2}=\frac{3}{8},\ p_{3,1}=\frac{3}{8},\ p_{3,0}=\frac{1}{8}$$

Легко бачити, що ймовірности : $p_{2,0}, p_{2,1}, p_{2,2}$ рівні відповідно першому, другому і третьому членам розкладу ступня

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2$$

за біномом Ньютона. Дійсно :

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}$$

Таксамо : $p_{3,0}, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}$ рівні відповідним членам розкладу

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3 :$$

---

*) Артикул " *Croix ou pile* " в *Enciclopedie méthodique*. 1754.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3 = 1\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{8}$$

Узагальнюючи, можемо висловити таке твердження : Ймовірність появлення орла m разів при n - кратному виданню монети є рівна $(m+1)$-му членові в розкладі ступня

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n$$

за біномом Ньютона :

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n = C_n^0\frac{1}{2^n} + C_n^1\frac{1}{2^n} + C_n^2\frac{1}{2^n} + \ldots + C_n^m\frac{1}{2^n} + \ldots + C_n^{n-1}\frac{1}{2^n} + C_n^n\frac{1}{2^n},$$

де C_n^m є число комбінацій з n елементів по m і $C_n^0 = 1$.Число усіх можливих випадків є 2^n .

ЗАДАЧА 2. Яка ймовірність двома кістками стінки яких понумеровані числами від I до 6, викинути суму нумерів рівну наперед визначеному числу?

Кожна з 6 стінок одноі кістки може випасти в комбінації з кожною із 6 стінок другої кістки. Тому, очевидячки, всіх можливих випадків буде $6 \times 6 = 36$, або 6^2. Їх можна розподілити за допомогою нижче наведеної таблиці на групи випадків сприятливих для появлення ріжних окремих сум від 2 до I2

6,
5,I+6,5
4,I+52+52+6,4
3,I+42+43+43+53+6,3
2,I+32+33+34+34+44+54+6,2
I,I+22+23+24+25+25+35+45+55+6,I
I+I2+I3+I4+I5+I6+I6+26+36+46+56+6
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, I0,II,I2.

Таблиця ця складається з II вертикальних кольонок відповідно до числа всіх можливих сум, які можна викинути двома кістками ; ці суми означені числами, що стоять на споді кольонок, числа ж поставлені вгорі кольонок показують число випадків сприятливих для появлення даної суми. Означивши p_i ймовірність появлення суми i ,будемо мати :

$$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36},\ p_3 = p_{11} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},\ p_4 = p_{10} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},$$

$$p_5 = p_9 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},\ p_6 = p_8 = \frac{5}{36},\ p_7 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Очевидячки, що при многократному киданню двох кісток частіше за всі буде відкриватися сума 7.

Ця задача відома тим, що Лейбніц [1]) уважав $p_{11} = p_{12}$, рахуючи можливі випадки 5+6 і 6+5 за тотожні.

Якій Бернуллі [2]) показав, що ймовірности, що двома кістками будуть викинуті різні суми від 2 до 12, можна представити коефіцієнтами відповідних членів розкладу ступня

$$\left(\frac{x}{6}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{6}\right)^2 = \frac{x^2}{6^2}+\frac{2x^3}{6^2}+\frac{3x^4}{6^2}+\frac{4x^5}{6^2}+$$
$$+\frac{5x^6}{6^2}+\frac{6x^7}{6^2}+\frac{5x^8}{6^2}+\frac{4x^9}{6^2}+\frac{3x^{10}}{6^2}+\frac{2x^{11}}{6^2}+\frac{x^{12}}{6^2},$$

так, наприклад, що викинеться сума 6, є коефіцієнт при x^6, імовірність, що викинеться сума 8 - коефіцієнт при x^8 і т.д.

Це правило дає можливість досить легко розвязати цю задачу для трьох і більше кісток. У випадку трьох кісток будемо мати :

$$\left(\frac{x}{6}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{6}\right)^3 = \frac{x^3}{6^3}+\frac{3x^4}{6^3}+\frac{6x^5}{6^3}+$$
$$+\frac{10x^6}{6^3}+\frac{15x^7}{6^3}+\frac{21x^8}{6^3}+\frac{25x^9}{6^3}+\frac{27x^{10}}{6^3}+\frac{27x^{11}}{6^3}+$$
$$+\frac{25x^{12}}{6^3}+\frac{21x^{13}}{6^3}+\frac{15x^{14}}{6^3}+\frac{10x^{15}}{6^3}+\frac{6x^{16}}{6^3}+\frac{3x^{17}}{6^3}+\frac{x^{18}}{6^3},$$

звідки, наприклад, імовірности p'_7 і p'_{15}, що трьома кістками будуть викинуті відповідно суми 7 і 15 будуть:

$$p'_7 = \frac{15}{256}, \quad p'_{15} = \frac{10}{256} = \frac{5}{128}$$

У випадку n кісток коефіцієнт при x^m в розкладі

$$\left(\frac{x}{6}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{6}\right)^n$$

буде показувати ймовірність, що n кістками буде викинута сума m ; число всіх можливих випадків у цьому разі буде, очевидячки, 6 .

Задача трьох кісток це одна з перших, відомих нам, задач числення ймовірностей ; правильне її розвязання було відоме вже Галілеєві перед 1642

----

[1]) Dissertatio de arte combinatoria. 1666

[2]) Ars conjectandi. 1713.

ЗАДАЧА 3. Дві особи А і В, однаково вправні, кидають кульки і намагаються влучити до певної мети. А має дві кульки, а В одну. Виграє той, чия кулька впаде ближче мети. Яка ймовірність, що виграє В ?

Означимо A_1 і A_2 кульки А і B_1 - кульку В. Відшукувану ймовірність означимо p_B. Коли кульки вже кинуто, вони утворюють певне розположення кульок відносно мети, яку означимо О. Віддалення кульок A_1, A_2 і B_1 від мети О означимо відповідно x, y і z, так що

$$OA_1 = x,\ OA_2 = y,\ OB_1 = z.$$

Числа x, y і z, взагалі кажучи, ріжні і якесь одно з них буде найбільше, якесь друге - найменче і третє - середнє. Тому кожному можливому розположенню кульок відносно мети О повинна відповідати певна числова нерівність. Ясно, що всіляких можливих нерівностей може бути лише 6, а саме :

$$\left.\begin{array}{ll} x<y<z & y<x<z \\ x<z<y & y<z<x \\ z<x<y & z<y<x \end{array}\right\} \qquad (I)$$

Очевидячки, що і навпаки кожній можливій нерівности відповідає якесь певне розположення кульок A_1, A_2 і B_1 відносно мети О, при якому довжини $OA_1 = x$, $OA_2 = y$ і $OB_1 = z$ задовольняють даній нерівности. Так, наприклад, нерівности $x<y<z$ відповідає розположення кульок, зазначене на рис.I.

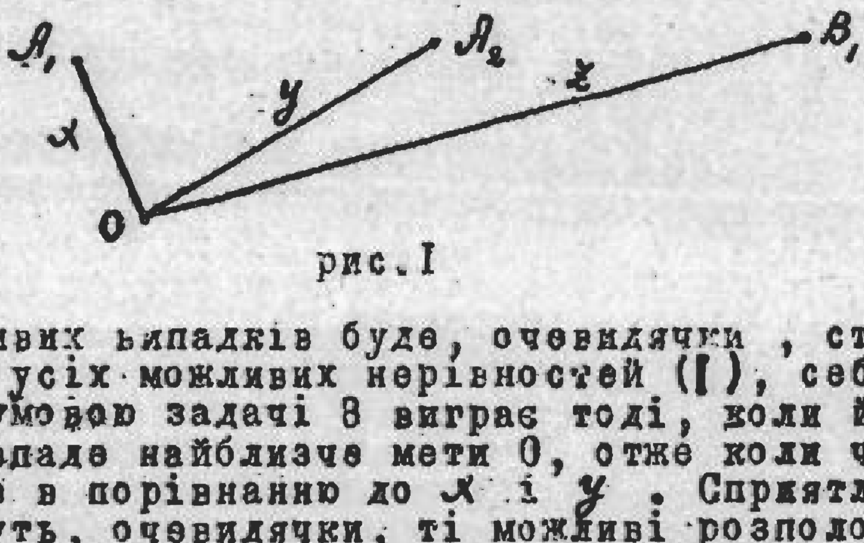

рис.I

Усіх можливих випадків буде, очевидячки, стільки, скільки є усіх можливих нерівностей (I), себто 6. Згідно з умовою задачі В виграє тоді, коли його кулька B_1 впаде найближче мети О, отже коли число z є найменче в порівнанню до x і y. Сприятливі для цього будуть, очевидячки, ті можливі розположення кульок, яким відповідають дві останні з нерівностей

(1). Звідси ймовірність $p_в$ буде рівна :

$$p_в = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} .$$

ЗАДАЧА 4. В урні находиться a білих і $в$ чорних куль. Виймають одразу $\alpha+\beta$ куль . Яка ймовірність, що : 1) в числі вийнятих куль буде α білих і β чорних ? і 2) всі вийняті кулі будуть білі?

1). З урни, яка має $a+в$ куль, можна вийняти $\alpha+\beta$ якихнебудь куль на стільки ріжних способів, скільки можна утворити комбінацій із $a+в$ елементів по $\alpha+\beta$. Число усіх можливих випадків є, очевидячки, рівне числу таких комбінацій. Це число, як відомо, визначається так :

$$C_{a+в}^{\alpha+\beta} = \frac{(a+в)(a+в-1)\ldots\ldots(a+в-\alpha-\beta+1)}{1.2.\ldots.\alpha+\beta}$$

Випадкам сприятливим для події, ймовірність якої шукаємо, відповідають лише такі комбінації по $\alpha+\beta$ куль, які мають α білих і β чорних куль. Окремо взяті α білих куль творять одну з комбінацій, які можна утворити з a білих куль урни по α . Число таких комбінацій є C_a^α. Таксамо β чорних куль, узяті окремо, творять певну комбінацію з $в$ куль урни по β . Число їх є $C_в^\beta$.

Вийняти з урни разом α білих і β чорних куль можна лише в той спосіб, що якась одна комбінація з a білих куль по α виймається одночасно з якоюсь одною комбінацією із $в$ чорних куль по β .Але ж кожну комбінацію з α білих куль, число яких є C_a^α, можна вийняти разом із кожною комбінацією з β чорних, яких число є $C_в^\beta$, і навпаки.

Тому вийняти разом α білих і β чорних куль можна на стільки ріжних способів, скільки одиниць має здобуток

$$C_a^\alpha \cdot C_в^\beta$$

Таке, очевидячки, число сприятливих випадків. Таким чином відшукувана ймовірність p буде мати такий вигляд :

$$p = \frac{C_a^\alpha \cdot C_в^\beta}{C_{a+в}^{\alpha+\beta}} \qquad (2)$$

Числовий приклад : $a = 5$, $b = 7$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

$$p = \frac{C_5^2 \cdot C_7^4}{C_{12}^6} = \frac{10.35}{924} = \frac{25}{66} = 0,3(78)$$

2). Число всіх можливих випадків те саме

$$C_{a+b}^{\alpha+\beta}$$

Сприятливим випадкам відповідають такі комбінації по $\alpha+\beta$ куль, які складаються лише з білих куль. Число їх, очевидячки, рівне $C_a^{\alpha+\beta}$. Так що відшукувана ймовірність p' буде рівна :

$$p' = \frac{C_a^{\alpha+\beta}}{C_{a+b}^{\alpha+\beta}}$$

ЗАДАЧА 5. Яка ймовірність, що при n - кратному киданню монети появлення орла й решки будуть чергуватися ? [1]

Усіх можливих випадків буде 2^n (див задачу I). Чергування орла й решки може відбуватися лише на два способи в залежности від того, що саме відкриється за першим киданням монети - орел чи решка. Відповідно до цього, очевидячки, існує лише два сприятливі для чергування орла і решки можливих випадки, які схематично, користуючись означеннями задачі I, можна представити так :

ОРОРОРОР.....

РОРОРОРО.....

Відшукувана ймовірність p буде :

$$p = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

---

[1]) Czuber E. Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 17

ЗАДАЧА 6. В урні находиться n однакових куль. Частину з них вийнято. Яка ймовірність, що вийнято паристе число куль ?[1]

Число всіх можливих випадків, як також число сприятливих випадків, зясується таким чином: з урни, яка має n куль, можна взагалі вийняти довільне, не перевищуюче n, число куль, отже можна вийняти або одну кулю, або дві, або три,......, або $n-1$, або n; кожне дане число куль може бути вийняте ріжними способами, так: одну кулю можна вийняти на стільки ріжних способів, скільки є всіх куль ун урні, себто n способами, дві кулі можна вийняти на стільки способів, скільки комбінацій можна утворити з n елементів по 2, число таких комбінацій є C_n^2, далі, очевидячки, число способів, якими можна вийняти з урни три кулі, рівне C_n^3 і т.д., нарешті, вийняти з урни одразу n куль можна лише одним способом.

Число всіх можливих випадків, очевидячки, рівне числу всіх способів, якими можна вийняти з урни одну, дві, три і т.д., нарешті, $n-1$ і n куль. Число способів, якими можна вийняти з урни лише паристе число куль, себто дві, чотирі, шість і т. д. дасть число сприятливих випадків. Означивши число всіх можливих випадків літерою N, а число сприятливих випадків - літерою M та маючи на увазі що $C_n^1 = n$ і $C_n^n = 1$, можна написати такі дві рівности

$$N = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots\ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

$$M = C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots\ldots\ldots$$

Але, як відомо:

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots + C_n^{n-1} + C_n^n,$$

$$(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots\ldots\ldots + (1)^n C_n^n,$$

де $C_n^0 = 1$.

Ці дві останні рівности дають по перше

$$2^n = 1 + N,$$

а по друге, додаючи їх до себе,

$$2^n = 2C_n^0 + 2C_n^2 + 2C_n^4 + \ldots\ldots,$$

---

[1]) Czuber. E. Wahrscheinlichkeitsrechnung Nr. 20

або

$$2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$2^{n-1} = C_n^0 + \mathcal{M},$$

звідки :

$$\mathcal{N} = 2^n - I$$

$$\mathcal{M} = 2^{n-1} - I$$

Відшукувана ймовірність p буде рівна :

$$p = \frac{2^{n-1} - I}{2^n - I}$$

Означивши q ймовірність протилежної події, себто ймовірність, що з урни вийметься непаристе число куль, одержимо :

$$q = 1 - p = \frac{2^{n-1}}{2^n - I}$$

Порівнюючи знайдені вирази для p і q , маємо :

$$p < q,$$

себто ймовірність, що з урни вийметься непаристе число куль, більше за ймовірність вийняти паристе число куль. Се тому, що ,так званий, натуральний ряд чисел I,2,3,4,5,........починається одиницею - числом непаристим.

Числовий приклад : $n = 5$

$$p = \frac{2^4 - I}{2^5 - I} = \frac{I5}{3I}, \quad q = \frac{2^4}{2^5 - I} = \frac{I6}{3I}$$

ЗАДАЧА 7.(*Problèmes des trois coffres*).
Три однакові скрині A, B, C мають кожна по дві шухляди α і β . Скриня A має в кожній шухляді по золотій монеті, скриня B - по срібній монеті і скриня C має в одній шухляді золоту, а в другій -срібну монету. Яка ймовірність : I)відкривши наосліп одну шухляду, знайти в ній золоту монету, 2) узяв-

ши наосліп якусь одну скриню, знайти в її шухлядах монети з ріжного металю і 3) відкривши наосліп одну шухляду і знайшовши в ній золоту монету, знайти в другий шухляді тієї самої скрині срібну монету ?

Припустім, що скриня C має золоту монету в шухляді α, а срібну - в шухляді β. Тоді розподіл монет по шухлядах можна представити такою табличкою :

	A	B	C
α	золот.	срібн	золот.
β	золот.	срібн	срібн.

Три шухляди, які символічно означимо

$$A\alpha\ ,\ A\beta\ ,\ C\alpha$$

мають золоті монети, а решта, означені

$$B\alpha\ ,\ B\beta\ ,\ C\beta$$

- срібні.

I). Означім $p_з$ імовірність знайти золоту монету, відкривши наосліп одну шухляду. Число всіх можливих випадків, очевидячки, рівне числу всіх шухляд, себто 6. Сприятливих же випадків стільки, скільки шухляд з золотими монетами, себто 3. Звідси

$$p_з = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2). Знайти в обраній наосліп скрині монети з ріжного металю - це все одно, що з трьох скринь A, B, C взяти наосліп скриню C. Усіх можливих випадків по числу скринь є три, з них лише один сприятливий. Відшукувана ймовірність p_c напишеться безпосередньо

$$p_c = \frac{1}{3}$$

3). Відшукувана ймовірність, очевидячки, ідентична з обчисленою тільки що ймовірністю $p_{z}=\frac{1}{3}$. Однак Ж. Бертран *), виходячи з того, що відкрита шухляда має золоту монету та що монета другої шухляди або золота, або срібна, одержав для цієї ймовірности вартість $\frac{1}{2}$. Помилка Бертрана є в тім, що він уважав за однаковоможливі випадки, які в дійсности, як то показує глибша аналіза А. Пуанкаре, умові однаковоможливости не задовольняють. Справді : відкрита наослі шухляда, в якій знайшлася золота монета, може бути лише

або $A\alpha$, або $A\beta$, або $C\alpha$

відповідно до цього друга шухляда тієї ж скрині буде :

або $A\beta$, або $A\alpha$, або $C\beta$;

лише одна з них, а саме $C\beta$, має срібну монету. Тому з трьох можливих випадків, які в даному разі, очевидячки, будуть усі однаковоможливі, лише один буде сприятливий. Отже, ймовірність $p_{сp.}$ - знайти в другій шухляді срібну монету, коли вже відомо, що в першій шухляді тієї самої скрині є золота, буде рівна

$$p_{сp.}=\frac{1}{3}$$

Коли б рівночасно було відомо, що відкрита наосліп шухляда не тільки має золоту монету, але що й означена α, то ймовірність знайти в другій шухляді тієї самої скрині срібну монету буде вже инча, бо з трьох можливих випадків відпаде один - той, що відповідає шухляді $A\alpha$ і ймовірність буде рівна :

$$p_{сp.}=\frac{1}{2}.$$

Коли ж відомо, що відкрита наосліп шухляда має золоту монету й означена β, то можна с певністю сказати, що це є шухляда $A\beta$, бо лише одна скриня A має в шухляді β золоту монету. Але ж, як відомо, обидві шухляди скрині A мають золоті монети, тому ймовірність знайти в другій шухляді скрині A срібну монету мусить рівнятися нулю.

---

*) Див. Марков А. Исчисление вероятностей. М. 1924, ст. I2

ЗАДАЧА 8. (Льотерея). В урні находиться n куль, позначених нумерами

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, n$$

Виймають одразу m куль ($m<n$). Яка ймовірність, що серед них i куль буде з наперед визначеними нумерами?

Припустім, що всі n куль позначено новими нумерами, при чому вийняті m куль позначені нумерами

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, m,$$

а решта $n-m$ -, які залишилися в урні,- нумерами

$$m+1, m+2, \ldots, n$$

Таким чином, кожна куля матиме подвійний нумер, старий і новий. Сукупність i куль, старі нумери яких є визначені наперед i нумерів, буде тепер іще мати i нових нумерів, які творять, очевидячки, певну комбінацію з усіх n по i. Число таких комбінацій, як відомо, є C_n^i. Відповідно до цього будемо мати C_n^i можливих випадків, які всі є однаково можливі, єдиноможливі і взаїмновиключальні. Кожній певній комбінації з n нумерів по i відповідає один можливий випадок.

Вийняти з урни в числі m куль i куль, старі нумери яких є визначені наперед i нумерів, це, инчими словами, вийняти з урни в числі m куль i куль, нові нумери яких творять сукупність складену з чисел

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, m \tag{3}$$

Тому появленню всіх указаних наперед i нумерів сприяють лише ті випадки, що відповідають таким комбінаціям із n нумерів по i, які складаються з чисел (3). Число ж усіх комбінацій по i нумерів які можна скласти з m нумерів, рівне C_m^i, звідки число сприятливих випадків є C_m^i.

Відшукувана имовірність p_i буде рівна :

$$p_i = \frac{C_m^i}{C_n^i} = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-i+1)}{n(n-1)\ldots\ldots(n-i+1)} \tag{4}$$

Такий самий результат можна одержати иншим шляхом, розглядаючи дану задачу, як окромий випадок задачі 4 при $\alpha = a$. Дійсно, можна вважати i куль, нумери яких вказані заздалегідь, за білі -, а решту куль за чорні. Тоді формула (2) задачі 4 після заміни

$$a, b, \alpha, \beta$$

відповідно числами

$$i, n-i, m, m-i$$

дасть після скорочення знайдений уже результат (4).

Приклад - Генуйська льотерея. Генуйська льотерея, що існувала в Генуї вже з початком XVII століття мала 90 нумерів ; при кожній партії виймалися одразу 5 нумерів. Перед початком партії кожний грач за своїм бажанням платив скарбникові певну суму грошей і рівночасно записував : або один (*extratto*), або два (*ambo*), або три (*terno*), або чотирі (*quaterno*), або пять (*quinterno*) нумерів. Коли в числі вийнятих пятьох нумерів були всі нумери записані грачом, то, згідно з правилами льотереї, він діставав заплачену ним суму, збільшену:

15	разів,	як що	записав	I	нумер,	
270	"	"	"	2	"	;
5500	"	"	"	3	"	;
75000	"	"	"	4	"	;
1000000	"	"	"	5	"	.

яка ймовірність виграти для того, що записав i нумерів (i = I,2,3,4,5) ? При $n = 90$, $m = 5$ формула (4) перепишеться так :

$$p_i = \frac{C_5^i}{C_{90}^i} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (5 - i + 1)}{90 \cdot 89 \ldots (90 - i + 1)}$$

Даючи i послідовно вартости I,2,3,4,5 , одержимо для відшукуваних імовірностей ось які вартости :

$$p_1 = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

$$p_2 = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} = \frac{1}{18} \cdot \frac{4}{89} = \frac{2}{801}$$

§ 3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ.

Методи безпосереднього обчислювання ймовірностей далеко не завше можна використати : дуже часто при встановлюванню й підрахованню всіх можливих випадків зустрічаються непоборні труднощі . Академік А.Марков каже навіть, що числення ймовірностей не існувало б як окрема дисципліна , коли б єдиним способом відшукувати ймовірности була метода безпосереднього обчислювання.

Існують одначе, так звані,основні теореми числення ймовірностей, які дають можливість переводити відшукування ймовірностей иншими шляхами, уникаючи методи безпосереднього обчислювання. Це - теорема додавання ймовірностей і теорема множення ймовірностей. Доказ цих теорем ізвязаний із ідеєю однаковоможливих випадків - основною ідеєю числення ймовірностей.

I. ТЕОРЕМА ДОДАВАННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Імовірність, що з ряду взаїмновиключальних подій відбудеться якась одна подія,без указівки яка саме,рівна сумі ймовірностей цих подій.

Означім

$$A_1 , A_2 , \ldots\ldots\ldots , A_k \qquad (I)$$

k взаїмновиключальних подій і припустім, що цим подіям відповідає n однаковоможливих, єдиноможливих та взаїмновиключальних випадків. Нехай, далі,з усіх цих випадків, m_1 випадків сприяє події A_1 , m_2 випадків сприяє події A_2 і т.д., нарешті, m_k випадків сприяє події A_k. Тоді ймовірности p_1 , p_2 , ... p_k подій (I) будуть рівнятися :

$$p_1 = \frac{m_1}{n},\ p_2 = \frac{m_2}{n},\ \ldots\ldots p_k = \frac{m_k}{n}$$

Згідно з умовою події (I) – всі взаємновиключальні – жадні дві з них не можуть відбутися разом –, через це випадки, сприятливі для якоїнебудь одної з них, жадній иншій події з ряду (I) не сприяють. Тому, зеднавши разом m_1 випадків сприятливих для події A_1, m_2 випадків сприятливих для події A_2 і т.д., нарешті m_k випадків сприятливих для події A_k, одержимо

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k$$

можливих випадків, поміж якими не буде однакових. Утворена таким чином сукупність $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ ріжних випадків сприяє, очевидячки, появленню

або події A_1, або події A_2, ..., або події A_k,

решта ж

$$n - (m_1 + m_2 + \ldots + m_k)$$

випадків жадній події з ряду (I) не сприяє. Звідси имовірність p, що з ряду подій

$$A_1,\ A_2,\ \ldots\ldots\ldots,\ A_k$$

відбудеться якась одна подія, без указівки, яка саме, є рівна

$$p = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n}$$

Але ж

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \ldots + \frac{m_k}{n},$$

а тому

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_k \qquad (2)$$

і теорема доведена.

ПРИКЛАД. В урні знаходиться a білих, b чорних, c червоних і d зелених куль. Виймають наосліп одну кулю. Яка ймовірність, що вийнята куля буде або біла, або чорна, або червона ?

Імовірности p_1, p_2, p_3 появлення зокрема білої, чорної та червоної кулі відповідно рівні :

$$p_1 = \frac{a}{a+b+c+d}\ ;\ p_2 = \frac{b}{a+b+c+d}\ ,\ p_3 = \frac{c}{a+b+c+d}$$

Тоді на основі формули (2) доведеної теореми імовірність p, що з урни буде вийнята або біла , або чорна, або червона куля, буде рівнятися

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$$

Справедливість цієї рівности видно безпосередньо , бо число білих, чорних та червоних куль в урні рівне $a+b+c$

ВИСНОВОК. Сума ймовірностей кількох єдиноможливих та взаїмновиключальних подій рівна одиниці

Означім $A_1, A_2, \ldots, A_k$ к єдиноможливих і взаїмновиключальних подій. Імовірність, що відбудеться якась одна з них, означимо p. Появлення одної з єдиноможливих подій є, як відомо, подія певна, звідки ймовірність p мусить рівнятися одиниці

$$p = 1$$

З другого ж боку події $A_1, A_2, \ldots, A_k$ взаїмновиключальні, тому імовірність p за теоремою додавання ймовірностей буде рівна :

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k\ ,$$

де $p_1, p_2, \ldots p_k$ є відповідно имовірности появлення зокрема події $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Порівнюючи обидві знайдені вартости p, маємо рівність

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1\ ;$$

яка доводить справедливість нашого висновку.

Коли єдиноможливих і взаїмновиключальних подій лише дві, то вони звуться подіями протилежними. Означивши їх імовірности p і q, будемо мати

$$p + q = 1$$

- рівність, виведену вже нами на основі инших міркувань в § I. Знаючи ймовірність одної з протилежних подій, завше можна на основі останньої рівности знайти відніманням від одиниці ймовірність другої.

ДРУГЕ ФОРМУЛОВАННЯ ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. Імовірність, що відбудеться подія , яку можна розбити на кілька взаїмновиключальних форм, рівняється сумі ймовірностей цих форм.

Припустім, що подія А може відбутися лише тоді,коли відбувається якась одна з ряду взаїмновиключальних подій :

$$A_1\ ,A_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots,A_k\ , \qquad (3)$$

инчими словами - припустім, що появлення події А може відбутися лише в формі появлення

$$\text{або } A_1\ ,\text{або } A_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots,\text{або } A_k$$

Тоді кожну подію з ряду (3) можна розглядати,якокрему форму події А , що ж до події А , то будемо казати, що її можна розбити на кілька окремих форм $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Імовірність, що відбудеться подія А , є, очевидячки, ідентична з імовірністю, що відбудеться якась одна подія з ряду (3). Ця ж остання ймовірність, означена нами p , за теоремою додавання ймовірностей, рівна

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$$

де $p_1, p_2, \ldots p_k$ є відповідно ймовірности появлення зокрема події $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Трактуючи в цій рівности величину p ,як імовірність події А ,прийдемо до висловленого нами инчого формулування теореми додавання ймовірностей.

ПРИКЛАД. В урні знаходиться : a білих куль, означених №1, b білих куль, означених №2, c чорних куль, означених №1 і d чорних куль, означених №2. Виймають наосліп одну кулю. Яка ймовірність вийняти :1) білу кулю, 2) кулю з №1 ?

1). Появлення білої кулі з урни може відбутися у формі появлення або білої кулі з №1, або білої кулі з №2. Тому подію - появлення білої кулі взагалі - можна розбити на дві окремі взаїмно-виключальні форми : появлення білої кулі з №1 і появлення білої кулі з №2. Означивши ймовірности цих окремих форм відповідно p_1 і p_2, а p - ймовірність, що з урни буде вийнято білу кулю, маємо безпосередньо :

$$p_1 = \frac{a}{a+b+c+d}, \quad p_2 = \frac{b}{a+b+c+d},$$

а на основі теореми додавання ймовірностей (друге формулювання) -

$$p = p_1 + p_2 = \frac{a+b}{a+b+c+d}.$$

Справедливість останньої формули очевидна, бо число всіх білих куль у урні є $a+b$.

б). Таксамо, означивши p' імовірність, що з урни буде вийнято кулю з №1, прийдемо шляхом аналогічних розумовань до рівности

$$p' = \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

2. ТЕОРЕМА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ.

Імовірність, що дві події відбудуться разом, рівняється здобуткові імовірности одної з них на ймовірність другої, обчислену у припущенню, що перша подія відбулася.

Припустім, що з n однаковоможливих, єдиноможливих та взаїмновиключальних випадків m_1 випадків сприяє події А, а решта $n-m_1$ - їй не сприяє. Нехай далі, з цих m_1 випадків, сприятливих для події А, m випадків сприяє другій події В, а решта m_1-m - їй не сприяє. Ясно, що кожний можливий випадок, сприятливий для події В, є одночасно сприятливий і для події А. Тому число випадків одночасно сприятливих і для події В, і для події А рівняється m, а ймовірність p, що події А і В відбудуться разом, очевидячки, рівна

$$p = \frac{m}{n}$$

Імовірність p_1 події А напишеться безпосередньо :

$$p_1 = \frac{m_1}{n}$$

Припустім далі, що подія А наступила. Щоб обчислити ймовірність події В ,коли відоме існування події А, треба встановити число всіх можливих випадків у припущенні, що подія А відбулася. Ясно, що коли подія А існує, то можливі будуть лише випадкі сприятливі для події А. Число їх рівне m_1 і всі вони по старому залишаються однаковоможливими. Решта ж $n-m_1$ випадків,несприятливих для події А, при цій умові, очевидячки,відпадають, як неможливі. Число випадків сприятливих для події В, як відомо, є m. Тому ймовірність p_2 події В при умові, що подія А наступила, рівняється :

$$p_2 = \frac{m}{m_1}$$

Дріб $\frac{m}{n}$ можна представити в формі такого здобутку :

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m}{m_1}$$

Остання ж рівність рівнозначна з рівністю

$$p = p_1 \cdot p_2 \qquad (4)$$

і теорема доведена.

ПРИКЛАД І. В урні находиться a білих куль з №1, b білих куль з №2, c чорних куль з №1 і d чорних куль з №2. Тягнуть навсліп одну кулю. Яка ймовірність, що витягнута куля буде чорна з №2 ?

Появлення чорної кулі з №2 можна розглядати,як одночасне появлення двох подій: появлення чорної кулі і появлення кулі з №2. Тому ймовірність, що з урни буде витягнуто чорну кулю з №2, буде ніщо инше, як ймовірність, що ці дві події відбудуться разом. Нехай появлення чорної кулі це буде подія А, а появлення кулі з №2 - подія В. Ймовірність p_1 події А буде :

$$p_1 = \frac{c+d}{a+b+c+d} .$$

Ймовірність p_2 події В в припущенні, що подія А відбулася, себто ймовірність, що витягнеться куля з №2, коли відомо, що вона є чорна, буде :

$$p_2 = \frac{d}{c+d} .$$

Тоді ймовірність p, що з урни буде витягнуто чорну кулю з №2, буде згідно доведеній теоремі

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{c+d}{a+b+c+d} \cdot \frac{d}{c+d} = \frac{d}{a+b+c+d} \, .$$

Ясно, що той самий результат одержимо, коли за подію А будемо вважати появлення кулі з №2, а за подію В – появлення чорної кулі. Тоді, очевидячки, буде :

$$p_1 = \frac{b+d}{a+b+c+d}, \; p_2 = \frac{d}{b+d}$$

де p_2 є ймовірність, що буде витягнуто чорну кулю, коли відомо, що вона є з №2.

ПРИКЛАД 2. Є дві категорії посудин. Перша складається з a посудин, друга з b посудин. Кожна посудина першої категорії має по m білих і n чорних куль, в посудинах же другої категорії є лише червоні кулі. Беруть наосліп одну посудину і тягнуть з неї теж наосліп одну кулю. Яка ймовірність, що витягнута куля буде біла ?

Появлення білої кулі з узятої наосліп посудини можна розглядати, як одночасне появлення таких двох подій : події А – обрання посудини з першої категорії і події В – появлення з цеї посудини білої кулі. Імовірність p_1 події А, очевидячки, рівна :

$$p_1 = \frac{a}{a+b}$$

імовірність же події В, коли відомо, що подія А вже відбулася, є

$$p_2 = \frac{m}{m+n}$$

Відшукувана ймовірність p, згідно теоремі множення ймовірностей, напишеться так :

$$p = p_1 p_2 = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{m}{m+n} = \frac{am}{(a+b)(m+n)} \, .$$

Теорема множення ймовірностей визначається часто такою рівністю :

$$p(AB) = p(A).p_A(B) , \qquad (5)$$

або такою

$$p(AB) = p(B).p_B(A) ,$$

де $p(AB)$, є ймовірність, що події A і B відбудуться разом, $p(A)$ і $p(B)$ є відповідно имовірности подій A і B, нарешті, $p_A(B)$ є имовірність події B, обчислена в припущенні, що подія A відбулася, і $p_B(A)$ - ймовірність події A, обчислена в припущенні, що подія B відбулася.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ НА ВИПАДОК КІЛЬКОХ ПОДІЙ. Імовірність,що кілька подій, росположених у певному довільно обраному нами порядкові, відбудуться разом, рівняється здобуткові їх імовірностей, обчислених для кожної окремої події в припущенню, що попередні події відбулися.

Відповідно до цього можемо написати також рівність :

$$p(ABC...\mathcal{L}M\mathcal{N}) = p(A).p_A(B).p_{AB}(C)....p_{ABC...\mathcal{L}}(M).p_{ABC...\mathcal{L}M}(\mathcal{N}), \quad (6)$$

де $p(ABC...\mathcal{L}M\mathcal{N})$ означає ймовірність, що події A, B, C,...$\mathcal{L}$, M, $\mathcal{N}$,росположені у певному порядкові,відбудуться разом, $p(A)$ і $p_A(B)$ є відомі нам символи, $p_{AB}(C)$ означає ймовірність події C, обчислену в припущенні, що попередні події A і B відбулися, і т.д. нарешті $p_{ABC...\mathcal{L}}(M)$ і $p_{ABC...\mathcal{L}M}(\mathcal{N})$ означають відповідно ймовірности подій M і $\mathcal{N}$, обчислені в припущенні, що попередні події (A,B,C,...,$\mathcal{L}$ для M і A,B,C,...,$\mathcal{L}$,M для $\mathcal{N}$) відбулися.

Теорема доводиться шляхом послідовного примінювання формули (5). Будемо розглядати подію $ABC...\mathcal{L}M\mathcal{N}$, як появлення разом події $ABC...\mathcal{L}M$ і події $\mathcal{N}$, подію $ABC...\mathcal{L}M$, як появлення разом події $ABC...\mathcal{L}$ і події M і т.д., нарешті, подію ABC , як появлення разом події AB і події C. Прикладаючи до цих подій формулу (5), получимо ряд таких рівностей:

$$p(ABC...\mathcal{L}M\mathcal{N}) = p(ABC...\mathcal{L}M).p_{ABC...\mathcal{L}M}(\mathcal{N})$$

$$p(ABC\ldots LM) = p(ABC\ldots L).\,p_{ABC\ldots L}(M)$$

. . . .

$$p(ABC) = p(AB).\,p_{AB}(C)$$

$$p(AB) = p(A).\,p_{A}(B)$$

Перемноживши ці рівности, одержимо після скорочення однакових множників правої і лівої частини рівність

$$p(ABC\ldots LMN) = p(A).\,p_{A}(B).\,p_{AB}(C)\ \ldots\, p_{ABC\ldots L}(M).\,p_{ABC\ldots LM}(N)$$

ідентичну з рівністю (6), що і доводить нашу теорему.

Теорема множення ймовірностей має простіший вигляд, коли події, що про них йде мова, незалежні.

Кілька подій звуться незалежними, коли ймовірність кожної з них не залежить від існування чи неіснування решти; коли ж імовірність кожної події міняється в залежности від появлення чи непоявлення инших подій, то такі події звуться залежними. Для пояснення цих визначень розберемо такий приклад: з урни, яка має в собі a білих і b чорних куль, виймають наосліп двічі по одній кулі. Назвемо подією A появлення білої кулі за першим разом і подією B появлення білої теж кулі за другим разом. Розглянемо два способи виймання куль з урни :

1). вийнята за першим разом куля повертається до урни, так що умови появлення білої кулі за другим разом тіж самі, що й за першим; тому ймовірність події B, яку означимо $p(B)$, буде:

$$p(B) = \frac{a}{a+b}$$

незалежно від того, появилася біла куля за першим разом, чи ні. Таким чином в цьому випадкові подія B не залежить від події A.

2). вийнята за першим разом куля до урни не повертається. В цьому випадкові після того, як перша куля була вийнята, число куль в урні зміниться: коли була вийнята біла куля, себто коли подія A відбулася, в урні буде $a-1$ білих куль і b чорних – і ймовірність події B буде :

$$p(B) = \frac{a-1}{a+b-1}\quad ,$$

$$p(B) = \frac{a-1}{a+b-1}$$

коли ж вийнята куля була чорна, себто коли подія А не відбулася, то в урні буде a білих і b - І чорних куль і ймовірність події В буде :

$$p(B) = \frac{a}{a+b-1}$$

Таким чином в цьому випадкові ймовірність події В залежить від появлення чи непоявлення події А, а тому подія В залежить від події А.

Відповідно до цього, примінюючи теорему множення ймовірностей до подій незалежних, можна їй надати такий простіший вираз : імовірність, що відбудуться разом кілька незалежних подій рівняється здобуткові їх імовірностей.

Формула ж (6) у випадку незалежних подій перепишеться, очевидячки, так :

$$p(ABC\ldots LMN) = p(A).p(B).p(C)\ldots p(M).p(N).$$

§4. ЗАДАЧІ НА ПРИМІНЮВАННЯ ТЕОРЕМ ДОДАВАННЯ Й МНОЖЕННЯ ИМОВІРНОСТЕЙ.

Задача І. Яка ймовірність викинути двома кістками паристу суму?

Відшукувана имовірність, означимо її p, є ніщо инше, як імовірність викинути двома кістками якусь одну з ряду паристих сум: 2, 4, 6, 8, І0, І2 (див. задачу 2 §2-го). На основі теореми додавання имовірностей вона буде рівна сумі ймовірностей появлення кожної окремої суми:

$$p = p_2 + p_4 + p_6 + p_8 + p_{10} + p_{12}$$

Підставляючи в праву частину цієї рівности числові вартости окремих імовірностей $p_2, p_4, \ldots p_{12}$, знайдені вже в задачі 2 §2-го, одержимо :

$$p = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Задача 2. В одній урні находиться m білих і n чорних куль, в другий - m' білих і n' чорних куль. З кожної урни виймають наосліп по одній кулі. Яка ймовірність, що обидві вийняті кулі білі?

Відшукувана ймовірність є ймовірність, що відбудуться разом такі дві події: появлення білої кулі з першої урни і появлення білої кулі з другої урни. Події ці, очевидячки, незалежні. Отже на основі теореми множення ймовірностей відшукувана ймовірність, означимо її p, буде рівна здобуткові ймовірностей p_1 і p_2 появлення білої кулі з першої і другої урни:

$$p = p_1 \cdot p_2$$

Але

$$p_1 = \frac{m}{m+n}, \quad p_2 = \frac{m'}{m'+n'}$$

Тому

$$p = \frac{mm'}{(m+n)(m'+n')}$$

Задача 3. В урні находиться m білих і n чорних куль. Виймають наосліп одну кулю і відкладають її на бік, після чого виймають другу кулю. Яка ймовірність, що обидві вийняті кулі білі ?

Подію, що її ймовірність треба знайти, можна розглядати, як появлення разом таких двох подій: події А - появлення білої кулі з урни за першим разом і події В - появлення білої кулі за другим разом. Тому що вийнята за першим разом куля відкладається на бік, подія В, очевидячки, залежить від події А. На основі теореми множення ймовірностей відшукувана ймовірність p буде рівна здобуткові ймовірності $p(A)$ появлення білої кулі за першим разом на ймовірність $p_A(B)$ появлення білої кулі за другим разом, обчислену в припущенню, що за першим разом появилася біла куля :

$$p = p(A) \cdot p_A(B)$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$p(A) = \frac{m}{m+n}$$

коли ж припустимо, що перша вийнята з урни та відкладена на бік куля була біла , то мусимо числити, що після першого виймання кулі кількість куль в урні, і то білих, зменшиться на одиницю, а тому буде

$$p_A(B) = \frac{m-1}{m-1+n}$$

Підставляючи знайлені вартости $p(A)$ і $p_A(B)$ у праву частину нашої рівности, одержимо :

$$p = \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

Задача 4. В двох однакових урнах находиться : в першій - m білих і n чорних куль, а в другий - m' білих і n' чорних куль. Яка ймовірність, що з якоїсь одної урни буде витягнуто наосліп білу кулю ?

Згідно з умовою задачі біла куля може бути витягнута або з першої урни, або з другої. Назвемо подією першою витяг білої кулі з першої урни і подією другою витяг білої кулі з другої урни. Імовірности цих двох подій означимо відповідно p_1 і p_2. Відшукувана ймовірність p є, очевидячки, імовірність, що відбудеться якась одна з цих подій, а тому на основі теореми додавання ймовірностей будемо мати :

$$p = p_1 + p_2.$$

Подію першу можна розглядати , як появлення разом таких двох подій : обрання першої урни і витягу з неї білої кулі. Тому , на основі теореми множення ймовірностей, p_1 рівняється здобуткові ймовірности, що з двох урн буде обрано першу, рівній $\frac{1}{2}$, на ймовірність, що з першої урни буде витягнуто білу кулю, ця остання ймовірність рівняється $\frac{m}{m+n}$. Отже

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+n}$$

Цілком анальоґічно знайдемо, що

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m'}{m'+n'}$$

Підставляючи вартости p_1 і p_2 в праву частину вищезнайденої рівности, получимо :

$$p = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m}{m+n} + \frac{m'}{m'+n'}\right)$$

Задача 5. *) В урні знаходяться три однакових кулі помічені нумерами I,2,3. Виймають наосліп одну кулю і, записавши її нумер, повертають знову до урни, після чого виймають кулю вдруге. Яка ймовірність, що найвищий нумер цих двох куль буде 2 ?

Найвищий нумер двох вийнятих куль буде другий лише в одному з трьох взаємновиключальних випадків, коли нумери вийнятих куль будуть: або I, 2, або 2,2, або 2,I. А тому відшукувану ймовірність p можна представити у формі суми трьох відповідних імовірностей p_{12}, p_{22}, p_{21} цих окремих випадків :

$$p = p_{12} + p_{22} + p_{21}.$$

Кожну з імовірностей правої частини цієї рівности можна розглядати, як імовірність появлення разом двох подій. Наприклад, p_{12} є ймовірність, що відбудуться разом такі дві події : появлення за першим разом кулі з нумером I і появлення за другим разом кулі з нумером 2. Тому що вийнята за першим разом куля повертається до урни, то обидві ці події незалежні, а через це ймовірність, що з урни буде вийнято кулю з певним нумером чи то за першим, чи то за другим разом є завжди рівна $\frac{1}{3}$. Звідси на основі теореми множення ймовірностей маємо:

$$p_{12} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Цілком анальоґічно також одержимо

$$p_{22} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \quad і \quad p_{21} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Підставляючи ці вартости у праву частину нашої рівности, получимо

$$p = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

Той же самий результат можна в даному випадкові одержати також шляхом безпосереднього обчислення ймовірности p. Дійсно: усіх єдиноможливих, однаковоможливих та взаємновиключальних випадків буде.

---

*) E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung, N. 34. 1908.

очевидячки, 9, згідно з числом усіх комбінацій по два нумери. Ці комбінації слідуючі :

I,I; 2,I; 3,I; I,2; 2,2; 3,2; I,3; 2,3; 3,3.

Сприятливих випадків є лише три. Тому : $p=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

Задача 6. В двох однакових урнах находиться : в першій - m білих і n чорних куль, а в другий - m' білих і n' чорних -. Витягнувши з першої урни одну кулю, покладемо її, не дивлячись на неї, до другої урни. Яка ймовірність, що куля витягнута тепер з другої урни буде біла ?

Біла куля з другої урни може появитися : або з передумовою, що перекладена з першої урни до другої куля була теж біла, або з передумовою, що перекладена куля була чорна. Обидві передумови ці взаімновиключальні. Тому ймовірність p появлення білої кулі з другої урни можна представити у формі суми двох відповідних імовірностей. Як що означимо p_I і p_{II} імовірности появлення білої кулі з другої урни відповідно з першою і другою передумовою, то будемо, очевидячки, мати

$$p=p_I+p_{II}$$

Імовірність p_I є ніщо инше, як імовірність,що відбудуться разом такі дві події : появлення білої кулі з першої урни і появлення білої кулі з другої урни, а тому :

$$p_I=p_1 \cdot p_1',$$

де p_1 означає ймовірність появлення білої кулі з першої урни, а p_1' - ймовірність появлення білої кулі з другої урни, обчислену в припущенню, що куля перекладена з першої урни до другої була біла. Так само ймовірність p_{II} є ймовірність, що відбудуться разом слідуючи дві події: появлення чорної кулі з першої урни і появлення білої кулі з другої урни, тому :

$$p_{II}=p_2 \cdot p_2'$$

де p_2 означає ймовірність появлення чорної кулі з першої урни, а p_2' - ймовірність появлення білої кулі з другої урни, обчислену в припущенню,що куля перекладена з першої урни до другої була чорна.

Таким чином будемо мати :

$$p = p_1 p_1' + p_2 \cdot p_2'$$

Лишається тільки обчислити p_1, p_1', p_2, p_2' і підставити їх вартости в праву частину знайденої рівности. Безпосередньо маємо :

$$p_1 = \frac{m}{m+n}, \quad p_2 = \frac{n}{m+n}$$

Коли ж припустимо, що куля перекладена з першої урни до другої була біла, то знайдемо :

$$p_1' = \frac{m'+1}{m'+n'+1}$$

Так само припустивши, що перекладена куля була чорна, знайдемо :

$$p_2' = \frac{m'}{m'+n'+1}$$

Після підставлення получимо :

$$p = \frac{m(m'+1) + nm'}{(m+n)(m'+n'+1)}$$

Задача 7. Яка ймовірність виграти, записавши один нумер, в 90 - чисельну льотерею з умовою, що виймається послідовно 5 нумерів, при чому вийняті нумери до колеса льотереї не повертаються?

Згідно з умовою задачі виграти можна лише тоді, коли записаний нумер буде вийнятий: або за першим разом, або за другим - , або за третім - , або за четвертим - , або, нарешті, за пятим - . Усі ці пять випадків взаїмновиключаючі. Тому, означивши p відшукувану ймовірність, будемо мати :

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 ,$$

де p_i (i-I,2,3,4,5) є ймовірність, що записаний нумер вийметься за i-м разом. Безпосередньо маємо :

$$p_1 = \frac{1}{90}$$

Коли б вийняті нумери поверталися до колеса льотереї, то, очевидячки, безпосередньо також мали би , що кожна з імовірностей p_i рівняється $\frac{1}{90}$, але того немає: вийняті кулі відкладаються на бік. Однак не трудно показати, що і в цьому випадкові ймовірности p_2, p_3, p_4, p_5 будуть рівні кожна $\frac{1}{90}$. Щоб обчислити їх, міркуємо так: появлення записаного нумера за другим разом може статися лише тоді, коли за першим разом був вийнятий нумер незаписаний. Тому ймовірність p_2 можна розглядати, як імовірність, що відбудуться разом такі дві події: появлення за першим разом незаписаного нумера і появлення за другим разом записаного нумера. Усіх незаписаних нумерів в колесі є 89, тому ймовірність появлення незаписаного нумера за першим разом рівна $\frac{89}{90}$. Імовірність же, що записаний нумер вийметься за другим разом при умові, що вийнятий за першим разом незаписаний нумер було відкладено на бік, рівна $\frac{1}{89}$. Звідси на основі теореми множення ймовірностей получимо:

$$p_2 = \frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{90}$$

Далі — появлення записаного нумера за третім разом може статися лише тоді, коли, як за першим, так і за другим разом були вийняті нумери незаписані. Імовірність p_3 є ймовірність, що відбудуться разом такі три послідовні події: появлення за першим разом незаписаного нумера, появлення за другим разом незаписаного нумера і появлення за третім разом нумера записаного. Імовірности двох останніх подій, обчисленні кожна в припущенню, що попередні події відбулися, рівні відповідно $\frac{88}{89}$ і $\frac{1}{88}$. Тому:

$$p_3 = \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{1}{88} = \frac{1}{90}$$

Анальогічно знаходимо що:

$$p_4 = \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{1}{87} = \frac{1}{90} \quad і \quad p_5 = \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{86}{87} \cdot \frac{1}{86} = \frac{1}{90}$$

Після підставлення будемо мати:

$$p = \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

Задача 8. При певному досліді може відбутися кілька подій, в тім числі події А і В, ймовірности яких відповідно рівняються p і q. Дослід повторюється доти, доки не відбудеться одна з подій : або А, або В. Яка ймовірність, що подія А відбудеться раніше події В ?

Подія А може наступити раніше події В в одному лише з таких випадків : І).коли подія А появилася з першим дослідом, 2).коли з першим дослідом ні подія А, ні, очевидячки, також подія В не появилися,але з другим дослідом появилася подія А, 3).коли ні з першим дослідом ні з другим події А і В не появилися, але з третім дослідом появилася подія А, і т.д. Ясно, що число цих випадків безмежно велике та що всі вони взаїмновиключальні.Означивши Р відшукувану ймовірність, а - p_0, p_1, p_2, ..., p_i ,.... послідовно ймовірности : першого випадку, другого, третього, нарешті і+І - го і т.д., будемо, очевидячки, на основі теореми додавання ймовірностей мати рівність

$$P = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_i + \cdots$$

Щоби обчислити ймовірности правої частини цієї рівности, міркуємо таким чином. Імовірність появлення при переведенню досліда або події А, або події В, очевидячки,рівна $p+q$, звідси: імовірність події протилежної, означимо її N, себто що ні А, ні В при переведенні досліда не появляться, буде $I-p-q$ Імовірности $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ можна розглядати кожну зокрема, як імовірности появлення разом кількох подій. Так : p_1 є ймовірність появлення разом двох подій: появлення N з першим дослідом і появлення А з другим дослідом ; p_2 є ймовірність появлення разом трьох подій: появлення N з першим дослідом, теж з другим дослідом і появлення А з третім дослідом; взагалі, p_i є ймовірність появлення разом і+І подій, а саме: появлення N при кожному з перших і дослідів і появлення А при (і+І)-му досліді. Тому на основі теореми множення ймовірностей будемо мати:

$$p_1 = (I-p-q).p,$$

$$p_2 = (I-p-q)^2.p,$$

$$p_3 = (I-p-q)^3.p,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

....

$$p_i = (I-p-q)^i . p,$$

....

....

Крім того ясно, що

$$p_0 = p$$

Подставляючи знайдені вартости p_0, p_1, p_2, ... у праву частину нашої рівности, получимо :

$$\mathcal{P} = p.[I+(I-p-q)+(I-p-q)^2+(I-p-q)^3....]$$

Тому що крім подій А і В при переведенні досліду можуть появитися ще й инші події, то $p+q < I$, а значить і $I-p-q < I$. Через це сума, що стоїть в квадратових дужках правої частини получаємої рівности, є ніщо инше, як сума членів безмежно спадаючої геометричної прогресії, перший член якої одиниця, а знаменник $I-p-q$. Обчисливши цю суму, получимо :

$$P = p.\frac{1}{1-(1-p-q)} = \frac{p}{p+q}$$

Задача 9. Дві особи М і К грають на слідуючих умовах : М переводить певний дослід, коли при цьому відбудеться подія А з імовірністю p, то М виграє ;коли ж подія А не відбудеться, то К переводить той самий, або який инчий, дослід, коли при цьому відбудеться подія В з імовірністю q, то К виграє ;в противному випадкові гра починається знову на тих же умовах і продовжується доти , доки або М, або К не виграє. Яка ймовірність,що виграє М ?

Сукупність двох дослідів, переведених послідовно грачами М і К, умовимося звати партією. Як що виграє М, гра припиняється і другий дослід, що його мав переводити К,очевидячки, відпадає . В цьому випадкові будемо вважати за партію лише один дослід, переведений М. Згідно з умовою задачі М може виграти лише в одному з таких випадків :I)коли подія А появилася в першій партії, 2) коли в першій партії ні подія А, ні подія В не появилися але в другий партії появилася подія А, 3) коли ні в першій партії, ні в другий - події А і В не появилися, але в третій партії появилася подія А, і т.д. до безмежности. Ясно, що усі ці випадки взаїмновиключальні. Тому, означивши P відшукувану ймовірність, себто ймовірність, що взагалі виграє M, а - p_0, p_1, p_2, ..., p_i, ... послідовно ймовірности: першого випадку, другого, третього і т.д., нарешті (i+I)-го, і т.д., получимо :

$$P = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_i + \cdots ,$$

де, очевидячки, $p_0 = p$, а ймовірности p_1, p_2, ... p_i, ... легко обчислити на основі слідуючих міркувань. Але зпочатку введемо деякі нові означення: як що подія A не появилася, умовимося казати, що відбулася подія T ; анальоґічно, коли не появилася подія B, будемо говорити, що відбулася подія H. Ясно, що події T і H протилежні відповідно подіям A і B, а тому ймовірність події T рівна I-p, а ймовірність події H - I-q.

Імовірности p_1, p_2, ... , p_i, ... можна розглядати, як імовірности появлення разом кількох подій. Так : p_1 є ймовірність появлення разом в перших двох партіях трьох подій T,H,A ; p_2 є ймовірність появлення разом в перших трьох партіях пяти подій T,H,T,H,A ;і т.д., взагалі p_i є ймовірність появлення разом в перших i+I партіях 2i+I події T,H,T,H,...,T,H,A. Тому на основі теореми множення ймовірностей будемо мати :

$$p_1 = (I-p)(I-q).p,$$
$$p_2 = (I-p)^2(I-q)^2.p,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_i = (I-p)^i(I-q)^i.p,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Подставляючи знайдені вартости p_0, p_1, p_2, ..., p_i, .. у праву частину нашої рівности, получимо :

$$P = p.[I+(I-p)(I-q)+(I-p)^2(I-q)^2+\ldots+(I-p)^i(I-q)^i\ldots].$$

В квадратових дужках правої частини маємо суму членів геометричної безмежно спадаючої проґресії, тому що знаменник цієї проґресії, рівний (I-p)(I-q), менший одиниці. Обчисливши цю суму, знаходимо для відшукуваної ймовірности P такий простий вираз :

$$P = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p}{p+q-pq}$$

Примінюючи останню формулу, наприклад, до гри в орлянку, себто для $p = q = \frac{1}{2}$, знайдемо, що

$$P = \frac{2}{3},$$

себто що грач, який починає гру, має перевагу над своїм противником, для котрого ймовірність, що він взагалі виграє гру, рівняється, очевидячки,

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Задача 10. В урні находиться: a білих, b чорних і c червоних куль. Виймають наосліп одну по одній кулі. Яка ймовірність, що біла куля зявиться раніще чорної ?

Біла куля може зявитися раніще чорної лише в одному з таких випадків : 1) коли біла куля появилася за першим разом, 2) коли за першим разом появилася червона куля, а за другим біла, 3) коли за першим і за другим разом появилися червоні кулі, але за третім - появилася біла, і т.д. і т.д.

Як що кожна вийнята куля повертається до урни, то ясно, що таких випадків буде безмежно багато ; коли ж вийняті кулі відкладаються на бік, то всіх випадків буде на одиницю більше числа червоних куль в урні, себто $c+1$. Усі ці випадки взаімновиключальні. Тому, означивши p відшукувану ймовірність, а - p_i $(i=0,1,2,\ldots)$ послідовно ймовірности : першого випадку, другого, третього і т.д., получимо на основі теореми додавання ймовірностей:

$$p = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_i + \cdots$$

коли вийняті кулі повертаються до урни, і

$$p = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_c$$

коли вони відкладаються на бік.

Окремі ймовірности, що стоять у правих частинах получених рівностей, виключаючи ймовірність p_0, можна розглядати, як імовірности появлення разом кількох подій. Так: p_1 є ймовірність появлення разом червоної кулі за першим разом і білої кулі за другим разом, p_2 є ймовірність появлення разом червоної кулі за першим разом, теж за другим і білої кулі за третім разом, - взагалі p_i є ймовірність появлення разом зпочатку і червоних куль, а потім білої кулі за (і+1)-м разом.

Перше, ніж приступити до обчислення окремих імовірностей $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, поділимо наш виклад на дві частини відповідно двом ріжним [illegible] виймання куль з урни : 1) коли кожна вийнята куля повертається до урни і 2) коли вийняті кулі відкладаються на бік.

1) Коли вийняті кулі повертаються до урни, то ймовірности появлення зокрема білої і червоної кулі заховують увесь час сталі вартости, а саме: ймовірність появлення білої кулі завше рівна

$$\frac{a}{a+b+c}$$

а ймовірність появлення червоної кулі -

$$\frac{c}{a+b+c}$$

Звідси на основі теореми множення ймовірностей для незалежних подій получимо

$$p_0 = \frac{a}{a+b+c}$$

$$p_1 = \frac{c}{a+b+c} \cdot \frac{a}{a+b+c}$$

$$p_2 = \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^2 \cdot \frac{a}{a+b+c}$$

$$- - - - - - - - - - -$$

$$p_i = \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^i \cdot \frac{a}{a+b+c}$$

$$- - - - - - - - - -$$

Підставляючи ці вартости в першу з получених нами основних рівностей, знайдемо:

$$p = \frac{a}{a+b+c}\left[1 + \frac{c}{a+b+c} + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^2 + - - - - - + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^i + \cdots\right]$$

В квадратових дужках правої частини, очевидячки, маємо суму членів геометричної безмежно спадаючої проґресії. Обчисливши її, знаходимо остаточно:

$$p = \frac{a}{a+b+c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c}{a+b+c}} = \frac{a}{a+b} .$$

2). Коли вийняті кулі відкладаються на бік, то ймовірність, що з урни буде вийнято кулю певного коліру, залежить від того, за яким власне разом куля виймається, бо з кожним витягом кількість куль в урні, очевидячки, зменшується на одну кулю Так, наприклад, імовірність, що за $(i+1)$-м разом, де $i<c$, буде вийнято червону кулю при умові, що всі вийняті перед тим i куль були теж червоні, буде рівна

$$\frac{c-i}{a+b+c-i}$$

а ймовірність, що за $(i+1)$-м разом буде вийнято білу кулю, коли всі вийняті перед тим i куль були червоні, - рівна

$$\frac{a}{a+b+c-i}$$

На основі сказаного, приміняючи теорему множення ймовірностей, получимо :

$$p_0=\frac{a}{a+b+c}$$

$$p_1=\frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+c-1}$$

$$p_2=\frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{c-1}{a+b+c-1}\cdot\frac{a}{a+b+c-2}$$

....

$$p_{c-1}=\frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{c-1}{a+b+c-1}\cdots\cdots\frac{2}{a+b+2}\cdot\frac{a}{a+b+1}$$

$$p_c=\frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{c-1}{a+b+c-1}\cdots\cdots\frac{1}{a+b+1}\cdot\frac{a}{a+b}$$

Переписавши ці рівности таким чином:

$$p_0=\frac{a}{a+b+c}$$

$$p_1=\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c-1}$$

$$p_2=\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c-1}\cdot\frac{c-1}{a+b+c-2}$$

....

$$p_{c-1}=\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c-1}\cdots\cdots\frac{3}{a+b+2}\cdot\frac{2}{a+b+1}$$

$$p_c=\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c-1}\cdots\cdots\frac{2}{a+b+1}\cdot\frac{1}{a+b}$$

зауважуємо, що :

$$p_1 = p_0 \cdot \frac{c}{a+b+c-1}$$
$$p_2 = p_1 \cdot \frac{c-1}{a+b+c-2}$$

....

$$p_{c-1} = p_{c-2} \frac{2}{a+b+1}$$
$$p_c = p_{c-1} \frac{1}{a+b}$$

Додаючи до имовірности p_c послідовно ймовірности $p_{c-1}, p_{c-2}, \ldots, p_2, p_1, p_0$, получимо :

$$p_c + p_{c-1} = p_{c-1} \frac{1}{a+b} + p_{c-2} \frac{2}{a+b+1} = p_{c-2} \frac{2}{a+b+1}\left(\frac{1}{a+b}+1\right) = \frac{2}{a+b} \cdot p_{c-2}$$
$$p_c + p_{c-1} + p_{c-2} = p_{c-2} \frac{2}{a+b} + p_{c-3} \frac{3}{a+b+2} = p_{c-3} \frac{3}{a+b+2}\left(\frac{2}{a+b}+1\right) = \frac{3}{a+b} \cdot p_{c-3}$$

....

$$p_c + p_{c-1} + \cdots + p_2 = p_1 \cdot \frac{c-1}{a+b}$$
$$p_c + p_{c-1} + \cdots + p_2 + p_1 = p_1 \frac{c-1}{a+b} + p_0 \frac{c}{a+b+c-1} = p_0 \frac{c}{a+b}$$
$$p_c + p_{c-1} + \cdots + p_2 + p_1 + p_0 = p_0 \cdot \frac{c}{a+b} + p_0 = \frac{a}{a+b}$$

звідки

$$p = p_0 + p_1 + \cdots + p_{c-1} + p_c = \frac{a}{a+b}$$

Отже, як бачимо, імовірність появлення з урни білої кулі раніше чорної в обох розібраних нами випадках є одна й та ж. Таким чином імовірність ця не залежить від способу виймання кулі, а рівнож, як це видно з її виразу, не залежить і від кількости червоних куль в урні. Останню властивість було б можна передбачити ще з самого початку, бо ж ясно, що кількість червоних куль в урні не відограє по суті жадного значіння. Задача тоді розвязується одразу, без жадних обчислень. Справді, як що мати на увазі цю властивість, то можна припустити, що червоних куль в урні зовсім немає : цим припущенням ми не внесемо в умову задачі жадної річевої зміни. Питання про ймовірність появлення білої кулі раніше чорної заміниться тоді, очевидячки, рівнозначним йому питанням про ймовірність появлення білої кулі взагалі. Цю ж останню знайдемо одразу, памятаючи, що в урні є лише a білих і b чорних куль.

Задача II. Імовірність події А міняється з кожним дослідом : при першому досліді p_1 ,при другому - p_2 і т.д. Дослід повторюється,доки не появиться подія А. Яка ймовірність, що подія А відбудеться при числі дослідів, не перебільшуючим даного числа n ?

Означимо p відшукувану ймовірність,себто ймовірність, що подія А появиться з дослідом, порядковий нумер якого не більше n . Як би появлення події А з яким будь дослідом виключало появлення її з усяким иншим, то відшукувана ймовірність знайшлася би згідно з теоремою додавання ймовірностей, як сума окремих імовірностей: p_1, p_2 ,....,p_{n-1}, p_n. Однак цього в даному випадкові немає - необхідна умова взаємновиключальности для окремих появлень події А не виконується. Тому для обчислення ймовірности p мусимо шукати инший шлях . Означимо q імовірність, що подія А при n перших дослідах зовсім не появиться. Ясно, що $p+q$ =I, як імовірности протилежних подій. Для того, щоби подія А зовсім не появилася при n перших дослідах,досить, щоб вона не появилася ні з одним з них,а тому ймовірність q можна розглядати,як імовірність,що відбудуться разом такі n подій : подія А не появиться з першим дослідом (імовірність I-p_1),теж з другим - (імовірність I-p_2), теж з третім - (імовірність I-p_3), і т.д., нарешті з (n-I)-м - (імовірність I-p_{n-1}), і з n-м (імовірність I-p_n). Звідси на основі теореми множення ймовірностей незалежних подій получимо :

$$q = (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot\ldots\ldots(1-p_{n-1})\cdot(1-p_n)$$

звідки :

$$p = 1-q = 1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot\ldots\ldots(1-p_{n-1})\cdot(1-p_n).$$

Задача I2. Кидають n однакових кісток до гри, стінки яких помічені нумерами I,2,3,4,5,6. Яка ймовірність, що при цьому на якийнебудь кістці зявиться наперед визначений нумер.?

Відшукувану ймовірність означимо p , а ймовірність, що визначений наперед нумер зовсім не зявиться, означимо q . Очевидячки, що $p+q$ = I,як імовірности протилежних подій. Імовірність q можна розглядати, як імовірність, що відбудуться разом такі n подій визначений нумер не зявиться на першій кістці, теж на другий - , теж на третій, і т.д. нарешті також на n-ій - . Тому ймовірність q буде рівнятися здобуткові n окремих імовірностей цих подій. Ясно також, що яку б одну з наших кісток ми не кинули окремо від инших, імовірність появлення на ній даного нумера рівна $\frac{1}{6}$, а ймовірність, що цей нумер на ній не зявиться - $\frac{5}{6}$. Тому буде

$$q = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

звідки

$$p = 1 - q = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n .$$

Задача 13. Імовірність події А при даному досліді рівна p і не міняється з повторенням досліда. Кілько разів треба дослід повторити, щоб імовірність появлення події А була 0,5 ?

Як що означимо x відшукуване число дослідів, то ймовірність, що подія А при цьому числі дослідів зовсім не зявиться, буде рівна, як імовірність події протилежної появленню А при x дослідах, $(1-p)^x$. З другої ж сторони вона буде, очевидячки , 1-0,5=0,5. Тому :

$$(1-p)^x = 0,5$$

звідки

$$x = \frac{\lg 0,5}{\lg(1-p)} .$$

В окремому випадкові, коли даний дослід є кидання кістки до гри, подія А - появлення визначеного наперед нумера, то після підставлення у наш взір $p = \frac{1}{6}$, знайдемо :

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 6 - \lg 5} = 0,38 \ldots ,$$

себто, що ймовірність появлення наперед визначеного нумера при киданні кісткою до гри буде рівнятися $\frac{1}{2}$ при чотирікратному киданні кістки.

Задача I4. Кілько разів треба кинути n кісток до гри, стінки яких понумеровані числами від I до 6, щоб імовірність одночасного появлення на всіх кістках наперед визначеного нумера була більше половини ?

Будемо називати кожне окреме кидання сукупности n кісток дослідом. Коли дослід переводиться лише один раз, то ймовірність одночасного появлення на всіх n кістках визначеного наперед нумера рівняється, очевидячки,

$$\frac{1}{6^n}$$

а ймовірність події протилежної, себто ймовірність, що визначений нами нумер не зявиться одночасно на всіх кістках, коли їх буде кинуто тільки один раз, є рівна

$$1-\frac{1}{6^n}$$

Як що відшукуване число дослідів означимо x, то ясно, що коли при x дослідах імовірність одночасного появлення на всіх n кістках визначеного наперед нумера є більше половини, то ймовірність протилежної події, себто ймовірність, що визначений наперед нумер протягом x дослідів зовсім не зявиться одночасно на всіх n кістках, є меньше половини. З другої ж сторони ця остання ймовірність рівняється, очевидячки,

$$\left(I-\frac{1}{6^n}\right)^x,$$

звідки :

$$\left(I-\frac{1}{6^n}\right)^x < \frac{1}{2}$$

Льоґаритмуючи цю нерівність, знаходимо :

$$x\left[\lg(6^n-1)-\lg 6^n\right] < -\lg 2$$

$$x > \frac{\lg 2}{n\lg 6-\lg(6^n-1)}.$$

Задача 15. В урні находиться mn однакових куль, з яких m куль з нумером 1, m - з нумером 2 і т.д., нарешті m куль з нумером n. Вийнято послідовно дві кулі, причому перша вийнята куля до урни не була повернута. Яка ймовірність : 1).що нумер другої вийнятої кулі більше нумера першої і 2).що нумери обох вийнятих куль однакові ?

Будемо називати кулі вийняті за першим разом і за другим відповідно першою і другою.

1). Вийняти послідовно з урни дві кулі так, щоби нумер другої був більше нумера першої, можна лише в одному з таких $n-1$ окремих випадків: 1)коли нумер першої кулі є одиниця, а нумер другої - більше одиниці, 2) коли нумер першої кулі є два, а нумер другої - більше двох, і т.д., нарешті - $n-1$) коли нумер першої кулі є $n-1$, а другої - n. Всі ці випадки взаїмновиключальні. Тому відшукувана ймовірність p рівняється, очевидячки, сумі окремих імовірностей $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ цих випадків.

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_i + \cdots + p_{n-1}$$

Щоби пообчислювати ймовірности правої частини цієї рівности, розберемо докладніще якийнебудь один із перечислених нами $n-1$ випадків, наприклад, i-ий. Імовірність p_i рівняється, очевидячки, здобуткові ймовірности, що перша куля матиме i-ий нумер, на ймовірність, що нумер другої кулі буде більше i, обчислену в припущенні, що нумер першої кулі є i-ий та що вона була відкладена на бік. Перша ймовірність є, очевидячки,

$$\frac{m}{mn} = \frac{1}{n}$$

а друга -

$$\frac{mn - mi}{mn-1} = \frac{m(n-i)}{mn-1}$$

бо число куль в урні з нумерами більшими i є $mn-mi$ а число всіх куль в урні після витягу першої зменшиться на одиницю. Отже :

$$p_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{m(n-i)}{mn-1}$$

Надаючи i послідовно вартости 1,2, ..., $n-2, n-1$, получимо всі ймовірности правої частини нашої рівности, так що остаточно будемо мати :

$$p = \frac{1}{n}\cdot\frac{m(n-1)}{mn-1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{m(n-2)}{mn-1} + ------ + \frac{1}{n}\cdot\frac{m.2}{mn-1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{m1}{mn-1}.$$

$$p = \frac{m}{n(mn-1)}\left[(n-1)+(n-2)+ ---- +2+1\right] =$$

$$= \frac{m}{n(mn-1)}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \frac{m(n-1)}{2(mn-1)}.$$

2). Імовірність, що вийняті послідовно з урни дві кулі матимуть однакові нумери рівна, очевидячки, здобуткові таких двох імовірностей : імовірности, що перша куля буде даного нумера, і ймовірности, що друга куля матиме нумер однаковий з першою, обчисленої в припущенні, що перша куля була відкладена на бік. Безпосередньо знаходимо, що ці ймовірности рівні відповідно

$$\frac{1}{n} \quad і \quad \frac{m-1}{mn-1}$$

бо число всіх куль одного нумера в урні рівне m. Звідси ймовірність, що вийняті послідовно з урни дві кулі матимуть однакові нумери, буде

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{m-1}{mn-1}$$

Імовірність ця, як бачимо, заховує одну й ту ж вартість, який би нумер вийнятих куль не був. Але цей нумер може бути : або перший, або другий, або і т. д., нарешті, або (n-I)-й, або n-й. Усі ці n можливостей взаїмновиключальні. Тому, означивши відшукувану ймовірність p, получимо на основі теореми додавання ймовірностей :

$$p = n.\frac{1}{n}\cdot\frac{m-1}{mn-1} = \frac{m-1}{mn-1}.$$

Задача I6. З урни попередньої задачі послідовно вийнято три кулі, при чому вийняті кулі до урни не поверталися. Нумер першої вийнятої кулі відомий і є рівний К (К $<n$). Яка ймовірність, що нумер другої вийнятої кулі більше нумера першої, а нумер третьої - більше нумера другої ?

Нумер другої вийнятої кулі може бути більше нумера першої, а нумер третьої - більше нумера другої лише в одному з таких випадків : коли нумер другої кулі рівний К+І, а нумер третьої більше К+І ; коли нумер другої кулі рівний К+2, а нумер третьої більше К+2 ; і т.д., нарешті коли нумер другої кулі рівний n-І, а нумер третьої рівний n. Усі перечислені випадки, число яких, очевидячки, рівне n-І-К, взаємновиключальні. Тому на основі теореми додавання ймовірностей відшукувана ймовірність p рівняється сумі окремих імовірностей усіх цих випадків. Розберемо докладніше якийнебудь один із них, наприклад, i-й, де $i < n$-К. Імовірність його, означимо її p_i, можна розглядати, як імовірність, що відбудуться разом такі дві події : І) за другим разом вийметься куля з нумером К+i і 2) за третім разом - з нумером більшим К+i. Імовірність першої події рівна, очевидячки,

$$\frac{m}{mn-1}$$

бо першу кулю згідно з умовою було відкладено на бік ; імовірність же другої - , обчислена в припущенні, що нумер кулі, вийнятої за другим разом, був К+i та що ця остання куля була відкладена на бік, рівна

$$\frac{mn-m(k+i)}{mn-2} = \frac{m(n-k-i)}{mn-2}$$

Звідси на основі теореми множення ймовірностей будемо, очевидячки, мати :

$$p_i = \frac{m}{mn-1} \cdot \frac{m(n-k-i)}{mn-2}$$

Надаючи i послідовно вартости І,2,....,(n-К-І), получимо всі окремі ймовірности перечислених нами взаємновиключальних випадків. Таким чином відшукувана ймовірність матиме остаточно такий вигляд :

$$p = \frac{m}{mn-1} \cdot \frac{m(n-k-1)}{mn-2} + \frac{m}{mn-1} \cdot \frac{m(n-k-2)}{mn-2} + \text{------}$$

$$+ \text{-----------} + \frac{m}{mn-1} \cdot \frac{m.2}{mn-2} + \frac{m}{mn-1} \cdot \frac{m.1}{mn-2} =$$

$$= \frac{m^2}{(mn-1)(mn-2)} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{m^2(n-k)(n-k-1)}{2(mn-1)(mn-2)}.$$

Задача 17. (*Problème de la poule*). Три особи A, B і C грають в орлянку на слідуючих умовах: першу партію грають A і B, хто з них програє, виходить з гри і його заступає C ; теж після другої партії : хто програє, виходить з гри і відступає своє місце третьому, що в другий партії участи не брав, і т.д. ; виграє гру той, хто виграє з ряду дві партії. Яка ймовірність виграти гру для A, B і C ?

Означимо p_A, p_B і p_C відповідно ймовірности, що гра буде остаточно виграна A, B і C. Тому що перед початком гри A і B знаходяться що до гри ув однакових умовах, то, очевидячки,

$$p_A = p_B$$

Умовимося означувати окремі партії гри в той спосіб, що будемо писати поруч себе ймення тих грачів, що в них беруть участь, ставлячи риску над імям того, хто партію виграв. Так, наприклад, $B\bar{C}$ означає партію, в який брали участь B і C, при чому C виграв. Почнемо з обчислення, наприклад p_B . Спишемо всі ті й лише ті окремі можливі випадки, коли гру остаточно виграє B. Кожному такому випадкові відповідає певна послідовність окремих партій, з яких дві останніх завше, очевидячки, виграні B. Усі ці випадки можна розподілити на дві групи в залежности від того, хто саме виграє першу партію, A чи B. Користуючись прийнятими означеннями, можемо символично представити всі випадки сприятливі для B у формі такої таблиці :

I група

1). $A\bar{B}$, $C\bar{B}$

2). $A\bar{B}$, $\bar{C}B$, $C\bar{A}$, $\bar{B}A$, $\bar{B}C$

3). $A\bar{B}$ $\bar{C}B$, $C\bar{A}$, $\bar{B}A$, $B\bar{C}$, $\bar{A}C$, $A\bar{B}$, $C\bar{B}$

....

....

II група

1). $\bar{A}B$, $A\bar{C}$, $\bar{B}C$, $\bar{B}A$

2). $\bar{A}B, A\bar{C}, \bar{B}C, B\bar{A}, \bar{C}A, C\bar{B}, A\bar{B}$

3). $\bar{A}B, A\bar{C}, \bar{B}C, B\bar{A}, \bar{C}A, C\bar{B}, \bar{A}B, A\bar{C}, \bar{B}C, \bar{B}A$

....

....

Як що будемо розглядаємі нами випадки представляти символично не у формі послідовної записі окремих партій, а у формі послідовної записі осіб, що ці партії виграли, то наведену таблицю можна замінити слідуючою їй рівнозначною :

I група	II група
I).BB	I).ACBB
2).BCABB	2).ACBACBB
3).BCABCABB	3).ACBACBACBB
....	....
....	....

Ясно, що в кожній групі є безмежно багато випадків Усі вони взаїмновиключальні. Тому на основі теореми додавання ймовірностей відшукувана ймовірність p_B знайдеться, як сума окремих імовірностей цих випадків. Ці останні ймовірности знайдемо на основі теореми множення ймовірностей, бо кожну з них можна розглядати, як імовірність, що відбудуться разом кілька незалежних подій. Так, наприклад, імовірність 2-го можливого випадку групи I є ніщо инше, як імовірність, що відбудуться разом слідуючи пять подій: першу партію виграє B, другу - C, третю - A, четверту - B і пяту - теж B.

Імовірність виграти в орлянку окрему партію рівна, як відомо, $1/2$. Тому наведеній таблиці окремих випадків відповідатиме така таблиця їх імовірностей :

I група	II група
I). $\frac{1}{2^2}$	I). $\frac{1}{2^4}$
2). $\frac{1}{2^5}$	2). $\frac{1}{2^7}$

3) $\frac{1}{2^8}$ 3) $\frac{1}{2^{10}}$

....

....

Імовірности першої і другої групи зокрема є члени геометричних проґресій з однаковим знаменником $\frac{1}{2^3}$. Тому :

$$p_B = \frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^3}} + \frac{\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2^3}} = \frac{1}{4}:\frac{7}{8} + \frac{1}{16}:\frac{7}{8} = \frac{2}{7}+\frac{1}{14} = \frac{5}{14}$$

Звідси :

$$p_A = p_B = \frac{5}{14}.$$

Тому що з трьох грачів A, B, C якійсь один і лише один обовязково мусить виграти,то

$$p_A + p_B + p_C = 1.$$

а звідси маємо .

$$p_C = 1 - p_A - p_B = 1 - \frac{5}{14} - \frac{5}{14} = \frac{4}{14}.$$

РОЗДІЛ II.

ТЕОРІЯ ПОВТОРНИХ ДОСЛІДІВ.

§ I. Досліди незалежні і звязані.

Студіовання результатів повторних дослідів є одною з найбільш важливих задач числення ймовірностей, воно приводить нас до встановлення найголовніших його теорем.

Предметом нашого студіовання будуть лише так звані незалежні досліди.

Ми будемо називати кілька дослідів незалежними що до події A, коли ймовірність її при кожному з них не залежить від результатів решти дослідів.

В противному разі будемо називати досліди звязаними.

Імовірність події A при кожному з дослідів може бути й не одна й та ж, аби лише зміна її при переході від одного досліда к другому не залежала від результатів дослідів.

Пояснимо ці визначення прикладами.

I). Будемо виймати наосліп по одній кулі послідовно з кількох урн помічених нумерами I,2,3,.... Будемо називати першим дослідом витяг кулі з першої урни, другим - витяг кулі з другої урни і т.д. Нехай в першій урні є a_1 білих і b_1 чорних куль, в другій - a_2 білих і b_2 чорних і т.д. Появлення білої кулі з урни нехай буде наша подія A. Імовірности події A при послідовних дослідах будуть, очевидячки, відповідно рівні:

$$\frac{a_1}{a_1+b_1},\ \frac{a_2}{a_2+b_2},\ -------$$

Ясно, що в цьому випадкові досліди наші будуть незалежні що до події A, бо ймовірність її при кожному досліді не залежить від результатів инших дослідів, хотя й міняється при переході від одного досліда к другому.

2). Будемо виймати по одній кулі з урни, що має a білих і b чорних куль. Кожний окремий витяг кулі будемо вважати за окремий дослід. Як що кожна вийнята куля буде зараз же повертатися до урни, то ясно, що ймовірність події, себто ймовірність появлення білої кулі, буде завше одна й та ж, рівна, очевидячки,

$$\frac{a}{a+b}$$

і досліди наші що до події A будуть незалежними.

Коли ж ми змінимо умови переведення дослідів в... спосіб, що кожну вийняту кулю будемо відкладати набік, то в цьому випадкові досліди будуть вже звязаними, бо ймовірність події A при кожному досліді залежить, очевидячки, від результатів попередніх дослідів. Так, наприклад, імовірність події A при другому досліді буде рівна

$$\frac{a-1}{a+b-1},$$

коли в результаті першого досліду подія A відбулася, і -

$$\frac{a}{a+b-1}$$

коли в результаті першого досліду вона не відбулася, себто коли куля вийнята з урни за першим разом була чорна.

§ 2. Основна теорема.

Теорема. Як що для незалежних дослідів, означених нумерами

$$1,2,3,\ldots.$$

імовірности події A рівні відповідно

$$p_1, p_2, p_3, ------, p_n,$$

то ймовірність, що подія A при n дослідах появиться m разів, рівна сочинникові при x^m в розкладі здобутку

$$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)------(p_nx+q_n).$$

по степенях довільного числа , при чому

$$q_1=1-p_1,\ q_2=1-p_2,\ ------,\ q_n=1-p_n.$$

Перше ніж давати доказ теореми в загальному виді для n дослідів, покажемо її справедливість в окремих випадках двох і трьох дослідів

Сума ж цих імовірностей рівна одиниці.

Доведемо тепер нашу теорему в її загальному вигляді, при чому, зважаючи на її велике значіння, а також для ознайомлення з ріжними методами числення ймовірностей дамо два докази теореми.

Перший доказ. Появлення події A при n дослідах m разів може відбутися лише в одній з кількох взаімновиключальних форм. Кожна з цих форм є появлення події A з m певними дослідами і непоявлення її з рештою $n-m$ дослідів.

Розглянемо якунебудь одну таку форму, наприклад, коли подія A зявиться при m дослідах, означених нумерами

$$\alpha_1, \alpha_2, \text{-----}, \alpha_m$$

і не зявиться при $n-m$ дослідах з нумерами

$$\beta_1, \beta_2, \text{-----} \beta_{n-m}$$

Імовірність цієї форми на основі теореми множення ймовірностей буде рівна

$$p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_m} q_{\beta_1} q_{\beta_2} \cdots q_{\beta_{n-m}}$$

Здобуток цей, очевидячки, можна получити зі здобутку

$$q_1 q_2 \cdots q_n$$

замінивши в ньому множники

$$q_{\alpha_1}, q_{\alpha_2}, \text{----} q_{\alpha_m},$$

числами

$$p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \text{----} p_{\alpha_m}.$$

Коли знайдемо ймовірности всіх окремих форм, то на основі взаімновиключальности їх заключуємо, що сума цих імовірностей буде уявляти з себе ймовірність m-кратного появлення події A при n дослідах.

Окремих доданків в цій сумі буде, очевидячки, стільки, скільки можна получити здобутків з одного

$$q_1 q_2 \cdots q_n,$$

коли будемо заступати в ньому на m місцях літеру як сума ймовірностей єдиноможливих і взаїмновиключальних випадків.

Як що будемо розглядати три незалежних досліди, то можливі результати їх представляться у формі восьми єдиноможливих і взаїмновиключальних випадків, які подібно чотиром попереднім представимо так

AAA, AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA, BBB.

Долучимо ще до старих означень p_1, q_1, p_2, q_2 відповідні означення p_3 і q_3 імовірностей події A і події B з третім дослідом. Тоді на основі теореми множення ймовірностей знайдемо для наших восьми випадків такі ймовірности:

$$p_1p_2p_3,\ p_1p_2q_3,\ p_1q_2p_3,\ q_1p_2p_3,\ p_1q_2q_3,\ q_1p_2q_3,\ q_1q_2p_3,\ q_1q_2q_3.$$

Випадки другий, третій і четвертий можна розглядати, як окремі форми одного більш загального випадку, а саме двократного появлення події A при трьох дослідах, так само випадки пятий, шостий і сьомий - як окремі форми однократного появлення A при трьох дослідах. На основі теореми додавання ймовірностей знайдемо, що ймовірність двократного появлення події A при трьох дослідах рівна

$$p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3$$

а ймовірність однократного її появлення при трьох дослідах рівна

$$p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3$$

Зредукувавши таким чином число єдиноможливих та взаїмновиключальних випадків, ми встановили при трьох незалежних дослідах такі чотирі випадки: трикратне появлення події A, двократне її появлення, однократне - і цілковите непоявлення події A, імовірности яких відповідно рівні

$$p_1p_2p_3,\ p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3,\ p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3,\ q_1q_2q_3.$$

Чотирі ці числа рівні відповідно сочинникам при x^3, x^2, x^1, x^0 в розкладі здобутку

$$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)(p_3x+q_3)$$

по степенях довільного числа x.

Будемо розглядати два незалежних досліди таких, що при кожному з них може появитися подія А. Імовірність події А з першим дослідом означимо p_1 і з другим - p_2. Подію протилежну події А назвемо В. Імовірність події В з першим дослідом означимо q_1 і з другим - q_2. Ясно, що

$$p_1+q_1=1\ ,\quad p_2+q_2=1\ .$$

Як результат цих двох дослідів, можливі чотирі випадки, які означимо символічно так:

AA, AB, BA, BB,

де АА означає появлення події А, як з першим, так і з другим дослідом, АВ - появлення А з першим дослідом і непоявлення А з другим і т.д. Усі ці випадки єдиноможливі і взаїмновиключальні. Імовірности їх знайдемо на основі теореми множення ймовірностей. Вони будуть відповідно рівні:

$$p_1p_2\,,\ p_1q_2\,,\ q_1p_2\,,\ q_1q_2\ .$$

Другий і третій випадки можна розглядати, як окремі форми одного більш загального випадку, а саме однократного появлення події А при двох дослідах без огляду на те, з яким саме дослідом. На основі теореми додавання ймовірностей імовірність однократного появлення події А буде рівна сумі

$$p_1q_2+q_1p_2$$

Таким чином ми встановили при двох незалежних дослідах три випадки, з яких перший є двократне появлення події А, другий - однократне її появлення і третій - ~~цілковите~~ непоявлення події А. Імовірности цих випадків відповідно рівні :

$$p_1p_2\,,\ p_1q_2+q_1p_2\,,\ q_1q_2\ .$$

А ці три числа є ніщо инче, як сочинники відповідно при x^2, x^1 і x^0 в розкладі здобутку

$$(p_1x+q_1)\cdot(p_2x+q_2)$$

по степенях довільного числа x.

Легко переконатися, що

$$p_1p_2+(p_1q_2+q_1p_2)+q_1q_2=1\ ,$$

q літерою p.

Тій же сумі, як відомо, рівняється і сочинник при x^m в розкладі здобутку

$$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\cdot\ldots\ldots(p_nx+q_n)$$

по степенях довільного числа x. Теорема таким чином доведена.

Другий доказ. Будемо розглядати n функцій довільного аргументу x:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ ----,\ \varphi_n(x) \qquad (I)$$

такого виду

$$\varphi_k(x) = \mathcal{P}_{k,k}x^k+\mathcal{P}_{k-1,k}x^{k-1}+---+\mathcal{P}_{i,k}x^i+---+\mathcal{P}_{1,k}x+\mathcal{P}_{0,k},$$

де к - одно з чисел:

$$I,\ 2,\ 3,\ldots\ldots,n,$$

а і - одно з чисел:

$$0,\ I,\ 2,\ldots\ldots,\ k,$$

символ же

$$\mathcal{P}_{i,k}$$

означає ймовірність, що подія А при к перших дослідах появиться і разів.

На основі очевидних рівностей

$$\mathcal{P}_{1,1}=p_1 \quad i \quad \mathcal{P}_{0,1}=q_1$$

безпосередньо маємо

$$\varphi_1(x) = \mathcal{P}_{1,1}x+\mathcal{P}_{0,1}=p_1x+q_1$$

Решту ж функцій (I) можна знайти послідовним приміненням такої загальної формули

$$\varphi_{k+1}(x) = (p_{k+1}x+q_{k+1})\cdot\varphi_k(x),$$

яку ми зараз встановимо. Але спочатку покажемо справедливість слідуючих трьох рівностей:

$$\mathcal{P}_{k+1,k+1}=p_{k+1}\cdot\mathcal{P}_{k,k}$$

$$\mathcal{P}_{0,k+1} = q_{k+1} \mathcal{P}_{0,k} \tag{2}$$

$$\mathcal{P}_{i,k+1} = p_{k+1} \mathcal{P}_{i-1,k} + q_{k+1} \mathcal{P}_{i,k} \ ,$$

де і може приймати вартости 1,2,3,...,к. Імовірність, що подія А при к+І досліді відбудеться к+І разів, означену нами символом $\mathcal{P}_{k+1,k+1}$, можна розглядати як імовірність, що відбудуться разом такі дві події: появлення А при к перших дослідах к разів (імовірність $\mathcal{P}_{k,k}$) і появлення події А з к+І-м дослідом (імовірність p_{k+1}). Звідси на основі теореми множення ймовірностей получимо першу з рівностей(2)

Далі, права частина другої з рівностей(2) є здобуток імовірностей q_{k+1} і $\mathcal{P}_{0,k}$; перша з них, як відомо, є ймовірність, що подія А не появиться при (к+І)-му досліді, а друга - , що подія А не появиться ні разу при к перших дослідах. Отже, здобуток цих імовірностей $q_{k+1} \mathcal{P}_{0,k}$ на основі теореми множення ймовірностей мусить представити ймовірність,що подія А при перших к-І дослідах не появиться ні разу себто ймовірність, яку ми означили символом $\mathcal{P}_{0,k+1}$. Таким чином і друга з рівностей (2) нами доведена.

Нарешті, щоби переконатися в правильности третьої з рівностей (2), будемо міркувати так: подію, що її ймовірність ми означили символом $\mathcal{P}_{i,k+1}$, можна розбити на дві взаїмновиключальних форми в залежности від двох можливих результатів останнього (к+І)-го досліду, з яким подія А може або появитися, або не появитися. Як що вона появиться з (к+І)-м дослідом, то це її появлення може бути лише останнє, себто і-те, а тому попередні і-І появлення А повинні відбутися при к перших дослідах ; як що ж подія А з останнім (к+І)-м дослідом не появиться, то ясно, що всі і появлень її сталися з першими к дослідами.

Імовірности обох взаїмновиключальних форм знайдемо, користуючися теоремою множення ймовірностей. Справді, ймовірність першої з них можна розглядати, як імовірність, що відбудуться разом появлення події А з (к+І)-м дослідом (імовірність p_{k+1}) і появлення А і-І раз при к перших дослідах (імовірність $\mathcal{P}_{i-1,k}$), звідки ймовірність першої взаїмновиключальної форми буде рівна здобуткові $p_{k+1} \mathcal{P}_{i-1,k}$; так само ймовірність другої форми можна розглядати як імовірність, що відбудуться разом такі дві події: непоявлення А з останнім (к+І)-м дослідом (імовірність q_{k+1}) і появлення А при перших к дослідах і разів (імовірність $\mathcal{P}_{i,k}$), а тому ймовірність другої взаємновиключальної форми буде рівна здобуткові $q_{k+1}\mathcal{P}_{i,k}$. Сума ж цих імовірностей

$$p_{k+1}\mathcal{P}_{i-1,k}+q_{k+1}\mathcal{P}_{i,k}$$

на основі теореми додавання ймовірностей дає нам імовірність, що подія А при к+І досліді появиться і разів, себто ймовірність, яку ми означили символом $\mathcal{P}_{i,k+1}$. Таким чином ми довели і третю з рівностей (2). Заміняючи на основі формул (2) сочинники правої частини рівности

$$\varphi_{k+1}(x)=\mathcal{P}_{k+1,k+1}x^{k+1}+\mathcal{P}_{k,k+1}x^{k}+\cdots+\mathcal{P}_{1,k+1}x+\mathcal{P}_{0,k+1},$$

получимо:

$$\varphi_{k+1}(x)=p_{k+1}\mathcal{P}_{k,k}x^{k+1}+p_{k+1}\mathcal{P}_{k-1,k}x^{k}+q_{k+1}\mathcal{P}_{k,k}x^{k}+p_{k+1}\mathcal{P}_{k-2,k}x^{k-1}+q_{k+1}\mathcal{P}_{k-1,k}x^{k-1}+$$

$$+\cdots+p_{k+1}\mathcal{P}_{1,k}x^{2}+q_{k+1}\mathcal{P}_{2,k}x^{2}+p_{k+1}\mathcal{P}_{0,k}x+q_{k+1}\mathcal{P}_{1,k}x+q_{k+1}\mathcal{P}_{0,k}=$$

$$=p_{k+1}x\left(\mathcal{P}_{k,k}x^{k}+\mathcal{P}_{k-1,k}x^{k-1}+\mathcal{P}_{k-2,k}x^{k-2}+\cdots+\mathcal{P}_{1,k}x+\mathcal{P}_{0,k}\right)+$$

$$+q_{k+1}\left(\mathcal{P}_{k,k}x^{k}+\mathcal{P}_{k-1,k}x^{k-1}+\cdots+\mathcal{P}_{2,k}x^{2}+\mathcal{P}_{1,k}x+\mathcal{P}_{0,k}\right),$$

або

$$\varphi_{k+1}(x)=(p_{k+1}x+q_{k+1})\cdot\left(\mathcal{P}_{k,k}x^{k}+\mathcal{P}_{k-1,k}x^{k-1}+\cdots+\mathcal{P}_{2,k}x^{2}+\mathcal{P}_{1,k}x+\mathcal{P}_{0,k}\right),$$

що рівнозначно вищенаведеній формулі

$$\varphi_{k+1}(x)=(p_{k+1}x+q_{k+1})\cdot\varphi_k(x)$$

Приміняючи цю формулу послідовно для к рівного І, 2,3,...., n-І, получимо n-І рівність

$$\varphi_2(x)=(p_2x+q_2)\cdot\varphi_1(x)=(p_2x+q_2)(p_1x+q_1)$$

$$\varphi_3(x)=(p_3x+q_3)\cdot\varphi_2(x)$$

....

....

$$\varphi_n(x)=(p_nx+q_n)\varphi_{n-1}(x)$$

Перемноживши ці рівности, знаходимо:

$$\varphi_n(x) = (p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\ldots\ldots(p_nx+q_n) \qquad (3)$$

Але з другої сторони, згідно нашему визначенню $\varphi_n(x)$, маємо

$$\varphi_n(x) = \mathcal{P}_{n,n}x^n+\mathcal{P}_{n-1,n}x^{n-1}+\text{----}+\mathcal{P}_{2,n}x^2+\mathcal{P}_{1,n}x+\mathcal{P}_{0,n} \qquad (4)$$

Ясно, що праві частини рівностей (3) і (4) між собою тотожньо рівні, а значить і сочинники у них при однакових степенях числа x також рівні, що і доводить нашу теорему.

Очевидно, що

$$\mathcal{P}_{n,n}+\mathcal{P}_{n-1,n}+\text{----}+\mathcal{P}_{2,n}+\mathcal{P}_{1,n}+\mathcal{P}_{0,n} = 1$$

як сума ймовірностей єдиноможливих і взаїмновиключальних подій.

Наприкінці замітимо, що число m появлень події А при n дослідах називають для скорочення частотою, або абсолютною частотою події й при n дослідах.

§ 3. Окремий випадок теореми попереднього §-а.

В окремому випадкові, коли умови всіх дослідів попереднього параграфа однакові і всі ймовірности

$$p_1, p_2, \text{------}, p_n$$

мають одну й ту ж величину, означимо і p, то здобуток

$$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\text{-----}(p_nx+q_n)$$

заміниться в степень

$$(px+q)^n,$$

де $q = 1-p$, і наша основна теорема прийме такий вигляд.

Т е о р е м а. Як що для кожного з n незалежних дослідів імовірність події А одна й та ж, рівна p, то ймовірність, що подія А при n незалежних дослідах появиться m разів, рівна сочинникові при x^m в розкладі бінома

$$(px+q)^n$$

по степенях довільного числа x, при чому $q=1-p$. Розгорнемо біном по Ньютону:

$$(px+q)^n = C_n^n p^n x^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q x^{n-1} + \cdots + C_n^m p^m q^{n-m} x^m +$$

$$+ \cdots + C_n^2 p^2 q^{n-2} x^2 + C_n^1 p \cdot q^{n-1} x + C_n^0 q^n ,$$

де C_n^m є число комбінацій з n елементів по m і $C_n^0=1$. В окремому випадкові для $p=q=1/2$ і при $x=1$ взір цей було вже нами виведено раніше (див. Задача 2-га, §2 Розд. I). Пригадуючи з теорії сполук вираз для C_n^m, будемо мати

$$\mathcal{P}_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} . \quad (I)$$

Звідси, даючи m послідовно вартости n, $n-1$,....., 2, 1, 0, получимо:

$$\mathcal{P}_{n,n} = C_n^n \cdot p^n = p^n$$

$$\mathcal{P}_{n-1,n} = C_n^{n-1} p^{n-1} q = n p^{n-1} q$$

....

....

$$\mathcal{P}_{2,n} = C_n^2 p^2 q^{n-2} = \frac{n(n-1)}{1.2} p^2 q^{n-2}$$

$$\mathcal{P}_{1,n} = C_n^1 p q^{n-1} = npq^{n-1}$$

$$\mathcal{P}_{0,n} = C_n^0 q = q^n .$$

Очевидно, що і в цьому окремому випадкові буде теж

$$\mathcal{P}_{n,n} + \mathcal{P}_{n-1,n} + \cdots + \mathcal{P}_{2,n} + \mathcal{P}_{1,n} + \mathcal{P}_{0,n} = 1 ,$$

як сума ймовірностей єдиноможливих і взаїмновиключаючих подій, а з другої сторони, як сума, що при $x=1$, рівна степені $(p+q)^n$.

§ 4. Найімовірніще число появлень події A при n незалежних дослідах.

Імовірність, що подія A з імовірністю p при кожному досліді появится при n незалежних дослідах m разів, як це видно з її виразу

$$\mathcal{P}_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m},$$

є при довільно даних n і p функцією величини m. Ту вартість величини m, при якій імовірність

$$\mathcal{P}_{m,n}$$

осягає своєї найбільшої вартости, будемо казивати найімовірніщим числом появлень події A, або най - імовірніщою частотою події A при n незалежних дослідах. Поставимо собі задачею знайти цю вартість числа m. Для цього будемо порівнювати між собою кожні два, поруч стоячі, числа в ряді

$$\mathcal{P}_{0,n}, \mathcal{P}_{1,n}, \text{------}, \mathcal{P}_{m,n}, \mathcal{P}_{m+1,n} \text{------} \mathcal{P}_{n-1,n}, \mathcal{P}_{n,n} \qquad (I)$$

Відношення якогонебудь з них до попереднього напишеться так

$$\frac{\mathcal{P}_{m+1,n}}{\mathcal{P}_{m,n}} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^{m+1} q^{n-m-1} : \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} \qquad (2)$$

При зростанню числа m величина цього відношення зменшується, тому ряд послідовних відношень кожного члена ряда (I) до свого попереднього утворить такий ряд спадаючих чисел :

$$\frac{\mathcal{P}_{1,n}}{\mathcal{P}_{0,n}} > \frac{\mathcal{P}_{2,n}}{\mathcal{P}_{1,n}} > \text{------} > \frac{\mathcal{P}_{n-1,n}}{\mathcal{P}_{n-2,n}} > \frac{\mathcal{P}_{n,n}}{\mathcal{P}_{n-1,n}} \qquad (3)$$

Будемо порівнювати величини членів цього ряду (3) з одиницею. Тут можуть зустрінутися такі три випадки : I). найстарший (перший) член ряду (3) буде меньше, або рівний одиниці:

$$\frac{\mathcal{P}_{1,n}}{\mathcal{P}_{0,n}} \leq 1$$

2) найменший (останній) член ряду (3) буде більше, або рівний одиниці:

$$\frac{\mathcal{P}_{n,n}}{\mathcal{P}_{n-1,n}} \geqslant 1$$

3) найстарший член ряду (3) буде більше, а найменший – меньше одиниці.

$$\frac{\mathcal{P}_{1,n}}{\mathcal{P}_{0,n}} > 1 \quad i \quad \frac{\mathcal{P}_{n,n}}{\mathcal{P}_{n-1,n}} < 1$$

Розглянемо за порядком кожний з цих випадків. В першому з них кожне відношення в ряді (3), починаючи з другого, буде, очевидячки, меньше одиниці, бо

$$1 \geqslant \frac{\mathcal{P}_{1,n}}{\mathcal{P}_{0,n}} > \frac{\mathcal{P}_{2,n}}{\mathcal{P}_{1,n}} > ---- > \frac{\mathcal{P}_{n-1,n}}{\mathcal{P}_{n-2,n}} > \frac{\mathcal{P}_{n,n}}{\mathcal{P}_{n-1,n}} \,.$$

Звідси заключуємо, що ряд імовірностей (I) буде рядом спадаючих чисел, при чому два перших його члени можуть бути и однакові.

$$\mathcal{P}_{0,n} \geqslant \mathcal{P}_{1,n} > \mathcal{P}_{2,n} > -------- > \mathcal{P}_{n-1,n} > \mathcal{P}_{n,n} \,.$$

Ясно, що найбільшою в цьому випадкові буде: або імовірність $\mathcal{P}_{0,n}$, коли $\mathcal{P}_{0,n} > \mathcal{P}_{1,n}$, або крім $\mathcal{P}_{0,n}$ ще й $\mathcal{P}_{1,n}$, коли $\mathcal{P}_{0,n} = \mathcal{P}_{1,n}$. Нерівність

$$\frac{\mathcal{P}_{1,n}}{\mathcal{P}_{0,n}} \leqslant 1 \,,$$

як в цьому легко переконатися з рівности (2) при $m=0$, рівнозначна нерівності

$$n \cdot \frac{p}{q} \leqslant 1$$

Звідки

$$np \leqslant 1-p \;, \quad np+p < 1 \;, \quad n+1 \leqslant \frac{1}{p}$$

Таким чином можемо зробити слідуючий висновок: при

$$n+1 < \frac{1}{p}$$

найімовірніше число появлень події A при n незалежних дослідах буде 0 , а при

$$n+1=\frac{1}{p}$$

крім 0 ще й I.

В другому випадкові кожно відношення в ряді (3), кінчаючи передостаннім, буде більше одиниці, бо

$$\frac{\mathcal{P}_{1,n}}{\mathcal{P}_{0,n}}>\frac{\mathcal{P}_{2,n}}{\mathcal{P}_{1,n}}>------->\frac{\mathcal{P}_{n-1,n}}{\mathcal{P}_{n-2,n}}>\frac{\mathcal{P}_{n,n}}{\mathcal{P}_{n-1,n}}\geqslant 1$$

а тому ряд імовірностей (I) буде рядом зростаючих чисел, при чому два останніх його члени можуть бути й однакові

$$\mathcal{P}_{0,n}<\mathcal{P}_{1,n}<\mathcal{P}_{2,n}<-----<\mathcal{P}_{n-1,n}\leqslant\mathcal{P}_{n,n}\ .$$

Найбільшою буде: або ймовірність $\mathcal{P}_{n,n}$, коли маємо $\mathcal{P}_{n-1,n}<\mathcal{P}_{n,n}$, або крім $\mathcal{P}_{n,n}$ ще й $\mathcal{P}_{n-1,n}$, коли $\mathcal{P}_{n-1,n}=\mathcal{P}_{n,n}$

Нерівність

$$\frac{\mathcal{P}_{n,n}}{\mathcal{P}_{n-1,n}}\geqslant 1$$

як це видно з рівности (2) при $m=n$ - I, рівнозначна нерівности

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{p}{q}\geqslant 1$$

звідки

$$\frac{1-q}{nq}\geqslant 1\ ,\ 1-q\geqslant nq\quad і\quad n+1\leqslant\frac{1}{q}$$

Висновок буде в цьому випадкові, очевидно, такий : при

$$n+1<\frac{1}{q}$$

найімовірніше число появлень події A при n незалежних дослідах буде n , а при

$$n+1=\frac{1}{q}$$

крім n ще й n - I.

Нарешті звернемося до третього випадку як видно з нерівностей

$$\frac{\mathcal{P}_{1,n}}{\mathcal{P}_{0,n}} > 1 \quad і \quad \frac{\mathcal{P}_{n,n}}{\mathcal{P}_{n-1,n}} < 1 \qquad (4)$$

частина членів ряду (3), наприклад перших μ членів, буде більше одиниці, а друга частина $n-\mu$ членів, буде меньше одиниці, при чому μ-ий член, або (μ + I)-ий може бути рівний одиниці ; нехай буде :

$$\frac{\mathcal{P}_{1,n}}{\mathcal{P}_{0,n}} > \frac{\mathcal{P}_{2,n}}{\mathcal{P}_{1,n}} > \cdots > \frac{\mathcal{P}_{\mu,n}}{\mathcal{P}_{\mu-1,n}} > 1 \geqslant \frac{\mathcal{P}_{\mu+1,n}}{\mathcal{P}_{\mu,n}} > \cdots > \frac{\mathcal{P}_{n,n}}{\mathcal{P}_{n-1,n}}$$

Звідси безпосередньо находимо :

$$\mathcal{P}_{0,n} < \mathcal{P}_{1,n} < \cdots < \mathcal{P}_{\mu-1,n} < \mathcal{P}_{\mu,n} \geqslant \mathcal{P}_{\mu+1,n} > \cdots > \mathcal{P}_{n-1,n} > \mathcal{P}_{n,n}$$

Найбільшою ймовірністю буде, очевидячки, $\mathcal{P}_{\mu,n}$, але крім $\mathcal{P}_{\mu,n}$ може бути також ще й $\mathcal{P}_{\mu+1,n}$, коли $\mathcal{P}_{\mu,n} = \mathcal{P}_{\mu+1,n}$.

Нерівности (4) рівнозначні нерівностям

$$n+1 > \frac{1}{p} \quad і \quad n+1 > \frac{1}{q}$$

Таким чином при

$$n+1 > \frac{1}{p} \quad і \quad n+1 > \frac{1}{q}$$

найімовірніще число появлень події А при n незалежних дослідах буде μ, або μ і μ+I.

Щоби знайти цю найімовірнішу вартість μ числа появлень події А звернемося до нерівностей

$$\frac{\mathcal{P}_{\mu,n}}{\mathcal{P}_{\mu-1,n}} > 1 \quad і \quad \frac{\mathcal{P}_{\mu+1,n}}{\mathcal{P}_{\mu,n}} \leqslant 1$$

які рівнозначні, як це видно з рівности (2), відповідно при $m = \mu$-I і $m = \mu$, таким нерівностям

$$\frac{n-\mu+1}{\mu} \cdot \frac{p}{q} > 1 \quad і \quad \frac{n-\mu}{\mu+1} \cdot \frac{p}{q} \leqslant 1$$

Перша дає :

$$(n-\mu+1)p > \mu q \,, \quad (n+1)p > \mu \,, \quad np+p > \mu$$

Друга - :

$$(n-\mu)\cdot p \leqslant (\mu+1)q\,,\; np-\mu p \leqslant \mu q+q\,,\; np-q \leqslant \mu$$

Таким чином найімовірніша вартість μ числа m повинна задовольняти таким нерівностям :

$$np+p > \mu \geqslant np-q \qquad (5)$$

Крайні члени цих нерівностей відріжняються на одиницю, бо різниця між ними рівна $p+q$ =I. А тому, коли $np+p$ є дріб, то дробом також буде і $np-q$, а значить між числами $np+p$ і $np-q$ існує одне ціле число; для відшукування найімовірнішого числа появлень події А, яке по своїй суті мусить бути числом цілим, треба в цьому випадкові користуватися, очевидячки, нерівностями

$$np+p > \mu > np-q \quad ,$$

зокрема, коли здобуток np є число ціле, то ясно , що тоді буде

$$\mu = np$$

Коли ж $np+p$ є число ціле то буде теж цілим числом і $np-q$, а тому між ними не існує жадного цілого числа ; вартість μ знаходиться по формулі

$$\mu = np-q$$

але тоді, як ми знаємо, $P_{\mu,n} = P_{\mu+1,n}$, отже крім $\mu = np-q$ найімовірнішим числом появлень події А буде ще також і

$$\mu+1 = np+p \qquad ^{*)}$$

Розглянемо кілька прикладів :

Приклад I. Нехай $p=\frac{4}{7}$ і $n=5$. Тоді $q=\frac{3}{7}$ і нерівности (5) дають

$$3\tfrac{3}{7} > \mu > 2\tfrac{3}{7}\,,$$

---

*). Поданий спосіб відшукання найімовірнішого числа появлень події А вперше був вказаний Академіком А. Марковим .

звідки $\mu = 3$. Дійсно, розгортаючи біном $(4/7x+3/7)^5$ по Ньютону, знаходимо :

$$\left(\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}\right)^5=\left(\frac{4}{7}\right)^5x^5+5\left(\frac{4}{7}\right)^4\left(\frac{3}{7}\right)x^4+10\left(\frac{4}{7}\right)^3\left(\frac{3}{7}\right)^2x^3+10\left(\frac{4}{7}\right)^2\left(\frac{3}{7}\right)^3x^2+5\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)^4x+\left(\frac{3}{7}\right)^5$$

$$=\frac{1024}{16807}x^5+\frac{3840}{16807}x^4+\frac{5760}{16807}x^3+\frac{4320}{16807}x^2+\frac{1620}{16807}x+\frac{243}{16807}, \quad (6)$$

звідки: $\mathcal{P}_{5,5}=\frac{1024}{16807}$, $\mathcal{P}_{4,5}=\frac{3840}{16807}$, $\mathcal{P}_{3,5}=\frac{5760}{16807}$,

$$\mathcal{P}_{2,5}=\frac{4320}{16807}, \quad \mathcal{P}_{1,5}=\frac{1620}{16807}, \quad \mathcal{P}_{0,5}=\frac{243}{16807}$$

Найбільша ймовірність є $\mathcal{P}_{3,5}$.

Нехай тепер при тих самих p і q буде $n = 6$, нерівности (5) дають

$$4 > \mu \geqslant 3$$

отже найімовірнішими числами появлень події A будуть

$$\mu = 3 \quad і \quad \mu+1 = 4$$

Ті ж самі результати знаходимо безпосередньо, розкладаючи в ряд біном $(4/7x+3/7)^6$

$$\left(\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}\right)^6=\left(\frac{4}{7}\right)^6x^6+6\left(\frac{4}{7}\right)^5\left(\frac{3}{7}\right)x^5+15\left(\frac{4}{7}\right)^4\left(\frac{3}{7}\right)^2x^4+20\left(\frac{4}{7}\right)^3\left(\frac{3}{7}\right)^3x^3$$

$$+15\left(\frac{4}{7}\right)^2\left(\frac{3}{7}\right)^4x^2+6\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)^5x+\left(\frac{3}{7}\right)^6=$$

$$=\frac{4096}{117649}x^6+\frac{18432}{117649}x^5+\frac{34560}{117649}x^4+\frac{34560}{117649}x^3+$$

$$\frac{19440}{117649}x^2+\frac{5832}{117649}x+\frac{729}{117649}, \quad (7)$$

звідки маємо, що найбільшою ймовірністю буде

$$\mathcal{P}_{3,6}=\mathcal{P}_{4,6}=\frac{34560}{117649}$$

а наймовірнішими числами появлень події А - числа 3 і 4.

Приклад 2. Нехай $p = \frac{3}{4}$, $n = 10$. Тоді $q = \frac{1}{4}$ і нерівности (5) дають :

$$8\tfrac{1}{4} > \mu > 7\tfrac{1}{4}$$

звідки $\mu = 8$. Цей же результат получимо, розгортаючи біном $(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4})^{10}$ по Ньютону

$$\left(\tfrac{3}{4}x+\tfrac{1}{4}\right)^{10} = \left(\tfrac{3}{4}\right)^{10}x^{10} + \left(\tfrac{3}{4}\right)^{9}\left(\tfrac{1}{4}\right)\cdot 10\, x^{9} + 45\left(\tfrac{3}{4}\right)^{8}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{2}x^{8} +$$

$$+120\left(\tfrac{3}{4}\right)^{7}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{3}x^{7} + 210\left(\tfrac{3}{4}\right)^{6}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{4}x^{6} + 252\left(\tfrac{3}{4}\right)^{5}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{5}x^{5} + 210\left(\tfrac{3}{4}\right)^{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{6}x^{4}$$

$$+120\left(\tfrac{3}{4}\right)^{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{7}x^{3} + 45\left(\tfrac{3}{4}\right)^{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{8}x^{2} + 10\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)^{9}x + \left(\tfrac{1}{4}\right)^{10} =$$

$$= \frac{59049}{1048576}x^{10} + \frac{116830}{1048576}x^{9} + \frac{295245}{1048576}x^{8} + \frac{262440}{1048576}x^{7} +$$

$$+ \frac{153090}{1048576}x^{6} + \frac{61236}{1048576}x^{5} + \frac{17010}{1048576}x^{4} + \frac{3240}{1048576}x^{3} +$$

$$+ \frac{405}{1048576}x^{2} + \frac{30}{1048576}x + \frac{1}{1048576} \qquad (8).$$

звідки маємо, що найбільшою імовірністю є

$$\mathcal{P}_{8,10} = \frac{295245}{1048576},$$

їй відповідає найімовірніше число 8 появлень події при 10 дослідах.

Нехай тепер буде $n = 11$, а p і q залишаються ті самі; нерівности (5) дають

$$9 \geqslant \mu \geqslant 8,$$

звідки найімовірнішим числом появлень події з імовірністю $\frac{3}{4}$ при 11 дослідах буде

$$\mu = 8 \text{ і } \mu+1 = 9$$

Ці ж самі результати дає і розгорнення бінома $(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4})^{11}$ по Ньютону. Дійсно :

$$\left(\tfrac{3}{4}x+\tfrac{1}{4}\right)^{11}=\left(\tfrac{3}{4}\right)^{11}x^{11}+11\left(\tfrac{3}{4}\right)^{10}\left(\tfrac{1}{4}\right)x^{10}+55\left(\tfrac{3}{4}\right)^{9}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{2}x^{9}+165\left(\tfrac{3}{4}\right)^{8}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{3}x^{8}+$$

$$+330\left(\tfrac{3}{4}\right)^{7}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{4}x^{7}+462\left(\tfrac{3}{4}\right)^{6}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{5}x^{6}+462\left(\tfrac{3}{4}\right)^{5}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{6}x^{5}+330\left(\tfrac{3}{4}\right)^{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{7}x^{4}$$

$$+165\left(\tfrac{3}{4}\right)^{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{8}x^{3}+55\left(\tfrac{3}{4}\right)^{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{9}x^{2}+11\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)^{10}x+\left(\tfrac{1}{4}\right)^{11}=$$

$$=\frac{177147}{4194304}x^{11}+\frac{649539}{4194304}x^{10}+\frac{1082565}{4194304}x^{9}+\frac{1082565}{4194304}x^{8}+$$

$$+\frac{721710}{4194304}x^{7}+\frac{336798}{4194304}x^{6}+\frac{112266}{4194304}x^{5}+\frac{26730}{4194304}x^{4}+ \qquad (9).$$

$$+\frac{4455}{4194304}x^{3}+\frac{495}{4194304}x^{2}+\frac{33}{4194304}x+\frac{1}{4194304},$$

звідки маємо, що найбільшими ймовірностями будуть

$$\mathcal{P}_{8,11}=\mathcal{P}_{9,11}=\frac{1082565}{4194304},$$

а їм відповідають найімовірніші числа 9 і 8 появ - лень події при 11 дослідах.

Зауважуємо, що в рядах, які стоять в правих частинах рівностей (6),(7),(8) і (9), сочинники при степенях x зі збільшенням n зменшуються ; це цілком зрозуміло, бо суми їх мусять завше рівнятися одиниці, тоді як число їх, очевидячки, росте зі збільшенням n.

§ 5. Найімовірніша фреквенція події А. Границя найбільшої ймовірности $\mathcal{P}_{\mu,n}$, коли число n необмежено росте. Наближена вартість імовірности $\mathcal{P}_{\mu,n}$.

Відношення числа появлень події А до числа всіх дослідів, себто дріб

$$\frac{m}{n}$$

зуть фреквенцією, або релятивною частотою події А, відношення ж

$$\frac{\mu}{n}$$

називають відповідно найімовірнішою фреквенцією події А

Найімовірніша фреквенція мусить задовольняти, очевидячки, нерівностям

$$p+\frac{p}{n} > \frac{\mu}{n} \geq p-\frac{q}{n} \tag{I}$$

які слідують безпосередньо з нерівностей (5) попереднього параграфу.

Припустимо тепер, що число n змінне і необмежено росте. Очевидячки, що тоді змінний буде також і число μ, бо кожній вартости n відповідає своя вартість μ. Знайдемо границю, до якої стремить відношення

$$\frac{\mu}{n}$$

коли n безмежно росте. Тому що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p}{n} = 0 \quad і \quad \lim_{n\to\infty} \frac{q}{n} = 0,$$

то получаємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu}{n} = p, \tag{2}$$

себто границя найімовірнішої фреквенції події А, коли число всіх дослідів необмежено росте, рівняється ймовірности події А при кожному досліді. Ріжниця крайніх членів в нерівностях (I) рівна $\frac{1}{n}$, тому написавши

$$\frac{\mu}{n} = p, \tag{3}$$

ми зробимо помилку меньшу $\frac{1}{n}$. При n досить великому ця помилка буде, очевидячки, досить малою.

Наближена рівність (3) дає нам наближену рівність

$$\mu = np \tag{4}$$

з докладністю до одиниці.

Число $n-\mu$ буде, очевидячки, найімовірніше число непоявлень події А при n незалежних дослідах. Ясно, що

$$n-\mu = n-np = n(1-p) = nq \qquad (5)$$

з докладністю теж до одиниці.

Звідси відношення найімовірнішого числа появлень події A до найімовірнішого числа її непоявлень при n незалежних дослідах визначиться такою наближеною рівністю

$$\frac{\mu}{n-\mu} = \frac{np}{nq} = \frac{p}{q} \qquad (6)$$

Одержаний нами результат однак немає такої цінности як це здавалося б на перший погляд. Він, як каже А. Марков, " не може служити, окремо взятий, підставою для серьозних висновків про те, чого треба сподіватися при многократному повторенню дослідів ". Не треба забувати, що висновок наш відноситься лише до найімовірнішої фреквенці події A, і було би помилкою на основі рівностей (2) і (3) робити заключення, що при зростаючому необмежено числі дослідів фреквенція взагалі події A буде теж рівнятися ймовірности p; найімовірніше число появлень події A не можна ідентифікувати з числом появлень події A взагалі, бо можна показати, що ймовірність, що число появлень події A точно рівнятиметься своїй найімовірнішій вартости μ або $\mu+1$, себто ймовірність

$$\mathcal{P}_{\mu,n} \text{ або } \mathcal{P}_{\mu+1,n}$$

має границею нуль, коли число дослідів необмежено росте.

Для доказу цієї теореми візьмемо, наприклад найбільшу ймовірність

$$\mathcal{P}_{\mu,n}$$

Її границя при $n=\infty$ на основі формули (I) §3-го напишеться так

$$\lim_{n=\infty} \mathcal{P}_{\mu,n} = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{n!}{\mu!(n-\mu)!}p^{\mu}q^{n-\mu}\right\}$$

Приймаючи на увагу, що величина μ ,як це видно з нерівностей

$$np+p > \mu \geqslant np-q$$

стремить до безмежности разом з n , пишемо на основі формули Стірлінга (див. Додаток 2-ий) такі рівности :

$$\lim_{n\to\infty}\{n!\} = \lim_{n\to\infty}\{e^{-n}n^{n}\sqrt{2\pi n}\}, \quad \lim_{n\to\infty}\{\mu!\} = \lim_{n\to\infty}\{e^{-\mu}\mu^{\mu}\sqrt{2\pi\mu}\},$$

$$\lim_{n\to\infty}\{(n-\mu)!\} = \lim_{n\to\infty}\{e^{-(n-\mu)}(n-\mu)^{n-\mu}\sqrt{2\pi(n-\mu)}\}$$

На основі цих рівностей, користуючися відомими теоремами з теорії границь, можна представити

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{P}_{\mu,n}$$

в такий формі:

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{P}_{\mu,n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{e^{-n}n^{n}\sqrt{2\pi n}\,p^{\mu}q^{n-\mu}}{e^{-\mu}\mu^{\mu}\sqrt{2\pi\mu}\,e^{-(n-\mu)}(n-\mu)^{n-\mu}\sqrt{2\pi(n-\mu)}}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^{n}\sqrt{n}\,p^{\mu}q^{n-\mu}}{\mu^{\mu}\sqrt{\mu}(n-\mu)^{n-\mu}\sqrt{2\pi(n-\mu)}}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{p^{\mu}q^{n-\mu}}{\left(\frac{\mu}{n}\right)^{\mu}\sqrt{\frac{\mu}{n}}\left(\frac{n-\mu}{n}\right)^{n-\mu}\sqrt{2\pi\frac{n-\mu}{n}}\sqrt{n}}\right\}.$$

Заміняючи під знаком $\lim$ відношення $\frac{\mu}{n}$ і $\frac{n-\mu}{n}$ на основі рівности $\lim_{n\to\infty}\frac{\mu}{n} = p$ і рівности $\lim_{n\to\infty}\frac{n-\mu}{n} = q$, що слідує безпосередньо з першої, будемо остаточно мати :

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{P}_{\mu,n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{p^{\mu}q^{n-\mu}}{p^{\mu}\sqrt{p}\,q^{n-\mu}\sqrt{2\pi q}\sqrt{n}}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\right\} = 0,$$

що і доводить нашу теорему

При досить великих вартостях n (практично вже при $n \geqslant 10$, як що p не дуже близьке нулю або одиниці) можна розглядати вираз

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}},$$

як наближену вартість найбільшої ймовірности $\mathcal{P}_{\mu,n}$

Щоби показати, що наближена рівність

$$\mathcal{P}_{\mu,n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \qquad (9$$

вже при невеликих порівнюючи вартостях n дає добре наближення, примінимо її до обчислення найбільної ймовірности в прикладах попереднього параграфу і порівняємо получений результат з точною вартістю най більшої ймовірности обчисленою по формулі

$$\mathcal{P}_{\mu,n}=\frac{n!}{\mu!(n-\mu)!}p^{\mu}q^{n-\mu}.$$

Для $n=10$, при $p=\frac{3}{4}$ і $q=\frac{1}{4}$ маємо:

точна вартість $\mathcal{P}_{\mu,n}=0{,}2815$

наближ. " $\mathcal{P}_{\mu,n}=0{,}2913$,

для $n=11$ при тих самих p і q -

точна вартість $\mathcal{P}_{\mu,n}=0{,}2581$

наближ. " $\mathcal{P}_{\mu,n}=0{,}2777$

Щоби мати уявлення про наближення, яке дає формула (7) при великих вартостях n, звернемося до прикладу, поданого Чубером.*):

для $n=1200$, при $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{1}{3}$ знаходимо $\mu=800$ і далі

точна вартість $\mathcal{P}_0=\frac{1200!\,2^{800}}{800!\,400!\,3^{1200}}=0{,}024424$

наближ. " $\mathcal{P}_0=\frac{3}{\sqrt{4800\pi}}=0{,}024430$

§ 6. Наближена вартість імовірности $\mathcal{P}_{m,n}$.

Щоби встановити формулу, яка б давала нам при даних n, m, p і q наближену вартість імовірности

$$\mathcal{P}_{m,n}$$

будемо шукати вираз, якого границя була б однаковою з границею цієї ймовірности, коли число n всіх дослідів необмежено росте, і чисельну вартість якого при значних вартостях числа n було б не так тяжко обчислити.

Введемо замісць змінного числа m нову змінну величину h по формулі

---

*) E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung I. 1908. ст. 115.

$$m = np + h \tag{1}$$

де h є додатне, або відємне раціональне число такого роду, що число m завше є число ціле; очевидячки, вартости числа h будуть в залежности від вартостей n і p числа цілі, або дробні; кожні дві сусідні вартости h так само, як і сусідні вартости числа m, ріжняться між собою на одиницю. Як що будемо розглядати здобуток np, себто наближену вартість числа m, як "нормальну" вартість числа появлень події A, то всяку иншу його вартість можна визначити ріжницею між нею і числом np. Ясно, що ця ріжниця є ніщо инше, як нова змінна h, визначена рівністю

$$h = m - np \tag{2}$$

Її називають відхиленням, або абсолютним відхиленням числа появлень події A від нормальної вартости np. Кожній вартости числа m відповідає своє відхилення h і навпаки. Всі вартости числа h, очевидячки, повинні задовольняти нерівностям

$$-np < h < n - np = nq \tag{3}$$

На змінну h накладемо одне обмеження, а саме припустимо, що вона росте необмежено разом з числом n, причому порядок величини h нехай буде однаковий з порядком $\sqrt{n}$, так що відношення

$$\frac{h}{\sqrt{n}}$$

буде мати скінчену границю при $n = \infty$, а дріб

$$\frac{h}{n}$$

при досить великому n буде величиною безмежно малою.

Замітимо ще, що з рівности (1) слідує рівність

$$n - m = nq - h \tag{4}$$

Після цих вступних зауважень приступимо до відшукання потрібного нам виразу, границя якого б при $n = \infty$ була однакова з границею ймовірности $\mathcal{P}_{m,n}$. По перше підставимо у вираз цієї останньої замісць m і $n-m$ їх вирази (1) і (4) через нову змінну h, получимо

$$\mathcal{P}_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m} = \frac{n!}{(np+h)!(nq-h)!}p^{np+h}q^{np-h}$$

Переходячи до границі при $n\to\infty$ замінимо

$$\lim_{n=\infty}(n!)\ ,\ \lim_{n=\infty}[(np+h)!]\ ,\ \lim_{n=\infty}[(nq-h)!]$$

на основі взору Стірлінга відповідно на

$$\lim_{n=\infty}(e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}),\ \lim_{n=\infty}[e^{-np-h}(np+h)^{np+h+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}],\ \lim_{n=\infty}[e^{-nq+h}(nq-h)^{nq-h+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}]$$

Тоді будемо мати :

$$\lim_{n=\infty}\mathcal{P}_{m,n} = \lim_{n=\infty}\frac{e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\,p^{np+h}q^{nq-h}}{e^{-np-h}(np+h)^{np+h+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\,e^{-nq+h}(nq-h)^{nq-h+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}p^{np+h}q^{nq-h}}{\sqrt{2\pi}(np)^{np+h+\frac{1}{2}}(nq)^{nq-h+\frac{1}{2}}(1+\frac{h}{np})^{np+h+\frac{1}{2}}(1-\frac{h}{nq})^{nq-h+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}p^{np+h}q^{nq-h}}{\sqrt{2\pi}\,n^{n+1}p^{np+h+\frac{1}{2}}q^{nq-h+\frac{1}{2}}(1+\frac{h}{np})^{np+h+\frac{1}{2}}(1-\frac{h}{nq})^{nq-h+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot\lim_{n=\infty}\frac{1}{(1+\frac{h}{np})^{np+h+\frac{1}{2}}(1-\frac{h}{nq})^{nq-h+\frac{1}{2}}}$$

Означимо :

$$H = (1+\frac{h}{np})^{np+h+\frac{1}{2}}\cdot(1-\frac{h}{nq})^{nq-h+\frac{1}{2}}$$

Тоді наша рівність перепишеться так

$$\lim_{n=\infty}\mathcal{P}_{m,n} = \lim_{n=\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot\lim_{n=\infty}\frac{1}{H} \qquad (6)$$

Сочинник -

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{H}$$

можна представити в иншій більш зручній формі. Для цього будемо льоґаритмувати обидві частини рівности (5). Получимо

$$\lg H = \left(np+h+\tfrac{1}{2}\right)\lg\left(1+\frac{h}{np}\right)+\left(nq-h+\tfrac{1}{2}\right)\lg\left(1-\frac{h}{nq}\right).$$

Відношення $\frac{h}{np}$ і $\frac{h}{nq}$, коли n необмежено росте, стремлять до границі нуль, тому можна завше взяти n остільки великим, щоби було

$$\frac{h}{np}<1 \quad і \quad \frac{h}{nq}<1$$

Тоді $\lg\left(1+\frac{h}{np}\right)$ і $\lg\left(1-\frac{h}{nq}\right)$ дасться розгорнути в в безмежні ряди *) і попередня рівність прийме такий вигляд :

$$\lg H = \left(np+h+\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{h}{np}-\frac{h^2}{2n^2p^2}+\cdots\right)-\left(nq-h+\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{h}{nq}+\frac{h^2}{2n^2q^2}+\cdots\right)$$

$$=h+\frac{h^2}{np}+\frac{h}{2np}-\frac{h^2}{2np}-\frac{h^3}{2n^2p^2}-\cdots-h+\frac{h^2}{nq}-\frac{h}{2nq}-\frac{h^2}{2nq}+\frac{h^3}{2n^2q^2}-\cdots$$

$$=\frac{h^2}{2np}+\frac{h^2}{2nq}+\frac{h}{2np}-\frac{h}{2nq}-\frac{h^3}{2n^2p^2}+\frac{h^3}{2n^2q^2}-\cdots,$$

або остаточно

$$\lg H=\frac{h^2}{2npq}+\frac{h(q-p)}{2npq}-\frac{h^3(q-p)}{2n^2p^2q^2}-\cdots,$$

---

*) Як відомо

$$\lg(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots$$

$$\lg(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\cdots$$

для всякого z, що задовольняє нерівностям $-1<z\leqslant 1$

Праву частину цієї рівности можна представити в такому виді :

$$\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{2pq} + \left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{q-p}{2pq} - \left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{q-p}{2p^2q^2} + \cdots\cdots ;$$

всі члени цього ряду, починаючи з другого, при досить великому n, згідно з нашею умовою, будуть безмежно малі (наприклад, члени другий і третій будуть безмежно малі I-го порядку, як що умовимося вважати $\frac{1}{\sqrt{n}}$ безмежно малою I-го порядку), перший же член при $n=\infty$ має границею якесь то скінчене число Беручи це на увагу, получаємо :

$$\lim_{n=\infty}\left\{\lg H - \frac{h^2}{2npq}\right\} = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{h}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{q-p}{2pq} - \left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^3\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{q-p}{2p^2q^2} + \cdots\right\} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty}\left\{\lg H - \lg e^{\frac{h^2}{2npq}}\right\} = \lim_{n=\infty}\lg\frac{H}{e^{\frac{h^2}{2npq}}} = \lg.\lim_{n=\infty}\frac{H}{e^{\frac{h^2}{2npq}}} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{H}{e^{\frac{h^2}{2npq}}} = 1, \quad \lim_{n=\infty} H = \lim_{n=\infty}. e^{\frac{h^2}{2npq}},$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{H} = \lim_{n=\infty}. e^{-\frac{h^2}{2npq}} \tag{7}$$

Остання рівність дозволяє надати $\lim\limits_{n=\infty} P_{m,n}$ таку форму

$$\lim_{n=\infty} P_{m,n} = \lim_{n=\infty}.\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot e^{-\frac{h^2}{2npq}}\right\} \tag{8}$$

Сочинник $e^{-\frac{h^2}{2npq}}$, згідно з нащим припущенням відносно h, має при $n=\infty$ якусь то скінчену границю, таким чином

$$\lim_{n=\infty}. P_{m,n} = 0$$

коли n необмежено росте. (В справедливости цього висвому можна переконатися також і безпосередньо. Справді ми довели, що границя найбільшої ймовірности $\mathcal{P}_{\mu,n}$, коли n необмежено росте, є нуль, звідки видно, що границя всякої ймовірности $\mathcal{P}_{m,n}$ тим скорше мусить рівнятися нулю при $n=\infty$.)

Для досить великих вартостей числа можна розглядати вираз

$$\frac{e^{-\frac{h^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}},$$

як наближену вартість імовірности $\mathcal{P}_{m,n}$ при даних n, h, p і q. При p не дуже близькому до нуля або одиниці наближена рівність

$$\mathcal{P}_{m,n}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot e^{-\frac{h^2}{2npq}} \qquad (9)$$

дає добре наближення вже для не дуже великих вартостей числа h.

Ми знаємо, що кожній вартості числа появлень події А, означеного нами m, відповідає одна якась то вартість відхилення h, тому ймовірність, що число появлень події А при n дослідах буде рівнятися m, є, другими словами, імовірність, що відхилення рівнятиметься h; на цій підставі будемо для зручности уживати поруч із символом $\mathcal{P}_{m,n}$ символ $\mathcal{P}_h$ для означення одних і тих же ймовірностей; для означення найбільшої ймовірности буде, очевидячки, тоді служити символ $\mathcal{P}_0$, бо при $h=0$ вираз, що стоїть у правій частині наближеної рівности (9), осягає свого максимума –

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$$

Наближена формула (9) перепишеться тоді так

$$\mathcal{P}_h=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{h^2}{2npq}} \qquad (10)$$

функція, що стоїть в правій частині цієї наближе -

ної рівности, париста, тому для відхилень однакових по абсолютній величині, але ріжних по знаку, ця формула дає однакові наближені вартости ймовірностей $\mathcal{P}_h$ і $\mathcal{P}_{-h}$. Точні ж їх вартости, взагалі кажучи, не є симетричні відносно $\mathcal{P}_{np}$ і будуть такими лише у випадку, коли $p = q = \frac{1}{2}$.

Наближена рівність (9), або, що те саме, (10) була виведена нами в припущенню, що відхилення h є порядку однакового з порядком $\sqrt{n}$, себто є мале у відношенню до n. Однак на практиці ця формула звичайно поширюється на всякі вартости h, таке поширення не викликає в чисельному результаті жадної помітної помилки. Це тому, що функція $e^{-\frac{h^2}{2npq}}$ спадає, коли h росте, з такою швидкістю, що її чисельна вартість майже не впливає на загальний результат, себто на чисельну вартість правої частини формули (10); ріжниця між точними й наближеними вартостями ймовірности $\mathcal{P}_h$ для значних відхилень h так надзвичайно мала, що в питаннях практичного характеру її звичайно не приймають на увагу.

Щоби ілюструвати, як швидко спадає $\mathcal{P}_h$ зі зростом h, розглянемо такий приклад: для $n = 1600$, $p = \frac{2}{5}$, $q = \frac{3}{5}$ наближена формула (10) дає:

$$\mathcal{P}_0 = \frac{1}{\sqrt{768\pi}} = 0,020359$$

$$\mathcal{P}_{40} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{25}{12}} = 0,0025350$$

$$\mathcal{P}_{80} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{25}{3}} = 0,0000048936$$

$$\mathcal{P}_{120} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{75}{4}} = 0,0000000024147,$$

дальше спадання йде так швидко, що вже для $\mathcal{P}_{400}$ першою значучою цифрою буде 93-й десятковий знак.

§ 7. Теорема Ляпляса

Коли означимо :

n число незалежних дослідів,

p ймовірність події А при кожному досліді,

$q = 1 - p$ ймовірність протилежної події

m число появлень події А при дослідах,

t_1 і t_2 довільні числа, при чому $t_2 > t_1$,

то теорему Ляпляса можна висловити так: як що число n незалежних дослідів необмежено росте, а числа p, t_1 і t_2 не міняються, то ймовірність здійснення нерівностей

$$np + t_1\sqrt{2npq} < m < np + t_2\sqrt{2npq}$$

наближається до границі

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2}dx \; .$$

Імовірність здійснення нерівностей

$$np + t_1\sqrt{2npq} < m < np + t_2\sqrt{2npq} \qquad (1)$$

є ніщо инче, як імовірність, що число появлень події А, або частота події А лежить поміж числами

$$np + t_1\sqrt{2npq} \quad \text{і} \quad np + t_2\sqrt{2npq}$$

Нехай m_1 і m_2 будуть відповідно найменше й найбільше цілі числа на перемежку

від $np + t_1\sqrt{2npq}$ до $np + t_2\sqrt{2npq}$ –

тоді здійснення нерівностей (1) може наступити лише у випадку, коли число появлень події А буде :

або m_1, або $m_1 + 1$, або $m_1 + 2$, ..., або $m_2 - 2$, або $m_2 - 1$, або m_2.

Тому ймовірність нерівностей (1), яку ми означимо символом $\mathcal{P}$, знайдеться на основі теореми додазання ймовірностей всіх можливих вартостей числа m, задовольняючих нерівностям (1) :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{m_1,n} + \mathcal{P}_{m_1+1,n} + \text{------} + \mathcal{P}_{m_2-1,n} + \mathcal{P}_{m_2,n} = \sum_{m=m_1}^{m=m_2} \mathcal{P}_{m,n} .$$

Коли число n незалежних дослідів буде необмежено рости, то при переході до границі при $n \to \infty$ будемо очевидячки, мати таку рівність

$$\lim_{n=\infty} \mathcal{P} = \lim_{n=\infty} \sum_{m=m_1}^{m=m_2} \mathcal{P}_{m,n} = \sum_{m=m_1}^{m=m_2} \lim_{n=\infty} \mathcal{P}_{m,n} \qquad (2)$$

В попередньому параграфі ми вже знайшли, що

$$\lim_{n=\infty} \mathcal{P}_{m,n} = \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{h^2}{2npq}} \right\} \qquad (3)$$

Змінна h в даному випадкові, очевидно, заключена в межах

$$h_1 < h < h_2$$

як що означимо

$$h_1 = t_1 \sqrt{2npq} \quad i \quad h_2 = t_2 \sqrt{2npq}$$

Але перше, ніж скористатися рівністю (3), вводемо замісць змінної h нову змінну x , задовольняючу слідуючим умовам :

$$h = x\sqrt{2npq} \qquad (4)$$

$$t_1 < x < t_2$$

Величина x називається "зведене відхилення" , як це видно з рівности (4), вона може приймати вартости, як раціональні, так і ірраціональні. Корінь же

$\sqrt{2npq}$ звуть "модулем абсолютної частоти" події A, або "одиницею відхилення" . Зведене відхилення x показує, очевидно, кільки одиниць відхилення містить в собі абсолютне відхилення h.

Змінна h при переході від одної своєї вартости до другої, безпосередньо за нею слідуючої, набуває прирощення завше рівне одиниці, відповідне прирощення змінної x означимо Δx. Тоді будуть справедливі такі дві рівности

$$k+1 = (x+\Delta x)\sqrt{2npq}$$

$$k-1 = (x-\Delta x)\sqrt{2npq}$$

віднявши другу рівність від першої, одержимо

$$2 = 2\Delta x\sqrt{2npq}$$

або

$$\frac{1}{\sqrt{2npq}} = \Delta x \qquad (5)$$

Звідси знаходимо, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\pi}}$$

З другої ж сторони рівність (4) дає :

$$\frac{k^2}{2npq} = x^2$$

Зробивши на основі двох останніх рівностей заміну в правій частині рівности (3), получимо

$$\lim_{n=\infty} \mathcal{P}_{m,n} = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{\Delta x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\right\}$$

Подставивши знайдений для $\lim\limits_{n=\infty} \mathcal{P}_{m,n}$ вираз у праву частину рівности (2), будемо мати

$$\lim_{n=\infty} \mathcal{P} = \sum_{m=m_1}^{m=m_2} \lim_{n=\infty} \mathcal{P}_{m,n} = \sum_{x=x_1}^{x=x_2} \lim_{n=\infty}\left\{\frac{\Delta x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{n=\infty} \sum_{x=x_1}^{x=x_2} e^{-x^2}\Delta x$$

де x_1 і x_2 означають ті вартости змінної x, які відповідають вартостям m_1 і m_2 числа m.

Зі зростанням n до безмежности прирощення Δx, як це видно з формули (5), стремить до нуля:

$$\lim_{n=\infty} \Delta x = 0 \qquad (6)$$

Таким чином при досить великому n змінну x, що може приймати вартости, як раціональні, так і ірраціональні, можна розглядати, як змінну тяглу. Крім того, коли ми напишемо для ясности два взаімно відповідаючи ряди послідовних вартостей чисел m і x:-

$$m_1-1,\ np+t_1\sqrt{2npq},\ m_1,\ m_1+1,\ \text{-------},\ m_2-1,\ m_2,\ np+t_2\sqrt{2npq},\ m_2+1$$

$$x_1-\Delta x,\quad t_1\quad,\ x_1,\ x_1+\Delta x,\ \text{-------},\ x_2-\Delta x,\ x_2,\quad t_2\quad,\ x_2+\Delta x$$

то безпосередньо заключуємо, що завше буде

$$x_1-t_1<\Delta x \quad i \quad t_2-x_2<\Delta x$$

звідки на основі (6) маємо

$$\lim.(x_1-t_1)=0 \quad i \quad \lim(t_2-x_2)=0\ ,$$

або

$$\lim_{n=\infty} x_1=t_1 \quad i \quad \lim_{n=\infty} x_2=t_2$$

Останні ж рівности разом із (6) дозволяють на основі відомих властивостей означених інтегралів заключити, що при зростанню n до безмежности сума

$$\sum_{x=x_1}^{x=x_2} e^{-x^2}\Delta x\ ,$$

рівная в роскритому виді

$$\left[e^{-x_1^2}+e^{-(x_1+\Delta x)^2}+e^{-(x_1+2\Delta x)^2}+\text{----}+e^{-(x_2-\Delta x)^2}+e^{-x_2^2}\right]\Delta x\ ,$$

стремить до границі

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{+x^2}dx$$

а значить

$$\lim_{n=\infty}\mathcal{P}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2}dx \qquad (7)$$

Таким чином теорема Лапляса доведена.

Формула (7), виведена нами в припущенню, що число n необмежено росте, цікава тим, що не залежить від вартостей числа n.

Нерівностям (I) відповідають нерівности

$$t_1 < x < t_2$$

тому говорять також, що вираз

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2}dx$$

дає границю при $n = \infty$ ймовірности, що зведене відхилення x має вартість заключену між t_1 і t_2. Коли приймемо границю ймовірности за її наближену вартість, то получимо для даних t_1 і t_2 наближену формулу

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2}dx \qquad (8)$$

коли ж дані n, h_1, h_2, p і q, то спочатку треба обчислити t_1 і t_2 по формулам

$$t_1 = \frac{h_1}{\sqrt{2npq}} \quad і \quad t_2 = \frac{h_2}{\sqrt{2npq}}$$

Зокрема, при

$$t_1 = -t,\ t_2 = t$$

будемо мати

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2}dx = \int_{-t}^{t} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{t} e^{-x^2}dx$$

як для паристої підінтегральної функції, і наближена рівність (8) заміниться наближеною рівністю

$$\mathcal{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t} e^{-x^2}dx \qquad (9)$$

Нерівности ж (1) в цьому випадкові заміняться, очевидячки, нерівностями

$$np - t\sqrt{2npq} < m < np + t\sqrt{2npq}$$

Як що верхню межу t в інтегралі

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx \tag{10}$$

будемо необмежено збільшувати, то, пригадуючи з курсу інтегрального числення, що

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

получимо

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = 1$$

Цей результат вимагає деяких пояснень. Справді, зведене відхилення x може приймати лише вартости, заключені в межах

$$-\sqrt{\frac{np}{2q}} < x < \sqrt{\frac{nq}{2p}}$$

– ці нерівности слідують безпосередньо з нерівностей (3) попереднього параграфу, – так що поширення перемежку інтеграції аж до безмежности можливе тільки тоді, коли число n необмежено росте

Коли ми будемо розуміти під виразом (10) границю ймовірности при $n=\infty$, то, очевидно, що дії збільшення верхньої межі t до безмежности є цілком допустиме.

Коли ж під виразом (10) будемо розуміти наближену вартість ймовірности, нехай, при $n=n_0$, то всі можливі вартости x, очевидно, будуть знаходитися лише на перемежку

від $\sqrt{\frac{n_0 p}{2q}}$ до $\sqrt{\frac{n_0 q}{2p}}$,

тому в цьому випадкові поширення меж інтеграції до безмежности не було би управненим поза цим перемежком ймовірність точно рівна нулю, тоді як інтеграл дає додатне число.

Але тому, що вже при n не дуже великому функція e^{-x^2} спадає з надзвичайною швидкістю, коли x росте, приймаючи вартости порядку $\sqrt{n}$, то поширення інтеграції на перемежок $(-\infty, \infty)$ допускається на практиці і в цьому випадкові : в чисельному результаті воно не викликає жадної помітної помилки. Наприклад, при $n=100$, $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ верхня межа t інтеграції не може перевищувати

$$\sqrt{\frac{n}{2p}} = \sqrt{25} = 5$$

але вже

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{7,8} e^{-x^2}\,dx = 0,9999999999\ldots$$

так що помилка, яку ми зробимо, поширивши інтеграцію до безмежности, буде меньше 10^{-11}, отже зовсім практично непомітна.

§ 8. Геометрична інтерпретація.

Розглянемо криву, що визначається рівнанням

$$y = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$$

Вона має назву кривої ймовірностей. Крива ця вся лежить понад віссю x-ів і розположена симетрично відносно осі y-ів; коли x стремить до безмежности, як через додатні, так і через відємні вартости, то y наближається до нуля, отже, як додатний напрямок осі x-ів, так і відємний є асимптотами кривої (I). При $x=0$ будемо мати

$$\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}<0,$$

так що при $x=0$ крива має максімум, відповідна ордината буде

$$y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

чено, що крива ймовірностей має дві симетричних відносно осі ординат точки перегнуття; абсциси їх знайдемо, прирівнюючи нулю $\frac{d^2y}{dx^2}$ і розвязуючи получене рівнання відносно x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}(2x^2-1) = 0, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm 0,7071$$

Таким чином крива ймовірностей має приблизно такий вигляд (див. рис.2).

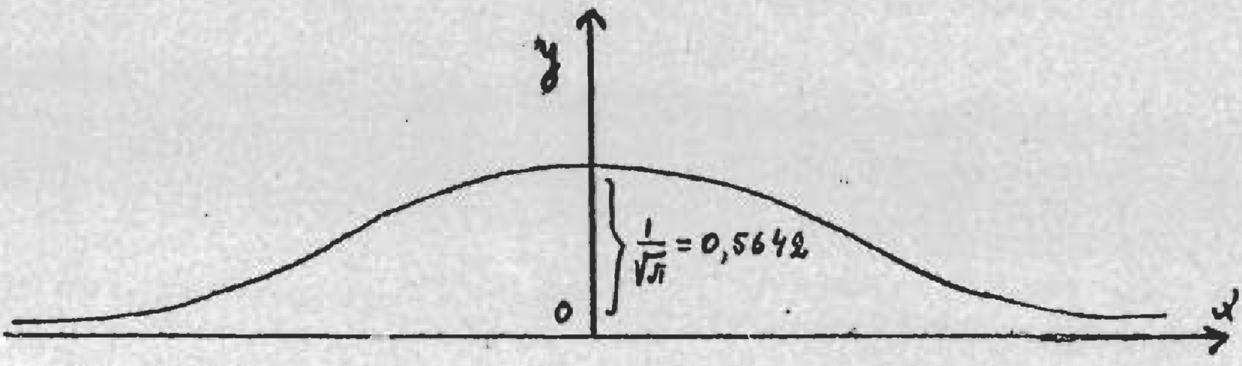

рис.2.

Можна скласти таблиці вартостей величини y для різних вартостей x .

Порівнюючи рівняння (I) з наближеною рівністю (I0) §6-го та пригадуючи, що x звязане з відхиленням h формулою (4) попереднього параграфа, знаходимо, що наближену рівність (I0) § 6-го можна переписати так :

$$\mathcal{P}_h \approx \frac{1}{\sqrt{2npq}} \cdot \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$$

або на основі (I) так :

$$\mathcal{P}_h = \frac{y}{\sqrt{2npq}} \qquad (2)$$

Щоби знайти з поміччю такої таблиці наближену вартість імовірности $\mathcal{P}_h$ для даних n , h і p , треба, очевидячки, виконати такі операції : обчислити числа

$$x = \frac{h}{\sqrt{2npq}} \qquad \sqrt{2npq}$$

потім узяти з таблиці вартість y ,відповідаючу знайденій вартости x ,і поділити її згідно з (2) на $\sqrt{2npq}$. Таким чином ордината кривої (I) більше -

повідних наближених вартостей $\mathcal{P}_h$ в $\sqrt{2npq}$ разів. Нарешті треба зауважити, що крива (I) надається для всяких n і p, аби n було досить велике. Можна було б, розуміється, збудувати криву, яка визначалася б рівнанням

$$\mathcal{P}_h = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{h^2}{2npq}}$$

відкладуючи на осі абсцис відхилення h, а на осі ординат відповідні наближені вартости ймовірностей $\mathcal{P}_h$. Ординати такої кривої давали б нам безпосередньо наближені вартости ймовірностей $\mathcal{P}_h$, однак ця крива була би придатною лише для даних n і p, а не для всяких, як крива (I) - для инчих вартостей n і p треба було би будувати нову криву.

Інтеграл, що стоїть в правій частині наближеної рівности (9) попереднього параграфа, представляє геометрично, очевидячки, площу обмежену луком кривої ймовірностей, вісю x-ів та ординатами точок кривої з абсцисами $-t$ і t. Ціла ж площа, обмежена кривою (I) і вісю x-ів, рівняється одиниці - це безпосередньо слідує з рівности

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = 1$$

З другої ж сторони ліва частина останньої рівности є ніщо инче, як границя суми ймовірностей всіх можливих відхилень h в межах від $-\infty$ до $+\infty$, і через це вже мусить рівнятися одиниці, так що в даному випадкові маємо приклад, коли висновки числення ймовірностей згідні цілковито з результатами чистого аналізу.

§ 9. Функція $\Phi(t)$.

Коли ми будемо дивитися на верхню межу означеного інтеграла у виразі

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx$$

як на число змінне, то цей інтеграл, а з ним і цілий цей вираз, буде, як це відомо з інтегрального числення, функцією верхньої межі t. Означимо цю функцію символом $\Phi(t)$. так що

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx \qquad (1)$$

Геометрично функція $\Phi(t)$, очевидячки, представляє площу заключену між луком кривої

$$y = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}},$$

вісю x-ів та двома ординатами точок цієї кривої що мають абсцисами t і t. Користуючися функцією $\Phi(t)$, можемо написати на основі наближеної рівности (9) § 7-го таку наближену рівність

$$\mathcal{P} = \Phi(t) \qquad (2)$$

яка дасть наближену вартість імовірности нерівностей

$$np - t\sqrt{2npq} < m < np + t\sqrt{2npq}$$

Так само можна визначити через функцію $\Phi(t)$ і наближену вартість імовірности нерівностей

$$np + t_1\sqrt{2npq} < m < np + t_2\sqrt{2npq}$$

Для цього пригадуючи деякі основні властивости означених інтегралів, перепишемо наближену рівність (8) § 7-го таким чином :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{t_1}^{0} e^{-x^2}dx + \int_0^{t_2} e^{-x^2}dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t_2} e^{-x^2}dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t_1} e^{-x^2}dx$$

Звідки вже безпосередньою заміною получимо наближену рівність

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\left\{\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\right\} \qquad (3)$$

функція $\Phi(t)$ відограє в численню ймовірностей і в статистиці дуже важливу ролю. Тому існують таблиці чисельних вартостей функції $\Phi(t)$, обчислені для послідовних вартостей t з великою точністю. Така таблиця, взята нами з книги де-Монтесю[x], додучена в кінці цього курсу.

Вартість функції $\Phi(t)$ для всякого t може бути обчислена з поміччю розгорнення підінтегральної функції e^{-x^2} в степенний ряд і почленного його інтегрування. Дійсно:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

помноживши обидві частини цієї рівности на dx та інтегруючи в межах від 0 до t, получимо

$$\int_0^t e^{-x^2} dx = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{1!3} + \frac{t^5}{2!5} - \frac{t^7}{3!7} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \cdots,$$

звідки маємо

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{t}{1} - \frac{t^3}{1!3} + \frac{t^5}{2!5} - \frac{t^7}{3!7} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)} \cdots\right] \qquad (4)$$

Остання рівність дає можливість для кожної даної вартости t обчислити з більшою, або меншою докладністю відповідні вартості $\Phi(t)$. Функція $\Phi(t)$ дуже швидко стремить до вартости одиниця, коли t росте (вже для $t=4,8$ $\Phi(t) = 0,99999999999$. Перебіг функції $\Phi(t)$ легко собі уяснити з такої скороченої таблички

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,0000000	1,50	0,9661052
0,30	0,3286267	2,00	0,9953223
0,70	0,6778010	3,00	0,9999779
0,10	0,8427008	4,00	0,99999998459

[x] R. de Montessus. Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités. Paris 1908. §50

Головні властивости функції $\Phi(t)$ такі :

1). при $t = 0$ функція $\Phi(t)$ рівна нулю :

$$\Phi(0) = 0 .$$

2). коли t зростає, вартости функції $\Phi(t)$ наближаються дуже швидко до границі рівній I :

$$\Phi(\infty) = 1$$

3). функція $\Phi(t)$ є функція непариста, cебто

$$\Phi(-t) = -\Phi(t)$$

дві перші властивости очевидні на основі формули (I), а третя на основі формули (4).

§ 10. Імовірне відхилення.

Нехай α буде така вартість відхилення h, що з однаковою підставою можна твердити як те, що відхилення h не вийде за межі перемежку $(-\alpha, \alpha)$ так і те, що h вийде поза цей перемежок. Другими словами ймовірність, що відхилення h заключене на перемежку $(-\alpha, \alpha)$ рівна $1/2$. Таблиця функції $\Phi(t)$ в цьому випадкові дає нам

$$\Phi(0,4769) = 1/2 .$$

Очевидячки, що

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2npq}} = 0,4769 ,$$

звідки

$$\alpha = 0,4769\sqrt{2npq}$$

Відхилення α з ймовірністю $1/2$ має назву "ймовірного відхилення".

§ II. Теорема Якова Бернуллі.

Знаменита теорема Я.Бернуллі відноситься до відхилень фреквенції події від її ймовірности. Фреквенцію події инакше звуть ще релятивною частотою події, а її відхилення від імовірности події називають звичайно релятивним відхиленням. Теорема Я.Бернуллі найважливіща теорема числення ймовірностей : вона являється основою ріжноманітних практичних приложень цієї науки. Знаходиться вона разом із своїм доказом, на відшукання котрого Бернуллі потратив 20 років життя, у IV частині відомої праці Я. Бернуллі *Ars conjectandi* , виданої уперше після авторової смерти його небожем Миколою Бернуллі в 1713 р. у м. Базелі .

Крім доказу самого Бернуллі, елементарного і разом з тим цілком точного, існує кілька доказів цієї теореми. Ми подамо тут доказ ізвязаний із теоремою Ляпляса.

Теорема Бернуллі.

Коли означимо :

n число незалежних дослідів,

p ймовірність якоїсь події A при кожному досліді і

m число появлень події A при n дослідах ,

то теорему Бернуллі можна висловити так : як що число n незалежних дослідів може необмежено рости , а ймовірність p для всіх дослідів однакова, то при досить значних вартостях числа n імовірність нерівностей

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < +\varepsilon$$

буде більше $1-\eta$, де ε і η довільні додатні числа.

Другими словами, при досить великому числі дослідів буде довільно близькою певности,себто одиниці, ймовірність,що фреквенція (релятивна частота) події A буде довільно мало відріжнятися від її ймовірности при кожному досліді зокрема.

Обравши цілком довільно два додатніх числа ε і η , означимо ймовірність нерівностей

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < +\varepsilon \qquad (1)$$

символом Q й покажемо,що завше можна підібрати таку вартість n, що буде

$$Q > 1-\eta$$

Імовірність Q є завше правильний дріб, тому додатне число η повинно бути меньше одиниці.

Згідно з теоремою Ляпляса ймовірність нерівностей

$$np - t\sqrt{2npq} < m < np + t\sqrt{2npq}.$$

а значить і рівнозначних з ними -

$$-t\sqrt{\frac{2pq}{n}} < \frac{m}{n} - p < t\sqrt{\frac{2pq}{n}}$$

стремить до границі

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx ,$$

коли число n необмежено росте, а число t лишається без зміни. Означивши цю ймовірність $\mathcal{P}$, будемо на цій основі мати

$$\lim_{n=\infty} \mathcal{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx .$$

Розібємо число η на два довільних додатніх доданки η' і η'', так що

$$\eta = \eta' + \eta''$$

де $\qquad \eta' > 0 \quad і \quad \eta'' > 0 ,$

і припустимо, що n_0 є остільки велика вартість числа n, що для всіх

$$n > n_0 \qquad (2)$$

буде справедлива нерівність

$$\left|\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx - \mathcal{P}\right| < \eta' \qquad (3)$$

Вище було вже показано, що, коли в інтегралі $\int_0^t e^{-x^2}dx$ будемо необмежено збільшувати верхню межу t, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = 1$$

Звідси ясно, що можна добрати остільки велику вартість t, що буде справедлива нерівність

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx = \eta'', \tag{4}$$

або

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx = 1-\eta'' \tag{5}$$

Повертаючись до нерівности (3), надамо числу t вартість, що при ній існує рівність (4). Тоді, зробивши заміну в лівій частині (3) на основі рівности (5), будемо мати

$$|1-\eta''-\mathcal{P}| < \eta', \tag{6}$$

звідки, памятаючи, що $\mathcal{P}$, η' і η'' числа додатні, получимо

$$\mathcal{P} > 1-\eta'-\eta'',$$

або

$$\mathcal{P} > 1-\eta \tag{7}$$

Таким чином ми довели, що при певній вартости t, встановленій на основі рівности (4), імовірність нерівностей

$$-t\sqrt{\frac{2pq}{n}} < \frac{m}{n}-p < t\sqrt{\frac{2pq}{n}} \tag{8}$$

для всіх $n>n_0$ буде задовольняти умові(7).

Зі збільшенням n межі останньої нерівности зменшуються, так що, очевидячки, можна добрати таку досить велику вартість n, щоби межі нерівностей (8) були заключені в межах нерівностей (1), другими словами, щоб існували нерівности

$$-\varepsilon < -t\sqrt{\frac{2pq}{n}} < \frac{m}{n}-p < t\sqrt{\frac{2pq}{n}} < \varepsilon\ ;$$

для цього треба, щоби вартість n задовольняла умові

$$\varepsilon^2 > \frac{2pqt^2}{n},$$

звідки

$$n > \frac{2pqt^2}{\varepsilon^2} \tag{9}$$

Коли ж межі нерівностей (8) з імовірністю $\mathcal{P}$ заключені в межах нерівностей (I) з імовірністю Q, то всі вартости m, задовольняючи нерівностям (8), задовольнятимуть і нерівностям (I), а тому ймовірність Q буде більше ймовірности $\mathcal{P}$:

$$Q > \mathcal{P},$$

звідки на основі (7) будемо мати

$$Q > 1-\eta$$

для всіх n, задовольняючих умовам

$$n > n_0 \quad і \quad n > \frac{2pqt^2}{\varepsilon^2}$$

Таким чином теорема Бернуллі доведена.

Примітка. Різницю

$$\frac{m}{n} - p$$

ми назвали релятивним відхиленням. Ясно, що

$$\frac{m}{n} - p = \frac{h}{n},$$

коли h означає абсолютне відхилення, або просто відхилення. Згідно з нашою умовою відхилення h є порядку однакового з порядком $\sqrt{n}$, отже релятивне відхилення для досить значних вартостей n буде величиною досить малою, порядок її малости буде, очевидячки, однаковий з порядком

$$\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Умови теореми Бернуллі полягають в незалежности дослідів і незмінности ймовірности p появлення події з кожним дослідом - це треба завжди мати на увазі при всіляких практичних примінюваннях цієї теореми. Не треба також переоцінювати теорему Бернуллі і робити з неї висновок, що при необмеженому зростанню числа дослідів френвенція події $\frac{m}{n}$ має границею ймовірність події p при кожному окремому досліді ; теорема Бернуллі твердить лише про те, що може бути, чого слід очікувати, але ніколи про те, що мусить бути, що напевне буде : яка б велика не була ймовірність Q нерівностей (I), ніколи не є виключена можливість, що ці нерівности не підтвердяться, бо й самі малоймовірні події все ж можливі. Дослідні перевірки, що їх на ріжні способи переводили, починаючи з Бюфона, ріжні вчені, дали вистарчаючи підтвердження теореми Бернуллі.

Сам Я.Бернуллі, як свідчить Е.Борель*), назвав свою теорему законом великих чисел ; часто її називають так і в наші часи, але звичайно цю назву відносять до теореми Пуасона, яка являється узагальненням теореми Бернуллі, або, навіть, до цілої сукупности її узагальнень.

§ 12. Середнє відхилення.

Припустимо, що ми переводимо s серій незалежних дослідів по n дослідів в кожній серії. З кожною серією зявиться певне відхилення h додатнє, або відємне. Але всяке відхилення, який би знак його не був, є певне відхилення числа появлень події від його нормальної вартости np ; будемо через це говорити про абсолютну вартість відхилення $|h|$.

Припустимо далі, що відхилення з абсолютною вартістю $|h_1|$ появилося в a_1 серіях, відхилення з абсолютною вартістю $|h_2|$ - в a_2 серіях і т. д., нарешті відхилення з абсолютною вартістю $|h_k|$ - в a_k серіях, де ,очевидячки,

$$a_1+a_2+ - - - +a_k = s$$

Другими словами, при s серіях незалежних дослідів відхилення з абсолютною вартістю $|h_1|$ повторилося a_1 разів, відхилення з абсолютною вартістю $|h_2|$ - a_2 разів і т.д., нарешті відхилення з абсолютною вартістю $|h_k|$ повторилося a_k разів.

Сума абсолютних вартостей відхилень,рів-

---

*) „Le hasard" 1914 §16.

них $|h_1|$, є $a_1|h_1|$, – , рівних $|h_2|$, – $a_2|h_2|$ і т.д., нарешті, – рівних $|h_k|$, – $a_k|h_k|$; сума ж всіх взагалі абсолютних вартостей відхилень рівняється, очевидячки,

$$a_1|h_1| + a_2|h_2| + \dots + a_k|h_k|.$$

Ця сума, поділена на число s всіх серій, є ніщо инче, як середня аритметична абсолютних вартостей відхилень h_i. Означимо її β' Тоді

$$\beta' = \frac{a_1|h_1| + a_2|h_2| + \dots + a_k|h_k|}{s}$$

де дріб

$$\frac{a_i}{s} \quad (i = 1, 2, \dots k)$$

є, очевидячки, фреквенція відхилення з абсолютною вартістю $|h_i|$.
Складемо тепер вираз, означім його β, такої форми

$$\beta = \mathcal{P}_{h_1}|h_1| + \mathcal{P}_{h_2}|h_2| + \dots + \mathcal{P}_{h_k}|h_k| = \sum_{i=1}^{i=k} \mathcal{P}_{h_i}|h_i|,$$

де $\mathcal{P}_{h_i}$ є ймовірність відхилення з абсолютною вартістю $|h_i|$. Ясно, що вираз для β можна получити з виразу для β', замінивши в цьому останньому фреквенції $\frac{a_i}{s}$ на відповідні ймовірности $\mathcal{P}_{h_i}$. При досить великому s ріжниці

$$\frac{a_i}{s} - \mathcal{P}_{h_i}$$

будуть досить малі, порядок їх малости буде однаковий з порядком $\frac{1}{\sqrt{s}}$. Звідси безпосередньо слідує, що й ріжниця

$$\beta' - \beta$$

буде теж величина досить мала того ж самого порядку малости. Величину β називають "середнім відхиленням", вона є, так би мовити, теоретична середня, тоді як β' (середня аритметична) є дійсна середня, обчислена на основі фактичних даних після переведення дослідів.

Подставимо замісць імовірности $\mathcal{P}_h$ її наближену вартість на основі (10) §6 і зробимо заміну $|h|$ на $|x|$ згідно з формулою (4) §7. Получимо :

$$\beta = \sum |h| P_h = \sum |h| \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{h^2}{2npq}} =$$

$$= \sum |x| \sqrt{2npq} \frac{\Delta x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{2npq}}{\sqrt{\pi}} \sum |x| e^{-x^2} \Delta x$$

Переходячи від суми до означеного інтеграла в межах від $-\infty$ до $+\infty$, будемо мати

$$\beta = \frac{\sqrt{2npq}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| . e^{-x^2} dx = \frac{2\sqrt{2npq}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x \, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2npq}}{\sqrt{\pi}} \left[-e^{-x^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\sqrt{2npq}}{\sqrt{\pi}}$$

звідки остаточно получимо

$$\beta = \frac{\sqrt{2npq}}{\sqrt{\pi}} = 0,5642 . \sqrt{2npq} \qquad (I)$$

Як би замісць абсолютної вартости відхилення $|h|$ ми брали алгебричну величину h, то получили би

$$\beta = \frac{\sqrt{2npq}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} . x . dx = 0 .$$

Цей результат цілком згідний з висновками числення ймовірностей, бо кожному можливому відхиленню зі знаком відповідає рівне йому по абсолютній вартости, але протилежне по знаку, відхилення з тією ж самою ймовірністю - отже ясно, що сума всіх відхилень, а значить і їх середня величина, будуть рівні нулю.

§ 13. Середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням зветься корінь квадратовий із середньої величини квадрата відхилення h^2. Означивши середнє квадратичне відхилення символом γ, знайдемо на основі таких же міркувань, як і в попередньому §, такий вираз для його квадрата, себто для середньої величини квадрата відхилення :

$$\gamma^2 = \sum h^2 P_h = \sum h^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{h^2}{2npq}} =$$

$$= \sum x^2 2npq \frac{\Delta x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{2npq}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum x^2 e^{-x^2} \Delta x =$$

$$= \frac{2npq}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{2 \cdot 2npq}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \qquad (I)$$

Щоб обчислити $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$, пригадаємо, що

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Замінивши в цьому останньому інтегралі x на $\sqrt{k}\cdot x$, де k є додатне число, получимо :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{k} \int_0^{\infty} e^{-kx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

звідки

$$\int_0^{\infty} e^{-kx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{\pi}\, k^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

Дивлячися на k , як на параметр, діференцюємо останню рівність по k :

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-kx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}\, k^{-3/2}}{4}.$$

Поклавши параметр k рівним одиниці, будемо мати

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Підставляючи знайдений результат в праву частину рівности (I), получимо

$$\gamma^2 = \frac{2 \cdot 2npq \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \cdot 4} = \frac{2npq}{2},$$

звідки

$$\gamma = \frac{\sqrt{2npq}}{\sqrt{2}} = 0,7071.\sqrt{2npq} \tag{2}$$

Знайдені нами вирази для ймовірного відхилення α, середнього відхилення β і середнього квадратичного відхилення γ відносяться, очевидячки, до відхилення абсолютного. Щоб знайти ці самі величини відносно відхилення релятивного і відхилення зведеного, треба, очевидно, рівности

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,4769\sqrt{2npq} \\ \beta &= \frac{\sqrt{2npq}}{\sqrt{\pi}} = 0,5642\sqrt{2npq} \\ \gamma &= \frac{\sqrt{2npq}}{\sqrt{2}} = 0,7071\sqrt{2npq} \end{aligned} \tag{3}$$

поділити в першому випадкові на n і в другому - на $\sqrt{2npq}$. Получимо :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0,4769\sqrt{\frac{2pq}{n}} \\ \beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2pq}{n}} = 0,5642\sqrt{\frac{2pq}{n}} \\ \gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2pq}{n}} = 0,7071\sqrt{\frac{2pq}{n}}, \end{aligned} \tag{4}$$

як що означимо α_1, β_1, γ_1 відповідно ймовірне, середне та середне квадратичне релятивне відхилення, і

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 0,4769 \\ \beta_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5642 \\ \gamma_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071, \end{aligned}$$

як що означимо α_2, β_2, γ_2 відповідно ймовірне, середне та середне квадратичне зведене відхилення. Зауважуємо, що середне квадратичне зведене відхилення

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

рівняється абсцисі точки перегнуття кривої ймовірностей (див. §8).

Формули (3) показують, що три величини α, β, γ прямо пропорційні одна одній. Теж саме, очевидячки, можна сказати і відносно величин α_1, β_1, γ_1 і α_2, β_2, γ_2.

§ 14. Модулі й міра докладности фреквенції.

З формули (3) попереднього § слідує

$$\frac{\alpha}{0,4769} = \frac{\beta}{0,5642} = \frac{\gamma}{0,7071} = \sqrt{2npq}\ , \qquad (1)$$

анальоґічно формули (4) того ж § дають :

$$\frac{\alpha_1}{0,4769} = \frac{\beta_1}{0,5642} = \frac{\gamma_1}{0,7071} = \sqrt{\frac{2pq}{n}} \qquad (2)$$

Корінь $\sqrt{2npq}$ називається, як ми це вже згадували одиницею відхилення, або модулем абсолютної частоти. Відповідно цьому корінь

$$\sqrt{\frac{2pq}{n}}$$

звуть модулем релятивної частоти, або модулем фреквенції. Рівности (1) і (2) показують, що величини α , β , γ прямо пропорційні модулю абсолютної частоти, а величини α_1 , β_1 , γ_1 прямо пропорційні модулю релятивної частоти.

Величину відворотну модулю релятивної частоти звуть мірою докладности фреквенції, або мірою докладности релятивної частоти.

Як що означимо її H , то будемо мати

$$H = \sqrt{\frac{n}{2pq}} \qquad (3)$$

З рівностей (2) слідує, що величини α_1 , β_1 , γ_1 обернено пропорційні мірі докладности H . Рівність же (3) показує, що міра докладности при сталій вартости p прямо пропорційна коріню квадратовому з числа всіх дослідів. Отже, коли число n дослідів росте, то росте й величина H . З другої ж сторони при сталій вартости t межі нерівностей

$$-t\sqrt{\frac{2pq}{n}} < \frac{m}{n} - p < t\sqrt{\frac{2pq}{n}}$$

зі збільшенням n будуть зменшуватися, тоді як імовірність цих нерівностей заховуватиме одну й ту ж вартість

$$\Phi(t)\ .$$

Таким чином більшим вартостям міри докладности H відповідають меньші однаковоймовірні релятивні відхилення, себто меньші відхилення фреквенції $\frac{m}{n}$ від імовірности p ,або, другими словами, більшим вартостям H відповідають більші однаковоймовірні наближення фреквенції $\frac{m}{n}$ до ймовірности p . Звідси й походить назва міра докладности фреквенції.

§ 15. Задачі.

Перше ніж приступити до розвязання задач на приміновання формул і теорем Розділу II, зробимо кілька уваг практичного характеру.

I. Імовірність, що вартости зведеного відхилення x будуть заключені на перемежку $(-t, +t)$, або, другими словами, імовірність, що вартости абсолютного відхилення будуть заключені на перемежку $(-h, h)$, де $-h = -t\sqrt{2npq}$ і $h = t\sqrt{2npq}$,рівняється наближено, на основі формули (2) §9 , вартости функції

$$\Phi(t)$$

Імовірність же, що вартости зведеного відхилення будуть находитися на перемежку (t_1, t_2), де $t_2 > t_1$, або иншими словами, імовірність, що вартости абсолютного відхилення будуть міститися на перемежку (h_1, h_2), де $h_1 = t_1\sqrt{2npq}$ і $h_2 = t_2\sqrt{2npq}$, рівняються наближено, на основі формули (3) § 9 , такому виразу

$$\frac{1}{2}\left\{\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\right\}.$$

Вартости функції $\Phi(t)$ для ріжних вартостей аргумента t даються, як ми це знаємо, відповідними таблицями. Треба лише завше памятати, що ці таблиці дають не точні, а наближені вартости ймовірностей.

II. Ріжниця

$$1 - \Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t} e^{-x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-x^2}dx \qquad (1)$$

очевидячки, наближено рівняється ймовірности, що вартости зведеного відхилення будуть заключені на перемежках

$$\left(-\sqrt{\frac{np}{2q}}, -t\right) \text{ і } \left(t, \sqrt{\frac{nq}{2p}}\right) \qquad (2)$$

(див. кінець §7-го). Що ж до відхилення абсолютного, то ріжниця

$$1-\Phi(t)$$

рівняється наближено ймовірности, що вартости абсолютного відхилення будуть міститися на перемежках

$$(-np, -h) \text{ і } (h, nq) \qquad (3)$$

де $-h = -t\sqrt{2npq}$ і $h = t\sqrt{2npq}$.

Імовірність же, що вартости зведеного відхилення будуть заключені лише на якомусь одному з перемежків (2), а вартости відхилення абсолютного - лише на якомусь одному з перемежків (3), рівнятиметься наближено

$$\frac{1}{2}\{1-\Phi(t)\} \qquad (4)$$

III. Імовірність нерівностей

$$-t\sqrt{\frac{2pq}{n}} < \frac{m}{n} - p < t\sqrt{\frac{2pq}{n}}$$

як ми знаємо, рівняється наближено вартости

$$\Phi(t)$$

Означимо

$$t\sqrt{\frac{2pq}{n}} = \varepsilon$$

Тоді

$$t = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{2pq}} \qquad (5)$$

а ймовірність нерівностей

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon$$

буде наближено рівна вартости

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{2pq}}\right), \text{ або } \Phi(\varepsilon H), \qquad (6)$$

де H є міра докладности фреквенції $\frac{m}{n}$. Словами це можна висловити так : імовірність, що при n дослідах відхилення фреквенції від імовірности p буде по абсолютній вартости меньше ε, рівняється наближено

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{2pq}}\right).$$

Задача І. Знайти точну вартість імовір-ности, що при n дослідах число появлень події А з імовірністю p при кожному досліді буде не меньше a і не більше b.

Імовірність, що подія А появиться при n дослідах m разів, рівна, як відомо,

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m},$$

де $q = 1-p$.
Відшукувана ймовірність $\mathcal{P}$ на основі теореми додавання ймовірностей буде рівнятися сумі окремих імовірностей для m рівного

$$a, a+1, a+2, \text{-------} \; b-2, b-1, b,$$

себто

$$\mathcal{P} = \sum_{m=a}^{m=b} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Задача 2. Яка ймовірність, що число появлень події А з імовірністю $p = 2/3$ при кожному досліді буде заключене між І35 і І65, як що число всіх дослідів n = 225 ?

Нормальне число появлень події А при 225 дослідах буде

$$np = 225 \cdot 2/3 = 150 .$$

Звідси межі допустимого відхилення числа появлень події А від його нормальної вартости будуть, очевидячки, рівні

$$165 - 150 = 15$$

і

$$135 - 150 = -15$$

Межі $-t$ і t зведеного відхилення знайдуться по формулі

$$t = \frac{h}{\sqrt{2npq}} = \frac{15}{\sqrt{2.225 . 2/3 \, 1/3}} = \frac{45}{30} = 1{,}5 ,$$

де $q=1-p$.
Відшукувана ймовірність $\mathcal{P}$ буде наближено рівна

$$\mathcal{P}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1,5}e^{-x^2}dx=\Phi(1,5)=0,9661052.$$

Задача 3. Яка ймовірність, що число появлень події А з імовірністю $p=3/5$ при кожному окремому досліді буде заключене між 1155 і 1200, як що число всіх дослідів $n=1875$?

Нормальне число появлень події А при 1875 дослідах буде

$$np=1875\cdot 3/5=1125,$$

так що межі h_1 і h_2 відхилення h будуть

$$h_1=1155-1125=30$$

$$h_2=1200-1125=75$$

Відповідні межі t_1 і t_2 зведеного відхилення x знайдемо по формулі

$$x=\frac{h}{\sqrt{2npq}},$$

де $q=2/5$. Будемо мати

$$t_1=\frac{30}{\sqrt{2\cdot 1875\cdot 3/5\cdot 2/5}}=1\quad і\quad t_2=\frac{75}{\sqrt{900}}=2,5.$$

Тому що обидві межі t_1 і t_2 рівні по абсолютній вартости, то відшукувана ймовірність $\mathcal{P}$ знайдеться наближено на основі формули

$$\mathcal{P}=\frac{1}{2}[\Phi(2,5)-\Phi(1)]=\frac{1}{2}(0,9995930-0,8427008)=$$

$$=\frac{0,1568922}{2}=0,0784461.$$

Задача 4. Яка ймовірність, що число появлень події А з імовірністю $p=4/7$ при кожному досліді буде заключене між 612 і 750, як що число всіх дослідів рівне $n=1176$?

Нормальне число появлень події А рівняється

$$np = 1176 . {}^4\!/_7 = 672.$$

звідси межі h_1 і h_2 відхилення h будуть рівні

$$h_1 = 612 - 672 = -60$$

$$h_2 = 750 - 672 = 78,$$

а межі t_1 і t_2 зведеного відхилення -

$$t_1 = \frac{-60}{\sqrt{2.1176.{}^4\!/_7.{}^3\!/_7}} = -\frac{60}{\sqrt{576}} = -2,5$$

$$t_2 = \frac{78}{\sqrt{576}} = 3,25.$$

Відшукувана ймовірність $\mathcal{P}$ буде наближено рівна

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\left[\Phi(3,25) - \Phi(-2,5)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi(3,25) + \Phi(2,5)\right] =$$

$$\frac{1}{2}(0,9999957 + 0,9995930) = \frac{1,9995887}{2} = 0,9997943.$$

Задача 5. В урні знаходиться 3 білих і 2 чорних кулі. Яка ймовірність, що при 100 кратному вийманню кулі число появлень білої кулі лежатиме між 50 і 70, як що кожна вийнята куля буде повертатися до урни ?

В даному випадкові

$$n = 100, \quad p = {}^3\!/_5, \quad q = {}^2\!/_5.$$

Нормальна вартість числа появлень білої кулі є

$$np = 100 . {}^3\!/_5 = 60.$$

Межі допустимого умовою задачі відхилення числа появлень білої кулі від нормальної вартости будуть очевидячки, 50 - 60 = -10 і 70 - 60 = 10 - однакові по абсолютній вартости, але ріжні по знаку. Межа зведеного відхилення t буде

$$t = \frac{10}{\sqrt{2.100.{}^3\!/_5.{}^2\!/_5}} = \frac{10}{4\sqrt{3}} = \frac{5}{2.1,732} = \frac{5}{3,464} = 1,443.$$

Відшукувана ймовірність $\mathcal{P}$ наближено рівнятиметься

$$\mathcal{P} = \Phi(1,443)$$

Вартість $\Phi(1,443)$ знайдемо з таблиці методою інтерполювання. Беремо з таблиці вартість функції, яка відповідає вартости аргумента, найближчій до I,443 Це буде

$$\Phi(1,44) = 0,9582966$$

Далі знаходимо, що

$$\begin{array}{r} \Phi(1,45) - 0,9596950 \\ - \\ \Phi(1,44) - 0,9582966 \\ \hline \Phi(1,45) - \Phi(1,44) = 0,0013984 \end{array},$$

себто приросценню аргумента, рівному 0,0I, відповідає в даному випадкові прирощення функції, рівне 0,00I3984. Звідси слідує, що прирощенням аргумента, рівним 0,00I і 0,003, відповідають такі прирощення функції :

$$0,001 - 0,00013984$$

$$0,003 - 0,0004195$$

Додаючи прирощення 0,0004I95 до вартости функції $\Phi(1,44)$, получимо

$$\begin{array}{r} \Phi(1,44) = 0,9582966 \\ + \qquad 0,0004195 \\ \hline \Phi(1,443) = 0,9587161 \end{array},$$

або наближено

$$\mathcal{P} = 0,9587161 .$$

Задача 6. Яка ймовірність, що число появлень наперед визначеного нумера в Генуйській лотерії буде не меньше I70, як що число всіх переведених партій буде 2754 ?

Імовірність появлення одного наперед визначеного нумера в кожною окремою партією є (див. Задачу 8, §2, Розд.I)

$$p = \frac{1}{18}$$

Нормальна вартість числа появлень визначеного на - перед нумера при числі партій n=2754 рівняється

$$np = 2754 \cdot 1/18 = 153$$

так що найменше допустиме відхилення числа появлень від нормальної вартости є

$$h = 170 - 153 = 17,$$

а відповідне зведене відхилення

$$t = \frac{h}{\sqrt{2npq}} = \frac{17}{\sqrt{2 \cdot 2754 \cdot 1/18 \cdot 17/18}} = \frac{17}{\sqrt{289}} = 1.$$

де $q = \frac{17}{18}$.

Відшукувана ймовірність $\mathcal{P}$, очевидячки, є ніщо инче, як імовірність, що вартість абсолютного відхилення лежатиме десь на інтервалі

$$\text{від } h = 17 \text{ до } nq = 2601$$

а вартість зведеного відхилення - на інтервалі

$$\text{від } t = 1 \text{ до } \sqrt{\frac{nq}{2p}} = \sqrt{23409} = 153 ,$$

тому на основі формули (4) маємо наближено

$$\mathcal{P} = \tfrac{1}{2}\{1 - \Phi(1)\} = \tfrac{1}{2}(1 - 0,8427008) =$$

$$= \frac{0,1572992}{2} = 0,0786496$$

Задача 7. Яка ймовірність, що при 600 - кратному киданню кістки до гри нумер 5 випаде не більше 80 разів ?

В даному випадкові

$$p = \frac{1}{6}, \; q = \frac{5}{6}, \; n = 600, \; np = 100.$$

Відшукувана ймовірність $\mathcal{P}$ є ніщо инче, як імовірність, що вартість абсолютного відхилення лежатиме десь на інтервалі

$$\text{від } -np = -100 \text{ до } -h = -20$$

а вартість зведеного відхилення - на інтервалі

$$\text{від} \quad \sqrt{\frac{np}{2q}} \quad \text{до} \quad -t = -1{,}55$$

бо

$$t = \frac{20}{\sqrt{2.600.\frac{1}{4}.\frac{3}{4}}} = \frac{2\sqrt{15}}{5} = \frac{2.3{,}875}{5} = 1{,}55.$$

Імовірність $\mathscr{P}$ знайдеться наближено по формулі (4)

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2}\{1 - \Phi(1{,}55)\} = \frac{1}{2}(1 - 0{,}9716227) =$$

$$\frac{0{,}0283773}{2} = 0{,}0141886,$$

себто приблизно

$$\frac{1}{70}.$$

Задача 8. Певне товариство має 300 членів, з яких 200 належить до партії А і 100 - до партії В. З числа членів товариства треба намітити жеребком 36 членів ради. Яка ймовірність, що більшість ради належатиме до партії В ?

Кожне окреме кидання жеребка будемо вважати дослідом, в результаті якого до ради може попасти член партії В. Імовірність цього означимо p. Ясно, що

$$p = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}, \ a \ q = 1 - p = \frac{2}{3}.$$

Число всіх дослідів n рівняється, очевидячки, числу членів ради, себто

$$n = 36 .$$

Члени ради, приналежні до партії В, утворять в раді більшість, коли їх буде більше 18, "нормальне ж число" їх в раді є

$$np = 36.\frac{1}{3} = 12$$

Таким чином більшість членів ради буде належати до партії В, коли вартість абсолютного відхилення буде число додатнє, більше 6. Зведене відхилення t, що відповідає найменчій вартости $h = 6$ відхилення абсолютного буде

$$t = \frac{h}{\sqrt{2npq}} = \frac{6}{\sqrt{2.36.\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}} = \frac{6}{4} = 1,5$$

Відшукувана ймовірність $\mathcal{P}$ знайдеться наближено по формулі

$$\mathcal{P} = \tfrac{1}{2}\{I - \Phi(I,5)\} = \tfrac{1}{2}(I - 0,966I052) =$$

$$\frac{0,0338948}{2} = 0,0169474 ,$$

отже трохи більше 0,0I.

Задача 9. Дві особи А і В грають 800 партій в орлянку по I карб. партія з умовою, що розрахунок буде переведений лише після 800-ої партії. А має I00 карб., а В - I50 карб..Яка ймовірність, що в результаті гри один програє другому всі свої гроші ?

Будемо розбірати гру з погляду інтересів, наприклад,грача А. " Нормальне число " виграних партій для кожного грача є

$$800.\tfrac{1}{2} = 400$$

Число партій виграних А означимо

$$400 + h$$

де h є додатне або відємне відхилення числа партій виграних А від його нормальної вартости.Тоді, очевидно, число партій виграних В буде

$$400 - h$$

Згідно з умовою за кожну виграну партію А получає від В I карб., тому ціла сума виграна грачем А по закінченню гри, буде рівнятися ріжниці числа партій виграних А і В

$$400 + h - (400 - h) = 2h$$

Ясно, що А виграє у В всі його гроші тоді, коли ця ріжниця буде рівна, або більше I50 :

$$2h \geqslant I50, \quad h \geqslant 75,$$

і програє B всі свої гроші - , коли вона буде рівна або меньше -100 :

$$2h \leqslant -100 \;, \quad h \leqslant -50 \,.$$

Таким чином ясно, що один з грачів може програти другому всі свої гроші лише тоді, коли вартість відхилення h буде лежати десь поза перемежком

$$-50 < h < 75 \,,$$

або, другими словами, коли вартість зведеного відхилення t буде знаходитися поза перемежком

$$-2{,}5 < t < 3{,}75$$

бо

$$\frac{-50}{\sqrt{2.800 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = -2{,}5 \text{ і } \frac{75}{\sqrt{2.800 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 3{,}75 \,.$$

Отже відшукувана ймовірність $\mathcal{P}$, що в результаті гри один грач програє другому всі свої гроші, рівнятиметься наближено :

$$\mathcal{P} = 1 - \int_{-2,5}^{3,75} e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{2}\left\{\Phi(3{,}75) - \Phi(-2{,}5)\right\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left\{\Phi(3{,}75) + \Phi(2{,}5)\right\} = 1 - \frac{1}{2}\left\{0{,}9999999 + \right.$$

$$\left. + 0{,}9995930\right\} = 1 - \frac{1{,}9995929}{2} = 1 - 0{,}9997965 =$$

$$= 0{,}0002035 \,.$$

Таким чином відшукувана ймовірність є надзвичайно мала, трошки більша ніж 0,0001. Такий результат цілком згідний з висновком теореми Я.Бернуллі, що при досить великому числі дослідів треба з досить малою ймовірністю очікувати, що відхилення h відійде порівнюючи вже навіть не так далеко від вартости нуль. Пропонуємо читачеві самому переконатися, що згадана ймовірність було рівнятися $\frac{1}{2}$ (ріжнитиметься від $\frac{1}{2}$ меньше ніж на 0,004), коли один грач буде мати 24 карб.,а другий 15 - .

Задача 10. Яка ймовірність, що при 800-кратному киданню монети фреквенція орла буде ріжнитися від імовірности $\frac{1}{2}$ меньше, як на $\frac{1}{200}$ в той, або инший бік ?

Відшукувана ймовірність $\mathcal{P}$ є, очевидячки, імовірність нерівностей

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon$$

де $\frac{m}{n}$ є фреквенція орла, $n = 800$, $p = 1/2$ і $\varepsilon = \frac{1}{200}$.
Тому, положивши на основі (5)

$$t = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{2pq}} = \frac{1}{200}\sqrt{\frac{800}{2 \cdot 1/2 \cdot 1/2}} = 0{,}2\,,$$

де $q = 1/2$, получимо таку наближену рівність

$$\mathcal{P} = \Phi(0{,}2) = 0{,}2227025\,.$$

Задача II. Кілько разів треба кинути кістку до гри, щоби з імовірністю, рівною 0,9999, можна було сподіватися, що фреквенція наперед визначеного нумера ріжнітиметься від імовірности $1/6$ меньше, як на 0,001 в ту або иншу сторону ?

Припустимо, що для здійснення поставленої задачею умови кістку треба кинути n_0 разів. Тоді, очевидячки, ймовірність $\mathcal{P} = 0{,}9999$ буде имовірністю таких нерівностей

$$-\frac{1}{1000} < \frac{m}{n_0} - \frac{1}{6} < \frac{1}{1000}\,.$$

З таблиці вартостей функції $\Phi(t)$ за допомогою інтерполювання знаходимо, що ймовірности 0,9999 відповідає вартість аргумента

$$t = 2{,}75 + \frac{0{,}0000006}{0{,}0000057} \cdot 0{,}01 = 2{,}75 + 0{,}001 = 2{,}751\,.$$

З другої ж сторони на основі (5) імовірність вищенаписаних нерівностей буде

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n_0}{2pq}}\right),$$

де $\varepsilon = 0{,}001$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.
Таким чином :

$$t = 2{,}751 = \varepsilon\sqrt{\frac{n_0}{2pq}}\,, \text{ або } 2{,}751 = \frac{1}{1000}\sqrt{\frac{n_0}{2 \cdot 1/6 \cdot 5/6}}\,.$$

Відшукувану вартість n_0 знайдемо, розвязуючи останню рівність відносно n_0 :

$$n_0 = \frac{2.5(2,751)^2 \cdot 10^2}{6^2} = \frac{75680010}{36} = 2102223.$$

Задача І2. Кілько разів треба повторити дослід, з яким може відбутися подія А з імовірністю p при кожному досліді, щоби з даною імовірністю $\mathcal{P}$ можна було очікувати, що відхилення числа появлень події А від його нормальної вартости не перевищуватиме $r\%$ числа дослідів ?

Невідоме число дослідів, що його треба знайти, означимо n . Крайня межа відхилення h повинна задовольняти умові

$$h = t\sqrt{2npq} = \frac{rn}{100},$$

де p і r дані числа, $q = 1-p$ і t - вартість зведеного відхилення, яка відповідає даній вартости ймовірности $\mathcal{P}$, знайдемо її з таблиці на основі рівности

$$\Phi(t) = \mathcal{P}$$

Відшукувану вартість n получимо, розвязуючи рівнання

$$\frac{rn}{100} = t\sqrt{2npq}$$

яке дає

$$n = 2pq\left(\frac{100t}{r}\right)^2.$$

Приклад: $p = \frac{1}{8}$, $q = \frac{7}{8}$, $\mathcal{P} = 0,9$, $r = 10.$

З таблиці методою інтерполювання знаходимо :

$$t = 1,16 + \frac{0,0009038}{0,0029042} \cdot 0,01 = 1,16 + 0,00311 = 1,16311.$$

Відшукувану вартість n получимо, розвязуючи рівнання

$$\frac{10n}{100} = 1,16311\sqrt{2n \cdot 1/8 \cdot 7/8},$$

$$n = \frac{7}{32} \cdot (11,6311)^2 = 29,59,$$

отже, очевидячки, дослід треба повторити не меньше 30 разів.

Задача 13. Кістку до гри кидають 810 разів. Знайти ймовірне відхилення α, середнє відхилення β, середнє квадратичне відхилення γ і міру докладности H для числа появлень визначеного наперед нумера ?

В даному випадкові :

$$n = 810, \ p = \frac{1}{6}, \ q = \frac{5}{6}.$$

Модуль абсолютної частоти буде

$$\sqrt{2npq} = \sqrt{2.810.\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6}} = 15.$$

Звідси маємо :

$$\alpha = 0,4769\sqrt{2npq} = 7,1535,$$
$$\beta = 0,5642\sqrt{2npq} = 8,4630,$$
$$\gamma = 0,7071\sqrt{2npq} = 10,6065.$$

Модуль фреквенції рівняється

$$\sqrt{\frac{2pq}{n}} = \frac{1}{54},$$

звідки

$$H = \sqrt{\frac{n}{2pq}} = 54.$$

РОЗДІЛ III.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТОРЕМИ Я. БЕРНУЛЛІ.

§ I. Математичне сподівання.

Предметом цього розділу буде широке узагальнення теореми Я. Бернуллі, яке дав математик П. Чебишов, користуючися так званою методою математичних сподівань. Тому зпочатку мусимо спинитися на встановленню самого поняття математичного сподівання.

Припустім, що певна змінна величина x може набувати вартости

$$x_1, x_2, ------, x_n. \qquad (I)$$

Нехай ця система охоплює всі можливі вартости змінної x. Припустім далі, що всі вартости (I) визначаються единоможливими та взаімновиключальними випадками

$$C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$$

з імовірностями відповідно

$$p_1, p_2, ------, p_n,$$

так що кожній можливій вартости x_i ($i = 1, 2, \ldots\ldots n$) відповідає свій окремий випадок C_i з імовірністю p_i. Імовірність p_i будемо називати ймовірністю вартости x_i змінної x. Очевидячки, що

$$p_1 + p_2 + ---- + p_n = 1,$$

як сума ймовірностей единоможливих і взаімновиключальних випадків.

Будемо називати математичним сподіванням величини x суму здобутків всіх можливих вартостей її на відповідні имовірности. Означивши математичне сподівання величини x символом $M(x)$, будемо, згідно з визначенням, мати

$$M(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ---- + p_n x_n.$$

Як що замість величини x будемо розглядати її квадрат, то

$$\mathcal{M}(x^2) = p_1x_1^2+p_2x_2^2+\cdots+p_nx_n^2$$

буде математичне сподівання квадрата величини x.
І взагалі, коли $f(x)$ є певна функція змінної x, то

$$\mathcal{M}[f(x)] = p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)$$

буде математичне сподівання функції $f(x)$ змінної x.
Розглянемо кілька прикладів.

Приклад І. Кістку до гри, стінки якої понумеровані числами від І до 6, кидають на позему площу. Число, що при цьому випаде, нехай буде наша змінна величина x. Всі можливі вартости її

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

визначаються єдиноможливими і взаїмновиключальними випадками, які можуть появитися при однократному киданню кістки. Імовірність кожної окремої вартости в даному разі є одна й та ж, рівна $1/6$. Таким чином математичне сподівання очікуємого нумера буде

$$\mathcal{M}(x) = \frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{7}{2}.$$

Припустім тепер, що кістку кидають послідовно два рази, і будемо розглядати суму x нумерів, що випадуть за першим і за другим разом. Всі можливі вартости цієї суми визначаються єдиноможливими і взаїмновиключальними випадками, число яких II (див.Задачу 2, §2, Розд.І). Ці вартости є

$$x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,$$

а ймовірности їх відповідно

$$1/36,\ 2/36,\ 3/36,\ 4/36,\ 5/36,\ 6/36,\ 5/36,\ 4/36,\ 3/36,\ 2/36,\ 1/36.$$

Отже математичне сподівання очікуємої суми x буде

$$\mathcal{M}(x) = 1/36\cdot 2+2/36\cdot 3+3/36\cdot 4+4/36\cdot 5+5/36\cdot 6+6/36\cdot 7+5/36\cdot 8+$$
$$+4/36\cdot 9+3/36\cdot 10+2/36\cdot 11+1/36\cdot 12 = \frac{1}{36}(2+6+12+20+$$
$$+30+42+40+36+30+22+12) = \frac{252}{36} = 7$$

Замісць II єдиноможливих та взаїмновиключальних випадків можна було би розглядати 36 окремих випадків, які були б до того ще й однаковоможливі, а саме:

$$x=I+I=2,\ x=2+I=3,\ x=3+I=4,\ x=4+I=5,\ x=5+I=6,\ x=6+I=7,$$

$$x=I+2=3,\ x=2+2=4,\ x=3+2=5,\ x=4+2=6,\ x=5+2=7,\ x=6+2=8,$$

$$x=I+3=4,\ x=2+3=5,\ x=3+3=6,\ x=4+3=7,\ x=5+3=8,\ x=6+3=9,$$

$$x=I+4=5,\ x=2-4-6,\ x=3+4=7,\ x=4+4=8,\ x=5+4=9,\ x=6+4=I0,$$

$$x=I+5=6,\ x=2+5=7,\ x=3+5=8,\ x=4+5=9,\ x=5+5=I0,\ x=6+5=II,$$

$$x=I+6=7,\ x=2+6=8,\ x=3+6=9,\ x=4+6=I0,\ x=5+6=II,\ x=6+6=I2,$$

Імовірність кожного такого випадку є одна й та ж, рівна $\frac{1}{36}$. Математичне сподівання очікуємої суми x напишеться тоді так:

$$M(x)=\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+$$

$$+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}+\frac{6}{36}+$$

$$+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}+\frac{11}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}+\frac{11}{36}+\frac{12}{36}=\frac{252}{36}=7.$$

Приклад 2. Певна особа може виграти в певну гру a карб. і програти b карб. Імовірність вигри є p, а ймовірність прогри - q, при чому $p+q=I$. Означимо x суму, що її може придбати грач в результаті гри. Тоді, розглядаючи прогру, як відємну вигру, знайдемо, що математичне сподівання величини x, або, як инакше кажуть, математичне сподівання грача, буде рівнятися

$$M(x)=pa+q(-b)=pa-qb. \qquad (2)$$

бо a і $-b$ це всі можливі вартости величини x, а p і q - відповідно їх імовірности.

Припустім, що гру повторили n разів, де n є досить велике число, причому m разів грач виграв, а $n-m$ - програв. Тоді повний чистий прибуток грача буде рівнятися

$$ma-(n-m)b$$

Поділивши цю величину на n, получимо, очевидячки, середнє придбання грача,що припадає на одну гру:

$$\frac{m}{n}a - \frac{n-m}{n}b \qquad (3)$$

де $\frac{m}{n}$ є фреквенція вигри, а $\frac{n-m}{n}$ - фреквенція прогри.

На основі теореми Я.Бернуллі з імовірністю довільно близькою певности можна очікувати, що фреквенція $\frac{m}{n}$ буде довільно мало відріжнятися від імовірности p, а фреквенція $\frac{n-m}{n}$ - від імовірности q, як що число n буде досить велике. Тому порівнюючи вирази (2) і (3), можемо висловити таке твердження :як що гра повторюється багато разів,то з імовірністю довільно близькою певности можна очікувати, що середнє придбання грача буде довільно мало відріжнятися від його математичного сподівання. Таким чином, обчисливши математичне сподівання грача, можна передбачити з імовірністю довільно близькою певности його середнє придбання, а помноживши математичне сподівання на число повторень гри - і цілу суму виграну грачем протягом багатьох повторень гри.

Звідси очевидно походить і сама назва математичне сподівання, бо, як відомо, походження цього терміну, як і взагалі походження числення ймовірностей, звязане з газардовими грами.

Приклад 3. Середня вартість величини x.

В §12 попереднього розділу ми назвали середнім відхиленням вираз β такої форми

$$\beta = P_{h_1}|h_1| + P_{h_2}|h_2| + \text{---} + P_{h_k}|h_k|,$$

де $|h_i|$ (i =1,2,...,K) є абсолютна вартість можливого відхилення h_i, а P_{h_i} - імовірність, що відхилення h матиме вартість h_i. Звідси ясно, що середнє відхилення β є ніщо инче, як математичне сподівання абсолютної вартости відхилення :

$$\beta = M(|h|)$$

Справді, ряд чисел

$$h_1, h_2, \text{----}, h_k$$

представляє всі можливі вартости відхилення h, імовірности яких є відповідно

$$P_{h_1}, P_{h_2}, \text{----}, P_{h_k}.$$

Так само квадрат середнього квадратичного відхилення, яке ми означили γ, є, очевидячки, (див. §13 попереднього розділу) математичне сподівання квадрата відхилення h:

$$\gamma^2 = M(h^2).$$

Взагалі, коли маємо змінну величину x, що може приймати вартости

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

з імовірностями відповідно

$$p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

то прийнято називати середньою вартістю величини x, або, як ще инакше кажуть, імовірною вартістю величини x, її математичне сподівання

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n .$$

Середня вартість величини x це є, так би мовити, теоретична середня вартість x, тоді як середня аритметична є дійсна її середня вартість. Першу можна обчислити наперед, на основі теоретичних даних, для обчислення ж другої треба знати фреквенції окремих вартостей x_i, які (фреквенції) будуть відомі лише після фактичного переведення належної кількости дослідів. Середня вартість величини x, себто її математичне сподівання, ріжниться від її середньої аритметичної на величину досить малу, як це було показано для середнього відхилення (див. § 12 попереднього розділу), порядок цієї ріжниці однаковий з порядком ріжниць окремих фреквенцій і відповідних імовірностей.

§2. Основні теореми.

В дальнішому нам доведеться мати діло не з одною, а з кількома змінними величинами. Кілько величин

$$x, y, \ldots, w$$

називаються незалежними, коли для кожної з них імовірність набувати ту або инчу з можливих вартостей не залежить від того, які саме вартости набувають инчі величини. В противному разі величини звуть звязаними.

Спинимося на випадку двох величин x і y. Нехай всі можливі вартости величини x будуть

$$x_1, x_2, ---, x_i, ----, x_n \qquad (1)$$

з імовірностями відповідно

$$p_1, p_2, ---, p_i, ----, p_n, \qquad (2)$$

а для величини y -

$$y_1, y_2, ---, y_j, ----, y_m \qquad (3)$$

з імовірностями відповідно

$$q_1, q_2, ---, q_j, ----, q_m. \qquad (4)$$

Згідно з визначенням величини x і y будуть, очевидячки, незалежними, коли кожна з імовірностей p_i вартости x_i не залежить від відомої чи невідомої вартости величини y, а кожна з імовірностей q_j вартости y_j величини y не залежить від відомої чи невідомої вартости величини x.

Доведемо тепер дві основні теореми.

Теорема 1. Математичне сподівання суми величин рівняється сумі їх математичних сподівань.

Ця теорема справедлива, як для незалежних, так і для звязаних величин. Але тому що в дальніщому обєктом нашого студіовання будуть величини незалежні, то ми обмежимося тут лише доказом цієї теореми для випадку незалежних величин. Для простоти будемо розглядати дві незалежних величини x і y. Нехай система (1) охоплює всі можливі вартости величини x, відповідні ймовірности яких складають сукупність чисел (2), а система (3) - всі можливі вартости величини y, імовірности яких є числа (4). Тоді математичне сподівання величини x буде

$$M(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + --- + p_ix_i + --- + p_nx_n,$$

а математичне сподівання величини y -

$$M(y) = q_1y_1 + q_2y_2 + --- + q_jy_j + --- + q_my_m.$$

Приступимо тепер до безпосереднього обчислення математичного сподівання суми величин $x+y$. Всіх можливих вартостей суми $x+y$ буде, очевидячки, nm по числу єдиноможливих і взаїмновиключальних випадків, якими ці вартости визначаються.Повна система цих вартостей матиме, очевидячки,такий вигляд :

$$x_1+y_1,\ x_2+y_1,\ ----,\ x_i+y_1,\ ------,\ x_n+y_1,$$
$$x_1+y_2,\ x_2+y_2,\ ----,\ x_i+y_2,\ ------,\ x_n+y_2,$$
$$-----------------$$
$$x_1+y_j,\ x_2+y_j,\ ----,\ x_i+y_j,\ ------,\ x_n+y_j,$$
$$-----------------$$
$$x_1+y_m,\ x_2+y_m,\ ----,\ x_i+y_m,\ ------,\ x_n+y_m$$

Візьмім з цієї системи, наприклад, вартість

$$x_i+y_j$$

Її ймовірність є ніщо инче, як імовірність, що відбудуться разом такі дві події : величина x набуде вартість x_i , а величина y - вартість y_j . Тому на основі теореми множення ймовірностей ймовірність що сума $x+y$ матиме вартість x_i+y_j , буде рівнятися здобуткові ймовірностей

$$p_i q_j$$

Таким чином математичне сподівання суми $x+y$ буде уявляти суму nm доданків

$$(x_i+y_j)p_i q_j$$

де $i = 1,2,\ldots,n$, а $j = 1,2,\ldots,m$, себто

$$M(x+y) = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m}(x_i+y_j)p_i q_j$$

Останню рівність можна переписати так:

$$M(x+y) = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m}(x_i p_i q_j + y_j p_i q_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m} x_i p_i q_j + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m} y_j p_i q_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i \sum_{j=1}^{j=m} q_j + \sum_{j=1}^{j=m} q_j y_j \sum_{i=1}^{i=n} p_i .$$

Але
$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = p_1+p_2+\dots+p_i+\dots+p_n = 1$$
і
$$\sum_{j=1}^{j=m} q_j = q_1+q_2+\dots+q_j+\dots+q_m = 1$$
Тому
$$M(x+y) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i + \sum_{j=1}^{j=m} q_j y_j =$$
$$= p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n + q_1y_1+q_2y_2+\dots+q_my_m =$$
$$= M(x) + M(y)$$
і теорема доведена.

Від суми двох доданків легко вже перейти до суми довільного числа доданків шляхом послідовного приписування одного доданка за другим, так що і взагалі будемо мати:
$$M(x+y+\dots+w) = M(x)+M(y)+\dots+M(w)$$

Приклад. Означимо $x = y+z$ суму чисел, що можуть випасти при двократному киданню кістки до гри, де y і z є відповідно числа, що випадуть за першим і за другим разом. В попередньому параграфі ми знайшли, що
$$M(y)=\frac{7}{2},\ M(z)=\frac{7}{2},\ M(x)=7.$$
Отже:
$$M(x) = M(y+z) = M(y)+M(z).$$

Примітка. Всяку сталу величину a можна розглядати, як величину, що може завше набути з імовірністю рівною одиниці вартости a. Тому
$$M(a)=a,\ M(a+x) = a+M(x).$$

Теорема II. Математичне сподівання здобутка незалежних величин рівняється здобуткові їх математичних сподівань.

Обмежимося, як і раніше, випадком двох величин і будемо розглядати ті самі незалежні величини x і y, якими ми користувалися при доказі теореми I.

Система всіх можливих вартостей здобутка xy матиме, очевидячки таким вигляд :

$$
\begin{array}{l}
x_1y_1, x_2y_1, -----, x_iy_1, -----, x_ny_1, \\
x_1y_2, x_2y_2, -----, x_iy_2, -----, x_ny_2, \\
------------------ \\
x_1y_j, x_2y_j, -----, x_iy_j, -----, x_ny_j, \\
------------------ \\
x_1y_m, x_2y_m, -----, x_iy_m, -----, x_ny_m .
\end{array}
$$

Число всі можливих вартостей є nm . Всі вони визначаються системою nm єдиноможливих і взаїмновиключальних випадків. Імовірність всякої вартости

$$x_iy_j$$

на основі теореми множення ймовірностей рівняється здобуткові ймовірностей

$$p_iq_j$$

Математичне сподівання здобутка xy уявлятиме, очевидячки, суму nm доданків

$$x_iy_jp_iq_j$$

де $i = 1,2,\ldots,n$ і $j = 1,2,\ldots,m$.
Таким чином

$$
\begin{aligned}
M(xy) &= \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=m}^{j=m} p_iq_jx_iy_j = \sum_{i=1}^{i=n} p_ix_i \cdot \sum_{j=1}^{j=m} q_jy_j = \\
&= p_1x_1(q_1y_1 + q_2y_2 + ----- + q_my_m) + \\
&+ p_2x_2(q_1y_1 + q_2y_2 + ----- + q_my_m) + \\
&+ ------------------ + \\
&+ p_nx_n(q_1y_1 + q_2y_2 + ----- + q_my_m) = \\
&= (p_1x_1 + p_2x_2 + ---- + p_nx_n)(q_1y_1 + q_2y_2 + --- + q_my_m) = \\
&= M(x) \cdot M(y) .
\end{aligned}
$$

Замітимо, що теорему цю, справедливу лише для незалежних величин, не можна примінювати у випадку, коли

$$x = y$$

бо існування такої рівности протирічить умові незалежности величин x і y. Можна показати, що

$$M(x^2) > M^2(x)$$

Послідовним долучуванням до здобутка xy одного множника за другим прийдемо до загального взору для довільного числа незалежних величин :

$$M(x.y.\dots.w) = M(x).M(y).\dots.M(w).$$

Зокрема математичне сподівання здобутка кількох незалежних величин буде рівнятися нулю, коли рівне нулю математичне сподівання принаймні одної з них.

Замісць прикладу пропонуємо читачеві самому переконатися шляхом безпосереднього обчислювання, що математичне сподівання здобутку чисел, які можуть випасти при двократному киданню кістки до гри, рівняється $49/4 = \frac{7}{2}.\frac{7}{2}$, де $7/2$ є, як відомо, математичне сподівання числа, що може випасти при однократному киданню кістки.

Примітка. Ясно, що математичне сподівання здобутку ax, де a є стала величина, буде

$$M(ax) = aM(x)$$

§3. Лема Маркова.

Як що A є математичне сподівання величини u, всі вартости якої є числа додатні, а t є довільне число, то ймовірність нерівности

$$u \leqslant At^2$$

більше $1 - \frac{1}{t^2}$.

Нехай всі можливі вартости величини визначаються системою єдиноможливих і взаїмновиключальних випадків. Розположимо ці вартости в порядку їх зростання. Нехай це буде ряд чисел

$$u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n \tag{I}$$

Імовірности цих вартостей означимо відповідно

$$p_1, p_2, ----, p_k, p_{k+1}, -----, p_n$$

так що p_k є имовірність, що величина u буде мати вартість u_k. Очевидно, що

$$p_1 + p_2 + --- + p_k + p_{k+1} + --- + p_n = 1,$$

як сума ймовірностей єдиноможливих і взаімновиключальних випадків.

Порівнюючи вартости (І) з числом At^2, встановимо взагалі, що частина цих вартостей є більше At^2, а частина є меньше, або рівна At^2. Припустимо, наприклад, що вартости

$u_1, u_2, -----, u_k$ не більше ($\leqslant$) At^2,

а решта вартостей :

$u_{k+1}, u_{k+2}, ----, u_n$ більше ($>$) At^2. (2)

Імовірність нерівности

$$u \leqslant At^2$$

означимо $\mathcal{P}$. Як що Q буде означати имовірність протилежної нерівности

$$u > At^2 \tag{3}$$

то будемо мати

$$\mathcal{P} + Q = 1$$

як сума ймовірностей двох протилежних подій, звідки

$$\mathcal{P} = 1 - Q \tag{4}$$

Обчислимо ймовірність Q. На основі (2) не трудно заключити, що для того, щоби справдилася нерівність (3) з імовірністю Q, треба, щоби наступила якась одна із $n-k$ взаімновиключальних рівностей :

$$u = u_{k+1},\ u = u_{k+2}, -----, u = u_n$$

з імовірностями відповідно

$$p_{k+1}, p_{k+2}, ------, p_n.$$

Тому на основі теореми додавання ймовірностей будемо мати :

$$Q = p_{k+1} + p_{k+2} + \cdots + p_n \qquad (5)$$

Згідно з умовою леми

$$A = p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_k u_k + p_{k+1} u_{k+1} + \cdots + p_n u_n$$

Серед доданків правої частини цієї рівности немає відємних, бо серед вартостей $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$, як і серед імовірностей $p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n$ немає відємних чисел, згідно з умовою леми. Тому віднявши від правої частини згаданої рівности k перших членів, ми перейдемо до нерівности

$$A \geqslant p_{k+1} u_{k+1} + p_{k+2} u_{k+2} + \cdots + p_n u_n .$$

Замінимо в правій частині цієї нерівности кожну з вартостей

$$u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n$$

числом At^2, яке на основі (2) меньше кожної з них. Тоді получимо

$$A > At^2 (p_{k+1} + p_{k+2} + \cdots + p_n) ,$$

звідки на основі (5) будемо мати

$$\frac{1}{t^2} > Q .$$

Подставляючи в праву частину рівности (4) замісць Q число $\frac{1}{t^2}$, більше ніж Q, знайдемо

$$\mathcal{P} > 1 - \frac{1}{t^2} ,$$

що й доводить нашу лему.

§4. Перша теорема Чебишова.

Як що означимо математичні сподівання незалежних величин

$$x, y, z, \ldots, w$$

..лповідно

$$a, b, c, \ldots, l$$

а математичні сподівання квадратів цих величин відповідно

$$a_1, b_1, c_1, \ldots, l_1,$$

то ймовірність нерівностей

$$a+b+c+\ldots+l-t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\ldots+l_1-l^2} \leqslant$$

$$\leqslant x+y+z+\ldots+w \leqslant$$

$$\leqslant a+b+c+\ldots+l+t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\ldots+l_1-l^2}$$

буде більше $1-\frac{1}{t^2}$, яке б не було число t.

Доказ цієї теореми базується на попередній лемі. Означимо :

$$u=(x+y+z+\ldots+w-a-b-c-\ldots-l)^2.$$

Усі вартости величини u будуть, очевидячки, числа додатні. Математичне сподівання величини u означимо A :

$$M(u)=A.$$

Тоді на основі леми Маркова ймовірність нерівности

$$(x+y+z+\ldots+w-a-b-c-\ldots-l)^2 \leqslant At^2 \qquad (1)$$

буде більше $1-\frac{1}{t^2}$, яке б не було число t. Звідси безпосередньо слідує, що рівнож буде більше $1-\frac{1}{t^2}$ імовірність нерівностей

$$-t\sqrt{A} \leqslant x+y+z+\ldots+w-a-b-c-\ldots-l \leqslant t\sqrt{A} \qquad (2)$$

рівнозначних з нерівністю (1).

Величину u можна переписати таким чином

$$u=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\ldots+(w-l)^2+$$

$$+2(x-a)(y-b)+2(x-a)(z-c)+2(y-b)(z-c)+$$

$$+\ldots$$

Обчислимо тепер математичне сподівання А величини u. На основі теореми I §2-го будемо мати

$$A = M(u) = M[(x-a)^2]+M[(y-b)^2]+M[(z-c)^2]+ \ldots$$

$$+ M[(w-l)^2] + M[2(x-a)(y-b)] + M[2(x-a)(z-c)] +$$

$$+ M[(y-b)(z-c)] + \ldots \ldots$$

Розглядаючи окремі доданки правої частини цієї рівности, знайдемо з одної сторони

$$M[(x-a)^2] = M(x^2-2ax+a^2) = M(x^2)-2aM(x)+a^2,$$

або

$$M[(x-a)]^2 = a_1-2a^2+a^2 = a_1-a^2$$

пригадуючи, що, згідно з умовою теореми, ми означили

$$M(x^2) = a_1 \quad і \quad M(x) = a$$

Анальоґічно :

$$M[(y-b)^2] = b_1-b^2,\ M[(z-c)^2] = c_1-c^2, \ldots$$

$$\ldots \ldots,\ M[(w-l)^2] = l_1-l^2 .$$

З другої ж сторони, приміняючи до незалежних величин

$$x-a,\ y-b,\ z-c,\ \ldots,\ w-l$$

теорему II §2-го, получимо

$$M[2(x-a)(y-b)] = 2M(x-a).M(y-b) =$$

$$= 2[M(x)-a][M(y)-b] = 2(a-a)(b-b) = 0 .$$

Анальоґічно :

$$M[2(x-a)(z-c)] = 0,\ M[2(y-b)(z-c)] = 0,\ \ldots \ldots$$

Таким чином остаточно получимо

$$A = M(u) = a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+ \ldots +l_1-l^2 .$$

Подставляючи знайдений для А вираз в нерівности (2), заключуємо, що, яке б не було число t, буде завше більше $1-\frac{1}{t^2}$ імовірність нерівностей

$$-t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\cdots+l_1-l^2} \leqslant$$

$$\leqslant x+y+z+\cdots+w-a-b-c-\cdots-l \leqslant \quad (3)$$

$$\leqslant t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\cdots+l_1-l^2}$$

Ці ж останні нерівности, очевидячки, рівнозначні з нерівностями

$$a+b+c+\cdots+l-t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\cdots+l_1-l^2} \leqslant$$

$$\leqslant x+y+z+\cdots+w \leqslant \quad (4)$$

$$\leqslant a+b+c+\cdots+l+t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\cdots+l_1-l}$$

Таким чином перша теорема Чебишова доведена. Нерівности (4), або, що те саме, (3) мають назву нерівностей Чебишова.

§5. Друга теорема Чебишова.

Нехай

$$x, y, z, \cdots, w$$

будуть незалежні величини, число яких рівне ;математичні сподівання цих величин нехай будуть відповідно

$$a, b, c, \cdots, l$$

Тоді другу теорему Чебишова можна висловити так : як що число n незалежних величин може необмежено рости, а математичні сподівання квадратів цих величин всі не перевищують одного і того ж числа α, то для досить значних вартостей числа n імовірність нерівностей

$$-\varepsilon < \frac{x+y+z+\cdots+w}{n} - \frac{a+b+c+\cdots+l}{n} < \varepsilon$$

буде більше $1-\eta$ де ε і η довільні додатні числа.

Другими словами, при досить великому числі незалежних величин буде довільно близькою певности, себто одиниці, ймовірність, що середня аритметична цих величин буде довільно мало відрізнятися від середньої аритметичної їх математичних сподівань.

Обравши цілком довільно два додатніх числа ε і η, означимо ймовірність нерівностей

$$-\varepsilon < \frac{x+y+z+\cdots+w}{n} - \frac{a+b+c+\cdots+l}{n} < \varepsilon$$

символом Q й покажемо, що завше можна підібрати таку вартість n, що буде

$$Q > 1-\eta$$

Користуючися довільністю числа t в нерівностях Чебишова, покладемо

$$t = \sqrt{\frac{1}{\eta}} \tag{I}$$

і перепишемо ці нерівности так:

$$-\sqrt{\frac{A}{\eta}} \leqslant x+y+z+\cdots+w-a-b-c-\cdots-l \leqslant \sqrt{\frac{A}{\eta}} \tag{2}$$

Імовірність цих нерівностей означимо P. Згідно з першою теоремою Чебишова

$$P > 1-\eta \tag{3}$$

бо на основі (I)

$$1-\frac{1}{t^2} = 1-\eta$$

Поділимо всі частини нерівностей (2) на n. Получимо

$$-\sqrt{\frac{A}{n^2\eta}} \leqslant \frac{x+y+z+\cdots+w}{n} - \frac{a+b+c+\cdots+l}{n} \leqslant \sqrt{\frac{A}{n^2\eta}}$$

Останні нерівности, очевидячки, цілком рівнозначні з нерівностями (2) і мають ту ж саму ймовірність P.

Означимо, як і раніше, математичні сподівання квадратів незалежних величин

$$x, y, z, \ldots, w$$

відповідно

$$a_1, b_1, c_1, \ldots, l_1$$

Згідно з умовою теореми маємо :

$$a_1 \leqslant \alpha, b_1 \leqslant \alpha, c_1 \leqslant \alpha, \ldots, l_1 \leqslant \alpha. \quad (4)$$

Ці нерівности не порушаться, коли ліві частини їх зменшимо на додатні числа ; таким чином нерівностям (4) відповідають нерівности

$$a_1 - a^2 \leqslant \alpha, b_1 - b^2 \leqslant \alpha, c_1 - c^2 \leqslant \alpha, \ldots, l_1 - l^2 \leqslant \alpha \quad (5)$$

Число цих нерівностой, очевидячки, рівно n числу незалежних величин.

Пригадуючи, що

$$A = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2.$$

знаходимо на основі (5)

$$A \leqslant n\alpha.$$

Поділивши обидві частини цієї нерівности на $n^2\eta$, одержимо після вилучення квадратового коріня

$$\sqrt{\frac{A}{n^2\eta}} \leqslant \sqrt{\frac{\alpha}{n\eta}}$$

Підберемо тепер число n остільки великим, щоби було

$$\sqrt{\frac{\alpha}{n\eta}} < \varepsilon \quad (6)$$

Тоді, очевидячки, буде також

$$\sqrt{\frac{A}{n^2\eta}} < \varepsilon \quad (7)$$

Умова (6) дає

$$\frac{\alpha}{n\eta} < \varepsilon^2 \quad \text{, звідки} \quad n > \frac{\alpha}{\varepsilon^2\eta}$$

Нерівність (7) дозволяє заключити, що при

$$n > \frac{\alpha}{\varepsilon^2\eta}$$

межі нерівностей

$$-\varepsilon < \frac{x+y+z+\dots+w}{n} - \frac{a+b+c+\dots+l}{n} < \varepsilon$$

з імовірністю Q будуть ширші за межі нерівностей

$$-\sqrt{\frac{A}{n^2\eta}} \leqslant \frac{x+y+z+\dots+w}{n} - \frac{a+b+c+\dots+l}{n} \leqslant \sqrt{\frac{A}{n^2\eta}}$$

з імовірністю P , а тому

$$Q > P$$

Звідси на основі (3) знаходимо, що

$$Q > 1-\eta$$

для всіх n , задовольняючих умові

$$n > \frac{\alpha}{\varepsilon^2\eta}$$

Таким друга теорема Чебишова доведена.

Замітимо, що умови другої теореми Чебишова - незалежність величин і обмеженність математичних сподівань їх квадратів - лише вистарчальні для її існування, але не необхідні.

Другу теорему Чебишова иноді називають узагальненою теоремою Бернуллі, бо цю останню можна получити (див.далі §6), як окремий випадок теореми Чебишова.

§6. Теорема Пуасона (закон великих чисел) і теорема Я. Бернуллі, як окремий випадок теореми Чебишова.

Теорему Пуасона, як ми вже це згадували, прийнято називати законом великих чисел. Її можна легко вивести з другої теореми Чебишова, як окремий випадок цієї останньої. Покажемо це.

Теорема Пуасона.

Коли означимо :

n число незалежних дослідів,

$p_1, p_2, \dots, p_n$ імовірности появлення якоїсь події A з цими дослідами і

m число появлень події A при n дослідах,

то теорему Пуасона можна висловити так : як що число n незалежних дослідів може рости необмежено, то при досить значних вартостях числа n імовірність нерівностей

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n} < \varepsilon$$

буде більше $1-\eta$, де ε і η довільні додатні числа.

Другими словами, при досить великому числі дослідів буде довільно близькою певности, себто одиниці, ймовірність, що фреквенція (релятивна частота) події А буде довільно мало відріжнятися від середньої аритметичної ймовірностей події А з окремими дослідами.

Будемо розглядати необмежений ряд незалежних дослідів. Нехай з кожним дослідом може відбутися якась то подія А, імовірности якої з окремими дослідами є ріжні. Означимо досліди нумерами

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ldots,$$

а ймовірности події А з цими дослідами відповідно-

$$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots ,$$

так що p_i є ймовірність, що подія А відбудеться з i-м дослідом.

Звяжемо з нашими дослідами величини

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$$

Нехай цей звязок буде такого роду, щоб для всякого i було:

$$x_i = 1 ,$$

коли з дослідом, нумер якого є i , подія А вібулася, і

$$x_i = 0 ,$$

коли подія А з цим дослідом не відбулася. Таким чином, згідно з цими умовами, кожна величина x_i може набувати лише дві вартости :

$$1 \text{ i } 0 ,$$

які визначаються появленням, чи непоявленням події

А з відповідним, себто i -м дослідом. Імовірности цих вартостей будуть, очевидячки, відповідно рів - нятися

$$p_i \text{ і } 1-p_i$$

При таких умовах сума

$$x_1+x_2+---+x_n$$

при всякому n рівнятиметься числу появлень події А при n дослідах. Справді, кожному появленню події А відповідає в цій сумі доданок, рівний I, а кожному її непоявленню - доданок рівний 0. Таким чином при всякому n

$$x_1+x_2+----+x_n = m$$

як що означимо m число появлень події А при n дослідах. Звідси

$$\frac{x_1+x_2+---+x_n}{n} = \frac{m}{n} \qquad (I)$$

себто середня аритметична величин

$$x_1, x_2, -------, x_n \qquad (2)$$

рівна фреквенції події А при n перших дослідах. Знайдемо для кожної величини x_i її математичне сподівання $M(x_i)$ і математичне сподівання її квадрату $M(x_i^2)$. Ясно, що

$$M(x_i) = p_i.1+(1-p_i).0 = p_i,$$
$$M(x_i^2) = p_i.1^2+(1-p_i).0 = p_i$$

Звідси безпосередньо заключуємо, що середня аритметична математичних сподівань величин (2) рівняється середній аритметичній відповідних імовірностей :

$$\frac{M(x_1)+M(x_2)+---+M(x_n)}{n} = \frac{p_1+p_2+--+p_n}{n} \qquad (3)$$

Крім того, тому що ймовірність завше є правильний дріб, то для всякого i будемо мати

$$M(x_i^2) \leqslant 1 \qquad (4)$$

Після всього сказаного не трудно заключити, що введені нами величини (2) задовольняють всім умовам другої теореми Чебишова. Справді, з незалежности дослідів слідує й незалежність величин (2), число їх n може рости необмежено, нарешті, математичні сподівання їх квадратів на основі (4) всі не перещують одного й того ж числа рівного одиниці ($\alpha=1$). На цій підставі можемо прикласти до величин

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

другу теорему Чебишова. Заміняючи ж на основі (I) і (3) середню аритметичну цих величин та середню аритметичну їх математичних сподівань відповідно на фреквенцію $\frac{m}{n}$ події A і середню аритметичну ймовірностей

$$p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

знаходимо, що ймовірність нерівностей

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n} < \varepsilon \tag{5}$$

буде більше $1-\eta$ для всіх n, задовольняючих умові

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2\eta},$$

які б не були числа ε і η. Таким чином теорема Пуасона доведена.

Замітимо, що ріжниця

$$\frac{m}{n} - \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}$$

яка фігурує в теоремі Пуасона, теж має назву релятивного відхилення. Середню аритметичну

$$\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}$$

звичайно означують одною літерою p і називають середньою ймовірністю події при n дослідах.

Вказану нами межу для числа n, рівну $\frac{1}{\varepsilon^2\eta}$, можна ще зменшити в 4 рази. Дійсно, згідно з попереднім § число n задовольняє умові

$$\sqrt{\frac{A}{n^2\eta}} < \varepsilon$$

або

$$n^2 > \frac{A}{\varepsilon^2\eta} \qquad (6)$$

В даному випадкові

$$A = \sum_{i=1}^{i=n}\left[M(x_i^2) - M^2(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{i=n}(p_i - p_i^2) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i(1-p_i)$$

Максимальна вартість кожного здобутку $p_i(1-p_i)$ є $\frac{1}{4}$, так що завше буде

$$A \leqslant \frac{n}{4}.$$

Нерівність же (6) справедлива при всякому А, тому вона буде справедлива і при

$$A = \frac{n}{4}$$

Подставляючи цю вартість А в (6), знайдемо, що число n буде задовольняти умові

$$n^2 > \frac{n}{4\varepsilon^2\eta} \quad \text{, або} \quad n > \frac{1}{4\varepsilon^2\eta}.$$

В окремому випадкові, коли всі ймовірности

$$p_1, p_2, \text{------}, p_n$$

мають однакову величину p, получимо

$$\frac{p_1 + p_2 + \text{---} + p_n}{n} = \frac{np}{n} = p$$

Нерівности (5) заміняться тоді, очевидячки, нерівностями

$$-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon$$

і теорема Пуасона обернеться в теорему Я. Бернуллі. Величина А в цьому останньому випадкові буде

$$A = np(1-p)$$

і нерівність (6) дасть для числа таку межу

$$n > \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2\eta} \quad \text{,або} \quad n > \frac{pq}{\varepsilon^2\eta},$$

як що $q = 1-p$.

Спільну ідею теорем Бернуллі і Пуасона можна формулювати так : при досить великому числі дослідів з імовірністю довільно близькою певности можна очікувати, що фреквенція події буде довільно мало ріжнитися від певного сталого числа, відомого наперед із теоретичних даних. Це число в теоремі Бернуллі є незмінна ймовірність p , а в теоремі Пуасона - середня аритметична ймовірностей

$$p_1, p_2, -----, p_n.$$

Цією ідеєю и визначається зміст тези, відомої під назвою закона великих чисел. На цьому власне законі основані всі практичні примінення числення ймовірностей.

Теорема Чебишова, широко узагальнююча теореми Бернуллі і Пуасона, є, очевидячки, того ж самого характеру, що й ці останні. Релятивні відхилення, фіґуруючи в теоремах Бернуллі і Пуасона, заміняються в теоремі Чебишова більш загальним поняттям - відхиленням середньої аритметичної незалежних величин від середньої аритметичної їх математичних сподівань.

Тому деякі вчені поширюють назву закона великих чисел і на теорему Чебишова.

Однак треба завше памятати, що закон великих чисел можна вважати твердо встановленим лише для тих випадків, коли виконуються умови відповідних теорем : незалежність дослідів і незмінність імовірностей в теоремах Бернуллі і Пуасона і незалежність величин та обмеженість математичних сподівань їх квадратів в теоремі Чебишова.

В деяких окремих випадках, правда, при певних умовах закон великих чисел можна росповсюдити и на ряди звязаних дослідів, рівнож на деякі катеґорії звязаних величин.

Повертаючись до теореми Пуасона замітимо, що її можна, розуміється, вивести и инчим шляхом, незалежно від теореми Чебишова. Анальоґію, що існує між теоремами Бернуллі и Пуасона, можна поглибити і, подібно до того, як теорема Бернуллі була виведена із теореми Ляпляса, можна вивести теорему Пуасона при допомозі узагальненої теореми Ляпляса , доведеної Марковим, як окремий випадок ще більш загальної теореми. Не спиняючись на доказі цієї теореми, подамо тут лише її зміст.

Коли означимо :

n число незалежних дослідів,

$p_1, p_2, ----, p_n$ імовірности події А з окремими дослідах,

$q_1=1-p_1,\ q_2=1-p_2,\ \ldots\ldots,\ q_n=1-p_n$ імовірности протилежної події,

$p=\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}$ так звану середню имовірність події А при дослідах,

$\sum p_i q_i = p_1q_1+p_2q_2+\ldots+p_nq_n$,

m число появлень події А при n дослідах і

t_1 і t_2 довільні числа, при чому $t_2>t_1$,

то узагальнену теорему Ляпляса можна висказати в такій формі : як що число n незалежних дослідів необмежено росте, а числа p_1 , p_2 ,....., p_n , t_1 , t_2 міняються, то ймовірність нерівностей

$$np+t_1\sqrt{2\sum p_iq_i} < m < np+t_2\sqrt{2\sum p_iq_i}$$

наближається до границі

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2}dx .$$

§7. Ризиковані підприємства та газардові гри.

Хотя практичне приміненння числення ймовірностей і не входить безпосередньо в обсяг нашого курсу, але для того, щоб мати про це бодай саме загальне уявлення, спинимося тут лише на питанню про приміненння числення ймовірностей до студіювання так званих ризикованих підприємств. Ризикованими підприємствами ми будемо називати такі підприємства, які в більшій або меншій мірі залежать від випадку. Ясно, що лише до таких підприємств можна прикладати методи числення ймовірностей - цієї науки про " закони випадку ". З другої ж сторони ясно, що предметом нашого студіювання можуть бути лише такі ризиковані підприємства, організація яких відповідає нормам числення ймовірностей.

Перше питання, яке виникає при розгляді ризикованого підприємства, це питання про його корисність, чи некорисність. Як що підприємство дозволяє перечислити всі можливі його результати , а також визначити имовірности цих результатів, то в основу вирішення питання про корисність чи некорисність ризикованого підприємства можна покласти математичне сподівання прироєщення капіталу, вкладеного в дане підприємство. Прирощення капіталу, розуміється, може бути, як додатнє, так і відємне.

В першому випадкові власник підприємства матиме , очевидячки, зиск від підприємства, а в другому - збиток. Коли припустимо, що підприємство можна повторювати необмежене число разів, то крітерій корисности підприємства дає теорема Чебишова, що її можна получити, як висновок, з його другої теореми Ми будемо називати цю теорему третьою теоремою Чебишова з огляду на її основну ролю в теорії ризикованих підприємств.

Припустимо, що підприємство можна повторювати необмежене число разів, причому окремі повторення, означені нумерами

$$1, 2, 3, \ldots\ldots,$$

не залежать одне від одного. Прирощення капіталу після окремих повторень підприємства означимо відповідно

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -----,$$

так що α_i означає прирощення капіталу від i-го повторення підприємства. Тоді третю теорему Чебишова можна висловити так.

Як що підприємство організоване таким чином, що математичні сподівання квадратів окремих прирощень капіталу всі не перевищують одного й того ж числа, а математичні сподівання самих цих прирощень всі не меньше одного й того ж додатнього числа, то, повторивши підприємство досить багато разів, можна з імовірністю довільно близькою певности очікувати, що загальне прирощення капіталу, себто сума всіх окремих прирощень, перевищить всяке довільно задане число.

Припустимо, що підприємство повторили n разів. Відповідні прирощення капіталу нехай будуть

$$\alpha_1, \alpha_2, -----, \alpha_n. \tag{I}$$

Математичні сподівання їх означимо відповідно :

$$a, b, -----, l,$$

а математичні сподівання їх квадратів -

$$a_1, b_1, -----, l_1.$$

Згідно з умовою теореми

$$a_1 \leqslant \alpha, b_1 \leqslant \alpha, -------, l_1 \leqslant \alpha,$$

де α є якесь то стале число, і

$$a \geqslant \beta, \; b \geqslant \beta, \; \text{------}, \; l \geqslant \beta,$$

де β стале число більше нуля.

Окремі прирощення (1) капіталу задовольняють, очевидячки, всім умовам другої теореми Чебишова. Дійсно, окремі повторення підприємства не залежать, згідно з нашим припущенням, одно від одного, отже й окремі прирощення капіталу утворюють через це ряд незалежних величин, далі, підприємство можна повторювати необмежено, а тому необмежено теж може рости й число n окремих прирощень капіталу, нарешті, математичні сподівання квадратів окремих прирощень капіталу всі, згідно з умовою теореми, не перевищують одного й того ж числа α. Таким чином, на основі другої теореми Чебишова, будемо мати, що имовірність нерівностей

$$-\varepsilon < \frac{x_1 + x_2 + \text{---} + x_n}{n} - \frac{a + b + \text{---} + l}{n} < \varepsilon \tag{3}$$

є більше $1-\eta$, де ε і η довільні додатні числа, для всіх вартостей n, задовольняючих умові

$$n > \frac{\alpha}{\varepsilon^2 \eta}.$$

Так само, очевидячки, більше $1-\eta$ буде і ймовірність однієї лівої нерівности, яку перепишемо так:

$$\frac{x_1 + x_2 + \text{---} + x_n}{n} > \frac{a + b + \text{---} + l}{n} - \varepsilon. \tag{4}$$

На основі нерівностей (2) сума

$$a + b + \text{---} + l \geqslant n\beta,$$

а тому завше, коли справедлива нерівність (4), буде також справедлива й нерівність

$$\frac{x_1 + x_2 + \text{---} + x_n}{n} \geqslant \frac{n\beta}{n} - \varepsilon,$$

або

$$x_1 + x_2 + \text{---} + x_n > n(\beta - \varepsilon). \tag{5}$$

Довільне число ε можна завше добрати менше β:

$$\varepsilon < \beta.$$

Тоді очевидно, що при досить великій вартости числа n сума природень капіталу

$$x_1+x_2+ ----+x_n$$

може бути зроблена більше всякого наперед даного додатнього числа. Таким чином третя теорема Чебишова доведена.

Коли б математичні сподівання

$$a, b, -----, l$$

окремих природень капіталу були навпаки всі не більше одного й того ж відємного числа, нехай, $-\gamma$, то, беручи з нерівностей (3) нерівність

$$\frac{x_1+x_2+---+x_n}{n} < \frac{a+b+---+l}{n} + \varepsilon ,$$

можна показати, що, повторивши підприємство досить багато разів, можна з імовірністю довільно близькою певности очікувати, що сума всіх окремих природень капіталу буде меньше всякого наперед даного відємного числа, яка б велика не була його абсолютна вартість. Дійсно, тоді буде

$$a+b+---+l \leq -n\gamma ,$$

а тому

$$\frac{x_1+x_2+----+x_n}{n} < -\frac{n\gamma}{n} + \varepsilon ,$$

або

$$x_1+x_2+---+x_n < -n(\gamma-\varepsilon) . \qquad (6)$$

Як що обрати довільне число ε меньше додатнього числа γ :

$$\varepsilon < \gamma ,$$

то ясно, що при досить великій вартости числа n сума

$$x_1+x_2+---+x_n$$

може бути зроблена меньше всякого наперед даного відємного числа.

Імовірність же нерівности (6), очевидячки, більше $1-\eta$.

У випадку ж, коли математичні сподівання окремих прирощень капіталу всі рівні нулю, нерівности (3) приймають вигляд

$$-\varepsilon < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} < \varepsilon .$$

Третя теорема Чебишова в цьому випадкові вказує лише на велику ймовірність малих вартостей середньої аритметичної окремих прирощень капіталу, як що підприємство буде повторено досить багато разів. Однак лишається цілком неозначеним, чи будуть ці прирощення додатніми, чи відємними, і як великі вони будуть по своїй абсолютній вартости.

З усього вищесказаного можна зробити такий висновок: як що математичні сподівання окремих прирощень капіталу є числа додатні, то при досить великому числі повторень підприємства з імовірністю довільно близькою певности можна очікувати, що загальне прирощення капіталу буде перевищувати всяке додатнє довільно обране число, яке б велике воно не було, і навпаки, коли згадані математичні сподівання є числа відємні, то при досить великому числі повторень підприємства з імовірністю довільно близькою певности можна очікувати, що основний капітал підприємства буде цілком вичерпаний, який би великий він не був.

На основі цього будемо називати ризиковане підприємство к о р и с н и м , н е к о р и с н и м , або н е о з н а ч е н и м в залежности від того, чи буде математичне сподівання прирощення капіталу від цього підприємства число додатнє, відємне, або рівне нулю.

Наприклад :

I) підприємство, яке може дати зиск 200 карб. з імовірністю $5/8$, або - збиток I60 карб. з імовірністю $3/8$, буде корисне, бо

$$\tfrac{5}{8}\cdot 200 - \tfrac{3}{8}\cdot 160 = 65 > 0 ,$$

2) підприємство, яке може дати зиск 100 карб. з імовірністю $1/4$, або - збиток 40 карб. з імовірністю $3/4$, буде некорисне, бо

$$\tfrac{1}{4}\cdot 100 - \tfrac{3}{4}\cdot 40 = -5 < 0 .$$

3) підприємство, яке може дати зиск 1000 карб. з імовірністю 0,0I, або - збиток 8 карб. з імовірністю 0,99 , буде корисне, бо

$$0{,}01\cdot 1000 - 0{,}99\cdot 8 = 2{,}08 > 0 ,$$

підприємство, яке може дати зиск 2000 карб. з ймовірністю 0,01 , або - збиток 30 карб. з імовірністю 0,99 , буде некорисне, бо

$$0,01 \cdot 2000 - 0,99 \cdot 30 = -9,7 < 0 ,$$

5) підприємство, яке може дати зиск 500 карб. з імовірністю $1/6$, або - збиток 100 карб. з імовірністю $5/6$, буде неозначене, бо

$$\tfrac{1}{6} \cdot 500 - \tfrac{5}{6} \cdot 100 = 0 .$$

Питання про корисність чи некорисність підприємства треба, розуміється, розглядати окремо для кожного учасника, бо інтереси окремих учасників можуть бути цілком протилежні.

Встановленим крітерієм корисности й некорисности ризикованих підприємств треба, очевидячки, керуватися при вирішенню питання про те, чи брати участь в даному підприємстві, чи ні.

Чи можна зробитися багатим, повторивши корисне підприємство дуже багато разів ? Відповідь на це може бути лише така : можна, як що на перешкоді збогаченню не стане передчасна руїнація. Ясно крім того, що бідний ризикує при цьому більше, ніж багатий. З другої ж сторони ясно, що повторення дуже багато разів некорисного підприємства мусить привести до руїни.

Газардові гри.

Окремий тип ризикованих підприємств уявляють так звані газардові гри. Грою ми будемо звати таке ризиковане підприємство, яке допускає ріжні зміни (збільшення, зменшення) капіталів окремих учасників гри, але залишає незмінним їх загальний капітал, себто суму капіталів всіх учасників . Означимо окремих грачів нумерами

$$1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

Можливі, як наслідок гри, прирощення (додатні, чи відємні) їх капіталів означимо відповідно

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$$

Тому що, згідно з визначенням, гра не міняє загального капіталу всіх грачів, то сума прирощень капіталів окремих грачів мусить рівнятися нулю :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \text{-----} = 0 .$$

Звідси безпосередньо слідує, що й математичне сподівання суми прирощень капіталів окремих грачів буде теж рівне нулю :

$$\mathcal{M}(x_1 + x_2 + x_3 + \text{---}) = 0 ,$$

звідки на основі теореми I §2-го

$$\mathcal{M}(x_1) + \mathcal{M}(x_2) + \mathcal{M}(x_3) + \quad = 0 .$$

Остання сума буде рівнятися нулю : або тоді, коли між окремими доданками є, як додатні, так і відємні числа, що взаімно редукуються, або тоді, коли кожний доданок рівний нулю :

$$\mathcal{M}(x_1) = 0 , \mathcal{M}(x_2) = 0 , \text{-----}$$

Ясно, що в першому випадкові для тих грачів, для яких математичні сподівання прирощень їх капіталів є числа додатні, гра буде підприємство корисне, для тих же, для яких згадані математичні сподівання є відємні, - підприємство некорисне. Тому в цьому випадкові гру звуть несправедливою, бо з повторенням її необмежене число разів можна чекати майже з певністю, що одні грачі обіграють других. Коли ж математичні сподівання прирощень капіталів окремих грачів всі рівні нулю, то ясно, що тоді всі грачі в однаковому положенню, ні один з них не має переваги над иншими : для кожного з них гра буде підприємство неозначене. В цьому випадкові гру звуть с п р а в е д л и в о ю . Але, розуміється, що й справедлива гра при многократному її повторенню може привести одних грачів до збогачення, а других до руїни, не можна сказати лише наперед, хто саме з грачів має шанси виграти, а хто - програти. Загально відомий приклад несправедливої гри - це рулетка в Монте - Карло. Вона так організована, що математичне сподівання прирощення капіталу для власників рулетки є додатне, а для відвідувачів - відємне; ясно, що коли б було навпаки, то власникі рулетки, які повторюють гру необмежено, мусіли б рано чи пізно зруйнуватися, окремим же відвідувачам, які повторюють гру порівнюючи не багато разів, рулетка може дати й зиск, хотя для них вона й є підприємство некорисне.

В багатьох грах учасники мусять на початку гри робити так звані ставки, в разі програи ставка не поворгається, так що величина можливої програи для кожного грача визначається визначається величиною його ставки. Нехай для певного грача ймовірність вигри є p, а ймовірність програи – q, при чому $p+q=1$, як же величину його ставки означимо s, а можливу вигру – v, то ріжниця $v-s$ буде так звана чиста вигра. Як що гра справедлива, то мусить бути

$$p(v-s)-qs=0,$$

звідки

$$pv-(p+q)s=0,$$

$$s=pv, \text{ або } v=\frac{s}{p}. \tag{7}$$

Одержаний результат словами можна висловити так : як що гра справедлива, то для кожного грача величина ставки мусить бути пропорційна його ймовірности вигри, а величина вигри – обернено пропорційна цій самій ймовірности.

Приклад I. А і В грають в слідуючу гру. Тягнуть наосліп кулю з урни, в якій находиться 100 однакових понумерованих куль. В ставить 20 карб. на кулі з нумерами I, 50 і 100. Як що вийде одна з цих куль, то А платить В 1000 карб., коли ж вийде куля з якимбудь иншим нумером, то В не дістає нічого. Чи справедлива така гра, а як що несправедлива, то як треба змінити її умови, щоби вона була справедлива?

В справедливій грі, згідно з визначенням, математичні сподівання окремих грачів мусять рівнятися нулю. Тому обчислім математичне сподівання, наприклад, грача В. Можлива чиста вигра його рівняється 1000-20=980 карб., а можлива програ – 20 карб. Ймовірність же вигри є 0,03, а програи – 0,97. Таким чином математичне сподівання грача В буде рівне

$$0{,}03.980-0{,}97.20=10,$$

– отже гра з несправедлива на користь В. Щоби гра була справедлива, треба змінити або ставку грача В, або величину його можливої вигри, себто суму, яку А платить В, коли цей останній виграє. На основі взорів (7) знаходимо :

$$s=pv=0{,}03.1000=30$$

і

$$v=\frac{1}{p}s=\frac{100.20}{3}=666{,}66\ldots,$$

отже треба або ставку грача В збільшити до 30 карб. або суму, що її платить грач А, зменшити до 666,66 карб.

Приклад 2. Чи була Генуйська льотерія справедлива гра?

Як відомо ймовірности вигри в Генуйську льотерію для грачів, що записали I, 2, 3, 4, 5 нумерів, відповідно рівняються :

$$p_1 = \frac{1}{18}, \; p_2 = \frac{2}{801}, \; p_3 = \frac{1}{11748}, \; p_4 = \frac{1}{511038}, \; p_5 = \frac{1}{43949268}.$$

Як що гра справедлива, то на основі другого взору (7) можлива вигра для кожного грача мусить рівнятися його ставці, поділеній на відповідну ймовірність. В даному випадкові ролю ставки відограє сума, що її вносить кожний грач перед початком гри. Щоби Генуйська льотерія була гра справедлива, треба було б, очевидячки, щоби вигри рівнялися величині зробленої ставки, збільшеної відповідно до кількости записаних нумерів у I8, 400,5, II748, 5II038, 43949268 разів. Між тим в дійсности виплачувалися суми рівні величині ставки збільшеної відповідно в I5, 270, 5500, 75000, I000000 разів. Отже ясно, що Генуйська льотерія була гра несправедлива на користь організаторів її.

Р О З Д І Л IV.

Н Е П Е Р Е Р И В Н І Й М О В І Р Н О С Т И.

§ I. З а г а л ь н і у в а г и.

В питаннях, які ми досі розглядали, число всіх можливих випадків було скінчене і ймовірности визначалися завше числами раціональними. Такі ймовірности, як ми вже згадували (Розділ I, §I), називаються ймовірностями переривними. В окремих випадках ми розглядали границі ймовірностей й переходили від звичайних сум до інтегралів.

Тепер звернемося до питань цілком відмінних, коли сукупности можливих випадків творять безмежні й непереривні збори. Проблемам такого роду й буде присвячений цей розділ. Як побачимо низче, обчислення ймовірностей в таких задачах приводить також і до чисел ірраціональних, а тому ймовірности ці називають імовірностями непереривними.

Ясно, що старе визначення ймовірности, виведене в припущенню, що число всіх можливих випадків є скінчене, не відповідає новим умовам, коли сукупности всіх можливих і сприятливих випадків творять безмежні й непереривні збори. Тому, приступаючи до студіювання непереривних імовірностей, треба в першу чергу встановити нове визначення ймовірности, яке б з одної сторони відповідало цим новим умовам, а з другої б не противоречило старому визначенню. Другими словами, треба визначення ймовірности відповідно узагальнити. Далі, очевидно, треба також встановити і відповідну методу для сумування випадків можливих і сприятливих.

Студіювання непереривних імовірностей так само, як і переривних, приводить до широких висновків загального характеру, які з успіхом примінюються в молекулярній фізиці.

§ 2. У з а г а л ь н е н н я п о н я т т я й м о в і р н о с т и.

Нехай величина α може приймати всякі вартости, як раціональні, так і ірраціональні, на перемежку (A, B), поза цим же перемежком, нехай, жадних вартостей величини α не існує. Тоді сукупність всіх можливих вартостей величини α творить безмежний непереривний збір чисел, заключений між A і B. Замість питання про ймовірности окремих вартостей

x поставимо питання про ймовірність, що вартість величини x лежить десь на перемежку (a,b), заключеному всередині перемежка (A,B). Крім того припустім, що при всіляких узагальненнях поняття ймовірности теореми додавання й множення ймовірностей лишаються справедливі.

Візьмемо частковий перемежок (a, x), де $a<x$. Імовірність, що вартість величини x лежить між a і x, ,буде очевидячки, залежати від a і x. Означимо її

$$p(a,x).$$

Тоді $p(a, x+dx)$ буде означати ймовірність, що вартість величини x лежить між a і $x+dx$, де dx означає додатнє досить мале прирощення x, а $p(x, x+dx)$ - імовірність, що вартість x лежить між x і $x+dx$, себто на перемежку, довжина якого рівняється dx. На основі теореми додавання ймовірностей будемо мати

$$p(a, x+dx) = p(a,x) + p(x, x+dx),$$

бо

$$a < x < x+dx.$$

Звідси

$$p(x, x+dx) = p(a, x+dx) - p(a,x). \qquad (I)$$

Права частина цієї рівности при $a = const$. є функцією лише x і уявляє прирощення функції $p(a,x)$ відповідне прирощенню dx аргумента x. При досить малому dx ріжниця

$$p(a. x+dx) - p(a,x)$$

буде теж досить малою порядка однакового з порядком dx. Означимо її $dp(a,x)$ і перепишемо рівність (I) таким чином

$$p(x, x+dx) = \frac{dp(a,x)}{dx}dx.$$

Положивши

$$\frac{dp(a,x)}{dx} = f(x),$$

будемо мати

$$p(x, x+dx) = dp(a,x) = f(x)dx.$$

Інтегруючи цю рівність в межах від a до x , дістанемо

$$p(a,x) = \int_a^x f(x)dx ,$$

звідки ймовірність, що вартість величини x лежатиме на перемежку (a, b), визначиться інтегралом

$$\int_a^b f(x)dx . \qquad (2)$$

Діференціал

$$dp = f(x)dx ,$$

який визначає ймовірність, що вартість незалежної змінної x лежатиме на елементарному перемежкові довжиною dx , називається елементарною ймовірністю. Сама ж функція

$$f(x)$$

має назву густоти ймовірности, вона обірається більш менш довільно в кожному окремому випадкові відповідно умовам даної задачі, однак завше мусить задовольняти слідуючі три умови :

1). $f(x) \geqslant 0$ для $A \leqslant x \leqslant B$,

2). $f(x) = 0$ для $x < A$ і $x > B$,

3). $\int_A^B f(x)dx = 1$

Справді, пригадуючи, що ,згідно з нашим припущенням, всі можливі вартости x знаходяться на перемежку (A,B) і що поза цим перемежком x не може мати жадної вартости, одразу бачимо, що перечислені умови є ніщо инче, як аналітичний вираз відомих загальних властивостей ймовірности, а саме : 1) ймовірність ніколи не може бути відємною, 2) імовірність неможливої події є завше нуль і 3) імовірність події певної є одиниця.

Найпростіще припущення відносно довільної функції $f(x)$ є

$$f(x) = const. \quad \text{для } A \leqslant x \leqslant B .$$

Означивши

$$f(x) = C ,$$

дістанемо з третьої умови

$$\int_A^B f(x)dx = 1 \quad , \quad C = \frac{1}{B-A} = \frac{1}{\mathcal{L}} ,$$

де $\mathcal{L}$ = B-A, і ймовірність (2) прийме вигляд

$$\frac{1}{\mathcal{L}}\int_a^b dx . \qquad (3)$$

Ясно, що при $f(x) = const$. імовірности, що вартости величини x лежатимуть на однакових перемежках в середині (A,B), будуть однакові, тому всі можливі вартости x можна вважати в цьому випадкові однаковоможливими. Таким чином найпростіще припущення відносно $f(x)$ є припущення однаковоможливости всіх можливих випадків. Вираз (3) показує, що при $f(x) = const$. імовірність що вартість x лежить на даному перемежкові, пропорційна довжині цього перемежка.

Зауважуємо, що припущення $f(x) = const$. нічим власне не обмежує нашої довільности при виборі $f(x)$. Можна показати, що, зробивши в загальній формулі (2) відповідну заміну незалежної змінної, можна завше надати їй таку форму, що підінтегральна функція буде рівнятися одиниці, себто сталому числу, і таким чином перейти до припущення однаковоможливости всіх можливих випадків. Покладемо

$$x = \varphi(u)$$

і припустимо, що старий перемежок інтегрування (a,b) перетвориться після заміни незалежної змінної в перемежок (u_1, u_2). Тоді дістанемо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u_1}^{u_2} f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du .$$

Дібравши функцію $\varphi(u)$ таким чином, щоб

$$f[\varphi(u)]\varphi'(u) = 1 \ , \qquad (4)$$

дістанемо для ймовірности вираз

$$\int_{u_1}^{u_2} du \ ,$$

одповідаючий припущенню одинаковоможливости. Умова (4) є діференціальне рівнання, яке безпосередньо інтегрується в квадратурах.

Як що маємо кілько величин, то мусимо виділити перш за все випадок, коли ці величини незалежні. Дві величини x і y , можливі вартости яких утворюють безмежні й неперервні збори в даних межах, називаються незалежними, коли густота ймовірности $f_1(x)$ для величини x не залежить від відомої чи невідомої вартости величини y , а густота ймовірности $f_2(y)$ для величини y не залежить від відомої чи невідомої вартости величини x .

Нехай всі можливі вартости величини x містяться на перемежкові (А,В), а всі можливі вартости величини y - на перемежкові (С,Д). Нехай до того числа a і b задовольняють умові

$$A < a < b < B \ ,$$

а числа с і d - умові

$$C < c < d < D \ .$$

Тоді, згідно з попереднім, імовірність нерівностей $a \leq x \leq b$ визначиться інтегралом

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \ ,$$

а ймовірність нерівностей $c \leq y \leq d$ - інтегралом

$$\int_c^d f_2(y)\,dy \ .$$

Імовірність же, що для незалежних величин x і y нерівности

$$a \leq x \leq b \quad і \quad c \leq y \leq d$$

здійсняться разом, буде очевидно на основі теореми множення ймовірностей рівнятися подвійному інтегралові:

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \int_c^d f_2(y)\,dy = \int_a^b\int_c^d f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy \ .$$

Переходячи до загального випадку, припустимо, що сукупність всіх можливих вартостей двох величин x і y утворює двохвимірну непереривну область, яку означимо Ω. Аналітично ця область визначиться повними нерівностями, яким задовольняють всі можливі вартости x і y. Нехай ω означає повну частину области Ω. Частковій области ω відповідають, очевидячки, свої нерівности, які не повинні протиріччити загальним нерівностям, обмежуючим область Ω. Імовірність, що вартости x і y належатимуть частковій области ω, будемо визначати подвійним інтегралом

$$\iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy \ , \tag{5}$$

де $f(x,y)$ є довільна функція двох незалежних змінних x і y. Діференціал

$$f(x,y)\,dx\,dy \ ,$$

очевидячки, визначає ймовірність, що вартости величин x і y лежатимуть на елементарних перемежках dx і dy. Цей діференціал має назву елементарної ймовірности у випадку двох незалежних змінних. Функція $f(x,y)$ називається теж густотою ймовірности і обірається в кожному окремому випадкові більш менш довільно, але так, щоби задовольнялися слідуючи умови

1). $f(x,y) \geq 0$ в цілій области Ω,

2). $f(x,y) = 0$ поза областею Ω і (6)

3). $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

Зміст цих умов не потрібує пояснень.

Найпростіше припущення відносно функції $f(x,y)$ - це

$$f(x,y) = const.$$

для всіх вартостей x і y, які належать области Ω. Як що будемо при цьому дивитися на x і y, як на Декартові координати точки на площі, то области Ω всіх можливих вартостей x і y відповідатиме певна частина координатної площі xy, величина якої нехай буде S. Означивши

$$f(x,y) = C ,$$

дістанемо з третьої умови (6)

$$C\iint\limits_{\Omega} dx\,dy = 1 , \quad C = \frac{1}{S} ,$$

звідки ймовірність (5) прийме вигляд

$$\frac{1}{S}\iint\limits_{\omega} dx\,dy . \tag{7}$$

Останній вираз показує, що при $f(x,y)=const.$ імовірність що точка (x,y) лежатиме на певній частині площі, буде пропорційна величині цієї частини, так що однаковим частинам площі відповідатимуть теж однакові ймовірности, а тому можна сказати, що в цьому випадкові всілякі можливі положення точки (x,y) є однаковоможливі.

Примітка. Ясно, що незмінність густоти ймовірности лише тоді свідчить про однаково - можливість всіляких положень точки, коли ця точка знаходиться на площі і положення її визначається Декартовими координатами.

Очевидно, що і у випадку двох незалежних змінних можна показати, що умова однаковоможливости - $f(x,y)=const$ - нічим не обмежує нашої довільности при виборі функції $f(x,y)$, бо завше можна відповідним підбором незалежних змінних цій умові, бодай теоретично, задовольнити. Справді, покладемо в інтегралі (5)

$$x = \varphi(u,v) , \quad y = \psi(u,v) .$$

Тоді

$$dx\,dy = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv ,$$

де

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u} ,$$

Означивши ω' область, в яку перетвориться попередня область інтегрування ω, дістанемо :

$$\iint\limits_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\omega'} f(\varphi,\psi)\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right| du\,dv .$$

Функції $\varphi(u,v)$ і $\psi(u,v)$, очевидячки, можна завше дібрати так, щоби

$$f(\varphi,\psi)\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right| = 1 .$$

Остання рівність є диференціальне рівнання в окремих похідних, якому задовольняє безмежна кількість пар функцій φ і ψ (одна обірається довільно, а друга знаходиться з рівнання). Таким чином імовірність, що вартости величин u і v, якими ми замінили x і y, лежатимуть в области ω', визначиться інтегралом

$$\iint\limits_{\omega'} du\,dv .$$

Останній же вираз, як відомо, відповідає припущенню однаковоможливости.

Переходячи до загального випадку n величин

$$x, y, ---- w$$

будемо анальоґічно визначати ймовірність, що вартости цих величин належатимуть до певної n-вимірної тяглої области σ, яка є частиною такої ж области Σ, n-кратним інтегралом

$$\iint\limits_{\sigma} ---- \int f(x,y,---w)\,dx\,dy---dw .$$

Густоту ймовірности - функцію n незалежних змінних $f(x,y,----w)$ будемо обірати в кожному конкретному випадкові більш менш довільно, пільнуючи однак, щоб вона не набувала відємних вартостей і щоб інтеграл

$$\iint\limits_{\Sigma} ---- \int f(x,y,---w)\,dx\,dy---dw ,$$

розгорнений на всі можливі вартости $x, y, ----, w$, був рівний одиниці

§ 3. Многозначність задач на неперервні ймовірности.

В попередньому параграфі було сказано,що густота ймовірности функція f, або, що те саме, елементарна ймовірність, обірається в кожному окремому випадкові більш менш довільно. Це треба розуміти в той спосіб, що звичайно умови задач на неперервні ймовірности допускають ріжні припущення відносно функції f, які, звичайно, хотя й не випливають безпосередньо зі змісту умови задачі, але принаймні не протирічать їй. Таким чином можна сказати, що задачам цього роду відповідають ріжні можливі припущення відносно функції f ;спинитися на тому чи инчому припущенню залежить цілком від нашого вибору. Ріжні припущення, взагалі кажучи, ведуть до ріжних результатів. Звідси й повстає многозначність або неозначеність таких задач. Цей факт звертав на себе увагу багатьох вчених і був причиною того, що деякі з них, наприклад Бертран, взагалі скептично ставилися до проблем неперервних ймовірностей, вважаючи їх задачами, які не мають певного сенсу. Однак глибша аналіза показує,що це не так. Як що дана задача допускає ріжні припущення відносно f, то це свідчить, що вже в самій умові задачі є певна неозначеність. Вибір же одного з допустимих припущень є, очевидячки, ніщо инче, як певне доповнення умови задачі, після якого немає вже місця для неозначености особливо,коли мається до діла з конкретним питанням. Таким чином можна сказати, що з даної задачи шляхом доповнення її умови в певному напрямкові, получається нова задача, цілком означена. Отже в тім факті, що дана задача має ріжні розвязки, не треба вбачати якогось скритого протиріччя, лише признати, що не з ріжними розвязками однієї задачи доводиться мати діло, тільки з такою ж кількістю ріжних задач, отриманих з даної через відповідні доповнення.

Нехай у випадку двох незалежних змінних відносно густоти ймовірности зроблено певне припущення, яке веде до ймовірности

$$p_1 = \iint \varphi(x,y)\,dx\,dy ,$$

де $\varphi(x,y)$ є вже функція означена. Другому припущенню відповідають взагалі инчі координати ξ і η .

Нехай друге припущення приводить до ймовірности

$$p_2 = \iint \psi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Хоч обидві ймовірности відносяться до одної й тієї самої події, але при ріжних припущеннях відносно густоти ймовірности, а тому зрозуміло, що вони ріжні. Лише в тому окремому випадкові, коли від одного припущення можна перейти до другого через перетворення незалежних змінних, імовірности будуть однакові ; такі припущення будемо звати рівноцінними Наприклад, в даному випадкові, встановивши між обома системами координат залежність

$$\xi = u(x,y) \;;\; \eta = v(x,y) \quad ,$$

зробимо в p_2 заміну змінних. Дістанемо:

$$p_2 = \iint \psi(u,v) \left| \frac{D(u,v)}{D(x,y)} \right| dx\, dy \quad ,$$

при чому інтегрування поширюється на ту саму область, що і в p_1 . Ясно, що лише тоді, коли

$$\psi(u,v) \left| \frac{D(u,v)}{D(x,y)} \right| = \varphi(x,y) \quad ,$$

буде $\qquad p_2 = p_1$

і обидва припущення будуть рівноцінними. З другої ж сторони очевидно, що, спинившися на певному припущенню, завше можна замінити його инчим, з ним рівноцінним : треба лише зробити відповідне перетворення незалежних змінних. Зокрема, коли

$$\psi(u,v) \left| \frac{D(u,v)}{D(x,y)} \right| = 1 \quad ,$$

то

$$p_2 = \iint dx\, dy \quad ,$$

і ми від припущення, що густота ймовірности визначається функцією $\psi(\xi,\eta)$, переходимо до инчого, рівноцінного з ним, що густота ймовірности є величина стала. Можна сказати, що всякому довільному припу-щенню відносно функції f відповідає своя система незалежних змінних : обрати певне припущення це все ідно, що обрати певну систему змінних - отже замісць довільного вибору функції f можна, очевидно, говорити про довільність у виборі незалежних змінних.

В задачах конкретного характеру довільність у виборі функції f звичайно значно обмежена, цей вибір майже завше передрішений вже самими умовами задачі : певній конкретній задачі відповідає певна густота ймовірности, або, другими словами, певна система змінних, залежна лише від постановки задачі.

Наприкінці відмітимо ще один цікавий висновок, до якого прийшов Пуанкаре *). Він показав, що в певних випадках остаточний результат не залежить від вибору довільної функції; для цього вистарчить припустити, що функція задовольняє певним, досить широким, умовам, наприклад таким, які відносяться до її тяглости, або тяглости та обмежености її похідних і т.д.

§ 4. Геометричні ймовірности.

По перше довелося зустрінутися з неперервними ймовірностями в питаннях геометричного характеру ; крім того задачі з области геометрії це й є, переважно, та категорія задач, де взагалі найчастіще доводиться мати діло з такими ймовірностями. Тому неперервні ймовірности часто називають також геометричними ймовірностями. В цьому параграфі ми встановимо ті загальні основи, на яких абстрактна теорія, розвинута в попередніх параграфах, приміняються до геометричних задач.

Із аналітичної геометрії відомо, що положення всякого геометричного образу в просторі (одно, двох і трьох - вимірнім) визначається певною кількістю певних величин, які називаються параметрами або змінниками : кожному положенню геометричного образа відповідають певні вартости відповідних параметрів, кожній зміні в положенню відповідає певна зміна вартости принаймні одного параметра і навпаки усякій зміні параметрів відповідає певне переміщення даного геометричного образу з одного положення в друге. Так, наприклад, положення точки на простій лінії, на площі і в просторі визначається, як відомо, одною, двома і трьома величинами - її координатами, положення простої лінії на площі або в просто-

*) Poincaré. Calcul des probabilités. 1896, ст. 126-130.

рі визначається двома або чотирма параметрами, положення площі в просторі - трьома і т.д. Задачі на геометричні ймовірности в більшости випадків, звичайно, приводяться до такої схеми : певний геометричний образ може займати всілякі положення в певній области простору (одного, двох, або трьох вимірів), треба знайти ймовірність, що він буде знаходитися в певній частині цієї области ; як сама область, так і її частина визначаються умовами задачі ; відшукувана ймовірність дається звичайно кратним інтегралом, кратности рівній числу параметрів , якими визначається положення геометричного образа . Ясно, що особливої ваги набірає встановлення відповідно з умовами даної задачі довільної підінтегральної функції, яку ми назвали густотою ймовірности і від форми якої залежать трудноші інтеграції, себто остаточне розвязання задачі.

§ 5. Кілька задач.

Задача I. На відтинку $AB=a$ визначені випадково дві точки P і Q . Яка ймовірність, що відтинок PQ меньше b , де b довільна дана величина, при чому $b<a$?

Покладемо $AP=x$ і $AQ=y$. Тоді можна сказати, що положення точок P і Q на відтинку AB визначиться двома величинами x і y , якізадовольняють умовам

$$0\leq x\leq a \quad і \quad 0\leq y\leq a\,, \qquad \text{(I)}$$

а довжина відтинку PQ рівнятиметься абсолютній вартости ріжниці

$$|x-y|\,,$$

бо точка Q може лежати, як наліво, так і направо від точки P .

Сукупність вартостей x і y , задовольняючих нерівностям (I), творить збір всіх можливих випадків ; ті ж вартости, які задовольняють умові

$$|x-y|<b\,,$$

рівнозначній з умовами

$$y>x-b \quad і \quad y<x+b\,, \qquad (2)$$

дадуть, очевидячки, збір випадків сприятливих.

Будемо розглядати величини x і y , як Декартові координати точки на площі. Тоді, очевидно збору всіх можливих випадків відповідатимуть всілякі положення точки (x , y) в середині квадрата $O\alpha\beta\gamma$, збудованого на осях координат, один з вершків якого лежить в початку 0 системи координат і бік якого рівняється a (див. рис.3).

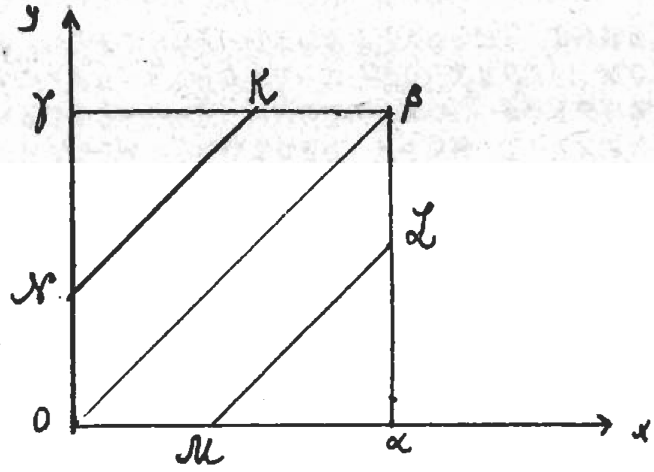

рис.3.

Відкладемо на боках квадрата $O\alpha$ і $O\gamma$ відтинки OM і ON рівні b і через точки M і N поведемо прості ML і NK рівнобіжні з косиною $O\beta$. Рівнання простих ML і NK будуть відповідно

$$y = x - b \quad і \quad y = x + b \; .$$

Тоді всілякі положення точки (x , y) в середині замкненого ламаного контура $OML\beta KN$ відповідатимуть, очевидячки, на основі (2) збору сприятливих випад - ків. Таким чином імовірність, що довжина відтинка PQ буде меньше b , є ідентична з імовірністю, що точка (x , y) на площі квадрата $O\alpha\beta\gamma$ лежатиме в середині замкненого контура $OML\beta KN$. Всі можливі положення точки (x , y) будемо вважати однаковоможливими, тоді відшукувана ймовірність p буде, пропоркійна величині площі $OML\beta KN$ і знайдеться на основі формули (7) §2, яка в нашому випадкові прийме вигляд

$$p = \frac{1}{a^2} \iint dx\,dy \, ,$$

де подвійний інтеграл правої частини треба розгорнути на площу $OML\beta KN$. Величину цього інтеграла, рівну величині відповідної площі, знаходимо відразу геометричним шляхом

$$\iint dx\,dy = \text{пл. } OML\beta KN = a^2-(a-b)^2 = 2ab-b^2.$$

Звідси відшукувана ймовірність p буде остатсчно рівнятися

$$p = \frac{2ab-b^2}{a^2} = \frac{2b}{a} - \frac{b^2}{a^2}.$$

Задача 2. (Problème du baton brisé)
На відтинку довжиною $2a$ визначені наосліп дві точки. Яка ймовірність, що з отриманих таким чином трьох відтинків можна збудувати трикутник ?

Довжини отриманих відтинків означимо x, y, z. Ці три додатні величини звязані очевидною умовою

$$x+y+z = 2a, \tag{3}$$

Щоби збудувати з отриманих відтинків трикутник, треба, щоби величини x, y, z задовольняли умовам

$$x+y > z,\ y+z > x,\ z+x > y \tag{4}$$

(сума двох боків трикутника більше третього боку). Тому що величини x, y, z завше звязані умовою (3), то незалежними з них будуть лише дві, наприклад x і y. Ця обставина дозволяє нам третю величину z зовсім виключити з нашого розгляду. Загальна умова, якій задовольняють всі можливі вартости x і y є, очевидно, така :

$$x+y < 2a. \tag{5}$$

Ті ж умови, яким повинні задовольняти вартости x і y, щоби з отриманих відтинків можна було збудувати трикутник, дістанемо з нерівностей (4), виключивши з них z на основі рівности

$$z = 2a-x-y,$$

Умови ці будуть слідуючі :

$$x+y > a,\ x < a,\ y < a. \tag{6}$$

Таким чином збір всіх можливих випадків в нашій задачі визначається нерівністю (5), а збір випадків сприятливих - нерівностями (6) .

Будемо розглядати величини x і y , як Декартові ортогональні координати точки на площі. Відкладемо на координатних осях (рис. 4) відтинки OA і OB , рівні кожний $2a$, і зєднаємо точки A і B простою AB , рівняння якої, очевидячки буде

$$x+y=2a .$$

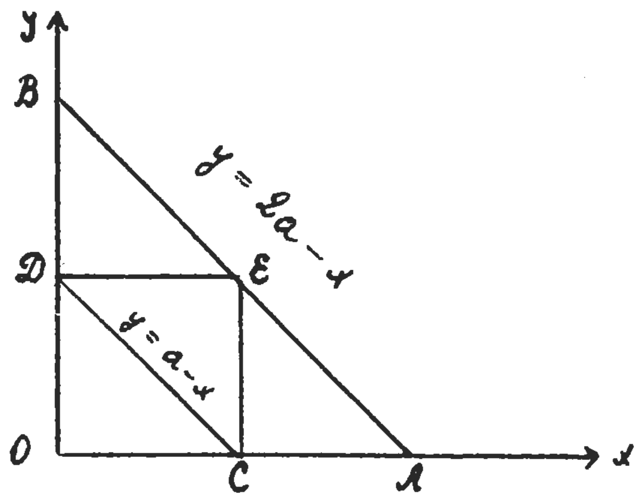

рис.4.

Означивши E середину простої AB , спустимо з точки E прямі EC і ED на координатні оси. Ясно,що

$$OC = OD = EC = ED = a$$

Нарешті зєднаємо точки C і D простою CD . Рівняння цієї простої буде

$$x+y = a .$$

Очевидно, що геометричне місце точок, координати яких задовольняють нерівностям (5), буде площа прямокутного рівнораменного трикутника OAB , а геометричним місцем точок, яких координати задовольняють умовам (6), буде площа трикутника CDE . Таким чином збору всіх можливих випадків відповідають всілякі положення точки (x,y) в середині трикутника OAB , а збору сприятливих випадків - положення точки (x,y) в середині трикутника CDE . Припустім, що всі можливі положення точки (x,y) однаковоможливі. Тоді відшукувана ймовірність p, буде пропорційна величині площі трикутника CDE і знайдеться по формулі (7) § 2. Зауважуючи, що

$$пл.\,\Delta OAB = 2a^2,$$

дістанемо

$$p_1 = \frac{1}{2a^2}\iint\limits_{\Delta CDE} dxdy = \frac{a^2}{2} : 2a^2 = \frac{1}{4}.$$

Скористуємося цією задачею для ілюстрації сказаного в §3 . Зробимо відносно густоти ймовірности якенебудь инче припущення, наприклад, що вона пропорційна здобуткові незалежних змінних. Як що ми при цьому залишимо ті самі змінні x і y (очевидно й ту саму область інтегрування), то ясно, що нове припущення не буде рівноцінним з першим і результат буде відмінний від попереднього. Отже нехай густота ймовірности має вигляд

$$Cxy$$

де C множник пропорційности. Як що межі інтегрування по x візьмемо 0 і a , то по y , очевидячки, треба інтегрувати від $a-x$ до a. Означивши відшукувану ймовірність p_2 , дістанемо

$$p_2 = C\int\limits_{x=0}^{x=a}\int\limits_{y=a-x}^{y=a} xy\,dxdy = C\int\limits_0^a \frac{x^2(2a-x)}{2}dx =$$

$$= \frac{C}{2}\left|\frac{2ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right|_0^a = C\cdot\frac{5a^4}{24}. \qquad (7)$$

Множник пропорційности C знайдеться згідно із загальною теорією з умови

$$C\int\limits_{x=0}^{x=2a}\int\limits_{y=0}^{y=2a-x} xy\,dxdy = 1,$$

де інтегрування, очевидячки, розгорнене на площу трикутника OAB . Ця умова дає

$$C\int\limits_0^{2a}\frac{4a^2x - 4ax^2 + x^3}{2}dx = 1;$$

$$\frac{C}{2}\left|2a^2x^2 - \frac{4ax^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right|_0^{2a} = \frac{C}{2}\left(8a^4 - \frac{32a^4}{3} + 4a^4\right) = 1;$$

$$C \cdot 2a^4\left(3-\frac{8}{3}\right) = C\cdot\frac{2a^4}{3} = 1 \;; \quad C = \frac{3}{2a^4},$$

звідки

$$p_2 = C\cdot\frac{5a^4}{24} = \frac{3}{2a^4}\cdot\frac{5a^4}{24} = \frac{5}{16}.$$

Таким чином новий результат ріжниться від попереднього на $1/16$. Це цілком зрозуміло, бо ясно, що ми маємо тут до діла з двома ріжними задачами.

Покажемо тепер, що відповідним перетворенням незалежних змінних можна від одного припущення перейти до рівнозначного з ним инчого. Наприклад, в даному випадкові від припущення, що густота ймовірности є

$$Cxy,$$

можна перейти до рівноцінного з ним припущення однаковоможливости всіх можливих випадків. Покладемо тільки

$$x = u, \quad y = \sqrt{\frac{2v}{u}}.$$

Тоді відповідний Якобіян буде

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{2uv}},$$

а інтегрування, як це легко перевірити, треба переводити : по u від 0 до a і по v від

$$\frac{u(a-u)^2}{2} \quad \text{до} \quad \frac{ua^2}{2}.$$

Рівність (7) перетвориться таким чином

$$p_2 = C\int\limits_{u=0}^{u=a}\int\limits_{v=\frac{u(a-u)^2}{2}}^{v=\frac{ua^2}{2}}\sqrt{2uv}\,\frac{1}{\sqrt{2uv}}\,du\,dv = C\int\limits_{u=0}^{u=a}\int\limits_{v=\frac{u(a-u)^2}{2}}^{v=\frac{ua^2}{2}}du\,dv. \qquad (8)$$

Тут вже густота ймовірности є величина стала, себто ми перейшли до припущення однаковоможливости. Перехід від рівности (7) до рівности (8) був зроблений за допомогою лише перетворення незалежних змінних, тому ясно, що результат залишиться той самий – $p_2 = 5/16$. Перевівши інтегрування в нових змінних u і v, можна переконатися в цьому безпосередньо.

Задача 3. Яка ймовірність, що рівняння

$$x^2+px+q=0$$

має дійсні корні, як що сочинники його є дійсні числа, випадково взяті відповідно з перемежків $(-\mathcal{P},\mathcal{P})$ і $(-\mathcal{Q},\mathcal{Q})$, де $\mathcal{P}$ і $\mathcal{Q}$ є дійсні дані числа ?

Всі можливі вартости сочинників p і q задовольняють, очевидячки, умовам, які визначаються нерівностями

$$-\mathcal{P}\leqslant p\leqslant\mathcal{P} \quad і \quad -\mathcal{Q}\leqslant q\leqslant\mathcal{Q}. \qquad (9)$$

Ті ж вартости сочинників p і q, з якими рівняння

$$x^2+px+q=0$$

буде мати дійсні корні, повинні ще задовольняти, як це відомо з альгебри, умові

$$p^2\geqslant 4q. \qquad (10)$$

Таким чином збір всіх можливих випадків визначиться нерівностями (9), а збір сприятливих випадків - нерівністю (10).

Будемо розглядати величини p і q, як ортогональні Декартові координати точки на площі. Від початку O системи координат відкладемо (рис.5) на осі p відтинки OA і OA_1, довжиною рівні $\mathcal{P}$, і на осі q - відтинки OB і OB_1, довжиною рівні $\mathcal{Q}$, і через точки A, A_1, B, B_1 поведемо прості рівнобіжні з координатними осями

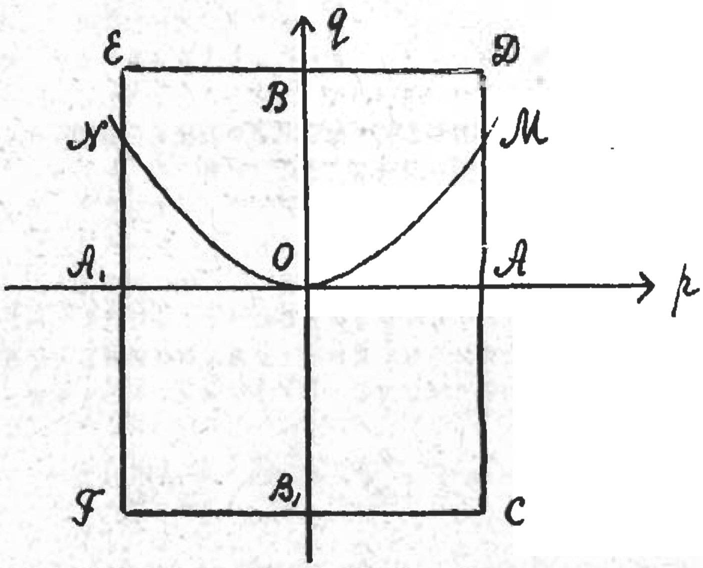

рис.5.

Отриманий таким чином прямокутник $CDEF$ буде, очевидячки, геометричним місцем точок (p, q), координати яких задовольняють нерівностям (9). Як що збудуємо параболу

$$p^2 = 4q, \qquad (11)$$

то ясно, що вона лежатиме над віссю p і матиме за вісь симетрії вісь Oq. Точки перетину параболи (11) з прямокутником $CDEF$ будуть взагалі, як в цьому легко переконатися, лежати :

1). або на відтинках AD і A_1E, як що

$$P^2 < 4Q,$$

2). або в точках D і E, як що

$$P^2 = 4Q,$$

3). або на відтинку DE, як що

$$P^2 > 4Q.$$

Припустимо, наприклад, що дані числа P і Q задовольняють умові

$$P^2 < 4Q. \qquad (12)$$

Тоді парабола, очевидячки, перетне відтинки AD і A_1E, рівнобіжні з віссю Oq, і займе положення вказане на рис. 5. Точки перетину означимо M і N. Частина площі прямокутника $CDEF$, обмежена простими CF, CM, FN і відтинком MON параболи (11) буде, очевидячки, геометричним місцем точок (p, q), координати яких задовольняють умові (10). Таким чином збору всіх можливих випадків відповідають всілякі положення точки (p, q) в середині прямокутника $CDEF$, а збору сприятливих випадків - положення точки (p, q) в середині його частини. $CMONF$ Будемо вважати всі можливі положення точки (p, q) однаковоможливими. Тоді відшукувана ймовірність буде пропорційна величині площі $CMONF$ і знайдеться по формулі (7) §2. Зауважуючи, що

$$\text{пл.}\, CDEF = 4PQ,$$

дістанемо для відшукуємої ймовірности такий вираз

$$\frac{1}{4PQ}\int_{-P}^{P}dp\int_{-Q}^{\frac{p^2}{4}}dq=\frac{1}{4PQ}\int_{-P}^{P}\left(\frac{p^2}{4}+Q\right)dp=\frac{P^2+12Q}{24Q}=\frac{1}{2}+\frac{P^2}{24Q}.$$

Не трудно переконатися, що ймовірність ця буде завжди меньше одиниці. Справді, для того, щоби вона була більше одиниці, досить, щоби було

$$\frac{P^2}{24Q}>\frac{1}{2},$$

або

$$P^2>12Q,$$

що протирічить умові (12), якій в даному випадкові повинні задовольняти числа P і Q.

§ 6. Бюфонова задача.

Задача 4. На позему площу, вкриту рівнобіжними простими, віддаленими одна від одної на $2a$ кидають наосліп дуже тонку голку, довжиною $2l$, при чому $l<a$. Яка ймовірність, що ця голка, впавши на площу, перетне одну з рівнобіжних простих ?

Перш за все зауважимо, що відшукувана ймовірність не залежить від того, між якими саме двома рівнобіжними простими впаде середина голки. Тому можна припустити, що середина голки мусить впасти між двома певними простими, які означимо AB і CD. Розглянемо якенебудь одне з можливих положень голки на поземій площі. Нехай, наприклад, голка займе положення KL, а середина її попаде в точку O (рис.6). Поведемо через точку O просту EF, прямову до рівнобіжних простих AB і CD і визначимо на відтинку EF його середину J. Положення голки на поземій площі будемо визначати віддаленням y її середини O від найблизчої з рівнобіжних простих (в нашому випадкові це буде проста AB) і кутом x, який творить кінець голки, направлений в бік найблизчої простої, з прямою спущеним на цю просту із середини голки. В нашому випадкові, очевидно, буде

$$y=OE \quad і \quad x=\angle EOK.$$

Умовимося лічити кут x від пряму OE в обидві сторони.

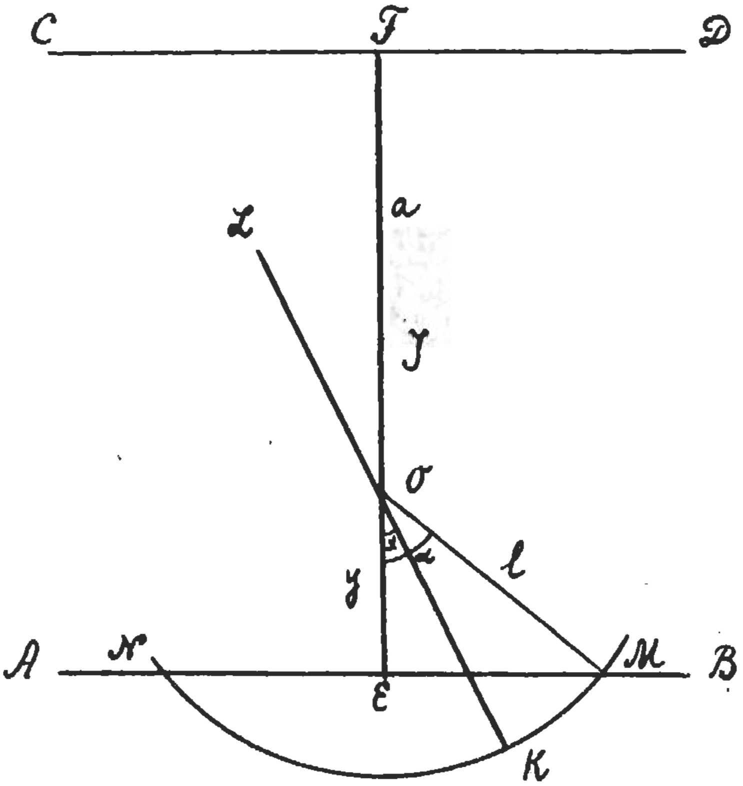

рис.6..

Величиня x і y , якими визначається положення голки на поземій площі, задовольняють, очевидно, таким нерівностям :

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} , \qquad \text{(I)}$$

$$0 < y < a .$$

Закреслимо з точки O промінем $OK = l$ дугу кола і означимо M і N точки перетину цієї дуги з простою AB . Точку M зеднаємо з точкою O і означимо α кут EOM . Зауважуючи, що $OM = l$, знаходимо

$$y = l\cos\alpha . \qquad (2)$$

Голка LK , очевидячки, може перетяти тільки просту AB , віддалення якої від середини голки менше a . Це може статися лише тоді, коли

$$x < \alpha ,$$

себто

$$\cos x > \cos\alpha ,$$

або

$$l\cos x > l\cos\alpha .$$

Звідси на основі (2) знаходимо таку умову перетину голкою LK найблизчої до її середини простої AB :

$$y < l\cos x .$$

Крім того, очевидно, лишається умова

$$y > 0 .$$

Що ж до величини x , то ясно, що голка LK може перетяти просту AB при всякій можливій вартости x . Звідси умови, яким повинні задовольняти вартости x і y для того, щоби голка перетинала найблизчу до її середини просту AB , будуть мати такий вигляд :

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} ,$$
$$0 < y < l\cos\alpha . \qquad (3)$$

Таким чином збір всіх можливих випадків визначається нерівностями (I), а збір всіх сприятливих випадків - нерівностями (3).

Будемо вважати всілякі положення голки на поземій площі однаковоможливими, себто припустимо, що густота ймовірности є незмінна. Означимо її C . Тоді відшукувана ймовірність p , згідно з загальною теорією розвинутою в §2, визначиться такою рівністю

$$p = C\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{0}^{l\cos\alpha} dy = Cl\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = Cl \left| \sin x \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = C2l .$$

Сталу густоту ймовірности C знайдемо з умови

$$C\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{0}^{a} dy = 1 ,$$

звідки

$$C = \frac{1}{a\pi} .$$

Таким чином відшукувана ймовірність буде рівна

$$p = \frac{2l}{a\pi} . \qquad (4)$$

Задача ця відома, як перший приклад геометричних імовірностей. Вона була запропонована Бюфоном, який також подав і її розвязання в своїй праці *Essai d'arithmétique morale* , виданій в 1777р.

Цюрихський астроном проф. Вольф виконав експеріментальну перевірку правильности формули(4). В своїх дослідах він брав

$$2l = 36^{m.m.};\ 2a = 45^{m.m.}$$

Формула (4) в цьому випадкові дає

$$p = \frac{2l}{a\pi} = \frac{72}{45\pi} = 0{,}5093,$$

як що візьмемо $\pi = 3{,}1415$.
Вольф зробив 5000 дослідів, при чому голка перетяла рівнобіжні 2532 рази. Отже фреквенція рівна

$$\frac{2532}{5000} = 0{,}5064.$$

Малу ріжницю між імовірністю 0,5093 і фреквенцією 0,5064 можна розглядати, як підтвердження теореми Бернуллі.

З другої сторони дослідами Вольфа можна скористатися для обчислення числа π . Справді, на основі теореми Бернуллі можемо написати наближену рівність

$$\frac{72}{45\pi} = \frac{2532}{5000},$$

звідки знаходимо для π вартість 3,159 , яка ріжниться від правдивої меньше як на 0,02 .

§ 7. Задачі на просту лінію на площі.

Задача 5. В середині кола проміня R знаходиться меньше коло проміня r . Довільно обрана січна перетинає зовнішнє коло. Яка ймовірність, що вона перетне також і коло внутрішнє ?

Умістимо початок системи Декартових ортогональних координат в осередок O внутрішнього кола (рис.7) і візьмім рівнання січної в нормальній формі

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta = 0 \qquad (I)$$

Положення січної на площі визначається вповні вартостями двох параметрів δ і φ : кожному можливому положенню січної відповідають певні вартости величин δ і φ . Збору всіх можливих випадків,очевидячки, відповідає область зовнішнього кола, а збору випадків сприятливих - область кола внутрішнього .

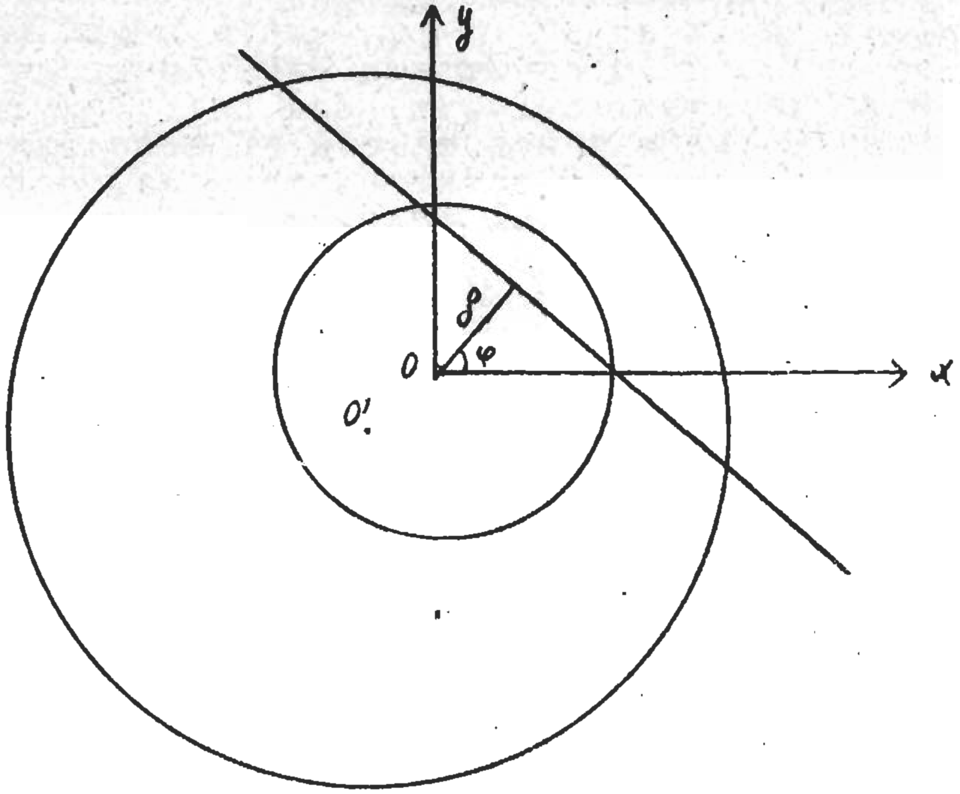

рис.7.

Будемо вважати всі можливі положення січної на зовнішнім колі однаковоможливими, себто припустимо,що густота ймовірности є незмінна. Означимо її C .Тоді, згідно із загальною теорією, імовірність p ,що січна перетне внутрішнє коло, буде мати вигляд

$$p = C\iint d\delta\, d\varphi ,$$

де подвійний інтеграл треба розгорнути на площу внутрішнього кола, якій відповідають нерівности

$$0 \leqslant \delta \leqslant r \quad i \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi .$$

Таким чином імовірність p буде рівна

$$p = C\int_0^r d\delta \int_0^{2\pi} d\varphi = C.2\pi r .$$

Сталий множник C знаходимо з умови

$$C.\iint d\delta d\varphi = 1 , \qquad (1)$$

де подвійний інтеграл розгорнений на всі можливі вартости величин δ і φ , себто на площу зовнішнього кола. Щоби обчислити цей інтеграл перетворимо його до нових змінних. Для цього замінимо стару систему координат новою, теж ортогональною з початком в осередкові O' зовнішнього кола. Нові координати x' і y' звязані зі старими взорами

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a ,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b ,$$

де α , a і b відомі величини. Рівняння (1) після перетворення, як в цьому не трудно переконатися, прийме вигляд

$$x'\cos(\varphi-\alpha) + y'\sin(\varphi-\alpha) + a\cos\varphi + b\sin\varphi - \delta = 0 ,$$

або
$$x'\cos\varphi' + y'\sin\varphi' + \delta' = 0 ,$$

коли означимо

$$\varphi-\alpha = \varphi' \quad і \quad a\cos\varphi + b\sin\varphi - \delta = \delta' ,$$

звідки

$$\varphi = \varphi'+\alpha \quad і \quad \delta = a\cos(\varphi'+\alpha) + b\sin(\varphi'+\alpha) - \delta' . \qquad (3)$$

Перетворимо тепер наш інтеграл до нових змінних δ' і φ' , звязаних зі старими взорами (3). Відповідний Якобіян рівняється одиниці, тому рівність (2) перепишиться так

$$C\iint d\delta d\varphi = C\iint d\delta' d\varphi' = 1 ,$$

де новий інтеграл розгорнений, очевидно, на ту ж саму площу зовнішнього кола. Ясно, що нові змінні δ' і φ' при новій системі координат задовольняють нерівностям

$$0 \leqslant \delta' \leqslant R \quad і \quad 0 \leqslant \varphi' \leqslant 2\pi ,$$

так що попередню рівність можна переписати так

$$C\int_0^a dS'\int_0^{2\pi} d\varphi' = 1 ,$$

звідки

$$C = \frac{1}{2\pi R}$$

а

$$p = \frac{2\pi r}{2\pi R} .$$

Таким чином відшукувана ймовірність рівняється відношенню довжини обвода внутрішнього кола до довжини обвода кола зовнішнього. Отриманий результат можна узагальнити і довести таку теорему загального характеру : як що в середині замкненого вигнутого*) контура довжини $\mathcal{L}$ лежить замкнений вигнутий контур довжини $\mathcal{L}'$, то ймовірність, що довільна січна, яка перетинає зовнішній контур, перетне також і контур внутрішній, рівняється

$$\frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}} .$$

На доказі цієї теореми спинятися не будемо.

Як що зовнішній контур буде коло проміня a , а замісць внутрішнього контура візьмемо відтинок простої довжини $2l$, який будемо розглядати, як границю замкненого вигнутого контура, себто будемо вважати його довжину рівною $4l$, то вищенаведену теорему можна, очевидно, примінити до розвязання Бюфоновсі задачі. Справді, при цих даних дістанемо

$$p = \frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}} = \frac{4l}{2\pi a} = \frac{2l}{a\pi} ,$$

себто вираз однаковий з (4) попереднього параграфа.

Задача 6. Парадокс Бертрана. Коло проміня R перетинають наосліп січною. Яка ймовірність , що довжина отриманої тятиви буде більше ніж бік правильного вписаного трикутника (довжина боку $R\sqrt{3}$)?

Бертран піддав критиці теорію геометричних ймовірностей. Те, що задачі цього роду допускають відносс-

---

*) Вигнутою називають таку криву, яка кожною простою перетинається лише в двох точках.

не густоти ймовірности ріжні припущення, які ведуть до ріжних результатів, викликало у Бертрана скептичне відношення взагалі до проблеми геометричних імовірностей. Наведену задачу Бертран подав*), як приклад, ілюструючий його закиди. Він дав три способи її розвязання і дістав три ріжні розвязки. Хоття ми вже й спинялися в §3 над питанням про многозначність задач на неперервні ймовірности і зясували там, як саме треба розуміти цю многозначність, але вважаємо корисним освітлити ще це питання на конкретному прикладі, скориставшись для цього задачею самого Бертрана.

Бертранові розвязання задачі такі.

I. Симетрія кола дозволяє припустити, що напрямок тятиви відомий. Тоді положення тятиви визначиться вповні положенням точки її перетину з прямовим до неї поперечником кола (рис.8). Тому що бік правильного вписаного трикутника віддалений від осередка колана $R/2$, то довжина тятиви лише тоді буде більше $R\sqrt{3}$, коли віддалення точки її перетину з прямовим поперечником від осередка кола буде меньше $R/2$. Таким чином области сприятливих випадків відповідає відтинок згаданого поперечника, довжиною R, середина якого лежить в осередкові кола. Области ж усіх можливих випадків відповідає, очевидячки, цілий поперечник. Звідси відшукувана ймовірність буде рівна

$$\frac{R}{2R} = \frac{1}{2}.$$

II. Симетрія кола дозволяє також припустити, що один з кінців тятиви на обводі кола є даний наперед себто закріплений нерухомо в певній точці на обводі кола. Дотична в цій точці і два боки правильного вписаного трикутника, один з вершків якого уміщено в цю точку, творять три однакові кути, рівні кожний $\pi/3$. Довжина тятиви буде лише тоді більше $R\sqrt{3}$, коли тятива лежатиме в середньому куті (рис.9). Таким чином середній кут, рівний $\pi/3$, відповідає области сприятливих випадків. Области ж всіх можливих випадків, очевидячки, відповідає кут π, рівний сумі трьох згаданих кутів. Звідси відшукувана ймовірність буде рівна

$$\frac{\pi/3}{\pi} = \frac{1}{3}.$$

---

*) Bertrand. J. Calcul des probabilités 1889. p. 4-5.

III. Положення тятиви визначається вповні положенні її середини, тому випадкове обрання тятиви можна замінити випадковим обранням її середини. Відомо, що обвід кола концентричного з даним, проміня $R/2$, є геометричне місце середин боків правильних вписаних в дане коло трикутників (рис. 10). Звідси ясно, що довжина тятиви буде лише тоді більше $R\sqrt{3}$, коли середина тятиви лежатиме десь в середині внутрішнього кола. Таким чином площа цього кола, рівна $\frac{\pi R^2}{4}$, відповідає области сприятливих випадків. Области ж всіх можливих випадків, очевидячки, відповідає ціла площа даного кола, рівна πR^2. Звідси відшукувана ймовірність буде рівна

$$\frac{\frac{\pi R^2}{4}}{\pi R^2} = \frac{1}{4}.$$

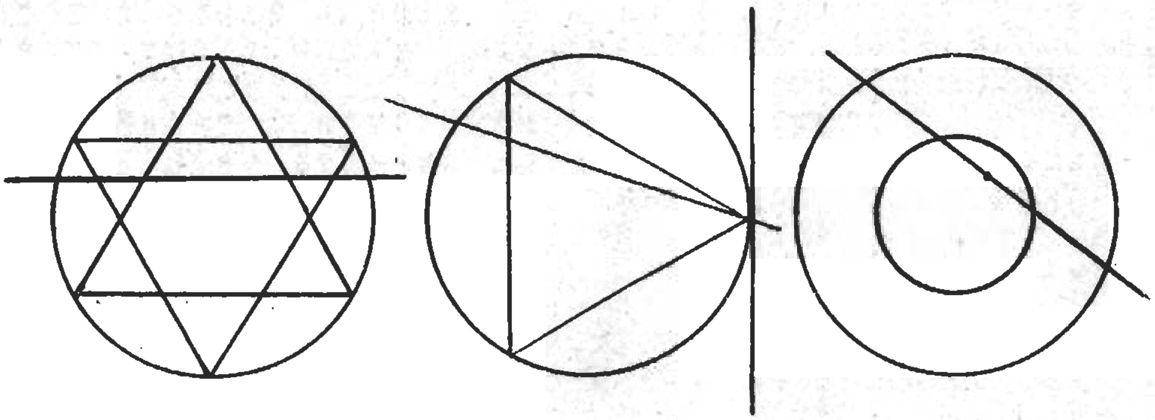

рис. 8 рис. 9 рис. 10

Діставши три ріжні розвязання своєї задачі, Бертран каже, що всі три можна вважати однаково добрими й однаково злими, і робить висновок, що задача *est mal posée* - погано поставлена. З його точки погляду випливає, очевидно, що взагалі всі задачі на геометричні ймовірности не мають певного сенсу.

Покажемо, що із скептицизмом Бертрана погодитися не можна. Ясно, що ми маємо тут до діла із задачею, умова якої вже містить в собі певну неозначеність. Справді, вираз "перетяти наосліп" коло січною є неясний : умова задачі не дає жадних вказівок, який саме спосіб "випадкового обрання" тятиви треба прийняти. Як би ми хтіли, наприклад, перевірити розвязання задачі експеріментально, то не знати, на якому саме досліді треба спинитися. Така неясність у формульованню задачі вимагає певних доповнень до її умови і Бертран в скритому виді такі доповнення зробив у формі трьох ріжних припущень, які й привели до ріжних розвязків. Не трудно показати, що його три ріжні розвязки є ніщо инче, як розвязки трьох окремих задач. Поставимо собі завданням перевірити експеріментально розвязання Бертранової задачі.

Для цього можна перевести такий дослід. На позему площу, покриту рядом рівнобіжних простих, віддалених одна від одної на $2R$, кидається круглий диск, проміня R. Одна з рівнобіжних, очевидно, завше перетне диск. Ясно, що в цьому випадкові правильним буде перше розвязання задачі ($1/2$).

Але можна перевірку зробити і таким дослідом: на поземій площі нарисовані коло й вписаний до нього правильний трикутник, в одному з вершків трикутника припята на прямовисній оси двохкінцева стрілка, довжиною більше $4R$, яка цілком вільно може обертатися в поземій площі навколо оси; як що стрілку пустити в рух, то вона спиниться в довільному положенню і один її кінець завше перетне коло. Очевидно, що правильним буде в цьому випадкові друге розвязання ($1/3$).

Нарешті, дослід може бути й такий: на коло проміня R в поземій площі кидають мале зорнятко і точку, в яку воно впаде, вважають серединою тятиви. Тоді, очевидно, правильним буде третє розвязання ($1/4$).

Ясно, що коли ми доповнимо умову Бертранової задачі відповідно умовам трьох наведених дослідів, то дістанемо три окремі, цілком означені, задачі.

Примінюючи до кожної з цих задач загальну теорію, ми встановимо, як це й повинно бути, три ріжні елементарні ймовірности. Покажемо це. Нехай рівнання січної буде

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta = 0 .$$

Припустимо, що в кожній задачі можливі випадки однаковоможливі, себто що густоти ймовірности є незмінні. Початок Декартових ортогональних координат умістимо в осередку кола.

Тоді в першій задачі положення тятиви визначиться вартостями параметрів δ і φ. Елеметарна ймовірність буде

$$dp = C_1 d\delta d\varphi ,$$

де C_1 є стала густота ймовірности. Збір сприятливих випадків визначиться нерівностями

$$0 \leqslant \delta \leqslant \frac{R}{2} \quad , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi ,$$

а збір всіх можливих випадків - нерівностями

$$0 < \delta < R \quad , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi .$$

В другий задачі параметри δ і φ звязані, як це не трудно бачити, відношенням

$$\delta = R\cos(\varphi - \theta),$$

де θ є кут, утворений з віссю x-ів проміннем кола, направленим в зафіксований кінець тятиви;таким чином незалежним є лише один параметр. Кут θ , який визначає на обводі кола положення закріпленого кінця тятиви, не залежить від величини φ .Тому за незалежні величини, які визначають положення тятиви, можемо взяти φ і θ . Елементарна ймовірність буде

$$dp = C_2 d\varphi d\theta ,$$

де C_2 є стала густота ймовірности. Збір сприятливих випадків визначається нерівностями

$$\frac{\pi}{3} + \theta \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} + \theta \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi ,$$

а збір всіх можливих випадків нерівностями

$$\theta \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} + \theta \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi .$$

В третій задачі положення тятиви визначається положенням її середини. Як що координати її означимо x , y , то елементарна ймовірність буде

$$dp = C_3 dx dy \quad .$$

де C_3 є стала густота ймовірности. Збір сприятливих випадків визначиться, очевидно, нерівностями

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{R}{2} \quad , \quad x^2 + y^2 \leqslant \frac{R^2}{4} ,$$

а збір всіх можливих випадків - нерівностями

$$0 \leqslant x \leqslant R \quad , \quad x^2 + y^2 \leqslant R^2 .$$

Щоби визначити елементарну ймовірність в параметрах δ і φ , зауважуємо, що ці параметри можна розглядати, як полярні координати середини тятиви,коли взяти за полюс осередок кола, а за полярну вісь

-вісь x-ів. Відомо, що елемент площі $dxdy$ в Декартових координатах, перетворений до полярних координат δ і φ, має вигляд

$$\delta d\delta d\varphi .$$

Тому елементарна ймовірність буде рівна після перетворення

$$dp = C_3 \delta d\delta d\varphi .$$

Тут вже густота ймовірности, рівна $C_3\delta$, не є стала величина, а пропорційна довжині радіуса-вектора δ середини тятиви. Збору сприятливих випадків відповідають нерівности

$$0 \leqslant \delta \leqslant \frac{R}{2} \quad , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi ,$$

а збору всіх можливих випадків - нерівности

$$0 \leqslant \delta \leqslant R \quad , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi .$$

Як бачимо, елементарні ймовірности в першій і третій задачі, визначені в однакових незалежних змінних δ і φ, є різні. Що ж торкається елементарної ймовірности в другій задачі, визначеній в незалежних змінних φ і θ, то не трудно показати, що вона теж не є однакова з елементарними ймовірностями першої і третьої задач. Справді, візьмемо, наприклад, елементарну ймовірність першої задачі

$$dp = C_1 d\delta d\varphi$$

й перетворимо її до нових незалежних змінних φ і θ по формулах

$$\delta = R\cos(\varphi-\theta) \text{ і } \varphi = \varphi .$$

Відповідний Якобіян рівняється

$$\frac{\mathcal{D}(\delta,\varphi)}{\mathcal{D}(\varphi,\theta)} = \frac{\partial\delta}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial\delta}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} = -R\sin(\varphi-\theta) ,$$

звідки дістанемо

$$dp = C_1 R \left|\sin(\varphi-\theta)\right| d\varphi d\theta ,$$

(береться, як відомо з інтегрального числення, абсолютна вартість Якобіяна). Порівнюючи цей вираз з елементарною ймовірністю другої задачі, бачимо, що вони ріжні. Пропонуємо читачеві самому обчислити цілу ймовірність p і переконатися, що вартість її лишилася та ж сама - $1/2$. Анальогічно можна показати, що елементарні ймовірности другої і третої задач теж ріжні.

Отже в усіх трьох задачах елементарні ймовірности ріжні.

§ 8. Положення точки на поверхні кулі.

Відносно ймовірности, що точка M буде знаходитися на певній частині поверхні кулі, припустимо, що вона пропорційна величині цієї частини, другими словами, припустимо, що всілякі положення точки M на цілій поверхні кулі однаковоможливі. Як що означимо R промінь кулі, то елемент сферичної поверхні в Декартових координатах буде, як відомо, мати вигляд

$$\frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

В сферичних же координатах елемент поверхні рівняється

$$R^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta,$$

де θ є довгота точки M, а φ - доповнення її широти до 90°. Означивши C множник пропорційности дістанемо таким чином для елементарної ймовірности dp слідуючі рівнозначні вирази :

в Декарт.коорд. $\quad dp = \dfrac{CR\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

в сферич.коорд. $\quad dp = CR^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$ *)

звідки густота ймовірности буде рівнятися :

$\dfrac{CR}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ — в Декарт.коорд.

$CR^2 \sin\varphi$ — в сферич.коорд.

Тут буде на місці зауважити слідуюче : коли ми розглядали положення точки на площі в Декартових ко -

---

*) Більш докладно див. у Poincaré. Calcul des probabilités 1886. p 114-118.

ординатах, то встановили, що припущення однаково - можливости всіх можливих положень точки ідентично з припущенням, що густота ймовірности є стала ; в даному ж випадкові, очевидно, це не так : густота ймовірности в ріжних точках поверхні кулі є ріжна. Нарешті, відмітимо тут іще таку цікаву обставину : хотя всілякі положення точки M на поверхні кулі є однаковоможливі, однак, коли розглядати величини φ і θ кожну зокрема, то однаковоможливими будуть лише вартости довготи θ, тоді як вартости φ, або, що те саме, широти $90^\circ-\varphi$ цій умові не задовольня - ють. Дійсно, елементарна ймовірність

$$CR^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

є здобуток двох множників

$$CR^2 \sin\varphi \, d\varphi \quad і \quad d\theta \; ;$$

перший множник можна розглядати, як елементарну ймовірність для величини φ, а другий, як елементарну ймовірність для величини θ, звідки для θ густота ймовірности є стала, себто всі вартости θ однаковоможливі, тоді як для φ густота ймовірности є функція φ, що протирічить умові однаковоможливости *). Коли ж звернемося до величин x і y і будемо розглядати їх окремо, то ясно, що ні вартости x, ні вартости y однаковоможливими не будуть.

Множник пропорційности C згідно із загальною теорією визначиться, очевидно, з умови

$$CR^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = 1 \, ,$$

звідки

$$C = \frac{1}{4\pi R^2} \, .$$

Розвяжемо таку задачу.

Задача 7. На поверхні кулі проміня R випадковим способом визначені дві точки M і M'. Яка ймовірність, що менша дуга великого кола MM', поведеного через ці точки, буде меньше α ?

Симетрія кулі відносно всіляких осей, що проходять через її осередок, дозволяє припустити ,

---

*) Порівн. з E. Borel. Le Hasard § 35.

що одна з точок дана. Нехай це буде точка M . Толі точка M' мусить знаходитися на поверхні відрізка кулі AMB (рис.II) з полюсом в точці M і центровим кутом 2α . Висота h цього відрізка рівняється

$$h = OP = R(1-\cos\alpha).$$

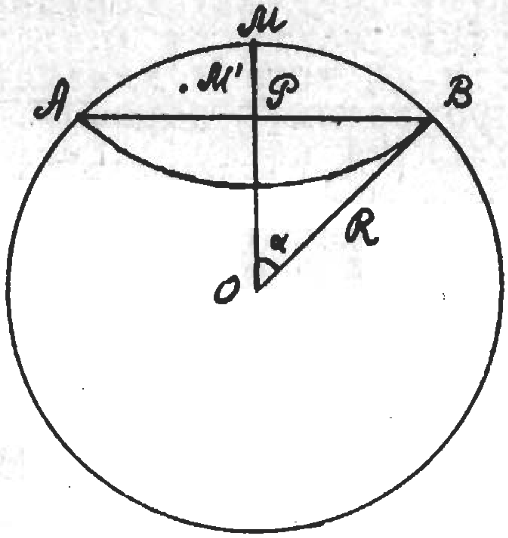

рис.II

Ясно, що поверхня кулистого відрізка AMB відповідає області сприятливих випадків. А тому відшукувана ймовірність p буде, очевидно, рівнятися

$$p = \frac{R^2}{4\pi R^2}\iint \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta ,$$

де подвійний інтеграл розгорнений на поверхню відрізка AMB . Величина цього інтеграла рівняється величині поверхні AMB , себто

$$2\pi Rh = 2\pi R^2(1-\cos\alpha),$$

звідси

$$p = \frac{2\pi R^2(1-\cos\alpha)}{4\pi R^2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2} .$$

Як що кут α дуже малий, то можна замінити його $\sinus$ дугою, прийнявши наближоно

$$p = \frac{\alpha^2}{4} .$$

Бертран поруч із цією розвязкою знаходить ще другу $\frac{\alpha}{\pi}$, яка значно ріжниться від першої для малих вартостей α . Це дало привід Бертранові і відносно цієї задачі також сказати [*]), що вона *est mal posée*. Нетрудно переконатися, що погляд Бертранів неправильний та що тут мається до діла з двома ріжними задачами. Справді, перша розвязка була отримана в припущенню, що положення точки на поверхні кулі одинаковоможливі ; з другої ж сторони можна показати [**]), що другу розвязку Бертран дістав, припустивши, що не тільки вартости довготи точки M', але також і вартости її ширсти однаковоможливі. Це друге припущення протирічить першому, а тому ясно, що розвязка $\frac{\alpha}{\pi}$ є розвязка не тої самої, а иньої задачі.

§ 9. Дві довільні точки в просторі.

Задача 8. Яка ймовірність, що віддалення між двома точками, випадково обраними в середині кулі проміня R, буде меньше даної довжини a, де $a \leqslant 2R$?

Означимо (x, y, z) і (x', y', z') координати точок A і A', віднесених до трьох взаємно прямових поперечників кулі. Дві нерівности

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &\leqslant R^2 , \\
x'^2 + y'^2 + z'^2 &\leqslant R^2 ,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

які встановлюють, що точки A і A' лежать в середині кулі, визначають, очевидно, область всіх можливих випадків. Область же сприятливих випадків визначиться нерівністю

$$s^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \leqslant a , \qquad (2)$$

яка показує, що відрізок AA' меньше a. Припустимо, що всі можливі положення точок A і A' в середині кулі одинаковоможливі, себто що густота відшукуваної ймовірности p є величина стала. Означимо її C. Тоді, очевидно, дістанемо для ймовірности p такий вираз у формі шостикратного інтеграла

$$p = C \iiiiiint dx'dy'dz'dx\,dy\,dz , \qquad (3)$$

---

[*]) *Bertrand Calcul des probabilités 1889, p. 6*

[**]) *Borel E. ibid.*

де інтеграл правої частини розгорнений на шостивимірну область, визначену умовою (2). Множник пропорційности C знайдеться, згідно із загальною теорією, з умови

$$C\iiiiiint dx'dy'dz'dx\,dy\,dz = 1,$$

де інтеграл лівої частини треба, очевидно, розгорнути на шостивимірну область, визначену нерівностями (I). Ця умова дає

$$C = \left(\frac{3}{4\pi R^3}\right)^2 = \frac{9}{16\pi^2R^6}.$$

Підставляючи знайдену вартість C в (3), дістанемо

$$p = \frac{9}{16\pi^2R^6}\iiiiiint dx'dy'dz'dx\,dy\,dz \tag{4}$$

Обчислення інтеграла, що стоїть в правій частині останньої рівности, вимагає багато праці, однак при допомозі геометричних міркувань можна це обчислення значно скоротити*). Перепишемо рівність (4) таким чином

$$p = \frac{9}{16\pi^2R^6}\iiint dx'dy'dz'\iiint dx\,dy\,dz. \tag{5}$$

Припустимо, що точка A дана, і будемо замісць двох точок A і A' розглядати вектор $\overline{AA'}$, полярні координати якого означимо (ρ,φ,θ), при чому

$$0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Тоді елемент обєма, виділений навколо точки A', визначиться в полярних координатах виразом

$$\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta,$$

так що можна написати

$$dx'dy'dz' = \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta. \tag{6}$$

З другої ж сторони, коли виконаємо переміщення кулі з даного положення в нове, визначене вектором $\overline{A'A}$, себто перемістимо кожну точку кулі на век-

---

*) Порівн. з E. Borel et R. Deltheil. Probabilités. Erreurs. p.81.

тор $\overline{A'A}$, то не трудно знайти умову, при якій точка A' при даному s буде знаходитися в середині даної кулі. Для цього необхидно і вистарчає, щоби точка A була обрана в середині обема спільного обом кулям. Таким чином при даному s обєм цей являється областю сприятливих положень точки A (на рис. 12 представлено перетин обох куль площею, яка проходить через їх осередки O і O'). Замітимо ще, що проста, яка проходить через осередки O і O' обох куль, рівнобіжна відрізкові AA' , а віддалення OO' рівне a. Полекшенню обчислень сприяє те, що, як зараз побачимо, обєм спільний обом кулям залежить лише від s. Означимо його величину v_s .

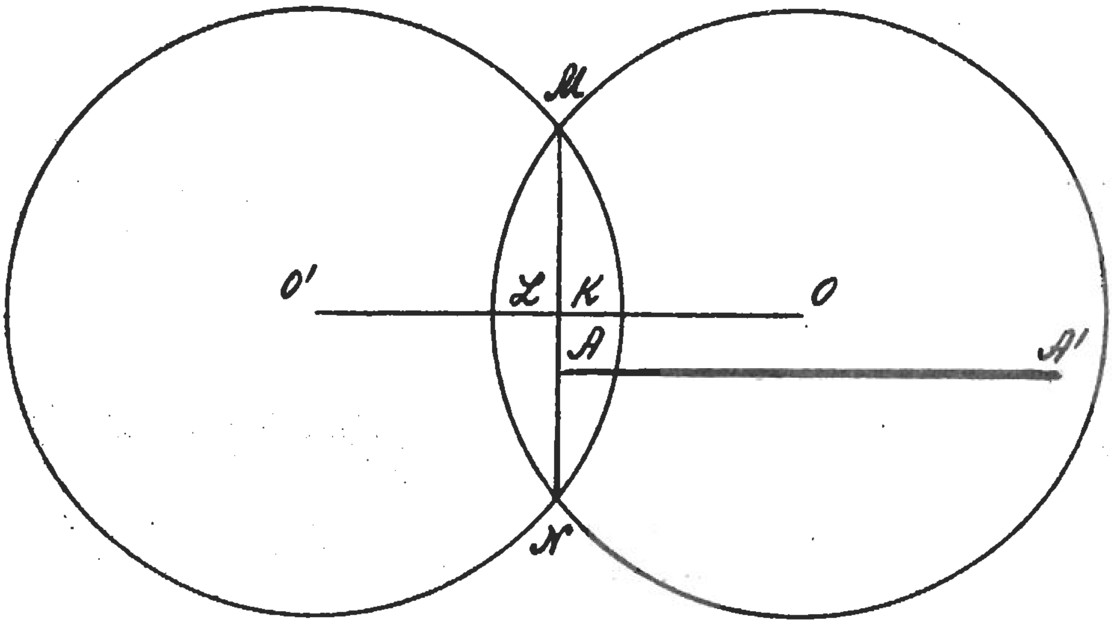

рис. I2

Вона, очевидно, рівняється подвоєному обємові кулистого відрізка MNL . Означивши h висоту KL кулистого відрізка, знаходимо відразу на основі відомого взору з геометрії

$$v_s = 2\pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right),$$

де, очевидно,

$$h = R - \frac{s}{2} .$$

Отже

$$v_s = 2\pi\left(R - \frac{s}{2}\right)^2\left(R - \frac{R - \frac{s}{2}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(4R^3 - 3R^2 s + \frac{s^3}{4}\right).$$

Таким чином при $\varsigma = const.$ будемо мати

$$\iiint dx\,dy\,dz = \frac{\pi}{3}\left(4R^3 - 3R^2\varsigma + \frac{\varsigma^3}{4}\right).$$

Звідси, приймаючи на увагу (6), перепишемо (5) так

$$p = \frac{9}{16\pi^2 R^6}\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\pi}{3}\left(4R^3 - 3R^2\varsigma + \frac{\varsigma^3}{4}\right)\varsigma^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, d\varsigma.$$

Інтегруючи, знаходимо безпосередньо :

$$p = \frac{3}{8R^6}\int_0^a\int_0^\pi\left(4R^3 - 3R^2\varsigma + \frac{\varsigma^3}{4}\right)\varsigma^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\varsigma =$$

$$= \frac{3}{4R^6}\int_0^a\left(4R^3\varsigma^2 - 3R^2\varsigma^3 + \frac{\varsigma^5}{4}\right)d\varsigma = \frac{3}{4R^6}\left(\frac{4R^3a^3}{3} - \frac{3R^2a^4}{4} + \frac{a^6}{24}\right),$$

або остаточно:

$$p = \frac{a^3}{R^3} - \frac{9}{16}\cdot\frac{a^4}{R^4} + \frac{1}{32}\cdot\frac{a^6}{R^6}.$$

Для $a=R$ ця формула дає $p = 15/32$, а для $a=2R - p=1$.

§10. Узагальнення поняття математичного сподівання.

Відповідно до того, як в параграфі 2 було узагальнено поняття ймовірности, можна також узагальнити й поняття математичного сподівання.

Як що величина x може приймати на перемежку (A,B), як раціональні, так і ірраціональні вартости, а поза цим перемежком жадних вартостей x не існує, то математичним сподіванням величин

$$x,\ x^2,\ x^3,\ -----$$

будемо називати відповідно інтеграли

$$\int_A^B x f(x)dx,\ \int_A^B x^2 f(x)dx,\ \int_A^B x^3 f(x)dx,\ ----,$$

де $f(x)$ є густота ймовірности. І взагалі математичним сподіванням функції

$$\varphi(x)$$

будемо звати інтеграл

$$\int_A^B \varphi(x)f(x)dx .$$

Як що густота ймовірности є стала, то, пригадуючи, що тоді

$$f(x)=\frac{1}{B-A},$$

дістанемо :

$$\int_A^B xf(x)dx = \frac{B+A}{2},$$

$$\int_A^B x^2f(x)dx = \frac{A^2+AB+B^2}{3} \quad \text{і т. д.}$$

У випадку двох величин x і y, можливі вартости яких творять двох вимірну неперервну область Ω, будемо називати математичним сподіванням функції

$$\varphi(x,y)$$

інтеграл

$$\iint_\Omega \varphi(x,y)f(x,y)dxdy,$$

де $f(x,y)$ є відповідна густота ймовірности.

Як що будемо дивитися на x і y, як на Декартові координати точки на площі, а величину площі, яка відповідає области Ω, означимо S, то при умові, що густота ймовірности є стала, дістанемо математичного сподівання функції $\varphi(x,y)$ вираз

$$\frac{1}{S}\iint_\Omega \varphi(x,y)dxdy,$$

пригадуючи, що тоді $f(x,y)=\frac{1}{S}$.

Анальоґічно можна поширити поняття математичного сподівання також у випадку трьох величин і більше. Взагалі, коли маємо n величин

$$x,\ y,\ ----,\ w,$$

то математичним сподіванням функції

$$\varphi(x,y,----,w)$$

будемо називати n- кратний інтеграл

$$\iint\limits_{\Sigma}\cdots\int \varphi(x,y,---,w)f(x,y,---,w)\,dx\,dy\ldots dw,$$

як що Σ означає n- вимірну область всіх можливих вартостей цих величин, а $f(x,y,---,w)$ - густоту ймовірности в цій області.

В задачах на геометричні ймовірности ставиться звичайно питання про середню вартість величини певного геометричного образу, який можна одержати випадковим способом. Пригадуючи, що середня вартість величини є ніщо инче, як її математичне сподівання (див. §I, Розд. III), мусимо, очевидно, визначити величину цього образу, як функцію відповідного числа незалежних змінних, і примінити до розвязання задачі вищенаведену методу.

Зробимо дві задачі.

Задача 9. На відтинку даної довжини $AB=a$ визначені випадково дві точки P і Q. Яка буде середня вартість довжини відтинку PQ?

Як що означимо $AP=x$ і $AQ=y$, то довжина відтинка PQ визначиться абсолютною вартістю різниці $x-y$, а область всіх можливих вартостей величин x і y - нерівностями

$$0\leqslant x\leqslant a \quad і \quad 0\leqslant y\leqslant a.$$

Припустимо, що всі можливі вартости x і y однаково можливі. Тоді густота ймовірности буде величина стала, рівна в даному випадкові

$$\frac{1}{a^2}$$

Тому що кожній різниці $x-y$ відповідає різниця $y-x$

протилежного знаку, то ясно, що в результаті інтегрування, розгорненого на всі можливі випадки, дістанемо нуль, тоді як середня вартість довжини відтинка PQ мусить бути додатньою. Через це будемо робити так : знайдемо середню вартість, наприклад, лише додатніх ріжниць $x-y$, себто для

$$y < x ,$$

і результат подвоїмо. Припущення, що $y < x$,вимагає, щоби інтегрування по y було переведено в межах від 0 до x . Означивши відшукувану середню вартість $M(|x-y|)$, дістанемо таким чином

$$M(|x-y|) = \frac{2}{a^2}\int_0^a\int_0^x (x-y)\,dx\,dy = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2 dx -$$

$$-\frac{1}{a^2}\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{a^2}\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{a}{3} \quad {}^{x)} .$$

Задача 10. В середині квадрата визначені випадково дві точки P і Q . Яка буде середня вартість квадрата віддалення PQ , як що бік квадрата рівняється a ?

Як що координати точок P і Q означимо відповідно (x, y) і (x', y') , то область можливих випадків визначиться нерівностями

$$0 \leqslant x \leqslant a , \quad 0 \leqslant y \leqslant a , \quad 0 \leqslant x' \leqslant a , \quad 0 \leqslant y' \leqslant a .$$

Припустимо, що всі можливі вартости величин x, y і x', y' однаковоможливі. Тоді стала густота ймовірности, очевидно, знайдеться з умови

$$C\int_0^a\int_0^a\int_0^a\int_0^a dx\,dy\,dx'\,dy' = 1 ,$$

звідки

$$C = \frac{1}{a^4} .$$

Квадрат віддалення δ між точками $P(x, y)$ і $Q(x', y')$ рівняється

---

x) Порівн. з Czuber E. Wahrscheinlichkeitsrechnung, №. 67.

$$\delta^2 = (x-x')^2+(y-y')^2,$$

а тому середня вартість $M(\delta^2)$ величини δ^2 визначиться таким чотирикратним інтегралом

$$M(\delta^2) = \frac{1}{a^4}\int_0^a\int_0^a\int_0^a\int_0^a[(x-x')^2+(y-y')^2]\,dx\,dx'\,dy\,dy'$$

Інтегруючи дістанемо

$$M(\delta^2) = \frac{1}{a^4}\int_0^a\int_0^a\int_0^a\left[\frac{(a-x')^3+x'^3}{3}+a(y-y')^2\right]dx'\,dy\,dy' =$$

$$= \frac{1}{a^4}\int_0^a\int_0^a\left[\frac{a^4}{6}+a^2(y-y')^2\right]dy\,dy' = \frac{1}{a^4}\left(\frac{a^6}{6}+\frac{a^6}{6}\right) = \frac{a^2}{3}.$$

§ II. Задача Чебишова.

Існують однак задачі, які з одної сторони не підходять під схему перерывних імовірностей, а з другої - до яких не можна примінювати також і загальну методу ймовірностей неперерывних, розвинену в § 2. Як приклад задач такого роду, ми подамо тут відому задачу Чебишова*).

Задача Чебишова. Яка ймовірність, що раціональний дріб, чисельник і знаменник якого написані випадково, не можна скоротити?

Розвязання цієї задачі базується на слідуючий тезі : як що подію E можна розглядати, як граничну для цілого ряду подій

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots$$

з імовірностями відповідно

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots,$$

то ймовірність події E знайдеться, як границя ймовірности p_n, коли n необмежено росте :

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n.$$

------

*) А. Марков. Исчисление вероятностей 1924, Гл. V, § 32
E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1914, Nr. 44.

Нехай

$$\frac{a}{b}$$

означає раціональний дріб, чисельник і знаменник якого обрані цілком довільно. Знайдемо спочатку ймовірність, що такий дріб не можна скоротити на дане число m. Як що ми будемо ділити на m наприклад чисельник нашого дробу, то можливі вартости остачі будуть, взагалі кажучи,

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m-1\ . \qquad (1)$$

Тому що чисельник дробу був обраний цілком довільно, то всі остачі (1) треба вважати однаковоможливими. Число їх рівняється m. Випадку, коли чисельник ділиться на число m відповідає лише одна остача нуль. Звідси ймовірність, що чисельник поділиться на m, буде рівна

$$\frac{1}{m}\ .$$

Анальоґічно знайдемо також імовірність, що знаменник нашого дробу буде ділитися на m. Імовірність ця, очевидно, теж рівняється

$$\frac{1}{m}\ .$$

Імовірність же, що дріб

$$\frac{a}{b}$$

можна скоротити на число m, себто ймовірність, що як чисельник, так і знаменник цього дробу будуть ділитися на m, буде рівна за теоремою множення ймовірностей

$$\frac{1}{m^2}\ .$$

Імовірність же, що згаданий дріб не скоротиться на m, як імовірність події протилежної, буде, очевидячки, рівнятися ріжниці

$$1-\frac{1}{m^2}\ . \qquad (2)$$

Зауважимо, що ця ймовірність заховує свою вартість (2) і тоді, коли відома неможливість скоротити дріб на якібудь числа первісні з m, бо можливі остачі при поділі чисельника й знаменника дробу на m будуть в цьому випадкові ті ж самі числа (I). На цій підставі ймовірність, що дріб не скоротиться на здобуток кількох первісних чисел

$$l.m.n.....$$

визначиться, очевидячки, на основі теореми множення ймовірностей здобутком окремих імовірностей

$$\left(1-\frac{1}{l^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right).....$$

Як що означимо первісні числа

2, 3, 5, 7, ...

відповідно

$$m_1, m_2, m_3, m_4, ...$$

і назвемо :
подію E_1 неможливість скоротити дріб на 2,
" E_2 " " " 2.3
" E_3 " " " 2.3.5
....
....
" E_n " " " $2.3.5...m_n$,
то ймовірности цих подій будуть відповідно рівні :

$$p_1 = 1-\frac{1}{2^2},\ p_2 = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right),\ p_3 = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right),$$

$$-------,\ p_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right).....\left(1-\frac{1}{m_n^2}\right).$$

Ясно, що подія, імовірність якої треба знайти, буде граничною при $n = \infty$ для ряда подій

$$E_1, E_2, E_3, ..., E_n, ...$$

і відшукувана ймовірність p на основі наведеної вище тези буде рівнятися

$$p = \lim_{n=\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right).....\left(1-\frac{1}{m_n^2}\right)\right\},$$

або

$$p = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right).........\ .$$

Щоби обчислити безмежний здобуток правої частини цієї рівности, розглянемо величину обернену ймовірности p:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^2}} \cdots\cdots$$

Приміняючи до кожного множника правої частини відомий взір

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

дістанемо :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots = \sum \frac{1}{2^{2\lambda}},$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \cdots = \sum \frac{1}{3^{2\mu}},$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \cdots = \sum \frac{1}{5^{2\nu}},$$

....

....,

де кожне з чисел

$$\lambda, \mu, \nu, \cdots$$

приймає вартости

0, I, 2, 3, 4, ...

Звідси

$$\frac{1}{p} = \sum \frac{1}{2^{2\lambda}} \cdot \sum \frac{1}{3^{2\mu}} \cdot \sum \frac{1}{5^{2\nu}} \cdots = \sum \frac{1}{(2^{\lambda} \cdot 3^{\mu} \cdot 5^{\nu} \cdots)^2}$$

Кожний здобуток

$$2^{\lambda} \cdot 3^{\mu} \cdot 5^{\nu} \cdots\cdots \qquad (3)$$

рівняється цілому числу, з другої ж сторони всякому цілому числу можна надати вигляд подібного здобутку, бо кожному цілому числу відповідає лише одна система показчиків

$$\lambda, \mu, \nu, \ldots\ldots ,$$

при якій здобуток (3) рівняється цьому числу. Через це можна написати

$$\frac{1}{p} = \sum \frac{1}{(2^{\lambda}.3^{\mu}.5^{\nu}\ldots)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots .$$

Щоби обчислити суму правої частини цієї рівности , пригадаємо, що

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

Виконавши операцію множення в правій частині цієї рівности, дістанемо

$$\sin x = x - x^3\left[\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right)\right] + x^5[\ldots\ldots]\ldots\ldots$$

З другої сторони маємо

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

Праві частини останніх двох рівностей, очевидячки, тотожньо рівні, тому мусять рівнятися також і сочинники при однакових степенях x . Прирівнюючи сочинники при x^3, дістанемо

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots\right),$$

або

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots = \frac{1}{p} = \frac{\pi^2}{6} ,$$

звідки

$$p = \frac{6}{\pi^2} = 0,608\ldots.$$

РОЗДІЛ V.

ЕМПІРІЧНІ ЙМОВІРНОСТИ.

§I. Емпірічні ймовірности й проблеми з ними звязані.

В питаннях, які досі розглядалися або припускалося, що ймовірности подій дані, або ці ймовірности обчислювалися чи то безпосередньо, шляхом підраховання всіх можливих та сприятливих випадків, чи то при допомозі теорем додавання й множення ймовірностей, теорії повторних дослідів і т.и. - взагалі при допомозі певних міркувань теоретичного характеру. Такі ймовірности, обчислені на основі теоретичних даних ще до переведення дослідів, називаються апріорними, або ймовірностями *a priori* .

Але кожній математичній операції відпо - відає операція обернена. Так і в численню ймовір - ностей : згаданій вище методі обчислювання ймовірностей відповідає метода обернена, коли невідомі ймовірности подій, або їх наближені вартости, які неможливо визначити при допомозі теоретичних даних, обчислюються на основі відомих результатів переведених дослідів. Так, наприклад, на основі теореми Бернуллі можна фреквенцію події прийняти наближено за її ймовірність - лише цей спосіб незручний тим, що вимагає переведення великої кількости дослідів. Такі ймовірности, визначені на основі відомих результатів переведених дослідів, звуть емпірічними або дослідними ймовірностями, або ймовірностями *a posteriori* , чи апостеріорними ймовірностями. Емпірічним імовірностям і буде присвячений цей роз - діл. У практиці (теорія похибок, статистика, асе - курація та ин.) переважно доводиться мати діло з такими ймовірностями, тому студіовання їх набірає особливої ваги у звязку із ріжними примінюваннями числення ймовірностей.

Головні проблеми, що виникають у звязку з емпірічними ймовірностями, це так звані : I) проблема ймовірностей гипотез, 2) проблема визначення апостеріорної ймовірности даної події і 3) проблема ймовірностей майбутніх подій.

I. Перша проблема такого роду. Припустимо, що для пояснення появлення якоїнебудь події A можна збудувати кілька ріжних припущень або гипо - тез. Кожна з цих гипотез має свою апріорну ймовірність, себто ймовірність відому ще до переведення дослідів, з якими подія А може зявитися. Припускається, що ці апріорні ймовірности гипотез відомі. Далі припустимо, що переведено певну кількість дослідів (принаймні один). Ясно, що вислід переведених дослідів збільшить наше знання відносно збудованих гипотез і тим самим змінить їх імовірности. Треба знайти ймовірности збудованих гипотез після переведення дослідів, себто апостеріорні їх імовірности. Пояснім сказане на прикладі. Нехай в урні знаходиться три кулі білого й чорного коліру, але невідомо, кілько саме куль білих, а кілько - чорних. З урни виймають наосліп по одній кулі, при чому кожного разу вийняту кулю повертають до урни. Появлення білої кулі нехай буде наша подія А. Для пояснення її можна збудувати чотирі гипотези відносно коліру куль в урні :

H_0 -	в урні знаходиться	3 білих кулі і 0 чорних	,
H_1	" "	2 " " I чорна	,
H_2	" "	I біла куля і 2 чорних	
H_3	" "	0 білих куль і 3 "	.

До переведення дослідів, себто перед вийманням куль із урни, всі ці гипотези однаковоможливі (принаймні немає підстав їх не вважати такими), отже апріорна ймовірність кожної з них рівна $1/4$. Припустимо, що дослід було переведено двічі, причому один раз появилася біла куля, а другий - чорна. Цей результат збільшує наше знання відносно складу куль в урні, а саме він показує, що в урні є принаймні одна біла куля і принаймні одна чорна. Тому після цих двох дослідів перша й четверта гипотези мусять відпасти, як неможливі, а друга й третя лишаються все ще однаковоможливі. Звідси ймовірности першої і четвертої гипотез після двох згаданих дослідів будуть рівні нулю, а ймовірности другої й третьої - кожна $1/2$. Ясно, що це вже будуть апостеріорні ймовірности гипотез. Припустім, що далі було переведено ще чотирі досліди та що всі вийняті кулі були білі. Цей результат ще збільшує наше знання відносно складу куль в урні і показує, що другу гипотезу можна вважати більш імовірною, ніж третю.

Деякі автори, переважно французи, замісць термінів п р и п у щ е н н я , г и п о т е з а вживають дуже часто термін п р и ч и н а і говорять про проблему ймовірностей причин (probabilités des causes). Тому буде не зайве виснити, що власне треба розуміти в численню ймовірностей під словом причина. Як що між подіями Н і А існує така залежність, що подія А може появитися лише після появлення події Н, то подію Н звуть причиною події А ;

як що подія А може появитися лише після появлення якоїсь одної з ряду подій, то ці останні звуться можливими причинами події А. Так що, наприклад, гипотези H_0, H_1, H_2, H_3 наведеного прикладу можна назвати в розумінню числення ймовірностей можливими причинами появлення білої кулі із урни.

Загальна метода розвязання проблем імовірностей гипотез дається взором англійського математика Байєса, опублікованим після його смерти в 1764 р. (див. далі §2).

II. Друга проблема - визначення апостеріорної ймовірности даної події - є обернена основній проблемі апріорних імовірностей, якою ми займалися в розділах II і III. Там на основі відомих апріорних імовірностей подій робилися певні висновки відносно можливих результатів дослідів (наприклад найімовірніше число появлень події, теорема Бернуллі і т.и.). Тепер же припустимо, що апріорна ймовірність події невідома й неможливо її обчислити на основі міркувань теоретичного характеру, але зато відомі результати переведених дослідів, які відносяться до цієї події, - треба знайти на основі відомих результатів дослідів невідому ймовірність події (апостеріорну), або її наближену вартість. Як побачимо далі ця проблема розвязується теж на основі взора Байєса.

III. Нарешті третя проблема емпірічних імовірностей є слідуюча : визначити на основі відомих результатів вже переведених дослідів результати дослідів майбутніх. Другими словами, обчислити на основі результатів переведених дослідів імовірности ріжних можливих результатів майбутніх дослідів.

§ 2. Теорема Байєса.

Теорема. Імовірність якоїсь одної з ряду n єдиноможливих і взаїмновиключальних гипотез

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_i, \ldots, B_n,$$

збудованих для пояснення появлення події А, яка вже відбулася, рівняється здобуткові апріорної ймовірности даної гипотези на ймовірність події А, обчислену в припущенню, що ця гипотеза здійснилася, поділеному на суму всіх подібних здобутків.

Візьмім, наприклад, гипотезу B_i. На основі теореми множення ймовірностей маємо з одної сторони (див. рівности (5) і наступну §3 Розд.I).

$$p(B_i A) = p(A) . p_A(B_i) \qquad (I)$$

і з другої -

$$p(B_i A) = p(B_i) . p_{B_i}(A), \qquad (2)$$

де символ $p(B_i A)$ означає, як відомо, імовірність, що гипотеза B_i і подія A відбудуться разом, символ $p_{B_i}(A)$ - імовірність події A, обчислену в припущенню, що гипотеза B_i здійснилася, символ $p_A(B_i)$ - імовірність гипотези B_i, обчислену в припущенню, що подія A вже відбулася, себто відшукувану ймовірність, символ $p(A)$ - імовірність події A і, нарешті, символ $p(B_i)$ - імовірність гипотези B_i, поки ще нічого невідомо відносно появлення чи непоявлення події A, другими словами, - апріорну ймовірність гипотези B_i).

Прирівнюючи праві частини рівностей (I) і (2), дістанемо

$$p(A) . p_A(B_i) = p(B_i) . p_{B_i}(A) \qquad (3)$$

Відповідно до числа гипотез подію A можна розбити на n взаємновиключальних форм

$$B_1A,\ B_2A,\ \ldots\ldots\ldots,\ B_nA,$$

так що за теоремою додавання ймовірностей (друге формульовання) дістанемо :

$$p(A) = p(B_1 A) + p(B_2 A) + \ldots\ldots + p(B_n A)$$

Але на основі теореми множення ймовірностей

$$p(B_1 A) = p(B_1) . p_{B_1}(A),$$

$$p(B_2 A) = p(B_2) . p_{B_2}(A),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p(B_n A) = p(B_n) . p_{B_n}(A),$$

тому

) Сума всіх імовірностей $p(B_i)$, очевидно, різняється одиниці

$$p(A) = p(B_1)\cdot p_{B_1}(A) + p(B_2)\cdot p_{B_2}(A) + \ldots\ldots + p(B_n)\cdot p_{B_n}(A).$$

Підставляючи знайдені для $p(A)$ вираз в (3), дістанемо рівність

$$p_A(B_i) = \frac{p(B_i)p_{B_i}(A)}{p(B_1)p_{B_1}(A) + p(B_2)p_{B_2}(A) + \text{----} + p(B_n)p_{B_n}(A)} =$$

$$= \frac{p(B_i)p_{B_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p(B_i)p_{B_i}(A)}, \qquad (4)$$

яка й доводить нашу теорему. Взір (4) має назву взора Байєса. Він дає апостеріорну ймовірність гипотези, себто після переведення досліда, в результаті якого появилася подія А. Ясно, що сума всіх імовірностей $p_A(B_i)$ приводиться до одиниці ; результат цей можна було передбачити наперед, бо згідно з умовою теореми всі гипотези єдиноможливі і взаїмновиключальні.

В окремому випадкові, коли апріорні ймовірности всіх гипотез однакові

$$p(B_1) = p(B_2) = \ldots\ldots = p(B_i) = \ldots\ldots = p(B_n),$$

себто коли всі гипотези до переведення досліда з подією А однаковоможливі, взір Байєса прийме такий вигляд

$$p_A(B_i) = \frac{p_{B_i}(A)}{p_{B_1}(A) + p_{B_2}(A) + \text{---} + p_{B_n}(A)} = \frac{p_{B_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_{B_i}(A)} \qquad (5)$$

§3. Задачі на примінення формули Байєса.

Задача I. Мається 20 урн трьох катеґорій. В першій катеґорії 4 урни, в другій - 7 урн і в третій - 9. Кожна урна першої катеґорії містить 5 білих куль і I чорну, кожна урна другої катеґорії - 4 білих і 2 чорних і кожна урна третьої катеґорії - 3 білих і 3 чорних. Беруть наосліп одну із 20 урн і виймають з неї наосліп теж одну кулю. Колір вийнятої кулі чорний. Яка ймовірність, що урну було обрано з третьої катеґорії ?

Появлення чорної кулі з обраної наосліп урни будемо вважати подією А. Для пояснення її появлення можна збудувати три гипотези, а саме :

B_1, що обрана урна належить до I катеґ.,
B_2, " " " II " ,
B_3, " " " III " .

Відшукувана ймовірність є, очевидячки, імовірність $p_A(B_3)$ гипотези B_3, коли відомо, що вийнята із урни куля чорна. Ясно, що

$$p(B_1) = 4/20, \quad p(B_2) = 7/20, \quad p(B_3) = 9/20$$

$$p_{B_1}(A) = 1/6, \quad p_{B_2}(A) = 2/6, \quad p_{B_3}(A) = 3/6$$

Примінюючи взір Байєса (4) попереднього параграфа, знаходимо :

$$p_A(B_3) = \frac{9/20 \cdot 3/6}{4/20 \cdot 1/6 + 7/20 \cdot 2/6 \cdot 9/20 \cdot 3/6} = \frac{3}{5}.$$

Імовірности ж гипотез B_1 і B_2, коли відомо, що вийнята куля чорна, будуть, очевидячки, рівні :

$$p_A(B_1) = \frac{4/20 \cdot 1/6}{4/20 \cdot 1/6 + 7/20 \cdot 2/6 + 9/20 \cdot 3/6} = \frac{4}{45}$$

$$p_A(B_2) = \frac{7/20 \cdot 2/6}{4/20 \cdot 1/6 + 7/20 \cdot 2/6 + 9/20 \cdot 3/6} = \frac{14}{45}.$$

Задача 2. В одній урні знаходиться 2 чорних і дві білих кулі, а в другій - I чорна і 6 білих. З першої урни беруть одну кулю і не дивлячись на неї перекладають її до другої урни, після чого з другої урни виймають наосліп одну кулю. Колір вийнятої кулі чорний. Яка ймовірність, що перекладена куля була теж чорна ?

Куля перекладена із одної урни до другої може бути лише або чорна, або біла. Відповідно до цього можна збудувати дві гипотези :

B_1, що перекладена куля була біла, і
B_2, " " " чорна.

Появлення чорної кулі з другої урни будемо вважати подією A. Відшукувана ймовірність буде, очевидно, ймовірність $p_A(B_1)$ гипотези B_1, коли відомо вже, що з другої урни було вийнято білу кулю.

Ясно, що

$$p(B_1) = 1/2\ ,\ p(B_2) = 1/2\ ,$$

$$p_{B_1}(A) = 2/8\ ,\ p_{B_2}(A) = 1/8\ .$$

Тому що гипотези однаковоможливі ($p(B_1) = p(B_2)$) , то відшукувана ймовірність $p_A(B_1)$ знайдеться на основі взора Байєса (5) попереднього параграфа :

$$p_A(B_1) = \frac{2/8}{2/8 + 1/8} = \frac{2}{3}\ .$$

Імовірність же $p_A(B_2)$ другої гипотези B_2 буде, очевидячки, рівна

$$p_A(B) = \frac{1/8}{2/8 + 1/8} = \frac{1}{3}\ .$$

Задача 3. В урні знаходиться $3a$ куль, при чому a куль помічені №3, a куль - №2 і a куль - №I . Вийнявши наосліп одну по одній дві кулі,констатують, що нумер першої більше нумера другої.Яка ймовірність, що перша вийнята куля помічена нумером 3 ?

Відносно нумера першої вийнятої кулі можна зробити взагалі три гипотези :

B_1 , що нумер цей рівняється I ,
B_2 , " " " 2 , і
B_3 , " " " 3 .

Ясно , що

$$p(B_1) = p(B_2) = p(B_3) = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}\ .$$

Подією A будемо вважати зконстатовану обставину,що нумер першої вийнятої кулі більше нумера другої . Число куль, що знаходяться в урні в момент, коли виймається друга куля, очевидячки, рівняється

$$3a - I$$

Як що справедлива гипотеза B_3 , то $2a$ куль з цього числа мають нумер меншій ніж 3, коли ж справедлива гипотеза B_2 , то a куль з цього числа мають нумер меншій ніж 2, крім того ясно, що ні одна куля в урні не має нумера меншого I. Звідси :

$$p_{B_1}(A) = 0\ , p_{B_2}(A) = \frac{a}{3a-1} = \frac{1}{3-\frac{1}{a}}, p_{B_3}(A) = \frac{2a}{3a-1} = \frac{2}{3-\frac{1}{a}}.$$

Відшукувана ймовірність буде ймовірність $p_A(B_3)$ гипотези B_3, коли вже відомо, що нумер першої вийнятої кулі більше нумера другої. Тому що апріорні ймовірности гипотез однакові, то відшукувана ймовірність знайдеться на основі взора Байєса (5) попереднього параграфа :

$$p_A(B_3) = \frac{\frac{2}{3-\frac{1}{a}}}{0 + \frac{1}{3-\frac{1}{a}} + \frac{2}{3-\frac{1}{a}}} = \frac{2}{3}.$$

Задача 4. В урні знаходиться 2 білих і 3 чорних кулі. Виймають наосліп одну по одній три кулі і кладуть, не дивлячись на них, до другої пустої урни. Після цього з другої урни виймають дві кулі і констатують, що обидві вони чорні. Які гипотези можна збудувати відносно коліру куль перекладених до пустої урни і які ймовірности цих гипотез ?

Тому що перша урна має тільки 2 білих кулі, то відносно коліру трьох куль, перекладених з першої урни до другої, можна зробити лише такі три гипотези:

B_1, що I з них чорна, а 2 білі,
B_2, " 2 " чорні, а I біла і
B_3, " всі 3 кулі чорні.

Гипотези B_1 і B_2 можна розбити кожну на три взаїмновиключальні форми, гипотеза ж B_3 може здійснитися лише в одній формі. Ці форми слідуючі :

B_1 - чбб, бчб, ббч ,
B_2 - ччб, чбч, бчч ,
B_3 - ччч .

Примінюючи теореми додавання й множення ймовірностей, дістанемо

$$p(B_1) = 3/10,\quad p(B_2) = 6/10,\quad p(B)_3 = 1/10.$$

Подією А будемо вважати появлення двох чорних куль з другої урни. Ясно, що

$$p_{B_1}(A) = 0\ ,\ p_{B_2}(A) = 2/3 \cdot 1/2 = 1/3,\ p_{B_3}(A) = I$$

Імовірности $p_A(B_1)$, $p_A(B_2)$, $p_A(B_3)$ гипотез B_1, B_2, B_3 після того, як стало відомим, що 2 вийняті з другої урни кулі чорного коліру, знайдуться на основі взора Байєса (4) попереднього параграфа :

$$p_A(B_1) = \frac{3/10 \cdot 0}{3/10 \cdot 0 + 6/10 \cdot 1/3 + 1/10 \cdot 1} = 0 ,$$

$$p_A(B_2) = \frac{6/10 \cdot 1/3}{3/10 \cdot 0 + 6/10 \cdot 1/3 + 1/10 \cdot 1} = 2/3 ,$$

$$p_A(B_3) = \frac{1/10 \cdot 1}{3/10 \cdot 0 + 6/10 \cdot 1/3 + 1/10 \cdot 1} = 1/3 .$$

Задача 5. В урні знаходиться 3 кулі. Відомо, що вони білого або чорного коліру, але невідомо кілько саме тих і других. Переводять слідуючий дослід: виймають на осліп одну кулю і записавши її колір повертають її знову до урни. Після пятикратного повторення досліда констатують, що при першому досліді вийшла біла куля, при другому - чорна і при дальших трьох - білі. Які гипотези можна збудувати відносно кількости білих і чорних куль в урні і які ймовірности цих гипотез після першого досліду, після другого і т.д., нарешті, після пятого - ?)

Відносно коліру куль в урні можна зробити 4 гипотези, а саме :

B_0, що всі три кулі білі,
B_1, що 2 кулі білі, а І чорна,
B_2, що І куля біла, а 2 чорні,
B_3, що всі три кулі чорні.

Як що будемо вважати ці гипотези однаковоможливими *a priori* , то

$$p(B_0) = 1/4, p(B_1) = 1/4, p(B_2) = 1/4, p(B_3) = 1/4$$

Появлення білої кулі з i-м дослідом будемо означати A_i, в даному випадкові, очевидно, i =І,3,4,5; появлення чорної кулі з другим дослідом означимо

)Л.Лахтин.Курс теории вероятностей І924,ст.ІІ6.

A'_2. Пригадуючи, що кожна вийнята куля повертається до урни, знаходимо безпосередньо :

$$p_{B_0}(A_i) = 1, \; p_{B_1}(A_i) = 2/3 \;, \; p_{B_2}(A_i) = 1/3 \;, \; p_{B_3}(A_i) = 0 \;,$$
$$p_{B_0}(A'_i) = 0, \; p_{B_1}(A'_i) = 1/3 \;, \; p_{B_2}(A'_i) = 2/3 \;, \; p_{B_3}(A'_i) = 1 \;.$$

Тому що всі гипотези до переведення дослідів однаковоможливі, то, примінюючи взір Байєса (5) попереднього параграфа, дістанемо для ймовірностей гипотез після першого досліду такі вирази :

$$p_{A_1}(B_0) = \frac{1}{1+2/3+1/3+0} = \frac{1}{2} \;, \qquad p_{A_1}(B_1) = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3} \;,$$
$$p_{A_1}(B_2) = 1/3 : 2 = 1/6 \;, \qquad p_{A_1}(B_3) = 0$$

Знайдені вартости ймовірностей показують, що після першого досліду ймовірности гипотез B_0 і B_1 збільшилися, а ймовірність гипотези B_2 зменшилася, остання ж гипотеза зовсім відпала, як неможлива.

Зауважуючи, що ймовірности гипотез після першого досліда можна розглядати, як їх імовірности перед другим дослідом, примінюємо знову взір Байєса (взір (4) попереднього §) й знаходимо для ймовірностей гипотез після другого досліда вартости :

$$p_{A'_2}(B_0) = \frac{1/2\cdot 0}{1/2\cdot 0 + 1/3\cdot 1/3 + 1/6\cdot 2/3} = 0 \;, \quad p_{A'_2}(B_1) = \frac{1/9}{2/9} = \frac{1}{2} \;,$$
$$p_{A'_2}(B_2) = \frac{1/6\cdot 2/3}{2/9} = \frac{1}{2} \;.$$

Отже після другого досліду гипотеза B_0 теж відпала, як неможлива, а ймовірности гипотез B_1 і B_2 до одної й тієї вартости $1/2$,так що ці гипотези після другого досліда стали однаковоможливі.

Дальші три досліди, як відомо, всі дали білі кулі, тому наперед можна сказати, що після цих дослідів імовірність гипотези B_1 ще збільшиться, а а ймовірність гипотези B_2 зменшиться. Дійсно, на основі міркувань анальогічних попереднім, примінюючи послідовно після кожного з наступних дослідів взір Байєса, дістанемо для ймовірностей гипотез B_1 і B_2 :

після третього досліда вартости

$$p_{A_3}(B_1) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}, \quad p_{A_3}(B_2) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

після четвертого -

$$p_{A_4}(B_1) = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{4}{5}, \quad p_{A_4}(B_2) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

і, нарешті, після пятого досліда -

$$p_{A_5}(B_1) = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{8}{9}, \quad p_{A_5}(B_2) = \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}.$$

Ітак бачимо, що після пятого досліда ймовірність гипотези B_1 у 8 разів більше ймовірности гипотези B_2.

Задача 6. В урні знаходиться 4 кулі, при чому відомо тільки, що вони можуть бути лише білого й чорного коліру. Переводять слідуючий дослід : виймають наослїп одну кулю і відкладають її на бік Після трикратного повторення досліда виявилося, що всі три вийняті кулі білого коліру. Яка ймовірність що й четверта куля, яка лишилася в урні, також біла ?

Відносно коліру куль в урні можливі слідуючі 5 гипотез :

B_0, що всі 4 кулі білі,
B_1, що 3 кулі білі, а I чорна,
B_2, що 2 кулі білі, а 2 чорні,
B_3, що I куля біла, а 3 чорні і
B_4, що всі 4 кулі чорні.

Вважаючи всі 5 гипотез однаковоможливими до переведення дослідів, маємо :

$$p(B_0) = p(B_1) = p(B_2) = p(B_3) = p(B_4) = \frac{1}{5}$$

Появлення білої кулі з i-м дослідом, де i =I,2,3, будемо означати A_i. Відшукувана ймовірність, очевидячки, є ніщо инче, як імовірність гипотези B_0 після 3-го досліда, себто

$$p_{A_3}(B_0)$$

Знайдеться вона, очевидячки, послідовним примінюванням взору Байєса. Безпосередньо маємо :

$$p_{B_0}(A_1) = 1, \quad p_{B_1}(A_1) = \tfrac{3}{4}, \quad p_{B_2}(A_1) = \tfrac{1}{2}, \quad p_{B_3}(A_1) = \tfrac{1}{4}, \quad p_{B_4}(A_1) = 0$$

Пригадуючи ж, що після першого й другого дослідів число куль в урні зменшувалося кожного разу на одну кулю й при тім білу, знаходимо

$$p_{B_0}(A_2) = 1, \quad p_{B_1}(A_2) = \tfrac{2}{3}, \quad p_{B_2}(A_2) = \tfrac{1}{3}, \quad p_{B_3}(A_2) = 0, \quad p_{B_4}(A_2) = 0,$$

$$p_{B_0}(A_3) = 1, \quad p_{B_1}(A_3) = \tfrac{1}{2}, \quad p_{B_2}(A_3) = 0, \quad p_{B_3}(A_3) = 0, \quad p_{B_4}(A_3) = 0.$$

Примінюючи після кожного досліду взір Байєса, знайдемо для ймовірностей зроблених гипотез :

після першого досліду вартости

$$p_{A_1}(B_0) = \frac{\tfrac{1}{5}\cdot 1}{\tfrac{1}{5}\cdot 1 + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}\cdot 0} = \frac{2}{5}, \quad p_{A_1}(B_1) = \frac{3}{10},$$

$$p_{A_1}(B_2) = \frac{2}{10}, \qquad p_{A_1}(B_3) = \frac{1}{10}, \qquad p_{A_1}(B_4) = 0,$$

після другого -

$$p_{A_2}(B_0) = \frac{\tfrac{4}{10}\cdot 1}{\tfrac{4}{10}\cdot 1 + \tfrac{3}{10}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{10}\cdot\tfrac{1}{3}} = \frac{3}{5}, \quad p_{A_2}(B_1) = \frac{6}{20}$$

$$p_{A_2}(B_2) = \frac{2}{20}, \qquad p_{A_2}(B_3) = 0, \qquad p_{A_2}(B_4) = 0,$$

нарешті, після третього -

$$p_{A_3}(B_0) = \frac{\tfrac{12}{20}\cdot 1}{\tfrac{12}{20}\cdot 1 + \tfrac{6}{20}\cdot\tfrac{1}{2}} = \frac{4}{5}, \qquad p_{A_3}(B_1) = \frac{1}{5},$$

$$p_{A_3}(B_2) = 0, \qquad p_{A_3}(B_3) = 0, \qquad p_{A_3}(B_4) = 0.$$

Таким чином відшукувана ймовірність рівняється $4/5$. Що ж торкається ймовірностей инчих гипотез, зроблених перед початком дослідів, то ймовірність гипотези B_1 спочатку зросла, але потім зменшилася до первісної вартости $1/5$. Гипотези ж B_2, B_3 і B_4 повідпадали, як неможливі.

Тут буде на місці звернути увагу на слідуючу обставину. Як в цій задачі, так і в попередній імовірности гипотез перед початком досліда, або як кажуть, апріорні їх імовірности, були визначе ні з певною долею довільности. Справді, в обох цих задачах ми довільно припускали, що збудовані гипотези однаковоможливі. Взір же Байєса показує, що апостеріорні ймовірности гипотез залежать від вартостей іх апріорних імовірностей, тому треба визнати, що довільність, допущена при встановлюванню цих останніх, мусіла відбитися також і на остаточному результаті. Як би замісць припущення однаковоможливости ми зробилиби відносно збудованих гипотез якесь инче, то ясно, що й отримані результати були б инчі.

§ 4. Імовірність виказів свідків.

Академік А. Марков в своєму курсі числення ймовірностей *) подає цікавий приклад примінення формули Байєса до оцінки виказів свідків.

Задача поставлена Марковим така.

Декілько свідків одноголосно твердять, що появилася подія E. Яка ймовірність, що ця подія справді появилася ?

Перше, ніж приступити до розвязання цієї задачі, зробимо слідуючі припущення :

I). припустимо, що всі свідки однаково поінформовані відносно появлення чи непоявлення події E,

2). викази свідків будемо вважати незалежними один від одного ;

3). припустимо, що всі свідки можуть свідомо казати неправду та що всі вони мають однаковий нахил до правди ,

4). нарешті, припустимо, що ймовірність події E до виказу свідків відома й рівняється p.

Число всіх свідків означимо n. Нахил кожного свідка до правди будемо міряти числом α, яке лежить між 0 і I. Число α будемо розглядати, як імовірність, що свідок говорить правду. Тоді ріжниця $I - \alpha$ буде, очевидно, ймовірність, що свідок говорить неправду.

Можливих гипотез, ясно, буде лише дві :

---

*) А.Марков Исчисление вероятностей 1924. Гл VI, §42

B_1, що подія E появилася, і
B_2, що подія E непоявилася.

Ясно також, що апріорні ймовірности цих гипотез рівняються :

$$p(B_1) = p \ , \ p(B_2) = I - p \ .$$

Згідно з умовою задачі всі свідки твердять одноголосно, що подія E появилася. Цей одноголосний виказ свідків будемо вважати подією A . Відшукувана ймовірність це ймовірність події E після одноголосного виказу всіх свідків, себто апостеріорна ймовірність гипотези B_1 після появлення A. Отже, згідно з прийнятими означеннями, відшукувана ймовірність буде

$$p_A(B_1) \ .$$

Щоби примінити взір Байєса, треба визначити ще ймовірности $p_{B_1}(A)$ і $p_{B_2}(A)$. Символ $p_{B_1}(A)$ означає в даному випадкові ймовірність одноголосного виказу свідків при умові, що подія E справді появилася. А тому що свідки твердять, що подія E появилася, то, другими словами, символ $p_{B_1}(A)$ означає ймовірність, що всі свідки сказали правду. За теоремою множення ймовірностей дістанемо

$$p_{B_1}(A) = \alpha^n \ .$$

Символ $p_{B_2}(A)$ означає ймовірність одноголосного виказу свідків при умові, що в дійсности подія E не появилася, себто ймовірність, що всі свідки сказали неправду, при чім всі одноголосно спинилися як раз на події E, а не на якийбудь инчій. Імовірність, що свідки всі сказали неправду, рівняється α^n. Як що ми введемо величину β , якою будемо визначати ймовірність, що свідок, який каже неправду, спиниться як раз на події E ,а не на якийбудь инчій , то степінь β^n буде визначати ймовірність, що всі свідки, говорячи неправду, одноголосно спинилися як раз на події E. Імовірність же $p_{B_2}(A)$, очевидячки, є ймовірність, що події, імовірности яких відповідно рівні

$$(I - \alpha)^n \ і \ \beta^n,$$

відбудуться разом. Звідси за теоремою множення ймовірностей дістанемо

$$p_{B_2}(A) = (1-\alpha)^n \beta^n$$

Примінюючи взір Байеса, знайдемо для відшукуваної ймовірности $p_A(B_1)$ такий простий вираз

$$p_A(B_1) = \frac{p\alpha^n}{p\alpha^n + (1-p)(1-\alpha)^n \beta^n} .$$

При $\alpha = 1$, себто коли всі свідки заслуговують абсолютного довірря, буде

$$p_A(B_1) = 1 ,$$

при $\alpha = 0$, коли свідки не заслуговують жадного довірря, -

$$p_A(B_1) = 0 ,$$

при $\alpha = 1/2$

$$p_A(B_1) = \frac{p}{p + (1-p)\beta^n} .$$

Треба однак признати, що практичне значіння вищенаведеної простої методи дуже зменшується необхідністю багатьох довільних припущень, дуже трудно здійснимих у практичному життю, до яких треба ще додати неозначеність величини β і одноголосність виказу свідків.

§ 5. Дослідне визначення невідомої ймовірности події.

I. Випадок, коли число гипотез відносно невідомої ймовірности події скінчене.

Перейдемо тепер до розвязання другої з поставлених нами в §I задач.

Будемо розглядати необмежений ряд дослідів, незалежних відносно якоїсь події E, імовірність котрої, однакова при кожному досліді, невідома. Означимо її p. Припустимо, що відносно вартости невідомої ймовірности p події E можна зробити ν й лише ν ріжних гипотез. Питання про визначення невідомої ймовірности події E на основі результатів переведених дослідів треба розуміти, як питання про оцінку ймовірностей цих гипотез на основі відомих результатів переведених дослідів. Нехай ці гипотези будуть слідуючі

$$p=p_1, p=p_2, -----, p=p_i, -----, p=p_\nu . \qquad (1)$$

Припустимо далі, що апріорні ймовірности цих гипотез, або, що те саме, ймовірности рівностей (I) до переведення дослідів нам відомі. Означимо їх відповідно :

$$\pi_1, \pi_2, -----, \pi_i, -----, \pi_\nu . \qquad (2)$$

Очевидно, що

$$\pi_1 + \pi_2 + ------ + \pi_\nu = 1 , \qquad (3)$$

як сума ймовірностей единоможливих гипотез. Нарешті припустимо, що n дослідів вже переведені та що відомий результат х такий : подія Е появилася m разів і непоявилася $n-m$ разів.

Поставимо собі тепер завдання знайти ймовірности гипотез, зроблених відносно невідомої ймовірности p події Е, коли відомо вже, що при n дослідах подія Е появилася m разів і непоявилася $n-m$ разів. Відшукувані ймовірности знайдуться при допомозі взора Байеса.

Означимо гипотези (I) відповідно

$$B_1, B_2, -----, B_i, -----, B_\nu,$$

так що B_i, очевидячки, означає гипотезу, що ймовірність p події Е має вартість p_i. Подією А будемо вважати появлення події Е при n дослідах m разів і непоявлення $n-m$ разів. Тоді, згідно із прийнятими нами означеннями, відшукуваними ймовірностями будуть

$$p_A(B_1),\ p_A(B_2), -----, p_A(B_i), ------, p_A(B_\nu).$$

Ясно також, що

$$\pi_1 = p(B_1), \pi_2 = p(B_2), -----, \pi_i = p(B_i), -----, \pi_\nu = p(B_\nu).$$

Лишається ще визначити

$$p_{B_1}(A), p_{B_2}(A), -----, p_{B_i}(A), ------, p_{B_\nu}(A). \qquad (4)$$

Зауважуємо, що символ

$$p_{B_i}(A)$$

означає ймовірність, що подія Е появилася m разів при n незалежних дослідах, обчислену в припущенню, що гипотеза B_i здійснилася, себто що ймовірність події Е при кожному досліді була рівна p_i. Тому на основі формули (I) §3, Розд. II знаходимо

$$p_{B_i}(A) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p_i^m q_i^{n-m},$$

де, очевидячки, $q_i = 1 - p_i$.
Положивши i послідовно рівним

$$1, 2, \ldots\ldots, \nu,$$

знайдемо таким чином всі ймовірности (4). Приміняючи тепер взір Байеса, дістанемо після скорочення на

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

рівність

$$p_A(B_i) = \frac{\pi_i p_i^m q_i^{n-m}}{\pi_1 p_1^m q_1^{n-m} + \pi_2 p_2^m q_2^{n-m} + \cdots + \pi_\nu p_\nu^m q_\nu^{n-m}} = \frac{\pi_i p_i^m q_i^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} \pi_i p_i^m q_i^{n-m}}, \quad (5)$$

яка й дає при $i = 1, 2, \ldots, \nu$ відповідь на поставлену нами задачу.

Знайшовши ймовірність кожної вартости числа p зокрема, можна визначити й імовірність, що p лежить в даних межах, наприклад між a і b. Ця остання ймовірність знайдеться на основі теореми додавання ймовірностей й буде рівна сумі ймовірностей кожної з можливих вартостей числа p, заключених між a і b. Означивши цю ймовірність $\mathcal{P}(a<p<b)$, дістанемо

$$\mathcal{P}(a<p<b) = \frac{\sum' \pi_i p_i^m q_i^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{\nu} \pi_i p_i^m q_i^{n-m}}, \quad (6)$$

де сума $\sum'$ розгорнена лише на ті з можливих вартостей числа i, які задовольняють нерівностям

$$a < p_i < b.$$

Очевидно, що числа a і b повинні задовольняти умові

$$0 < a < b < 1.$$

II. Випадок, коли число гипотез відносно невідомої ймовірности події необмежено велике.

Будемо, як і раніще, розглядати необмежений ряд дослідів, незалежних відносно події E, імовірність якої p, однакова при кожному досліді, невідома. В протилежність попередньому випадкові припустимо тепер, що відносно невідомої ймовірности p нічого конкретного сказати не можна, так що не можна вказати *a priori*, які саме вартости величини p можна очікувати. Будемо приймати в цьому випадкові, що величина p може рівнятися всякій вартости, заключеній між 0 і I, і будемо вважати всі ці вартости *a priori* однаковоможливими. Тоді, очевидячки, сукупність всіх можливих вартостей невідомої ймовірности p утворить безмежний непереривний збір чисел, заключених між 0 і I. Таким чином всіх можливих вартостей величини p в даному випадкові є безмежно багато, а тому можна говорити про безмежно велику кількість гипотез, які можна збудувати відносно невідомої вартости ймовірности p: кожній з безмежної кількости можливих вартостей відповідає своя окрема гипотеза.

Ясно, що в даних умовах питання про ймовірність окремих вартостей величини p тратить сенс, і замісць нього треба ставити питання про ймовірність, що вартість величини p лежить на якомусь даному перемежкові (a, b), заключеному в середині перемежка (0, I). Тому що всі можливі вартости невідомої ймовірности p однаковоможливі, то, згідно з теорією непереривних імовірностей, апріорна ймовірність нерівностей

$$a < p < b \tag{7}$$

визначиться означеним інтегралом

$$\int_{b}^{a} dp = b - a.$$

(стала густота ймовірности C, яка знаходиться з умови

$$C \int_{0}^{1} dp = 1,$$

рівняється, очевидячки, одиниці).

Припустимо далі, що при n згаданих дослідах подія Е появилася рівно m разів і непоявилася $n-m$ разів, і поставимо собі таку задачу : знайти ймовірність, що невідома вартість імовірности p події Е буде знаходитися між числами a і b, коли відомо, що при n дослідах подія Е появилася m разів і непоявилася $n-m$; другими словами, треба знайти апостеріорну ймовірність нерівностей (7).

Поставлену задачу можна трактувати, як граничний випадок при $\nu=\infty$ попередньої задачі, розібраної нами в I частині цього параграфа, як що в умову цієї останньої внести відповідні зміни. Справді, будемо вважати в попередній задачі всі можливі вартости

$$p_1, p_2, \text{------}, p_\nu \tag{8}$$

імовірности p однаковоможливими, поки невідомі результати дослідів с подією Е, і покладемо

$$p_1=\frac{1}{\nu}, p_2=\frac{2}{\nu}, \text{----}, p_i=\frac{i}{\nu}, \text{----}, p_\nu=1 .$$

Тоді ясно, що при збільшенню ν до безмежности ми прийдемо до поставленої нами задачі. Замітимо ще, що із припущення однаковоможливости вартостей (8) слідує на основі рівности (3), що

$$\pi_1=\pi_2=\text{----}=\pi_i=\text{-----}=\pi_\nu=\frac{1}{\nu} .$$

Розвязання поставленої задачі дістанемо, очевидно, з формули (6) при переході до границі при $\nu=\infty$. Означивши відшукувану ймовірність $\mathcal{P}(a<p<b)$, прийдемо таким чином к рівности

$$\mathcal{P}(a<p<b)=\lim_{\nu=\infty}\frac{\sum'\pi_i p_i^m q_i^{n-m}}{\sum_{i=1}^{\nu}\pi_i p_i^m q_i^{n-m}} , \tag{9}$$

де сума $\sum'$ розгорнена лише на ті вартости i, для яких виконуються нерівности

$$a<p_i<b ,$$

і де

$$\pi_i=\frac{1}{\nu}, p_i=\frac{i}{\nu}, q_i=1-p_i .$$

Означивши ріжницю

$$p_{i+1} - p_i = \Delta p_i$$

зауважуємо, що

$$\Delta p_i = \frac{i+1}{v} - \frac{i}{v} = \frac{1}{v},$$

з другої ж сторони маємо

$$\pi_i = \frac{1}{v},$$

а тому рівність (9) можна переписати таким чином

$$\mathcal{P}(a<p<b) = \lim_{v=\infty} \frac{\sum p_i^m (1-p_i)^{n-m} \Delta p_i}{\sum_{i=1}^{i=v} p_i^m (1-p_i)^{n-m} \Delta p_i}$$

Права частина останньої рівности є, очевидячки, ніщо инче, як відношення відповідних означених інтегралів, так що остаточно дістанемо

$$\mathcal{P}(a<p<b) = \frac{\int_a^b p^m (1-p)^{n-m} dp}{\int_0^1 p^m (1-p)^{n-m} dp}. \qquad (10)$$

Інтеграл, що стоїть в знаменнику правої частини цієї рівности є стале число. Покладемо

$$\int_0^1 p^m (1-p)^{n-m} dp = \frac{1}{C}.$$

Тоді рівність (10) можна переписати так

$$\mathcal{P}(a<p<b) = C.\int_a^b p^m (1-p)^{n-m} dp.$$

Ця фрмула показує, що після того, як вже стали відомі результати переведених дослідів, густота ймовірности нерівностей (7) стала пропорційною здобуткові

$$p^m (1-p)^{n-m},$$

тоді як раніше, поки ці результати були ще невідомі, вона була величина стала, рівна 1. Сталий множник пропорційности C знайдеться таким чином. Інтеграл, що стоїть в знаменнику правої частини рівности (10) є Ейлерів інтеграл I-го роду, або так звана функція бета. З інтегрального числення відомо, що

$$\int_0^1 p^m(1-p)^{n-m}dp = B(m+1,n-m+1) = \frac{m!(n-m)!}{(n+1)!},$$

звідки

$$C = \frac{(n+1)!}{m!(n-m)!}.$$

Таким чином відшукувана ймовірність буде мати вигляд

$$\mathcal{P}(a<p<b) = \frac{(n+1)!}{m!(n-m)!}\int_a^b p^m(1-p)^{n-m}dp. \qquad (11)$$

§ 6. Задачі на примінення формул попереднього параграфа

Задача I. В урні знаходиться 5 куль білого й чорного кольру, але невідомо, кілько саме тих і других. Переводять слідуючий дослід: виймають на осліп по одній кулі, повертаючи кожного разу вийняту кулю назад до урни. Після пяти виймань констатують, що біла куля появилася 4 рази, а чорна I раз. Яка ймовірність, що невідома ймовірність появлення білої кулі з урни рівняється $3/5$?

Відносно вартостей невідомої ймовірности p появлення білої кулі з урни можна взагалі зробити лише 6 гипотез:

B_0, що $p=0$, B_3, що $p=3/5$

B_1, що $p=1/5$, B_4, що $p=4/5$

B_2, що $p=2/5$, B_5, що $p=1$.

Поки результати дослідів невідомі, всі ці гипотези однаковоможливі: їх спільна апріорна ймовірність рівняється, очевидячки $1/6$. Коли ж результати дослідів стали відомі, то ясно, що гипотези B_0 і B_5 мусять відпасти, як неможливі. Появлення білої кулі 4 рази, а чорної I раз назвемо подією A. Тоді, згідно з прийнятими означеннями, відшукуваною ймо-

вірністю буде , очевидячки, $p_A(B_3)$.
Примінюючи формулу (5) попереднього параграфа ді станемо

$$p_A(B_3) = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^4 \frac{2}{5}}{\sum\limits_{i=1}^{i=5}\left(\frac{i}{5}\right)^4 \frac{5-i}{5}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{2}{5}}{\left(\frac{1}{5}\right)^4 \frac{4}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^4 \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^4 \frac{2}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5}} =$$

$$= \frac{162}{3125} : \frac{4+48+162+256}{3125} = \frac{162}{370} = 0{,}437\ldots$$

Задача 2. Стінки звичайної кістки до гри у формі куба помальвані білою й чорною фарбою, але невідомо, кілько стінок білих і кілько - чорних . Кістку кидають на позему площу 5 разів і констатують, що тричі випала біла стінка, а двічі чорна . Яка ймовірність, що число стінок, помальованих білою фарбою, не меньше двох і не більше чотирьох ?

Другими словами треба знайти ймовірність, що невідома ймовірність p появлення білої стінки задоволняє нерівностям

$$\frac{2}{6} \leq p \leq \frac{4}{6}$$

Відносно вартости невідомої ймовірности появлення білої стінки можна зробити взагалі лише 7 гипотез :

$$p=0\,,\ p=\frac{1}{6}\,,\ p=\frac{2}{6}\,,\ p=\frac{3}{6}\,,\ p=\frac{4}{6}\,,\ p=\frac{5}{6}\,,\ p=1.$$

Поки невідомі результати пятикратного кидання кістки, всі ці вартости однаковоможливі, їх спільна ймовірність рівняється $\frac{1}{7}$.Коли ж ці результати вияснилися, то, очевидно, гипотези $p=0$ і $p=1$ мусять відпасти, як неможливі. Відшукувана ймовірність $\mathcal{P}(\frac{1}{3} \leq p \leq \frac{2}{3})$, очевидячки, знайдеться по формулі (6) попереднього параграфа -

$$\mathcal{P}\left(\tfrac{1}{3} \leq p \leq \tfrac{2}{3}\right) = \frac{\sum\limits_{i=2}^{i=4}\left(\frac{i}{6}\right)^3\left(\frac{6-i}{6}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{i=5}\left(\frac{i}{6}\right)^3\left(\frac{6-i}{6}\right)^2} = \frac{128+243+256}{7776} :$$

$$: \frac{25+128+243+256+125}{7776} = \frac{627}{777} = 0{,}8\ldots$$

Задача 3. В урні знаходяться білі й чорні кулі, але кілько тих і других - невідомо. Переводять слідуючий дослід: виймають навсліп по одній кулі, повертаючи кожного разу вийняту кулю назад до урни. Всього було переведено n дослідів, при чому всі n разів появилася біла куля. Яка ймовірність, що в урні білих куль більше, ніж чорних ?

Ясно, що коли білих куль в урні більше ніж чорних, то й імовірність появлення білої кулі з урни буде більше ймовірности появлення чорної. Сума ж цих імовірностей рівняється одиниці, як сума ймовірностей взаїмновиключальних подій. А тому, як що в урні білих куль більше ніж чорних, то невідома вартість імовірности появлення білої кулі з урни мусить лежати десь на перемежкові ($\frac{1}{2}$,I). Отже відшукувана ймовірність буде ніщо инчо, як імовірність, що вартість невідомої ймовірности p появлення білої кулі з урни знаходиться між $\frac{1}{2}$ і I. Означимо її $\mathcal{P}(\frac{1}{2}<p<1)$. Задача розвязується, очевидно, приміненням формули (II) попереднього параграфа, в який треба покласти $m=n$, $n-m=0$, $a=\frac{1}{2}$, $b=1$. Дістанемо :

$$\mathcal{P}(1/2<p<1)=\frac{(n+1)!}{n!}\int_{1/2}^{1}p^n dp=(n+1)\left|\frac{p^{n+1}}{n+1}\right|_{1/2}^{1}=1-\frac{1}{2^{n+1}},$$

отже, чим більше n число дослідів, які всі дали білі кулі, тим близче до одиниці буде відшукувана ймовірність : так, наприклад, вже при $n=7$ імовірність рівняється $\frac{255}{256}$.

Задача 4. Два грачі А і В грають ув ігру, що складається з окремих партій. Виграє гру той, хто перший виграє s партій. Імовірність вигри окремої партії, як для грача А, так і для грача В невідома, але відомо, що для кожного грача ця ймовірність однакова для всіх партій та що кожна партія обовязково мусить скінчитися вигрою одного з грачів Гра припинена в момент, коли грачу А невистарчало до вигри a партій, а грачу В - b партій. Яка ймовірність, що невідома ймовірність вигри окремої партії для грача А більше такої ж імовірности для грача В ?

Імовірности вигри окремої партії для грачів А і В мусять давати в сумі одиницю, як імовірности взаімновиключальних подій. Отже для того, щоби невідома ймовірність p вигри окремої партії грачем А була більше такої ж імовірности для грача В, необхідно й вистарчає, щоби вартість імовірности p лежала десь на перемежкові $(\frac{1}{2}, 1)$. Згідно з умовою задачі грач А виграв $s-a$ партій, а грач В - $s-b$ партій, так що число всіх заграних партій рівняється $2s-a-b$. Ясно також, що число партій програних грачем А рівне $s-b$. Означивши відшукувану ймовірність $\mathcal{P}(\frac{1}{2}<p<1)$, знайдемо її на основі формули (II) попереднього параграфа при $n=2s-a-b$, $m=s-a$, $n-m=s-b$, $a=\frac{1}{2}$ і $b=1$. Дістанемо:

$$\mathcal{P}(\tfrac{1}{2}<p<1) = \frac{(2s-a-b+1)!}{(s-a)!(s-b)!}\int_{\frac{1}{2}}^{1} p^{s-a}(1-p)^{s-b}dp.$$

Як що, наприклад, покладемо :

$$s=10, \quad a=7, \quad b=8,$$

то будемо мати :

$$\mathcal{P}(\tfrac{1}{2}<p<1) = \frac{6!}{3!\,2!}\int_{\frac{1}{2}}^{1} p^3(1-p)^2dp = 60\left|\frac{p^4}{4}-\frac{2p^5}{5}+\frac{p^6}{6}\right|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$\left|15p^4-24p^5+10p^6\right|_{\frac{1}{2}}^{1} = 1-\left(\frac{15}{16}-\frac{24}{32}+\frac{10}{64}\right) = \frac{21}{32}.$$

Задача 5. Кістку до гри, зроблену у формі правильного многостінника, кидають на позему площу. Число всіх стінок многостінника невідомо, але відомо, що вони білі й чорні ; кілько тих і других також невідомо. Колір стінки, якою кістка впаде на позему площу, записують. Всього було кинуто многостінник n разів, при чому $n-1$ раз він упав білою стінкою й лише 1 раз - чорною. Яка ймовірність, що відношення числа білих стінок до числа чорних більше 3 ?

Імовірність, що многостінник впаде на позему площу білою стінкою невідома. Означимо її p. Як що відношення числа білих стінок многостінника до числа чорних означимо k, то відношення числа білих стінок до числа всіх стінок, а значить і невідома ймовірність p, буде рівне

$$\frac{k}{k+1}.$$

Отже, коли $k = 3$, то $p = \frac{3}{4}$, коли ж $k > 3$, то $p > \frac{3}{4}$. Таким чином відшукувана ймовірність є ніщо инше, як імовірність, що невідома вартість імовірности p лежить десь між $\frac{3}{4}$ і I. Означимо відшукувану ймовірність $\mathcal{P}(\frac{3}{4} < p < I)$. Приміняючи формулу (II) попереднього параграфа, покладемо в ній $m = n - I$, $n - m = I$, $a = \frac{3}{4}$, $b = I$. Дістанемо :

$$\mathcal{P}(3/4 < p < 1) = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}\int_{3/4}^{1} p^{n-1}(1-p)\,dp =$$

$$n(n+1)\left|\frac{p^n}{n} - \frac{p^{n+1}}{n+1}\right|_{3/4}^{1} = 1 - \frac{n+4}{4}\left(3/4\right)^n .$$

Ясно, що чим більша вартість n, тим ближча відшукувана ймовірність до I. Так, наприклад, для

$$n = 3 \qquad \mathcal{P}(3/4 < p < 1) = 0{,}26\ldots$$

$$n = 6 \qquad \mathcal{P}(3/4 < p < 1) = 0{,}55\ldots$$

$$n = 10 \qquad \mathcal{P}(3/4 < p < 1) = 0{,}80\ldots$$

§ 7. Найімовірніша гипотеза.

Елементарна ймовірність, що вартість невідомої ймовірности p події E лежить десь на перемежку довжиною dp, на основі формули (II) попереднього параграфа має вигляд

$$d\mathcal{P} = \frac{(n+1)!}{l!\,m!}\,p^m(1-p)^l\,dp ,$$

де $l = n - m$.

При досить малому dp величина $d\mathcal{P}$ теж досить мала порядка однакового с порядком dp. При $dp = const$, елементарна ймовірність $d\mathcal{P}$ пропорційна функції

$$y = p^m(1-p)^l .$$

Поставимо собі завдання знайти таку вартість величини p, яка надає елементарній імовірности $d\mathcal{P}$ максімум. Прирівнюючи нулю льоґаритмічну похідну функції y через p і розвязуючи отримане рівнання відносно p, дістанемо

$$\frac{m}{p}-\frac{l}{1-p}=0,\ p=\frac{m}{n};$$

друга похідна функції y через p, як це не трудно перевірити, при $p=\frac{m}{n}$ меньше нуля. Таким чином при $p=\frac{m}{n}$ елементарна ймовірність $d\mathcal{P}$ осягає максімума. Як що ми уявим собі цілий перемежок від 0 до 1 поділений на однакові досить малі перемежки, довжиною кожний dp, і оберемо серед них той, що містить в собі вартість $\frac{m}{n}$, то елементарна ймовірність $d\mathcal{P}_0$, відповідаюча обраному елементарному пермежкові, буде, очевидячки, найбільшою в порівнанню з инчими елементарними ймовірностями, які відповідають инчим елементарним перемежкам тої самої довжини. Відношення $\frac{m}{n}$ називається найімовірнішою вартістю невідомої ймовірности p події Е. Відповідна гипотеза, себто припущення, що ймовірність p рівняється своїй найімовірнішій вартости $\frac{m}{n}$ зветься найімовірнішою гипотезою.

§ 8. Обернена теорема Ляпляса.

Коли означимо

n число незалежних дослідів

p невідому ймовірність події Е при кожному досліді, однакову для всіх дослідів, і

t' і t'' довільні сталі числа при чому $t''>t'$,

то обернену теорему Ляпляса можна висловити так: як що з n незалежними дослідами подія Е появилася m і непоявилася $l=n-m$ разів, а для невідомої її імовірности p всі вартости між нулем і одиницею одинаковоможливі, то при необмеженому збільшенню числа n імовірність нерівностей

$$\frac{m}{n}+t'\sqrt{\frac{2lm}{n^3}}<p<\frac{m}{n}+t''\sqrt{\frac{2lm}{n^3}}$$

наближається до границі

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t'}^{t''} e^{-x^2}dx .$$

Імовірність нерівностей

$$\frac{m}{n}+t'\sqrt{\frac{2lm}{n^3}} < p < \frac{m}{n}+t''\sqrt{\frac{2lm}{n^3}} \qquad (1)$$

є, очевидно, ніщо инче, як імовірність, що вартість невідомої ймовірности p події E лежить поміж числами

$$\frac{m}{n}+t'\sqrt{\frac{2lm}{n^3}} \quad i \quad \frac{m}{n}+t''\sqrt{\frac{2lm}{n^3}} .$$

Припустимо, що при досить великому n числа l і m теж досить великі порядка однакового є порядком n.

Будемо шукати границю елементарної ймовірности

$$dP = \frac{(n+1)!}{l!m!}p^m(1-p)^l dp \qquad (2)$$

коли n необмежено росте, для вартостей p сусідніх з найімовірнішою вартістю $\frac{m}{n}$. Введемо замісць змінної p нову змінну величину x, задовольняючу умовам

$$p = \frac{m}{n}+x\sqrt{\frac{2lm}{n^3}} , \qquad (3)$$

$$t' < x < t'' \qquad (4)$$

Нерівностям (4) відповідають, очевидячки, нерівности (1), які встановлюють межі для невідомої ймовірности p. Щоби обмежитися лише вартостями p сусідніми з $\frac{m}{n}$, треба тільки взяти n досить великим, бо на основі рівности (3) ясно, що зі збільшенням n ріжницю

$$p-\frac{m}{n}$$

можна зробити меньше всякого довільно малого наперед даного числа. З рівности (3) маємо безпосередньо

$$1-p = \frac{l}{m} - x\sqrt{\frac{2lm}{n^3}} \quad і \quad dp = \sqrt{\frac{2lm}{n^3}}\,dx$$

Після підставлення в праву частину (2) дістанемо

$$d\mathcal{P} = \frac{(n+1)!}{l!\,m!}\left(\frac{m}{n} + x\sqrt{\frac{2lm}{n^3}}\right)^m\cdot\left(\frac{l}{n} - x\sqrt{\frac{2lm}{n^3}}\right)^l\sqrt{\frac{2lm}{n^3}}\,dx =$$

$$= \frac{(n+1)!}{l!\,m!}\cdot\frac{l^l m^m}{n^n}\sqrt{\frac{2lm}{n^3}}\left(1 + x\sqrt{\frac{2l}{mn}}\right)^m\cdot\left(1 - x\sqrt{\frac{2m}{ln}}\right)^l dx.$$

Щоби знайти границю $d\mathcal{P}$, коли n необмежено росте досить знайти границю густоти ймовірности

$$f(x) = \frac{(n+1)!\,l^l m^m}{l!\,m!\,n^n}\sqrt{\frac{2lm}{n^3}}\left(1 + x\sqrt{\frac{2l}{mn}}\right)^m\left(1 - x\sqrt{\frac{2m}{ln}}\right)^l$$

при $n=\infty$ і отриманий результат помножити на діференціал dx, який від n не залежить. Означивши

$$\frac{n!\,(n+1)\,l^l m^m}{l!\,m!\,n^n}\sqrt{\frac{2lm}{n^3}} = \mathcal{N},\ \left(1 + x\sqrt{\frac{2l}{mn}}\right)^m\left(1 - x\sqrt{\frac{2m}{ln}}\right)^l = X, \qquad (5)$$

будемо мати

$$\lim_{n=\infty} f(x) = \lim_{n=\infty}\mathcal{N}\cdot\lim_{n=\infty} X. \qquad (6)$$

Заміняючи

$$\lim_{n=\infty}(n!),\ \lim_{l=\infty}(l!),\ \lim_{m=\infty}(m!)$$

на основі взора Стірлінга відповідно на

$$\lim_{n=\infty}\left(e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}\right),\ \lim_{l=\infty}\left(e^{-l}l^l\sqrt{2\pi l}\right),\ \lim_{m=\infty}\left(e^{-m}m^m\sqrt{2\pi m}\right),$$

дістанемо

$$\lim_{n=\infty}\mathcal{N} = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{(n+1)\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi lm}}\sqrt{\frac{2lm}{n^3}}\right\}.$$

Відношення

$$\frac{(n+1)\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{\sqrt{n^3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = 1 + \frac{1}{n}$$

має при $n=\infty$ границю 1, тому здобуток $(n+1)\sqrt{n}$ під знаком $\lim$ можна замінити на $\sqrt{n^3}$, так що остаточно будемо мати

$$\lim_{n=\infty} N = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Щоби знайти $\lim\limits_{n=\infty} X$, прольоґаритмуємо обидві частини другої рівности (5). Дістанемо

$$\lg X = m \lg\left(1 + x\sqrt{\frac{2l}{mn}}\right) + l \lg\left(1 - x\sqrt{\frac{2m}{ln}}\right).$$

Завше можна добрати остільки велике n, щоби було

$$x\sqrt{\frac{2l}{mn}} < 1 \quad і \quad x\sqrt{\frac{2m}{ln}} < 1,$$

тоді льоґаритми в правій частині останньої рівности дасться розгорнути в безмежні ряди, так що

$$m \lg\left(1 + x\sqrt{\frac{2l}{mn}}\right) = m\left(x\sqrt{\frac{2l}{mn}} - \frac{l}{mn}x^2 + \sqrt{\frac{8l^3}{m^3n^3}}\cdot\frac{x^3}{3} - \cdots\cdots\right) =$$

$$= x\sqrt{\frac{2lm}{n}} - \frac{l}{n}x^2 + \frac{2l}{3n}\sqrt{\frac{l}{mn}}\,x^3 - \cdots\cdots.$$

$$l.\lg\left(1 - x\sqrt{\frac{2m}{ln}}\right) = -l\left(x\sqrt{\frac{2m}{ln}} + \frac{m}{ln}x^2 + \sqrt{\frac{8m^3}{l^3n^3}}\,\frac{x^3}{3} + \cdots\right) =$$

$$= -x\sqrt{\frac{2lm}{n}} - \frac{m}{n}x^2 - \frac{2m}{3n}\sqrt{\frac{m}{ln}}\,x^3 - \cdots\cdots,$$

звідки

$$\lg X = -x^2 + \frac{2}{3n}\left(l\sqrt{\frac{l}{mn}} - m\sqrt{\frac{m}{ln}}\right)x^3 - \cdots\cdots,$$

$$X = e^{-x^2 + \frac{2}{3n}\left(l\sqrt{\frac{l}{mn}} - m\sqrt{\frac{m}{ln}}\right)x^3 - \cdots\cdots}.$$

Тому що, згідно з нашим припущенням, числа n, l, m одного порядка, то всі члени в показчику правої частини, починаючи з другого, мають границею нуль, коли n необмежено росте, а тому

$$\lim_{n=\infty} X = e^{-x^2}.$$

Подставляючи в праву частину рівности (6) замісць $\lim\limits_{n\to\infty} N$ і $\lim\limits_{n\to\infty} X$ знайдені вирази, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

звідки

$$\lim_{n\to\infty} d\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx. \tag{7}$$

Ця формула, виведена в припущенню, що n несбмежено росте, цікава тим, що не залежить від вартостей числа n. Інтегруючи від t' до t'', дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-x^2} dx.$$

Останній взір дає границю ймовірности при $n=\infty$, що невідома вартість величини x лежить між числами t' і t'', або, другими словами, що вартість невідомої ймовірности p події E лежить між

$$t'\sqrt{\frac{2lm}{n^3}} \quad і \quad t''\sqrt{\frac{2lm}{n^3}},$$

себто границю ймовірности нерівностей (I), коли n необмежено росте. Таким чином обернена теорема Ляпляса доведена.

Як що границю ймовірности будемо вважати за її наближену вартість при досить великому n, то дістанемо для даних t' і t'' наближену формулу

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-x^2} dx. \tag{8}$$

Зокрема при

$$t' = -t \quad і \quad t'' = t$$

будемо мати наближену рівність

$$\mathcal{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} e^{-x^2} dx. \tag{9}$$

Нерівности (I) в цьому випадкові заміняться, очевидячки, нерівностями

$$\frac{m}{n}-t\sqrt{\frac{2lm}{n^3}} < p < \frac{m}{n}+t\sqrt{\frac{2lm}{n^3}} . \qquad (10)$$

Як що означимо

$$\delta = t\sqrt{\frac{2lm}{n^3}},$$

то наближена рівність (9) прийме вигляд

$$\mathcal{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\delta\sqrt{\frac{n^3}{2lm}}} e^{-x^2}dx, \qquad (11)$$

а нерівности (10) заміняться на -

$$\frac{m}{n}-\delta < p < \frac{m}{n}+\delta .$$

Наближеного взору (11) уживають тоді, коли дані n, m і δ.

Покладемо

$$d = x\sqrt{\frac{2lm}{n^3}} \qquad (12)$$

і перепишемо рівність (3) таким чином

$$p = \frac{m}{n} + d .$$

Звідси

$$p - \frac{m}{n} = d . \qquad (13)$$

Величина d називається відхиленням імовірности від її найімовірніщої вартости*). При досить великому n відхилення d, як це видно з (12), є величина досить мала, порядку однакового с порядком $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

З ріжницею $p-\frac{m}{n}$ нам доводилося вже мати діло в Розділі II (див. Примітку в §11), тільки означена була вона инакше, а саме

$$p - \frac{m}{n} = \frac{h}{n}$$

де h є так зване абсолютне відхилення, порядок яко-

---

*)Зауважимо тут, що величину x і в цьому випадкові називають зведеним відхиленням.

го однаковий с порядком $\sqrt{n}$,так що, як бачимо, різ-

ниця $p-\frac{m}{n}$,як раніше,так і тепер є величина одно-

го й того ж порядка, однакового с порядком $\frac{1}{\sqrt{n}}$.Чим

же власне d відріжняється від $\frac{h}{n}$? Величина d є ріжниця між невідомою ймовірністю події і даною її фреквенцією, а величина $\frac{h}{n}$ - ріжниця між даною ймовірністю події й невідомою її фреквенцією.

Як що на верхню межу t в інтегралі наближеної формули (9) дивитися, як на величину змінну, то наближена вартість імовірности $\mathcal{P}$ буде функцією t і подібно тому, як в §9 Розд.II, можна наближені взори (9) і (11) представити відповідно в такій формі

$$\mathcal{P}=\Phi(t) \quad і \quad \mathcal{P}=\Phi\left(\delta\sqrt{\frac{n^3}{2lm}}\right).$$

Ці формули відріжняються від анальоґічних формул Розділа II лише тим, що в них входить величина

$$H'=\sqrt{\frac{n^3}{2lm}},$$

тоді як у формули Розділа II входить величина

$$H=\sqrt{\frac{n}{2pq}},$$

яку ми назвали мірою докладности фреквенції.Величину H' можна переписати так

$$H'=\sqrt{\frac{n}{2\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{n}}}.$$

При досить великому n на основі теореми Бернуллі можна очікувати з імовірністю довільно близькою певности,що $\frac{m}{n}$ і $\frac{l}{n}$ будуть довільно мало відріжнятися від p і q , а значить величина H' - від H .

Приклад. В урні знаходиться 12000 куль білих і чорних, але невідомо, кілько саме тих і других. Переводять слідуючий дослід : виймають наосліп по одній кулі, повертаючи кожного разу вийняту кулю назад до урни. Всього було вийнято 900 куль, з них 300 білих і 600 чорних. Яка ймовірність що невідома вартість імовірности появлення білої кулі з урни ріжниться від своєї найімовірнішої вартости не більше, як на $1/40$?

В даному випадкові

$$n = 900,\quad m = 300,\quad l = 600,\quad \delta = \frac{1}{40}.$$

Найімовірніша вартість невідомої ймовірности появлення білої кулі з урни рівняється

$$\frac{m}{n} = \frac{300}{900} = \frac{1}{3}.$$

Межа t зведеного відхилення знайдеться, очевидячки, по формулі

$$t = \delta\sqrt{\frac{n^3}{2lm}} = \frac{1}{40}\sqrt{\frac{900^3}{2.300.600}} = \frac{45}{40} = 1,125.$$

Приміняючи наближений взір (II) §7, дістаномо для відшукуваної ймовірности

$$\mathcal{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1,125} e^{-x^2}dx = \Phi(1,125).$$

Інтерполюючи, знаходимо з таблиць

$$\begin{array}{rl} \Phi(1,12) = & 0,8867879 \quad + \\ & 0,0015914 \\ \hline \Phi(1,125) = & 0,8883793 \end{array}$$

З такою ймовірністю можна очікувати, що невідома ймовірність появлення білої кулі з урни лежить між числами

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{40} = \frac{37}{120} \quad і \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{40} = \frac{43}{120}.$$

Другими словами, з імовірністю рівною 0,8883793 можна чокати, що число білих куль в урні рівняється найменче 3700 і найбільше 4300.

§ 9. Обернена теорема Бернуллі.

Коли означимо :

n число незалежних дослідів і

p невідому ймовірність події E при кожному досліді, однакову для всіх дослідів,
то обернену теорему Бернуллі можна висловити так: як що з n незалежними дослідами подія E появилася m разів, а для невідомої ймовірности її p всі вартости між 0 і I однаковоможливі, то при досить значних вартостях числа n імовірність нерівностей

$$-\varepsilon < p - \frac{m}{n} < \varepsilon$$

буде більше $1-\eta$, де ε і η довільні додатні числа.

Другими словами, при досить великому числі дослідів буде довільно близькою певности ймовірність, що невідома вартість імовірности p події E буде довільно мало відріжнятися від фреквенції цієї події.

З формального боку обернена теорема Бернуллі, як це видно з її умови, твердить те саме, що й пряма теорема Бернуллі, а власне, що при досить великому n імовірність нерівностей

$$-\varepsilon < p - \frac{m}{n} < \varepsilon$$

буде більше $1-\eta$, які б малі додатні числа ε і η не були. Тому ясно, що доказ оберненої теореми Бернуллі цілком анальогічний з доказом прямої теореми (див. §II, Розд. II). Лише умова, якій повинні задовольняти вартости числа n, буде мати в даному випадкові, як в цьому легко переконатися, такий вигляд

$$\varepsilon^2 > \frac{2lmt^2}{n^3}, \text{звідки} \quad n > \sqrt[3]{\frac{2lmt^2}{\varepsilon^2}}.$$

§ 10. Імовірности майбутніх подій.

Теорема. Як що подія A може відбутися лише при здійсненню якоїсь одної з єдиноможливих і взаїмновиключальних гипотез, то ймовірність другої події C, коли вже констатовано, що подія A появилася, але невідомо при здійсненню якої саме гипотези, рівняється сумі ймовірностей появлення події C з кожною окремою формою події A поділеній на суку ймовірностей ріжних форм події A.

Цією теоремою дається відповідь на третю з поставлених в §I задач.

Відшукувана ймовірність, очевидячки, є

$$p_A(C)$$

На основі теореми множення ймовірностей маємо

$$p(AC) = p(A) \cdot p_A(C),$$

звідки

$$p_A(C) = \frac{p(AC)}{p(A)} \qquad (I)$$

Нехай число всіх єдиноможливих і взаємновиключальних гипотез, які можна збудувати для пояснення появлення події A рівняється n. Означимо їх

$$B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_n.$$

Відповідно до числа гипотез подію A можна розбити на n взаємновиключальних форм

$$B_1A, B_2A, \dots, B_iA, \dots, B_nA.$$

Подія AC є появлення разом події A і C без огляду на те, при здійсненню якої саме гипотези B_i подія A появилася. Тому появлення події C разом із подією A може відбутися у формі появлення C із якоюнебудь одною із вищеперечисленних форм події A. Звідси ясно, що й подію AC можна теж розбити на n окремих взаємновиключальних форм

$$B_1AC, B_2AC, \dots, B_iAC, \dots, B_nAC.$$

За теоремою додавання ймовірностей будемо мати

$$p(A) = p(B_1A) + p(B_2A) + \dots + p(B_iA) + \dots + p(B_nA)$$

$$p(AC) = p(B_1AC) + p(B_2AC) + \dots + p(B_iAC) + \dots + p(B_nAC).$$

Підставляючи в рівність (1) замість $p(AC)$ і $p(A)$ знайдені вирази, дістанемо

$$p_A(C) = \frac{p(B_1AC) + p(B_2AC) + \dots + p(B_iAC) + \dots + p(B_nAC)}{p(B_1A) + p(B_2A) + \dots + p(B_iA) + \dots + p(B_nA)} \qquad (2)$$

Таким чином теорема доведена. Але звичайно взір цей вживають в иншій більш зручній формі. На основі теореми множення ймовірностей

$$p(B_i AC) = p(B_i) p_{B_i}(A) . p_{B_i A}(C)$$
$$p(B_i A) = p(B_i) . p_{B_i}(A) ,$$

а тому

$$p_A(C) = \frac{p(B_1)p_{B_1}(A)p_{B_1A}(C) + p(B_2)p_{B_2}(A)p_{B_2A}(C) + \dots + p(B_i)p_{B_i}(A).p_{B_iA}(C) + \dots + p(B_n)p_{B_n}(A)p_{B_nA}(C)}{p(B_1)p_{B_1}(A) + p(B_2)p_{B_2}(A) + \dots + p(B_i)p_{B_i}(A) + \dots + p(B_n)p_{B_n}(A)} .$$

або

$$p_A(C) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p(B_i)p_{B_i}(A)p_{B_iA}(C)}{\sum_{i=1}^{i=n} p(B_i)p_{B_i}(A)} . \qquad (3)$$

Цей взір дає ймовірність появлення події C, коли констатовано вже появлення події A і невідомо, при здійсненню якої саме гипотези B подія A появилася.

Розглядаючи подію C, як можливу в майбутньому, називають взір (3) ф о р м у л о ю д л я в и з н а ч е н н я м а й б у т н і х п о д і й.

Події A і C, взагалі кажучи, залежать одна від одної, але в окремому випадкові вони можуть бути й незалежними після вияснення, яка саме з гипотез B_i здійснилася. Тоді формула (3) приймає простіший вигляд. Дійсно, як що після вияснення, яка саме гипотеза здійснилася, події A і C не залежать одна від одної, то ймовірність

$$p_{B_iA}(C)$$

однакова з імовірністю

$$p_{B_i}(C)$$

події C, обчисленої в припущенню, що здійснилася гипотеза B_i. Формула (3) тоді перепишеться так

$$p_A(C)=\frac{\sum_{i=1}^{i=n} p(B_i)p_{B_i}(A)p_{B_i}(C)}{\sum_{i=1}^{i=n} p(B_i)\cdot p_{B_i}(A)} \quad (4)$$

В окремому випадкові, коли всі гипотези

$$B_1, B_2, \ldots, B_i, \ldots, B_n$$

однаковоможливі, себто коли

$$p(B_1)=p(B_2)=\ldots=p(B_i)=\ldots=p(B_n),$$

формула (3) має вигляд

$$p_A(C)=\frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{B_i}(A)p_{B_iA}(C)}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{B_i}(A)} . \quad (5)$$

§ II. Задачі на примінення формули для визначення ймовірностей майбутніх подій.

Задача I. Мається I0 урн двох категорій. В першій категорії 4 урни і в другій - 6. Кожна урна першої категорії містить 7 білих і 3 чорних кулі, а кожна урна другої категорії - 4 білих і 6 чорних куль. Беруть наосліп одну з I0 урн і виймають з неї одну кулю. Колір вийнятої кулі білий. Яка ймовірність, що друга куля, вийнята з тої ж самої урни, буде теж біла ?

Появлення білої кулі за першим разом із обраної наосліп урни будемо вважати подією А, а появлення білої кулі за другим разом з тої самої урни - подією С. Відносно обраної наосліп урни можна зробити дві гипотези, а саме :

B_1, що обрана урна належить до I категорії і

B_2 що обрана урна належить до II категорії.

Відшукувана ймовірність, очевидячки, є ймовірність

$$p_A(C)$$

Ясно , що

$$p(B_1)=4/10,\ p(B_2)=6/10,\ p_{B_1}(A)=\frac{7}{10},$$
$$p_{B_2}(A)=4/10,\ p_{B_1A}(C)=6/9,\ p_{B_2A}(C)=3/9.$$

Примінюючи взір (3) попереднього параграфа, знаходимо:

$$p_A(C)=\frac{4/10\cdot 7/10\cdot 2/3+6/10\cdot 4/10\cdot 1/3}{4/10\cdot 7/10+6/10\cdot 4/10}=\frac{20}{39}.$$

Задача 2. В одній урні знаходиться 4 білих і 6 чорних куль, а в другій - 4 білих і 3 чорних. З першої урни боруть одну кулю і не дивлячись на неї перекладають її до другої урни, після чого з другої урни виймають наосліп одну кулю. Колір вийнятої кулі чорний. Потім виймають наосліп кулю з першої урни. Яка ймовірність, що ця остання буде білого коліру ?

Появлення чорної кулі з другої урни будемо вважати подією A, а появлення білої кулі з першої урни - подією C. Відносно коліру кулі, перекладеної з першої урни до другої, можна зробити лише дві єдиноможливих і взаємновиключальних гипотези :

B_1 , що перекладена куля була біла і

B_2 , що перекладена куля була чорна.

Відшукувана ймовірність буде

$$p_A(C)$$

Безпосереднім обчисленням знаходимо :

$$p(B_1)=4/10,\ p(B_2)=6/10,\ p_{B_1}(A)=3/8.$$
$$p_{B_2}(A)=4/8,\ p_{B_1A}(C)=p_{B_1}(C)=\frac{3}{9},\ p_{B_2A}(C)=p_{B_2}(C)=4/9.$$

Як видно з умови задачі події A і C не залежать одна від одної. Примінюючи взір (4) попереднього параграфа, дістанемо

$$p_A(C)=\frac{2/5\cdot 3/8\cdot 3/9+3/5\cdot 4/8\cdot 4/9}{2/5\cdot 3/8+3/5\cdot 4/8}=11/27.$$

Задача 3 . В урні знаходиться 6 куль білих і чорних, але невідомо, кілько саме тих і других. Тягнуть наосліп одну по одній 3 кулі і констатують, що одна вийнята куля біла, а дві чорні. Після цього ще тягнуть дві кулі. Яка ймовірність, що одна з них буде біла, а друга - чорна ?

Відносно коліру куль в урні можна зробити сім гипотез :

B_1, що в урні 0 білих і 6 чорних куль,
B_2, " " I біла і 5 " " ,
B_3, " " 2 білих і 4 " кулі,
B_4, " " 3 " 3 " " ,
B_5, " " 4 " 2 " " ,
B_6, " " 5 " I чорна куля і
B_7, " " 6 " 0 чорних куль.

Всі ці гипотези будемо вважати однаковоможливими . Кожний окремий витяг кулі з урни будемо називати дослідом. Появлення з першими трьома дослідами одної білої кулі і двох чорних - будемо вважати подією A, появлення ж з двома дальшими дослідами одної білої, а одної чорної кулі будемо вважати подією C. Відшукувана ймовірність є, очевидячки, ймовірність $p_A(C)$. Ясно, що після появлення події A гипотези B_1, B_6, B_7 відпадають, як неможливі. Безпосереднім обчисленням знаходимо :

$$p_{B_2}(A) = 3\cdot 1/6 \cdot 5/5 \cdot 4/4 = 1/2\ ,\quad p_{B_3}(A) = 3\cdot 2/6 \cdot 4/5 \cdot 3/4 = 3/5\ ,$$
$$p_{B_4}(A) = 3\cdot 3/6 \cdot 3/5 \cdot 2/4 = 9/20\ ,\quad p_{B_5}(A) = 3\cdot 4/6 \cdot 2/5 \cdot 1/4 = 1/5\ .$$

Після того, як подія A вже появилася, в урні залишилося, очевидячки, тілько 3 кулі. Що до коліру їх, то вони будуть :

або всі 3 чорні, як що справедлива гипотеза B_2 ,
або I з них біла, а 2 чорні, як що справ. гип. B_3
або 2 білих, а I чорна, як що справед. гипот. B_4 ,
або, нарешті, всі 3 білі, як що справ. гипот. B_5 .

Відповідно до цього знаходимо :

$$p_{B_2A}(C) = 0\ ,\quad p_{B_3A}(C) = 2\cdot 1/3 \cdot 2/2 = 2/3\ ,$$
$$p_{B_4A}(C) = 2\cdot 2/3 \cdot 1/2 = 2/3\ ,\quad p_{B_5A}(C) = 0$$

Приміняючи взір (5) попереднього параграфа, знаходимо :

$$p_A(C) = \frac{3/5 \cdot 2/3 + 9/20 \cdot 2/3}{3/5 + 9/20} = 2/3.$$

§ 12. Оцінка можливих результатів майбутніх дослідів на основі результатів дослідів переведених.

Примінимо виведений в §9 взір для визначення ймовірностей майбутніх подій до одної спеціяльної задачі, яка має особливий інтерес. Задача ця такого роду. Будемо розглядати, як і в §5 необмежений ряд дослідів, незалежних відносно якоїсь події E, імовірність якої, однакова при кожному досліді, нам невідома. Означимо її p. Припустимо також, що вже переведено n дослідів, при чому подія E появилася m разів і непоявилася $l = n - m$ разів. Треба знайти ймовірність, що при нових n_1 дослідах, подібних понереднім, подія E появиться m_1 разів і не появиться $l_1 = n_1 - m_1$ разів.

Припустимо, що відносно вартости невідомої ймовірности події E задача допускає ріжні гипотези, при чому розглянемо два окремих випадкі, коли число цих гипотез скінчене і коли воно необмежено велике.

I. Випадок, коли число гипотез скінчено.

Нехай відносно вартости невідомої ймовірности p події E можна зробити ν й лише ν ріжних гипотез:

$$p = p_1, p = p_2, \ldots, p = p_i, \ldots, p = p_\nu,$$

імовірности яких визначаються відповідно числами

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i, \ldots, \pi_\nu$$

Означимо ці гипотези відповідно

$$B_1, B_2, \ldots, B_i, \ldots, B_\nu.$$

Подібно тому, як в §5, будемо вважати подією A появлення події E при n дослідах m разів і непоявлення її l разів. Подією ж C будемо вважати появлення події E m_1 разів і непоявлення l_1 разів при n_1 майбутніх дослідах. Відшукуаною ймовірністю буде, очевидячки, ймовірність

$$p_A(C)$$

Ясно, що

$$p(B_1)=\pi_1,\ p(B_2)=\pi_2,\ \ldots\ldots,\ p(B_i)=\pi_i,\ \ldots,\ p(B_\nu)=\pi_\nu .$$

Щоби примінити до розвязання поставленої задачі взір для визначення ймовірностей майбутніх подій, треба ще визначити

$$p_{B_i}(A) \qquad \text{і} \qquad p_{B_iA}(C),$$

де $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Імовірність $p_{B_i}(A)$ вже була знайдена в §5, а саме

$$p_{B_i}(A) = \frac{n!}{m!\,l!} p_i^m q_i^l ,$$

де $q_i = 1 - p_i$.

Що ж до ймовірности $p_{B_iA}(C)$, то це, очевидячки, є ймовірність, що при n_1 майбутніх дослідах подія E появиться m_1 разів і не появиться l_1 разів, обчислена при умові, що при n переведених вже дослідах ця сама подія появилася m разів і непоявилася l разів, при чому ймовірність її при кожному досліді була рівна p_i. Тому що досліди, згідно з умовою, незалежні, то, очевидно, що невідома ймовірність p події E при майбутніх n_1 дослідах заховує ту саму вартість, яку вона мала при n переведених дослідах. Події A і C, очевидячки, не залежать одна від одної, а тому

$$p_{B_iA}(C) = p_{B_i}(C) .$$

Вираз для $p_{B_i}(C)$ знайдеться на основі тих самих міркувань, що й вираз для $p_{B_i}(A)$, треба лишо числа n, m і l замінити відповідно числами n_1, m_1 і l_1. Отже

$$p_{B_i}(C) = \frac{n_1!}{m_1!\,l_1!} p_i^{m_1} q_i^{l_1} .$$

Примінюючи тепер взір (4) §9, дістанемо після підставлення й скорочення на

$$\frac{n!}{m!\,l!}$$

рівність

$$p_A(C) = \frac{n_1!}{m_1!\,l_1!} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=v} \pi_i p_i^{m+m_1} q_i^{l+l_1}}{\sum\limits_{i=1}^{i=v} \pi_i p_i^{m} q_i^{l}} \qquad (I)$$

II. Випадок, коли число гипотез необмежено велике.

В протилежність попередньому випадкові припустимо тепер, що не можна вказати *a priori*, які саме вартости невідомої ймовірности p можна очікувати, так що доводиться вважати можливими для величини p всякі вартости, заключені між 0 і I. Будемо вважати всі вартости для величини p між 0 і I однаковоможливими. Таким чином можна сказати, що в даному випадкові відносно вартости невідомої ймовірности p можна зробити необмежено багато однаковоможливих гипотез.

Задача в такому вигляді уявляє, очевидячки, граничний випадок попередньої задачі, як що в умову цієї останньої внесемо відповідні зміни. Анальогічно, як в §4, покладемо:

$$p_1 = \frac{1}{v},\ p_2 = \frac{2}{v},\ \text{----},\ p_i = \frac{i}{v},\ \text{----},\ p_v = 1$$

і

$$\pi_1 = \pi_2 = \text{----} = \pi_i = \text{----} = \pi_v = \frac{1}{v}.$$

Тоді розвязання поставленої задачі отримаємо з формули (I) при переході до границі при $n = \infty$.

$$p_A(C) = \frac{n_1!}{m_1!\,l_1!} \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=v} \pi_i p_i^{m+m_1} q_i^{l+l_1}}{\sum\limits_{i=1}^{i=v} \pi_i p_i^{m} q_i^{l}}.$$

Зауважуючи, що

$$\pi_i = \Delta p_i,$$

як це було встановлено в §5, і переходячи до означених інтегралів, дістанемо остаточно

$$p_A(C) = \frac{n_1!}{m_1!\,l_1!} \frac{\int_0^1 p^{m+m_1}(1-p)^{l+l_1}dp}{\int_0^1 p^{m}(1-p)^{l}dp}. \qquad (2)$$

...два інтеграли це Ейлерові інтеграли I - го роду, рівні :

$$\int_0^1 p^{n+m_1}(1-p)^{l+l_1}dp = \frac{(m+m_1)!(l+l_1)!}{(n+n_1+1)!},$$

$$\int_0^1 p^m(1-p)^l dp = \frac{m!\,l!}{(n+1)!}.$$

А тому

$$p_1(C) = \frac{n_1!}{m_1!\,l_1!}\cdot\frac{(m+m_1)!(l+l_1)!}{(n+n_1+1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{m!\,l!}. \qquad (3)$$

Відмітимо такий окремий випадок применення формули (3). Знайдемо ймовірність, що подія, яка появилася при n дослідах m разів, появиться також і з $(n+1)$-м дослідом. Поклавши у формулі (3)

$$n_1 = 1, \quad m_1 = 1, \quad l_1 = 0,$$

дістанемо

$$\frac{m+1}{n+2}. \qquad (4)$$

Ріжниця ж

$$1 - \frac{m+1}{n+2} = \frac{l+1}{n+2}$$

означає, очевидячки, ймовірність, що подія, яка при n дослідах появилася m разів, з $(n+1)$-м дослідом не появиться. Ясно, що ту ж саму відповідь діста-немо й безпосередньо з формули (3) положивши в ній $n_1=1$, $m_1=0$, $l_1=1$.

Як що у виразі (4) покладемо $m=n$, то вираз

$$\frac{n+1}{n+2}$$

дасть, очевидячки, ймовірність, що подія, яка появилася зо всіма переведеними дослідами, появиться іще з одним дослідом. Ясно, що цей самий результат дасть також і формула (3), як що покладемо в ній $m=n$, $l=0$, $n_1=1$, $m_1=1$, $l_1=0$.

Наприкінці зауважимо, що, як формула (3), так і формула (II) §5 були виведені при додержанню слідуючих умов :

I). незалежність дослідів,

2). незмінність невідомої ймовірности події E при кожному досліді і

3) однаковоможливість до переведення дослідів всіх вартостей цієї ймовірности.

Отже, перше ніж користуватися згаданими формулами, треба перевірити, чи задовольняються вищезгадані умови. Формули ці уживаються між инчим в асекурації.

§ 13. Задачі на применення формули (3) попереднього параграфа.

Задача 1. З кожним із n переведених незалежних дослідів появилася подія E. Яка ймовірність, що при переведенню дальших n_1 дослідів подія E також появиться з кожним дослідом ?

Задача, очевидячки, розвязується формулою (3) попереднього §. Положивши в цій формулі

$$m = n,\ l = 0,\ m_1 = n_1,\ l_1 = 0,$$

дістанемо для відшукуваної ймовірности вартість

$$\frac{n_1!\,(n+n_1)!\,(n+1)!}{n_1!\,(n+n_1+1)!\,n!} = \frac{n+1}{n+n_1+1}.$$

Задача 2. В урні знаходиться безмежно велика кількість білих і чорних куль. Переводять слідуючий дослід : виймають наосліп одну кулю і, записавши її колір, повертають її назад до урни. Після 5 дослідів констатують, що три рази появилася біла куля і два рази - чорна. Яка ймовірність, що 5 наступних дослідів також дадуть три рази білу кулю і два рази чорну ?

Досліди незалежні, бо, згідно з умовою, кожна вийнята куля повертається зараз же до урни. Імовірність появлення з урни, нехай, білої кулі невідома, бо невідомо відношення числа білих куль в урні до числа всіх куль, а тому, що число всіх куль безмежно велике, то ясно, що для невідомої ймовірности появлення білої кулі з урни можливі всілякі вартости між 0 і 1. Ця невідома ймовірність заховує увесь час незмінну вартість, бо кожна вийнята куля, як відомо, повертається зараз же назад до урни. Нарешті, всі можливі вартости невідомої ймовірности появлення білої кулі з урни можна вважати однаковоможливими, бо немає підстав припускати противне. Таким чином, як бачимо, всі умови необхідні для користування формулою (3) попереднього параграфа, задовольняються. Положивши в цій формулі

$$n=5,\ m=3,\ \ell=2,\ n_1=5,\ m_1=3,\ \ell_1=2,$$

дістанемо для відшукуваної ймовірности вартість

$$\frac{5!6!4!6!}{3!2!11!3!2!}=\frac{20}{77}.$$

Задача 3. Кістку до гри, зроблену у формі правильного многостінника, кидають на поземну площу. Число всіх стінок многостінника невідомо, але відомо, що вони білі й чорні. Колір стінки, якою кістка впаде на площу, записують. Всього кинули многостінник 100 разів, при чім 99 разів він упав білою стінкою і 1 раз чорною. Яка ймовірність, що при дальших 100 киданнях многостінник усі 100 разів впаде білою стінкою?

Не трудно бачити, що задача задовольняє всім умовам попереднього параграфа. Відшукувана ймовірність знайдеться на основі формули (3) попереднього параграфа, яка при

$$n=100,\ m=99,\ \ell=1,$$

$$n_1=100,\ m_1=100,\ \ell_1=0$$

дає

$$\frac{100!199!101!}{100!201!99!}=\frac{101}{402}.$$

Додаток I.

ТАБЛИЦЯ

чисельних вартостей функції

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx$$

t	$\varphi(t)$	t	$\varphi(t)$
0,00....	0,0000000	0,3I....	0,338908I
0,0I....	0,0II2833	0,32....	0,349I259
0,02....	0,0225644	0,33....	0,3592785
0,03....	0,03384I0	0,34....	0,3693644
0,04....	0,045II09	0,35....	0,37938I9
0,05....	0,05637I8	0,36....	0,3893296
0,06....	0,06762I5	0,37....	0,3992059
0,07....	0,0788577	0,38....	0,4090093
0,08....	0,090078I	0,39....	0,4I87385
0,09....	0,I0I2806	0,40....	0,4283922
0,I0....	0,II24630	0,4I....	0,4379690
0,II....	0,I236230	0,42....	0,4474676
0,I2....	0,I347584	0,43....	0,4568867
0,I3....	0,I45867I	0,44....	0,466225I
0,I4....	0,I569470	0,45....	0,47548I8
0,I5....	0,I679959	0,46....	0,4846555
0,I6....	0,I790II7	0,47....	0,4937452
0,I7....	0,I899923	0,48....	0,5627498
0,I8....	0,2009357	0,49....	0,5II6683
0,I9....	0,2II8398	0,50....	0,5204999
0,20....	0,2227025	0,5I....	0,5292437
0,2I....	0,23352I8	0,52....	0,5378987
0,22....	0,2442958	0,53....	0,546464I
0,23....	0,2550225	0,54....	0,5549392
0,24....	0,2657000	0,55....	0,5633233
0,25....	0,2763263	0,56....	0,57I6I57
0,26....	0,2868997	0,57....	0,5798I58
0,27....	0,2974I82	0,58....	0,5879229
0,28....	0,3078800	0,59....	0,5959365
0,29....	0,3I82834	0,60....	0,603856I
0,30....	0,3286267	0,6I....	0,6II68I2

t	$\varphi(t)$	t	$\varphi(t)$
0,62....	0,6I94II4	I,09....	0,8768030
0,63....	0,6270463	I,I0....	0,8802050
0,64....	0,6345857	I,II....	0,8835330
0,65....	0,6420292	I,I2....	0,8867879
0,66....	0,6493765	I,I3....	0,8899707
0,67....	0,6566275	I,I4....	0,8930823
0,68....	0,6637820	I,I5....	0,896I238
0,69....	0,6708399	I,I6....	0,8990962
0,70....	0,67780I0	I,I7....	0,9020004
0,7I....	0,6846654	I,I8....	0,9048374
0,72....	0,69I4330	I,I9....	0,9076083
0,73....	0,698I038	I,20....	0,9I03I40
0,74....	0,7046780	I,2I....	0,9I29555
0,75....	0,7III556	I,22....	0,9I55339
0,76....	0,7I75367	I,23....	0,9I8050I
0,77....	0,72382I6	I,24....	0,9205052
0,78....	0,7300I04	I,25....	0,922900I
0,79....	0,736I035	I,26....	0,9252359
0,80....	0,742I0I0	I,27....	0,9275I36
0,8I....	0,7480033	I,28....	0,9297342
0,82....	0,7538I08	I,29....	0,93I8987
0,83....	0,7595238	I,30....	0,9340080
0,84....	0,765I427	I,3I....	0,9360632
0,85....	0,7706680	I,32....	0,9380652
0,86....	0,776I002	I,33....	0,9400I50
0,87....	0,78I4398	I,34....	0,94I9I37
0,88....	0,7866873	I,35....	0,9437622
0,89....	0,79I8432	I,36....	0,94556I4
0,90....	0,7969082	I,37....	0,9473I24
0,9I....	0,80I8828	I,38....	0,9490I60
0,92....	0,8067677	I,39....	0,9506733
0,93....	0,8II5635	I,40....	0,952285I
0,94....	0,8I627I0	I,4I....	0,9538524
0,95....	0,8208908	I,42....	0,9553762
0,96....	0,8254236	I,43....	0,9568573
0,97....	0,8298703	I,44....	0,9582966
0,98....	0,83423I5	I,45....	0,9596950
0,99....	0,838508I	I,46....	0,96I0535
I,00....	0,8427008	I,47....	0,9623729
I,0I....	0,8468I05	I,48....	0,963654I
I,02....	0,8508380	I,49....	0,9648979
I,03....	0,8547842	I,50....	0,966I052
I,04....	0,8586499	I,5I....	0,9672768
I,05....	0,8624360	I,52....	0,9684I35
I,06....	0,866I435	I,53....	0,9695I62
I,07....	0,8697732	I,54....	0,9705857
I,08....	0,873326I	I,55....	0,97I6227

t	$\varphi(t)$	t	$\varphi(t)$
I,56....	0,972628I	2,03....	0,9959063
I,57....	0,9736026	2,04....	0,9960858
I,58....	0,9745470	2,05....	0,996258I
I,59....	0,9754620	2,06....	0,9964235
I,60....	0,9763484	2,07....	0,9965822
I,6I....	0,9772069	2,08....	0,9967344
I,62....	0,978038I	2,09....	0,9968805
I,63....	0,9788429	2,I0....	0,9970205
I,64....	0,97962I8	2,II....	0,997I548
I,65....	0,9803756	2,I2....	0,9972836
I,66....	0,98II049	2,I3....	0,9974070
I,67....	0,98I8I04	2,I4....	0,9975253
I,68....	0,9824928	2,I5....	0,9976386
I,69....	0,983I526	2,I6....	0,9977472
I,70....	0,9837904	2,I7....	0,99785II
I,7I....	0,9844070	2,I8....	0,9979505
I,72....	0,9850028	2,I9....	0,9980459
I,73....	0,9855785	2,20....	0,998I372
I,74....	0,986I346	2,2I....	0,9982244
I,75....	0,98667I7	2,22....	0,9983079
I,76....	0,987I903	2,23....	0,9983878
I,77....	0,98769I0	2,24....	0,9984642
I,78....	0,988I742	2,25....	0,9985373
I,79....	0,9886406	2,26....	0,998607I
I,80....	0,9890905	2,27....	0,9986739
I,8I....	0,9895245	2,28....	0,9987377
I,82....	0,989943I	2,29....	0,9987986
I,83....	0,9903467	2,30....	0,9988568
I,84....	0,9907359	2,3I....	0,9989I24
I,85....	0,99IIII0	2,32....	0,9989655
I,86....	0.99I4725	2,33....	0,9990I62
I,87....	0,99I8207	2,34....	0,9990646
I,88....	0,992I562	2,35....	0,999II07
I,89....	0,9924793	2,36....	0,999I548
I,90....	0,9927904	2,37....	0,999I968
I,9I....	0,9930899	2,38....	0,9992369
I,92....	0,9933782	2,39....	0,999275I
I,93....	0,9936557	2,40....	0,9993II5
I,94....	0,9939226	2,4I....	0,9993462
I,95....	0,994I794	2,42....	0,9993793
I,96....	0,9944263	2,43....	0,9994I08
I,97....	0,9946637	2,44....	0,9994408
I,98....	0,9948920	2,45....	0,9994694
I,99....	0,995III4	2,46....	0,9994966
2,00....	0,9953223	2,47....	0,9995226
2,0I....	0,9955248	2,48....	0,9995472
2,02....	0,995795	2,49....	0,9995707

t	$\varphi(t)$	t	$\varphi(t)$
2,50....	0,9995930	2,97....	0,9999733
2,5I....	0,9996I43	2,98....	0,9999750
2,52....	0,9996345	2,99....	0,9999765
2,53....	0,9996537	3,00....	0,9999779
2,54....	0,9996720	3,0I....	0,9999793
2,55....	0,9996893	3,02....	0,9999805
2,56....	0,9997058	3,03....	0,99998I8
2,57....	0,99972I5	3,04....	0,9999829
2,58....	0,9997364	3,05....	0,9999839
2,59....	0,9997505	3,06....	0,9999849
2,60....	0,9997640	3,07....	0,9999859
2,6I....	0,9997767	3,08....	0,9999867
2,62....	0,9997888	3,09....	0,9999876
2,63....	0,9998003	3,I0....	0,9999884
2,64....	0,9998II2	3,II....	0,999989I
2,65....	0,99982I5	3,I2....	0,9999898
2,66....	0,99983I3	3,I3....	0,9999904
2,67....	0,9998406	3,I4....	0,99999I0
2,68....	0,9998494	3,I5....	0,99999I6
2,69....	0,9998578	3,I6....	0,999992I
2,70....	0,9998657	3,I7....	0,9999926
2,7I....	0,9998732	3,I8....	0,999993I
2,72....	0,9998803	3,I9....	0,9999936
2,73....	0,9998870	3,20....	0,9999940
2,74....	0,9998933	3,2I....	0,9999944
2,75....	0,9998994	3,22....	0,9999947
2,76....	0,999905I	3,23....	0,999995I
2,77....	0,9999I05	3,24....	0,9999954
2,78....	0,9999I56	3,25....	0,9999957
2,79....	0,9999204	3,26....	0,9999960
2,80....	0,9999250	3,27....	0,9999962
2,8I....	0,9999293	3,28....	0,9999965
2,82....	0,9999334	3,29....	0,9999967
2,83....	0,9999372	3,30....	0,9999969
2,84....	0,9999409	3,3I....	0,999997I
2,85....	0,9999443	3,32....	0,9999973
2,86....	0,9999476	3,33....	0,9999975
2,87....	0,9999507	3,34....	0,9999977
2,88....	0,9999536	3,35....	0,9999978
2,89....	0,9999563	3,36....	0,9999980
2,90....	0,9999589	3,37....	0,999998I
2,9I....	0,99996I3	3,38....	0,9999982
2,92....	0,9999636	3,39....	0,9999984
2,93....	0,9999658	3,40....	0,9999985
2,94....	0,9999679	3,4I....	0,9999986
2,95....	0,9999698	3,42....	0,9999987
2,96....	0,99997I6	3,43....	0,9999988

t	$\varphi(t)$	t	$\varphi(t)$
3,44...	0,9999989	3,76...	0,99999989477
3,45...	0,9999989	3,77...	0,99999990265
3,46...	0,99999900780	3,78...	0,99999990295
3,47...	0,99999907672	3,79...	0,9999999I672
3,48...	0,999999I4I0I	3,80...	0,99999992200
3,49...	0,99999920097	3,8I...	0,9999999288I
3,50...	0,9999992569I	3,82...	0,9999999342I
3,5I...	0,99999930905	3,83...	0,9999999392I
3,52...	0,99999935766	3,84...	0,99999994383
3,53...	0,99999940296	3,85...	0,999999948I2
3,54...	0,999999445I9	3,86...	0,99999995208
3,55...	0,99999948452	3,87...	0,99999995575
3,56...	0,99999952II5	3,88...	0,999999959I5
3,57...	0,99999955527	3,89...	0,99999996230
3,58...	0,99999958703	3,90...	0,99999996522
3,59...	0,9999996I66I	3,9I...	0,99999996790
3,60...	0,999999644I4	3,92...	0,99999997039
3,6I...	0,99999966975	3,93...	0,99999997260
3,62...	0,99999969358	3,94...	0,99999997482
3,63...	0,9999997I574	3,95...	0,99999997678
3,64...	0,99999973636	3,96...	0,99999997860
3,65...	0,9999997555I	3,97...	0,99999998028
3,66...	0,99999977333	3,98...	0,99999998I83
3,67...	0,99999978990	3,99...	0,99999998327
3,68...	0,99999980528	4,00...	0,99999998459
3,69...	0,9999998I957	4,I0...	0,99999999330
3,70...	0,99999983285	4,20...	0,999999997I4
3,7I...	0,999999845I7	4,30...	0,99999999880
3,72...	0,99999985663	4,40...	0,9999999995I
3,73...	0,99999986726	4,50...	0,9999999998I
3,74...	0,999999877I2	4,60...	0,99999999992
3,75...	0,99999988629	4,70...	0,99999999997
		4,80...	0,99999999999

Додаток 2.

ВЗІР СТІРЛІНҐА.

Покладемо

$$f(x) = \frac{1.2.\ldots x}{x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}}}, \quad \mathcal{F}(x) = \frac{1.2.\ldots .x}{x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}}$$

і покажемо, що обидві ці функції $f(x)$ і $\mathcal{F}(x)$, коли x необмежено росте, стремлять до спільної границі.

По перше зауважуємо, що відношення

$$\frac{\mathcal{F}(x)}{f(x)} = e^{\frac{1}{12x}}$$

завше більше одиниці і стремить до границі, рівній одиниці, коли x необмежено росте. Тому при всякому x буде справедлива нерівність

$$f(x) < \mathcal{F}(x)$$

По друге, можна показати, що зі збільшенням x функція $f(x)$ лише зростає, а $\mathcal{F}(x)$ лише спадає. Щоби довести це, будемо розглядати відношення

$$\frac{f(x)}{f(x-1)} \quad і \quad \frac{\mathcal{F}(x)}{\mathcal{F}(x-1)}$$

і покажемо, що перше з них більше одиниці, а друге - меньше одиниці. Справді,

$$\frac{f(x)}{f(x-1)} = \frac{1.2.\ldots .x}{x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}}} \cdot \frac{(x-1)^{x-\frac{1}{2}} e^{-(x-1)+\frac{1}{12(x-1)}}}{1.2.\ldots .(x-1)} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{x-\frac{1}{2}} e^{1+\frac{1}{12(x-1)}-\frac{1}{12x}},$$

$$\frac{f(x)}{f(x-1)} = \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-\frac{1}{2}} \cdot e^{1+\frac{1}{12(x-1)}-\frac{1}{12x}}.$$

Льоґаритмуючи обидві частини цієї рівности, знаходимо

$$\lg\frac{f(x)}{f(x-1)} = 1+\frac{1}{12(x-1)}-\frac{1}{12x}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\lg\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

Розгортаючи льґаритм правої частини в безмежний ряд і зауважуючи, що

$$\frac{1}{12(x-1)} = \frac{1}{12x} + \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{12x^3} + \frac{1}{12x^4} + \frac{1}{12x^5} + \cdots\cdots ,$$

дістанемо:

$$\lg\frac{f(x)}{f(x-1)} = 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{12x^3} + \frac{1}{12x^4} + \frac{1}{12x^5} + \cdots\cdots - \frac{1}{12x} -$$

$$-1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{5x^4} - \frac{1}{6x^5} - \cdots\cdots +$$

$$+ \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{8x^4} + \frac{1}{10x^5} + \cdots\cdots ,$$

$$\lg\frac{f(x)}{f(x-1)} = \left(\frac{1}{12} - \frac{3}{40}\right)\frac{1}{x^4} + \left(\frac{1}{12} - \frac{4}{60}\right)\frac{1}{x^5} + \cdots\cdots$$

Права частина останньої рівности завше більше нуля. Отже

$$\lg\frac{f(x)}{f(x-1)} > 0 ,$$

звідки

$$\frac{f(x)}{f(x-1)} > 1 , \quad \text{або} \quad f(x-1) < f(x) ,$$

себто функція $f(x)$ зі збільшенням x зростає.

Переходячи до функції $F(x)$,зауважуємо,що

$$F(x) = f(x)\, e^{\frac{1}{12x}} ,$$

$$F(x-1) = f(x-1)\, e^{\frac{1}{12(x-1)}} .$$

Звідси

$$\frac{F(x)}{F(x-1)} = \frac{f(x)}{f(x-1)} \cdot e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x-1)}} ,$$

а

$$\lg\frac{F(x)}{F(x-1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x-1)} + \lg\frac{f(x)}{f(x-1)} =$$

$$= \frac{1}{12x} - \frac{1}{12x} - \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{12x^3} - \frac{1}{12x^4} - \frac{1}{12x^5} - \cdots\cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{12} - \frac{3}{40}\right)\frac{1}{x^4} + \left(\frac{1}{12} - \frac{4}{60}\right)\frac{1}{x^5} + \cdots\cdots ,$$

або остаточно

$$\lg\frac{\mathcal{F}(x)}{\mathcal{F}(x-1)} = -\frac{1}{12x^2} - \frac{1}{12x^3} - \frac{3}{40x^4} - \frac{4}{60x^5} - \cdots\cdots .$$

Права частина цієї рівности завше меньше нуля, так що

$$\lg\frac{\mathcal{F}(x)}{\mathcal{F}(x-1)} < 0 ,$$

звідки

$$\frac{\mathcal{F}(x)}{\mathcal{F}(x-1)} < 1 , \quad \text{або} \quad \mathcal{F}(x-1) > \mathcal{F}(x) ,$$

себто функція $\mathcal{F}(x)$ зі збільшенням x спадає.

На основі нерівностей

$$f(x) < \mathcal{F}(x) ,$$

$$f(x-1) < f(x) , \quad \mathcal{F}(x-1) > \mathcal{F}(x)$$

можна заключити, що у функцій $f(x)$ і $\mathcal{F}(x)$, коли x необмежено росте, існує спільна границя $\mathcal{L}$,при чому, очевидячки, завше

$$f(x) < \mathcal{L} < \mathcal{F}(x) .$$

Таким чином

$$\lim_{x=\infty}\left\{\frac{1.2.\ldots\ldots.x}{x^{x+\frac{1}{2}}.e^{-x}}\right\} = \mathcal{L} \qquad \text{(I)}$$

Щоби знайти вартість $\mathcal{L}$,можна скористатися відомою формулою Валіса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x=\infty}\left\{\frac{2^2.4^2.6^2.\ldots.(2x)^2}{1^2.3^2.5^2.\ldots(2x-1)^2(2x+1)}\right\}$$

Перепишемо цю формулу таким чином

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x=\infty}\left\{\frac{(2.4.6.\ldots.2x)^2}{(1.2.3.\ldots.2x)^2(2x+1)}\right\} = \lim_{x=\infty}\left\{\frac{2^{4x}(1.2.\ldots.x)^4}{(1.2.\ldots.2x)^2(2x+1)}\right\} .$$

З рівности (I) маємо

$$\lim_{x=\infty}(1.2.\ldots.x) = \mathcal{L}.\lim_{x=\infty}\left(x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}\right)$$

$$\lim_{x=\infty}(1.2.\ldots.2x) = \mathcal{L}.\lim_{x=\infty}\left[(2x)^{2x+\frac{1}{2}}.e^{-2x}\right]$$

Зробивши на основі цих рівностей заміну, дістанемо

$$\frac{\pi}{2} = \mathcal{L}^2\lim_{x=\infty}\left\{\frac{2^{4x}x^{4x+2}}{2^{4x+1}x^{4x+1}(2x+1)}\right\} = \frac{\mathcal{L}^2}{4}\lim_{x=\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right) =$$

$$= \frac{\mathcal{L}^2}{4}\lim_{x=\infty}\left(1-\frac{1}{2x+1}\right) = \frac{\mathcal{L}^2}{4},$$

звідки

$$\mathcal{L} = \sqrt{2\pi}.$$

Таким чином рівність (I) прийме вигляд

$$\lim_{x=\infty}\left\{\frac{1.2.\ldots.x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}}\right\} = \sqrt{2\pi},$$

звідки

$$\lim_{x=\infty}\left\{\frac{1.2.\ldots.x}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}}\right\} = 1.$$

Остання рівність відома під назвою взора Стірлінґа. Вона показує, що, коли x необмежено росте, то безмежно великі величини

$$1.2\ldots\ldots x = x! \quad і \quad x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$$

еквівалентні, а тому в певних випадках можна $\lim_{x=\infty}(x!)$ заміняти на основі рівности

$$\lim_{x=\infty}(x!) = \lim_{x=\infty}\left(x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}\right).$$

При досить же великому x факторьял $x!$ можна заміняти на основі наближеної рівности

$$x! \approx x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$$

Так, наприклад, при

$x = 10$, $10! = 3628800$, $10^{10}e^{-10}\sqrt{20\pi} = 3598699$

$x = 20$, $20! = 2432902008176640000$, $20^{20}e^{-20}\sqrt{40\pi} =$

$= 2422786385510400000.$

Л І Т Е Р А Т У Р А

використана при складанню цього підручника

I). Poincaré H. Calcul des probabilités. Paris 1896.

2). Марков А. Исчисление вероятностей Москва 1924

3). Bertrand J. Calcul des probabilités. Paris 1889.

4). Czuber E. Wahrscheinlichkeitsrechnung Lpz u. Berl. 1914.

5). Borel E. Les principes de la théorie des probabilités Paris 1925.

6). Borel E. Le hasard Paris 1914.

7). Borel E. et Deltheil R. Probabilités. Erreurs. Paris 1926.

8). Лахтин Л. Курс теории вероятностей. Москва 1924

9). Ермаков В. Теория вероятностей Киев 1879

10). Láska V. Počet pravděpodobnosti. Praha 1921.

11). Hostinský B. Geometrické pravděpodobnosti. Praha 1926.

12). Lévy P. Calcul des probabilités Paris 1925.

13). Романовский В. Елементарний курс математической статистики. Москва 1924

14). Montessus de Ballore R. Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités Paris 1908.

15). Carvallo E. Le calcul des probabilites et ses applications. Paris 1912.

16). Рабинович П. Роль теории вероятностей в виработке общественних идеалов. ПБ. 1908

17). Поссе К. Курс дифференциального и интегрального исчислений. Берлин 1923.

З М І С Т

§§ Стор.

В С Т У П.

Р О З Д І Л I.

О С Н О В Н І П О Н Я Т Т Я й Т Е О Р Е М И.

Р О З Д І Л II.

Т Е О Р І Я П О В Т О Р Н И Х Д О С Л І Д І В

§§ Стор.

РОЗДІЛ V.

ЕМПІРІЧНІ ЙМОВІРНОСТИ

ДОДАТОК І.

ДОДАТОК II.

Важніші друкарські помилки

Стор.	Ряд.	Надруковано	Повинно бути
8	I7 зг.	з яким	дослід,з яким
I7	4 зн.		$2^n = C_n^0 + N$
22	I зн.		$p_3 = \frac{1}{11748}, p_4 = \frac{1}{511038}, p_5 = \frac{1}{43949268}$
38	7 зн.	обчисленні	обчислені
40	I3 зг.	получаємої	отриманої
47	4 зн.	- 0,38...	- 3,8...
56	I8 зг.	для незалежних	для n незалежних
65	II зн.	$\frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^{m+1} q^{n-m-1}$:	$\frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} p^{m+1} q^{n-m-1}$:
83	6 зг.	при дослідах	при n дослідах
I00	4 зн.	Після слів " переведення дослідів. " треба вставити уступ " Перейдемо тепер до загального випадку,коли вартости відхилень невідомі.Тоді,взагалі кажучи,відхилення може рівнятися всякому раціональному числу в межах від $-\infty$ до $+\infty$,а формула,що визначає середнє відхилення β буде мати такий вигляд $\beta = \sum P_h \lvert h \rvert,$ де P_h є ймовірність відхилення з абсолютною вартістю $\lvert h \rvert$, а символ суми росповсюджується на всі можливі відхилення від $-\infty$ до $+\infty$. "	
II8	3 зг.	Т О Р Е М И	Т Е О Р Е М И
I32	II зн.	рівне ;	рівне n ;
I38	6 зг.	не пере -	не переви -
I4I	5 зг.	при дослідах	при n дослідах

Українське Видавниче

Т-во " С І Я Ч "

при Високому Педаґоґічному Інституті ім.М.

ДРАГОМАНОВА в Празі

Літоґрафічно на правах рукопису

1924 р.

1. ЯРЕМА,проф.др.-Вступ до філософії ст. 160
2. ГОНЧАРІВ-ГОНЧАРЕНКО,лект.др.- Загальна ґіґієна ст.260
3. РУСОВА С. проф.-Теорія педаґоґіки на основі психольоґії ст. 369
4. ГУЛА Ф. доц. - Теорія векторов..ст.69
5. ІВАНЕНКО Є.проф.- Аналітична геометрія в просторі..304
6. ІВАНЕНКО Є.проф.- Пропедевтика вищого рахунку. ст.232.
7. ЧИЖЕВСЬКИЙ Д.доц.-Льоґіка. ст.338.
8. СТАРКОВ А.проф.-Загальна біольоґія.ст.192.
9. КАБАЧКІВ І.доц.-Політична економія ст.XXI-353.

1925 р.

10. ІВАНЕНКО Є.проф.-Альґебрична аналіза ст.162.
11. ОМЕЛЬЧЕНКО Г.лект.-Ввід до славянознавства II мап,131 ст.
12. РУСОВА С.проф.-Дидактика ст.191.
13. ІВАНЕНКО Є.проф.-Диференціяльне числення ст.372
14. ГЕРАСИМЕНКО П.др.-Основи термодинаміки кн.І ст.115.
15. СІЧИНСЬКИЙ В.лект.-Стилі.Альбом рисунків таб.20
16. СІЧИНСЬКИЙ В.лект.-Конспект історії всесвітнього мистецтва ч.І до Ренесансу ст.264.

1926 р.

17. СІМОВИЧ В.проф.-Нарис граматики староболгарської мови ст.6-380.
18. ЖИВОТКО А.лект.-Дошкільне виховання ст.200.
19. ДОЛЬНИЦЬКИЙ М.лект.др.-Основи фізичного землезнання ст.195.
20. ЧИЖЕВСЬКИЙ Д.доц.-Грецька фільософія до Плятона. Хрестоматія ст.306.
21. ІВАНЕНКО Є.проф.-Теорія означених інтеґралів ст.348.
22. САВИЦЬКИЙ П.лект.-Ґеольоґія ст.50.
23. СІРОПОЛКО С.проф.-Школознавство ст.64.
24. ЧИЖЕВСЬКИЙ Д.доц.-Фільософія на Україні ст.200

1927 р.

25. КУШНІР В.доц.др.-Підручник німецької мови ст.462.
26. ІВАНЕНКО Є.проф.-Інтеґрування диференціяльних рівнань ст.400.
27. ГОРДАШ-ДЯЧЕНКОВА Н.лект.-Сольовий спів.Теорія й практика ст.92.
28. ЛОРЧЕНКО М.проф.-Експериментальна фізика Кн.I Механіка.
29. АРТИМОВИЧ А.проф.др.-Практична латинська граматика ч.I ст.160.
30. РУСОВА С.проф.-Нові методи дошкільного виховання ст.108.
31. ДЯКОНЕНКО В.лект.-Числення ймовірности ст.250.

Д р у к о м

1. ЯРЕМА Я.проф.др. - Психоґрафія в школі..ст.4-42

Л і т о ґ р а ф у є т ь с я

1. БІЛЕЦЬКІЙ Л.проф.- Українська народня поезія
2. СІМОВИЧ В.проф.др.- Староболгарська і староукраїнська хрестоматія
3. ЧИЖЕВСЬКИЙ Д. проф. - Виклади з історії фільософії ч.I. Антична фільософія.
4. ЧИЖЕВСЬКИЙ Д. проф.- Те саме,ч.II Новітня фільософія.
5. ГУЛА Ф. доц. др.- Теоретична астрономія.

6. ЧИЖЕВСЬКИЙ Д.проф. - Короткий курс естетики.
7. ГЕРАСИМЕНКО П.доц.др.- Теорія електричности.
8. РУСОВ Ю.доц.др. - Зоольоґія.
9. СІЧИНСЬКИЙ лект.др.Конспект історії всесвітнього мистецтва.ч.І. До Ренесансу. 2 вид. поширене
10. ЧИЖЕВСЬКИЙ Д. проф. - Історія фільсофії на Україні.2 вид.Переглянене й доповнене.

PRAHA II, Školska 8.
Ukrajinský Pedagogický Ústav
im. Drahomanova.
Výdavatelstvi -S I J A Č-

----
oooooooo
......
vvvv
v