ВИДАННЯ УКРАЇНСЬКОЇ ГОСПОДАРСЬКОЇ АКАДЕМІЇ В ЧСР.
ÉDITION DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE UKRAÏNIENNE EN TCHÉCOSLOVAQUIE

ПРОФ. ІНЖ. М. КОСЮРА

Сучасні течії в науці про лісовий приріст

PROF. ING. M. KOSJURA

SOUDOBÉ SMĚRY V THEORII LESNÍHO PŘÍRŮSTKU

DIE GEGENWÄRTIGEN WISSENSCHAFTLICHEN STRÖMUNGEN IN DER FRAGE DES WALDZUWACHSES

1931
ПОДЄБРАДИ — LÁZNĚ PODĚBRADY

Проф. інж. М. Косюра.

Сучасні течії в науці про лісовий приріст.

ВСТУП.

В науці про таксацію лісу за останні 10—15 років сталися значні досягнення в методах досліджування, в розвитку законів росту дерев і деревостанів та в кубуванні їх. З'явилися надзвичайно гарні підручники: «Лісової таксації» або «Дендрометрії», як проф. Міллера з р. 1915 (нині вийшов другим виданням), проф. Шваппаха з р. 1923, проф. Орлова з р. 1923, перевиданий р. 1925, проф. Турського з р. 1927, доцента Тішендорфа з р. 1927. Перші два підручники вийшли в Німеччині, другі два — в Росії й останній — в Австрії. Опріч того, в Росії р. 1916 видано 60-ий том «Праць по лісовій досвідній справі», який присвячено майже весь працям професорів Фан-дер-Фліта, Богословського, Бурьячека й др. по теорії приросту.

Також і в періодичній лісовій літературі — російській та німецькій — з'явилося по тій же теорії багато розвідок і дослідів, з яких треба відзначити праці професорів Тюріна, Тарашкевича, Шустова, Третьякова (Росія), Леваковича, Валлі, Тішендорфа, Шіффеля (Австрія), Шваппаха, Кюнкеле, Дітріха, Шюпфера (Німеччина).

Згадані підручники й праці, одначе, не дають загального огляду всіх досягнень в окремих галузях лісової таксації.

Цією розвідкою ми робимо спробу об'єднати та систематизувати головніші здобутки науки про лісовий приріст.

I.

ПРИРІСТ ТА ЙОГО РОЗУМІННЯ.

§ 1. Приріст з погляду математичного, природничого й фінансового.

З фізіологічного боку наростання деревна є наслідком асиміляційної діяльности зелених органів дерева. Витворювані там будівельні речовини перетворюються камбіяльною частиною в шар деревна, яке щороку одягає дерево. Дослідами Фрідріховими*) на Маріябрунській досвідній станції, потвердженими Мак-Дуґалем**) в Америці, з'ясовано, що продукування деревна відбувається лише

*) Mitteilungen aus dem forstlichen Versuchswesen Oestereichs, 1897, Heft 17, Wien (Huffel «Dendrometrie»).

**) Vynálezy a pokroky, 1928 r. G. Praha (za American Forest and Forest Life, 1927).

вночі й вранці за певної вогкости, — за день промір дерева меншає, а за великої посухи процес наростання зовсім припиняється.

Досліди над розвитком форми дерева показують: що наростання деревна відбувається ще за певними механічними законами, встановити які остаточно не вдалось; що шар деревна, яким стовбур і гілля щорічно обкутуються, буває по довжині стовбура ріжної грубшини — в густім лісі на долині тонкіший, а під короною товстіший, на деревах же самотних — навпаки; що в останніх випадках товщина шару часто буває неоднакова на тій самій висоті стовбура (з півдня грубша, з півночі тонкіша); що обсяг щорічного приросту міняється, — то збільшуючись — у молодім віці дерева, після обрідок, за сприятливих умов веґетації, — то знижуючись — в старім віці, після пошкоджень дерева, за несприятливих атмосферних явищ, після напруженої боротьби між деревами за світло й поживні речовини; та що займищні й кліматичні умови в інтенсивності наростання деревна відограють виключну ролю. На це ж явище мають безпосередній вплив, опріч того, системи господарства, способи догляду за деревостанами, способи рубанок і відновлення, відповідність займища посідаючим його породам і багато інших.

Із сказаного бачимо, продуктом яких складних сил, діючих на дерево, є щорічний приріст.

Приріст на деревостані — складніше явище. Тут діють дві сили: одна, що збільшує запас деревостану приростом на окремих деревах, і друга, що зменшує його — в наслідок відпадання загнічених дерев або вирубування їх в порядку догляду за деревостанами.

Вплив на розмір приросту фізіологічних чинників, таких, як повітря, світло, тепло, вода, розчини ріжних солів у ґрунті тощо, залишається й досі недослідженим. Невелика праця д-ра Ернеста*) про вплив якостей ґрунту на збільшення промірів при погрудді в ялиновім деревостані є лише початком в цім відношенні і в ній не подається ще жадних висновків.

Встановлення й обчислення приросту й відсотка від нього на дереві й деревостанах провадиться нині виключно на принципах стереометричних і рідко — фізичних. Для цієї мети запропоновано багато метод, як чисто теоретичних, так і практичних і кількість їх з часом збільшується. Дехто пропонує поліпшити старі методи. Погляди дослідувачів на приріст розходяться, а тому це питання нині перебуває в досить заплутаному стані.

Проф. Турський**) гадає, що до цього часу ще не встановлено правильних принципів досліджування деревостанів і розвитку в них таксаційних елементів. Нині ці дані добуваються переважно статистичними спостереженнями. Між тим було б необхідно сту-

*) Dr Ernest — Přírůstek ke vztahu mezi přírůstkem ploch kruhových u smrku. ect. 1914, Praha.

**) Проф. Турский: Очерки по теории прироста, 1925. Москва. Введение.

діювати зміни, що повстають в таксаційних елементах, протягом довшого часу на сталих досвідних площах, але кількість їх обмежена — вони бувають лише при досвідних стаціях. Методиці цих дослідів часто дають назву динамічних спостережень, чи динаміки деревостанів. На думку того ж автора доцільнішим було б відповідно до законів механіки назвати такі досліджування кінематичними. В цім випадку мало б бути не студіювання чинности природніх сил, в наслідок яких утворюються й розвиваються деревостани, а лише реєстрація законів зміни деревостанів та природній хід їх розвитку з припущенням, що загальна сума сил, впливаючих на розвиток деревостанів, залишається пересічно сталою.

Автор пояснює, що досліджування природніх змін в деревостанах базується на встановленні біжучого приросту; останній можна розуміти, як швидкість зміни того чи іншого таксаційного елементу, швидкість же є поняття кінематичне.

Далі, до мало розв'язаних питань в теорії приросту належить питання про вживання того чи іншого роду відсотків в обрахованнях відсотка приросту, себто: в якім відношенні буває за веґетаційний період наросле деревно до попереднього обсягу дерева (так само, як річний гін до висоти, або приріст на промірі чи на площі). Завдання це можна вирішити лише після встановлення вигляду й розміру капіталу, який в дереві чи деревостані наростає відсотками.

Щодо характеру відсотка, за яким зміни біжучого приросту можуть відбуватися, то різні автори припускали і простий, і складний, і комбінований. Наростання за тим чи іншим відмінком мусить передбачати якийсь капітал, його початкову й кінцеву вартість.

Що ж фактично в дереві чи в лісі треба вважати за капітал?

Проф. Левакович*) з цього приводу висловлює такі міркування. Наростання деревна відбувається завдяки діяльності камбіяльного шару. Витворювані асиміляційною чинністю зелених органів органічні речовини камбієм перетворюються в деревно (і флоему).

Ця чинність може відбуватися лише в присутності повітря, світла, тепла й ґрунту. Деякі вчені (Густ. Гайєр, Борґреве) були тієї думки, що кожний із цих чинників творить капітал. Але такий погляд наукою не поділяється, бо ці чотири чинники далеко не вичерпують діючих сил природніх, що беруть участь в продукції органічних речовин, які без оживляючої сили камбія були б безсилі створити деревно.

Отже, коли камбіяльного шару самого по собі й не можна вважати за продукційний капітал, то принаймні, було б логічно з фінансового погляду вважати його за втілення всіх продукційних капіталів. Ті ж думки про ролю камбія в творенні деревна стосуються й до деревостанів. Продукційний капітал тут складається із всіх камбіяльних плащів окремих дерев, які щороку також збільшують

---

*) Prof. dr. Levakovič: Ueber einige Probleme etc. C. f. d. g. F. 1923, Heft 7—9, ст. 226.

запас лісу по законах правдоподібно-комбінованого відмінку складних відсотків.

Такі висновки згаданого вченого вносять в науку про приріст нові основи й роз'яснення. Дійсно, в лісі капіталом буде не запас деревнової маси, як то думалося раніш, а сили природи, що сконцентровані в камбію. В народнім господарстві такі сили за капітал не вважаються.

Таким чином, запаси деревна в лісі суть не що інше, як лише нарослі відсотки. Тому відсоток приросту треба розуміти, як цілком відносне поняття: частину тих відсотків порівнюють з обсягом або раніш нарослого деревна, або з сучасним. Навіть і саме слово в і д с о т о к тут доводиться вживати в іншім розумінні. Не знаючи розміру творчого капіталу, не можна й говорити про наросле деревно, як про відсоток у повнім розумінні того слова. Це якийсь прибуток від чинности сил природніх, наростаючий ріжними величинами, то збільшуючись, то зменшуючись, у всякім разі, — нерівномірно.

Авторитетність цих поглядів проф. Леваковича тим більша, що вона цілком спірається на погляди Біолеєві та почасти й Меллерові, які за джерело утворення деревна вважають виключно сили природні й лише їх розглядають, як капітал. Біолей*) бачить в лісі троїстий живий організм, в якім з'єднано на рівних засадах ґрунт, підсоння та деревне суспільство. У витвореному деревні беруть участь: вуглець із повітря в розмірі 45%, кисень — 42% і водень — 6,5%, почасти з повітря, почасти ж із ґрунту; азот у розмірі 1,5% і мінеральні частини від 1,5% до 5,0% — виключно з ґрунту. Ґрунт тут, як бачимо, бере в утворенні деревна незначну участь, але без його мінерального складу деревно не набуло б міцности та й асиміляційні процеси мабуть не змогли б відбутися. Але ж головна частина органічних речовин береться все ж з повітря.

В чулій плазмі зелених органів листу стикаються піднесені з грунту й захоплені з повітря хемічні елементи і перетворюються за поміччю соняшної енерґії в будівельну органічну масу, що зворотньою течією подається до камбію й ним вже перетворюється в склеренхимні й луб'яні тканини. Таким чином, ролю трансформаційних моторів відограє тут деревна посполитість; творчий же капітал концентрується в листях і в камбію.

Порівняємо**) тепер природниче розуміння приросту в лісі з висновками фінансової теорії (в лісовлаштуванні).

Як відомо, остання дивиться на деревостани в рубальнім віці, як на борг, що має виплатити всі видатки на вирощування їх і на ріжні догляди. Отже тут деревна посполитість уявляється, як капітал оборотовий. Єдиний капітал, що в лісовім господарстві залишається сталим і творить нові цінности, є ґрунт. Теорія ця не

*) Die Gesichtspunkte der «Méthode du contrôle», 1924.
**) Dr. ing. Haša: Lesní zařízení a jeho poměr k lesní tvorbě. 1925.

бачить ріжниці між сільським господарством і лісовим, і як припускає незначну відміну, то лише в часі вирібного процесу: в першім він тягнеться декілька місяців, а в другім — багато років, навіть і десятиліть. Ці періоди визначаються так, щоб прибутки з ґрунту досягли найвищого ступеня. Найбільший чистий прибуток з ґрунту — є тут головною метою лісового господарства. Ліс в цім випадку розуміється, як низка окремих дільниць, визначених за віком, одна від одної незалежних і одна на одну невпливаючих. Як в сільськім господарстві господар починає кожного року від голої ниви, яку засіває і з якої збирає врожай, так і в лісовім господарстві мусить господар починати від виголеного ґрунту, щоб на нім вирощувати однолітні деревостани. Доба для виспівання лісу обраховується наперед за засадами фінансовими в найтіснішій залежності від відсотка, розмір якого встановлюється в залежності від економічних моментів, що до лісу жадного відношення не мають.

Ґрунт і деревна посполитість розглядаються тут, як окремі, самостійні господарські одиниці.

Наведені погляди фінансової теорії показують, як далеко вони стоять від біологічного розуміння приросту.

Не зайвим буде навести тут погляди старих вчених лісівників на пристосованність до обчислення відсотків біжучого приросту простого чи складного відсоткування.

Одна група авторів — Кунце, Ґутенберґ і Шіффель*) — вважає доцільним в цім відношенні лише складне відсоткування. Друга — Густ. Гайєр, Борґреве, Шуберт, Шваппах, Штетцер і Мюллер — як бачимо, численніша — заперечує цьому напряму й доводить, що дерева, а тим більше деревостани, не приростають ні за складними (особливо старі деревостани), ні тим більше за простими відсотками. До цих вчених пристає й Бауле, який твердить, що прості відсотки менш за все відповідають законам наростання деревна в лісі; також і до складних відсотків ставиться він із застереженням.

Є ще й третя група вчених — Баур і Юдайх, — яка приймає погляди другої групи, лише гадає, що обчислення приросту на вартості лісових матеріялів слід переводити за складними відсотками.

До думок вчених першої групи слід додати, що Кунце цілком не обґрунтовує своїх поглядів; Ґутенберґ же, в протилежність останнім двом групам, констатує ріжницю в наростанні деревна й відсотків на капітал. Коли розмір відсотку на капітал не міняється з роками, то на дереві й деревостані відсоток приросту як біжучого, так і пересічного, із середнього віку починаючи, знижується стало.

Шіффель наближається до ходу думок Ґутенберґових, але подає для обчислення відсотка біжучого приросту нездійснимі способи.

Згадані вище суперечності в розумінні основних процесів, що

*) Prof. d-r Levakowič: ibid., ст. 211.

відбуваються в лісі, дали привід проф. Г. М. Турському*) висловити думку, що наростання деревна доводиться вважати за складне явище, яке не може охопитися законами простих і складних відсотків, і що відсоток біжучого приросту необхідно розуміти як поняття відносне.

Іншими словами, він в лісовій посполитості не бачить капіталу, що міг би наростати за певними відсотками, а з другого боку вважає, що розмір біжучого приросту остільки міняється рік за роком, що виразом якогось відсотку ні в якім разі бути не може.

Із поданого вище ясно виступає еволюція поглядів на відсоток приросту: від Біолеєвого абстрактно-біологічного розуміння, через біологічно-математичну концепцію Леваковичеву й до конкретних математично-біологічних висновків Турського.

Схема ця лише в загальних грубих рисах синтезує сучасні напрямки в науці про приріст. В дальшому, коли перейдемо до конкретизування поглядів, себто до розбору запропонованих способів і метод обчислення біжучого приросту й відсотка від нього, схема ця значно доповниться й розвинеться.

§ 2. Обчислення абсолютної величини біжучого приросту.

Операція ця для лежачого дерева полягає в обчисленні ріжниці між сучасним обсягом його й обсягом перед певним числом років. Останній обсяг є врослий в дерево. Способи добування таксаційних елементів двох цих форм дерева розбираються в елементарних курсах лісової таксації й не уявляють труднощів. Для господарської мети, коли особливої докладности не вимагається, сучасний обсяг дерева й такий же перед n роками обчисляється за Губеровим способом: виміряють промір на середині дерева (без стятого вершка в місці, де числю політків дорівнюється n), та вживанням Преслерового свердлика встановлюють в тім місці промір попередньої форми дерева. Докладність цього способу, як відомо, хитається між 5 і 10%.

Для наукових цілей всі таксаційні елементи всіх попередніх форм дерева встановляються після аналізи стовбура, себ-то після розрізки його на низку колодок. У цім випадку докладність підіймається до 1,0%.

Не останнім моментом при аналізі стовбура є питання, на протязі якого часу доцільніше відбудовувати минулі форми дерева, чи за п'ять чи за 10 років, себто на 5-ім, 10-ім і т. д. році його життя, чи на 10-ім, 20-ім і т. д. Для мети досліджування приросту ці періоди мають виключне значіння. Як в дальшому буде потверджено, для дерев молодого віку 20—40-літніх необхідно ті періоди брати в 5 р., для старших і старих дерев в 10 р.

Опріч того, коли в останніх деревах помічено буде нерівномірне наростання деревна (від частих обрідок, пошкоджень шкідниками

*) Проф. Турский, ibid., ст. 19.

й несприятливих кліматичних умов), необхідно ті форми взяти за такі періоди, протягом яких приріст відбувався майже рівномірно.

За період 1—2-х років біжучий приріст, звичайно, не вираховується з причини зв'язаних з тим труднощів і неминучих помилок. Найкоротший період буває 5 р., а для старих дерев, як вже говорилось, і 10 р.

Абсолютна величина біжучого приросту має першорядне значіння особливо в лісовлаштуванні при реґулюванні головного користування й проміжного.

Але тут частіше доводиться порівнювати біжучий приріст за певний період з масою (чи запасом), на якій він утворився, себто встановлювати відсоток того приросту.

II.

ТЕОРІЯ ВІДСОТКА ПРИРОСТУ.

§ 3. Загальні уваги.

Раніш було встановлено, що наростаюче щороку деревно є продукт діяльности камбіяльного шару, який тут відограє ролю капіталу. Наросле деревно за період життя дерева (чи деревостану) уявляє з себе не що інше, як мертві відсотки з того капіталу, що в дальшому подібно до простих відсотків на капітал жадної участи в нарощуванню деревна не беруть.

Опріч того, досвідами констатовано, що ті щорічні відсотки ріжняться від себе і ніколи рівними не бувають, хіба випадково. Як для теорії, так і для практики лісового господарства буває потрібно знати застосовану величину біжучого приросту до раніш наромлого деревна (так само, як і до висоти, площі перекрою, виглядового числа тощо), себто мати геометричне відношення приросту до тієї величини, на якій він утворився.

З математичного погляду, каже Турський*), такого застосовання нібито не могло би бути, бо остання величина характеризує стан таксаційного елементу на певний момент часу, а біжучий приріст уявляє характеристику за певний період; тому, прямо порівнювати величини, що не приведені до одного моменту часу, не можна. Так само не можна вважати геометричного застосовання приросту, обрахованого з періодичного, за правильне.

Для одержання такого застосовання звичайно припускають, що зміна таксаційного елементу відбувається за законами відсотків і що самий відсоток для короткого часу буває величиною сталою. В цім випадку припускається схематизація явища, якої в дійсності не спостерігається, бо в рослиннім світі ріжні зміни зросту не відбуваються за законами відсотків. Опріч того, про відсоток приросту може йти мова лише для одного року.

---

*) Проф. Турский, ibid., ст. 14.

Спинимося на загальних способах обчислення відсотків приросту. Визначимо через M таксаційний елемент у віці u, через m теж у віці u_1; ріжницю $u - u_1$ визначимо через t, а ріжницю $M - m$ через z.

Тоді для пересічного приросту $\frac{M}{u}$ відсоток визначиться із пропорції:

$$\frac{M}{u} : M = p : 100, \text{ відкіля}$$

$$p = \frac{100 \cdot M}{u \; M} = \frac{100}{u}, \tag{1}$$

себто **відсоток пересічного приросту всіх таксаційних елементів залежить лише від віку.**

Відсоток біжучого приросту за один рік $\frac{M - m}{t}$ встановимо з пропорції:

$$\frac{M - m}{t} : m = p : 100, \text{ відкіля}$$

$$p = 100 \frac{M - m}{t \cdot m} \tag{2}$$

У всіх цих випадках припускається, що набування елементу переводиться за простими відсотками.

Одначе, до нарощування таксаційних елементів прості відсотки не підходять (коли взагалі може бути розмова про збільшення їх за відсотками), бо в цім випадку те, що вважається за капітал, стало збільшується від ріжних прирощень. Лише за припущення рівномірного наростання надається обрахувати дійсне приростання на 100 — в пристосованні до довільного протягу часу.

За такої умови залишається для обчислень використати взір для наростання капіталу за складними відсотками:

$$K = k1, Op^t.$$

Для нашого означення він виглядатиме:

$$M = m\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \tag{3}$$

Відкіля:

$$p = 100\left(\sqrt[t]{\frac{M}{m}} - 1\right) \tag{4}$$

Останній взір уважається за сучасного стану науки про приріст за найдокладніший. Одначе, коли ми за ним обрахуємо відсотки біжучого приросту на дереві в ріжні його віки, то побачимо, що він стало зменшується. Це зайвий раз доводить раніше вже висловлене твердження, що в дійсності жадного набування таксаційних елементів за відсотками не спостерігається. Не зважаючи на це, взір (4) вважається за основний. Розповсюдження його на практиці для обрахування відсотків приросту незначне, а перепоною тому є необхідність користуватися логаритмічними таблицями.

Це спричинилося до того, що починаючи з половини минулого століття багато витрачено було енерґії вченими лісівниками для винайдення метод і способів обчислення відсотків приросту, які були б при значній простоті досить докладними.

До розгляду осягнених успіхів у цій галузі науки про приріст і перейдемо.

Щодо порядку ознайомлення із запропонованими методами і способами обчислення відсотків біжучого приросту, то будемо додержуватися системи, вживаної проф. Д-ром Леваковичем. Останній поділяє всі належні до тих метод і способів взори на дві групи. До першої зараховує з них ті, що обчислюють відсоток пересічного річного приросту за довільний період і за якими надається обрахувати при всяких обставинах відсоток приросту всіх таксаційних елементів як окремого дерева, так і деревостанів. У склад другої групи відносить взори, що призначаються для обчислення відсотка біжучого приросту тільки за один рік. Останню групу він поділяє на дві катеґорії: до першої зараховує взори, що дають відсоток приросту на обсязі, а до другої—тільки на площі. Взори першої групи збудовано на принципі почасти простих відсотків, почасти — складних; взори ж другої групи — виключно на простих відсотках.

Теоретична вартість до цього часу поданих способів і метод, по висновку проф. Леваковича*), ще й досі не висвітлена. Всі спроби відомого теоретика лісової таксації Шіффеля внести до науки про приріст більше ясности залишились без успіху. На його думку, в предметі існує багато заплутаних думок і спірних аксіом.

Проф. Г. Турський своєю глибокою математичною аналізою згаданих метод**), спричинився до розрішення багатьох спірних питань тим, що подав свої методи й з'ясував порівнянням ріжних способів на прикладах ступінь їх доцільности.

Також інж. д-р Валлі***) подає багатий матеріял до правильного розуміння взорів другої катеґорії другої групи.

Проф. Орлов†), щодо виспілости теорії про відсоток приросту висловлює твердження, що досвідні досліджування в цій галузі відстали від чисто теоретичного розвитку її й завданням найближчого майбутнього буде встановити тут бажану рівновагу. До розбору згаданих метод і взорів тепер і перейдемо.

---

*) Проф. Турский, ibid., стор. 209.

**) Проф. Орлов, Лесная таксация, изд. 1925, стор. 399.

***) D-r ing. Wally — Die Ermittlung des Massenzuwachsprocentes ect. Centralblatt für des gesamte Forstwesen, 1925, Heft 9—10, Wien.

†) Проф. Орлов, Лесная таксация изд 1925 г.

§ 4. Методи обчислення відсотка приросту першої групи.

Із взорами для обчислення відсотка біжучого приросту (3) і (4) ми ознайомились. Останній

$$p = 100\left(\sqrt[t]{\frac{M}{m}} - 1\right),$$

що був визнаний наукою за основний, ми оцінили, як мало погоджений із фізіологічними законами.

Взір (2)

$$p = \frac{100}{t} \cdot \frac{M-m}{m}$$

подає відносний відсоток біжучого приросту, обрахований за простими відсотками, де періодичний річний приріст будь-якого елементу $\frac{M-m}{m}$ застосовано до початкової величини того елементу m.

Тільки відносно взорів (2) і (4) серед вчених лісівників існує однодумність щодо їх походження, а саме, що перший з них виведено на основі простих відсотків, а другий — складних; відносно ж решти — думки розходяться.

Преслерова метода.

У першу чергу спинимось на найбільш відомім і розповсюдженім Преслеровім взорі:

$$p = \frac{200}{t} \cdot \frac{M-m}{M+m} \tag{5}$$

Виводить його Преслер способом, подібним до взору (2), лише річний періодний приріст $\frac{M-m}{t}$ застосовує не до початкової величини того елементу m, а до пересічно-аритметичної із початкової і кінцевої величини, себто до $\frac{M+m}{2}$, тоді з пропорції $\frac{M-m}{t} : \frac{M+m}{2} = p : 100$ матимемо $p = \frac{200}{t} \cdot \frac{M-m}{M+m}$.

Цей взір є відомий у витлядах:

1) для обсягу $\qquad p_v = \frac{200}{t} \cdot \frac{V-v}{V+v}$

2) для висоти $\qquad p_h = \frac{200}{t} \cdot \frac{H-h}{H+h}$

3) для виглядового числа $p_f = \frac{200}{t} \cdot \frac{F - f}{F + f}$

4) для проміру $p_d = \frac{200}{t} \cdot \frac{D^s - d^s}{D^s + d^s}$

5) для відносного проміру $\frac{D - d}{D} = r$

$$p = \frac{200}{t} \cdot \frac{r^s - (r-1)^s}{r^s + (r-1)^s} \text{ за минулий період і}$$

$$p = \frac{200}{t} \cdot \frac{(r+1)^s - r^s}{(r+1)^s + r^s} \text{ на майбутній період,}$$

де s — ступінь розміром від 2 до $3^1/_3$.

Більшість вчених до Преслерового взору, чи власне до проведеної в нім методи, ставиться невиразно. Шваппах із Шубертом*) зараховують його до взорів простого відсоткування, себто ставляться з недовір'ям до нього, бо для них раціональним є лише складне відсоткування. Штетцер підтримує погляд Преслерів про належність методи до простого відсоткування. Навпаки, Бауле твердить, що Преслерів взір належить до складних відсотків і доводить це розкладом взору прольонґованого капіталу $M = m\ 1{,}0p^t$ за способом Ньютонового біному з уневажненням членів із ступенями 2 і 3. За його думкою цей взір може дати лише приблизні висліди.

Протилежно до цього Шуберт, Шваппах і Шіффель уважають його за цілком справний, причім ставлять умовою: перші двоє — рівномірність приросту на обсязі за період t, а останній — обрахування відсотка приросту для року, що знаходиться в середині періоду.

Всі сходяться на думці, що взір цей дає применшені наслідки. Штетцер, опріч того, гадає, що помилки будуть лише додатні; Шуберт і Шваппах доводять, що останні можуть бути і від'ємні: за зменшення річного приросту — додатні, за збільшення — від'ємні.

Подавши це, проф. Левакович спиняється на докладній аналізі Преслерового взору. Поперше, на його думку в нім бракує початкової вартости, замісць неї береться пересічний елемент $\frac{M+m}{2}$; або, що те саме, $m + \frac{M-m}{t} \cdot \frac{t}{2}$; тут пересічний періодний приріст додається не до початкової вартости періоду, але до аритметичного пересічного із початкової і кінцевої, тому наросле деревно має те саме значіння, як і початковий капітал, що відповідає обчисленню за складними відсотками. Подруге, гадає, що Преслерів взір є вираз

*) Проф. Левакович, ibid., ст. 240.

складних відсотків, де збільшення маси припускається у формі аритметичного ряду. Проф. Левакович*) пригадує з попереднього, що Шуберт і Шваппах правдивість методи потверджують, Шіффель — умовно, решта означає її, як приблизну, але з них ніхто тих тверджень не доводить, тому він вирішує для цієї мети коротко оглянути Шубертові головні висновки.

Коли визначити через dv приріст деревнового обсягу за безконечно малий період, тоді абсолютний біжучий приріст на обсязі буде виносити $\frac{dv}{dt}$, а дійсний відсоток приросту довільного року (з початковою масою v)

$$p = \frac{100 \cdot \frac{dv}{dt}}{v}, \text{ відкіля}$$

$$dv = v \cdot \frac{p}{100} \cdot dt.$$

Припустимо, що протягом t років p буде сталим, тоді, проінтеґрувавши останній вираз в межах часу від 0 до n, дістанемо цілий приріст на обсязі за n років у вигляді:

$$v_n - v_0 = \frac{1}{100}\int_0^n pv\,dt.$$

Щоб цей вираз проінтеґрувати, необхідно припустити, що p уявляє сталу (незмінну) величину, тоді

$$v_n - v_0 = \frac{p}{100}\int_0^n v\,dt \quad \text{і} \quad p = \frac{100\,(v_n - v_0)}{\int_0^n v\,dt}.$$

Тут вираз $\int_0^n v\,dt$ уявляє за Шубертом площу трапезу між віссю абсцис і кривою ходу росту, похилою до цієї оси, площу, яка матиме вираз $\frac{v_n + v_0}{2} \cdot n$.

Підставляючи останній вираз замісць інтеґралу, одержимо:

$$p = \frac{100\,(v_n - v_0)}{\frac{v_n + v_0}{2} \cdot n} = \frac{v_n - v_0}{v_n + v_0} \cdot \frac{200}{n},$$

себто — Преслерів вираз.

Звідсіля Шуберт робить висновок, що за аритметично зростаючого ряду останній взір цілком вистачає теоретично і для періо-

*) Ibid., ст. 228.

дично-річного біжучого приросту. Але площа трапезу може бути за прискорено зростаючого приросту більша, а спадаючого — менша ніж за пересічну масу, тому гадає Шуберт, цей взір у першім випадку даватиме менший, а в другім — більший наслідок від дійсного.

Проф. Левакович, одначе, визнає помилковим припущення Шубертове, що $p = 100 \frac{\frac{dv}{dt}}{v}$ уявляє вираз для відсотка пересічного приросту, бо той взір фактично визначає відсоток біжучого приросту і то для кожного конкретного року особливий, а це робить велику ріжницю. Поданий випадок може трапитися лише для цілком справного аритметичного ряду з непаристим числом членів, де середній член якраз буде й пересічним, напр.:

$$\frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Шубертів приклад математичного виправдання Преслерового взору, каже проф. Левакович, показує нам, що вживання диференціяльного та інтеґрального рахування не завжди доцільне, бо часто приводить до висновків, де замісць пересічних чисел приймаються без розбору цілі чи часткові суми.

Проф. Г. Турський*) бачить у взорі Преслеровім виявлення доречної та надзвичайно простої методи, яка справедливо здобула такого розповсюдження в таксаційній практиці. Метода ця дійсно всебічно характеризує кількосний бік зросту дерева й приросту. Але цим значіння взору не вичерпується, значіння і раціональність методи значно більші за докладність наслідків і наближення їх до величин, обчислених за взором складних відсотків (4).

В основу методи кладеться:

1) обчислення річного приросту із періодичного за малу добу t,

$$z = \frac{M - m}{t};$$

2) припущення, що протягом цієї доби z не міняється. В дійсності такого явища не спостерігається, тут знову вживаємо згаданої раніш схематизації явищ.

Коли продовжити далі таку схематизацію, то можна припустити, що біжучий приріст z мав той же розмір на середині доби t; що для малого t змінна величина M в середині тієї доби якраз мала значіння пересічної аритметичної величини між M і m. Таким чином, цим припущенням ми застосовуємо й приріст і змінний елемент M до одного моменту часу; а коли це так, то мусить зникнути питання про те, якого вживати відсотка — простого чи складного;

*) Проф. Турский, ibid., ст. 16.

в цім випадку маємо стосунок відносний та висловлюємо його у відсотках. Жадного набування за законами відсотків тут немає, величина річного біжучого приросту коливається з року на рік і тому до цього процесу не надається пристосовувати будь-який відсотковий закон. Натурально, всі ці міркування не претендують на повний математичний підклад, але для тих змін таксаційних елементів, які спостерігаються на дереві чи деревостані, метода Преслерова, на думку проф. Г. Турського, за належно обраного періоду t, дасть цілком задовольняючі наслідки й, опріч того, добре відіб'є хід зросту, хоч і в схематизованім вигляді. Метода цілком проста й зрозуміла навіть для мало підготовленої людини. До такого ж висновку прийшов значно раніш і Шіффель, що вважав методу Преслерову за математично правильну.

Після перевірки взору на деревах ріжного віку з'ясувалось, що на молодих деревах він дає значні помилки.

Метода Кунце.

Майже одночасно з Преслером ту ж проблему розв'язав і Кунце. Він прийшов до взору:

$$p = 200 \frac{M - m}{M(t-1) + m(t+1)}, \tag{6}$$

побудованого аналогічно до Преслерового.

Одержує Кунце цей взір через розкладання виразу для складних відсотків за біномом Ньютоновим.

Взір $M = m\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ надається змінити таким чином:

$$\frac{M}{m} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t = 1 + t\frac{p}{100} + \frac{t(t-1)}{1.2}\left(\frac{p}{100}\right)^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\left(\frac{p}{100}\right)^3 + \dots \tag{7}$$

Так само і вираз $\sqrt[t]{\frac{M}{m}}$ можна написати так:

$$\sqrt[t]{\frac{M}{m}} = \sqrt[t]{\frac{M + m - m}{m}} = \left(1 + \frac{M - m}{m}\right)^{\frac{1}{t}}$$

Тоді із взору (4) $p = 100\left(\sqrt[t]{\frac{M}{m}} - 1\right)$ одержимо:

$$\frac{p}{100} = \left(1 + \frac{M - m}{m}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

Розкладаючи і цей вираз за біномом, після перенесення 1 до лівої частини рівняння, матимемо:

$$\frac{p}{100}-1=1+\frac{1}{t}\cdot\frac{M-m}{m}+\frac{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)}{1.2}\left(\frac{M-m}{m}\right)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-2\right)}{1.2.3}\left(\frac{M-m}{m}\right)^3 \qquad (8)$$

Величина $\frac{p}{100}$ порівнюючи мала, а вираз $\frac{M-m}{m}$ для старого віку дерев і малого протягу часу t є правильний дріб, що з віком зменшується. Отже коли обмежитись у виразі (7) лише другим ступенем величини $\frac{p}{100}$ і перенести 1 ліворуч, матимемо:

$$\frac{M}{m}-1=\frac{M-m}{m}=\frac{tp}{100}+\frac{t(t-1)}{1.2}\left(\frac{p}{100}\right)^2=\frac{tp}{100}\left(1+\frac{t-1}{2}\frac{p}{100}\right) \qquad (9)$$

Залишаючи у виразі (8) лише перший член, одержимо:

$$\frac{p}{100}=\frac{M-m}{t\,.\,m}$$

Останнє значіння для $\frac{p}{100}$ підставимо в дужки виразу (9), тоді

$$\frac{M-m}{m}=\frac{tp}{100}\left(1+\frac{t-1}{2}\,\frac{M-m}{m}\right),$$

відкіля

$$\frac{p}{100}=\frac{M-m}{tm\left(\frac{2tm+Mt-M+m-mt}{2mt}\right)}=\frac{2(M-m)}{M(t-1)-m(t+1)}$$

і далі

$$p=200\,\frac{M-m}{M(t-1)+m(t+1)} \qquad \text{— взір Кунців.}$$

Коли визначимо річний періодний приріст через z, себто:

$$z=\frac{M-m}{t},$$

то обмеження членом першого ступеня у виразі (8) дасть не що інше, як простий відсоток біжучого приросту, а власне: $\frac{p}{100}=$ $=\frac{M-m}{tm}=\frac{z}{m}$, що одержується із пропорції: $p:100=z:m$.

Таку величину відсотка проф. Г. Турський визначає через p^1:

$$p^1 = 100 \frac{z}{m} = 100 \frac{M - m}{tm} \tag{10}$$

Після перевірки Кунцевого взору одержуються наслідки ближчі до взору складних відсотків (4) ніж від Преслерового взору, а всеж менші від першого.

Баур виводить Кунців взір простіш, подібно до Преслерового взору, а саме із пропорції:

$$\frac{M - m}{t} : \frac{m + \left[m + \frac{M - m}{t}(t - 1)\right]}{2} = p : 100,$$

відкіля після певних упрощень одержується:

$$p = 200 \frac{M - m}{M(t - 1) + m(t + 1)} \tag{6}$$

Баур застосовує відсоток річного періодного приросту до елементу, що одержується на середний добі t. У нього початкова вартість є m, а кінцева $m + \frac{M - m}{t} \cdot \frac{t - 1}{2}$, тоді пересічна аритметична з ціх виразів виноситиме:

$$m + \left[m + \frac{M - m}{t}(t - 1)\right]$$

Перевірка взору, зроблена проф. Леваковичем, на деревах і деревостанах ріжного віку показала придатність його і для молодого віку, що дає йому перевагу перед взором Преслеровим.

Меркерова метода.

Меркер застосовує річний періодний приріст не до аритметичної пересічної величини із початкової і кінцевої вартости, а до геометричної пересічної, себто: $\sqrt{Mm}$.

Пропорція Меркерова має вигляд:

$$\frac{M - m}{t} : \sqrt{Mm} = p : 100, \quad \text{відкіля} \quad p = \frac{100}{t} \cdot \frac{M - m}{\sqrt{Mm}} \tag{11}$$

Щоб не мати до діла із знаком радикалу, Меркер змінив взір способом тим, що підвищив у другий ступінь численник і знаменник другої половини виразу і через те кратник збільшив у 2,01 рази, а для дотримання справности взору зменшив удвічі постійний сочинник, себто: замісць 100 поставив 50.

Спрощений взір виглядає так:

$$p=\frac{50}{t}\frac{(M-m)^2}{Mm}=\frac{50}{t}\frac{(M-m)(M+m)}{Mm} \tag{12}$$

Пересічно взір дає трохи більші за попередні наслідки і тим більше наближається до взору складного відсоткування (4), але в практику не ввійшов, хоч обчислення й не багато складніші за, напр., Кунців взір.

Шубертова метода.

Шубертів взір має вигляд:

$$p=\frac{600}{t}\frac{M-m}{M+4w+m} \tag{13}$$

Збудований за типом Преслерового взору, цей взір подає, як і попередні, власне відносний відсоток. Нова величина w уявляє таксаційний елемент (обсяг, висоту тощо), який витворюється в середині періоду t. Шуберт вважає свій взір за однаково докладний за всякого стану річного приросту — спадаючого, незмінного чи збільшуючого, та вживає його, як мірило, для порівняння докладности других метод. Виводить свій взір із пропорції простого відсоткування за поміччю інтеґрального рахування ,подібно до Преслерового взору. За перевіркою проф. Левачовича, взір цей дає гірші наслідки за Преслерів, а для обрахувань значно складніший.

Шіффелева метода.

Великий теоретик Шіффель намагався дати математичний вислів процесам набування деревна в лісі. Він найближче других підійшов і до розв'язання теорії відсотка біжучого приросту. Хід думок його такий*).

Він припускає, що протягом певного періоду n річний біжучий приріст будь-якого таксаційного елементу залишається на сталій висоті z. Тоді щорічна зміна, напр., висоти h_0, представиться в такім вигляді:

в кінці 1-го року $h_1=h_0+z$

,, 2-го року $h_2=h_1+z=h_0+2z$

,, 3-го року $h_3=h_2+z=h_0+3z$

в кінці n-го року $h_n=h_n-1+z=h_0+nz$

Таке набування приросту Шіффель вважає, протилежно до звичайного збільшення чисел, особливим зростанням у фізіологічнім розумінні.

За цими кінцевими величинами відсоток біжучого приросту встановиться таким способом:

*) Проф. Левакович: ibid., ст. 213.

за 1 рік $$p_1 = \frac{[(h_0 + z) - h_0]\,100}{h_0} = \frac{100z}{h_0}$$

за 2 рік $$p_2 = \frac{[(h_0 + 2z) - (h + z)]\,100}{h_0 + z} = \frac{100z}{h_0 + z}$$

за 3 рік $$p_3 = \frac{[(h_0 + 3z) - (h_0 + 2z)]\,100}{h_0 + 2z} = \frac{100z}{h_0 + 2z}$$

за n-й рік $$p_n = \frac{\{(h_0 + nz) - [h_0 + (n-1)z]\}\,100}{h_0 + (n-1)z} =$$

$$= \frac{100\,z}{h_0 + (n-1)z} \tag{14}$$

За добутими величинами Шіффель обчисляє дійсний періодний відсоток, як аритметичне пересічне число.

$$p_m = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}{m} \tag{15}$$

Цим шляхом Шіффель вживає простих відсотків для обчислення відсотка річного приросту і тим уникає складних, але ж ускладнює перші вимогою кожний раз обчислені відсотки приєднувати до початкової вартости.

Методу свою Шіффель назвав «методою простих відсотків», або «рядковою методою».

Вираз його $p = \frac{100z}{m} = \frac{100z}{h} = \frac{100z}{d}$ дійсно належить до простих відсотків, але справа міняється згаданою вимогою, яка фактично уявляє основну вимогу складних відсотків.

Висновок із такого ускладнення зробимо пізніше.

Отже розглядаючи абсолютні величини ряду p_1, p_2, $p_3 \ldots p_n$, пересвідчуємось, що за сталого річного приросту z відсотки його стало спадають.

Одначе, каже проф. Левакович*), переведення в життя розібраної методи наражається на непереможні перешкоди при встановленні розміру приросту на обсязі й на вартості. Далі, кваліфікація методи, як «рядкової» та відбиваючої фізіологічний хід росту, досить неясна; вживання лише простого відсоткування в дійсності переходить у складне (щорічне додавання набутого приросту до початкової величини). Всі ці обставини спричинилися до повного забуття Шіффелевої методи, хоч, на думку проф. Леваковича, «своєю теорією Шіффель поклав у всякім разі могутній кутній камінь для теоретично-бездоганного рішення всіх до цього часу розв'язаних питань в науці про приріст».

---

*) Ibid., стор. 221.

Леваковичева метода.

Проф. Левакович*), як і всі попередні досліджувачі біжучого приросту, припускає, що протягом невеликого (не більш 10 років) періоду біжучий приріст не міняє своєї величини і залишається рівним $z = \frac{M - m}{t}$.

Далі подібно до Шіффелевої методи обчисляє він кінцеву вартість кожного року із попередньої, збільшеної на біжучий приріст. Тому можна скласти такі пропорції:

в кінці 1-го року $\frac{M - m}{t} : m = p_1 : 100$

в кінці 2-го року $\frac{M - m}{t} : \left(m + \frac{M - m}{t}\right) = p_2 : 100$

в кінці 3-го року $\frac{M - m}{t} : \left(m + 2\,\frac{M - m}{t}\right) = p_3 : 100$

в кінці t-го року $\frac{M - m}{t} : \left[m + (t - 1)\,\frac{M - m}{t}\right] = p_t : 100$

в кінці $\frac{t}{2}$-го року $\frac{M - m}{t} : \left[m + \left(\frac{t}{2} - 1\right)\frac{M - m}{t}\right] = p : 100$

Із останньої пропорції й виводить проф. Левакович свій взір:

$$p = \frac{\frac{M - m}{t} \cdot 100}{m + \left(\frac{t}{2} - 1\right)\frac{M - m}{t}} = 200\,\frac{M - m}{M(t - 2) + m(t + 2)} \qquad (16)$$

Одержується взір, збудований подібно до кінцевого взору. Тут маємо відсоткове відношення періодичного пересічного приросту до аритметичної середини початкової вартости будь-якого таксаційного елементу та його вартости наприкінці (t—2)-го року,

бо вираз $m + \left(\frac{t}{2} - 1\right)\frac{M - m}{t}$ є не що інше як

$$\frac{m + \left[m + (n - 2)\,\frac{M - m}{t}\right]}{2}$$

Взір цей належить до приблизних, як і всі попередні, й базується на принципі складних відсотків; дає наслідки абсолютно

*) Ibid., стор. 233.

більші за взір Кунців і тому найближчі до взору складного відсоткування (4).

Проф. Левакович радить для того випадку, коли вживання взору є утруднене, використовувати: для 10-тирічних періодів — його власний взір, а для 5-тилітніх — Кунце.

Щодо придатности Левакóвичевого взору, то покищо жадних дослідів на практиці не переведено, принаймні відомостей в літературі про те не знайдено.

Метода Свена Петріні.

В тім же часопису (Centralblatt für das gesamte Forstwesen), де була надрукована стаття проф. Левакóвича, появилась (в р. 1925) критика на неї асистента Шведського досвідного уставу Свена Петріні.

Останній добачає в методі Левакóвичевій нахил вважати теорію Шіффелеву за найсправнішу, принаймні із теоретичного боку, й тому вираз його для аритметичного пересічного відсотка приросту

$$p = \frac{p_1 + p_2 + p_3 \ldots p_t}{t}$$

доречним. Петріні визнає таку маніпуляцію несправною. На його думку, Левакович має подати хід збільшення капіталів протягом періоду, бо наука про відсотки вимагає рахування відсотків наростання щорічно, як також і стану капіталів; у цім випадку відсоток обраховується тим способом, що ставлять загальний річний приріст у відношення до капіталу початкового. А далі, щоб одержати річний пересічний відсоток приросту за певний період, треба уявити відношення між сумою абсолютною величин річних приростів і сумою річних початкових капіталів, або що теж саме: відношення між пересічним річним приростом і пересічним річним початковим капіталом. Взагалі ж, коли протягом певного періоду відносно малі капітали зв'язано із великими відсотками, або великі капітали дають малі відсотки, то пересічний відсоток в обох випадках не буде однаковий.

Взір для своєї методи Петріні виводить так. У нього визначається число років періоду через t,
абсолютні прирости річні — $z_1, z_2, z_3 \ldots z_t$,
початкові капітали окремих років — $m_1, m_2, m_3, \ldots m$,
відсотки приростів окремих років — $p_1, p_2, p_3, \ldots p$,
дійсний пересічний відсоток — p.

За цих визначень виноситимуть:

$$p_1 = \frac{z_1}{m} 100; \qquad p_2 = \frac{z_2}{m_2} 100 \ldots p_t = \frac{z_t}{m_t} 100.$$

Взагалі ж пересічний відсоток за тих даних уявляв би пересічне аритметичне:

$$p = \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 + \dots p_t m_t}{m_1 + m_2 + m_3 \dots m_t}$$

Підставляючи сюди значіння окремих річних відсотків, одержимо:

$$p_1 = \frac{\frac{z_1 m_1}{m_1} \cdot 100 + \frac{z_2 m_2}{m_2} \cdot 100 + \dots \frac{z_t m_t}{m_t} \cdot 100}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots m_t},$$

а після скорочення

$$p = \frac{z_1 100 + z_2 100 + z_3 100 + \dots z_t 100}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots m_t},$$

або інакше:

$$p = \frac{\Sigma_1^t z_v}{\Sigma_1^t m_v} \cdot 100 \tag{17}$$

На думку Петріні, таким способом обчислений відсоток найближче підійде до обрахованого за методою Преслеровою. Пересічний відсоток, як аритметичне середнє, із щорічних відсотків (шіффелева метода), не є справний і тому, що річні відсотки цілком залежать на початкових капіталах. Переведеною перевіркою на прикладах, поданих проф. Леваковичем, автор доводить більшу відповідність свого взору індивідуальностям зросту дерева.

Метода Бурьячкова.

В неперіодичнім виданні російськім «Труды по лесному опытному делу» выпуск LX за р. 1916 вміщено було статтю Г. Д. Бурьячка — «К вопросу об определении процента прироста деревьев», — де автор подає новий взір для встановлення відсотка приросту:

$$p = \frac{\log D^3}{\log l} \cdot 10 - \frac{\log d^3}{\log l} \cdot 10 \tag{18}$$

Бурьячек за основу своїх обраховань взяв твердження, що енерґія набування деревнової маси протягом року, або за окремі моменти веґетаційного періоду — рівномірна, незалежно від того, що річний відсоток приросту буде уявляти величину сталу протягом невеликого періоду. Автор визнає, що зростання деревнової маси переводиться не за простими, а за складними відсотками, які нібито більше відповідають розумінню деревнового приросту. Виводить свій взір таким способом. Через M_n визначає початковий обсяг дерева, а через M_1 — набутий за певний період за складними відсотками, p — відсоток; за t років наростання на 100 виноситиме pt.

Коли період t років розбити на n рівних частин, то на $\frac{1}{n}$ при паде $\frac{pt}{n}$ %. Сочинник прольонґування автор уявляє собі у вигляді $\left(1+\frac{pt}{100n}\right)$, а коли визначити $\frac{pt}{100}$ через q, то той вираз обернеться в $\left(1+\frac{q}{n}\right)$

За $\frac{n}{n}$ частин часу деревний обсяг M_n збільшиться до M_1, себто:

$$M_1 = M_n\left(1+\frac{q}{n}\right)^n = M_n\left(1+\frac{1}{\frac{n}{q}}\right)^{\frac{nq}{q}}$$

Коли визначити $\frac{n}{q} = m$, то

$$M_1 = M_n\left(1+\frac{1}{m}\right)^{qm} = M_n\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^q \tag{19}$$

Останній вираз згідно існуючим математичним твердженням можна написати:

$$\left\{\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^q\right\} = l^q = l^{\frac{pt}{100}} \tag{20}$$

Тут припускається, що n а тим самим і m, наближаються до безмежности а l є основа Неперових логаритмів $=2.71828\ldots$

Підставляючи вираз (20) до взору (19) й прирівнюючи $t=10$, одержимо:

$$M_1 = M_n l^{\frac{p}{10}} \tag{21}$$

Далі Бурьячек припускає, що зміни всіх таксаційних елементів на дереві відбуваються пропорційно, тому у взорі (20) стосунок обсягів замінює стосунком кубів промірів

$$\frac{M_1}{M_n} = \frac{\frac{\pi}{4}D^2hf}{\frac{\pi}{4}d^2h_1f_1} = \frac{D^3}{d^3}$$

Таке припущення буде справним лише за $\frac{H}{h} = \frac{D}{d}$ і $f = f_1$.

Із виразу (21) одержується $\frac{M_1}{M} = l^{\frac{p}{10}}$, відкіля

$$\frac{D^3}{d^3} = l^{\frac{p}{10}} \tag{22}$$

Цей вираз власне й уявляє взір Бурьячків.

Далі він його логаритмує й одержує:

$$\frac{p}{10}\log l = \log D^3 - \log d^3$$

або

$$p = \frac{\log D^3 - \log d^3}{\log l}10$$

а то ще:

$$p = \frac{\log D^3}{\log l}10 - \frac{\log d^3}{\log l}10 \tag{23}$$

За ріжного періоду t, а саме: 5 р., 15 р., 20 р., 25 р., і т. д., взір (23) відповідно множиться на 0,5; 1,5; 2,0; 2,5 і т. д.

До того ж вислідку, що й Бурьячек, прийшов проф. Фан-дер-Фліт, що надрукував в тім же випуску «Трудов» свою статтю по досліду теорії приросту.

Він його виводить за інтеґральним рахунком, подібно до Шубертового виводу Преслерового взору (стор. 16).

Припускає, що dM уявлятиме приріст на обсязі за безконечно малий промежок dt, тоді $\frac{dM}{dt}$ визначатиме швидкість набування обсягу чи абсолютний річний приріст за того передбачення, що швидкість наростання протягом року буде незмінною, тоді $\frac{\frac{dM}{dt}}{M_0}$ — уявлятиме відносний річний приріст, а

$$p = \frac{\frac{dM}{dt}}{M_0}\,.\,100 \tag{24}$$

відсоток того приросту.

За цих даних можна скласти стосунок: $\frac{dM}{\frac{p}{100}M_0} = \frac{dt}{1\text{ рік}}$ (25)

З цього стосунку матимемо: $dM = \frac{pdt}{100}\cdot M_0$

Інтеґруючи це рівняння в межах t і t_0, себто за період, коли обсяг M дороcте до M_0, одержимо:

$$lM = lM_0 + 0{,}01\int_{t_0}^{t} pdt \tag{26}$$

Відсоток p, як раніше згадувалося, приймається за сталу величину, тоді

$$\int_{t_0}^{t} p dt = p\int_{t_0}^{t} dt = p\,(t-t_0).$$

Підставляючи останній вираз у рівняння (26), одержимо:

$$lM = lM_0 + 0{,}01 p\,(t-t_0) \tag{27}$$

відкіля

$$p = \frac{100}{t-t_0}\,(lM - lM_0) = \frac{100}{t-t_0}\,l\,\frac{M}{M_0}$$

Замінюючи обсяги кубами відповідних їм промірів, матимемо:

$$p = \frac{100}{t-t_0}\,l\,\frac{D^3}{d^3}$$

Переводимо далі Неперові логаритми на десяткові через множник $\frac{1}{\log e} = 2.3026$, що дасть: $p = \frac{100}{t-t_0}\,\frac{\log D^3 - \log d^3}{\log e}$, або коли період $t-t_0$ прирівняти 10 рокам, то: $p = \frac{\log D^3}{\log e}\cdot 10 - \frac{\log d^3}{\log e}$, себто одержується взір Бурьячків (18).

Через те, що вживання логаритмів при обрахованні відсотків біжучого приросту взагалі вважається незручним, автор склав таблиці, де подається готові дані для $\frac{\log D^3}{\log e}\cdot 10$. Обчислення відсотка приросту за період 10 р. полягає в розшукуванні двох чисел для $\frac{\log D^3}{\log e}\cdot 10$ і для $\frac{\log d^3}{\log e}\cdot 10$; ріжниця між першим і другим числами й дасть потрібний відсоток.

Бурьячек твердить, що його взір дає добрі наслідки для всяких бонітетів і віків та посилається на А. І. Тарашкевича, який перевірив це твердження на великім числі дерев і найшов його справним*).

Проф. М. М. Орлов подає про взір подібну ж характеристику**).

Проф. Г. Турський***) доводить, що взір не є виразом складних відсотків. Але до доказів цього твердження ми ще повернемось пізніше.

Метода проф. Турського.

Проф. Г. Турський†), користаючись із методи розкладу двочленів у ряд, виводить власний нелогаритмічний взір для обчислення відсотка біжучого приросту.

*) «Лесопромышленное дело» р. 1924. №№ 5 і 6.

**) Проф. Орлов: Лесная таксация, р. 1925, стор. 384.

***) Проф. Г. Турский: Очерки по теории прироста, р. 1925, стор. 26 і наступні.

†) Ibidem, стор. 11, 12 і наступні.

Для розкладу бере вираз (3) для складного відсотка $\frac{M}{m}=\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ та одержує

$$\frac{M}{m}=1+t\frac{p}{100}+\frac{t(t-1)}{1.2}\left(\frac{p}{100}\right)^2+\frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\left(\frac{p}{100}\right)^3+\ldots$$

Обмежуючись квадратом малої величини $\left(\frac{p}{100}\right)$ і перенісши першу половину рівняння до другої, матимемо:

$$\frac{t(t-1)}{2}\left(\frac{p}{100}\right)^2+t\frac{p}{100}-\frac{M-m}{m}=0$$

Встановлюючи із цього рівняння другого ступеня $\frac{p}{100}$, одержимо:

$$\frac{p}{100}=\frac{-t\pm\sqrt{t^2+4\frac{t(t-1)}{2}\cdot\frac{M-m}{m}}}{t(t-1)}=\frac{-t\pm t\sqrt{1+\frac{2(t-1)}{t}\,\frac{M-m}{m}}}{t(t-1)},$$

$$p=100\frac{-1\pm\sqrt{1+2(t-1)\frac{z}{t}}}{t-1}, \qquad (28)$$

коли вираз $\frac{M-m}{m}$ замінимо через z.

Турський вважає цей взір за простий, але тут же висловлюється, що добування коріння може спричинити утруднення. Для уникнення радикалу він розкладає підкорневу частину як двочлен за біномом Ньютоновим:

$$\sqrt{1+2(t-1)\frac{z}{t}}=\left[1+2(t-1)\frac{z}{t}\right]^{\frac{1}{2}}=1+(z-1)\frac{z}{t}+$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}.4(t-1)^2\left(\frac{z}{t}\right)^2+\ldots\ldots \qquad (29)$$

Величина $\frac{z}{t}$ є досить мала, тому без великої помилки можна спинитися на третім члені із другим ступенем, тоді

$$p=100\frac{-1+1+(t-1)\frac{z}{t}-\frac{(t-1)^2}{2}\left(\frac{z}{t}\right)^2}{t-1}$$

Скорочуючи на $(t—1)$ і взявши $\frac{z}{t}$ за дужки, одержимо:

$$p=100\frac{z}{t}\left(1-\frac{t-1}{2}\frac{z}{t}\right)=p_1\left(1-\frac{t+1}{2}\frac{z}{t}\right)$$

або

$$p=\frac{100}{t}\frac{M-m}{m}\left(1-\frac{t-1}{2t}\frac{M-m}{m}\right) \tag{30}$$

Автор і цей взір визнає за простий і зручний для обраховань.

Спинившись на першім ступені виразу (29), одержуємо:

$$p=100\frac{-1+1+(t-1)\frac{z}{t}}{t-1}=100\frac{z}{t}=100\frac{M-m}{tm},$$

себто не що інше, як взір простого відсотка приросту по відношенню до початкової величини.

Добуті взори (28) і (30) проф. Турський вважає за приблизні, бо підчас їхнього будування відкидалися члени з третім і вищими ступенями. Коли ж останні залишити, то одержиться цілком справний взір. Так і робить він із взором (4) для складного відсотка:

$$\frac{Pa}{100}=\sqrt[t]{1+\frac{M-m}{m}}-1=\left(1+\frac{M-m}{m}\right)^{\frac{1}{t}}-1$$

Розкладаючи за біномом і виводячи за дужки вираз $\frac{1}{t}\cdot\frac{M-m}{m}$, матимемо:

$$\frac{Pa}{100}=\frac{1}{t}\cdot\frac{M-m}{m}\left[1-\frac{t-1}{2t}\cdot\frac{M-m}{m}+\frac{(t-1)(2t-1)}{t^2 3!}\left(\frac{M-m}{m}\right)^2-\right.$$

$$-\frac{(t-1)(2t-1)(3t-1)}{t^3 4!}\left(\frac{M-m}{m}\right)^3+\ldots+(-1)^n\frac{(t-1)(2t-1)\ldots(nt-1)}{t^n(n+1)!}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{M-m}{m}\right)^n+\ldots\right]$$

відкіля

$$p_a=p_1\left[1-\frac{t-1}{2}\frac{z}{t}+\frac{(t-1)(2t-1)}{3!}\left(\frac{z}{t}\right)^2-\ldots+(-1)^n\right.$$

$$\left.\frac{(t-1)(2t-1)\ldots(nt-1)}{(n+1)!}\left(\frac{z}{t}\right)^n+\ldots\right] \tag{31}$$

Многочлен в дужках уявляє ряд, що швидко зменшується. Взір (31) по абсолютній величині завжди буде більший за взір (30).

Обидва ці взори, на думку Турського, цілком придатні для обчислення складного відсотка біжучого приросту для всіх змін таксаційних елементів на деревах не дуже молодих.

Далі проф. Турський*) приходить до аналізи розуміння відносного відсотка.

Зміна таксаційних елементів на дереві чи деревостані залежить від багатьох причин, але за рівних інших умов, головним чином, від віку, себто від часу. Отже сучасний стан елементу M можна розглядати, як функцію часу:

$$M = \Phi(t) \tag{32}$$

Біжучий приріст уявляє також величину, що міняється з часом, тому й його можна представити собі, як якусь функцію часу:

$$z = \varphi(t) \tag{33}$$

Тепер, коли відкинути сучасну уяву про набування деревна за законами відсотків (чого в дійсності й не буває), то можна цілком задоволитись відносним відсотком приросту, себто величиною

$$p = \frac{\varphi(t)}{\Phi(t)} \cdot 100$$

Коли закон зміни будь-якого таксаційного елементу висловлюється рівнянням $M = \Phi(t)$, то його можна розглянути, на думку Турського, як рівняння крапки, що рухається по вісі ординат, як рівняння її траекторії; біжучий приріст з цього погляду уявлятиме швидкість цього руху, або змінність величини M (траекторії) за одиницю часу. Коли це так, то біжучий приріст уявлятиме першу похідну від функції Φ в часі, себто:

$$z = \frac{dM}{dt} = \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Коли $z = \varphi(t)$, то зв'язок між функціями φ і Φ стає ясним:

$$\varphi = \frac{d\Phi}{dt}$$

З попереднього відомо, що відносна величина біжучого приросту у відсотках висловлюється:

$$p_0 = \frac{z}{M} \cdot 100$$

Підставивши сюди горішнє значіння для z, одержимо:

$$p_0 = \frac{\frac{dM}{dt}}{M} \cdot 100 \tag{34}$$

Цей вираз і буде уявляти диференціяльне рівняння відсотка біжучого приросту.

*) Ibid., стор. 24.

Проінтеґруємо вираз (34) в припущенні, що розмір p_0 протягом малого часу залишиться сталим. У такім випадку із виразу (34) одержимо:

$$\frac{dM}{M}=\frac{p_0}{100}dt$$

Інтеґруючи цей вираз, найдемо:

$$lM=\frac{p_0}{100}t,$$

після нехтування довільних сталих, відсіля $M=e^{\frac{p_0 t}{100}}$. У цих виразах e визначає Неперів логаритм $=2.71828$.

Щоб одержати числове значіння для p_0, інтеґрування необхідно перевести в межах T і T_0, ріжниця між якими виносила б t — дійсно малий період. Тоді одержимо $\Big[lM\Big]_{T_0}^{T}=\Big[\frac{p_0}{100}t\Big]_{T_0}^{T}$, відкіля

$$lM—lm=\frac{p_0}{100}\Big(T—T_0\Big)=\frac{p_0}{100}t, \quad .. \tag{35}$$

де під M і m уявляють значіння функції Φ для моментів T і T_0.

Із рівняння (35) одержимо:

$$p_0=\frac{100}{t}\Big(lM—lm\Big)=\frac{100}{t}l\frac{M}{m}, \text{ відкіля}$$

$$\frac{M}{m}=e^{\frac{p_0 t}{100}} \tag{36}$$

Останній вираз може вважатися за рівняння для кожної величини, що з часом міняється.

Для більшої зручности обраховань Неперові логаритми переводять на десяткові (з основою 10), вживаючи за сочинник вираз: $l\,x=\frac{\log x}{\log e}$, тому

$$p_0=\frac{100}{t}\,\frac{\log M—\log m}{\log e} \tag{37}$$

Це й буде цілком справний взір для відносного відсотка біжучого приросту. Одначе, необхідність вживати логаритми трохи утруднює переведення обчислень, тому проф. Турський подає вивід подібного взору нелогаритмичного вигляду:

З попереднього мали $p_0=\frac{100}{t}l\frac{M}{m}$ (38)

Цей вираз надається до розкладу перебуваючого в нім Неперового логаритма.

Дійсно

$$l\frac{M}{m}=l\frac{M-m+m}{m}=l\left(1+\frac{M-m}{m}\right)$$

Як відомо, Неперів логаритм бінома розкладається по такому закону:

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ \dots$$

тоді

$$l\left(1+\frac{M-m}{m}\right)=\frac{M-m}{m}-\frac{1}{2}\left(\frac{M-m}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{M-m}{m}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{M-m}{m}\right)^4+$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{M-m}{m}\right)^5-\dots=l\frac{M}{m},$$

Підставивши цей вираз у взір (38), одержимо

$$p_0=\frac{100}{t}\left[\frac{M-m}{m}-\frac{1}{2}\left(\frac{M-m}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{M-m}{m}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{M-m}{m}\right)^4+\dots\right] \quad (39)$$

Коли у взорі (39) відкинути всі члени із другим і вищим ступенями, то одержимо вираз:

$$p_0=\frac{100}{t}\frac{M-m}{m}$$

— простий відсоток відношення приросту періодного до початкової вартости, що вже нам траплялось і раніш (взір 2).

Вивівши величину $\frac{M-m}{m}$ у взорі (39) за дужки, матимемо:

$$p_0=\frac{100}{t}\frac{M-m}{m}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{M-m}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{M-m}{m}\right)^3-\dots\right] \quad (40)$$

або

$$p_0=p_1\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{M-m}{m}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{M-m}{m}\right)^3-\dots\right]$$

Коли обмежитись у цім останнім виразі першим ступенем малої величини $\frac{M-m}{m}$, то одержиться взір

$$p'_0=p_1\left(1-\frac{1}{2}\frac{M-m}{m}\right)=\frac{100}{t}\frac{M-m}{m}\left(1-\frac{1}{2}\frac{M-m}{m}\right) \quad (41)$$

Проф. Турський розглядає цей взір не як простий і не як складний відсоток приросту, а лише як висловлену у відсотках відносну величину біжучого приросту. За його думкою, вже декілька разів висловленою раніш, у цім випадку жадного набування за законами відсотків не передбачається.

Далі він переводить порівняння взору (41) із Преслеровим і взором складного відсотка й приходить до висновку, що взір Преслерів ближче підходить до взору (41), ніж взір складного відсотка.

На підставі своїх дослідів над ріжними методами обчислення відсотка біжучого приросту проф. Турський приходить до висновку.

1. Наростання деревна в лісах не відбувається ні за простими ні за складними відсотками;

2. Характерною величиною для ходу росту необхідно визначити відносну величину приросту;

3. За д о к л а д н и й вислів відсотка біжучого приросту н а л е ж и т ь в в а ж а т и в и з н а ч е н у в в і д с о т к а х в і д н о с н у в е л и ч и н у;

4. Зо всіх метод встановлення приблизного відсотка біжучого приросту метода Преслерова дає найліпші наслідки.

М е т о д а Ф а н - Д е р - Ф л і т о в а.

Взір проф. Фан-дер-Фліта для відсотка біжучого приросту так виглядає:

$$p=\frac{300}{t-t_0}\cdot\frac{D-D_0}{D} \tag{42}$$

Порядку обчислення його проф. Орлов не приводить, а пояснює, що проф. Фан-дер-Фліт*) прийшов до нього, аналізуючи взір Бурьячків.

По зовнішньому вигляду взір можна віднести до тих, що намагаються спростити Преслерову методу, але які побудовані фактично по законах відносного відсотка біжучого приросту.

Про перевірку взору й ступінь його докладности відомостей одержати не вдалось.

М е т о д а п р о с т и х і с к л а д н и х в і д с о т к і в.

На стор. 12 ми вже згадували про взір (4) складних відсотків:

$$p=100\left(\sqrt[t]{\frac{M}{m}}-1\right)$$

і подали загальну характеристику його, з чого виступала невідповідність його законам наростання деревна.

Останнє розуміння, як ще нове, не одержало загального розповсюдження й тому скрізь в лісовотаксаційних підручниках і літературі здибуємо ще домінуюче положення цього взору.

Проф. Левакович**) після перевірки останнього, названого ним Ляйбніцевим (по імени винахідника відсоткового рахування),

*) Проф. Орлов, ibid., стор. 385.

**) Проф. Левакович, ibid., стор. 224 і наступні.

на 10-тирічних періодах росту приходить до висновку, що цей взір у порівнянні до практично нездійснимого, але абсолютно (за його думкою) докладного Шіффелевого виразу

$$p=\frac{p_1+p_2+p_3+\ldots p_t}{t},$$

за всіх можливих випадків дійсного росту можна вважати цілком докладним.

Для 5-тирічних періодів наслідки бувають ще ліпші.

З попередніх метод обчислення відсотка біжучого приросту можна було пересвідчитись, що встановлені ними численні взори дають для молодих незлучених дерев у лісі не досить справні наслідки. Єдиним виключенням з того був, після перевірок проф. Леваковича, взір складних відсотків.

Ріст дерев у злученім деревостані із поступовим зменшенням кількости листу на деревах та корінів, і ослабленням чинности камбію, виявляє стале зменшення обсягу приросту. Для такого стану дерев взір Ляйбніців не дає добрих наслідків, помилки будуть завжди в і д ' є м н і. У цім випадку докладнішим буває взір комбінованих складних відсотків (Шіффелів).

Перевірка відсотка відносного приросту, висловленого взором (2)

$$p=100\,\frac{M-m}{t\,.\,m},$$

дала за проф. Леваковичем наслідки значно відхильні (—32%+39%) від подібних, обрахованих за Ляйбніцевим взором. У цім відношенні замісць взору (2) доцільніше користуватися із взорів (30) і (31) — відносного відсотка приросту.

Для полегшення вживання взору складних відсотків (4) Рібель (Lehrbuch der Waldwertrechnung) склав особливі таблиці, де для відношення $\frac{M}{m}$ даються готові відсотки — $1{,}0p^n$ для ріжних p і n.

§ 5. Методи обчислення відсотка приросту другої групи.

До першої катеґорії цієї групи належать методи, що використовують ті ж таксаційні елементи, що й перша група, але обраховують відсоток біжучого приросту за один рік.

Баурова метода.

Баур припускає, як і в попередніх методах, що протягом певного періоду приріст на таксаційних елементах не міняє своєї величини й тому в останній рік доби буде виносити $\frac{M-m}{t}$; початкова вартість останнього року буде:

$$M-\frac{M-m}{t};$$

до цієї величини Баур і застосовує відносний приріст $\frac{M-m}{t}$. Його пропорція має вираз:

$$\frac{M-m}{t}:\left(M-\frac{M-m}{t}\right)=p:100, \quad \text{відкіля:} \quad p=\frac{M-m}{M(t-1)+m}\cdot 100 \qquad (43)$$

Взір цей не виправдує завдання авторового: фактично він бере приріст не останнього року, а пересічний за добу t років і цілком довільно ставить його у відношення до початкової величини елементу за останній рік.

На думку проф. Леваковича, Баур не рахується із ходом росту елементу протягом періоду; між тим, як для найдокладніших взорів 1 ґрупи та обставина не мала значіння, тут же залишає великий вплив на докладність. По його перевірці виявилось, що за 10-літніх періодів, та ще в молодих древостанах взір цілком непридатний (помилки — 26% і —27%).

До другої катеґорії належать, між іншим, дві цілком подібні до себе методи Шнайдерова та Брайманова, тому останню будемо розглядати разом із першою.

Метода Шнайдерова.

Як відомо, Шнайдерів взір для відсотка приросту на площі виводиться двома способами. В першім випадку кладеться в основу Брайманів взір для абсолютного розміру біжучого приросту на обсязі

$$z=V\frac{2\Delta d}{d} \qquad (44)$$

Із пропорції

$$\frac{V 2\Delta d}{d}:V=p:100$$

одержується в першу чергу Брайманів відсоток

$$p=\frac{100\, V 2\Delta d}{V\cdot d}=\frac{200\,\Delta d}{d}, \qquad (45)$$

де Δd — пересічний приріст проміру за останні 5—10 років, а d — сучасний промір при погрудді. Коли пересічний річний приріст за n років на однім кінці проміру визначити через $\frac{1}{n}$, то $\Delta d=\frac{2}{n}$. Підставивши цей вираз у взір (45), одержимо:

$$p=\frac{400}{dn}; \qquad (46)$$

це і буде взір Шнайдерів.

Необхідно зауважити, що взір Брайманів (44) виведено із значними недокладностями, які мусять відбиватися, очевидно, й на придатності останнього взору (46).

Другий спосіб обчислення Шнайдерового взору полягає в наступнім: обсяг стоячого дерева нині $V=\frac{\pi}{4}d^2hf$, а перед роком $V_1=\frac{\pi}{4}d_1^2h_1f_1$. Відсіля приріст за один рік виноситиме

$$V-V_1=\frac{\pi}{4}(d^2hf-d_1^2h_1f_1),$$

а відносний відсоток цього приросту

$$p=\frac{V-V_1}{V}100=\frac{\frac{\pi}{4}(d^2hf-d_1^2h_1f_1)100}{\frac{\pi}{4}d^2hf}$$

Далі припускається, що за один рік виглядове число не зміниться, а висота на старім дереві збільшиться на мізерну величину, яку без великої помилки можна знехтувати, тоді $hf=h_1f_1$; після скорочення, вираз попередній виглядатиме

$$p=\frac{(d^2-d_1^2)\cdot 100}{d^2} \qquad (47)$$

Таким чином, прийшли до висновку, що відсоток приросту на обсязі заступається відсотком приросту на площі.

Коли ширину останнього річного політка визначимо через $\frac{1}{n}$, де n показує число політків на певній одиниці міри, то попередній промір дерева можна висловити через $d-\frac{2}{n}$; підставивши це означення у взір (47), одержимо:

$$p=\frac{\left[d^2-\left(d-\frac{2}{n}\right)^2\right]100}{d^2}=\frac{400}{dn}-\frac{400}{d^2n^2}$$

Після занедбання порівнюючи невеликої величини $\frac{400}{d^2n^2}$, матимемо:

$$p=\frac{400}{nd}, \qquad (48)$$

себто той же Шнайдерів вираз.

Цьому способу встановлення Шнайдерового взору проф. Орлов*) закидає таку суперечність: з одного боку припускається незмінність h і f, з чим ще можна згодитись, коли річ іде про один рік і старий вік дерева; але ж з другого боку грубшина річного політка виводиться як пересічна із n літнього періоду, протягом

*) Проф. Орлов, ibid., стор. 381.

якого висота й виглядове число можуть змінитися й тим більше, чим довший він буде.

Опріч того, застосовання пересічного приросту лише до початкової величини обсягу $\left(\frac{V-v}{v}\cdot 100\right)$ не є з математичного боку справне. В цім випадку необхідно спиратися на взір $p=\frac{200}{n}\,\frac{M-m}{M+m}$, який в пристосованні до приросту на площі матиме вигляд

$$p=\frac{200}{n}\,\frac{d^2-d_1^{\,2}}{d^2+d_1^{\,2}}$$

Для випадку, коли $\frac{d}{d_1}=\frac{h}{h_1}$,

$$\text{маємо взір } p=\frac{600}{nd} \tag{49}$$

$$\text{а коли } \frac{d^2}{d_1^{\,2}}=\frac{h}{h_1},\quad \text{,,}\quad \text{,,}\quad p=\frac{800}{nd} \tag{50}$$

Простота Шнайдерового взору викликала бажання сочинник його (в численнику) пристосувати до ріжних умов зросту дерева, як то доречно зробив Преслер із ступенями проміру свого взору. Пропонувалось для молодих пануючих дерев брати сочинник найвищий — 700, для загнічених — 400, для підспіваючих злучених — 600, для вільно-стоячих — 500, для старих дерев в злученім деревостані — 450 і для одиноких — 400. Але проф. Богословський*) після перевірки на значнім числі дерев довів, що в дійсності такої закономірности не спостерігається. Шюпфер**) свідчить, що після аналізи 250 сосен і ялин виявилось, що сочинник коливається в межах від 160 до 646. Таке ж коливання помічається навіть на тім же самім дереві.

Ці обставини катеґорично показали, що вживання Шнайдерового взору для обраховання відсотка приросту на площі було б недоцільним.

До намагань поліпшити Шнайдерову методу треба віднести й взір Шумахерів***), який має вигляд

$$p=\frac{400}{nd\sqrt{f}} \tag{51}$$

Виглядове число обраховується тут із стосунків $f=\delta^2 : d_{1.3}^{\,2}$ себто із відношення квадратів промірів на середині висоти дерева й при погрудді. Після перевірки взір цей давав ліпші наслідки,

*) Труды лесн. опыт. дела, LX вып. 1916 (за проф. Орловим).
**) Проф. Орлов, ibid., стор. 384, 385 і 386.
***) ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,

ніж Шнайдерів, але розповсюдження не одержав. Причина тут та ж, що й для методи Шіффелевої — неможливість переведення на практиці. Такими перепонами для Шумахерового взору служать. 1) необхідність вимірювати промір на середині висоти стоячого дерева, та 2) мати діло із логаритмічними таблицями.

Кюнкеле*) спостеріг, що головна помилка, яку дає Шнайдерів взір, полягає в пропозиції обраховувати число політків на 1 сант. чи ввагалі на одиниці певної міри, коли часто трапляється несполучення цілого числа політків з цією одиницею. У первіснім взорі своїм Шнайдер вимагає лише обраховувати пересічну ширину політка, необмежуючи цю чинність певною мірою, ні числом років. Тому Кюнкеле і пропонує необмежувати дослідувача певним періодом.

Опріч того, він проєктує до взору додавати ще відсоток приросту на висоті й визначати його так:

$$p=\frac{400\,\Delta d}{d}+\frac{100\,\Delta h}{h} \tag{52}$$

Про докладність цього взору в такім вигляді автор не подає жадних вказівок.

Шнайдерів і Брайманів взори вважаються лише як приблизні й тому проф. Орлов радить не звертати уваги на абсолютні значіння відсотка приросту, за ними обрахованого, а вживати за всіх обставин сочинника 400 і лише порівнювати між собою одержані відсотки, себто надавати останнім відносне значіння.

Були спроби модифікувати ті взори. Кальк**) обчисляв пересічну грубщину однорічного політку за певну добу на основі простого відсоткування, а Борґреве, Ріке та Мюллер за Преслеровим взором. Метою для останніх було встановити зв'язок Шнайдерового взору із Преслеровим, а не перевіряти придатність його.

Візьмемо приклад: припустимо, що $d=30$ сант., а $n=5$, тоді

$$p=\frac{400}{dn}=\frac{400}{30\cdot 5}=\frac{8}{3}=2{,}6667\,\%.$$

Преслерів взір дасть такі наслідки:

$$p=\frac{200}{5}\,\frac{30^2-28^2}{30^2+28^2}=\frac{40\cdot 116}{1684}=2{,}6914\%.$$

Як бачимо, у цім випадку одержуються досить близькі наслідки. Ця обставина завдячує зміні принципу Шнайдерового: тут обчисляється відсоток пересічного приросту за 5 років, а не біжучого за 1 рік, як вимагають умови будування взору.

Шнайдерів взір приваблює до себе простотою будови і вживання. Тому лише цим можна пояснити значне зацікавлення в останні

*) Проф. Орлов. Ibid, стор. 384.
**) Проф. Левакович, ibid., стор. 237.

роки цією методою. Тепер спинимося на поліпшеннях метод, запропонованих проф. Турським і Д-ром Валлі.

Методи проф. Турського.

Автор висловлює*) думку, що для прикладної таксації однаково потрібні як складні й докладні методи обчислення відсотка приросту, так і прості та скорочені — з меншою докладністю.

До останніх способів, дійсно, звертаються досить часто, зокрема за ріжного роду розвідочних дослідів: у великих лісових дачах, в деревостанах, потерпівших від ріжних пошкоджень, для перевірки впливу ріжних заходів у лісах тощо. В цих випадках велике число певних величин меншої докладности буде вжиточніше, ніж мале число досить докладних. Пересічні дані з перших величин бувають надійніші. Цим пояснюється появлення метод Шнайдерової, Брайманової та інших, які не потрібують попереднього обчислення обсягів. Ці методи дають можливість швидко добувати відсоток біжучого приросту, хоч і з помилками, але досить близько підходячий до такого ступеня докладности, коли одержується цілковите вирішення висунутих практикою питань.

Всім цим методам властиве припущення в незмінності виглядових чисел протягом короткого періоду, та всі вони у відповідних взорах мають сталі сочинники, що залежать від умов розвитку дерева. Деякі з них виводяться емпірично — за браком об'єктивних дотримок для встановлення заведених до них величин. Автор гадає, що мусить існувати математичний вираз для закону розвитку стовбура, який (вираз) усунув би довільність у виборі тих чи інших сочинників.

На його думку найближче характеризували б той закон промір і висота, поставлені в певні стосунки. Простежимо хід його викладу.

Визначимо через d сучасний промір, виміряний або при погрудді, або на $\frac{1}{n}$ частині висоти стовбура, в залежності від того, якого відмінку виглядових чисел вживатимемо — старих чи дійсних; через d_1 — промір на тій же висоті того ж дерева перед t роками. Через h і h_1 назвемо висоти сучасну й попередню.

Проф. Турський є переконаний, що згаданий стосунок висловився б найповніше рівнянням

$$\frac{h_1}{h}=\left(\frac{d_1}{d}\right)^k, \qquad (53)$$

де ступінь k уявляє величину, що характеризує залежність між зростом дерева у висоту й грубшину. Обчислити цю величину можна з рівняння $\log h_1-\log h=k(\log d_1-\log d)$.

*) Проф. Турский, ibid., стор. 43 і др.

Досліди над цим виразом показали, що k міняється з віком і може мати теоретично всі значіння від $-\infty$ до $+\infty$; фактично ж межі того коливання незначні.

Проаналізуємо рівняння (53).

Коли $k=0$, то $\frac{h_1}{h}=\left(\frac{d_1}{d}\right)^0=1$ і $h=h_1$

Цей стосунок можливий лише на дереві, що припинило свій ріст, себто — на старшім, або загніченім.

Коли $k=1$, то
$$\frac{h_1}{h}=\frac{d_1}{d} \tag{54}$$

Таке відношення спостерігається за так званого нормального зросту дерева, коли форма його не міняється й залишається незмінним виглядове число.

За швидчого росту дерева в висоту, ніж в грубшину, розмір k збільшується й доходить до 5 і трохи більше; це трапляється в дуже злучених деревостанах, або на деревах 4-ої кляси по Крафту. За малого приросту стосунок $\frac{d}{d_1}$ наближується до 1, а щоби й друга половина рівняння набула того ж значіння, при умові помітного ще зростання на висоті, треба її піднести на дуже високий ступінь.

Коли $k<0$; припустимо, що $k=-\xi$, тоді $\left(\frac{d_1}{d}\right)^{-\xi}=\left(\frac{d}{d_1}\right)^{\xi}$, але $d>d_1$, тому
$$\left(\frac{d}{d_1}\right)^{\xi}>1, \text{ а значить і } \frac{h_1}{h}>1, \text{ або } h_1>h,$$
себто попередня висота більша за сучасну, — це можливо тоді, коли дерево за суховерхости губить верхів'я.

Отже, думає Турський, величина k дійсно може стати вказівником характеру розвитку стовбура.

Із рівняння (53) він виводить обидва скорочених взори — Преслерів і Шнайдерів за умови, що протягом t-літнього періоду старе виглядове число не міняється і що проміри d і d_1 виміряно при погрудді.

а) Преслерів взір. Коли через V і v визначити обсяги кінцевий і початковий за періоду t, то
$$p=\frac{200}{t}\frac{V-v}{V+v}$$

Коли $V=GHF$ і $v=ghf$, то попередній взір висловиться
$$p=\frac{200}{t}\frac{GHF-ghf}{GHF+ghf}; \text{ або } p=\frac{200}{t}\frac{GH-gh}{GH+gh}, \text{ коли } F=f.$$

Із рівняння (53) маємо:

$$h_1=\frac{hd_1^k}{d^k},\ \text{але}\ G=\frac{\pi}{4}d^2,\ \text{а}\ g=\frac{\pi}{4}d_1^2, H=h \text{ і } h=h_1$$

Підставимо останні величини в попередній взір

$$p=\frac{200}{t}\frac{\frac{\pi}{4}d^2h-\frac{\pi}{4}\frac{d_1^2hd_1^k}{d^k}}{\frac{\pi d^2h}{4}+\frac{\pi d_1^2hd_1^k}{4d^k}}=\frac{200}{t}\frac{d^{k+2}-d_1^{k+2}}{d^{k+2}+d_1^{k+2}} \tag{55}$$

Коли визначимо $k+2=s$, то попередній взір виглядатиме

$$p=\frac{200}{t}\frac{d^s-d_1^s}{d^s+d_1^s} \tag{56}$$

а це є Преслерів взір. Так само і другий взір його для відносного проміру матиме вигляд:

$$p=\frac{200}{t}\frac{r^s-(r-1)^s}{r^s+(r-1)^s} \tag{57}$$

Преслер виводив свої взори окремо для дерев: що припинили свій ріст, тоді $k=0$ і $s=2$; що ростуть нормально, тоді $k=1$ і $s=3$; та що ростуть надмірно, тоді $k=2$ і $s=4$. Як відомо, Преслер склав п'ять таблиць для значінь $s=2, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, 3, 3\frac{1}{3}$ $\left(\text{коли } k=\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \text{ і } 1\frac{1}{3}\right)$, на $s=4$ таблиці бракує.

Проф. Турський вважає свій сочинник k більш докладним критерієм, ніж виставлені Преслером — висота розміщення корони та успішність росту (хоч сам визнає вплив корони на k); необхідно лише обчислення обсягу, висоти й проміру переводити на обезвершенім стовбурі за елементами, виміряними на середині його.

б) **Взір Шнайдерів.** Поруч Преслерового взору має ще значне розповсюдження й взір Шнайдерів: $p=\frac{c}{dn}$, де c — визначає сталий сочинник, що коливається теоретично в залежності від успішности росту від 400 до 800, фактично ж від 160 до 580. Про несправності в добуванні цього взору була вже розмова.

Автор цей взір обраховує таким способом.

Пересічну грубшину одного політка за період в t років визначає через i, тоді кінцевий промір матиме вираз d_1+2ti; далі припускає, що виглядове число незмінюється протягом періоду, тоді матимемо:

$$V=\frac{\pi(d_1+2ti)^2hf}{4} \text{ і } v=\frac{\pi d_1^2h_1f}{4}, \text{ звідсіля}$$

$$V-v=\frac{\pi}{4}f[(d_1+2ti)^2h-d_1^2h_1]$$

Із взору (53) $h=\frac{h_1 d^k}{d_1^k}=\frac{h_1(d_1+2\,ti)^k}{d_1^k}$; підставивши це значіння для h у попередній вираз, матимемо:

$$V-v=\frac{\pi h_1 f}{4}\left[\frac{(d_1+2\,ti)^{k+2}h_1}{d_1^k}-d_1^2\right]$$

Розкладаємо двочлен $d_1+2\,ti$ по способу Ньютонового біному і обмежимося членами першого ступеня (i — є малий дріб, тому члени із вищими ступенями звичайно дрібні величини), тоді матимемо:

$$V-v=\frac{\pi h_1 f}{4}\,\frac{d_1^{k+2}+(k+2)2\,ti\,d_1^{k+1}-d_1^{k+2}}{d_1^k}=\frac{\pi h_1 f}{4}\,(k+2)\,2\,ti\,d_1$$

А знаючи, що $z=\frac{V-v}{t}$ одержимо: $z=\frac{\pi h_1 f}{4}\,(k+2)\,2\,i\,d_1$

За цими даними легко встановити і вартість виразу

$$\frac{V+v}{2}=\left[\frac{\pi h_1 f}{4}\,\frac{d_1^{k+2}+(k+2)2\,ti\,d_1^{k+1}+d_1^{k+2}}{d_1^k}\right]:2=\frac{\pi h_1 f}{4}[d_1^2+(k+2)tid_1]$$

Підставляючи добуті вирази в Преслерову пропорцію $z:\frac{V+v}{2}=$ $=p:100$ матимемо

$$\frac{\pi h_1 f}{4}\,(k+2)\,2\,i\,d_1:\frac{\pi h_1 f}{4}\,[d_1^2+(k+2)\,ti\,d_1]=p:100,$$

відкіля

$$p=\frac{200\,(k+2)\,i}{d_1+(k+2)\,ti}$$

Підставимо тут замісць i $\frac{1}{n}$;

$$p=\frac{200\,(k+2)}{n\,[d_1+(k+2)\,ti]}=\frac{200\,(k+2)}{n\vartheta}, \tag{58}$$

де $\vartheta=d_1+(k+2)\,ti$.

Останній вираз (58) — подібний до Шнайдерового взору, але хоч трохи і узагальнений, та проте дає Преслерів відсоток.

Коли ж у згаданій вище пропорції z застосувати до початкового обсягу v, то одержиться вираз

$$p_1=\frac{200\,(k+2)}{nd}$$

Шнайдерового взору, де розмір сталого сочинника встановлюється величиною k і виключає сваві́льство у виборі численника.

Вираз $d_1+(k+2)ti$ в знаменнику взору (58), коли його трохи спростити, а саме: $d_1+(k+2)ti=d_1+2ti+kti=d+kti$ — уявляє збільшений промір у кінці періоду; коли дерево припинило ріст ($k=0$), то вираз обернеться у d, себто: в кінцевий промір дерева.

За нормального росту $k=1$, той вираз дасть $d+ti$, себто збільшений промір на половину його за період; підчас занадто швидкого росту на висоті додаток уявлятиме цілий приріст проміру $2ti$ за період. Коли досліджуються дерева в старім віці, то, каже проф. Турський, в більшості випадків $d+kti$ буде уявляти величину пересічну між промірами дерева в корі й без неї.

Далі він пропонує брати $t=n$, себто встановлювати відсоток приросту за таке число років, скільки міститься їх в одиниці міри, або інакше кажучи, за одиницю виміру брати грубшину t останніх політків; тоді $ti=1$ і $d+kti=dk$, де промір висловлено грубшиною t останніх політків.

Вираз (58) прийме вигляд

$$p=\frac{200\,(k+2)}{t\,(d+k)};\tag{59}$$

за $k=0$, численник тут обернеться в 400; за $k=1$, буде виносити 600; за $k=2$ — 800 і т. д.

Таке швидке зростання численника свідчить, що k мусить мати дуже вузькі межі коливання й тому непотрібно великої докладности в його визначенні.

Як відомо, Шнайдерів взір дає применшені наслідки в порівнянні з взорами як складних відсотків, так і з Преслеровим, тому, гадає проф. Турський, зменшення знаменника у виразі (58) на величину $(k+2)ti$ і заміна проміру d_1 на d, себто надання йому вигляду

$$p=\frac{200\,(k+2)}{nd},\tag{60}$$

збільшить трохи p й наблизить його величину до цілком справної.

В залежності від заведених змін у Шнайдеровім взорі, нині й взір Борґреве для відсотка приросту на деревостанах набуде вигляду

$$p=200\,(k+2)\frac{\Sigma\frac{d}{n}}{\Sigma d^2}\tag{61}$$

в) В з і р Б р а й м а н і в і з в я' з о к м і ж в і д с о т к а м и п р и р о с т у н а р і ж н и х т а к с а ц і й н и х е л е м е н т а х. Брайман намагався зв'язати відсотки приросту на обсязі з відсотками на площі й висоті, які надаються легше обчислити. В основу він клав загально відомий математичний закон, що коли якась мінлива величина x змінюється за законом відсотків, а сама є добуток других мінливих величин, себто

$$x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\ldots$$

причім і ці величини α, β, γ, δ... і т. д. також змінюються за тими ж законами, то відсоток величини x складатиметься із алгебраїчної суми відсотків мінливих величин α, β, γ, δ і т. д. за умовою, що відсотки ці будуть невеликі.

Визначимо відсоток величини x через p_x, величини α — p_α і т. д. Коли за період t величина x обертається у X, α в A, β в B, γ в G і т. д. то $X = A.B.G.D$.

Але $X = x\left(1+\frac{p_x}{100}\right)^t$; $A = \left(1+\frac{p_\alpha}{100}\right)^t$; $B = \beta\left(1+\frac{p_\beta}{100}\right)^t$ і т. д,

тоді

$$x\left(1+\frac{p_x}{100}\right)^t = \alpha . \beta . \gamma . \delta \ldots \left(1+\frac{p_\alpha}{100}\right)^t\left(1+\frac{p_\beta}{100}\right)\left(1+\frac{p_\gamma}{100}\right)^t\left(\ldots\right),$$

$$\text{або}\quad \left(1+\frac{p_x}{100}\right) = \left(1+\frac{p_\alpha}{100}\right)\left(1+\frac{p_\beta}{100}\right)\left(1+\frac{p_\gamma}{100}\right)\left(1+\frac{p_\delta}{100}\right)\ldots$$

Перемножимо двочлени в другій частині рівняння між собою,

$$1+\frac{p_x}{100} = \left(1+\frac{p_\alpha}{100}+\frac{p_\beta}{100}+\frac{p_\alpha p_\beta}{10000}\right)\left(1+\frac{p_\gamma}{100}+\frac{p_\delta}{100}+\frac{p_\gamma p_\delta}{10000}\right).$$

Відкидаючи далі добутки відсотків, як цілком дрібні величини, будемо продовжувати множення:

$$1+\frac{p_x}{100} = 1+\frac{p_\alpha}{100}+\frac{p_\beta}{100}+\frac{p_\gamma}{100}+\frac{p_\delta}{100},$$

відкіля

$$p_x = p_\alpha + p_\beta + p_\gamma + p_\delta \qquad (62)$$

Подібний наслідок одержується й для простих відсотків. Для Преслерового відсотка приросту цього правила вживати не можна.

Взір (62) надається пристосовувати до таксаційних елементів дерева.

Аналогічно матимемо: $p_v = p_g + p_h + p_f$, де v, g, h, і f — відомі величини обсягу, площі перекрою, висоти й виглядового числа. Це рівняння дає досить справні наслідки за умовою, що відсотків вживають дрібних — не більш 10-ти на 100.

Відомо, що $\frac{G}{g} = \frac{D^2}{d^2}$, тому $\frac{g\left(1+\frac{p_g}{100}\right)^t}{g} = \frac{d^2\left(1+\frac{p_d}{100}\right)^{2t}}{d^2}$,

відкіля

$$\left(1+\frac{p_g}{100}\right)^t = \left(1+\frac{p_d}{100}\right)^{2t}.$$

Розкладаючи обидві частини рівняння по способу Ньютонового біному і відкидаючи другий і вищі ступені величини $\frac{p}{100}$, матимемо:

$$p_g=2p_d$$

Звідсіль $\qquad p_v=2p_d+p_h+p_f.$

Але останній член підчас обрахунків нехтується з припущення, що протягом невеликого періоду виглядове число не міняється, тоді

$$p_v=2p_d+p_h \tag{63}$$

До цього взору, як відомо, приходить Брайман, що замісць відсотків вживає абсолютних річних нарощень Δd і Δh і відносить їх до початкових величин d і h.

Взір Брайманів має вигляд $\frac{z}{V}=2\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta h}{h}$

Далі Брайман виводить ще два взори: один за припущення, що $\Delta h=0$, а другий — за нормального росту, коли $\frac{\Delta d}{d}=\frac{\Delta h}{h}$; в першім випадку він одержує взір $p=\frac{200\Delta d}{d}$, а в другім $p=\frac{300\Delta d}{d}$.

Проф. Турський узагальнює ці взори своїм виразом

$$p=\frac{c^1\Delta d}{d}, \tag{64}$$

де c^1 є величина, залежна від умов росту дерева. Розмір цієї величини раніш встановлювався емпірично в передбаченні, що він може коливатися між 160 і 650. Але й тут, по думці проф. Турського, надається довільність замінити певною закономірністю.

Він гадає, що взір (64) є не що інше, як взір Шнайдерів, бо $\Delta d=2i$ й тоді

$$p=\frac{2c^1 i}{d}=\frac{ci}{d}=\frac{c}{nd},\ \text{де}\ 2c^1=c.$$

Відсіля виходить, що сталий сочинник у Шнайдера буде вдвічі більший за Брайманів.

Взір (64) можна замінити наступним: $p^1{}_v=cp_1d$, де $c=\frac{c^1}{100}$, бо

$$\frac{c^1\Delta d}{d}=\frac{c^1}{100}\cdot\frac{\Delta d}{d}\cdot 100=\frac{c^1}{100}Pd.$$

(під p^1 тут розуміють прості відсотки).

Використовуючи рівняння (53), можна добути вираз для c. Згідно з попереднім

$$h=h_1\left(1+\frac{p_h}{100}\right)^t;\ d=d_1\left(1+\frac{p_d}{100}\right)^t,$$

тому згаданий вираз (53) після заступлення там h і d новими їхніми значіннями виглядатиме: $\frac{h_1}{h_1\left(1+\frac{p_h}{100}\right)^t}=\frac{d_1^k}{d_1^k\left(1+\frac{p_d}{100}\right)^{tk}}$, відкіля

$$\left(1+\frac{p_h}{100}\right)^t=\left(1+\frac{p_d}{100}\right)^{tk}, \text{ або } 1+\frac{p_h}{100}=\left(1+\frac{p_d}{100}\right)^k.$$

Розкладаючи обидві половини рівняння за біномом й обмежуючись першими ступенями малої величини $\frac{p}{100}$ матимемо: $1+t\frac{p_h}{100}=$ $=1+kt\frac{p_d}{100}$, відкіля

$$p_h=kp_d \tag{65}$$

Отже ми одержали просту залежність між відсотками приросту на висоті і промірі.

Раніш мали (63) $p_v=2p_d+p_h$; підставляючи сюди замісць p_h його попередній вираз (65), одержимо:

$$p_v=2p_d+kp_d=(k+2)\,p_d \tag{66}$$

Раніш мали $p'_v=cp'_d$, тому тепер $c=k+2$.

Таким чином одержали дуже простий зв'язок між відсотками на обсязі й на промірі.

За невисоких відсотків p взори (63), (65) і (66) однаково справні як для простих, так і складних, а також і Преслерових відсотків.

Для останніх матимемо: $p_d=\frac{200}{t}\cdot\frac{d-d_1}{d+d_1}$,

Підставляючи цей вираз у взір (66) одержимо:

$$p_v=\frac{200\,(k+2)}{t}\,\frac{d-d_1}{d+d_1} \tag{67}$$

Взір цей визначається простотою і зручністю.

Як бачили раніш, принципи для виводу взорів Брайманового й Шнайдерового однакові, тому проф. Турський і не спиняється тут на аналізі методи Шнайдерової.

г) В і д н о с н и й в і д с о т о к п р и р о с т у. У данім випадку проф. Турський торкається лише скорочених взорів для обрахування відсотка приросту на обсязі, які вживають тільки двох промірів. Як і в попередніх обрахунках, передбачається незмінність виглядового числа протягом короткого періоду; наслідки обчислень будуть докладніші, бо в рядах заховуватимуться члени других ступенів.

Найпростіші взори відносного відсотка подали проф. Фан-дер-

Фліт та Бурьячек*), про які вже була мова раніш. В основу тих взорів покладено розуміння нормального зросту. Бурьячків взір є подібний до Преслерового, але незручний для безпосередніх обраховань, бо потрібує логаритмів, тому Бур'ячек і склав допомічні таблиці.

Між тим, твердить проф. Турський, коли вжити розкладу двочленів у ряд, то відпаде потреба в будь-яких таблицях; в цім випадку також є можливість встановити сочинник і вільно пристосувати його до характеру росту. Раніш в уступі про відносний відсоток приросту ми мали вираз (38):

$$p=\frac{100}{t}\, l\, \frac{V}{v}$$

Попереднє рівняння (53) давало $\frac{V}{v}=\frac{d^{k+2}}{d_1^{k+2}}$, тому, підставивши його в попередній вираз, матимемо: $p=\frac{100}{t}\, l\, \frac{d^{k+2}}{d_1^{k+1}}=\frac{100}{t}\, l\, \frac{d^s}{d_1^s}$,

$$p=\frac{s\,.\,100}{t}\, l\, \frac{d}{d_1} \tag{68}$$

Вираз цей нагадує узагальнений взір Преслерів (54):

$$p=\frac{200}{t}\,\frac{d^s-d_1^s}{d^s+d_1^s}, \text{ де } s=k+2.$$

Подібний взір можна скласти й для відносного проміру — r, коли визначити $d-d_1=\Delta d_1$, а $\frac{d}{\Delta d_1}=r$, тоді $d=r\Delta d_1$ і $d_1=\Delta d_1(r-1)$, відкіля (68)

$$p=\frac{100\,.\,s}{t}\cdot l\,\frac{\Delta\, d_1 r}{\Delta\, d_1(r-1)}=\frac{100\, s}{t}\, l\, \frac{r}{r-1},$$

а далі

$$p=\frac{100\cdot s}{t}\,\frac{\log r-\log(r-1)}{\log e} \tag{69}$$

Із (68) $p=\frac{100\,.\,s}{t}\cdot\frac{\log d-\log d_1}{\log e}$ (70)

За поміччю всіх цих взорів (68), (69) і (70) можна було б обрахувати помічні таблиці й тим полегшити обчислення за згаданими взорами, досить таки ще складними.

Проф. Турський пропонує власний взір, який не потрібуватиме таблиць.

---

*) Проф. Фан-дер-Флит — Труды по опыт. лесному делу, 1916, вып. 60-й. Бурьячек — Пособие для специалистов лесного дела. Одесса, р. 1926.

Раніш мали:

$$p=\frac{100}{t}\,l\,\frac{d^s}{d_1^s}$$

Останній множник надається розкласти в ряд:

$$\frac{d^s}{d_1^s}=\frac{d^s+d_1^s-d_1^s}{d_1^s}=1+\frac{d^s-d_1^s}{d_1^s},$$

а також

$$\frac{d}{d_1}=1+\frac{d-d_1}{d_1}$$

Відсіля

$$l\,\frac{d^s}{d_1^s}=l\left(1+\frac{d^s-d_1^s}{d_1^s}\right),\ \text{а}\ l\,\frac{d}{d_1}=l\left(1+\frac{d-d_1}{d_1}\right)$$

Отже, розкладаючи логаритми двочленів в ряди одержимо:

$$p=\frac{100}{t}\left[\frac{d^s-d_1^s}{d_1^s}-\frac{1}{2}\left(\frac{d^s-d_1^s}{d_1^s}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{d^s-d_1^s}{d_1^s}\right)^3-\ldots\right] \qquad (71)$$

або

$$p=\frac{100\,.\,s}{t}\left[\frac{d-d_1}{d_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{d-d_1}{d_1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{d-d_1}{d_1}\right)^3-\ldots.\right] \qquad (72)$$

Винісши в останнім виразі $\frac{d-d_1}{d_1}$ за дужки, матимемо:

$$p=\frac{100\,.\,s}{t}\,\frac{d-d_1}{d_1}\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{d-d_1}{d_1}+\frac{1}{3}\left(\frac{d-d_1}{d_1}\right)^2-\ldots.\right] \qquad (73)$$

Таким же способом можна спростити й вираз (71), а саме:

$$p=\frac{100\,.\,s}{t}\,\frac{d^s-d_1^s}{d_1^s}\left[1-\frac{1}{2}\,\frac{d^s-d_1^s}{d_1^s}+\frac{1}{3}\left(\frac{d^s-d_1^s}{d_1^s}\right)^2-\ldots.\right] \qquad (74)$$

Попередній взір (73) можна писати й так:

$$p_v=(k+2)\,p^1{}_d\left[1-\frac{1}{2}\,\frac{d-d_1}{d_1}+\frac{1}{3}\left(\frac{d-d_1}{d_1}\right)^2-\ldots.\right], \qquad (75)$$

де $p^1{}_d$ простий відсоток приросту на промірі. Обмежившись першим членом цього взору, матимемо

$$p_v=(k+2)p^1d,$$

себто, як і раніш, одержимо простий відсоток. Коли ж спинитись на другім ступені у виразі (73), то одержимо:

$$p_v=\frac{100\,.\,s}{t}\cdot\frac{d-d_1}{d_1}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{d-d_1}{d_1}\right)=\frac{100\,.\,s}{t}\,\frac{(d-d_1)(2d_1-d)}{2d_1^2},$$

або

$$p_v=(k+2)p^1{}_d\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{d-d_1}{d_1}\right) \qquad (76)$$

Проф. Турський визнає цей взір за простий і легкий до затямлення, з чим згодитись, звичайно, неможна, але ж він має ту перевагу перед іншими, що передбачає зміни в зрості дерева на промірі. Взір (73) потверджує, що стосунок $p_v=(k+2)p^1{}_d$, одержаний раніш, дійсний і для відносних відсотків. Останній взір, каже автор, збудовано ні на простих, ні на складних відсотках; він є виразом у відсотках відносної величини.

д) Обчислення величини k. У всіх до цього часу згаданих взорах в основі лежить припущення незмінности виглядового числа протягом періоду дослідження; всі вимагають встановлення двох промірів (в Шнайдеровім взорі величину n можна прирівняти до ріжниці промірів: $n=\frac{2t}{d-d_1}$, бо $i=\frac{1}{n}=\frac{d-d_1}{2t}$, всі опріч Преслерового, використовують лише перші ступені розкладених в ряди двохчленів. У цім відношенні Преслерів взір, де ніщо не відкидається, теоретично мусить давати найдокладніші наслідки, але обрахування за ним без таблиць всеж таки марудне, а за необхідности докладного встановлення k — неможливе.

Нарешті, у всі взори, запропоновані проф. Турським, увіходить або ступенем, або множником, стала величина $s=k+2$; тому обійтись без обрахування k неможливо, хоч у цім відношенні й не вимагається великої докладности.

Правдоподібно було б припустити, що величина k між цілими числами змінюється за законом аритметичної проґресії й прикласти до неї правило пропорційного поділу. Для цієї мети обраховуємо $\frac{h_1}{h}$ і $\frac{d_1}{d}$ із більшою докладністю — до 0.001, бо ці стосунки наближаються до одиниці. Припустимо, що числові вирази $\frac{h_1}{h}=\lambda$, $\frac{d_1}{d}=\mu$; коли $\frac{h_1}{h}>\frac{d_1}{d}$, то k знаходиться між 0 і 1; коли $\frac{h_1}{h}<\frac{d_1}{d}$, то $k>1$.

Нехай λ міститься між μ^ε і $\mu^{\varepsilon+1}$, де ε ціле число або 0; тоді можна припустити, що $k=\varepsilon+\frac{\mu^\varepsilon-\lambda}{\mu^\varepsilon-\mu^{\varepsilon+1}}$

Дріб $\frac{\mu^\varepsilon-\lambda}{\mu^\varepsilon-\mu^{\varepsilon+1}}$ необхідно округлити до $\frac{1}{4}$ або до $\frac{1}{5}$ і найдокладніше до $\frac{1}{10}$, більшої докладности не вимагається.

Приклад:

1) обслідувалася осика, проміри вимірювалися у віці 15, 20, 30 і 35 років:

$d_{15}=6{,}2$ с.; $d_{20}=7{,}4$ с.; $d_{30}=8{,}9$ с.; $d_{35}=10{,}8$ сант.
$h_{15}=925$ с.; $h_{20}=1175$ с.; $h_{30}=1375$ с.; $h_{35}=1575$ сант.

для періоду 30—35 років: $\frac{h_{30}}{h_{35}} = 0{,}873$; $\frac{d_{30}}{d_{35}} = 0{,}824$; $\varepsilon = 0$; $\left(\frac{d_{30}}{d_{35}}\right)^0 = 1$.

$$1 - 0{,}873 = 0{,}127; \quad 1 - {,}0824 = 0{,}176; \quad k = \frac{127}{176} \infty 0{,}7;$$

для періоду 20—30 років: $\frac{h_{20}}{h_{30}} = 0{,}855$; $\frac{d_{20}}{d_{30}} = 0{,}821$; $\varepsilon = 0$.

$$1 - 0{,}855 = 0{,}145; \quad 1 - 0{,}821 = 0{,}169; \quad k = \frac{145}{169} \cdot \infty 0{,}9;$$

для періоду 15—20 років: $\frac{h_{15}}{h_{20}} = 0{,}787$; $\frac{d_{15}}{d_{20}} = 0{,}838$; $\left(\frac{d_{15}}{d_{20}}\right)^2 = 0{,}702$; $\varepsilon = 1$.

$$0{,}838 - 0{,}787 = 0{,}051; \quad 0{,}838 - 0{,}702 = 0{,}136; \quad k = 1\frac{51}{136} \infty 1{,}4\ldots$$

2) На сосні 35 і 40 років виміряно:

$d_{40} = 13{,}6$ с.; $d_{35} = 12{,}8$ сант.; $h_{40} = 1725$ с.; $h_{35} = 1475$ сант.

$$\frac{h_{35}}{h_{40}} = 0{,}855; \quad \frac{d_{35}}{d_{40}} = 0{,}941; \quad \left(\frac{d_{35}}{d_{40}}\right)^2 = 0{,}885$$

$$\left(\frac{d_{35}}{d_{40}}\right)^3 = 0{,}833; \quad \left(\frac{d_{35}}{d_{40}}\right)^2 > \frac{h_{35}}{h_{40}} > \left(\frac{d_{35}}{d_{40}}\right)^4; \quad \varepsilon = 2.$$

$$0{,}885 - 0{,}855 = 0{,}030; \quad 0{,}885 - 0{,}833 = 0{,}052; \quad k = 2\frac{30}{52} \infty 2\frac{3}{5} \infty 2{,}6.$$

Для вправленого ока величина k відгадується легко.

4. Метода д-ра інж. Валлі.

Д-р Валлі в своїй змістовній праці*) виявив себе захисником Шнайдерової методи й рішуче став на боці поліпшення її. За його думкою сучасне лісовлаштування не може обійтися без встановлення відсотка біжучого приросту, рівно ж і щоденні потреби лісового господарства (догляди за деревостанами, поліпшення їх, рубанка маяків і багато інших вимог) примушують господаря часто контролювати хід набування деревна.

Як відомо із попереднього, Шнайдерів взір у своїм первіснім вигляді давав дуже недокладні висліди, які примусили проф. Орлова висловитись за його забуття.

Проф. Турський додав взорові значні поліпшення й підняв його значіння, але про цю працю Д-р Валлі не знав і підійшов до розрішення свого завдання з іншого боку. Він поставив собі такі питання: 1) за яких обставин в окремих випадках недокладність

*) D-r ing. Wally: Die Ermittelung des Massenzuwachsprocentes an stehenden Stämmen und Bästenden (Centralblatt für das gesamte Forstwesen 1925, Heft 9/10, Wien).

Шнайдерового взору терпиться, 2) яких практично-доцільних заходів слід вжити, щоб їх зменшити і 3) яким впливаючим на докладність обставинам надавалося до цього часу мало уваги.

Автор розправи використав багатий матеріял для числових випадків відносно ялини із видатної досвідної праці Ґутенберґової «Wachstum und Ertrag der Fichte»; — для сосни — Шваппахові досвідні таблиці, і такі ж таблиці Флюрі для бука.

I. Інж. Валлі твердить, що для математичного вислову відсотка приросту треба мати дві величини, які потім ставляться у стосунок одна до одної; то будуть — набутий за певний період приріст деревна й той обсяг стовбура чи дерева, на якім перший утворився, інакше кажучи, — приріст є ріжниця між двома величинами з яких одна означає початковий обсяг, а друга — кінцевий на протязі певного періоду. Останній в дальшому буде вважатися за один рік, себто, Д-р Валлі підготовляє ті умови росту дерева, яких вимагає Шнайдер.

У дальшому будемо додержуватися тих означень, яких вживали й раніше.

Початковий обсяг: $m = g\,h\,f = \frac{\pi}{4} d^2 h f.$

Для визначення кінцевого, що містить приріст однорічний на всіх таксаційних елементах, автор вживає означень: αd, βh і $\pm \gamma f$, тоді цей останній обсяг виглядатиме:

$$M = \frac{\pi (d + \alpha d)^2 (h + \beta h)(f \pm \gamma f)}{4}, \text{ або}$$

$$M = \frac{\pi d^2 h f}{4} (1 + \alpha)^2 (1 + \beta)(1 \pm \gamma)$$

У цих визначеннях приріст на виглядовім числі береться з обома знаками, бо, напр., в старім віці дерева він буде знижуватися. Далі добуті величини ставляться в стосунок у вигляді звичайної пропорції $p_m : 100 = (M - m) : m$, відкіля

$$p_m = \frac{100 (M - m)}{m}$$

Раніш наводився погляд Преслерів, що застосовання приросту до початкової величини обсягу не є справне, як даюче наслідком прибільшені в порівнянні зі взором складного відсотка величини. Того ж погляду додержується й проф. Турський, коли вважає основу Преслерового взору за правильну (застосовання приросту до пересічної аритметичної величини із початкового й кінцевого обсягів). Інж. Валлі цій основі не надає значіння, та очевидно й правдиво (хоч він про цю обставину цілком не згадує). Проф. Турський, захисник відносного відсотка приросту, допустився непослідовности, відкидаючи початкову величину таксаційного елементу й ставши мимоволі на основу методи складного відсотка, яку він вважає одночасно за безпідставну. Інж. Валлі йде більш послідовно в складанні пропорції відносного відсотка, хоч і за один лише рік.

Підставляючи в поданий вище вираз попередні значіння обсягів M і m, одержимо:

$$p_m = \frac{100\left[\frac{\pi d^2\, hf}{4}(1+\alpha)^2(1+\beta)(1\pm\gamma) - \frac{\pi d^2\, hf}{4}\right]}{\frac{\pi d^2\, hf}{4}}$$

Вираз відповідно скорочуємо й в многочлені розкриваємо дужки:

$$p_m = 100\ [(1+2\alpha+\alpha^2)(1+\beta\pm\gamma\pm\beta\gamma)-1]$$

і далі:

$$p_m = 100\ (1+2\alpha+\alpha^2+\beta+2\alpha\beta+\alpha^2\beta\pm\gamma\pm 2\alpha\gamma\pm\alpha^2\gamma\pm\beta\gamma\pm$$
$$\pm 2\,\alpha\beta\gamma\pm\alpha^2\beta\gamma-1)$$

Члени, де малі величини мають другий ступінь, або складають добуток другого й третього ступеня, визначимо через Δ, що виноситиме:

$$\Delta = \alpha^2+2\alpha\beta+\alpha^2\beta+2\alpha\gamma\pm\alpha^2\gamma\pm\beta\gamma\pm 2\alpha\beta\gamma\pm\alpha^2\beta\gamma.$$

Тоді вираз для відсотка матиме вигляд:

$$p_m = 100\ (2\alpha+\beta\pm\gamma+\Delta).$$

Автор вважає, що виразом Δ, що складається із надзвичайно малих величин, можна без великої помилки знехтувати, тоді

$$p_m = 100\ (2\alpha+\beta\pm\gamma). \qquad (77)$$

Заховуючи старі визначення, матимемо: пересічна грубизна одного політка i, число політків на 1 сант. — n; в такім випадку:

$$\alpha d = 2i,\ \alpha = \frac{2i}{d} = \frac{2}{dn}$$

Подібно визначаються: приріст однорічний на висоті —zh і на виглядовім числі $\pm zf$,

тоді $zh = \beta h$, відкіля $\quad \beta = \frac{zh}{h}$

$\pm zf = \gamma f \qquad$ „ $\qquad \pm f = \frac{zf}{f}$.

Підставивши ці дані у вираз (77), одержимо:

$$p_m = 100\left[\frac{4}{dn}+\frac{zh}{h}\pm\frac{zf}{f}\right] \qquad (78)$$

Взір цей ставиться, як вихідний пункт для дальших дослідів.

В дальшому автор уважно спиняється на способі добування числа політків на 1 сант. і на тих обставинах, що впливають на ширину їх. Як відомо, нарощення деревна на дереві та на деревостанах не відбувається рівномірно. Особливо спричиняються до порушення рівномірности догляди за деревостанами—обрідки, просвітлення, побіжні рубанки та ріжні шкоди — від вітру, снігу, комах, пожеж тощо. Виставлені на більший простір дерева з другого й третього року широко використовують світло й простір і тому збільшують приріст; ця обставина тягнеться до нового злучення дерев, після якого приріст поступово зменшується. Таксаторові, що має добути матеріяли для обчислення приросту необхідно встановити в кожнім окремім випадку, чи перебувають ще дерева під впливом того чи іншого господарського чинника та як довго той вплив продовжиться. Зокрема ці відомості важливі, коли потрібно встановити відсоток приросту на майбутнє. Приріст на висоті обчисляється за поміччю висотоміра, а виглядове число (старе, звичайно) за таблицями цих чисел, коли щонебудь заважає встановленню їх на місці. Добування сверддиком стовпчиків мусить робитися з обох кінців проміру.

II. Після розкриття дужок у взорі (78) одержимо:

$$p_m = \frac{400}{nd} + \frac{100\,zh}{h} + \frac{100\,zf}{f} \qquad (79)$$

Тут перший член взору уявляє відсоток приросту на площі (власне на промірі), другий на висоті й третій на виглядовім числі.

Із лісової таксації та із попереднього (т. II, вип. 3, ст. 85-86) відоме розуміння сумування приростів; для даного випадку останнє виглядатиме:

$$p_m = p_g + p_h + p_f.$$

Для цілого деревостану, де $M = GHF$, воно писатиметься: $p_m = p_G + p_H \pm p_F$. За останнім виразом легко було б обчислити відсоток приросту на запасі деревостану, колиб відомі були відсотки приросту на площі, висоті та виглядовім числі.

До вирішення цього питання автор і переходить. Коли у взорі (79) припустити, що zh і $\pm zf$ рівняються 0, то він придбає вигляд, $p_m = \frac{400}{nd}$, що уявляє собою Шнайдерів взір. Умова про дорівняння zh і $\pm zf$ нулю може статися за двох обставин:

а) або кожний із відсотків приросту на висоті й на виглядовім числі рівняється 0, або

б) обидва ці члени абсолютно рівні між собою, але мають протилежні знаки.

Перший випадок може ще трапитись, але другий — ніколи. Власне, в останнім випадку, в деревостанів дуже старих, що майже припинили свій зріст на висоті та мізерно наростають на площі, обидва відсотки будуть наближатися до 0 й мало абсолютно один від одного ріжнитимуться.

Шнайдерів взір приваблює автора своєю простотою. Залишається розв'язати питання двох складників при тім взорі, щоб добитися способу поліпшення взору. Сума тих складників має особливе математичне значіння. Добуток hf — виглядова висота, як показали досліди, зміняється дуже повільно й ця зміна буває то додатна, то від'ємна. Абсолютний приріст на виглядовій висоті виноситиме:

$$zhf = (h + zh)\ (f \pm zf) - hf, \text{ або } zhf = fzh \pm hzf \pm zhzf.$$

Останнім членом можна знехтувати, тоді відсоток цих приростів виглядатиме: $p_{hf} = \dfrac{100\ (fzh \pm hzf)}{hf}$, або $p_{hf} = \dfrac{100\ zh}{h} \pm \dfrac{100\ zf}{f}$,

звідкіля

$$p_{hf} = p_h \pm p_f,$$

себто: сума відсотків приросту на висоті та на виглядовім числі — не є щось інше, як відсоток на виглядовій висоті. Отже з цього автор робить висновок, що відсоток приросту на обсязі буде рівнятися відсоткові приросту (Шнайдеровому взору) на площі, коли відсоток приросту на виглядовій висоті рівняється 0.

Досліди показали, що цього ніколи не буває; навпаки, відсоток виглядової висоти буває часто від'ємний: це трапляється у таких світлолюбних порід, як сосна; у неї зріст догори в доспіваючім віці припиняється й на повнодеревність її світло не має впливу, але, не зважаючи на це, каже автор, консервативний пруський лісовий уряд обгосподарює соснові деревостани лише за високих обігів рубанки.

Від'ємний вираз відсотка приросту на виглядовій висоті, або на сумі $p_h \pm p_f$, добачається з того, що сочинник у Шнайдеровім взорі спускається нижче 400. Автор цю обставину подає як велику рідкість і шукає підтвердження у Штетцера, який згадує про це у своїм творі «Die Ermittlung des laufenden Massenzuwachses der Holzbestände (Zeitschrift f. F. u. J.-wessen 1880 ст. 437).

Раніш ми вже ознайомились із подібним зниженням сочинника й дізналися про причини того явища.

III. Вираз (78) надається представити ще в такім вигляді:

$$p_m = \frac{100}{nd}\ \left(4 + \frac{ndzh}{h} \pm \frac{ndzf}{f}\right),$$

$$\text{або теж } = \frac{400 + \dfrac{100\ ndzh}{h} \pm \dfrac{100\ ndzf}{f}}{nd} = \frac{K}{nd},$$

$$\text{де } K = 400 + \frac{100\ ndzh}{h} \pm \frac{100\ ndzf}{f} \qquad (80)$$

Вираз $p_m = \dfrac{K}{nd}$ уявляє не що інше, як узагальнений Шнайдерів взір.

Як пригадаємо, останній цілком збігається із взором проф. Турського (64) $p = \dfrac{c'\Delta d}{d} = \dfrac{c}{nd}$.

Д-р Валлі гадає, що сочинник k коливається між 400 і 600, себто:

$$p_m = \frac{400 - 600}{nd}.$$

Він зараховує цей взір до тієї групи метод, які намагаються зміною сочинника поліпшити наслідки; це роблять на базі приросту дерева на висоті. Автор не поділяє цього напряму і розв'язання цього питання ставить найближчим своїм завданням.

Із виразу для сочинника K (80) видко, що размір його залежить: 1. від проміру дерева; 2. від висоти його; 3. від виглядового числа; 4. від числа політків на 1 сант.; 5. від приросту на висоті; 6. від приросту на виглядовім числі.

Як бачимо, гадати, що сочинник K залежить лише від висоти, значить нехтувати другими важливими чинниками. Автор подає приклад аналізи дерева, де приріст на висоті знижується, а сочинник k підвищується. Ця обставина пояснюється збільшенням виглядового числа. Зворотній випадок — швидке зниження виглядового числа потягне, як уже говорилося, зменшення сочинника k під 400. Отже ясно, що базувати вибір сочинника на змінах однієї висоти було б цілком несправно. Особливі утруднення здибали б у листовних порід.

Вираз для сочинника K (80) можна написати в такій формі:

$$K = 400 + nd\left[\frac{100\, zh}{h} \pm \frac{100\, zf}{f}\right], \text{ або } K = 400 + nd\,(p_h \pm p_f).$$

Цей взір тільки ілюструє попередні висновки, що K обертається в 400 лише при умові $p_h = -p_f$, або $p_h = 0$ і $p_f = 0$, чого одночасно не буває; коли $p_f > p_h$, то $K < 400$.

Згідно з переведеними вже доказами маємо: $K = 400 \pm nd p_{hf}$ (81) Цей взір зайвий раз доводить, що K залежить від n, d і p_{hf}, чого раніш ніхто не помічав.

Зокрема у високій мірі відбивається вплив n. Припустімо, що на будь-якім дереві виміром та обчисленням встановили p_m, n і d;

тоді із взору $p_m = \frac{K}{nd}$ можна вивести $K = p_m \,.\, nd$ (82)

Підставивши сюди обчислені величини, одержимо вартість сочинника K. Коли пробобимо теж саме на другім дереві, то одержимо вже другу вартість для K, бо цілком однакових даних для p_m, n, d — ми ніколи не одержимо. Взагалі, взір Шнайдерів остільки індивідуальний, що раз добутий сочинник K не може переноситись на іншу групу дерев, а тим більше на другий деревостан; тут треба брати велике число досліджених об'єктів і виводити з них пересічний сочинник.

Подібну ж методу запропонував був Шторп („Forstliche Blätter" 1889, 326). Він обчисляв декілька моделів за способами Уріховим, або Гартіґовим, на них за Шнайдеровим взором обраховував сочинник K і переносив потім його на цілий деревостан.

Рівно ж і Штетцер подав свою методу «повного висотного приросту» для обчислення сочинника K, іґноруючи приріст на виглядовій висоті й ним викликані зміни відсотка приросту на обсязі.

«Повний висотний приріст» — z_h — спостерігається тоді, коли прирости на висоті й площі пропорційні між собою, себто:

$$\frac{D}{d} = \frac{H}{h}; \text{ або } \frac{D-d}{d} = \frac{H-h}{h}.$$

Але $D-d=2i$, а $H-h=z_h$, тоді $\frac{2i}{d}=\frac{z_h}{h}$, відкіля $z_h = \frac{2ih}{d}$.

За попередніми визначеннями $i=\frac{1}{n}$, тому $z_h = \frac{2h}{nd}$ (83)

Це й буде «повний висотний приріст». Тепер заведемо у цей вираз дійсний приріст на висоті $\mathfrak{z}_h$. Можна припустити, що він буде рівнятися

$$\mathfrak{z}_h = z_h\ \varepsilon, \tag{84}$$

де сочинник ε може бути більший чи менший від одиниці в такій же мірі, як дійсний приріст $\mathfrak{z}_h$ буде більший чи менший від «повного» z_h. Підставивши вираз (84) у (83), матимемо:

$$\mathfrak{z}_h = \frac{2h}{nd}\varepsilon \tag{85}$$

У свою чергу останній вираз підставимо у взір для сочинника K (81), відкинувши останній член, тоді:

$$K=400+\frac{100\ nd}{h}\cdot\frac{2h}{nd}\varepsilon=400+200\,\varepsilon.$$

Таким чином, змінений Штетцером Шнайдерів взір виглядатиме так:

$$p_m = \frac{400+200\ \varepsilon}{nd} \tag{86}$$

Значіння для ε обраховуються із виразу (85) $\varepsilon = \frac{nd\mathfrak{z}_h}{2h}$ (87)

Для цього взору Штетцер склав таблиці, рівно ж такі таблиці уряджено ним і для виразу $nz_h = 2\frac{h}{d}$, що одержується із взору (83). Тут n-літній «повний приріст на висоті» залежить лише від висоти і проміру, й тому може бути раз назавжди обрахований, що й зробив Штетцер в останніх таблицях. Виразу nz_h Штетцер вживає умисно, знаючи добре, що довжину приросту на висоті за останній рік встановити майже неможливо, а тому він замінює її пересічною за стільки років n, за скільки той приріст був майже незмінний та надається на визначення оком.

Тому $\mathfrak{z}_h = \frac{\mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}_2+\mathfrak{z}_3+\ldots\ldots\ldots\mathfrak{z}_n}{n}$, або $n\mathfrak{z}_h=\mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}_2+\mathfrak{z}_3+\ldots\mathfrak{z}_n$.

Підставляємо цей вираз у такий же (84), де попереду визначимо ε, що рівнятиметься $\varepsilon = \frac{\mathfrak{z}_h}{z_h}$, тоді $\varepsilon = \frac{\mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}_2+\mathfrak{z}_3+\ldots\ldots+\mathfrak{z}_n}{nz_h} =$

$$= \frac{n\mathfrak{z}_h}{nz_h} = \frac{\mathfrak{z}_h}{z_h} \tag{88}$$

Отже Штетцерова метода вимагає встановлення: d на 1,3 мет., числа політків на 1 сант. — n, висоти дерева — h і довжини останніх n-літніх гонів; для всіх цих даних з таблиці добувається вартіть для ε, а за останньою та взором $p_m = \frac{400 + 200\,\varepsilon}{nd}$ і відсоток приросту на обсязі. Вся хиба Штетцерової методи, в останнім дуже зручної, полягає в іґноруванні приросту на виглядовім числі: останній буває рівний 0, або близький до нього лише в старім віці дерев, отже тільки для такого віку взір буде бездоганний.

Перед методою Шторповою має Штетцерова ту перевагу, що не потребує зрубування модельних дерев, але перша мусить бути докладніша, бо передбачає приріст на виглядовім числі. З другого боку вимір n-літнього гону на деревах, зокрема листовних, не завжди вдається, тоді вживання Штетцерової методи виключене.

Крок наперед від останньої методи зробив Кальк (Der Zuwachs an Baumquerfläche, Baummasse und Bestandesmasse, 1889), що поставив приріст на виглядовім числі в залежність від приросту на промірі; цим запобігається хиба Штетцерової методи. Кальк кладе в основу своєї методи стосунок: $\frac{HF}{hf} = \frac{D^{2e}}{d^{2e}} = \frac{G^e}{g^e}$,

при чім d, h, f і g визначають стан таксаційних елементів на початку періоду, а D, H, F і G — в кінці. Фактично цей період мусить братися в один рік. Попередню пропорцію можна замінити такою:

$$\frac{hf\,1{,}0\,p_{hf}}{hf} = \left(\frac{g\,1{,}0\,p_g}{g}\right)^e, \quad \text{або} \quad 1{,}0\,p_{hf} = 1{,}0\,p_g{}^e, \quad \text{або ще}$$

$$1 + \frac{p_{hf}}{100} = \left(1 + \frac{p_g}{100}\right)^e.$$

Розкладаючи другу частину рівняння в ряд по закону бінома, одержимо:

$$1 + \frac{p_{hf}}{100} = 1 + \left(\frac{e}{1}\right)\frac{p_g}{100} + \left(\frac{e}{1\cdot2}\right)\left(\frac{p_g}{100}\right)^2 + \left(\frac{e}{1\cdot2\cdot3}\right)\left(\frac{p_g}{100}\right)^3.$$

Дріб $\frac{p_g}{100}$ є мала величина, тому його в ступенях другім і вищих можна знехтувати, тоді: $1 + \frac{p_{hf}}{100} = 1 + \frac{ep_g}{100}$, або $p_{hf} = ep_g$.

Але $p_g = \frac{400}{nd}$, тому $p_{hf} = \frac{400e}{nd}$.

Підставивши це значіння для p_{hf} у вираз (81), матимемо:

$$K = 400 \pm nd\,p_{hf} = 400 \pm nd\,\frac{400e}{nd}, \text{ або } K = 400\,(1 \pm e).$$

Отже відсоток приросту на обсязі за Кальком набуде вигляду

$$p_m = \frac{400\,(1 \pm e)}{nd} \tag{89}$$

Взір дуже простий, але необхідно якось добути вартість для e. Він це робить із виразу $\frac{HF}{hf} = \left(\frac{G}{g}\right)^e$, відкіля $\log HF - \log hf = e\,(\log G - \log g)$, або $e = \frac{\log HF - \log hf}{\log G - \log g}$.

Через те, що в старшім віці дерев $HF < hf$, e буде від'ємне, тому знак $\pm$ перед e зникне.

Далі, $1 + e = 1 + \frac{\log HF - \log hf}{\log G - \log g} = \frac{\log G + \log HF - (\log g + \log hf)}{\log G - \log g}$.

Через те, що $\log G + \log HF = \log GHF = \log M$,

рівно ж $\log g + \log hf = \log ghf = \log m$,

тому можна написати $$1 + e = \frac{\log M - \log m}{\log G - \log g} \tag{90}$$

і таким чином надається обрахувати e.

Між Штетцеровим і Кальковим взорами існує певна подібність: перший $p_m = \frac{400 + 200\,\varepsilon}{nd}$, другий $p_m = \frac{400\,(1+e)}{n\,.\,d} = \frac{400 + 200\,.\,2\,e}{n\,.\,d}$.

Але оскільки для першого обрахувати ε не складає труднощів, остільки для другого встановлення e зв'язане із складними чинностями і обрахунками, а саме: необхідно зрубати модельні дерева, обчислити площі перекрою минулу й сучасну, обрахувати обсяги і тоді лише дасться встановити вираз $(1 \pm e)$, після вживання до того ще логаритмів.

З цього історичного огляду, каже Д-р Валлі, для практики найменше годиться Калькова метода, а більш зручна й докладніша Шторпова. Найліпше зо всіх обраховується Штетцерів сочинник, але його можна вжити лише тоді, коли зв'язана з ним недокладність ще терпиться.

Згадує автор і Преслерову методу («Zur Forstwuchskunde» Dresden 1868), але на розборі її не спиняється.

Далі торкається Мікліцевої методи (Centralblatt f. d. g. F—w 1919, 118), яка спирається при обчисленню сочинника на промір і висоту. Взір Мікліців має вигляд

$$p_m = \frac{600}{nd} \cdot k \tag{91}$$

Вважається придатним для стоячих дерев. Виводиться із Шнайдерового через помноження сочинника 400 на $\frac{3}{2}k$.

$$p_m = \frac{400\,\frac{3}{2}\,k}{nd} = \frac{600}{nd} \cdot k.$$

Сочинник свій Мікліц називає «виправляючим фактором» і ставить його в залежність від віку й «кляси форми», до якої дерево належить; періодів вживає 10-річних. «Виглядові кляси» об'єднуються в три розділи в залежності від розміру сочинника $\frac{h}{d}$ (h — висота в метрах, а d—промір на 1,3 мет. в сант.) і пропонуються такі розділи:

I. виглядова кляса	— високої повнодеревности		$\frac{h}{d} > 0.92$
II. ,, ,,	— пересічної	,,	$\frac{h}{d} \infty 0.78 — 0.92$
III. ,, ,,	— низької	,,	$\frac{h}{d} < 0.78$

За віком і виглядовою клясою одержується «виправляючий фактор» із складених Мікліцем таблиць, рівно ж і для добутку 600 . k є вже готові таблиці; таким чином, вся праця із цим взором обмежується поділом добутого із таблиць готового числа на dn. Змінам виглядових кляс від 0.92 до 0.78 відповідають зміни виглядових чисел від 0.47 до 0.48; це свідчить, що численник Шнайдерового й Мікліцевого взорів уявляє й функцію від віку й виглядового числа.

$$K = \varphi (a \;.\; f)$$

Власне, як відомо, сочинник Шнайдерового взору з чисто математичного погляду закладається на шести величинах d, h, f, n, z_h, z^f, себто він є функцією тих величин.

$$K = \varphi (d, h, f, n, z_h, z_f).$$

Спільність цієї функції з Мікліцевою полягає лише у виглядовім числі, решта елементів останнього виразу там замінюється віком. Одначе, від віку більш-менш залежать d, h, z_h і z_f, але n — майже цілком не залежить, хіба навпаки: з віком політки тоншають, а n зменшується, тому залежність ця відходить на задній план. Отже взір даватиме тим більші хиби, чим більш n, добуте на певнім дереві, буде відхилятися від того n, що положено в основу обчислення сочинника K.

Цілком іншим шляхом намагається Шумахер («Forstliche Blätter»,1891, 129) поліпшити взір Шнайдерів. Як уже згадувалось раніш (т. II., вип. 3, ст. 78), він робіть зміни не в численнику, а в знаменнику, де замісць d вставляє добуток $d\sqrt{f}$ й тоді

$$p_m = \frac{400}{nd\sqrt{f}} \qquad (51)$$

Шумахер базується, як уже відомо, на Губеровім правилі, що відсоток приросту на обсязі певного стовбура із стятим приростом на висоті подібний до відсотку приросту на площі посередині довжини його. Необхідно, таким чином, знати промір на середині; назвавши його через x, Шумахер прирівнює обсяг вальця за цим проміром до обсягу дерева $\frac{\pi}{4}x^2h = \frac{\pi}{4}d^2hf$, відкіля $x = d\sqrt{f}$.

Далі він рахує, що приріст на площі посередині стовбура рівнятиметься приросту при погрудді. Припущення це не є справне.

Приріст на площі посередині стовбура $p_\gamma = \frac{400}{n\alpha} = \frac{400}{nd\sqrt{f}}$. А через те, що ми раніш умовилися рахувати відсоток приросту на площі рівним відсоткові приросту на обсязі, то $p_\gamma = p_m = \frac{400}{nd\sqrt{f}}$. Вираз $\sqrt{f}$ завжди менший одиниці, тому, коли попередній взір написати $p_m = \frac{\frac{400}{\sqrt{f}}}{nd}$, то взір Шумахерів мусить давати вищий відсоток масового приросту, ніж взір $\frac{400}{nd}$. Штетцер доводив, що сочинник може знижуватись і під 400, у взорі Шумахеровім цього ніколи бути не може, бо $\sqrt{f}$ ніколи більшим одиниці не буває. Далі, із зниженням в старім віці виглядового числа численник $\frac{400}{\sqrt{f}}$ мусить підноситись, що протирічить дійсності. Очевидно Шумахерів взір лише за нормального зросту дерева може давати справні наслідки, для молодих і старих — цього сподіватися даремно.

Таким чином повстають протиріччя, очевидно від того, що припускається рівність приростів на площі посередині дерева й при погрудді. В деревостанах злучених політки посередині стовбура ширші ніж на 1,3 мет., тому й n буде менше.

IV. Далі Д-р Валлі спиняється на використанні методи сумування відсотків:

$$p_m = p_g + p_h \pm p_f.$$

Він намагається розв'язати питання про способи найлегшого й найпростішого обраховання кожного із цих відсотків. В цім відношенні автор робить такі зауваження:

1. Для обчислення відсотка приросту на площі найдоцільніше користуватися Шнайдеровоим взором. Коли необхідно встановити відсоток приросту на о б с я з і для цілого деревостану, то складову частину його — відсоток приросту на п л о щ і обчисляють за взором Борґреве:

$$p_g = \frac{400\Sigma\frac{d}{n}}{\Sigma d^2}$$

2. Відсоток приросту на в и с о т і обраховується трьома способами:

а) Безпосереднім виміром на стоячім дереві та обчисленням відсотка за взором

$$p_h = \frac{100 z_h}{h},$$

де $z_h = h - h_1$, себто висоті сучасній без висоти попереднього року. Коли тяжко буває визначити гін останнього року, то беруть його за декілька років і ділять числом років періоду (це припустимо за більш-менш рівномірного росту дерева протягом тих років). Пересічний річний приріст на висоті має ті переваги, що, поперше, компенсує випадкові здовження чи скорочення останнього гону; подруге, зменшує помилку від недокладности виміру (недокладність пристроїв, несприятлива година тощо). Пересічний приріст на висоті встановиться за взором $\mathfrak{z}_h = \frac{h - h_t}{t}$, де h — сучасна висота, h_t — висота перед t роками. Взагалі помічено, що приріст на висоті в деревостанах за нормальних умов ніколи не терпить скоків.

б) Іноді, замісць біжучого приросту на висоті, встановлюють пересічний, коли відомі висота дерева та його вік: тоді $\mathfrak{z}_h = \frac{h}{a}$. Цей спосіб можна припустити лише за умовою, що пересічний приріст не буде значно ріжнитися від біжучого; а ця обставина трапляється за кульмінації пересічного приросту на висоті; в другі періоди можуть статися фалшиві наслідки.

в) Можна, нарешті, використати для обчислення відсотка приросту на висоті й досвідні таблиці. Коли відомі бонітет займища й вік та є відповідні таблиці, то відсоток обраховується легко. Через те, що хід росту догори, залежить виключно від займища й лише в малім ступеню від господарських заходів, то як із теоретичного погляду, так і з практичного цей спосіб найдокладніший. Для листовних порід він буде і єдиний. Оцінка бонітету за висотою належить до справних, коли не рахувати випадків занедбання деревостанів через негосподарність.

Щодо вживання досвідних чисел і відношення між відсотками приросту на площі й на висоті, то можна подати наступне:

α) Відсоток площового приросту є функція світлового впливу, себто такого фактора, який можна реґулювати господарською чинністю людини. Відсоток же висотного приросту залежить лише від віку й бонітету.

β) Відсоток площового приросту відбиває на собі в більшім ступені несприятливі моменти в зрості дерева, ніж відсоток висотний.

γ) Обрахування виглядового числа зв'язане з більшими утрудненнями й недокладностями, тому ці дані одержують переважно з таблиць.

Найдоцільніше буде користуватися й готовими відсотками приросту із відповідних же таблиць. З-за невеликого розміру цього відсотка виникали думки встановлювати його разом із висотним відсотком у вигляді відсотка виглядової висоти й з останнього вже вираховувати відсоток приросту на обсязі згідно з встановленим раніш правилом сумування відсотків.

Але ця метода має й від'ємний бік, що полягає в одержанні лише приблизної величини відсотка обсяжного приросту через відкидання членів із ступенями другим і вищими. Одначе цю недокладність можна було б зменшити шляхом наступних міркувань.

Математично справним був би відсоток обсяжного приросту лише за повним взором, йому відповідаючим:

$$p_m = p_g + p_h \pm p_f + \Delta \tag{92}$$

Величина Δ складалась із 8-ми членів другого й вищих ступенів, сумою яких ми зіґнорували. Проаналізуємо одначе цей вираз, щоб добитися докладности для p_m.

Взір (92) можна написати ще так:

$$p_h \pm p_f + \Delta = p_m - p_g \tag{93}$$

Величину $p_m - p_g$ означимо через Z і назвемо її придатком. Останній надається обрахувати таким способом. Вираз (93) напишемо так: $p_m - p_g = Z$ відкіля:

$$p_m = p_g + Z \tag{94}$$

Замісць p_g підставимо взір Шнайдерів $p_m = \frac{400}{nd} + Z_1$. Тут придаток Z_1 буде трохи ріжнитися від Z з огляду на нецілковиту справність Шнайдерового взору.

Теж можна написати і для взору Борґреве

$$p_m = \frac{400 \Sigma \frac{d}{n}}{\Sigma d^2} + Z_2,$$

де абсолютно Z_2 буде також ріжнитися від попередніх придатків.

Щодо обчислення й вживання придатку, що має вираз

$$Z = p_m - p_g, \tag{95}$$

то треба зробити наступні зауваження:

а) Із взору (95) видно, що для його встановлення не потребується знання відсотка приросту ні на висоті, ні на виглядовім числі.

б) В цей взір не входить величина Δ, яка спричиняється до недокладности наслідків сумування приростів.

в) Додавання обчисленої величини Z не ускладняє обраховань.

г) Відсоток обсяжного приросту на листовних породах обчисляється з великими труднощами, зокрема з-за незручности встановлення висот за попередні роки. Обчислений придаток всю справу полегшує.

ґ) Коли придаткову величину встановлюють за дослідними числами, то докладність методи буде тим більша, чим до більшого числа стовбурів прикладається; цього правила треба додержуватись за встановлення обсяжного приросту на деревостанах. У цім випадку Д-р Валлі впадає в протиріччя із добутими досвідними даними щодо примінення методи Борґреве: там не рекомендується брати більш як 20 дерев для встановлення n.

На окремих деревах обчислення обсяжного відсотка за надвишкою, на думку автора, дасть більш-менш значні відхилення, рівно ж такі, як і по способу кубування за виглядовим числом, або за обсяжними (масовими) таблицями. На деревостані ж ці помилки урівноважуються остільки, що одержуються цілком вистачаючі для практичного вжитку наслідки.

Д-р Валлі надає методі придаткової величини таке важливе значіння, що розглядає способи обчислення її в приміненні до трьох головніших порід: ялини, сосни й бука.

1. Високогірська ялина. Тут будуть доречні вказівки Ґутенберґового «Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge». — Шлях обрахования придатку на ялинових деревах буде такий. Зрубуються моделі для всіх бонітет і кляс віку, переводиться докладна аналіза стовбурів. Одержані дані для однакових бонітетів і віків об'єднуються в пересічні числа і тим добувається основа для обчислення Z_1 і Z_2. Далі обчисляється відсоток обсяжного приросту p_m за добу від n до $n+10$ років логаритмічним шляхом за взором $1{,}0\,p^n = \frac{M_n+10}{m_n}$.

Відсоток площового приросту обчислюється за взором Шнайдеровим $p_g = \frac{400}{nd}$.

Ширина політків встановлюється доцільніше так само за взором Шнайдеровим, але первісного вигляду $p_g = \frac{400\,i}{d}$, щоб не обмежувати себе обрахованням політків лише на 1 сант., відкіля

$$i = \frac{D_{n+10} - d_n}{20}.$$

Нарешті, одержується придаток із взору $Z = p_m - \frac{400\,i}{d}$, як функція віку й займища.

Але коли ці величини обумовлюють висоту, то можна Z обрахувати як функцію від віку й висоти. Всі обрахування об'єднуються в табличну форму такого змісту:

Вік	Обсяг в $^1/_{100}$	Логаритм обсягу $\log m$	$\log m + 10 - \frac{\log m\,n}{10} = \log 1{,}0\ p_m$	$1{,}0\,p_m$	p_m	Промір d в сант.	Ширина політка $i = \frac{\Delta d}{20}$	$\frac{400\,i}{d}$	p_m	$Z = p_m - \frac{400\,i}{d}$
40	224	2.3502480				20				
			0.02862390	1.0681	6.81		0.220	4.40	6.81	2.41
50	433	2.6364879				24.4				
			0.01869863	1.0440	4.40		0.160	2.62	4.40	1.78
60	666	2.8234742				27.6				
			0.01360442	1.0318	3.18		0.135	1.96	3.18	1.22
70	911	2.9595184				30.3				
			0.01045650	1.0244	2.44		0.115	1.52	2.44	0.92
80	1159	3.0640834				32.6				

Потім переводять подібне обчислення для всіх 5-ти бонітетів, з добутих чисел складають графіки й за ними вже одержують вирівняні придатки. Таблиця таких придатків має приблизно такий вигляд:

Вік	I		II		III		IV		V	
	h	*z*	*h*	*z*	*h*	*z*	*h*	*z*	*h*	*z*
60—70	25.3	1.22	20,7	1.25	16.0	1.38	12.3	1.52	8.5	1.33
70—80	28.1	0.91	23.0	0.93	18.1	1.08	14.0	1.11	9.9	1.13
80—90	30.3	0.65	24.9	0.71	20.0	0.83	15.6	0.88	11.3	0.91
90—100	32.2	0.48	26.6	0.55	21.7	0.65	17.0	0.73	12.5	0.76

Коли будуть потребуватися величини придатків по 5-тиліттях, то їх одержують із попередніх даних інтерполяцією. Коли ці дані виховано лише для окремих дерев, то їх містять в таблицю такого приблизно вигляду:

Вік	Висота в метрах									
	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
60—70	1·25	1·45	1·52	1·48	1·38	1·30	1·26	1·23	1·22	1·22
70—80	1·12	1·13	1·13	1·11	1·09	1·06	1·02	0·98	0·95	0·92
80—90	—	0·92	0·91	0·89	0·87	0·85	0·81	0·78	0·74	0·70

З-за правильности стовбура ялинового й мізерного значіння гілля подані вище досліди переводяться за виключно сприятливих умов.

2) Сосна. Досліди над сосною будуть відбуватися в значно гірших умовах. Поперше, гілля тут звичайно має таку масу, якої іґнорувати вже не можна. Тут до грубого матеріялу стовбурового треба додавати й гілльове. Подруге, форма стовбура соснового значно складніша, а тому, як встановлення обсягу його, так особливо приросту на грубій частині (від 7 сант. і вище) трудніші.

Останній обсяг приходиться ділити на два відмінки:

а) приріст на грубій частині стовбура й гіллі, скажемо, на грубизні;

б) приріст на молодшій частині стовбура — на верхів'ю і на тоншій (від 7 сант. і нижче) частині гілля.

Найбільші утруднення завдає встановлення межі на гіллі між грубою та тонкою деревиною. Ці обставини вимагають брати для аналізи значне число дерев. Колиж в цім відношенні дослідувач буває обмежений, то приходиться для обчислення придатків користуватися з досвідних таблиць.

Відповідно до такого поділу деревної маси розріжняють і відсотки приросту на дереві й на грубизні; теж і придатки поділяють таким же способом і визначають: перший через BZ і другий через DZ.

Тут необхідно пригадати, що для встановлення відсотка обсяжного приросту й придатку в деревостані потрібно брати модельні дерева від усіх кляс Крафтових, себто, як від пануючого, так і підлеглого поверхів.

Площовий відсоток приросту обраховується з тими ж самими застереженнями, як і обсяжний.

Обчислення обсяжного й других відсотків приросту на грубизні провадиться тим же порядком, як і на цілім дереві, лише у визначенні треба відріжняти p_m-дерева від p_{md} грубизни, теж p_f від p_{fd}, Z від DZ і т. д.

3) Бук. Для обчислення придаткової величини цієї породи вживають досвідних таблиць на «ялину й бук», складених в Швайцарії проф. Флюрі. Хід цих обраховань цілком подібний до розглянутих в пристосованні до сосни.

Увагу Д-ра Валлі в цім випадку спиняє обставина ще не досить з'ясована. Чи можна узагальнювати обчислені на окремих деревах придатки Z і для обрахування приросту на обсязі в деревостанах, коли додержано всіх правил для вибору модельних дерев? Поставленого питання автор не вирішує.

Таблиці містять абсолютні значіння для Z.

Вік	Придаток деревний											
	Висота в метрах											
	9	10	12	14	16	18	20	22	22,5	25	27·5	30
60—70	1·13	1·02	0·84	0·71	0·64	0·63	0·62	0·58				
70—80	0·90	0·84	0·70	0·59	0·50	0·48						
	Придаток грубизновий											
60—70	2·14	1·94	1·54	1·24	1·04	0·92	0·84	0·80				
70—80	—	1·52	1.21	0·99	0·84	0·74	0·67	0·61				

§ 6. Кінцеві висновки.

В поданім викладі переглянуто майже всі відомі в таксаційній літературі методи обраховання відсотків приросту. Найбільш старі методи що не здобули на практиці розповсюдження, або більш-менш вже перевірені, залишено покищо поза увагою. Ми спиняємо тут увагу на тих лише старих методах, що вважаються й досі основними, та на досягненнях і пропозиціях останнього часу, що звернені на поліпшення старих способів обчислення відсотка приросту. Про відповідність своєму призначенню тієї чи іншої з метод можна судити лише після перевірки їх на ріжних об'єктах — на деревах чи деревостанах, причім останні мусять бути ріжних порід, віку, походження, форми й з ріжних займищ. Для осягнення цієї мети потрібний був би великий матеріял: щодо окремих дерев — аналізи росту, а деревостанів — докладні досвідні таблиці. Така перевірка уявляла би предмет самостійної солідної праці. В цій же розвідці подаємо аналізу зросту лише двох моделів з типових займищ старого віку, коли встановлення відсотка приросту найчастіше трапляється. То будуть: сосна 109 років, природного походження з борових ґрунтів, з 1-ої кляси по Крафту (таблиці ч. ч. 1 і 2) та ялина 89 років з болотнинного займища, теж природного походження й подібно до першої — з пануючого поверху (таблиця ч. 3). Цього матеріялу цілком вистачить для головніших висновків і для порівняння їх з поданими вже теоретичними міркуваннями.

1. Наслідки порівняння метод першої групи.

а) Основні методи.

В основу всіх порівнянь покладено методи: складного відсотка (4), Преслерову (5) й Кунцеву (6). Перші дві методи перевірено на двох моделях (таблиці 1 і 3), останню на одній (таблиця 1). Наслідки перевірок підтвердили старе твердження, що взір Преслерів (5) $p = \frac{200}{t} \frac{M - m}{M + m}$ дає висліди абсолютно менші за обчислені методою складного відсотка, і лише для старого віку — понад 100 років для сосни — вони збігаються. Кунцеві вислідки по абсолютних своїх величинах перебувають між першими двома, також сполучуючись з ними в згаданім віці. В прикладах, поданих проф. Турським*) таке збігання починається значно раніш — майже із 50-літнього віку, але ті обчислення у нього торкаються деревостану, дані для якого взято з досвідних таблиць, а ця обставина не є типовою для певних висновків: індивідуальні властивості в рості окремих дерев там зглажено. На практиці ж ми маємо до діла майже виключно з моделями.

Що методи Преслерова й Кунцева дають справні наслідки й цілком відбивають хід росту, як окремих таксаційних елементів, так і їх сукупности на окремих деревах, не є несподіваним, неясною ж залишається обставина, що такі ж висліди одержуються від взору складного відсотка, засудженого, здавалось би, і Ґутенберґом, і Леваковичем, і Турським і другими, як такого, що не відповідає умовам набування деревна. Очевидно тут справа йде про малі періоди (не більші за 10-тирічний), з рівномірним по обсягу приростом, в такім же застосованні початкових і кінцевих величин, як це відбувається в Преслеровій методі, лише поставленім у геометричне відношення $\left(\sqrt[t]{\frac{M}{m}}\right)$ замісць аритметичного $\left(\frac{M - m}{M + m}\right)$. В такім разі надається прирівняти методу складного відсотка також до методи відносного приросту, що так блискуче обґрунтована проф. Турським. Прибільшені наслідки першої методи пояснюються захованням одного й того самого відсотка протягом того періоду. Відсіля наслідки, що дають взори аритметичного стосунку початкової і кінцевої величини (Преслерова й Кунцева методи) мусять бути більш справні, ніж геомертичного; тому й орієнтовку на перші, рівно ж як і на взір Леваковичів, треба вважати за більш виправдану.

*) Проф. Г. Турський: там же, стор. 30 і 31.

б) Метода Леваковичева.

Наслідки обрахувань за взором Леваковичевим (16) $p = 200 \dfrac{M - m}{M(t-2)+m(t+2)}$ абсолютно більші за такі ж Преслерові й Кунцеві, що наближає їх до вислідів взору складного відсотка.

Ця обставина по старих традиціях мусіла б дати взорові Леваковичевому перевагу над попередніми, тим більше, що й вивід його є не менш докладним, ніж, напр., Преслерів. Але для практичного вжитку, як цей, так і Кунців взори, всеж складніші за Преслерів, а тому та перевага відпадає.

в) Бурьячкова метода.

Бурьячек будує свій взір (18) $p = \dfrac{\log d}{\log e} \cdot 10 - \dfrac{\log d}{\log e} \cdot 10$ на рівнянні $\dfrac{M}{m} = \dfrac{d^3}{d_1^3}$, гадаючи, що для малого періоду виглядове число залишається незмінне, і що збільшення висот буває пропорційне нарощуванню промірів. Перевірка цього рівняння для старшого віку сосни та ялини дає такі висліди:

Сосна:

		Помилка
6—70 р.	— 1·160 ∞ 1·120	— 3·6 %
70—80 „	— 1·121 ∞ 1·131	+ 0·9 %
80—90 „	— 1·088 ∞ 1·138	+ 4·6 %
90—100 „	— 1·066 ∞ 1·056	— 0·9 %
100—110 „	— 1.059 ∞ 1·034	— 2·4 %

Ялина:

		Помилка
59—69 р.	— 2·276 ∞ 2·202	— 2· 4%
69—79 „	— 1·683 ∞ 1·789	+ 6·2 %
79—89 „	— 1·562 ∞ 1·565	+ 0·2 %

Як бачимо, згадане припущення тягне за собою досить значні помилки: для сосни до 4,6%, а для ялини до 6,2%. Ця обставина й спричинилася до того, що взір дав значні відхилення для обох моделів.

Для подання остаточних висновків необхідні дальші досліди, а покищо можна сказати, що ця метода не цілком виправдує покладені на неї надії.

г) Меркерова метода.

Меркерів взір (11) $p = \dfrac{50}{t} \cdot \dfrac{(M-m)(M+m)}{M \cdot m}$, що має на меті поставити таксаційні елементи в геометричне відношення, дає наслідки досить близькі до взору складних відсотків, задовольняюче відбиває зміни в рості дерева, але для вживання на практиці невручний, бо фактично вимагає вживання логаритмів.

ґ) Методи проф. Турського.

Теорією відносного відсотка приросту проф. Турський подав нову трактовку розуміння про набування чи приріст деревна, перевів глибоку математичну аналізу над старішими методами, винайшов і запропонував свої самостійні методи обчислення відсотка приросту багатьма взорами; найбільш типові з останніх будуть: 1) приблизний (28)

$$p = 100 \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(t-1)\frac{M-m}{t \, . \, m}}}{t-1}$$

2) приближний (30)

$$p = \frac{100}{t} \frac{M-m}{m}\left(1 - \frac{t-1}{2t} \cdot \frac{M-m}{m}\right)$$

3) цілком справний (37)

$$p_0 = \frac{100}{t} \frac{\log M - \log m}{\log e}$$

і 4) основний (41)

$$p_0^1 = \frac{100}{t} \frac{M-m}{m}\left(1 - \frac{1}{2} \frac{M-m}{m}\right).$$

Всі ці взори після перевірки на одній моделі виявили ріжну цінність. Основний взір (41), з яким проф. Турський порівнює старі методи, дав применшені наслідки, як у порівнянні із взором складних відсотків (4), так і з Преслеровим (5), приблизно на 0,5—1,0%. Подібні відсотки обрахувуються за приближним взором (30), але трохи більші за перший взір (41).

Для дерев молодих до 30 років обидві ці методи цілком не підходять.

Приближний взір із знаком радикала (28) і логаритмічний (37) обраховують відсотки цілком справно, навіть для молодих дерев. Перший з них до 60—70-літнього віку дерева дає трохи прибільшені величини від взору складних відсотків, а далі висліди цілком як з ними, так і з даними Преслерового взору сходяться. Другий взір обраховує від першого трохи менші відсотки, навіть менші від Преслерових для молодшого віку й подібні для старішого віку (від 60 років). Такі наслідки перевірки блискуче виправдують теоретичні міркування проф. Турського. В однім лише з ним не можна погодитись, а саме, що взори перші (30 і 41) є прості, й обчислення за ними не є складні. Вони й складні й обрахования утруднені, зокрема без логаритмів. Можна наперед передбачати, що практика цій методи доріжки не протре. Проф. Турський переконуюче довів високі властивості Преслерового взору і докладного і простого і зручного для обраховань, тому практиці й не буде рації вживати інших взорів, а зокрема значно складніших.

д) Метода проф. Фан-дер-Фліта.

Взір цієї методи (42) $p = \frac{300}{t-t_0} \frac{D-D_0}{D}$ по перевірці на сосні дав несправні наслідки, з років 40—50 дуже близькі до Бурьячкових. Окремі відхилення від Преслерових даних доходять: в роках 80—90 до 56%, в роках 90—100 до 89%.

Закономірности в несправностях не спостерігається жадної. Взір приваблює своєю простотою й зручністю обраховань, але може вживатися для занадто приближних обраховань.

е) Метода Баурова.

Взір Баурів (43) $p = 100 \frac{M - m}{M(t-1) + m}$ збудовано на не досить логічних основах, чому наслідки одержуються применшені, зокрема для молодих дерев; взір може вживатися лише для приближних обраховань.

2. Наслідки порівняння метод другої групи.

Для перевірок використано дані аналізи обох згаданих вище моделів — сосни та ялини (таблиці ч. ч. 2 і 3). За основні методи, з якими порівнювалися інші, вжито Преслерову (5) і Турського логаритмічну (37).

а) Методи проф. Турського.

До другої групи проф. Турський зараховує найпростіші методи, які мають на меті скоротити обчислення відсотка біжучого приросту до мінімуму, задовольняючися лише приближними наслідками обраховань.

Такими методами раніш були Шнайдерова, та тотожна з нею Брайманова, які проф. Турський узагальнює взором (64) $p = \frac{C^1 \Delta d}{d}$. Сочинник C^1 набуває ріжних значінь, але останні міняються остільки незакономірно, що проф. Орлов пропонував залишити всі ці методи без вживання. Між тим простота й зручність увесь час приваблювала дослідувачів до цієї методи. Звернув свою увагу на неї й проф. Турський і блискуче розв'язав питання про надання змінам сочинника C^1 певної закономірности. Винайдений ним сочинник $k+2$ задовольняє сьогодні найсуворішим вимогам до методи обчислення відсотка приросту. За згаданої методи приріст на обсязі замінюється приростом на площі перекрою при погрудді. Обчислення сочинника $k+2$ не вимагає складних обрахунків. Взір його (67) $p = \frac{200(k+2)}{t} \frac{d - d_1}{d + d_1}$, що уявляє модифікацію Преслерового взору, дає для сосни відхильні наслідки, але в загальних рисах представляє досить добре вислів ходу росту на промірах. Подібні наслідки одержуються й від взору (70)

$$p = \frac{100(k+2)}{t} \frac{\log d - \log d_1}{\log e}$$

Характерно, що спільність будови останнього з Бурьячковим (але простіший вигляд) відбивається й на наслідках обчислення: за виключенням років 100-го й 110-го вони дуже близькі між собою. На ялині вислідки значно ліпші.

Спрощений взір від попереднього (76)

$$p = \frac{100(k+2)}{t} \frac{d - d_1}{d_1} \left(1 - \frac{d - d_1}{2 d_1}\right)$$

дає подібні ж висліди. Одначе ця зміна сути діла не міняє, бо для обраховань вона така ж складна, як і первотвір; тут також без логаритмів не обійтись.

На ялині згадані взори дають подібні ж наслідки, але більш наближені до наслідків від взорів Преслерового та складних відсотків.

Виходить, що на деревах більш-менш рівномірного росту, де на 1 сант. можна нарахувати політків не більше, ніж є років у прийнятім періоді, наслідки будуть досить добрі. На сосні ж, де від 60-го року й вище нараховується їх від 12 до 37, спостерігатиметься само собою гірші наслідки. Модифікація Шнайдерового взору (60)

$$p = \frac{200\,(k+2)}{nd},$$

на яку проф. Турський покладав особливі надії, вийшла досить влучною; вона хоч і дає загалом відхильні величини від основних взорів (першої групи), але в деяких випадках — згідні, зокрема, з попередніми його взорами. Треба визнати, що запропонований проф. Турським сочинник $k+2$ і в Шнайдеровій, зглядно Браймановій, методі спричинився до значного поліпшення їх.

б) Метода Кюнкеле.

Взір цієї методи (52)

$$p = \frac{400\,\Delta\,d}{d} + \frac{100\,\Delta\,h}{h}$$

не є логічний, бо не заводить до обраховань виглядового числа, тому й дає для сосни прибільшені (на 50% і більше) наслідки; на ялині ж майже подібні до попередніх Шнайдерових; від основних, навпаки, — применшені (для старших віків). Як побачимо далі, взір Кюнкеле не має жадної будучини.

в) Метода Д-ра Валлі.

Ця метода уявляє дуже цікаву спробу поліпшити просту і зручну Шнайдерову методу. Д-ру Валлі прийшлося значно ускладнити взір цієї методи; у нього він має вигляд (78)

$$p = 100\left(\frac{4}{nd} + \frac{\mathfrak{z}h}{h} \pm \frac{\mathfrak{z}f}{f}\right),$$

значно складніший за тільки що розібраний (в модифікації проф. Турського). Щождо докладности, то й для сосни він дає для молодшого віку досить справні наслідки, для старішого ж цілком непідходячі; на ялині висліди ліпші. Очевидно тут впливає відкинута величина Δ, яку автор замінює придатковою величиною Z і для якої він склав окремі таблиці. Після винайдення проф. Турським сочинника $k+2$ справа поліпшення Шнайдерової (зглядно Брайманової) методи набрала іншого напряму, вирішується нині простіше та з докладнішими наслідками, тому на дальших поліпшеннях не спиняємось. На цім і закінчуємо перевірку метод обчислення відсотка приросту.

Вік	Обсяг в m^3	$\frac{M+m}{M-m}$	$\frac{M-m}{m}$	Проміри при погрудді (D і d)	Відсоток $p_a = 100\left(\sqrt[t]{\frac{M}{m}}-1\right) \ldots (4)$	$p'' = \frac{M-m}{t \cdot m} \cdot 100 \ldots (2)$	$p = \frac{200}{t} \cdot \frac{M-m}{M+m} \ldots (5)$	$p = 200\frac{M-m}{M(t-1)+m(t+1)} \ldots (6)$	$p = 200\frac{M-m}{M(t-2)+m(t+2)} \ldots (16)$
Сосна 109 років, дача «Коленець» на півд. Чехії,									
10	0,00895			2·3					
		1·3115	6·4212		22·193	64·212	15·250	16·499	17·994
20	0,06642			11,7					
		2·071	1·8731		11·131	18·731	9·673	10·164	10·708
30	0,19083			16·4					
		4·203	0.6284		4·988	6·284	4·771	4·890	5·001
40	0,31048			19·4					
		5·942	0·40437		3·454	4·0437	3·362	3·420	3·481
50	0,43603			21·4					
		9·197	0·24399		2·207	2·4400	2·175	2·198	2·222
60	0,54242			23·2					
		13·461	0·16039		1·499	1·6039	1·485	1·498	1·508
70	0,62942			24·1					
		17·638	0·12021		1·142	1·2021	1·135	1·141	1·147
80	0,70508			25·1					
		23·759	0.08787		0·846	0·8787	0·842	0·851	0·849
90	0·76704			26·2					
		31·372	0·06585		0·640	0·6585	0·638	0·640	0·645
100	0·81755			26·5					
		35·001	0·05882		0·573	0·5882	0·573	0·573	0·575
110	0·86564			27·0					

п р и р о с т у							
$p = \frac{\log D^3}{\log e} \cdot 10 - \frac{\log d^3}{\log e} \cdot 10 \ldots (18)$	$p = \frac{50}{t} \frac{(M-m)(M+m)}{M \cdot m} \ldots (11)$	$p = \frac{100}{t} \frac{M-m}{m}\left[1 - \frac{t-1}{2t}\frac{M-m}{m}\right] (30)$	$p = 100 \frac{-1 \pm \sqrt{1+2(t-1)\frac{M-m}{t \cdot m}}}{t-1}$ (2)	$\frac{M}{m} = e^{\frac{p_0 \cdot t}{100}};\ p_0 = \frac{100}{t}\frac{\log M - \log m}{\log e} \ldots (37)$	$p_0^1 = \frac{100}{t}\frac{M-m}{m}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{M-m}{m}\right) \cdot (41)$	$p = \frac{300}{t - t_0}\frac{D - D_0}{D} \ldots (42)$	$p = 100 \frac{M-m}{M(t-1)+m} \ldots (43)$
по Крафту 1 кл., природного походження							
48·799	36·432	—121·485	28.264	20·043	—141·620	122·609	9·472
10·131	12·625	2·9430	12·1204	10·554	1·1894	12·051	6·974
5·040	5·062	4·5073	5·0976	4·867	4·3096	9·146	4·008
2·944	3·462	3·3078	3·4942	3·397	3.2261	3·093	2·965
2·422	2·200	2·1717	2.2183	2·183	2·1423	2·523	1·928
1·142	1·493	1·4881	1·5023	1·488	1·4753	1·164	1·402
1·220	1·138	1·1450	1·1433	1.135	1·12996	1.245	1·085
1·287	0·945	0·8439	0·8463	0·842	0·8401	1·315	0·814
0·342	0·638	0·6390	0·640	0·638	0·6368	0·343	0·622
0·560	0·572	0·5648	0·573	0·572	0·5709	0·566	0·559

Таблиця ч. 2. **Методи другої групи в порівнянні між собою та з деякими**

Вік	Обсяг в поз. деціметр.	Промір при погруддї	Висота в сант.	$\frac{h_1}{h}$	$\frac{d_1}{d}$	$\left(\frac{d_1}{d}\right)^2$	Сочинник k	Число політків на 1 сант. (на 1·3 мет.)	Виглядове число f.	відсоток $p_v = \frac{200}{t} \frac{M-m}{M+m}$	відсоток $p = \frac{100}{t} \frac{\log M - \log m}{\log e}$ ....(37)
Сосна, 109 років, дача «Колєнець» на півд. Чехії, по Крафту											
10	8·95	2·3	240					—	0·901		
				0·251	0·1966	0·039	0·9			15·25	20·043
20	66·42	11·7	956					3	0·662		
				0·687	0·714	0·510	1·13			9·643	10·554
30	190·83	16·4	1392					4	0·649		
				0·716	0·847	0·717	2·01			4·771	4·867
40	310·48	19·4	1944					8	0·529		
				0·892	0·907	0·823	1·18			3·362	3·397
50	436·03	21·4	2180					9	0·556		
				0·918	0·923	0·852	1·07			2·175	2·183
60	542·42	23·2	2374					12	0·540		
				0·944	0·963	0·927	1·5			1·485	1·488
70	629·42	24·1	2515					15	0·549		
				0·945	0·960	0·929	1·4			1·135	1·135
80	705·08	25·1	2664					20	0·536		
				0·964	0·958	0·918	0·9			0·842	0·842
90	767·04	26·2	2753					25	0·522		
				0·968	0·982	0·964	1·8			0·638	0·638
100	817·55	26·7	2845					22	0·513		
				0·998	0·989	0·978	0·18			0·573	0·572
110	865·64	27.0	2850					37	0·530		

методами першої групи. СОСНА. (Приклад перший.) Таблиця ч. 2.

п р и р о с т у									
$p_f = \frac{200}{t}\frac{f-f_1}{f+f_1}$	Приріст за табл. Преслеровими	$p = \frac{200\,(k+2)}{t}\frac{d-d_1}{d+d_1}$ ....(67)	$p = \frac{100\,(k+2)}{t}\frac{\log d - \log d_1}{\log e}$ ..(70)	$p = \frac{200\,(k+2)}{nd_1}$ Шнайд. ......(60)	$p = \frac{200\,(k+2)}{nd}$ Шнайд. ......(60)	$p = \frac{100\,(k+2)}{t}\frac{d-d_1}{d_1}\left(1-\frac{d-d_1}{2d_1}\right)$ (76)	$p_m = 100\left(\frac{4}{dn}+\frac{\delta h}{h}+\frac{\delta f}{f}\right)$ ....(78)	$p_m = \frac{400\,\Delta d}{d}+\frac{100\,\Delta h}{h}$ ....(62)	$p = \frac{\log D^3}{\log e}:10 - \frac{\log d^3}{\log e}10$ ......(18)
І кл., природного походження, займище — бір.									
	—								
— 3·113		38·94	47.154	84.058	16.524	—123·590	15·311	39·628	48·799
	12·500								
— 0·0198		10·470	10·564	13·380	9·545	10·349	9·029	14·592	10·131
	6·500								
— 0·102		6·720	6·733	6·248	5·285	6·667	3·149	9·026	5·040
	2·713								
+ 0·0497		3·118	3·127	3·683	3·302	3·109	3·185	4·629	2·944
	2·178								
— 0·029		2·475	2·481	2·392	2·200	2·474	1·958	3·905	2·422
	1·500								
+ 0·016		1·332	1·333	2·011	1·936	1·332	1·651	2·061	1·142
	1·147								
— 0·240		1·382	1·382	1·411	1·454	1·408	1·114	2·153	1·220
	0·830								
— 0·113		1·243	1·238	0·925	0·886	1·241	0·666	2·004	1·287
	0·636								
— 0·177		0·718	0·719	1·318	1·294	0·718	0·829	1·372	0·342
	0·710								
+ 0·325		0·244	0·244	0·441	0·436	0·236	0·739	0·462	0·560
	0·432								

Таблиця ч. 3. **Методи другої групи в порівнянні між собою та з деякими**

Вік	Обсяг в m^3	Промір при погрудді в сант.	Висота в сант.	$\frac{h_1}{h}$	$\frac{d_1}{d}$	$\left(\frac{d_1}{d}\right)^2$	Сочинник k	Число політків на 1 сант. (на 1·3 мет.)	Вигльядове число f	відсоток $p = 100\sqrt[t]{\frac{M}{m}} - 1$ ....(4)	відсоток $p = \frac{200}{t} \cdot \frac{M-m}{M+m}$ ....(5)
Ялина, 89 років, дача «Замецька» на півд. Чехії, по Крафту											
19	0·0002	—	100					—	0·999		
29	0·0023	3·0	344					6	0·997	23·610	15.714
39	0·0115	6·2	530	0·649	0·484	0·234	0·68	7	0·724	16·487	12·857
49	0·0300	9·7	900	0·589	0·639	0·408	1·22	6	0·452	10·063	8·916
59	0·0865	13·0	1360	0·662	0·746	0·557	1·45	6	0·478	11·170	9·700
69	0·1969	16·9	1700	0·800	0·769	0·592	0·87	6	0·517	8·573	7·791
79	0·3323	20·5	2040	0·833	0·824	0·680	0·95	6	0·494	5·373	5·117
89	0·5175	23·8	2340	0·872	0·861	0·742	0·92	7	0·497	4·530	4·359

п р и р о с т у								
$p = \frac{\log D^3}{\log e}\cdot 10 - \frac{\log d^3}{\log e}\cdot 10 \ldots (18)$	$p_f = \frac{200}{t}\cdot\frac{f - f_1}{f + f_1}$	За приросними таблиц Преслеровими	$p = \frac{200\,(k+2)}{t}\cdot\frac{d - d_1}{d + d_1}\ldots(67)$	$p = \frac{100\,(k+2)}{t}\cdot\frac{\log d - \log d_1}{\log e}\,(70)$	$p = \frac{200\,(k+2)}{nd}\ldots(60)$	$p = \frac{100\,(k+2)}{t}\cdot\frac{d - d_1}{d_1}\left(1 - \frac{d - d_1}{2\,d_1}\right)(76)$	$p_m = 100\left(\frac{4}{dn} + \frac{\partial h}{h} \pm \frac{\partial f}{f}\right)\ldots(78)$	$p_m = \frac{400\,\Delta d}{d} + \frac{100\,\Delta h}{h}\ldots(52)$
I кл., природного походження, ґрунт — болотнина.								
	— 0·020	17·170					29·295	28·748
21·778	— 3·173	14·290	18·644	19·443	12·350	13·378	8·957	12·728
13·427	— 4·626	10·500	14·176	14·416	11·065	13·047	10·382	10·985
8·785	+ 0·559	7·833	10·031	10·098	8·846	9·591	9·055	8·511
7·871	+ 0·784	5·917	7·477	7·525	5·661	7·318	6·699	5·945
5·794	— 0·454	4·833	5·679	5·699	4·797	5·049	4·607	4·918
4·477	+ 0·061	3·500	4·350	4·359	4·706	4·322	3·753	3·692

Prof. Ing. M. Kosjura.

SOUDOBÉ SMĚRY V THEORII LESNÍHO PŘÍRŮSTKU.

(R é s u m é.)

Přírůstek dřevní hmoty závisí od složitých fysiologických procesů. Matematické zákony pro tyto procesy dosud neeksistují. Za účelem přiblížiti se k těmto problémům učenci-lesníci přirovnávali vrstvu dřevní hmoty, o kterou se strom rok co rok zvětšuje, k úrokům určitého kapitálu. Podobný předpoklad vyžadoval rozřešení následujících otázek: jaké způsoby úrokování, zda složité neb jednoduché, a jaký kapitál jest v dřevní hmotě.

Řešení této první otázky vyvolalo dosti názorů, které rozdělili učenci na několik skupin. Někteří z nich uznávali složité úrokování, jiní jednoduché, třetí modifikaci těchto a konečně Baule tvrdí, že proces přírůstku dřevní hmoty nemůže se počítati ani úrokováním složitým ani jednoduchým.

Co se týče druhé otázky, žádný z učenců se jí nezabýval, ačkoliv bylo nutno v prvé řadě vyřešiti tuto, ježto není-li zjištěný kapitál, nemůže se mluviti o úroku z něho.

Z uvedených předpokladů povstává celkem jasné stanovisko:

1. Přirůstání dřevní hmoty děje se v důsledku fysiologických činností kambia.

2. Kambium, které jest souhrn mnohých tvůrčích sil přírodních, v rozumění kapitálu nemůže býti, již proto, že nelze jej finančně vypočítati.

3. Přirovnání ročního přírůstku k jakémukoliv zúročení nemá v sobě žádné podstaty.

4. Rovněž není možno počítati hmotu stromu v různých momentech jeho vzrůstu jako počáteční a konečnou hodnotu jistého kapitálu.

A přece lesní taxace nemůže zůstati bez porovnání dřevní hmoty za určitou dobu k hmotě stromu, z kterého povstala. Tato činnost vyžaduje se pro ocenění stupně prospěchu dřevního přírůstku. V tomto případě používá se relativního úroku v obyčejném jeho výpočtu.

a) M e t h o d a s l o ž i t é h o ú r o k o v á n í nemůže se používati jako základní. Správné výsledky v porovnání s methodou Presslerovou povstávají náhodou, kdy hmoty ročních přírůstků jsou v geometrické řadě (položky M i m).

b) M e t h o d a P r e s s l e r o v a nejvíce se přibližuje k relativnímu úroku a byla by tedy správná, kdyby hmota stromů neb porostů uprostřed stanoveného periodu skutečně odpovídala průměrné velikosti, což může povstati jen náhodou. Presslerův vzorec zamlouvá se jednoduchostí a snadností pro výpočty. Jeho použitím získáme výsledek dostatečně přesný pro stromy a porosty staršího věku, při 5letých periodách (málokdy 10letých), u kterých přírůstek jest nepatrný.

c) M e t h o d y K u n z e o v a a L e v a k o v i č o v a sestrojeny na základě průměrných hmot podobně jako Presslerova. Vzorec druhé methody (16) jest správnější nežli první (6) a proto výsledky budou

přesnější. Obou těchto method může býti používáno pro stromy a porosty mladšího věku, v čemž jest přednost před methodou Presslerovou.

d) Methody Burjačkova a Fan-der-Flitova jsou si blízké, protože mění přírůstky na hmotě na přírůstky na průměru. Připouštějí, že za krátkou dobu výšky a výtvarnice se nezmění, což v podstatě jest nesprávné. Mimo to Burjaček klade v podstatu výpočtu složité úrokování v poměru krychlového obsahu k poměru krychlových průměrů. Tento postup znehodnocuje tuto methodu. Totéž můžeme říci i o vzorci Fan der Flitově, kde poměr obsahu zaměněn poměrem průměru 1. stupnice. Přezkoušením vzorců upevňují se theoretické předpoklady, výsledky obdrží se se značnou nepřesností.

e) Methoda Märkerova staví přírůstek a obsah stromu v geometrické řadě. Přezkoušení vzorců (11) této methody dalo dosti přesné výpočty, jsou však značně těžší, protože je nutno používati logaritmických tabulek.

f) Methoda Turského snaží se zaměniti všechny jiné methody relativním úrokem, souhlasí s myšlenkou Bauleho a Levakovyče a jest nejsprávnější, poněvadž není nic jednoduššího, než přírůstek zařaditi do aritmetické řady vzhledem k hmotě, na které tento přírůstek narostl neb je v této hmotě zahrnut.

Jednak autor těchto vzorců pro jejich sestavení používal vzorec složitého úročení, který dříve pokládal za nesprávný. A proto vzorce jeho, sestavené způsobem rozčlenění dvou položek podle binoma-Newtonova a vynecháním členů ve třetím i více stupních (28), (30), (31), (39), (40), (41) nemohou býti považovány za přesné se stránky matematické a mimo to je těžko počítati je za jednoduché a snadnější pro výpočty. Tohoto názoru jest i sám autor. Správnější matematické vzorce (36), (37) jsou nesnadné pro výpočty a vyžadují použití logaritmů. Ve všech svých badáních nad nejsnadnějším vzorcem Turský odstoupil od své původní myšlenky postaviti přírůstek v aritmetické řady k obsahu, na kterém se utvořil, jinak však neodstoupil od složitého úročení. Sestavené jím vzorce dávají dosti dobré výpočty, zvláště (28), a (37), které také pro mladší věk jsou vhodné. Jen v poslední své práci (Lesnaja taxacija z r. 1927) autor se vrátil na správný postup a zařadil přírůst k obsahu předběžnému (10) neb konečnému.

g) Baurova methoda zařazuje se do nejméně vhodných, poněvadž při sestavení vzorců této methody (43) dopustila se nelogického předpokladu.

Methody přibližného výpočtu úroků přírůstku:

a) Methoda Turského poukazuje na známé vzorce Schneiderův (60), Presslerův jednoduchý (67), položku „K“, která má za účel podati zákonoměrnost změnám čitatele (400—675), u vzorce Schneiderova (a také Breimanova) a zařaditi ve vzorec Presslerův poměr průměrů (1 stupeň) místo obsahu, jinak jej zjednodušiti. Turskému náleží úplně originální idea postaviti v jistou souvislost poměr výšek k průměrům. Tento předpoklad přivedl k ustanovení položky „K.“ Dále Turský sestavuje samostatně dva nové vzorce (70), (76), které spolu s uvedenými dvěma vzorci dávají dosti přesné výpočty.

Negativní stránkou ve dvou posledních vzorcích jest jejich složitost při výpočtech.

Výpočet položky „K“ znesnadňuje používání vzorce Schneiderova a nahrazuje se úplně správným výsledkem, kterého původní vzorec Schneiderův nemohl dosíci.

b) M e t h o d y K ü n k e l e o v a a V a l l i h o mají něco společného; vzorec první methody v porovnání se vzorcem druhé poukazuje na neukončenost. Všechny pokusy Valliho modifikovati vzorec Schneiderův a tímto zvětšiti jeho význam, nedosáhly vytčeného cíle. Vypočítání samého vzorce a přidaných položek Δ a Z. vyžaduje tolik času a obtíží při stanovení potřebných dat (na borovice, modříny a listnáče), že pro praxi tento vzorec nemá žádného významu.