НА ПРАВАХ РУКОПИСУ.

КУРС ГЕОМЕТРІЇ

I. ПЛЯНІМЕТРІЯ.

Kurs geometrie, č I. Planimetrie

lektor matur. kursů Ivanenko

1922

ПОДЕБРАДИ.

№ 7.

На правах рукопису.

ГЕОМЕТРІЯ.

КОНСПЕКТ

ЕЛЕМЕНТАРНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ, СКЛАДЕНИЙ ПО ЛЕКЦІЯХ, ЩО ВИКЛАДАЛИСЯ ЛЕКТОРОМ Е. ІВАНЕНКОМ НА РІЧНИХ МАТУРАЛЬНИХ КУРСАХ ПРИ УКРАЇНСЬКІЙ ГОСПОДАРСЬКІЙ АКАДЕМІЇ В Ч.С.Р. У 1922-23 ШКІЛЬН. Р.

М. ПОДЕБРАДИ. ВЕРЕСЕНЬ 1922.

ВИДАННЯ „ВИД. Т-ВА ПРИ У.Г.А." № 7.

Літографовано 150 примірн.

Вступ

Геометрія є наука про вимір простору геометричних тіл і дослідження їх властивостей.

Геометричним тілом зветься частина простору, який може займати фізичне тіло або його частина при певних умовах. Геометричне тіло має три виміри: довжину, ширину, й височину або грубину. Межа геометричного тіла наз. поверхнею. Поверхня має лише два виміри: довжину й ширину. Межа поверхні наз. лінією. Лінія має лише один вимір: довжину. Межа лінії наз. точкою. Точка не має жадного виміру.

Лінію можна розглядати як слід рухомої точки. В залежности від характеру руху точки творяться: прості, криві, хвилясті й ламані лінії. Напр. проста лінія може розглядатися як слід точки, що безперерви рухається в одному й тому напрямку. Криві і хвилясті лінії утворюються точками, що при своєму руховi відповідно змінюють постійно напрям руху.

Часто в геометрії приходиться наближено вживати як взірець і матеріяльну лінію, яку завжди можна розглядати як суму безмежної кількости безкрайне малих матеріяльних точок.

Проста лінія, що обмежена в одній точці, наз. променем /Рис. 1./

Рис. 1.

Частина простої лінії, обмежена з обидвох боків

Рис. 2.

точками наз. відтинком простої /Рис. 2./ Поверхню можна розглядати як слід рухомої, рівнобіжно самій собі лінії. Обмежена лініями частина поверхні наз. вирізком поверхні. Вирізок поверхні, що обмежує геометричне тіло зветься: його поверхнею, або /плоска поверхня/ - гранню, або стіною геом. тіла. Матеріяльну поверхню можна розглядати як суму безмежної кількости ліній рівнобіжних між собою. Геометричне тіло іноді розглядається і як слід рухомої рівнобіжно собі поверхні. Матеріяльне тіло можна розглядати як суму безмежної кількости рівнобіжних собі поверхонь. Поверхня, до якої проста лінія пристає цілими своїми точками в усіх напрямках, наз. площею.

Частина геометрії, що має завданням досліджувати всі види промірів на площі, наз. планіметрією; так частина, що досліджує проміри в просторі наз. стереометрією.

У геометрії зустрічаються слідуючі речення: 1/ Визначення, - такі речення, що в стисл строго логичній формі устанюють властиві прикмети того чи иншого виразу або назви. 2) Аксіоми - такі істини, що через свою очевидність, можуть бути твердженні без доказу. 3) Постуляти - такі твердження, що приймаються без доказу за основну засаду тої або иншої логичної сістеми. 4) Теореми - твердження, що стають очевидними лише шляхом певного логичного аналізу, або доводів. Кожна теорема складається з умови й висновку; умовою наз. та частина теореми, що ставить ті умови, яких ми мусимо дотримуватися при доведенні теореми; висновок - та частина, що висловлює твердження, до якого маємо дійти в результаті своїх доводів. Теорема, в котрій умовою поставлено висновок даної, а висновком умову - наз. зворотньою або оберненою даній (яка тоді називатиметься прямою.) Теорема, яка не є безпосереднім кінцем ланцюга системи теорем і трактує о твердженнях не звязаних з попередніми, наз. лемою.

Аксіоми простої: 1) Через дві точки можна провести лише одну просту; 2) проста лінія є найкоротше віддалення між двома точками. Два відтинки простої лінії наз. пристаючими, коли вони, при накладенні один на одного, пристануть всіма своїми точками. Дві прості лінії перетинаються лише в одній точці, бо инакше вони були б приставали всіма точками згідно аксіоми.

Частина площі, обмежена з усіх боків лініями наз. фігурою. Обвід фігури наз. периметром її, а частина площі оточена периметром наз. полем фігури.

Кути.

Необмежена частина площі, що міститься між двома промінями перетиненних простих наз. кутом; точка, в котрій прості перетинаються, наз. вершком його, а самі лінії – раменами кута. (Рис. 3.) На рисунку кут означується літерами латинського шрифту, що ставляться: одна при вершкові його й по одній на раменах і це означення читається й пишеться так, щоб літера, яка стоїть при вершкові була між двома другими, напр. (Рис. 4) кут ABC, або CBA. Коли вершок кута не є спільним з иншими кутами, то кут можно скорочено називати $\angle B$, коли ж вершок B є спільний й иншим кутам, то необмінно називають його трома літерами $\angle ABC$ і $\angle ABD$ (Рис. 5), бо назвавши одною – $\angle B$ буде невідомо про який кут йде розмова. Коли йде лише про величину кута, то він визначається малою

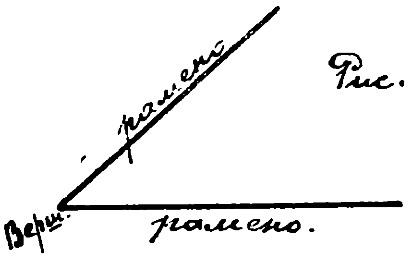


Рис. 3.

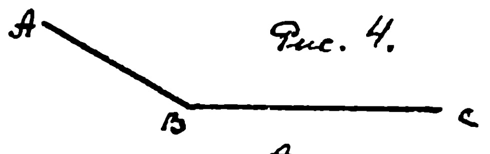


Рис. 4.

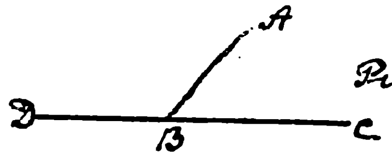


Рис. 5.

літерою, яка ставиться в середині кута, напр., ∠a. (Рис. 6)

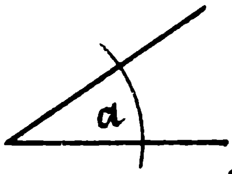


Рис. 6.

Тому що кут є частина площі, яка обмежена лише з двох боків раменами а з третього може необмежено простиратися, то величина кута не залежить від тої або иншої величини рамен, що означають лише напрями по яким йде обмеження поля кута. Порівнюючи поле кута ∠A і ∠B (Рис 7) ми спостерігаємо, що поле ∠B значно менше порівнюючи з ∠A, причиною цього є те, що росхил між раменами кута ∠B менший ніж у куті ∠A. Таким чином стає ясним, що про величину можно міркувати лише по степеню росхилу його рамен. Як більший росхил рамен, то й кут буде більший.

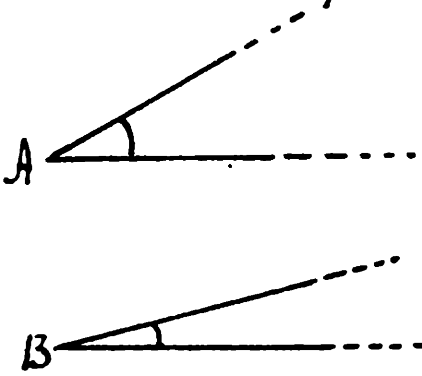


Рис 7.

Кут можна розглядати як поле, що утворюється обертовим рухом одного рамена від другого навколо вершка. (Рис. 8). За додатний напрям руху вважають рух проти стрілки годинника; в геометрії мають діло лише з додатними кутами. В цьому разі рамено AC має назву нерухомого або основного рамена, чи проміня, а рамено

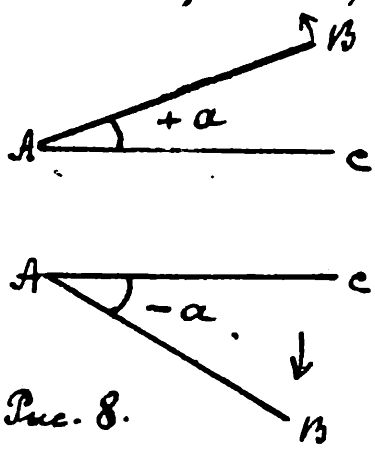


Рис. 8.

АВ - рухомого рамена або проміня. (Рис. 8.)

Порівнання відтинків простої.

Уявлення того, що лінія є слід рухомої точки, дав нам розуміння напряму простої. Ми завжди можем умовно прийняти, що визначена лінія має той або инший напрям, який в геометрії можем умовно означувати порядком літер.

Давши простій I назву АВ (Рис. 9) ми тим самим указали її напрям від А до В. Коли бажано надати тій же простій протилежний напрям, то ми її означимо так: „ВА" (тіж самі розуміння мають означення SO і OS.)

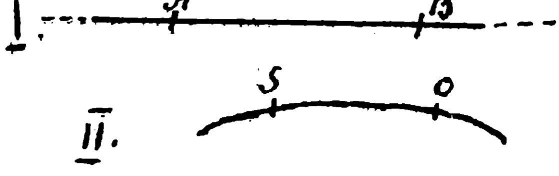


Рис. 9.

Коли ми говоримо про напрям відтинка простої або кривої лінії АВ, то уявляємо, що точка, слід якої утворив лінію, відтинком якої є АВ, рухалась так, що попереду пройшла положення А, а потім В (у відтинку ВА - навпаки). У відтинку АВ точка А зветься *початком відтинка*, а точка В - *кінцем його* (Рис. 10)

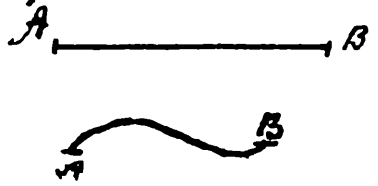


Рис. 10.

Для порівнання відтинків простої, накладають один відтинок, напр. АВ (Рис. 11) на другий - ДС так, щоб точка А впала в точку В і відтинок АВ пішов

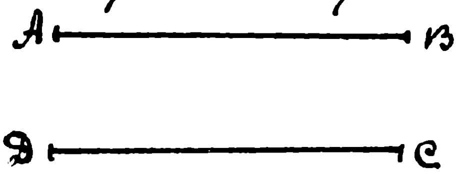


Рис. 11.

по відтинкові ДС; коли точка В також упаде в точку С, коли відтинки пристануть всіми своїми точками, то вони є рівні або пристайні, в иншім разі той з них менший, якого кінець (В або С) впаде ближче.

Щоб винайти суму кількох відтинків простої, напр. а і в (рис. 12) треба на довільному промині з точки А відкласти АВ = а й від кінця його В відкласти ВС = в; тоді відтинок АС = а+в.

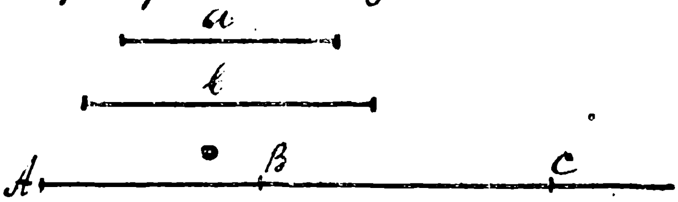


рис. 12.

Також поступаємо в разі й більшого числа доданків. Щоб збільшити відтинок простої в кілька разів, напр. а (рис. 13.) в три рази, треба на довільному промині з точки А відкласти даний

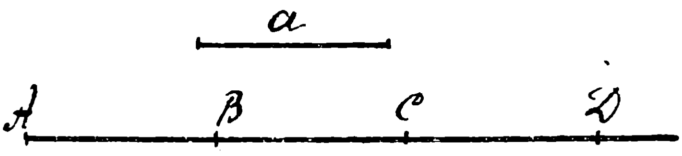


рис. 13.

відтинок один за другим як при додаванні 3 рази: АВ = а, ВС = а; СД = а; а × 3 = АД. Різницю відтинків, напр. а і в (рис. 14) одержимо тоді, коли на промині з точки А від-

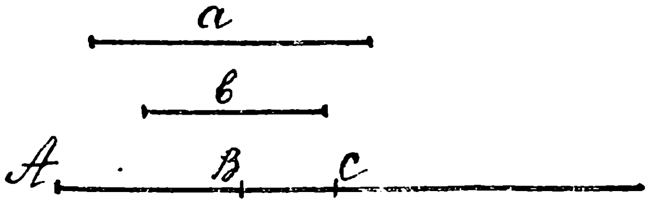


рис. 14.

кладемо від точки А один з відтинків, напр. в = АВ, а потім із тієї точки А відтинок а = АС; тоді ВС = а − в.

Порівнання кутів

Щоб порівняти два кути, напр. ∠ ABC і ∠ KLM (рис. 15) накладаємо ∠ ABC на ∠ KLM так, щоб вершок B ∠-а ABC упав на вершок L ∠-а KLM й рамено BC пішло по рамену LM. Коли AB піде по KL с. т. коли кути пристануть всіма точками, то вони є рівні; коли ж AB піде десь у середині ∠ KLM, с. т. по LB_1, чи зовні його, с. т. по LB_2, то з кутів той є менший, який складає частину другого й навпаки.

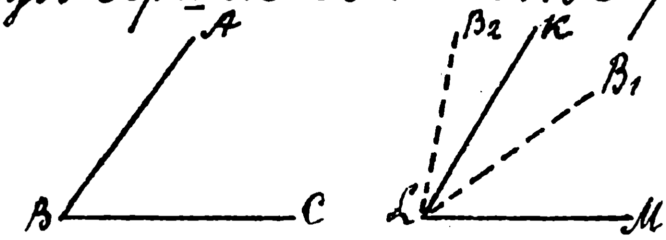


Рис. 15

Щоб додати ∠ ABC до ∠-а MNP (рис. 16) ми прибудовуємо до ∠-а MNP ∠ ABC так, щоб вершок B впав у вершок N, рамено BC пішло по рамену NM тоді рамено BA прийме положення NA_1 і ∠ A_1NP буде сумою кутів ABC і MNP.

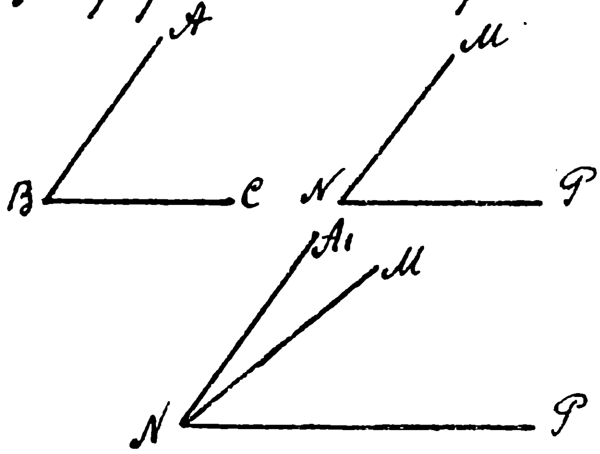


Рис. 16.

Навпаки, щоб відлічити ∠ ABC від ∠-а MON (рис. 17) ми накладаємо ∠ ABC на ∠ MON так, щоб вершок B упав на вершок O, рамено BC пішло по рамену ON, тоді рамено BA прийме положення OA_1 і ∠ MOA_1 буде потрібною ріжницею

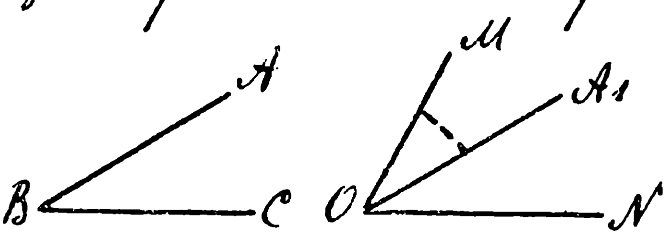


Рис. 17.

Способом притудовання знайдимо й здобуток кута на абстрактне число

Види й властивости кутів

Візьмемо просту AB (рис. 18) на ній точку C і рухаймо промінь CD. Хай в початковому положенню промінь CD займає положення здовж CB. Тоді кута DCB не буде, або як кажуть $\angle DCB = 0$. Будемо обертати промінь CD проти стрілки годинника. Тоді утвориться якийсь $\angle DCB$, який що далі буде зростати. В той час другий кут суміжний визначеному $\angle ACD$ буде зменшуватися. Нарешті наступить час

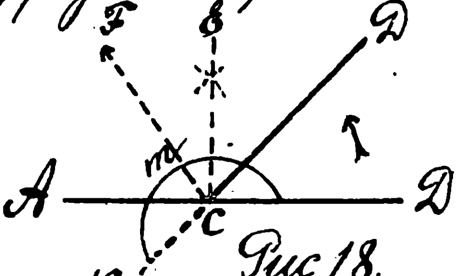


Рис 18.

коли промінь CD прийме положення CE, коли кути: ECB і ECA стануть рівними (пристайними) між собою. Такі кути ми будемо називати прямими. В дальшому руховi проміня CD $\angle DCB$ стає вже більшим $\angle$-а DCA (напр. в положенню проміня FC). Нарешті промінь DC досягне положення AC (пристане до нього тоді $\angle BCA$ уявить просту і має назву <u>випростаного кута</u>. Очевидно, випростаний кут рівний сумі 2-х прямих. При дальшому руховi проміня CD утворюються <u>опуклі кути</u> або роги. Напр. в положенню CK кут $\angle m$, який більше вже 2-х прямих.

Два кути що мають спільний вершок і спільне рамено, а два инших рамена лежать на продовженні одно одного (складають одну просту) наз. суміжними (рис. 19.) Напр. ∠CAB й ∠BAD - кут, що рівняється своєму суміжному, наз. прямим, напр. ∠CAE (рис. 19); на письмі слова „прямий кут" заміняються літерою d. Кут менший від прямого наз. гострим, а більший - тупим.

Висновок: кожну просту лінію можна розглядати як випростаний кут = 2d.

Прості, що утворюють між собою прямий кут наз. прямими, або перпендикулярами й навпаки, дві прості, взаємно прямі одна до одної - утворюють між собою прямий кут.

Теорема. Із точки, що лежить на простій, до цієї простої можна поставити лише один прям. Припустим, що ми маємо M і M_1 (рис. 20) як прями до AC з точки B а саме BM і BM_1. З визначення пряма - це є спільне рамено

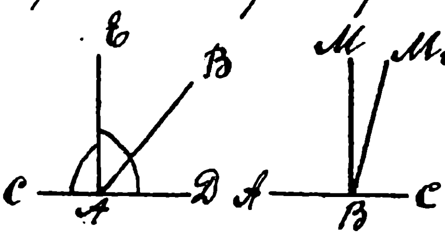


Рис.20

2-х рівних суміжних кутів: тому ми маємо $\angle MBA = \angle MBC$, але й для пряма M_1B маємо $\angle M_1BA = \angle M_1BC$. Але $\angle M_1BA > \angle MBA$, а кут $M_1BC < \angle$-а MBC або $\angle M_1BC < \angle$-а MBA, бо кути $MBA = \angle MBC$ і ми маємо що із двох рівних кутів $\angle M_1BA$ і $\angle M_1BC$ один більше, а другий менше одного й тогоже кута. Це неможливо й припущення що можно провести через одну точку до простої 2 пряма - неможливе -

<u>Теорема</u>: Всі прямі кути рівні й пристайні. $\angle ABC = \angle DEF$ (рис. 21). При накладенні $\angle ABC$ на $\angle DEF$ так щоб вершок $\angle B$ упав у вершок E, а рамено BC пішло по рамену EF і другі рамена BA і

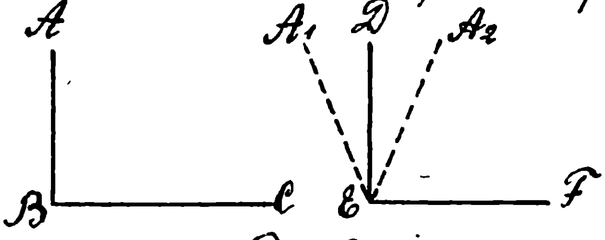


Рис. 21.

ED мусять пристати бо инакше на простій EF можна булоб поставити в одній точці E 2 прями, що протиречить попередній теоремі.

<u>Теорема.</u> Сума суміжних кутів рівна $2d$ (рис. 22). Із самого визначення суміжних кутів виходе,

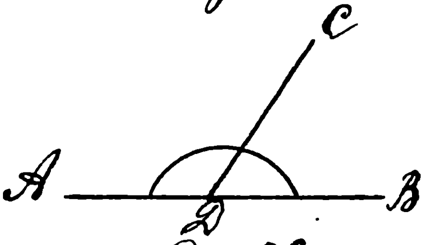


Рис. 22.

що їх сума складає просту AB, що є випростаний кут, який як ми знаємо рівний $2d$.

<u>Зворотня теорема.</u> Два кути, що мають спільне рамено й спільний вершок і в сумі рівні $2d$ є суміжні (себто їх инші рамена є продовження одно одного) (рис. 23). Припустім що рамено AD не є

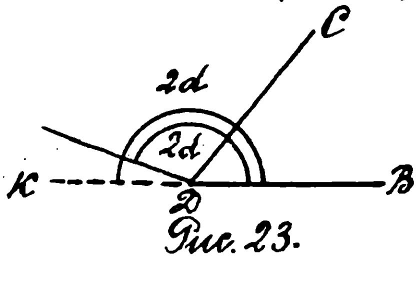


Рис. 23.

продовження DB. Тоді можемо продовжити BD в напряму K і матимем випростаний кут BDK, рівний як знаємо $2d$. Тоді маємо протиречча, що й частина кута ADB і цілий $\angle KDB$ рівні $2d$.

<u>Висновки</u>: 1) сума всіх кутів по один бік простої $= 2d$; 2) сума кутів навколо точки $= 4d$, бо в першому разі сума всіх кутів = випроста-

ному куту, а в другому разі = 2 випростаним кутам.

Кути, що мають спільний вершок а їх рамена є продовженням одно одного, наз. вершковими.

__Теорема.__ Вершкові кути взаємно рівні (рис. 24)

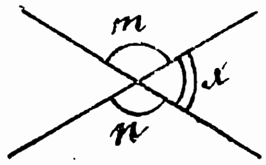


Рис. 24.

$\angle m = \angle n$? $\angle m$ = випрост. $\angle$-ові $2d - x$; $\angle n$ = випр. $\angle$-ові $2d - x$; таким чин. $\angle m = 2d - x$ і $\angle n = 2d - x$; тому $\angle m = \angle n$

__Теорема.__ З точки поза простою можна спустити на цю просту лише один прям (рис. 25) $CD \perp AB$. Припустимо, що CK буде теж $\perp AB$ й перегнемо рисунок по AB так, щоб він заняв положення ABC_1; тоді коли $\angle CDB = d$ то й $\angle C_1DB = d$. Також коли $\angle CKD = d$, то й $\angle C_1KD = d$. Отже $\angle CDC_1 = 2d$ – є випростаний кут, себто проста; також і $\angle CKC_1 = 2d$ також випростаний кут, себто проста, але через 2 точкі дві простих CC_1 і CKC_1 провести неможливо, а тому CK мусить злятися з CD і прям буде лише одним.

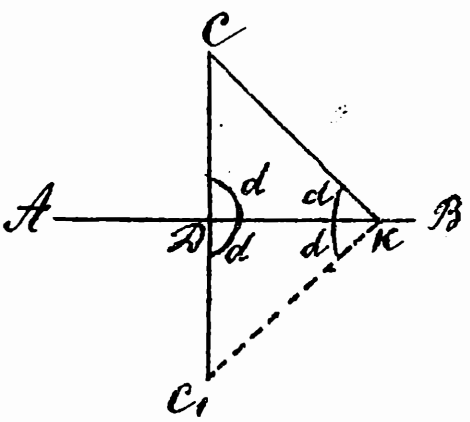


Рис. 25.

Рівнобіжні.

Дві прості, що не перехрещуються, скільки б їх не продовжувати, наз. __рівнобіжними.__

Коли ми дві які небудь прості (рис. 26) AB і CD перехрестимо простою MN то матимем цілий ряд кутів, з яких 4 пари кутів: $\angle b$ і $\angle f$; $\angle a$ і $\angle e$; $\angle d$ і $\angle l$; $\angle c$ і $\angle k$ звуться злучними. 2 пари кутів: $\angle c$ і $\angle f$; $\angle e$ і $\angle d$ - звуться внутрішніми перехресними; 2 пари кутів: $\angle b$ і $\angle k$; $\angle a$ і $\angle l$ - зовнішніми

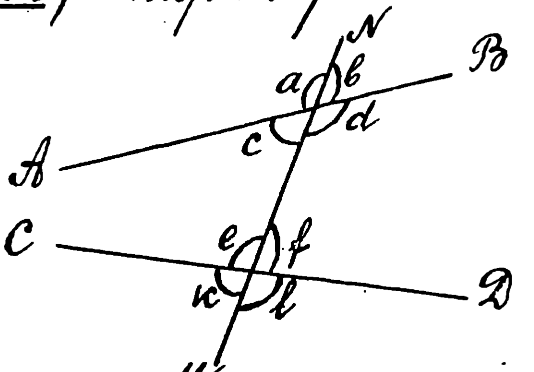


Рис. 26.

перехресними; 2 пари кутів: $\angle d$ і $\angle f$; $\angle e$ і $\angle c$ - внутрішніми однобічними і, нарешті, 2 пари кутів: $\angle a$ і $\angle k$; $\angle b$ і $\angle l$ - зовнішніми однобічними. Розглянемо, коли ці прості AB і CD будуть рівнобіжними, себто які для цього мусять істнувати умови:

Умови рівнобіжности простих.

Дві прості AB і DC (рис. 27) будуть рівнобіжні тоді, коли злучні, внутрішні і зовнішні перехресні кути будуть попарно рівні, або коли суми внутрішніх і зовнішніх однобічних

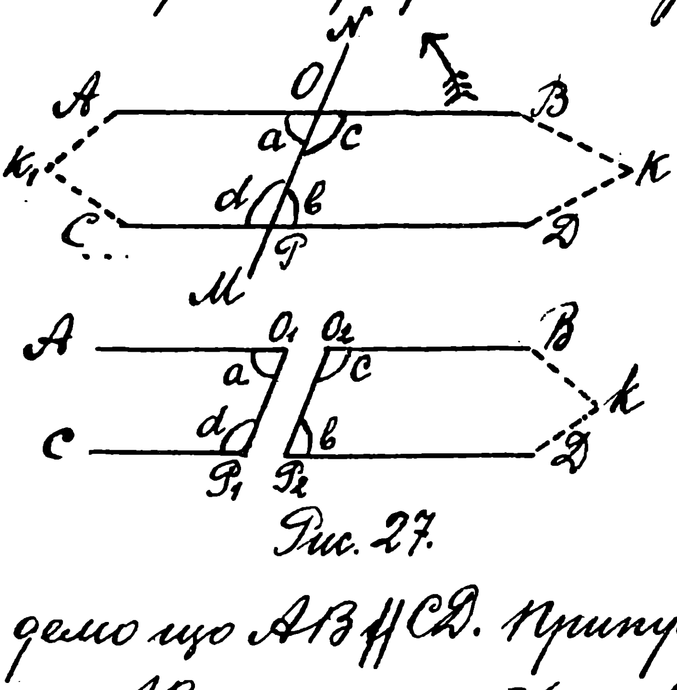


Рис. 27.

кутів також попарно будуть $= 2d$. Доведемо попереду 1) що прості рівнобіжні коли внутрішні перехресні кути будуть попарно рівні. Припустимо що $\angle a = \angle b$ і $\angle c = \angle d$, доведемо що $AB \parallel CD$. Припустимо противне що AB перехрещується з CD в якісь точці K. Тоді розріжемо рисунок по січній MN і повернемо праву частину пострілоці й накладемо на час[т]ину AO_1P_1C так, щоб точка O_2 впала в P_1, а проста O_2P_2 пішла по простій P_1O_1. Позаяк $O_2P_2 = P_1O_1$ тому що це є один і той же відтинок OP, то точка P_2 впаде в точку O_1. Вершок $\angle b - P_2$ впа[де] у O_1, рамено P_2O_2 пішло по рамену O_1P_1, а $\angle b =$ $= \angle a$ то й друге рамено P_2D піде по рамену O_1A. Так само через те що $\angle c = \angle d$, рамено O_2B піде по P_1C. Таким чином проміні PD і OB пристали з промінями OA і PC то коли проміні PD і OB перетинаються в точці K то й проміні AO і PC будуть перетинатьса в якісь точці K_1. Коли тепер розгорнемо рисунок то матимем, що прості AB і CD, які не зливаються перетинаються в 2^х точках K і K_1 чого не може бути, тому AB і CD не можуть ні в одному напрямку перетинатися — значить вони рівнобіжні

Доведемо тепер, що коли внутрішні перехресні рівні то й решта умов задовольняються, себто досить іступування однієї з 5^{ти} умов щоб прості були рівнобіжні, а саме: 1) <u>Коли злучні кути рівні, то й внутрішні перехресні рівні (себто прості рівнобіжні)</u>. Припустим $\angle e = \angle b$ (рис. 28), то $\angle e = \angle a$, бо

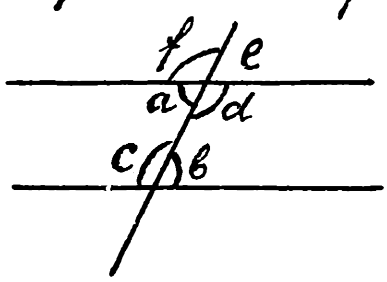


Рис. 28.

це вершкові, а тому $\angle b = \angle a$. Коли $\angle f = \angle c$, то і ми приходимо до 1-ї ум.

$\angle f = \angle d$ як вершкові а тому $\angle d = \angle e$. 2) Коли зовнішні перехресні рівні то й внутрішні перехресні рівні (себто прості $\parallel$-ні) Припустим що $\angle a = \angle l$ (рис. 29). то $\angle a = \angle d$ і $\angle l = \angle e$ як вершкові й тому $\angle d = \angle e$. Так само коли $\angle b = \angle k$ то $\angle b = \angle c$, а $\angle k = \angle f$ і тому $\angle f = \angle c$) і приходимо до 1-ї умови.

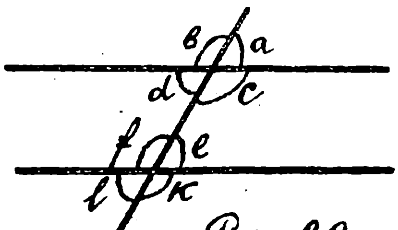


Рис. 29.

3) Коли сума внутрішніх однобічних кутів $= 2d$, то внутрішні перехресні кути рівні (себто прості $\parallel$). Припустим що $\angle c + \angle e = 2d$ (рис. 29), але $\angle c + \angle d = 2d$ як суміжні. Порівнюючі рівности ми маємо суми $(2d)$ однакові, по одному з доданків $(\angle c)$ теже однакові, значить і другі доданки рівні тому $\angle e = \angle d$. Так само, коли $\angle d + \angle f = 2d$; то $\angle d + \angle c = 2d$ (суміжні) і знова маємо суми й один з доданків $(\angle d)$ рівні то й другі доданки рівні – $\angle f = \angle c$. 4) Коли сума зовнішніх однобічних кутів $= 2d$, то внутрішні перехресні кути рівні (себто прості рівнобіжні) Припустим $\angle a + \angle k = 2d$; але $\angle a + \angle c = 2d$, як суміжні. Порівнюючи суми ми маємо $\angle k = \angle c$, але $\angle k = \angle f$ (вершкові), то $\angle f = \angle c$. Так само і для $\angle b + \angle l = 2d$.

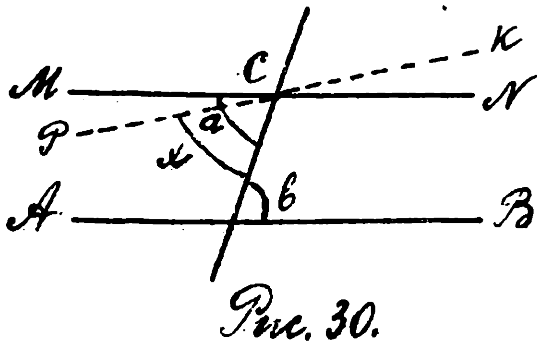


Рис. 30.

Теорема: Через точку поза простою можна до цієї простої провести лише одну рівнобіжну (рис. 30). Припустимо що через точку

С поза простою AB можно крім простої MN рівнобіжної AB провести ще одну просту PK також ‖ну AB. Але тоді по умові рівнобіжности AB і MN маємо що ∠a = ∠b, а з умови рівнобіжности AB і PK маємо також, що внутрішні перехресні ∠x = ∠b. Дві величини зокрема рівні третій є рівні поміж себе, а тому ∠a = ∠x; але частина кута не може рівнятися цілому куту, а тому наше припущення неправдиве й другої рівнобіжної до AB крім MN через точку С провести не можна.

Висновки: 1) Два прямі до простої є рівнобіжні (бо злучні кути рівні як прямі). 2) Проста, пряма до одної рівнобіжної є пряма й до другої (бо кут що утворить вона з другою рівнобіжною буде злучним першому й тому буде прямий). 3) Коли маємо до простої прям і похилу, то вони перетинаються (бо злучні кути не рівні й ці прості не є рівнобіжні).

Теорема. Кути, що мають взаємно рівнобіжні рамена, є рівні, коли вони обидва гострі або тупі (рис. 31) й сума їх = 2d, коли один з них гострий, а другий тупий (рис. 32.)

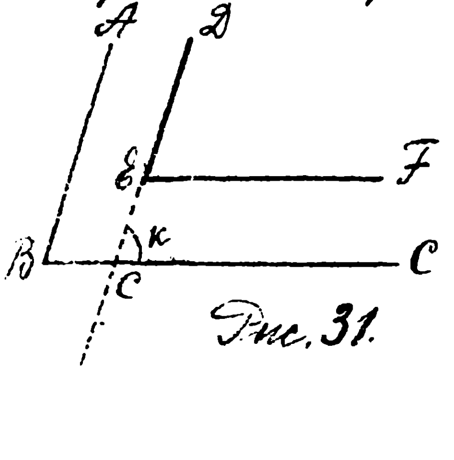


Рис. 31.

$AB \parallel DE$; $EF \parallel BC$

$\angle B = \angle E$?

Продовживши DE до перетинання з BC в точці К одержимо: $\angle B = \angle K$; $\angle E = \angle K$ (як злучні при рівнобіжних) а тому $\angle B = \angle E$;

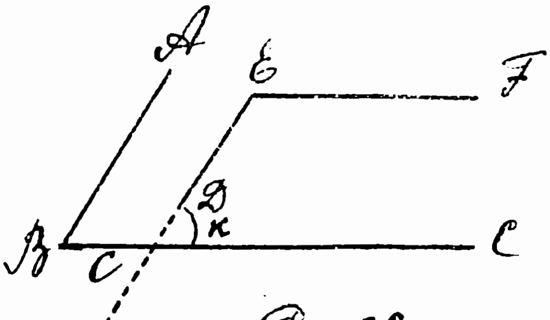


Рис. 32.

$$\frac{AB \parallel ED;\ EF \parallel BC}{\angle B + \angle E = 2d?}$$

Продовживши ED до перетинання з BC в точці C одержимо: $\angle B = \angle K$ як злучні; $\angle E + \angle K = 2d$ як внутрішні однобічні; тому $\angle B + \angle E = 2d$.

Теорема. Два кути, що мають взаємнопрямі рамена, рівні, коли обидва гострі або тупі (рис. 33) й сума їх $= 2d$, коли один з них гострий, а другий тупий (рис. 34).

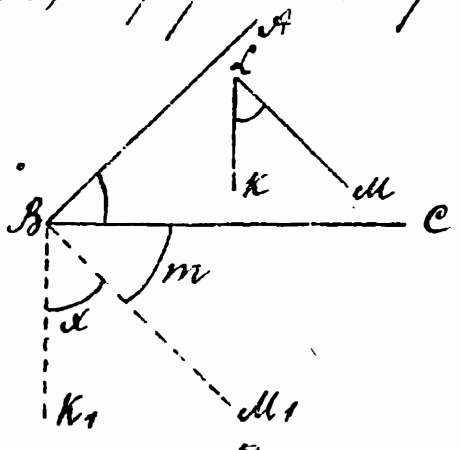


Рис. 33.

$$\frac{AB \perp LM;\ LK \perp BC}{\angle B = \angle L?}$$

З вершка B кута ABC проведемо $BK_1 \parallel LK$; $BM_1 \parallel LM$; тоді $\angle x = \angle L$; далі: $\angle x + \angle m = d$; $\angle m + B = d$; звідси: $\angle x + \angle m = \angle m + \angle B$; $\angle x = \angle B$ і $\angle B = \angle L$.

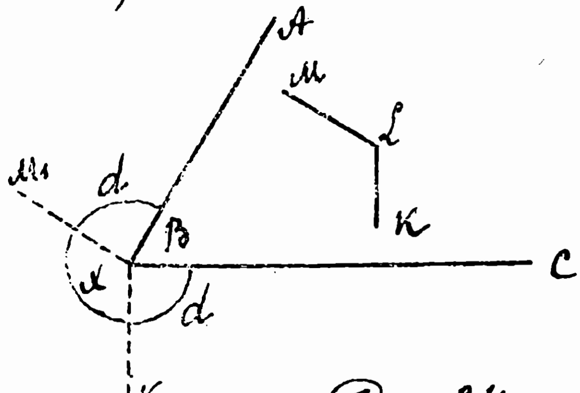


Рис. 34.

$$\frac{AB \perp ML;\ BC \perp LK}{\angle B + \angle L = 2d?}$$

З вершка B кута ABC проведемо $BK_1 \parallel LK$; $BM_1 \parallel LM$; тоді $\angle x = \angle L$; далі: $\angle B + \angle x + \angle d + \angle d = \angle B + \angle x + 2d = 4d$; звідси $\angle B + \angle x = 2d$; тому $\angle B + \angle L = 2d$.

Трикутник.

Частина площі, обмежена трьома простими, що перетинаються між собою, наз. трикутником (Δ). Відтинки ~~Прості~~, що утворюють Δ наз. боками його; точки перехрещування боків Δ-ка, наз. вершками Δ-ка; одно з боків Δ-ка можна прийняти за основу (рис. 35), а два другі боки будуть раменами цього трикутника. Згідно боків Δ-ки поділяються на: 1) рівнобічні - з усіма рівними боками; 2) рівнораменні з 2 рівними боками й 3) ріжнобічні — з нерівними боками. Згідно кутів Δ-ки поділяються на 1) ріжнокутні - з усіма нерівними кутами, 2) прямокутні - з одним прямим кутом, а рештою гострими, 3) тупокутні одним тупим кутом, а рештою гострими; 4) гострокутні - з усіма гострими кутами. В прямокутному Δ-ві розріжняємо: 2 прямки або катети с. т. боки, що творять прямий кут і протипрямку, або гіпотенузу, с. т. бік, що лежить проти прямого кута

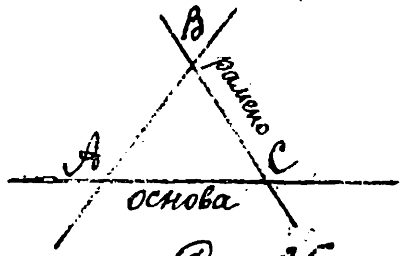
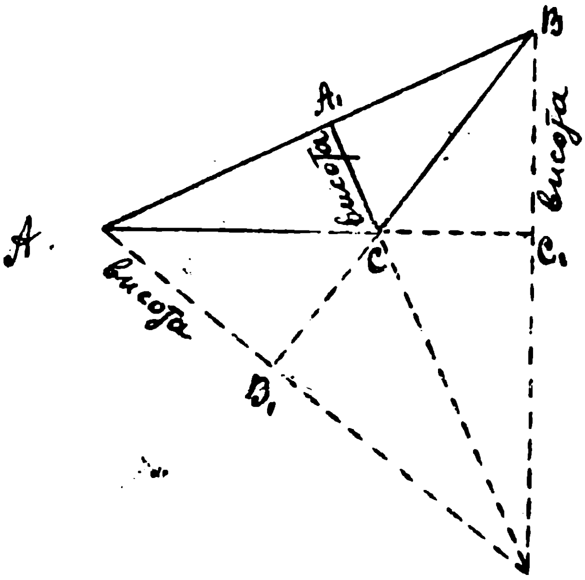


Рис. 35.

Прості лінії в середині Δ-ка.

1) Прямі спущені з вершків Δ-ка на протилежні боки, або на їх продовження, називаються висотами (рис. 36) Таким чином в кожному Δ-ві можна провести три висоти (h_{AB}, h_{BC}, h_{AC}), які перехрещуються в одній точці. 2) Прост,



що з'єднують вершини кута з серединою протилежних боків наз. осередніми Δ-ка, або медіанами (рис. 37). Примітка. Всі три медіани Δ-ка перетинаються в одній точці (центр ваги). На письмі слово „висота" заміняється иноді літерою „h", при котрій ставиться означення лінії, на котру спускається, напр. h_{AC} й читається „висота на AC"; слово „медіана" означається теж „M", при котрій ставиться означення лінії, до котрої вона проведена, напр. M_{AC}, й читається: „медіана до AC." 3) Прості, що ділять кути в Δ-ові на рівні половини, наз. сіметральними кута, або бісектрисами. Всі три сіметральні Δ-ка перерізуються в одній точці (рис. 38).

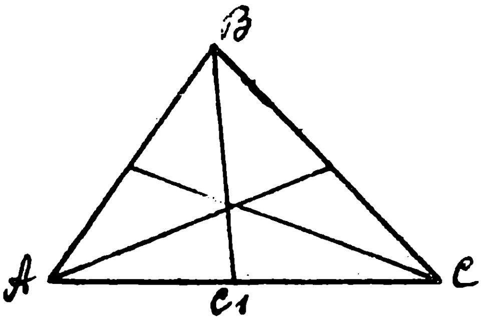


Рис. 37.

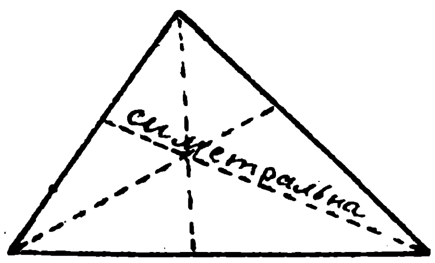


Рис. 38.

<u>Лемма:</u> В рівнораменному Δ-ві симетральна кута при вершку Δ-ка є одночасово й осередньою й висотою (рис. 39).

$$\frac{AB = BC;\ \angle x = \angle y}{BD \perp AC;\ AD = DC\ ?}$$

Перегнемо Δ ABC по симетральній BD так, щоб Δ BDC

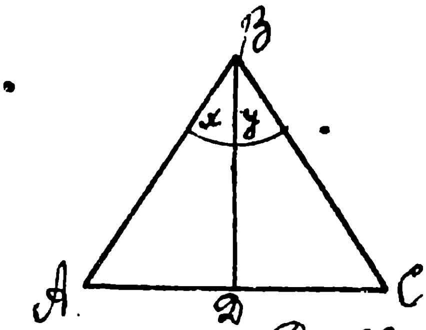


Рис. 39.

наклався на $\triangle BDA$; тоді BC піде по BA (бо $\angle x = \angle y$) й точка C упаде в точку A по рівности AB і BC; значить, DC пристане до AD, бо через дві точки A і D можна провести лише одну просту, а тому $AD = DC$ і $\angle ADB = \angle BDC$, звідси $\angle ADB = d$ і $BDC = d$ й BD буде $\perp AC$.

<u>Висновок</u>: В рівнораменних $\triangle$-ах кути при основі рівні

<u>Пристайність трикутників.</u>

<u>Умови пристайности трикутників</u>:

2 $\triangle$-ки є пристайні, коли: 1) бік і прилеглі до нього кути в одному $\triangle$-ві взаємно $=$ боку й прилеглим до нього кутам в другому $\triangle$-ві (рис. 40)

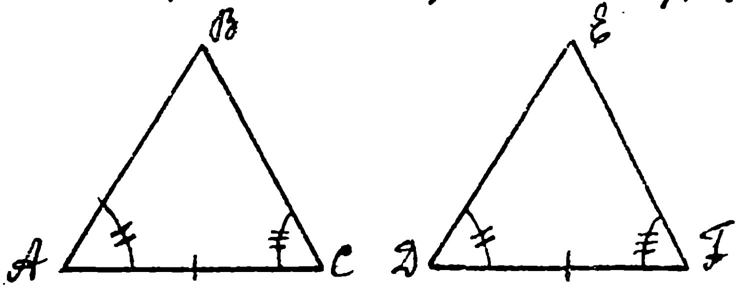


Рис. 40.

$$\begin{array}{c} AC = DF \\ \angle A = \angle D \\ \angle C = \angle F \\ \hline \Delta ABC = \Delta DEF\,? \end{array}$$

Накладемо $\triangle ABC$ на $\triangle DEF$ так, щоб вершок A впав у вершок D й AC пішла по DF; тоді точка C впаде в точку F по рівности AC і DF; AB піде по DE й CB по FE по рівности кутів $\angle A = \angle D$ і $\angle C = \angle F$, значить точка B впаде в точку E, бо дві прості перехрещуються лише в одній точці. 2) 2 трикутники пристайні коли два боки й кут між ними в одному $\triangle$-ві взаємно $=$ 2 бокам і кутові між ними в другому (рис. 41).

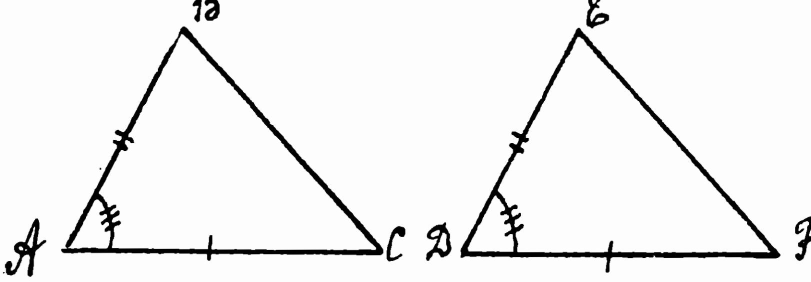


Рис. 41.

$AB = DE$;
$AC = DF$;
$\angle A = \angle D$

$\Delta ABC = \Delta DEF$?

Накладемо ΔABC на ΔDEF так, щоб вершок A впав у вершок D й AC пішло по DF а з рівности AC і DF точка C упаде в точку F; по рівності кутів $\angle A$ і $\angle D$ проста AB піде по прямій DE й точка B впаде в точку E; звідси й BC пристане до EF, бо між двома точками можна провести лише одну просту. 3) 2 трикутники пристайні, коли всі три боки в одному Δ-ві взаємно рівні всім 3 бокам в другому (рис. 42).

$$\frac{AB = DE;\ BC = EF;\ AC = DF}{\Delta ABC = \Delta DEF?}$$

Накладемо ΔABC на ΔDEF так, щоб вершок A упав на вершок D і AC пішло по DF тоді й вершок C упаде в вершок F бо $AC = DF$ і тоді ΔABC може 1) або пристати до Δ-ка DEF 2) або заняти положення DB_1F 3) або DB_2F; в першому випадкові $\Delta ABC = \Delta DEF$; коли ж ΔABC займе положення DB_1F, то провівши EB_1 будемо мати, що Δ-ки 1) EDB_1 і 2) ΔEFB_1 є кожний рівнораменний (бо з умови

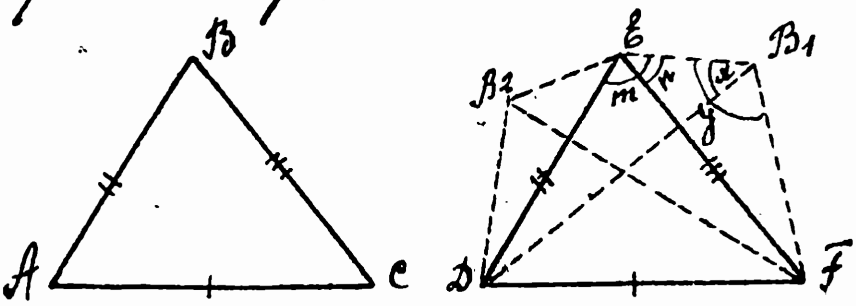


Рис. 42.

B_1F_1 що теж саме що $BC = EF$, а DB_1, що теж саме що $AB = DE$. Тому кути при їх основах будуть: $\angle m = \angle x$ а $\angle n = \angle y$. й ми маємо що цілий кут $\angle m$ = частині кутау $= \angle x$, а з другого боку частина кута $\angle m$, кут $\angle n$ рівний цілому $\angle y$ – що є абсурд. Теж саме матимем коли вершок B упаде в точку B_2. А тому вершок B не може упасти поза точкою E і трикутники ABC і DEF мусять прилягти.

Залежність між боками Δ-ка.

Теорема: В кожнім Δ-ові 1) сума двох боків більше третього (рис. 43). $BC + AC > AB$?

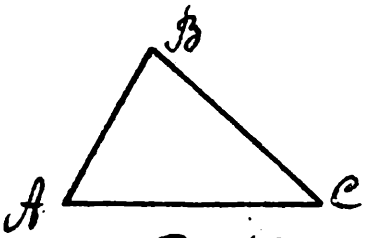


Рис. 43

Найкоротше віддалення між A і B буде AB, а тому ламана $BC + AC > AB$. 2) Один бік більше різниці двох других (рис. 44). $EF > DF - DE$? $DF < DE + EF$

$$\frac{\begin{array}{r} DF < DE + EF \\ -DE \quad -DE \end{array}}{DF - DE < EF}$$

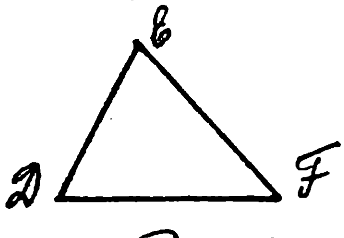


Рис. 44.

Залежність між кутами Δ-ка.

Теорема. Сума всіх внутрішніх кутів Δ-ка рівна двом прямим кутам (рис. 45)

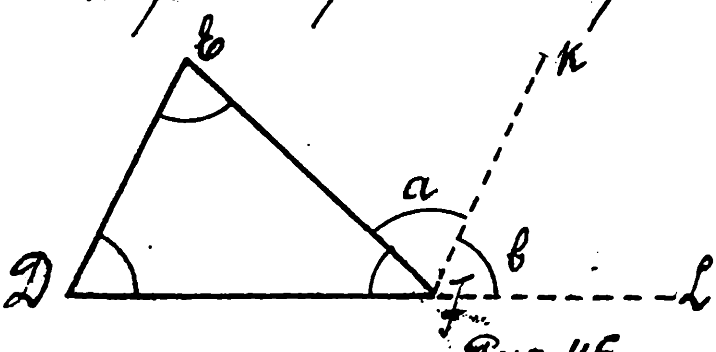


Рис. 45.

$\angle D + \angle E + \angle F = 2d$? Продовжимо DF і з точки F проведемо $FK \parallel DE$; тоді $\angle E = \angle a$ як внутрішні перехресні при рівнобіжних DE і FK і січній EF а $\angle D = \angle b$ як злучні при рівнобіжних DE і KF і січній DF; але $\angle F + \angle a + \angle b = 2d$, як сума кутів по один бік простої; замінивши $\angle a$ рівним кутом E і $\angle b$ рівним кутом D матимемо: $\angle F + \angle E + \angle D = 2d$.

Висновки: 1) Зовнішній кут Δ-ка = сумі 2-х внутрішніх, з ним несуміжних кутів. З рисунка 45 ми вивели, що зовнішній кут $EFL = \angle a + \angle b$, а $\angle a = \angle E$, $\angle b = \angle D$, тому $\angle EFL = \angle E + \angle D$. 2) Зовнішній кут Δ-ка завжди більше кожного внутрішнього несуміжного з ним (тому, що він є рівний сумі 2-х несуміжних кутів. 3) В кожному прямокутному Δ-ові може бути лише один прямий кут, а решта будуть гострі; 4) в кожному тупокутному Δ-ві може бути лише один тупий кут, а решта - гострі; 5) в рівнобічному Δ-ові кожний кут $= 2/3 d$.

Залежність між боками й кутами Δ-ка

Теорема. В кожному Δ-кові проти рівних боків лежать рівні кути й проти більшого бо- ку лежить більший кут. 1) Припустимо, що $AB = BC$ (рис. 46), тоді Δ-к є рівнораменний, а в ньому кути при основі є рівні, а тому $\angle a = \angle b$.

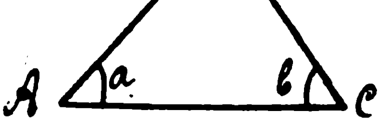


Рис. 46

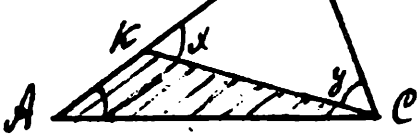


Рис. 47

2) Хай бік $AB > BC$ (рис. 47) то й кут $\angle C > \angle A$? Від точки B

видкладено $BK = BC$, тоді ΔKBC є рівнораменний і $\angle x = \angle y$, але кут x є зовнішній для ΔAKC, тому він більший внутрішнього несуміжного з ним $\angle x > \angle A$; $\angle y$ складає частину $\angle C$ тому $\angle C > \angle y$. А як $\angle x = \angle y$, то кут $C > \angle y$ і тим ще більш $\angle A$.

Зворотня теорема. В кожному Δ-ові проти рівних кутів лежать рівні боки й проти більшого кута лежить більший бік. Будемо це доводити способом противленного припущення. I) Отже припустимо (рис. 46), що проти $\angle B$ лежить більший бік себто $AB > BC$. Але тоді з попередньої теореми мусить бути проти AB більший кут, себ-то $\angle C > \angle A$, що противоречить умові. Теж саме буде коли припустимо, що $BC > AB$. Тому AB мусить бути рівним BC.

Висновки: 1) кожний Δ-к з двома рівними кутами є рівнораменний; 2) трикутник, що має всі три кути рівні є рівнобічний.

II) Припустим тепер (рис. 47), що проти більшого кута $\angle C$ лежить $AB = BC$, тоді з попередньої теореми знаємо, що проти рівних боків лежать рівні кути й тому мусить бути що $\angle C = \angle A$, що противоречить умові. Припустим тепер, що $AB < BC$, тоді з попередньої теореми очевидно, що кут $\angle C < \angle A$ (проти більшого боку лежить більший кут) - це також протречить умові. Тому AB мусить бути більшим BC (AB > BC)

Висновки: 1) Найбільший кут в прямокутному Δ-ові є прямий, тому гипотенуза більш кожного катета. 2) Тому само бік проти тупого кута в тупокутному Δ-ові є найбільший.

Теорема: Коли в 2х трикутниках два боки одного взаємно рівні двом бокам другого, а кути між ними нерівні, то: 1) проти більшого кута лежить більший бік (рис 48) і 2) проти більшого боку — більший кут. (рис 49)

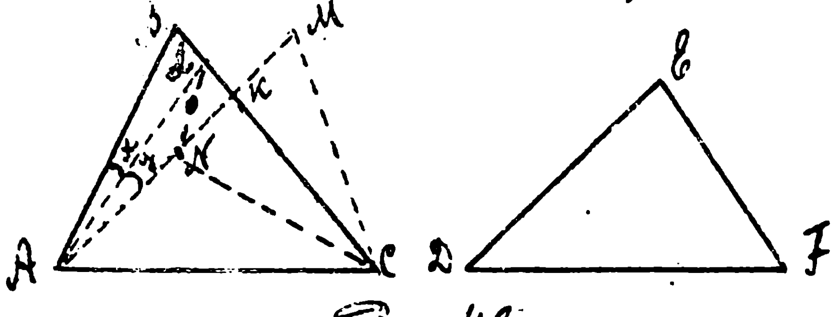


Рис. 48.

$AB = DE$
$AC = DF$
$BC > EF$?

Накладемо Δ DEF на Δ ABC так, щоб вершок D впав у вершок A і AC та DF пристали тому що вони рівні і вершок F впаде у вершок C. Тоді через те, що ∠D < ∠A бік DE прийме положення в середині кута BAC, припустим AM і вершок E може впасти або 1) на боку BC в точці K, або

2) в точці N в середині трикутника, або 3) в точці M поза Δ-ком ABC. В першому випадкові KC є частина BC і тому BC > KC що значить BC > EF. В другому й третьому випадку можна однаковим способом довести що BC > EF. Для

цього проводимо симетральну кута $\angle BAM$: AL і зеднаємо L з M, (а в другому випадкові з N) тоді $\Delta ABL = \Delta ALM$, бо $AB = AM$; $\angle x = \angle y$ і AL є спільна а тому $BL = LM$; далі з Δ-ка MLC ми маємо щобік MC менше суми других - $MC < ML + LC$; а тому, що $ML = BL$, а $BL + LC = BC$, - знаходимо: $MC < \overset{BC}{\cancel{BL + LC}}$.

2) $\underline{AB = DE,\ AC = DF,\ BC > EF}$ Припустивши,
$\angle A > \angle D$? що $\angle A$ не більше $\angle D$,
будемо мати що або $\angle A = \angle D$, або $\angle A < \angle D$. тоді з попередньої теореми $BC = EF$ або $BC < EF$, що є проти умови, а тому залишається випадок що $BC > EF$.

Властивости пряма й похилої спущених із спільної точки на просту.

Прямова проекція або мет відтинка є віддалення між основами прямів, спущених на вісь з кінців відтинка. (рис. 49) Коли відтинок є вектор, то й мет має напрямок від основи прямa початку вектора до основи прямa спущеного з кінця вектора (рис. 49, 50)

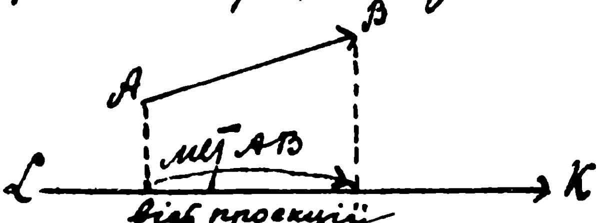


Рис. 49.

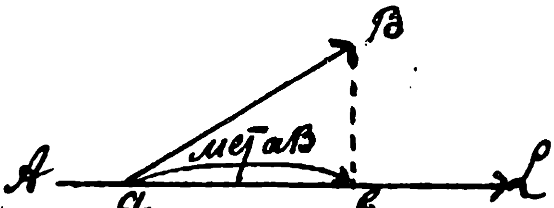


Рис. 50.

Теорема. Дві похилі спущені з однієї точки на просту рівні, коли мають рівні проекції і навпаки рівні похилі мають рівні проекції (рис. 51). 1) $\dfrac{AD = DC;\ BD \perp AC}{AB = BC?}$

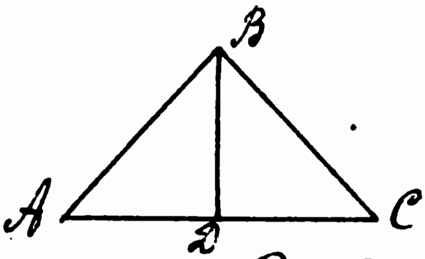


Рис. 51.

В Δ-ках ABD і CBD є спільний катет DB і рівні катети AD=DC тому прямокутні Δ-ки: ABD і DBC - рівні й гіпотенузи їх рівні; себ-то AB= =BC. 2) $\frac{AB=BC}{AD=DC?}$ Коли AB=BC то Δ-к рівнораменний і висота BD є разом і осередня Δ-ка тому AD=DC.

Теорема: З двох похилих спущених з точки на просту, та з них більша, що має проекцію більшу і навпаки більша з двох похилих спущених зі спільної точки на просту має більшу проекцію. $\frac{AD>DC;\ BD\perp AC}{AB>BC?}$ (рис. 52). Одкладемо KD=DC тоді BC=BK. Але ∠A є гострий, а ∠AKB є тупий, бо ∠K завжди гострий, то суміжний кут BKA є тупий.

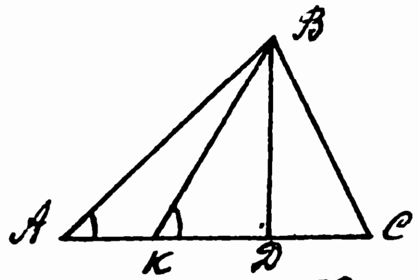


Рис. 52.

∠AKB > ∠A а тому проти ∠AKB лежить в Δ-ові ABK більший бік AB; AB>KB себ-то AB > BC. 2) $\frac{AB>BC;\ BD\perp AC}{AD>DC?}$ (рис. 52). Припустим противне що AD або рівне або менше DC; AD=DC; AD<DC. Тоді в першому випадкові ми довели - мусить бути AB=BC, а в другому випадкові AB<BC, що протиречить умові.

Висновки. Прям є найкоротше віддалення (є міра віддалення) точки від простої, бо прям є катет, а кожна инша проста з даної точки (похила) є гіпотенуза (що більша кожного з катетів.)

Теореми. Прямокутні трикутники рівні коли: 1) катет і прилеглий гострий кут одного рівні катетові й прилеглому гострому кутові другого. (Доказ зводиться до доведення пристайности $2^х$ Δ-ків з рівним взаємно боком і двома рівними кутами при нім).
2) Коли два катети одного взаємно рівні двом катетам другого; (Доказ зводиться до доведення пристайности $2^х$ Δ-ів з двома взаємно рівними боками й рівним кутом між ними).
3) коли протипрямка (гипотенуза) й гострий кут одного рівні протипрямці й гострому кутові другого (рис. 53)

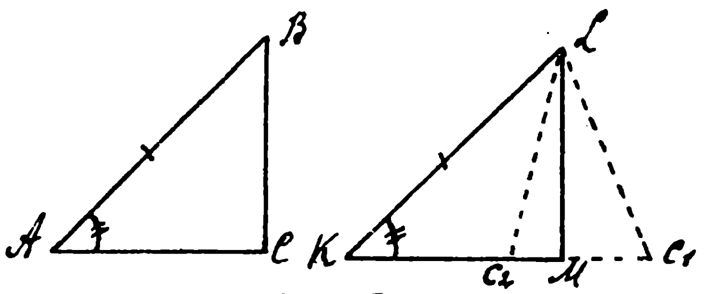


Рис. 53.

$$\frac{AB = LK \quad \angle A = \angle K}{\Delta ABC = \Delta KLM.}$$

Накладемо Δ ABC на Δ KLM так, щоб точка A впала в точку K й AB пішла по KL; з того, що AB = KL - точка B впаде в L; катет AC мусить піти по KM, бо ∠A = ∠K по умові; тепер припустимо, що BC не пристане до LM, а займе положення LC_2 або LC_1; при такім припущенні з L можна було б спустити кілька прямок, а тому ці випадки неможливі й BC піде лише по LM й тоді Δ ABC = Δ KLM.
4) Коли гипотенуза й катет одного рівні гипотенузі й катетові другого (рис. 54).

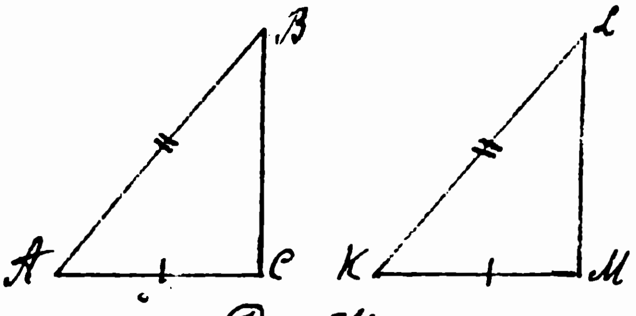


Рис. 54.

$AB = KL$; $AC = KM$

$\Delta ABC = \Delta KLM$

Накладемо ΔABC на ΔKLM так, щоб рівні катети AC і KM пристали; тоді BC піде по LM (як прям. до AC), а AB мусить піти місце по KL, бо инакше матимем похилі рівні, але їх проєкції будуть складати частину одна одної що неможливо.

Геометричні місця.

Геометричне місце точок є така лінія або поверхня, всі точки якої, без виключення, підлягають одному й тому ж певному закону. Найбільш відомі геометричні місця: I) Прям., проведений до відтинка через його середину є геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відтинка. II) Зворотня теорема. Всяка точка, яка є рівновіддалена від двох других точок і не лежить з ними на одній простій, завжди знаходиться на прямій, проведеному через середину відтинка, що з'єднує цих дві точки. 1) Припустім що маємо відтинок AB і прям. $ДM$ із середини AB (рис. 55); себ-то $AД = ДB$ треба довести що всі точки на цьому прямові є рівно віддалені від A і B.

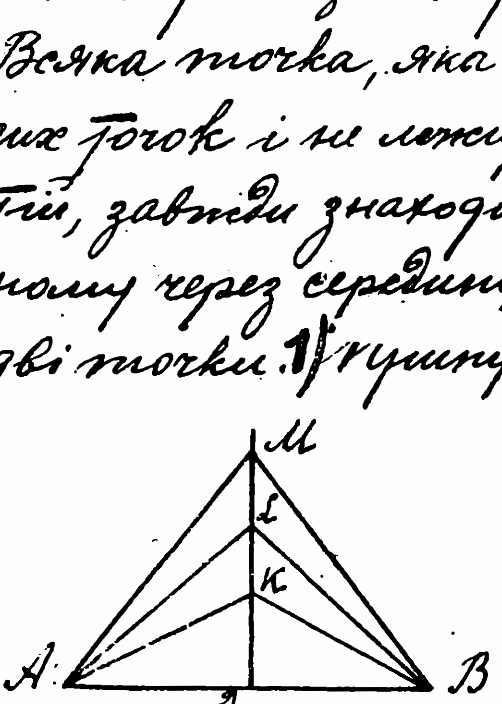


Рис. 55.

Якуб точку на пряму DM не взяли б завжди матимем 2 похилі (AK, KB; AL і LB; AM і MB), що постійно мають рівні проекції $AD = DB$, а тому ці похилі завжди рівні поміж себе.

2) $\frac{AC = CB}{CD \perp AB?}$ З'єднаємо точку C з A і B (рис. 56), а в Δ-кові ACB проведемо осередню CD. Але $AC = CB$, а тому ΔACB є рівнораменний, а тому осередня (медіана) CD є одночасно й висотою, а звідси $CD \perp AB$, себто є прямою із середини відтинка AB.

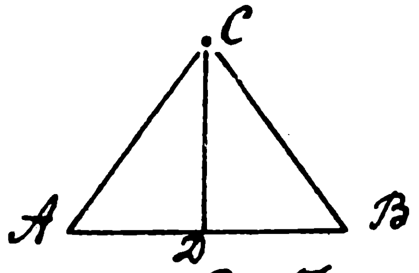


Рис. 56.

<u>Симетральна кожного кута є геометричне місце точок, рівновіддалених від рамен кута.</u> (За віддалення точки від простої вважається величина прямої, спущеного з цієї точки на цю просту (рис 57).

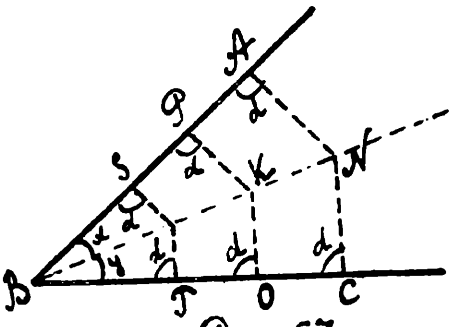


Рис. 57.

$\frac{\angle x = \angle y}{NA = NC;\ KP = KO \text{ і так далі.}}$

Провівши симетральну BN кута ABC, взявши на ній точку N й, опустивши з неї прям NA і NC матимемо, що ΔABN і ΔBNC є прямокутні й мають рівні кути x і y та спільну гипотенузу BD, а тому є рівні; звідси $NA = NC$; цей же доказ заміщається й для кожної точки, що лежить на симетральній BN, бо завжди матимемо спільну гипотенузу (на симетральній) і рівні кути: $\angle x = \angle y$.

4) <u>Кожна точка, яка рівновіддалена від рамен кута, лежить на його симетральній</u> (рис. 58).

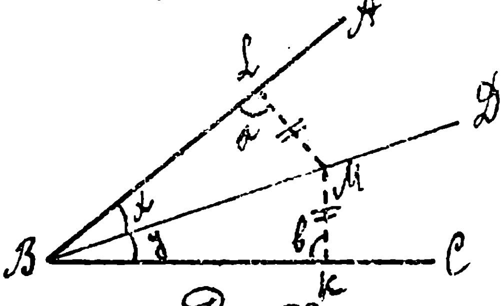


Рис. 58.

$ML = MK$

$\angle x = \angle y$?

ΔLBM і ΔMBC є прямокутні й рівні, бо $LM=MK$ по умові, BM є спільною гипотенузою, а тому проти рівних боків лежать рівні кути й $\angle x = \angle y$. Доказ залишається такий же для кожної иншої точки, рівновіддаленої від сторін кута. 5) <u>Обвід кола є геометричне місце точок, рівновіддалених від однієї точки що називається центром</u> (рис. 59). Проста, що злучує точки обводу кола з центром і є мірою їх віддалення від центра, наз. лучем (радіусом). Відтинок простої, що злучує дві точки обводу кола й проходить через центр його, наз. поперечником (діаметром) кола.

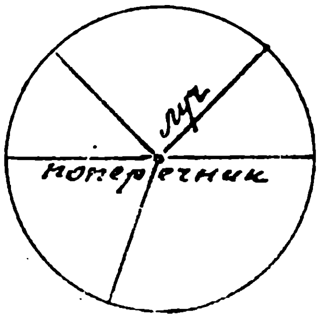


Рис. 59.

<u>Будування геометричних фігур способом геометричних місць.</u>

1) <u>Знайти точку, яка віддалена від точки А на m.</u> (рис. 60). Точка ця мусить лежати на обводі кола з центром А і радіусом m. А тому з точки А як центра закреслюємо

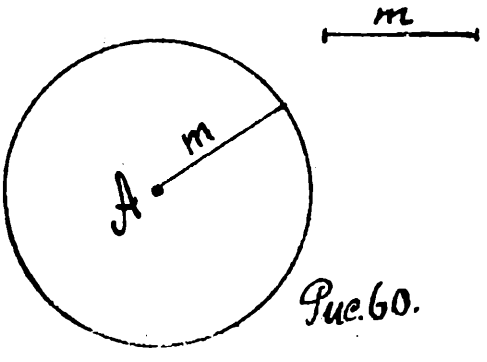


Рис. 60.

радіусом m коло, на обводі якого лежатиме точка. (Цих точок є безліч). 2) Знайти точку, рівновіддалену на віддаленні m від A і B (рис. 61).

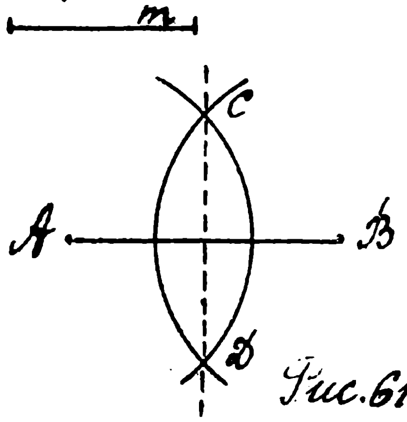


Рис. 61.

Шукаємо попереду точку, що лежить на віддаленні m від A. Ця точка, ми знаємо, лежить на колі, радіуса m, проведеного з центра A. Також точка віддалена на m від B буде лежати на колі, що накреслимо радіусом „m" з центра B. Ці два кола перехрещуватимуться в двох точках C і D і ці точки будуть ті, що ми шукали віддалені на „m" від даних точок A і B. Знаючи, що точки рівновіддалені від кінців відтинка AB лежать на ⊥-рі з середини цього відтинка (геометрічне місце) ми, з'єднавши C і D мусимо одержати прям з середини відтинку AB [таким чином як висновок приходимо: 1) до поділу відтинка AB на половину і 2) до проведення із середини відтинка AB прямa до нього-(для цього досить з кінців відтинка однаковим радіусом більшим половини AB описати кола й точки перехрестя цих кол з'єднати] 3) Дана точка C й проста AB (рис. 62). Знайти такі точки на AB, які були б віддалені від C на відтинок m. З точки C радіусом „m" закреслюємо обвід кола, щоб перехрестив AB. Точки K і L

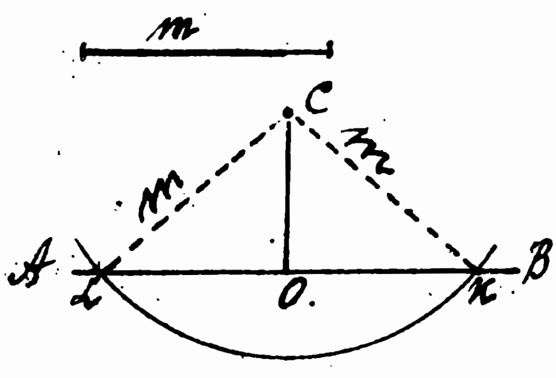


Рис. 62.

будуть рівновіддалені від C як лучі. Задача можлива коли $CO < m$, або рівне m (тоді буде одна точка)

<u>Задача. Знайти точку віддалену від даних точок: A на m а від точки B на n</u> (рис. 63). Така точка лежатиме на колі радіуса „m" з точки A й на колі радіуса „n" з точки B (на підставі попереднього). Задача можлива коли $m+n \geq AB$ (инакше не буде пересічування). При $m+n = AB$ така точка буде одна й лежатиме на відтинку AB, а при $m+n > AB$ точок буде дві по обидва боки від AB. На підставі цього рішаються задачі:

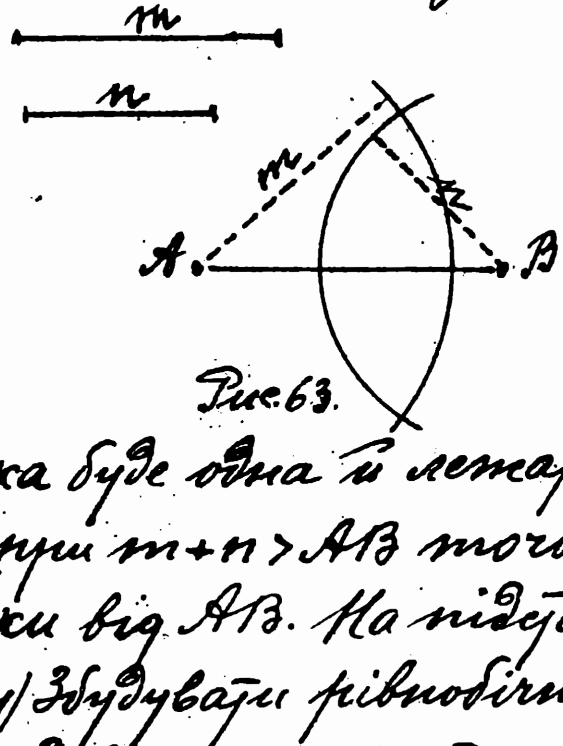


Рис. 63.

1) Збудувати рівнобічний Δ-к по даному боку.
2) Збудувати трикутник по даним трьом бокам.
3) Збудувати рівнораменний Δ-к по основі й рамену.

<u>Задача. Збудувати кут пристайний до даного.</u>

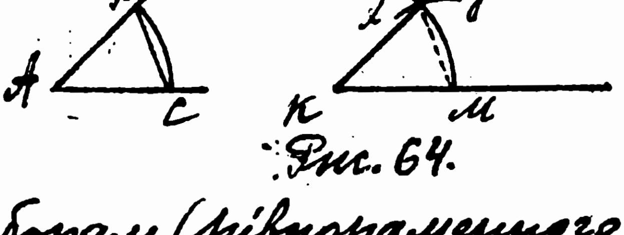


Рис. 64.

Ця задача фактично зводиться до будування пристайного даному Δ-ка по трьом бокам (рівнораменного). З верхка кута A як центра описуємо дугу BC і тим самим відкладамо рівні боки Δ ABC. Віддалення BC буде його основою. На довільній простій в точці K будуємо Δ-к пристайний ABC. Для цього відклавши від K відтинок AC=KM шукаємо точку N віддалену від K на довжину AB і від точки M на довжину BC. Для цього радіусом AC=MN окреслюємо дугу MS з точки K і радіусом BC дугу xy з точки M, як центрів. Точка перехрещення дуг SM і ⌣xy буде потрібною точкою N. Проводячи просту KN, матимемо ∠K = ∠A (як відповідні кути пристайних трикутників).

На підставі цієї задачі будуємо: 1) трикутник по боку і двом прилеглим кутам. 2) по двом бокам і куту між ними 3) по двом бокам і куту проти більшої й т. д.

<u>Задача. На відтинку AB в даній точці поставити до нього прям</u> (рис. 65).

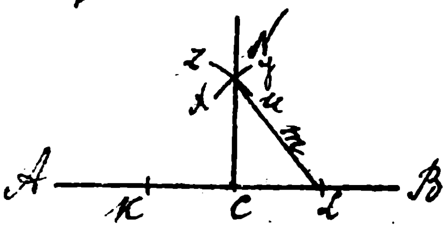


Рис.65.

Задача зводиться до того, що ⊥ із середини відтинка є геометричне місця точок рівновіддалених від кінців відтинка. Для того від точки C одкладаємо рівні відтинки KC=CL. Тоді з обох точок K і L як з центрів описуємо кола довільним радіусом „m" (але більшим ніж CL, щоб мати точку перехрещення поза відтинком AB). Точку перехрестя дуг xy і zu — N з'єднуємо з C — це й буде наш прям бо він являється геометричним місцем точок рівновіддалених від K і L. На підставі цієї задачі будуємо прямокутні Δ-ки: 1) по двом катетам; 2) по катету й гіпотенузі 3) катету й гострому куту.

<u>Задача.</u> <u>З точки поза простою спустити на неї прям.</u> (рис. 66). Задача основана на тому, що ⊥ що проходить через середину відтинка є геометричне місце точок рівновіддалених від кінців відтинка. Спочатку (на підставі 3-ї задачі) знаходимо точки A і B рівновіддалені від C. Для чого довільним радіусом (який би перехрещував просту MN) описуємо коло з точки C.

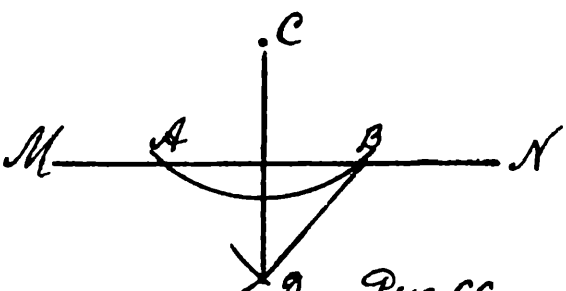


Рис. 66.

Знайдені точки A і B перехресть кола з простою MN і будуть рівновіддалені від C. Щоб визначити прям треба знайти ще одну (другу) точку тако ж рівновіддалену від A і B; для чого, як нам вже відомо, довільним радіусом (більшим $\frac{1}{2}$ AB) описуємо кола навколо A і B як центрів і знайдемо на перехресті кол точку D. Тоді проста CD буде прямою до AB, бо з'єднуватиме точки C і D рівновіддалені від A і B. (себто CD є геометричне місце цих точок). На цій задачі будуємо прямокутний Δ-к по гіпотенузі й гострому куту й подібні їй.

<u>Задача.</u> <u>Переполовинити даний кут.</u>

(провести сіметральну кута) (рис 67).

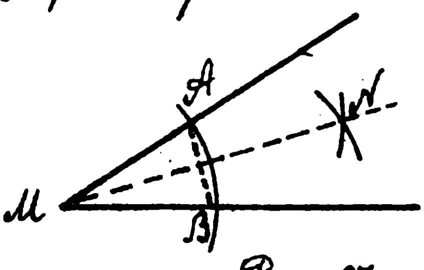


Рис. 67.

Задача розвязується на підставі того, що осередня до основи рівнораменного трикутника разом є й сіметральною його вершкового кута. Тому радіусом довільним із точки M як центра описуємо дугу кола. Точка перехрестя дуги з раменами кута A і B є вершками при основі (AB) рівнораменного Δ-ка AMB. Коли тепер знайдемо середину AB і з'єднаємо з M то матимем потрібну сіметральну. Ми вже уміємо переполовинювати даний відтинок, а тому, як це робиться при переполовинюванню відтинка з точок A і B. як з центрів довільним радіусом (більшим ½ AB) описуємо кола й перехрестя їх точку N з'єднуємо з вершком M. З вище зазначених міркувань ця проста MN мусить бути сіметральною кута M

На підставі цієї задачи розвязуються:
1) Збудувати рівнораменний трикутник по висоті й куту при вершкові. 2) Знайти точку рівновіддалену від боків Δ-ка і т. д.

Загальна метода розв'язання задач на будування.

Коли ми маємо умову задачи то перед тим як приступати до переведення будування нашого завдання ми мусимо проаналізувати задачу, для чого уявити собі задачу розв'язаного, дати можливий рисунок її й розглянути всі властивости елементів нашої задачі. Коли ми у вислід нашого аналізу прийдемо до конкретного уявлення підстав і способів будування тих або инших елементів задачі в певній системі, що логічно доведе нас до розв'язання задачі, тоді тільки можем приступати до переведення самого креслення.

1й приклад. Збудувати трикутник по даній основі, куту прилеглому до неї й суми решти боків (рис 68). Попереду накреслимо трикутник (рис I) як ми уявляєм його після розв'язання задачі. Ми бачимо що сума S розкладається точкою M на два боки BM і бік MN тому MK = MN. Коли з'єднаємо K і N простою то Δ KMN буде рівнораменний і потрібна нам точка M буде вершком рівнораменного Δ KMN.

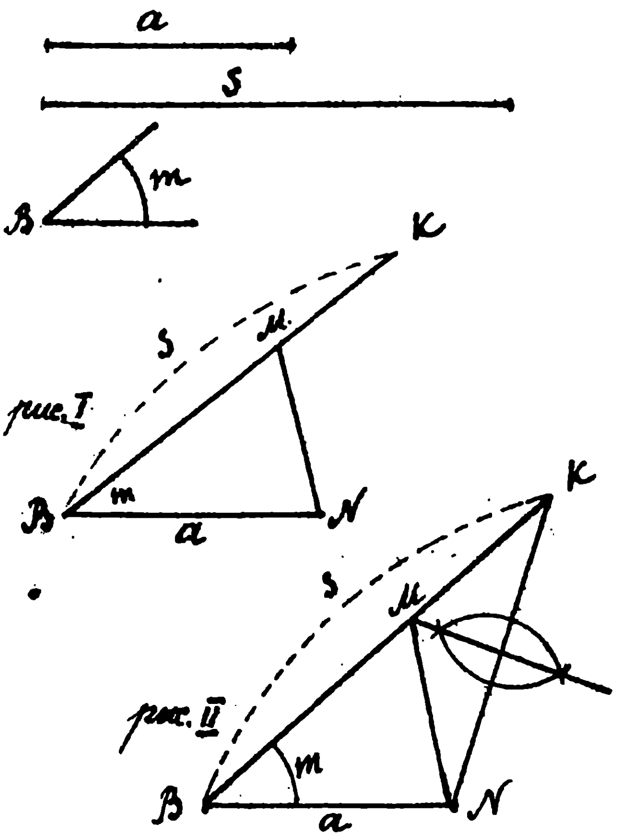


Рис. 68.

Ми знаєм єдину властивість рівнораменних трикутників, що сіметральна кута при вершкові рівнораменного трикутника є одночасно очередньою до основи й висотою. Тому прям із середини KN (основи) мусить пройти через точку M (вершок рівн. Δ-ка). Коли ми точку M знайдемо, то знаючи три вершка Δ-ка B. M і N збудуємо й трикутник. Лише стає питання чи ми зможемо знайти при яких умовах точку M (чи можливий є Δ-к) і скільки точок „M" може бути на відтинку $s = BK$? (чи збудований Δ-к буде єдиний, чи їх буде декілька?) Отже з властивости боків Δ-ка знаємо, що сума двох боків Δ-ка завжди мусить бути більш третьої. Тому задача можлива коли $s > a$. Проаналізуємо: коли б припустим що $s = a$ то Δ BKN (рис. 69) був би рівнораменний і прям з середини KN (основи) мусів пройти через вершок B. Отже Δ-ка не існувало б (бо 3-й вершок його впав би в точку B на перехресті a і s.) Коли s буде хоч на дуже малу величину більше a (на рис. 70 точка K_1) то прям до K_1N із його середини пройде поза точкою B і перехрестить BK_1 в якійсь точці M, що й буде третім вершком трикутника. Така

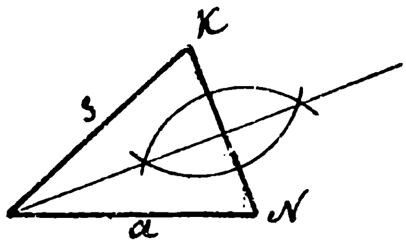


Рис. 69

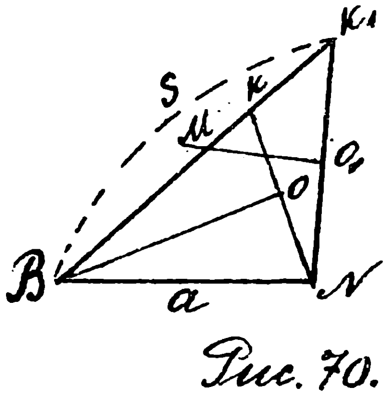


Рис. 70.

точка M буде єдина, бо дві прості (прям. AM і BK) можуть перехрещуватися лише в одній точці, а тому й збудований трикутник буде єдиний.

Тепер на підставі міркувань при нашому аналізу приступимо до розвязання задачі кресленням.

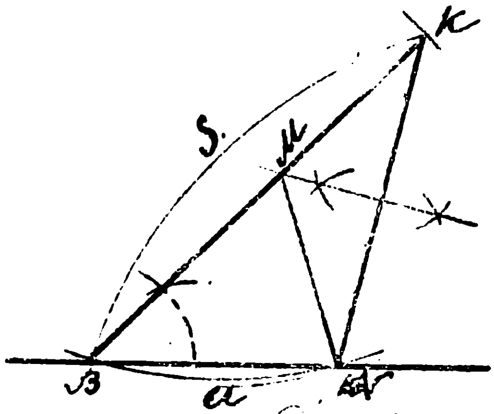


Рис. 71.

На довільній простій в точці B (рис. 71) будуємо даний кут B і від вершка його одкладемо $BN=a$ і $BK=s$. З'єднуємо простою K і N і з середини відтинка NK проводимо до нього прям. Точку перехрещення цього прямa з відтинком BK, а саме точку M з'єднуємо простою з точкою N і Δ BMN буде той, якого ми будували.

2й приклад. <u>Збудувати Δ по основі (a); більшому з кутів (B) прилеглих до основи й різниці инших боків (r).</u>

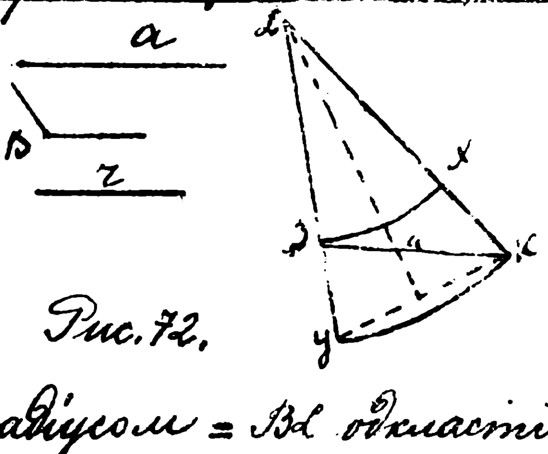


Рис. 72.

Припустим задачу розвязаного (трикут. KLB рис. 72) і щоб одержати різницю боків KL і LB ми можемо з вершка L, або радіусом $= BL$ одкласти його на KL (різниця $= KX$) або радіусом KL відкласти на простій LB

(різниця = By). Ясно, що перший спосіб відкладання (Kx) не є можливий для нашої задачі бо ми не знаємо з умови напрямку бока KL. ($\angle K$ невідомий). Напрям же BL є відомий (дано $\angle B$) а тому відкладаємо по 2-му способу. Тоді з'єднавши K і y ми маємо рівнораменний Δ KLy і 3-й верхок L Δ-ка KLB, що будуємо (два K і B відомі, бо вони є кінці даної основи a) є разом і верхком рівнорам. Δ KLy. Тому по попередньому ми його зможемо знайти на перехресті з LB пряма з середини основи Ky. Питається питання при яких умовах Δ-к можливий і скілько трикутників задовольняючих нашим умовам може бути?

1) Із властивости Δ-ків ясно, що різниця двох боків мусить бути менша третього боку (даного a).

2) Не може бути так малою щоб проста Ky утворювала з Ly кут прямий, або тупий (тому що, коли кут KyB буде прямий або тупий, то рівнораменний Δ KyL буде мати 2 прямих або тупих кута при основі, що для Δ-ка неможливо і в такому разі точки L ми не одержимо [бо при куті $KyB = d$, (рис 73) пряма із середини Ky буде рівнобіжним yL (злучні кути рівні як прямі), а при $\angle KyB$ тупому, прям. з середини Ky і Ly будуть розходитися, бо сума однобічних кутів

при січній Ky буде більш $2d$ (прямий + тупий кут).

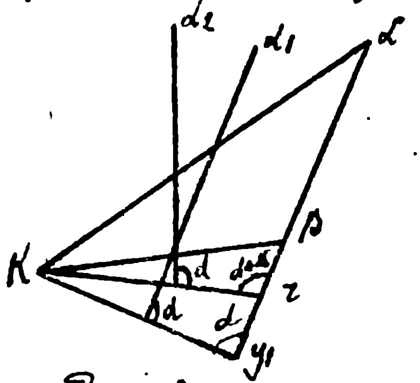


Рис. 73.

Коли умови будуть задоволені, то прям. із середини Ky буде перехрещуватися з BL в точці L і ця точка L буде єдина (2 прості перехрещуються в одній точці) і Δ-к, що будуємо, буде єдиний.

Креслення на підставі міркувань:

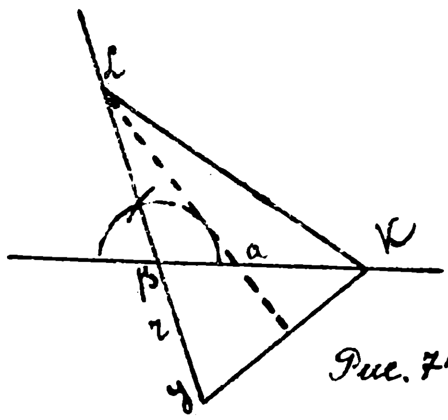


Рис. 74.

На довільній прості від точки K одкладаємо основу $a = KB$; в точці B будуємо даний кут B і продовжуємо його рамено в обидва боки. Від точки B одкладаємо $By = r$ і точку y з'єднуємо з K і з середини Ky ставимо до Ky прям. Точку L перехреста прямої з раменом кута B, з'єднуємо з вершком K. Трикутник KLB буде потрібний нам.

Многокутники.

Частина площі, що обмежена ламаною замкнутою лінією наз. многокутником (рис. 75).

Ламана замкнута лінія, що обмежує многокутник, наз. обводом його

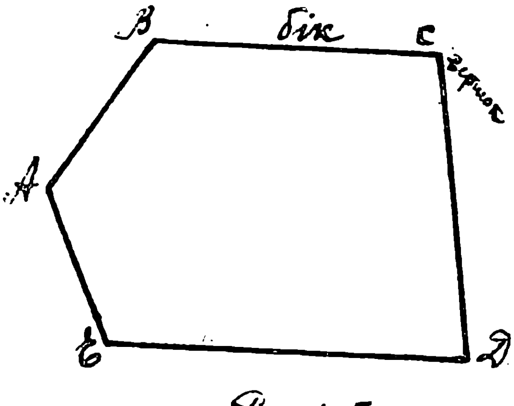


Рис. 75

Прості лінії, що складають обвід многокутника наз. його боками, а точки перехреста боків – вершками многокутника. Згл[я]дно боків і вершків многокут-ки поділяються на Δ-ки, 4ˣ кутники, 5-кутники і т.д.

<u>Відтинок простої, що з'єднує вершки не сусідних кутів називається косиною або діагоналею многокутника.</u>

AC і т.д. суть діагоналі (рис. 76)

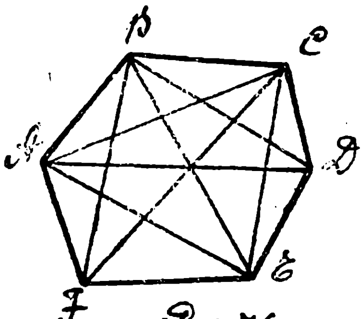


Рис. 76

Коли означимо через n кількість боків многокутника, то кількість косин з одного вершка у многокутникові $= n-3$, а число всіх косин (з усіх вершків) $= \frac{(n-3)n}{2}$.

Косини з одного вершка поділять многокутник на $(n-2)$ Δ-ків, а тому <u>сума внутрішніх кутів многокутника $=$ $= 2d(n-2)$ або $S = 2d(n-2)$.</u>

Теорема. <u>Сума зовнішніх кутів многокутника $= 4d$</u> (рис. 77)

<u>$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 4d$?</u>

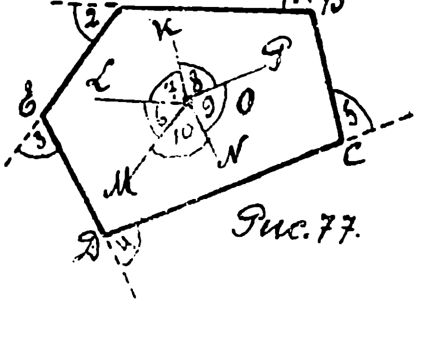


Рис. 77.

Взявши де-небудь на площі точку O й провівши з неї

$OK \parallel BC$, $OL \parallel AB$, $OM \parallel AE$, $ON \parallel ED$ і $OP \parallel DC$, матимемо, що $\angle 6 = \angle 2$, $\angle 7 = \angle 1$, $\angle 8 = \angle 5$, $\angle 9 = \angle 4$ і $\angle 10 = \angle 3$, всі як кути з рівнобіжними боками. Сума кутів 6, 7, 8, 9 і 10 = 4d як сума кутів навколо точки, то й сума рівних їм зовнішніх кутів 1, 2, 3, 4 і 5 многокутника теж = 4d.

Сума внутрішніх кутів многокутника залежить лише від числа боків многокутника. Тому суми кутів однойменних многокутників є завжди однакові.

Сума зовнішніх кутів многокутника є величина постійна, не залежна ані від форми, ані від числа боків м-ка.

<u>Многокутник, що має всі рівні боки й кути, наз. правильним, а тому кожний кут його = $\frac{2d(n-2)}{n}$.</u>

Гострих внутрішніх кутів у многокутникові не може бути більше 3-х, бо буде більше 3-х тупих зовнішніх кутів, що буде противоречити тому, що сума зовнішніх кутів м-ка = 4d.

<u>Рівнобічником наз. 4-х кутник, що має протилежні боки рівнобіжні.</u> В рівнобічникові є дві основи - спідня й верхня.

Теорема. <u>Косина рівнобічника розбиває його на два пристайні Δ-ки.</u>

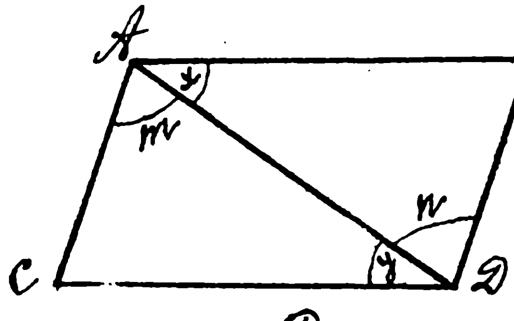


Рис. 78

$AB \parallel CD$; $AC \parallel BD$

$\Delta ABD = \Delta ACD$?

$\angle x = \angle y$ і $\angle m = \angle n$ як внутрішні перехресні при рівнобіжних AB і CD та AC і BD. AD є спільним боком, при якому лежить по 2 рівних кута, а звідси $\Delta ABD = \Delta ACD$.

Висновок 1) В рівнобіжникові протилежні боки рівні (бо в рівних Δ-ках ABD і ACD, на які косиною розбито 4к-кутник $ABCD$, $AB = CD$; $AC = BD$, як боки рівних Δ-ків, що лежать проти рівних кутів.

2) Відтинки рівнобіжних між рівнобіжними суть рівні

3) Протилежні кути в рівнобіжникові є рівні

4) Сума сусідніх кутів рівнобіжника $= 2d$.

Теорема. Відтинки, що з'єднують кінці рівних відтинків рівнобіжних є рівні й рівнобіжні.

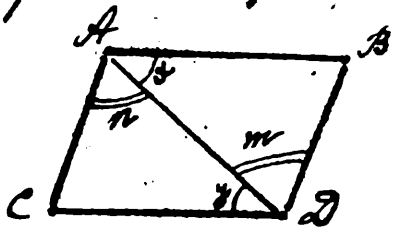


Рис. 79.

$AB = \parallel CD$

$AC = \parallel BD$?

З'єднаємо протилежні кінці відтинків AB і CD простою AD. Тоді по умові $AB \parallel CD$ і кути

$\angle x = \angle y$, як внутрішні перехресні; в Δ-ках ABD і CAD AD є спільна, $AB = AD$ по умові (рис. 79). Тому $\Delta ABD = \Delta CAD$, а звідци й треті боки $AC = BD$. Крім того проти рівних боків AB і CD лежать рівні кути: $\angle m = \angle n$, але ці кути для простих AC і BD є внутрішні перехресні при січній AD, а тому $AC \parallel BD$.

Теорема. Кошини рівнобічника перериполовинюються

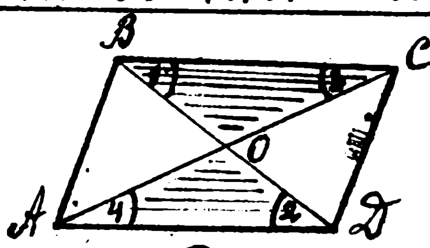


Рис. 80

$AB \parallel CD$ і $BC \parallel AD$

$OB = OD$; $OA = OC$?

$\Delta BOC = \Delta AOD$ (рис. 80), бо вони мають по рівному бокові BC і AD й по парі прилеглих до них рівних кутів ($\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$ як внутрішні перехресні при $BC \parallel AD$ і $AB \parallel CD$ та січних AC і BD), а тому $OB = OD$ і $OA = OC$, як боки що лежать проти рівних кутів у рівних трикутниках.

Проста, що з'єднує середини боків многокутника наз. середником.

Теорема. Середники протилежних боків рівнобічника є рівні й рівнобіжні відповідним бокам рівнобічника

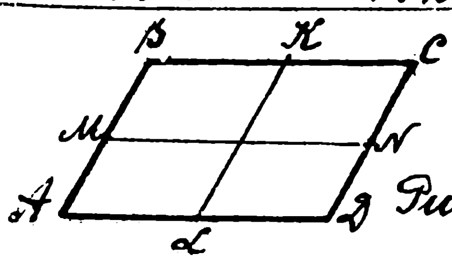


Рис. 81.

З визначення рівнобічника BC рівний і рівнобіжний AD, то й половини цих відтинків $KC = \parallel LD$ (рис. 81), а ми знаємо, що відтинки, що з'єднують відповідні кінці двох рівних відтинків рівнобіжних є рівні й рівнобіжні між собою, а тому $KL = \parallel CD$. Так само доводимо що й $MN = \parallel AD$.

Висновки: 1) Середники протилежних боків рівнобіжника переполовинюються.

2) середники й косини перехрещуються в одній точці.

Рівнобіжник з прямими кутами називається прямокутником.

Теорема. В прямокутникові косини рівні

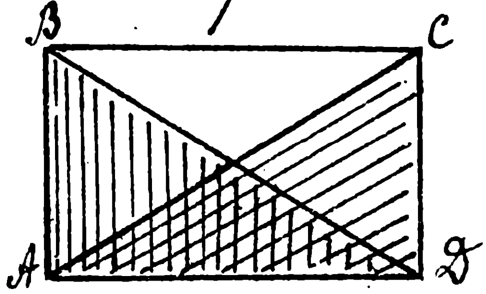


Рис. 82.

$BC = \parallel AD$; $AB = \parallel CD$

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = d$

$AC = BD$?

$\Delta ACD = \Delta ABD$ (рис. 82), як прямокутні, з рівними катетами ($AB = CD$ по умові й AD — спільний катет) а тому рівні й їх гипотенузи, ц. т. $AC = BD$.

Рівнобіжник, що має рівні боки наз. ромбом.

Теорема. Косини ромба переполовинюють кути при вершках і взаємно прям.

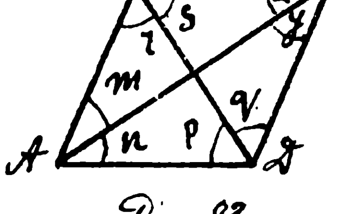


Рис. 83.

$AB = BC = CD = AD$

$AC \perp BD$; $\angle x = y$ і т. д.?

З визначення ромба $AB = BC$, $CD = AD$. Тому Δ-ки (рис. 83)

$\triangle BCL$, $\triangle BAD$ і $\triangle ADC$ рівнораменні. Ми знаємо, що косини переполовинюються, а тому вони будуть осередніми (медіанами) для кожного з цих рівнораменних $\triangle$-ків. Але осередні в рівнораменних $\triangle$-ках одночасно є і симетральні й висоти, а тому $x=y$; $z=u$; $m=n$; $p=q$, а також $AC \perp BC$.

Рівнобічник, що має рівні боки й кути (прямі) наз. квадратом.

Тому, що квадрат має в собі всі прикмети рівнобічника, прямокутника й ромба, - косини його мають усі їхні властивости, а звідси:

1) косини квадрата ділять його на 2 пристайні трикутники.

2) косини квадрата переполовинюються

3) " " рівні

4) " " ділять протилежні кути пополовині;

5) косини квадрата взаємно прямі.

Теорема. Коли на одному рамені від вершка кута відкласти рівні відтинки й провести рівнобіжні між собою від кінців, то й на другому рамені будуть відкладатися від вершка також рівні між собою відтинки.

$$\frac{AB = BC = CD;\ BK \parallel CL \parallel DM}{AK = KL = LM?} \quad \text{(рис. 84)}$$

Провівши $BN \parallel AM$ і $CP \parallel AM$ матимемо, що

$\Delta 1=\Delta 2=\Delta 3$, бо вони мають $AB=BC=CD$ по умові; $\angle A=\angle B=\angle C$ як злучні при рівнобіжних AM, BN, CP та січній AD, а $\angle x=\angle y=\angle z$ як злучні при рівнобіжних BK, CL і DM та тій самій січній AD; звідси $AK=BN=CP$, а тому і $BN=KL=LM=CP=AK$ як відтинки рівнобіжних між рівнобіжними і $AK=KL=LM$.

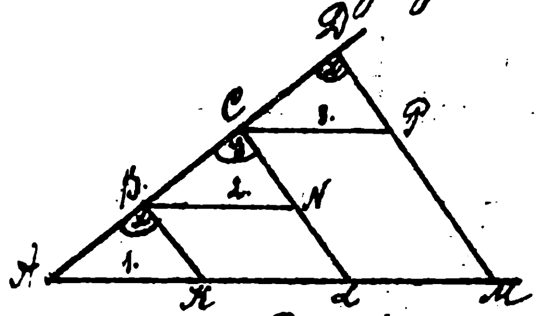


Рис. 84.

Зворотня теорема. <u>Коли від вершка кута відкласти на обох раменах рівні між собою на кожному рамені відтинки, то прості, що з'єднуватимуть кінці їх будуть між собою рівнобіжні.</u>

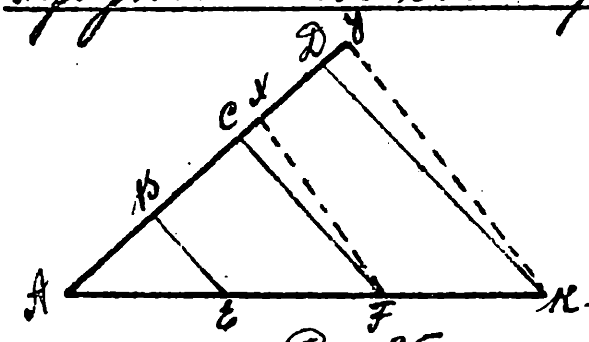


Рис. 85.

$$\begin{array}{c} AB=BC=CD \\ \underline{AE=EF=FK} \\ BE \parallel CF \parallel DK? \end{array}$$
(рис. 85)

Припустимо, що ці прості не рівнобіжні. Тоді через кінці рівних на одному рамені відтинків F і K ми можемо провести Fx і Ky рівнобіжні BE. З попередньої теореми відомо, що в такому випадкові: $Bx=xy=AB$, [illegible] умови: $BC=CD=AB$. Тому $Bx=BC$; $CD=xy$. (Цим = частині, чого не може бути) і точка x мусить впасти в точку C, а точка y в точку D. і тому CF і DK будуть рівнобіжні AB.

Висновок. Коли є дві нерівнобіжні прості й на одній з них відкласти рівні відтинки й провести через кінці цих відтинків прості взаємно рівнобіжні, то й на другій простій відкладуться рівні відтинки.

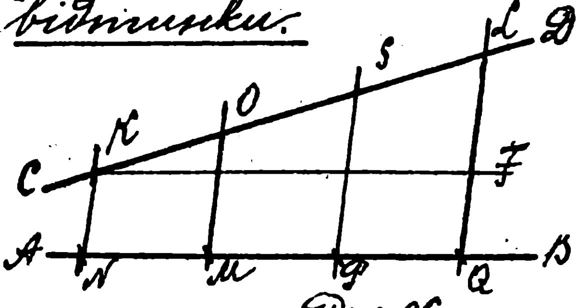


Рис. 86

Провівши $KF \parallel AB$ (рис. 86) зводимо доказ до попередніх теорем, себ-то кута DKF.

Задача. Поділити відтинок простої на довільну кількість (n) частин.

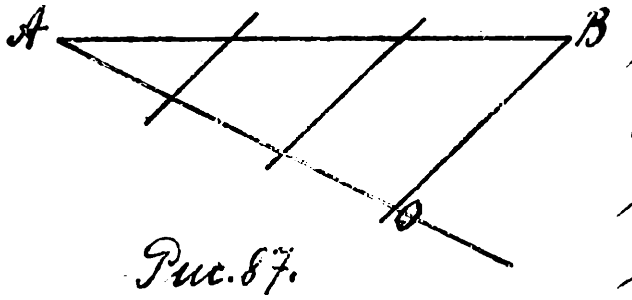


Рис. 87.

З точки A (рис. 87), визначеного відтинка простої AB проводимо до його під кутом ~~просту~~ промінь, на якій відкладаємо від вершка A n рівних частин. Кінець O n-ої частини з'єднуємо простою з кінцем B даного відтинка простої й через решту поділок проводимо рівнобіжні до AB. Тоді AB розіб'ється на n рівних частин.

Теорема. Середник Δ-ка є ∥ третьому боку й рівний половині його

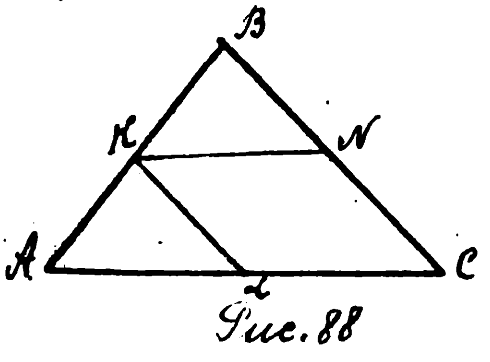


Рис. 88

$AK = KB$ і $AL = LC$

$KL \parallel BC$; $2KL = BC$? (рис. 88)

Тому, що на раменах кута A відкладено від вершка $AK = KB$ і $AL = LC$, то з доведеного в попередній теоремі KL є $\parallel BC$. провівши $KN \parallel AC$, ми й на другому боці $\angle B$ відкладемо рівні відтинки $BN = NC$, але з рівнобічника $KNLC$ $KL = NC$, а тому $BN + NC = KL + KL$ чи $BC = 2KL$.

Чотирокутник, що має лише два боки рівнобічні наз. трапезом. (рис. 89).

Чотирокутник, що має лише суміжні боки попарно рівні наз. рівнораменником або дельтоїдом (рис. 90).

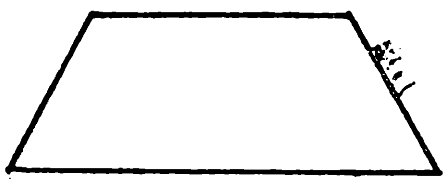


Рис. 89

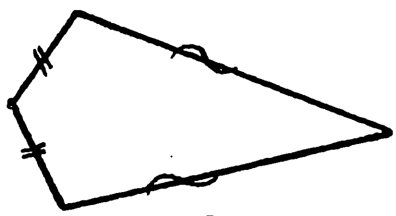


Рис. 90.

Теорема. Середник нерівнобічних боків трапеза є рівнобічний його основам і рівний середньому аритметичному їх.

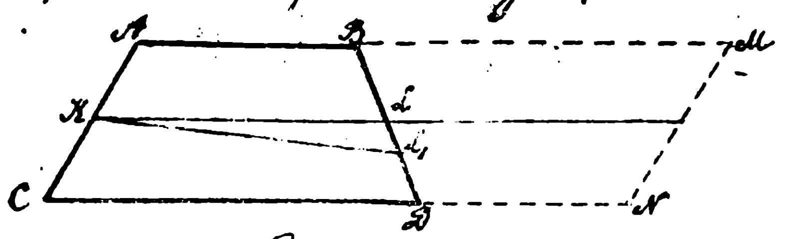


Рис. 91.

$$CK = KA;\ DL = LB$$
$$KL \parallel AB \parallel CD$$
$$KL = \frac{AB + CD}{2}\ ?$$

Припустимо що KL не рівнобічне AB (або CD) рис. 91. В такому разі через точку K ми зможемо провести таку рівнобічну до AB, а саме KL_1. Ми знаємо, що коли на одному боці AC одкладемо рівні відтинки $AK = KC$ й проведемо рівнобічні, той на другому боці одкладуться рівні, то $BL_1 = L_1D$, себто $BL_1 = L_1D = \frac{BD}{2}$; а з умови $DL = LB$, себто $LB = \frac{BD}{2}$. Матимем $BL = BL_1$, частина рівна цілому, що

неможливо, а тому KL є рівнобіжна AB і CD. Відклавши на продовженні AB відтинок $BM = CD$, а на продовженні CD відтинок $DN = AB$ і сполучивши точки M і N ми матимемо рівнобіжник $CAMN$ (бо AC і MN рівні й рівнобіжні як відтинки, що сполучують кінці рівних відтинків рівнобіжних).
$KO = 2KL$, (тому що OL є також середником трапезу $BDNM$, що рівний трапезу $CABD$) буде середником, який сполучує протилежні боки рівнобіжника. Ми знаємо що такий середник є рівний боку AM; але $AM = AB + BM = AB + CD$. Тому $KO = AM = AB + CD$ і $KL = \frac{AB + CD}{2}$.

Властивости косин рівнораменника (дельтоїда).

1) Косина перехресть рівних боків є симетральна відповідних кутів і переполовинює косину перехресть нерівних боків.
2) Косина перехресть нерівних боків поділяє відповідні кути на частини попарно рівні між собою з кожного боку косини.
3) Косини рівнораменника взаємно прямі.

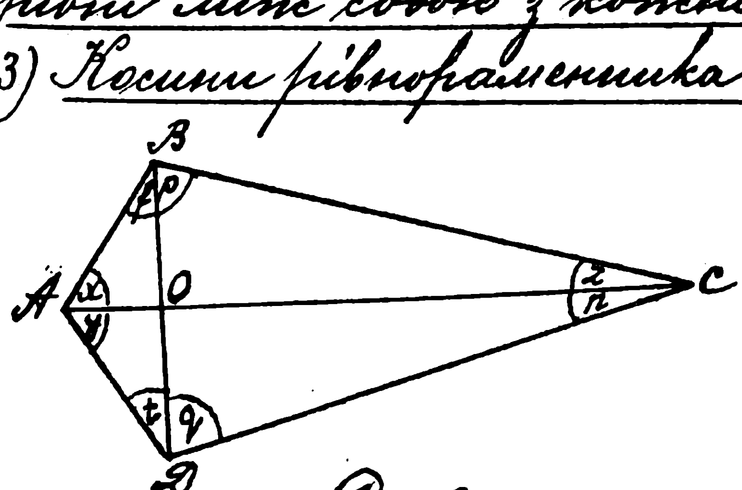


Рис. 92.

$AB = AD$; $BC = CD$

$AC \perp BD$;
$BO = OD$;
$\angle x = \angle y$ і $\angle z = \angle n$;
$\angle f = \angle t$ і $\angle p = \angle q$
(рис. 92)

Трикутник $ABC = \triangle ADC$ бо $AB=AD$, $BC=DC$ (по умові) й AC є спільна. Звідси $\angle x = \angle y$ і $\angle z = \angle n$; в $\triangle$-ці ABD $AB=AD$ (по умові) і він є рівнораменний, а тому $\angle f = \angle t$. і з рівнораменного $\triangle$ ка BCD $\angle p = \angle q$, крім того в $\triangle$-ві AB $\angle A$ розділено пополовині, ($\angle x = \angle y$) а тому AO, як симетральна рівнораменного трикутника - буде й висотою, себто $AO \perp BD$ чи ціла $AC \perp BD$. й середньою, себто AC переполовинює BD

Коло

Проста, що злучує дві точки кола й не проходить через центр наз. тятивою, або хордою.

Частина кола між двома точками наз. дугою. Проста, що перетинає коло в 2 точках наз. січною. Проста, яка проходить поза колом лише через одну точку обводу кола наз. дотичною.

Площа, що обмежена колом, наз. кругом. Частина круга, обмежена дугою й тятивою наз. відрізком круга. Частина кола обмежена 2 ігугами й дугою наз. вирізком круга

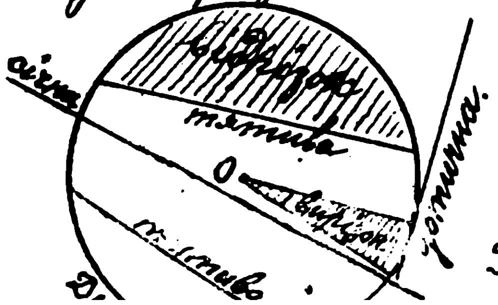


Рис. 93.

Через одну точку площі можна провести безмежну кількість кол.

Через дві точки площі можна провести безмежну кількість кол, але центри їх лежатимуть на прямій проведеному через середину до простої що злучує ці визначені дві точки (рис. 94).

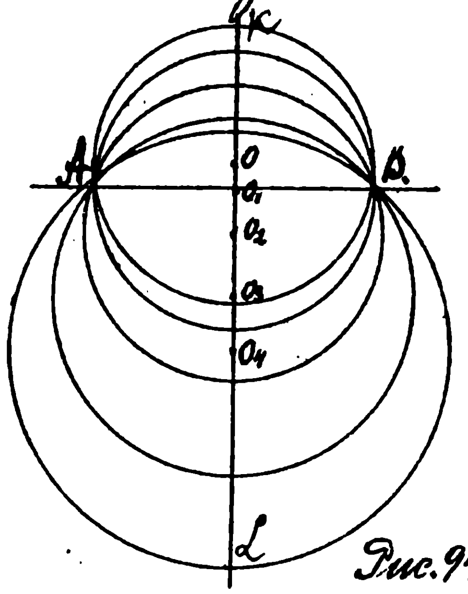


Рис. 94.

$AB \perp KL$ і $AO_1 = O_1B$.

Центри $O, O_1, O_2, O_3, O_4, O_n$ лежатимуть на $KL \perp AB$ бо $KL \perp AB$ в його середині є геометричне місце точок рівновіддалених від кінців AB.

Теорема. Через кожні 3 точки площі, що не лежать на спільній простій можна провести лише одно коло. (Три точки площі, що не лежать на спільній простій цілком визначають коло).

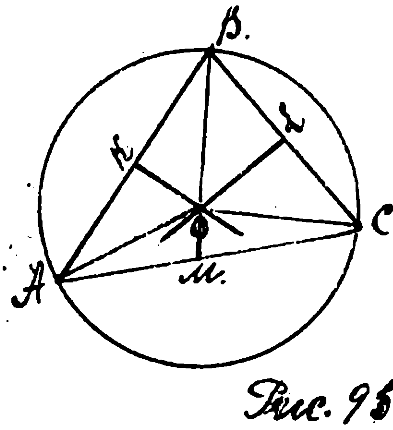


Рис. 95.

Визначимо попереду центр кола, яке б проходило, поки що, через дві точки площі A і B. (рис. 95). З попереднього ми знаємо, що цей центр лежатиме на прямі KO до відтинка AB із його середини. Але це ж коло мусить пройти й через точки B і C, а тому його центр мусить лежати також і на прямій поставленій до BC з його середини. Тому цей центр лежучи одночасно на двох прямих KO і LO лежатиме на перехрещенні їх в точці. Лишається довести, що такий центр буде єдиний в якому порядку ми не проводили коло через визначені точки, себто треба довести, що й третя пряма до AC з середини його буде проходити через точку O. Сполучимо середину відтинка A з точкою OM і доведемо, що OM є прям до AC. Ми знаємо, що AO = OB і що OB = O тому AO = OC. Точка O рівно віддалена від кінців відтинка A і C. Тому мусить лежати на прямій до AC в його середині, себто OM ⊥ AC. Таким чином, в якому порядку ми не проводили коло через 3 точки завжди буде лише один центр і через 3 точки можна провести лише єдине коло.

Висновок. На кожному трикутнику можна обвести лише одно коло й для цього треба поставити з середини його боків прямі; точка перехрещення прямих буде центром кола, а радіусом — віддалення цієї точки від вершків трикутника.

Теорема: <u>Два кола, що мають однакові лучі є рівні.</u>

<u>$KB = OA$</u>

$\circ O = \circ K$? (рис. 96)

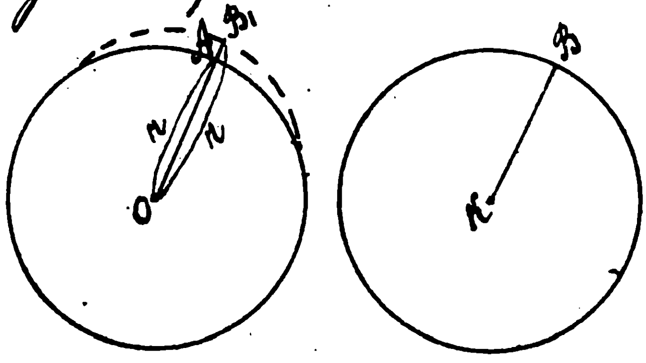


Рис. 96.

Накладемо коло центра K на коло центра O так, щоб центри їх пристали. Тоді мусять пристати й кола, бо колиб коло центра K заняло, напр., положення означене на рис. пунктиром, то ми малиб що AO булоб частиною $OB' = KB$, що неможливо, бо $AO =$ $= KB$ по умові.

Теорема: <u>Дві дуги одного кола або рівних кол є пристайні, коли при накладені одної на другу є пристайні їх кінці.</u>

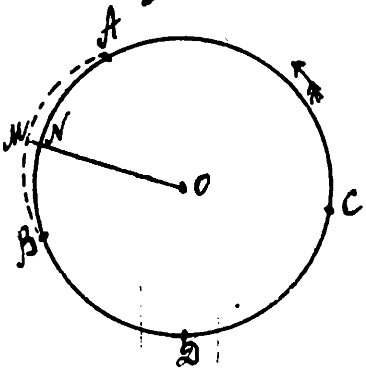


Рис. 97.

Припустімо, що коли ми будемо посувати здовж обводу кола O (рис. 97) дугу DC по напряму стрілки то точка D дуги DC впаде в точку A а точка C в точку B. Доведемо, що й решта точок дуги $\frown DC$ пристане до точок дуги $\frown AB$. Дійсно, колиб припустили що дуга $\frown DC$ займе положення AMB, то ON булоб частиною OM а це неможливо, бо лучі одного й того ж кола рівні.

Теорема. Поперечник кола переполовинює його круг.

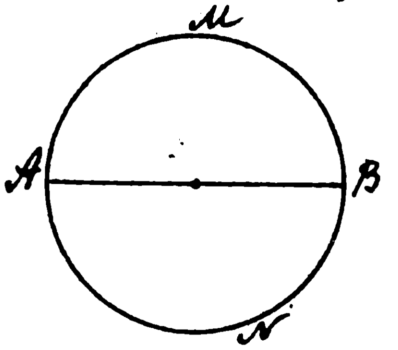


Рис. 98

Перегнемо рисунок по поперечнику AB (рис. 98), тоді дуга $\smile AMB$ і дуга $\smile ANB$ матимуть притаманими кінці A і B, а тому на підставі попередньої теореми мусять пристати всіма своїми точками. А коли так, то частина круга $AMBO$, пристане до частини круга $ANBO$, себто поперечник AB переполовинює круг кола O.

Теорема: Луч прямовий до тятиви переполовинює й тятиву й відповідну дугу її.

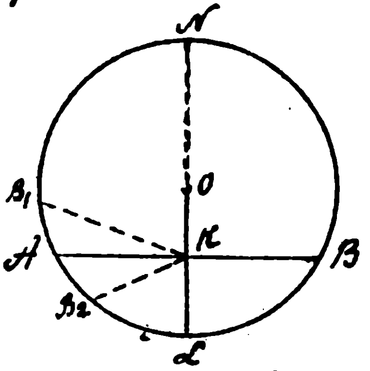


Рис. 99.

$$\frac{OL \perp AB}{AK = KB}$$
$$\smile AL = \smile LB?$$

Продовжимо луч OL (рис. 99) до перехрещення з колом в точці N, тоді відтинок NL є поперечник. Перегнемо круг по цьому поперечнику NL і з попередньої теореми ми знаємо, що дуга $\smile NBL$ пристане до дуги $\smile NAL$. Точка B буде неодмінно лежати на дузі $\smile NAL$. Вона може впасти або в точці A, або поза точкою A в положенню, напр., B_1 або B_2. Але впасти в положення B_1 або B_2 не може бо $KB \perp OL$ і $AK \perp OL$ і тоді б до OL в точці Kбуло поставлено два прямих, що неможливо, а тому KB мусить піти по KA і точка B впасти в точку A. Через те $KB = KA$ і дуга $\smile BL = \smile AL$, бо кінці цих дуг пристануть.

Висновок. Прямопоставлений до тятиви в її середині неодмінно пройде через центр кола (бо центр кола рівно віддалений від кінців тятиви й лежатиме на визначеному прямім, як геометр. місці точок рівновіддалених від кінців тятиви.

II. Дві нерівнобіжні тятиви цілком визначають центр кола їх який лежить на перехресті прямих до тятив проведених через їх середину.

Теорема. Дуги, вміщені поміж рівнобіжними тятивами є пристайні.

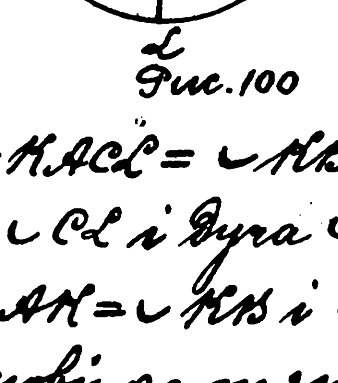


Рис. 100

$AB \parallel CD$

$\smile AC = \smile BD$.

Через центр O (рис. 100) проведемо поперечник $KL \perp AB \perp CD$, котрий поділить коло на 2 рівні половини, є. т. $\smile KACL = \smile KBDL$; звідси $\smile AC = \smile KACL - \smile AK - \smile CL$ і дуга $\smile BD = \smile KBDL - \smile KB - \smile LD$. Але $\smile AK = \smile KB$ і $\smile CL = \smile LD$, бо лучі OK і OL є прямові до тятив AB і CD, тому й решти від $\frac{1}{2}$ кола будуть рівні, є. т. $\smile AC = \smile BD$.

Задача. Переполовинити дану дугу AB (рис. 101)

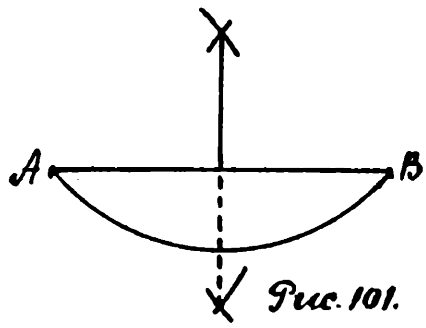


Рис. 101.

З'єднуємо точки A і B, та з середини тятиви AB ставимо прям і продовжуємо до перехрещування з тятивого. Тоді $\smile AM = \smile MB$.

Залежности між дугами й тятивами, що їх стягують.

Теорема. В колі, або в кількох рівних колах, рівні дуги натягують рівні тятиви, які однаково віддалені від центра

$$\frac{\smile AB = \smile CD}{\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{DC} \\ OL = OK \end{array}\right\}?}$$

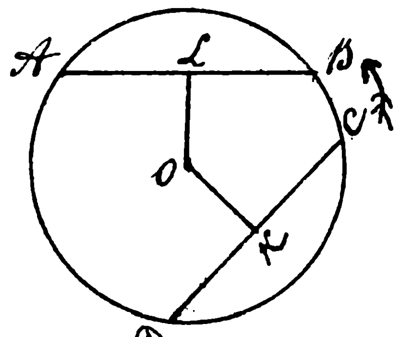


Рис. 102.

Рухаємо $\smile DC$ (рис. 102) по колі в напряму стрілки доти, поки точка D не впаде в точку B. Тоді з огляду на рівність дуг пристануть точки A і C. Тому мусять пристати тятиви AB і DC, бо через дві точки можна провести лише одну просту, а прям OK пристане до пряма OL, бо з одної точки можна спустити на просту лише один прям.

Зворотня теорема. Рівні тятиви є рівновіддалені від центра й стягують рівні дуги.

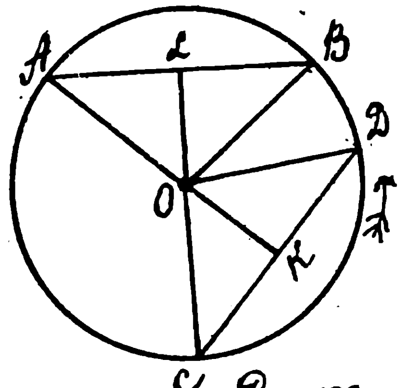


Рис.103.

$$\frac{AB = CD}{\smile AB = \smile CD}$$
$$OL = OK\ ?$$

Злучимо кінці тятив з центром лучами OA, OB, OD і OC (рис.103) $\Delta AOB = \Delta COD$ тому що $AB = CD$ по умові, а решта боків взаємно рівні як лучі одного й того кола. Коли ΔCOD будемо посувати поки бік OC пристане до бока OB, то з огляду на свою пристанність ΔCOD всіма точками пристане до AOB і тятива CD пристане до тятиви AB. Точка C впаде в точку B а також D в точку A. Дуга $\smile CD$ пристане до дуги $\smile AB$, (бо їх кінці пристануть), а прями OK пристане до пряма OL, бо инакше на AB було б з однієї точки O спущено два прями.

Теорема: Коли в одному, або кількох колах дано дві нерівні дуги, то більша з них натягує більшу тятиву й ця тятива буде ближча до центра.

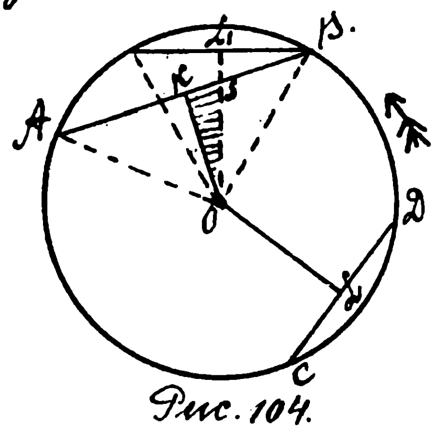


Рис. 104.

$$\frac{\smile AB > \smile CD}{AB > CD}$$
$$OK < OL\ ?$$

Посуваємо $\smile CD$ по колу (рис.104) в напрямку стрілки доти, доки точки C і B пристануть; тоді по нерівності дуг точка D займе положення ближче A в точці D_1 і $D_1B = CD$; тоді $OL_1 = OL$, як пряли з центра до рівних тятив. З'єднаємо кінці тятив AB і D_1B_1 з центром. Тоді матимемо, що $\triangle AOB$ нерівний $\triangle$-ві D_1OB_1, бо вони мають по 2 рівних боки ($AO = OD = OB$), а кути між ними нерівні, бо кут D_1OB є частина $\angle AOB$, а тому проти більшого кута AOB лежить більший бік AB, себ-то $AB > BD$, що теж $AB > CD$. Далі $\triangle KSO$ є прямокутний і в нім OS є протипрямка; тому вона більша від прямки OK, а звідси і OL, (чи OL) якого OS є частиною, теж більше OK.

Зворотня теорема. <u>В колі з двох тятив більша стягує більшу дугу і є менше віддалена від центра.</u>

$$\frac{AB > CD}{\smile AB > \smile CD\,?} \quad OL > OK\,?$$

Припустимо, що $\smile AB < \smile CD$ (рис. 104), або $\smile AB = \smile CD$ тоді по простій теоремі і тятива AB мусить бути або менша або рівна CD, що протирічить умові. Лишається лише, що $\smile AB$ мусить бути більша $\smile CD$. Але в попередній теоремі ми довели, що коли $\smile AB > \smile CD$ то й віддалення тятиви AB від центра буде менше віддалення тятиви CD, себто $OK < OL$.

<u>Висновок. Поперечник є найбільша з тятив (бо проходить через центр і віддалення його від центра найменше $= 0$.)</u>

Властивости дотичної

Дотичною зветься проста, що має лише одну спільну точку з колом і всі инші точки дотичної лежать поза колом.

Теорема. Луч кола проведений через точку дотику дотичної є прямий до неї.

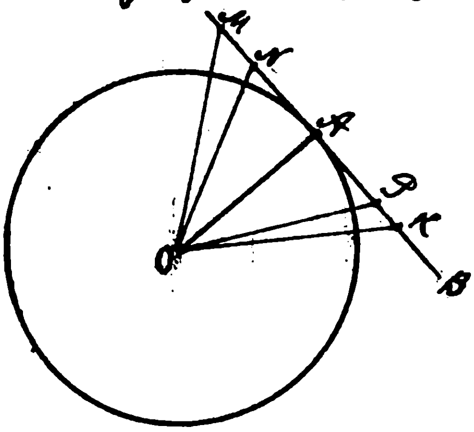


Рис. 105.

$OA \perp AB$?

Дотична AB має лише одну спільну точку з колом A, а кожна инша точка лежить поза колом, тому вона більше віддалена від центра ніж точка A. Таким чином OA є найкоротше віддалення точки O від простої AB, а тому OA є прямий до AB.

Зворотня теорема. Проста проведена через кінець луча кола прямово до його є дотична колу. (рис. 105).

Коли $OA \perp AB$, то всяка инша проста OK, OP, OM, ON є похила до AB, а тому більша ніж прямий OA. Тому всі инші точки простої AB, далі відстоять від центра O ніж довжина його луча, а тому лежить поза колом. Таким чином, проста AB має лише одну спільну з колом точку A і тому є дотична до кола в цій точці A.

Теорема. Дотична рівнобіжна тятиві переполовинює в точці дотику відповідну дугу.

$AB \parallel CD$
$\cup CA = \cup AD$?

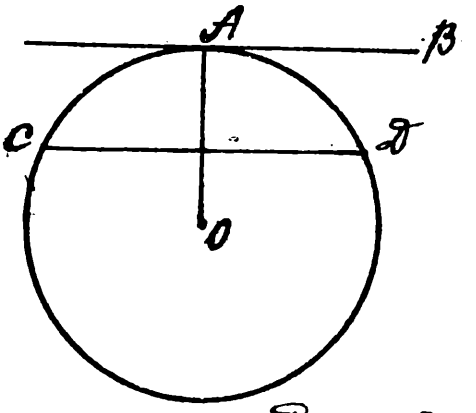


Рис. 106.

Проведемо луч OA (рис. 106) в точку дотику A, тоді OA буде $\perp$ AB але $AB \parallel CD$ тому AO буде прямою до CD. А луч прямий до тятиви переполовинює відповідну дугу, а тому $\cup CA = \cup AD$.

Вимір величин.

Із курса аритметики нам відомо, що кожну величину можна виміряти, порівнявши її з другою однородною, принятою за одиницю міри. Виміряти величину це значить визначити скільки разів умовно одиниця міри міститься в тій величині, яку ми виміряємо. Дія, якою ми будемо переводити вимір буде діленням величини, що виміряємо на одиницю міри. Коли величину, що міряємо означимо N, а одиницю міри n то вислід виміру висловиться відношенням $\frac{N}{n}$

Будемо розглядати вимір довжини. Наприклад ми маємо віддалення AB, яке хочемо зміряти метром. Колиш після виміру в цілих метрах ми мали решту, то поробили метр на дециметри, далі на сантиметри дальше, поки не знайшли ту частину одиниці міри метра якаб ціле число разів не вміщалося у віддаленні AB. Тоді ми скажемо, що вимір віддалення AB переведено точно. Приглянемося до способу виміру уважніше. Коли ми виконали точно вимір віддалення AB? Тоді коли найшли таку частину одиниці міри (метра) яка ціле число разів вміщалася в AB, у тій величині, яку ми вимірюємо. Але ця ж сама частина одиниці міри (метра) вміщається ціле число разів і в самій одиниці міри. Иначе кажучи, ця частина одиниці міри є спільним ділителем (і в додаток найбільшим) і AB й одиниці міри. Умовимся називати цей спільний ділитель - спільною мірою визначених величин (віддалення AB і нашої одиниці міри). Отже точний вимір віддалення AB є можливий коли ми зможемо знайти спільну міру між величиною AB і нашою одиницею міри. (Припустим, наприклад, що такою спільною мірою в окремому випадкові був би 1 сантиметр, який в AB вміщався 317 разів; тоді довжина AB висловилася: $\frac{AB}{1(\text{метр})} =$

$= \frac{317}{100} = 3{,}17$; звідкиль <u>АК = 3,17 метра</u>).

Перейдемо тепер до виміру геометричних відтинків. Хай ми маємо завданням виміряти відтинок А———В в одиницях С———D (себто приймавши за одиницю міри відтинок CD).

Для того, щоб перевести вимір ми мусимо порівняти відтинок АК з відтинком CD і визначити скільки разів відтинок CD буде міститися у відтинку АК, себто знайти значіння відношення $\frac{АК}{CD}$. Із попередніх міркувань ясно, що коли CD не міститься ціле число разів у АК, то шукаємо таку величину (відтинок), якаб була <u>спільною мірою</u> для АК і одиниці міри CD. А це, як ми вже знаємо, буде найбільшим спільним ділителем між величинами АК і CD. В аритметиці маємо 2 засоби находження найбільшого спільного ділителя: 1) розкладенням на первісних чинників і 2) <u>ступневим діленням</u>. Останній засіб є єдино можливий для геометричних відтинків і як відомо складається зі слідуючого: більшу величину поділяємо на меншу; меншу на 1-шу решту (попереднього ділення); 1-шу решту на 2-гу решту (слідуючого ділення) і т.д. Поділ переводиться доти, поки не знайдемо ділителя, на який останній ділитель поділиться без решти. Цей ділитель і буде потрібним найбільшим спільним ділителем.

Переведемо це ступневе ділення над відтинком AB і одиницею міри CD.

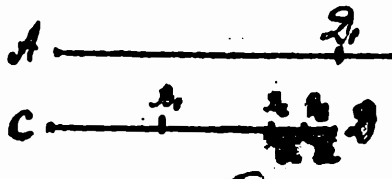


Рис. 107.

1) Ділимо AB (рис. 107) на CD (для цього відкладаємо CD на AB). Хай CD міститься в AB 1 раз і лишається 1-ша решта D_1B. 2) Ділимо ділителя CD на 1-шу решту D_1B (для цього D_1B відкладаємо на CD); хай D_1B міститься в CD 2 рази і лишається 2-га решта B_2D. 3) Ділимо 1-шу решту D_1B на 2-гу решту B_2D (для цього B_2D відкладаємо на D_1B) Хай B_2D міститься в D_1B - 1 раз і лишається 3-тя решта D_2B. 4) Ділимо 2-гу решту B_2D на 3-тю решту D_2B і припустимо що D_2B міститься в B_2D - 2 рази. Таким чином $D_2B = a$ - останній ділитель і буде найбільшим спільним ділителем AB і CD - себто потрібною спільною мірою для відтинка AB і одиниці міри CD.

Обрахуємо скільки разів знайдена спільна міра a міститься в AB і CD

$$B_2D = 2a$$
$$D_1B = B_2D + D_2B = 2a + a = 3a$$
$$CD = 2D_1B + B_2D = 6a + 2a = 8a$$
$$AB = CD + D_1B = 8a + 3a = 11a$$

Отже одиниця міри CD міститься в AB стільки разів скільки разів 8a міститься в 11a; себ-то $\frac{AB}{CD}=\frac{11a}{8a}=\frac{11}{8}$

З відци $AB=\frac{11}{8}CD$ (коли б CD був рівний метру то $AB=\frac{11}{8}$ метра).

Вимір геометричного відтинка способом зазначеним вище, є більше загальним ніж вимір аритметичний з таких причин: 1) при вимірі геометричному за одиницю міри береться цілком довільно умовно визначений відтинок (CD). В той час як в аритметичному вимірі за одиницю міри прийняті постійні (наперед задані) величини (метр, аршин і т. д.) 2) При геометричному вимірі спільна міра може приймати довільні значіння в залежности лише від розміру одиниці міри й величини, що вимірюємо, а в аритметиці „спільній мірі" наперед даються значіння (дециметр, сантиметр, міліметр, вершок, дюйм і т. д.) Тому точний вимір відталення в аритметиці можливий лише тоді коли одна з зазначених частин одиниці випадково через відповідний підбір буде міститься ціле число разів у тій величині, що ми вимірюємо

Приклад геометричного виміру:
Із фізики ми знаємо, що від нагрівання тіла розширюються. Коли лінійний промір фізичного тіла при температурі t_1° буде l_1, то при температурі t_2° $(>t_1^\circ)$ буде l_2, де $l_2>l_1$; різниця l_2-l_1 має назву прирощення лінійного проміру тіла на амплітуду температури $t_2^\circ-t_1^\circ$. Таку величину прирощення лінійного проміру завжди висловлюють в одиницях величини проміру при 0°. Припустимо, що величина цього лінійного проміру при 0° буде l_0. Тоді прирощення проміру l_2-l_1 в одиницях проміру при 0° висловиться (на підставі попередніх міркувань) через

$$\frac{l_2-l_1 \text{ —— (величина що вимірюємо)}}{l_0 \text{ —— (одиниця міри)}}$$

Хай $l_1=2,3$, $l_2=2,35$, $l_0=2$
тоді $\frac{l_2-l_1}{l_0}=\frac{2,35-2,3}{2}=\frac{0,05}{2}=0,025$ (величина лінійного розширу в одиницях величини проміру при 0°

Дві величини, які мають спільну міру, а тому можуть одна за допомогою другої (прийнятої за одиницю міри) бути точно виміряні — звуться взаємно вимірними величинами, або спільно мірними величинами. Навпаки, дві величини, що не мають такої спільної міри — мають назву величин взаємно невимірніх, або неспільномір. ших. Наприклад бік квадрата і його косина. Геометрія доводить, що скількиб ми за допомогою ступневого ділення не шукали спільної міри між косиною й боком квадрата, то наступні дільники й решти від ділення будуть прагнути до нуля, але конечного поділу ніціло ми не одержимо й тому спільної міри ми не знайдемо. Відношення косини квадрата до боку його ніколи не висловиться конечним числом, а тому виміряти точно косину квадрата, прийнявши за одиницю міри бік його, або навпаки, неможливо. Значить, косина квадрата й бік його є величини взаємно невимірні. Так само з часом довідаємося, що поперечник кола й обвід кола є величини також взаємно невимірні.

Коли в цьому разі точний вимір величини неможливий, то ми примушені вжити так званого наближеного виміру. Але математична точність вимагає, щоб ми вживаючи наближеного виміру мусили ясно визначити ступінь наближености, себто точно зазначити ступінь нашої помилки при даному виміру.

При арифметичному вимірі величин, такі наближені виміри є звичайне звичайне. Причинами цього є зазначені вище: [1) сталість одиниці міри й 2) незмінний поділ цих одиниць на більш дрібні частини]. Тільки в арифметичному вимірі ми не звикли точно визначити ступінь похибки виміру. Наприк. вимірюємо ми звій сукна метром. Цей звій містить, напр., 10 метрів і ще певний шматок решти. Тоді ми вживаємо сантиметр (дробимо метр на сто частин) Наприклад в зазначеному шматку міститься 71 сантиметр і ще зали шається шматок, безумовно менший сантиметра, на який ми не звертаємо уваги, за його малою величиною й кажемо звій сукна має довжину 10 метрів і 71 сантиметр., або 1071 сант. Безумовно це є наближений вимір довжини звою сукна, бо для точного виміру ми мусимо зміряти й довжину шматка, якого ми на увагу не прийняли.Колиб нас запитали, з якою похибкою ми зробили цей вимір звою сукна - ми мусили б сказати, що вимір зроблений з наближеністю до 1 сантиметра (бо величину, що менше цього сантиметра відкинуто). Але 1 сантиметр складає 0,01 долю одиниці міри (метра), а тому ми можемо сказати, що вимір зроблено з наближеністю до 0,01 (нашої одиниці). Колиб ми вимір робили прийнявши за одиницю міри аршин і не брали на увагу величину меншу вершка, то цей вимір був би зроблений з наближеністю до 1 вершка, або до $\frac{1}{16}$ нашої одиниці міри. Аналізуючи далі ми помічаємо сам процес виміру, а саме в перший раз для виміру з наближеністю до $\frac{1}{100}$ метра ми дробили одиницю міри метр на 100 рівних частин (1 сантіметр) і цю частину відкладали на тій величині, що вимірюємо і решту меншу цієї частини відкидали. Теж саме й удруге: одиницю міри — аршин дробили на 16 рівних частин (вершок) і так само відкладали цей вершок на величині, що вимірюємо й решту меншу вершка ($\frac{1}{16}$ аршина) відкинули.

З тією ж наближеністю ми виміряли б нашу величину колиб при вимірі додали до відкиненої частини те, що не вистарчає до цілої частини одиниці міри. Себто в нашому прикладі про вимір звою сукна рахували його довжину не 1071 сантіметр, а 1072 сант., бо і в тому разі прирахована величина до точної міри довжини свого буде завжди менша 1 сантиметра, себто вимір буде зроблений також з наближеністю до $\frac{1}{100}$ одиниці міри (метра).

В першому разі кажуть, що величину виміряємо наближено до $\frac{1}{100}$ з недостачою, або втратою, а в другому разі також величину виміряно наближено до $\frac{1}{100}$ з лишком.

Перейдемо тепер до наближеного виміру геометричних відтинків.

Припустимо, що ми маємо завданням виміряти відтинок AB одиницею міри CD (рис. 108). При чому нам відомо, що AB і CD є неспільномірні (себто не мають спільної міри). Таким чином, ми мусимо приступити до наближеного виміру AB.

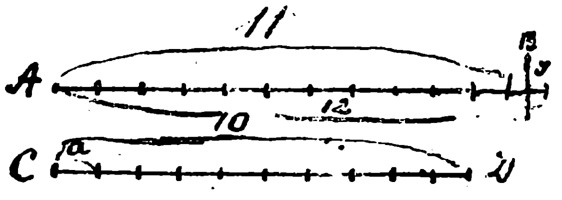


Рис. 108

Припустимо попереду, що ми хочемо виміряти відтинок CD наближено до $\frac{1}{10}$, тоді на підставі попередніх міркувань ми мусимо відтинок CD (нашу одиницю міри) роздробити на 10 рівних частин. Хай десята частина CD = відтинку a. Одкладемо її на відтинку AB. Ця частина a вкладеться на ньому, напр., 11 раз і матимемо решту відтинок $x<a$. Тоді $\frac{AB}{CD}=\frac{11a+x}{10a}=\frac{11}{10}+\frac{x}{10a}$.

Проаналізуємо величину $\frac{x}{10a}$; $x<a$, тому дріб $\frac{x}{a}$ є менший одиниці й коли ми величину $\frac{x}{a}$ меншу одиниці поділимо на десять то $\frac{x}{10a}$ буде завжди менше $\frac{1}{10}$ і відкинувши доданок $\frac{x}{10a}$ ми матимем похибку меншу $\frac{1}{10}$ (нашої одиниці CD).

Звідси $\frac{AB}{CD}=\frac{11}{10}\left(\frac{1}{10}\right)$ з недостачою (в)рахою) і $AB \doteq \frac{11}{10}CD\left(\frac{1}{10}\right)$ з недостачою (в)рахою).

Коли-б ми взяли, що $AB=12a$, то при рахуванні до точної величини AB, відтинок $y<a$ і тому точна величина $AB=$ $=12a-y$.

$$\frac{AB}{CD}=\frac{12a-y}{10a}=\frac{12}{10}-\frac{y}{10a}$$

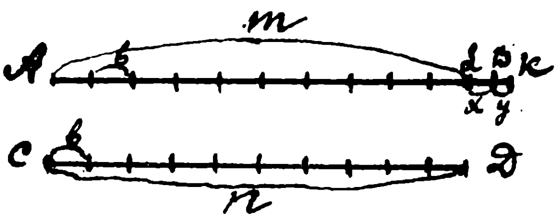
$y<a$ тому по тим же міркуванням що й раніш $\frac{y}{a}<1$; $\frac{y}{10a}<\frac{1}{10}$. Додавши дріб $\frac{y}{10a}$ ми одержимо:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{12}{10}\left(\frac{1}{10}\right) \text{ з лишком}$$

$$\text{і } AB=\frac{12}{10}CD\left(\frac{1}{10}\right) \text{ з лишком.}$$

Перейдемо до розгляду виміру величини AB. і загально висловленого наближеності до $\frac{1}{n}$ (де n може прийняти довільні значіння з натурального ряда чисел: $1, 2, 3 \ldots\ldots \infty$).

Для цього ми мусимо роздробити одиницю міри CD на n рівних частини (рис. 109) і цю частину відклас-



сти на відтинку AB. Хай „в" міститься в AB m разів і останеться решта

Рис. 109.

$LB = x < b$, або $m+1$ разів, коли до AB добамо відтинок $y < b$.

В першому випадкові AB висловиться:

$$AB = mb + x$$

$$AB = (m+1)b - y$$

таким чином $\frac{AB}{CD} = \frac{mb+x}{nb} = \frac{m}{n} + \frac{x}{nb} \ldots (1)$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{(m+1)b-y}{nb} = \frac{m+1}{n} - \frac{y}{nb} \ldots (2)$$

Проаналізуємо величини $\frac{x}{nb}$ і $\frac{y}{nb}$; $x < b$ і $y < b$ тому частки $\frac{x}{b} < 1$; $\frac{y}{b} < 1$ і значить $\frac{x}{nb} < \frac{1}{n}$; $\frac{y}{nb} < \frac{1}{n}$. Тому коли ми від (1) відкинемо додаток $\frac{x}{nb}$ а в (2) додамо $\frac{y}{nb}$, то в кожному окремому випадку зробимо похибку меншу $\frac{1}{n}$

тому $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{n}\right)$ – з недостачою (в[?]ратою)

$\frac{AB}{CD} = \frac{m+1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)$ з лишком

і $\underbrace{AB = \frac{m}{n} CD\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{недостача (втрата)}}$, або $\underbrace{AB = \frac{m+1}{n} CD\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{лишок}}$

Очевидно, як більше буде значіння n, тим менша буде похибка і коли n зростаючо похибка зменшується до 0.

Про відношення величин.

Припустим що відтинок AB ми

виміряли через відтинок CD (як одиницю міри) і одержали що $AB = \frac{m}{n} CD$.
В цьому разі частка від ділення $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$ (1) що показує скільки разів CD міститься в AB, або в скільки разів AB більш CD) має назву відношення величин (відтинків) AB до CD.

Колиб ми мали другий відтинок KL виміряний через свою одиницю міри MN і також одержали що $KL = \frac{m}{n} MN$, то малиб відношення

$$\frac{KL}{MN} = \frac{m}{n} \quad (2)$$

Відношення $\frac{AB}{CD}$ і $\frac{KL}{MN}$ мають однакові вартости $\frac{m}{n}$ тому ми їх вважаємо рівними: $\frac{AB}{CD} = \frac{KL}{MN}$, а самі величини пропорційними. Наколиб AB і CD з одного боку, а KL і MN з другого – були неспільномірними, себ-то

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ а } \frac{KL}{MN} = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{n}\right)$$

то у нас виникає питання при яких умовах ці відношення можна вважати за рівні, а як внаслід цього самі величини за пропорційні. Тому доведемо, що:
Два відношення неспільномірних величин можна вважати рівними, коли їх наближені вартости обчислені з

довільним, але з однаковим ступенем наближености будуть рівні.

Коли ми виконали вимір з довільною наближністю до $\frac{1}{n}$ і значіння відношень є рівні, то вони будуть рівні й при кожному окремому значінні n, взятому з ряда натуральних чисел, а значить будуть рівні й при значіннях n, що наближаються до ∞, але в тому разі похибка виміру наближується до 0 і відношення можна вважати рівними.

Про вимір величин способом порівнання.

Цей спосіб виміру величин (заміна безпосереднього виміру даних величин, виміром инших навіть неоднородних з ними величин, але їм пропорцїйних), вживається тоді, коли безпосередній вимір даних величин є неможливий або незручний. Щоб мати розуміння можливости такого виміру візьмемо такий грубий приклад. Припустимо, що ми маємо змогу сконстатувати факт, що при перебігу однакових віддалень паротяг витрачає однакову кількість вугілля і що кількість спаленого ним вугілля пропорційна величині того віддалення що він пробігає. Тоді ми без помилки можемо приняти за одиницю міри шляху пройденого паротягом віддалення, яке паротяг пробігає при вживанні 1 корця вугілля і далі цією одиницею вимірювати ввесь пройдений шлях (напр. коли буде спалено паротягом 20 корців вугілля) то за той час паротяг пройде 20 умовлених одиниць шляху і т. д. От же тут ми для виміру віддалення, користуємося виміром цілком не однородної йому величини, ваги (або обєму) спаленого вугілля, але для цього нам необхідно усталити два факти:

1) що рівним значінням величини одного роду відповідають рівні значіння величини другого.

2) Що величина 1го роду є пропорційна величині другого роду.

В геометрії цього способу виміру величин вживають досить часто. Напр. для виміру кутів.

Для виміру величини кута треба було б взяти за одиницю певного розміру кут, але безпосередній вимір являється досить незручним і тому для поміру кутів вживають помір відповідних дуг кол, центр яких лежить у вершку кута.

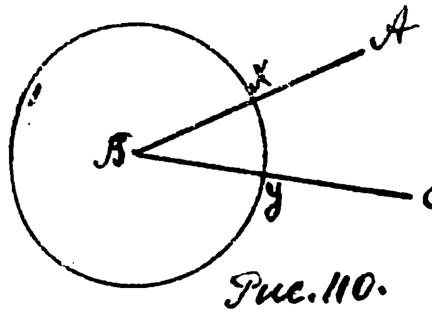


Рис. 110.

Припустим, що нам дано кут ABC (рис. 110). Візьмемо довільний луч Bx і з точки B як центра опишемо коло. Тоді кут xBy, що має вершок в центрі кола, а його раменами будуть лучі кола зветься __центральним__. Дуга ◡xy, на яку опірається кут — зветься __дугою центрального кута__.

Щоб ми могли виміром дуги xy, замінити вимір кута B необхідно з вище сказаного довести що:

I Теорема. __На рівні дуги кола спіраються рівні центральні кути__ і навпаки (рівні центральні кути спираються на рівні дуги кола).

II Теорема. __Центральні кути пропорційні дугам кола, на які вони спираються.__

Доведемо 1-шу теорему:

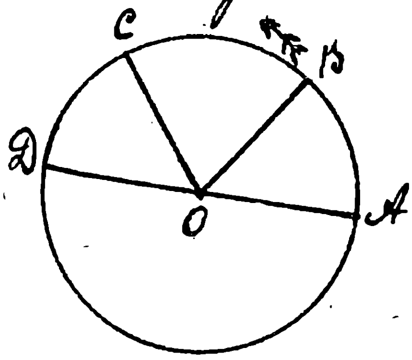


Рис. 111.

$\smile AB = \smile CД$

$\angle AOB = \angle COД$ (рис. 111)

Будемо посувати вирізок AOB в напрямі стрілки доти, поки точка A не впаде в точку C; по умові дуга ◡AB = ◡CД, тому точка B впаде в точку Д.

Але через дві точки можна провести одну пряму, а тому луч OA пристане до луча OC а луч OB до луча OD і $\angle AOB = \angle COD$. Навпаки коли: $\frac{\angle AOB = \angle COD}{\smile AB = \smile CD}$ Поговуємо вирізок AOB доти поки луч OA не піде по CO і точка A не впаде в точку C. Тоді з пристайности кутів AOB і COD друге рамено OB піде по рамені OD (із рівности лу...) точка B впаде в точку D. Дуги, яких кінці пристали є пристайні, а тому $\smile AB = \smile CD$.

Доведемо II теорему. $\frac{\smile CD}{\smile AB} = \frac{\angle COD}{\angle AOB}$.

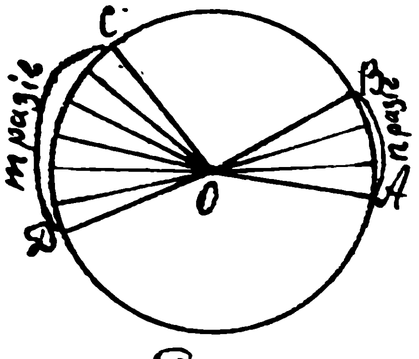


Рис. 112.

а) Припустимо, що дуги спільномірні, себто мають якусь спільну міру дугу „а", що міститься в дузі AB n разів, а в дузі CD - m разів (рис. 112); тоді дуга $\smile AB = a.n$, а дуга $\smile CD = a.m$. і відношення їх буде $\frac{\smile CD}{\smile AB} = \frac{am}{an} = \frac{m}{n}$. Точки поділу дуг $\smile AB$ і $\smile CD$ сполучимо лучами з центром O. Тоді кут AOB подробиться на n центральних кутів, рівних міне собою (бо всі вони спираються на рівні дуги $= a$). Так само кут COD подробиться на m рівних центральних кутів. Коли величину одного такого кута означимо через p, то: $\angle COD = p.m$, а $\angle AOB = p.n$. І відношення їх буде $\frac{\angle COD}{\angle AOB} = \frac{pm}{pn} = \frac{m}{n}$

Дві величини зокрема рівні третій рівні між собою, а тому $\frac{\smile CD}{\smile AB} = \frac{\angle COD}{\angle AOB}$.

б) Припустимо, що дуги $\smile AB$ і $\smile CD$ несПільномірні, себто не мають спільної міри. Тоді переведемо їх вимір з довільною наближеністю до $\frac{1}{n}$.

Для цього, як відомо, треба одиницю міри дугу AB поділити на n рівних частин і одну таку частину „$в$" відкласти на дузі $\smile CD$; припустим, що ця частина „$в$" вміститься в дузі CD. m разів і лишається дуга $x < в$.

Тоді $\smile CD = в.m + x$

$$\smile AB = в.n$$

$$\frac{\smile CD}{\smile AB} = \frac{m}{n} + \frac{x}{вn} \left(\frac{1}{n}\right)$$

Злучивши точки поділу дуг з центром O ми матимем у вирізку AOB n рівних між собою центральних кутів і величину кожного з них приймаєм за p, а у вирізку COD буде m центральних кутів $\angle p$ і лишиться $\angle y < \angle p$.

Таким чином $\angle COD = p.m + y$

$$\angle AOB = p.n$$

$$\frac{\angle COD}{\angle AOB} = \frac{m}{n} + \frac{y}{pn} \left(\frac{1}{n}\right)$$

Ми знаємо, що два відношення, що мають

рівні наближені значіння, вираховані з однакового довільного наближністю — рівні, а тому $\frac{\angle COD}{\angle AOB} = \frac{\smile CD}{\smile AB}$

Раз умови I і II вимірности виконані, то ми можемо за одиницю міри кута взяти кут, що спирається на наперед визначену дугу й по величині дуги, відповідаючій котному довільно взятому куту судити о його величині відносно взятої нами одиниці міри — кута.

Умовлено поділити все коло на 360 частин; дуга рівна цій частині зветься дуговим градусом, а центральний кут, що спирається на цей дуговий градус вважається за одиницю міри кута й зветься кутовим градусом.

Таким чином, по величині дуги центр. кута можна судити про міру самого кута. Тому, що дузі в a° (дугових градусів) завжди буде відповідати центр. кут в a° (кутових). Для більш дрібних промірів дуговий градус (а разом і відповідний кутовий) поділяються на 60 мінут, а мінута в свою чергу на 60 секунд. Для переведення довільних кутів у центральні, й виміру їх дуг (а тому й ~~самих кутів~~) вживають приладдя, що носить назву кутоміра або транспортіра

Колові кути
(кути в колі)

Кути, що утворюються простими, які належать до кола (тятива, луч, січна, дотична) звуться коловими.

Всі колові кути можна поділити на 3 групи.

1) Кути кругові – це ті колові кути що мають свій вершок у полі кола (або на крузі)

2) Кути обводові – колові кути, що мають свій вершок на обводі кола.

3) Кути позакругові – колові кути, що мають свій вершок поза кругом кола.

Теорема. Величина колових кутів залежить від величини приналежних їм дуг а саме:

1) Круговий кут вимірюється пів сумою дуг замкнених між його раменами й їх продовженням.

2) Обводовий кут вимірюється пів дугою замкненою його раменами

3) Позакруговий кут вимірюється пів різницею дуг замкнутих його раменами.

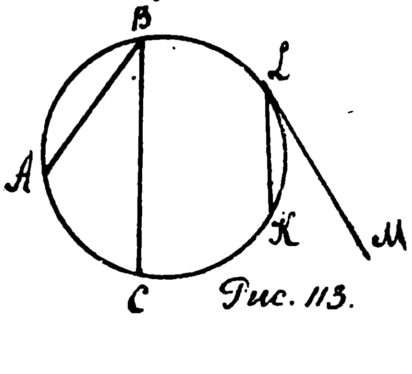


Рис. 113.

I. Розглянемо наперед вимір обводових кутів.
До обводових кутів належатимуть ті, що утворені

або 1) двома тятивами, які мають спільну точку на обводі кола. (Такі обводові кути звуться введеними в коло), або 2) тятивою й дотичною, що стикаються в точці дотику дотичної (рис. 113).

Доведемо, що обводовий кут вимірюється пів дугою замкненою між його раменами.

Можуть бути 3 випадки.

1й випадок. Обводовий кут є введений і одно з рамен його є поперечником кола (рис. 114).

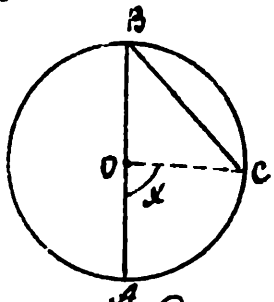


Рис. 114.

Сполучимо центр O з C; тоді $\triangle BOC$ є рівнораменний ($OB = OC$ як лучі одного кола) й у нім $\angle B = \angle C$; разом з тим $\angle x$ є зовнішнім відносно $\triangle$-а BOC, с. т. $\angle x = \angle B + \angle C$, або $2\angle B = x$; але $\angle x \equiv \smile AC$ як центральний, а тому $2\angle B \equiv \smile AC$ й $\angle B \equiv \frac{\smile AC}{2}$.

2й випадок. Коли обидва рамена обводового введеного кута не є поперечники (рис. 115).

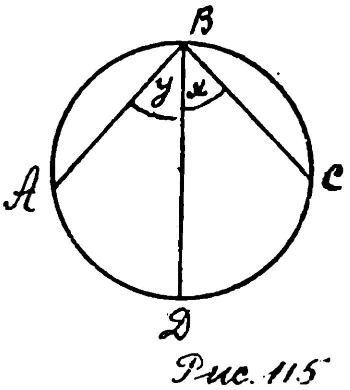


Рис. 115

Проведемо поперечник BD, який розділить $\angle B$ на 2 введених кути ($\angle x$ і $\angle y$), що мають одне рамено поперечником; по доведеному вище такий кут $x \equiv \frac{\smile DC}{2}$ і $\angle y \equiv \frac{\smile AD}{2}$; тому $\angle x + \angle y \equiv \frac{\smile DC + \smile AD}{2}$, або $\angle x + \angle y = \angle B \equiv \frac{\smile DC + \smile AD}{2} \equiv \frac{\smile ADC}{2}$.

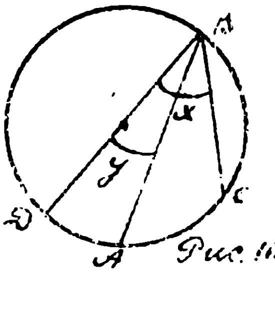


Рис. 116

Наколи б поперечник BD пішов поза полем кута (рис. 116) то мали б, що $\angle B = \angle x - \angle y$ й можемо написати: $\angle x \equiv \frac{\smile DAC}{2}$ і $\angle y \equiv \frac{\smile DA}{2}$, с. т. $(\angle x - \angle y) \equiv \frac{\smile DAC - \smile DA}{2} \equiv \frac{\smile AC}{2}$.

Висновки: 1) Всі введені обводові кути, що спираються на одну й тую дугу є рівні (бо вимірюються половиною цієї дуги (рис. 117). 2) Всі введені обводові кути, що спираються на кінці поперечника $= d$ (прямому кутові) бо вимірюються половиною пів-обводу кола.

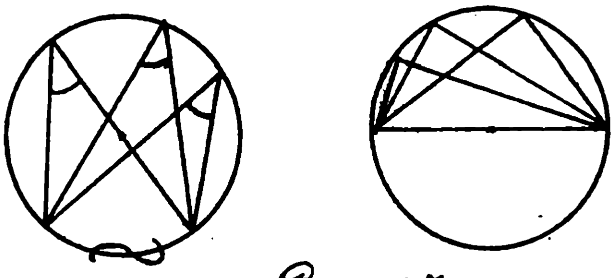


Рис. 117

3-й випадок. Обводовий кут є утворений тятивою й дотичною до кола в кінці її.

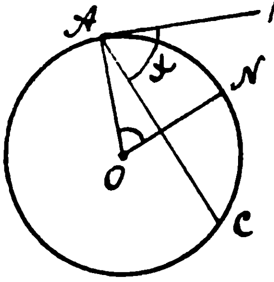


Рис. 118

$\angle x \equiv \frac{\smile ANC}{2}$?

Проводимо лучі: OA, який буде $\perp AB$, як луч до дотичної в точці дотику й $ON \perp AC$; Тоді $\angle x = \angle O$, як кути що мають взаємно прямі рамена; але $\angle O$ є центральний і $\equiv \smile AN$; тому $\angle x$ теж $\equiv \smile AN$; але $\smile AN = \smile NC$ (бо луч прямовий до тятиви переполовинює відповідну дугу) і звідси $\angle x \equiv \frac{\smile ANC}{2}$

II Кругові кути.

До кругових кутів належать кути, що утворюються тятивами, що перехрещуються на крузі.

Доведемо, що такі кути вимірюються півсумою дуг замкнених між їх раменами й продовженнями їх.

$$\angle x \equiv \frac{\smile AD + \smile CB}{2} \ ?$$

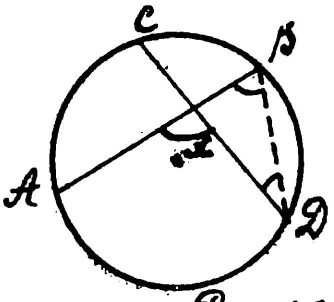


Рис. 119.

Провівши BD (рис. 119) маємо, що $\angle D \equiv \frac{\smile CB}{2}$, як обводовий; $\angle B \equiv \frac{\smile AD}{2}$, теж як обводовий і $\angle x$ є зовнішній відносно $\triangle KBD$, с. т. $\angle x = \angle D + \angle B$ (як несуміжним йому), а тому $\angle x \equiv \frac{\smile CB + \smile AD}{2}$.

Примітка. Центральний кут також є круговий кут, але тому що дуги (a і b)

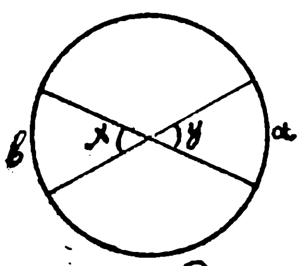


Рис. 120.

(рис. 120) які замкнуті його раменами й їх продовженнями є рівні (бо $\angle x = \angle y$ як перехресні, а рівним центральним кутам відповідають рівні дуги, а тому $\smile a = \smile b$) то $\angle x \equiv \frac{\smile a + \smile b}{2} \equiv \frac{2a}{2} \equiv a$. Отже центральний кут є окремий (частковий) випадок кругового кута.

II Позакругові кути.

До позакругових кутів належать: 1) кут обведений на колі, що утворюється двома дотичними. 2) Кут утворений двома січними, що перехрещуються поза колом і 3) кут утворений січною й дотичною до кола, що проведені зі спіль-

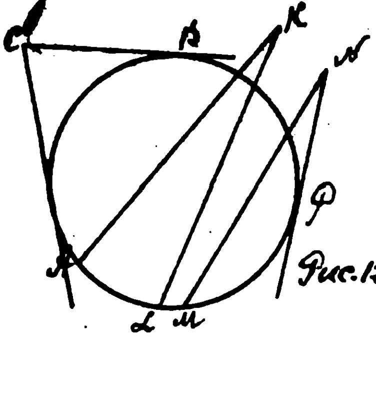


Рис. 121

ної точки (рис. 121.)

Доведемо, що кожний із цих кутів вимірюється півріжницею дуг замкнутих його раменами

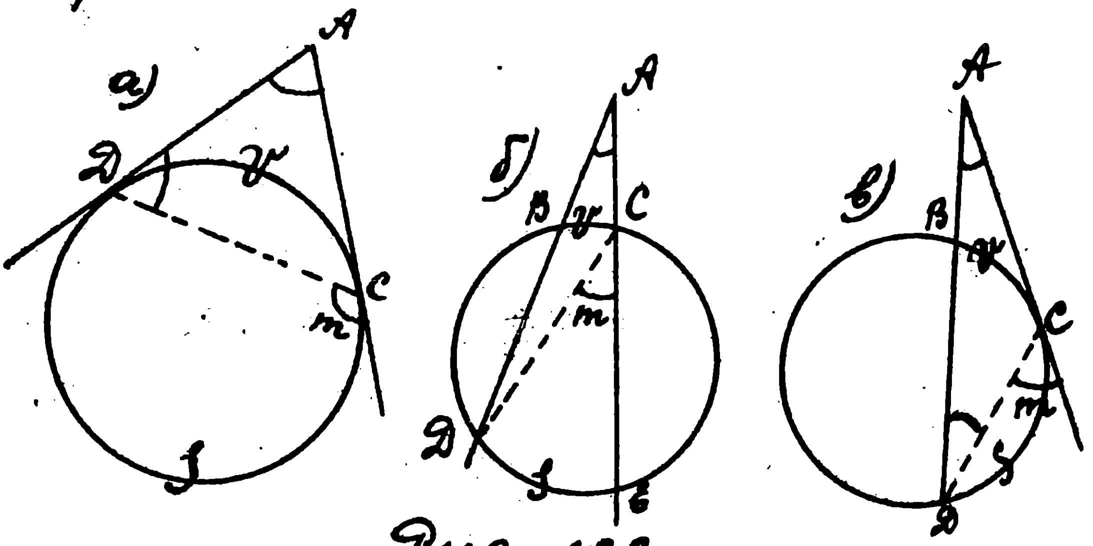


Рис. 122.

Сполучимо точки D і C (рис. 122 а, б, в) тоді утвориться $\angle m$ зовнішній до відповідних Δ-ів DCA. Зовнішній кут Δ-ка рівний сумі внутрішніх йому несуміжних, а тому $\angle m = \angle A + \angle D$. І потрібний кут:

$$\angle A = \angle m - \angle D$$

Кут m є обводовий, а тому вимірюється пів дугою: $\frac{s}{2}$. [для кутів а) і в) $\smile s = \smile DC$ а для $\angle$ б) $s = DE$], а кут D є також обводовий і вимірюється пів дугою: $\frac{v}{2}$ [для кута а) $v = \smile DC$ а для б) і в) $v = \smile BC$].

Тому $\angle A \equiv \frac{\smile s}{2} - \frac{\smile v}{2} = \frac{\smile s - \smile v}{2}$

Для а) $\angle A \equiv \frac{s-v}{2} = \frac{\smile DsC - \smile DvC}{2}$

для б) $\angle A \equiv \frac{s-v}{2} = \frac{\smile DE - \smile BC}{2}$

для в) $\angle A \equiv \frac{s-v}{2} = \frac{\smile DC - \smile BC}{2}$

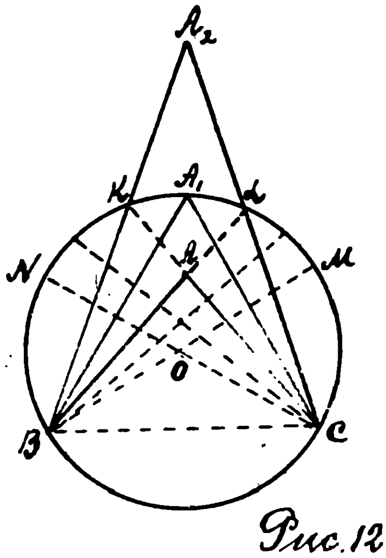


Рис. 123.

Уявим собі, що вершок колового кута A (рис. 123) рухається від центра в напрямку $A_1 A_2$ поза коло. Ми бачимо, що по мірі віддалення вершка A від центра $\angle A$ зменшується. Найбільший він буде тоді, коли має вершок у центрі O (він вимірється $\smile BC$ або $\frac{\smile BC + \smile MN}{2} = \frac{2 \smile BC}{2}$) По мірі віддалення від A до A_2 він зменшується ($\angle A \equiv \frac{\smile BC + \smile KL}{2}$, але $\smile KL$ завжди менша $\smile BC$ тому $\frac{\smile BC + \smile KL}{2} < \frac{2 \smile BC}{2} (= \smile BC)$. Чим далі KL зменшується і коли кут стає обводовим (вершок точка A_1) тоді $\smile KL$ становиться $= 0$. Тому $\angle A_1 \equiv \frac{\smile BC + 0}{2} \equiv \frac{\smile BC}{2}$. Нарешті коли вершок A_2 стає позакруговим то дуга $\smile KL$ знова нарастає, але стає від'ємною й зменшує величину кута

$$\angle A_2 \equiv \frac{\smile BC + \smile(-KL)}{2} \equiv \frac{\smile BC - \smile KL}{2}.$$

При дальшому віддаленню вершка A на безмежність $\smile KL$ зростає до величини $\smile BC$ і різниця $\frac{\smile CB - \smile KL}{2}$ простує до 0, себ-то січні A_2B і A_2C стають рівнобіжними.

Задача 1. Знайти геометричне місце вершків прямих кутів, що стираються на визначений відтинок АВ.

Кутом, що спирається на визначений відтинок будемо звати кут, рамена якого проходять через кінці відтинка. (Такий кут зветься ще кутом зору під яким око спостерігача в точці вершка кута бачить визначений відтинок).

Ми знаємо, що обводовий кут, що спирається на поперечник є прямий. Отже, щоб кут, що спирається на визначений відтинок був прямий необхідно щоб цей відтинок був поперечником кола. Тому переполовинюємо відтинок АВ (рис. 124) і на ньому, як поперечнику будуємо коло.

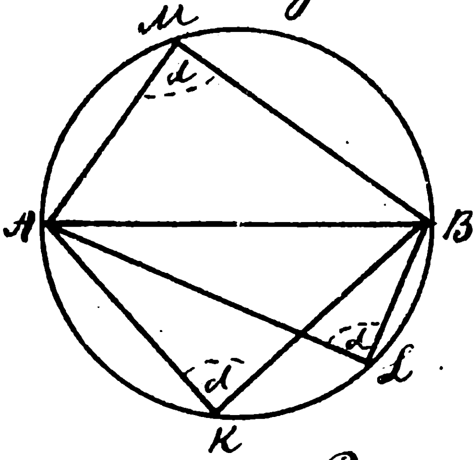


Рис: 124

Кожна точка кола, сполучена тятивами з А і В буде вершком прямого кута, що спирається на АВ (крім точок А і В). Як висновок з цеї задачі є задача: Збудувати прямокутний Δ-к по протипрямці „а" і прямці „в"

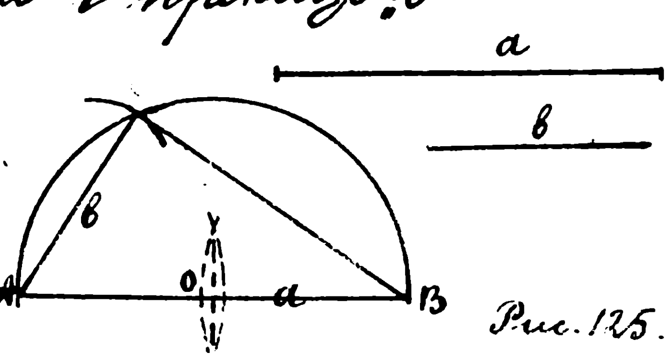


Рис. 125.

Очевидно що задачу можна виконати так: збудувати прямий кут, що спинок „а" і має віддалення свого вершка від одного з кінців відтинка „а" рівне „в". Тому будуємо геометричні місця вершків прямих кутів, що спираються на відтинок „а" – це є коло збудоване на а як поперечнику. Потім від точки А відкладаємо тятиву = в. Точка С буде вершком потрібного Δка АСВ.

Задача 2. Через точку С поза колом провести до нього дотичну.

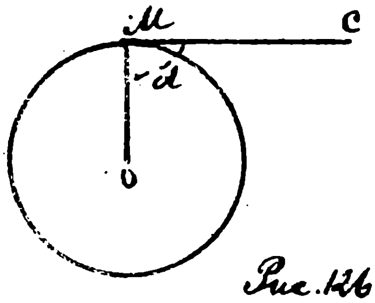


Рис. 126

Зробимо аналізу збудування. (рис. 126) Коли припустимо що СМ є дотична, то вона прямова до луча ОМ, проведеного через точку дотику. Таким чином, рамена прямого кута проходять через точки О і С, а тому він спирається на відтинок ОС. Отже шукаємо геометричне місце вершків прямих кутів, що спираються на ОС. Ми знаємо, що вони лежать на обводі кола поперечника ОС (рис. 127) (Будуємо коло). Але вершок прямого кута мусить лежати й на обводі даного кута, а тому таких точок буде

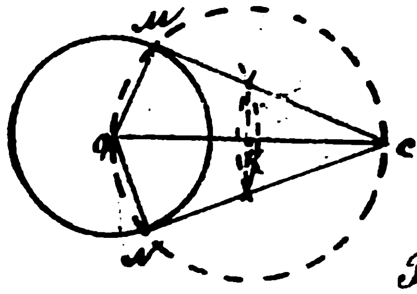


Рис. 127.

дві М і N і дотичних до кола з точки поза колом можна повести дві.

Відтинком дотичної будемо називати відтинок й від даної точки поза колом до точки дотику. Порівнюючи прямокутні трикутники COM і CON ми бачимо, що їх протипрямка є спільна (CO), а прямки OM = ON, як лучі кола. Тому $\Delta COM = \Delta CON$ і останні прямки $CM = CN$, себ-то: <u>відтинки дотичних поведених до кола з точки поза колом є рівні.</u>

<u>Задача 3.</u> <u>В кінці відтинка AB поставити до нього прям.</u> (рис. 128).

1-й спосіб. Від кінця відтинка A відкладаємо довільний відтинок $AK = a$ й на ньому будуємо рівнобічний ΔAMK. Бік MK продовжуємо на $MN = a$. Тоді відтинок NA буде прям до AB в точці A.

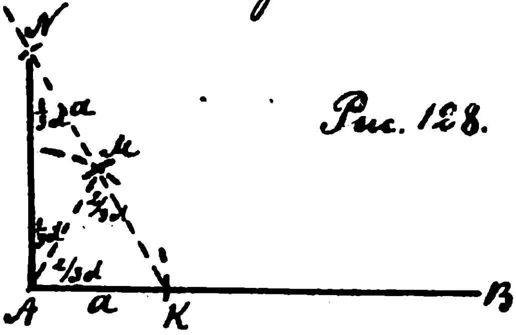


Рис. 128.

Довід: Кожний кут рівнобічного Δ-ка $= \frac{2}{3}d$. ΔAMN є рівнораменний бо $AM = a$ і $MN = a$, тому коли $\angle AMK = \frac{2}{3}d$, як зовнішній до ΔAMN є рівний сумі $\angle N$ і $\angle MAN$ з ним несуміжних, то кожний із кутів $\angle N : \angle MAN$ рівний $\frac{1}{3}d$. Отже $\angle A = \frac{2}{3}d + \frac{1}{3}d = d$.

<u>2-й спосіб.</u> Зробимо аналізу збудування. (рис. 129) Ми знаємо, що прямий кут введений у коло буде спиратися на поперечник. Тому для шуканого кола, що проходи-

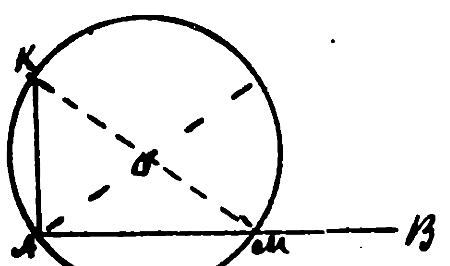


Рис. 129.

тиме через точку A й буде мати центр поза AB, цей прямий $\angle A$ мусить спиратися на його поперечник.

Отже взявши довільно точку O поза відтинком AB (рис. 130) ми лучем OA обведемо коло й найдемо точку M – кінець поперечника кола. Сполучивши M з центром O і продовживши його до перехрестя з колом в точці K, одержим KA – прям до AB в точці A, бо $\angle MAK$, що спирається на поперечник кола KM є прямий.

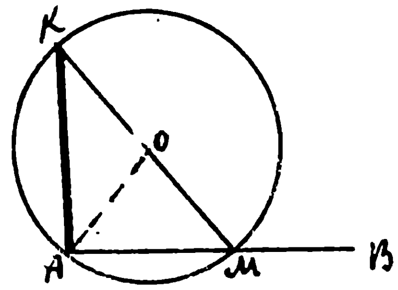


Рис. 130.

Введені в коло й обведені на колі многокутники.

Введеним у коло многокутником зветься такий, що має свої вершки на обводі кола, а боки тятивами кола.

Обведеним на колі многокутником зветься такий, що має своїми боками дотичні до кола (а вершки поза колом).

Навпаки

Колом обведеним на многокутникові зветься коло що проходить через усі вершки його.

Колом введеним у многокутник зветься коло, що дотикається всіх його боків.

Розглянемо умови при яких можна ввести у многокутник і обвести на ньому коло:

Теорема. <u>На кожному трикутникові можна обвести коло і в кожний трикутник можна ввести коло.</u>

I. Вершків у Δ-ові три, а через три точки, що не лежать на прямій можна завжди провести коло и при тому одно, бо три ці точки цілком визначають коло.

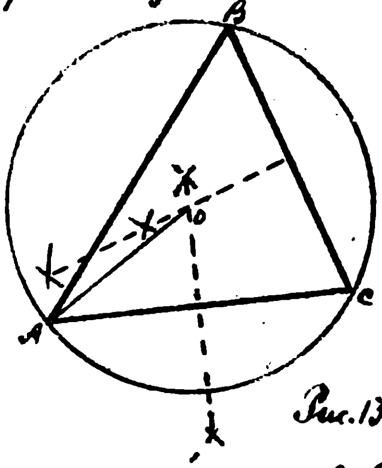


Рис. 131

Щоб обвести коло на трикутникові досить із середини боків поставити прямі. Перехрестя цих прямих буде центром, а віддалення його від вершка напр. OA (рис. 131) буде лучем кола.

II. Виходячи з того міркування що при введенні кола в кут, його центр мусить бути рівновіддаленим від боків кута, себто лежати на симетральній, проводимо в Δ-ві ABC (рис. 132) симетральну ∠-а A, с. т. AO і симетральну ∠-а C, с. т. CO. Тоді коло, що буде спільно введеним і в ∠A і в ∠C мусить лежати на перехресті симетральних цих кутів, себто в точці O. Остается довести що й симетраль-

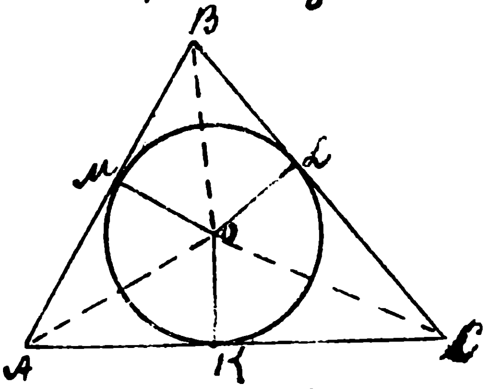


Рис. 132.

на ∠-а B теж пройде через точку O, c. т., що коло будучи спільно введеним у ∠A і ∠C буде також введеним і в ∠B, або, що коло буде введене в Δ-к. З точки O спустимо прямі OK, OM і OL на боки Δ-а. Тоді з властивости симетральної AO маємо що OK=OM, а з властивости симет. CO маємо OK=OL. Тому OM=OL, що показує що й точка O також рівновіддалена від боків AB й BC (рамен кута B), тому лежить на симетральній кута B. Цим доводимо що всі 3 симетральні Δ-ка перехрещуються в спільній точці і це перехрестя є центром кола введеного в Δ-к. Така точка єдина й коло буде єдиним.

Щоб ввести <u>коло в Δ-к</u>, досить провести симетральні двох його кутів. Точка перехрестя буде центром кола, а довжина прямої з O на один з боків буде лучем кола.

<u>Умова, коли в чотирикутник можна ввести й коли на чотирикутникові можна обвести коло.</u>

<u>I</u> Щоб <u>у чотирикутник</u> можна було <u>ввести коло</u> необхідно й вистарчаюче, щоб суми протилежних боків були рівні.

Уявим собі що таке коло вже введене в чотирикутник. Тоді всі боки його будуть дотичними, инакше з кожного вершика 4-кутника буде проведено по 2 дотичних до кола, які ми знаємо будуть рівні а тому:

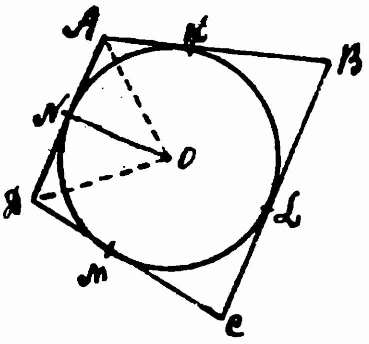


Рис. 133

(рис 133) $\left\{\begin{array}{l} AK = AN \\ BK = BL \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} MC = LC \\ MD = DN \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} AK + BK = AB \\ MC + MD = DC \\ AN + ND = AD \\ BL + LC = BC \end{array}$

$AB + DC = AD + BC$

Що й є умовою коли в чотирекутник можна ввести коло. Щоб ввести це коло досить з двох кутів напр. $\angle A$ і $\angle D$ провести симетральні й знайдемо центр O. Віддалення до якого боку (напр. ON) буде лучем.

II. Щоб <u>на чотирекутникові</u> можна було <u>обвести коло</u> необхідно й вистарчаюче, щоб сума протилежних кутів у ньому рівнялася 2d.

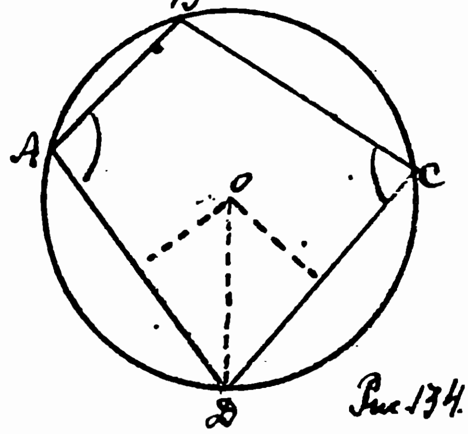


Рис. 134.

Уявимо, що ми таке коло обвели (рис. 134), тоді воно пройде через всі вершки 4-кутника й всі кути будуть обводовими. Кожний кут обводовий виміряється половиною приналежної дуги, а тому $\angle A \equiv \frac{\smile BCD}{2}$ а $\angle C = \frac{\smile BAD}{2}$.

сума $\angle A + \angle D \equiv \frac{\smile BCD + \smile BAD}{2}$, себ-то півколом, а тому сума $\angle A + \angle D = 2d$. Також і для кутів $\angle B + \angle D$.

Щоб обвести таке коло досить до яких двох боків (напр. AD і DC) з їх середини поставити прями. Точка їх перехрестя O буде центром, а віддалення до верхика напр. OD лучем.

Теорема. <u>Коли многокутник правильний, то в нього можна ввести й на ньому можна обвести коло.</u>

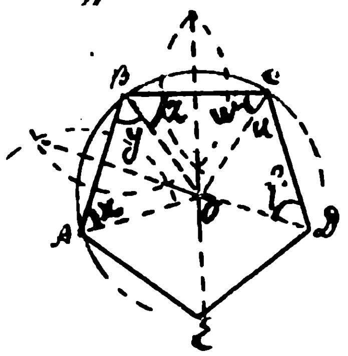


Рис. 135

Припустим, що маємо правильний многокутник $AB = BC = CD = DE = EA$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$ (рис. 135). Обведемо на ньому коло: Ми маємо змогу поки що провести коло через 3 точки напр. A, B і C. Для цього ми знаємо треба поставити прями з середин боків AB і BC і точка їх перехрестя O буде центром а відтинки $OA = OB = OC$ лучами. Доведемо, що коло пройде й через решту верхиків D і E, себ-то прями з середин DC і ED і AE також пройдуть через точку O. Сполучимо верхики ⬠ з центром O і розглянемо ΔAOB і ΔBOC вони пристайні бо $AO = OC$, BO спільна, а $AB = BC$. Тоді $\angle x = \angle w$; $\angle u = \angle z$

($OA = OB = OC$, бо точка лежить на прямих із середин AB і BC) себто OB є симетральна $\angle B$. Із рівнораменности $\triangle BOC$ $\angle z = \angle w$, а $\angle B = \angle C$, тому OC (а також само й OA) кута $\angle C$ (OA кута $\angle A$). Розглянемо $\triangle BOC$ і $\triangle COD$. Вони теж пристаючі бо $BC = DC$. OC спільне $\angle w = \angle u$ (OC є симетральна), тому й $\angle f = \angle z$. себто OD є симетральна $\angle D$ і рівна $OD = OB = OC$. Таким чином точка O рівновіддалена від кінців CD а тому лежить на прямій з середини CD.

Так само сполучивши O з E і розглядаючи $\triangle EOD$ і $\triangle DOC$ і т. д. ми доведемо, що точка O рівновіддалена від усіх точок D, E, A, B, C, себто всі прямі з середин DE, EA, AB, BC і DC схрещуються в точці O. Тому взявши точку O за центр ми лучем OA можемо обвести коло на правильному многокутникові $ABCDE$ й при тому одно.

Доводючи попереднє твердження ми устаналили що OA, OB, OC, OD, OE - є симетральні відповідних кутів. Перехрестя всіх цих симетральних O буде тому рівновіддалене від усіх боків многокутника, а тому O є центром єдиного кола введеного в многокутник. Лучем цього кола буде прямі OK спущений з центра O на бік (AB).

Висновок 1°. В правильному многокутникові центр кол введеного в нього й обведеного на ньому є спільна точка, що звється центром правильного многокутника. Прями спущений із центра кола на бік кожного введеного в нього многокутника звється межеприямом (або апотемою) многокутника.

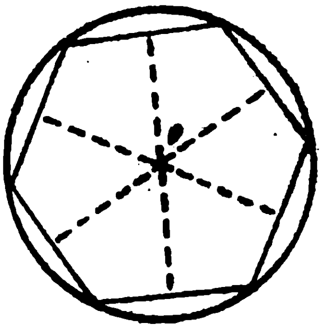


Рис. 136.

Висновок 2°. Межеприями правильних многокутників переполовинюють їх боки, рівні між собою й уявляють із себе луч кола введеного в многокутник.

Взаємне положення двох кол на площі.

Кола можуть мати різні положення на площі. Але їх можна поділити по певним ознакам на групи.

Будемо називати положення двох кол внутрішнім (або осередочним) коли обидва центра кол лежатимуть на крузі одного з них, а коли центри кол кожний поза кругом другого, то їх положення називають зовнішнім (або околичним).

Два внутрішнеположених кола.

що мають спільний центр звуться <u>спільноцентровими</u> (або концентричними).

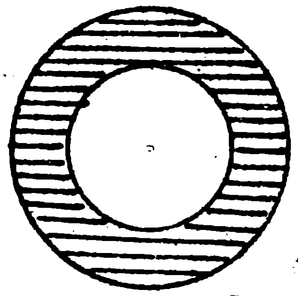


Рис. 137

Частина круга замкнена між обводами спільноцентрових кол зветься круговим кільцем.

Два внутрішнеположених кола, що мають не спільні центри й не дотикаються обводами звуться <u>неспільноцентровими</u> (або ексцентричними). рис. 138.

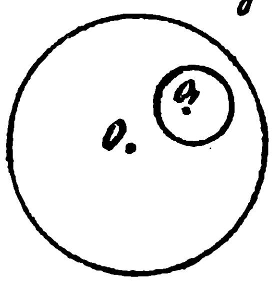


Рис. 138

Відтинок простої, що лучить центри двох кол зветься <u>лучником кол</u>.

Два кола звуться перехрещеними, коли їх обводи мають дві спільні точки (рис. 139).

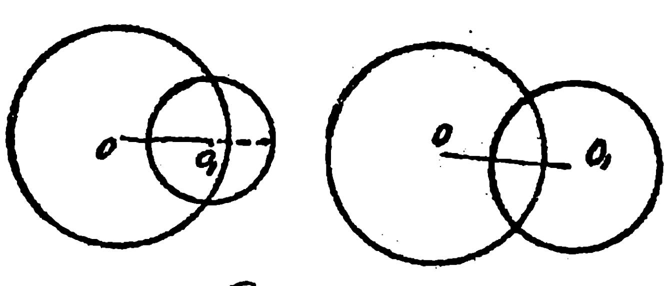


Рис. 139

Перехрещення може бути внутрішнім і зовнішнім.

Точки перехрещення лежать симетрично по обидва боки лучника їх.

<u>Два кола звуться дотичними</u> коли мають одну лише спільну точку їх обводів (рис. 140).

Дотикання кол може бути внут-

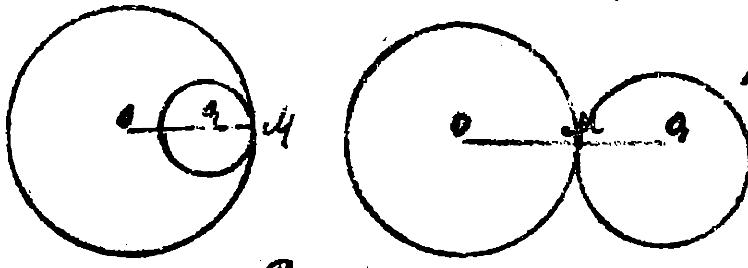


Рис. 140.

рівнім і зовнішнім.

Два кола звуться **неперехрещеними**, коли обвід одного з них лежить всіма своїми точками поза обводом другого (рис. 141).

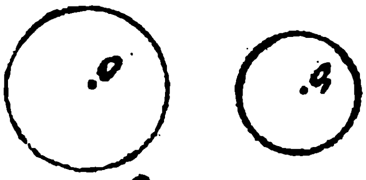


Рис. 141

Неперехрещення кол може бути лише зовнішнім, бо внутрішні неперехрещення мають свої окремі назви (спільно й неспільно-центрові).

Теорема. Коли спільна точка обводів двох кол лежить поза лучником їх, то кола перехрещуються, а коли спільна точка обводів лежить на лучникові двох кол, то ці кола дотикаються. (рис. 142 а, б).

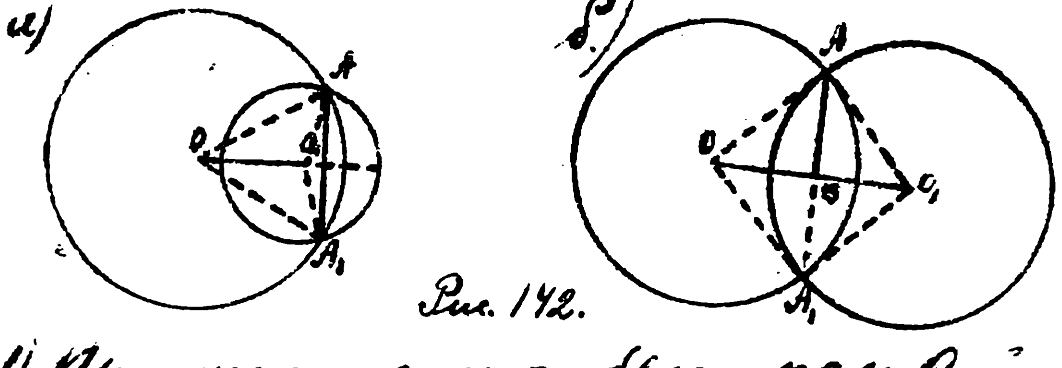


Рис. 142.

1) Припустимо, що обводи кол O й O_1 мають спільну точку A не на лучникові OO_1. Спустимо із цієї точки прямі AB на лучник і продовжимо по другий бік на таке ж віддалення $BA_1 = AB$. Тоді OO_1 буде прямою із середини AA_1, а тому гол-

ки O і O_1 будуть рівновіддалені від A і A_1, себто $O_1A = O_1A_1$ й $OA = OA_1$. Коли точка A лежить на обводах кол O і O_1, то $O_1A = r$ а $OA = R$. тому $O_1A_1 = r$ і $OA_1 = R$.

Коли точка A_1 лежить на віддалені r від центра O_1, то вона є на обводі кола O_1; так само коли A_1 лежить на віддалені R від центра O то вона лежить на обводі кола O. Отже A_1 також є спільною точкою кол. Більш двох точок спільних вже не може бути, бо три точки вже визначають коло й тому кола при трьох і більше спільних точках будуть пристанні (злилються).

Коли обводи цих кол мають дві точки спільні, то ми знаємо що вони звуться перехрещеними.

Висновок. Спільна тятива двох перехрещених (внутрішне й зовнішне) кол є прямова до лучника й переполовинюється ім (або його продовженням), (як косина рівнораменника).

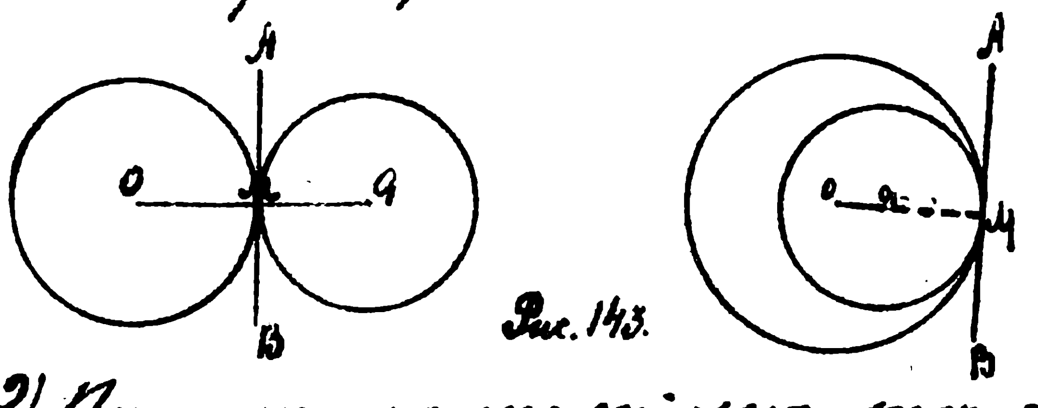


Рис. 143.

2) Припустимо, що спільна точка двох

кол лежить на їх лучнику (рис. 143). То іншої точки поза лучником бути не може, бо колиб така була, то з тільки що доведеного їй би завжди відповідала друга симетрично положена до лучника точка й тоді ми малиб три точки, що не можливо бо кола не є пристайні. Тому точка M буде єдиною спільною точкою обох обводів кол і кола по визначенню зватимуться дотичними.

Висновок. Проста проведена через точку дотику двох кол прямово до їх лучника буде спільною дотичною їх. (бо лучі кол лежатимуть на лучнику й проста прямова до лучника буде прямою до обох лучів в їх кінці, а така проста є дотична до обох кол).

Ознаки взаємного положення кол.

1) Лучник двох спільноцентрових кол рівний нулю. (рис. 144).

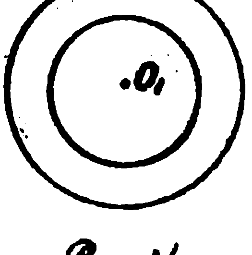


Рис. 144

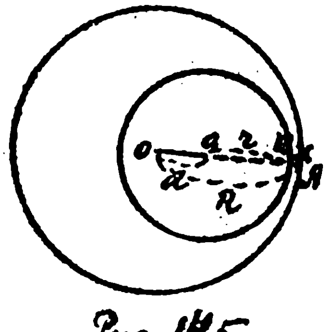


Рис. 145

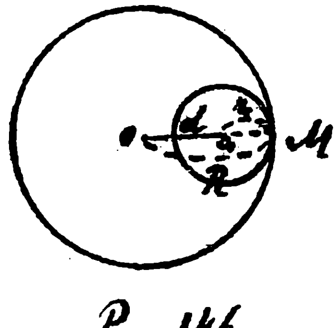


Рис. 146.

2) Лучник двох неспільноцентрових

кол менше різниці лучів кол. (рис. 145).

$OO_1 = d = OA - OB - BA$. $d = (R - r) - x$. $d < R - r$.

3) Лучник двох внутрішньо дотичних кол рівний різниці лучів кол. (рис. 146)

$OO_1 = OM - O_1M$. $d = R - r$.

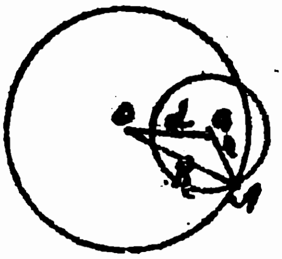


Рис. 147

4) Лучник двох внутрішньо перехрещених кол більше різниці лучів кол (рис. 147).

Із $\triangle O_1OA$ бік $OO_1 > OA - O_1A$. $d > R - r$.

5) Лучник двох зовнішньо-перехрещених кол менше суми лучів кол (рис. 148).

Із $\triangle OAO_1$ один бік $OO_1 < OA + O_1A$. $d < R + r$.

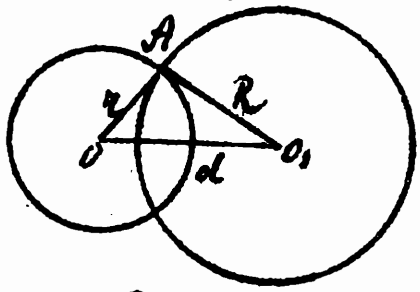


Рис. 148

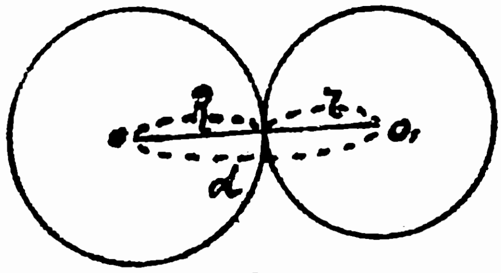


Рис. 149

6) Лучник двох зовнішньо-дотичних кол рівний суми лучів кол. (рис. 149.)

$OO_1 = OM + MO_1$. $d = R + r$.

7) Лучник неперехрещених кол більш суми лучів кол.

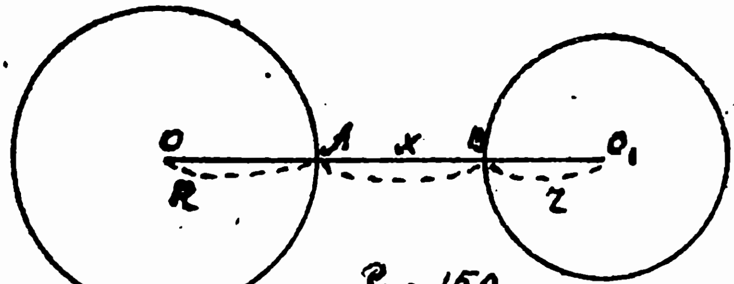


Рис. 150.

$OO_1 = (OA + O_1B) + AB$.

$d = (R + r) + x$.

тому $d > R + r$.

Примітка: лучники внутрішньо-... полотнечих кол порівнюються з різницею луків, а зовнішнє - половина кол із сумою луків кол.

Схожість.

Два многокутники звуться схожими, коли мають всі кути попарно рівні а боки взаємно пропорційні.

Розглянемо спочатку схожість трикутн.

Основна теорема схожости.

(лема)

Коли через точку на боці Δ-ка повести рівнобіжну якому з боків, то ця рівнобіжна відтинає Δ-к схожий даному.

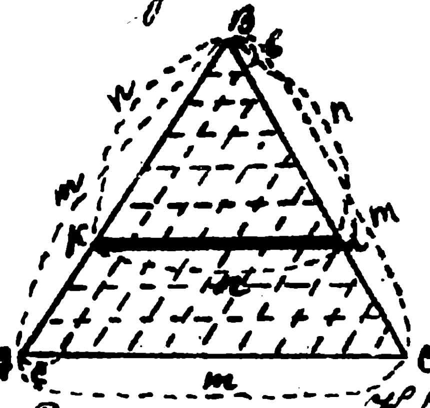


Рис. 150.

Припустим, що в Δ ABC (рис. 151) через точку K боку AB поведена просто KL // до AC. Доведемо, що Δ KBL є схожий Δ ABC.

$$\frac{KL \parallel AC}{\angle A = \angle K;\ \angle C = \angle L}$$

$$\frac{AB}{KB} = \frac{BC}{BL} = \frac{AC}{KL} \ ?$$

себ то $\Delta ABC \sim \Delta KBL$.

1) $\angle K = \angle A$; $\angle L = \angle C$ як згідні при рівнобіжних $AC \parallel KL$ і січних AB і BC.

Доведемо пропорційність боків.

Тут може бути 2 випадки: боки Δ-ків є спільномірні й не спільномірні.

I-й випадок: AB і KB є спільномірні.

тоді вони мають спільну міру. Хай ми стуиневими діленнями знайшли її - вона є „а" і припустили, що при відкладенні її на відтинках, вона вмістилась у ВК (одиниці міри) n разів, а в АВ m разів.

Тоді $\frac{AB}{BK} = \frac{m}{n}$

Через точки поділу проведемо рівнобіжні АС. Тоді в куті В, коли на одному рамені відкласти від вершка рівні між собою відтинки й повести через кінці її рівнобіжні тоїй на другому рамені ВС відкладуться рівні між собою відтинки. Припустимо що один такий відтинок „в". Тоді „в" вкладеться на ВС m разів а на BL n разів: BC= m.в; BL= n.в

$$\frac{BC}{BL} = \frac{m.в}{n.в} = \frac{m}{n}$$

Тепер через точки поділу АВ. Поведемо рівнобіжні до ВС, тоді також на рамені ∠А - АС відкладеться m рівних між собою відтинків „с", а на рамені ∠К - KL відкладеться n рівних між собою відтинків також рівних с (бо рівнобіжні між рівнобіжними є рівні). Тому AC=m.c; KL= n.c.

$$\frac{AC}{KL} = \frac{m.c}{n.c} = \frac{m}{n}$$

Всі три відношення мають однакову вартість $\frac{m}{n}$, тому вони рівні й можна написати:

$$\frac{AB}{BK}=\frac{BC}{BL}=\frac{AC}{KL}$$

себ-то $\Delta ABC \sim \Delta KBL$.

2-й випадок: AB і KB не є спільномірні. Тоді спільної міри немає й вимір можна перевести наближено (з довільною наближеністю $\frac{1}{n}$). Для цього поділимо одиницю міри KB на n рівних частин і відкладемо таку одну частину „k" на AB.

Відтинок k укладеться на AB (рис. 152) припустим m разів і матимем решту $x<k$. Тоді $AB = mk + x$; $BK = nk$. $\frac{AB}{BK}=\frac{mk+x}{nk}=\frac{m}{n}+\frac{x}{nk}$

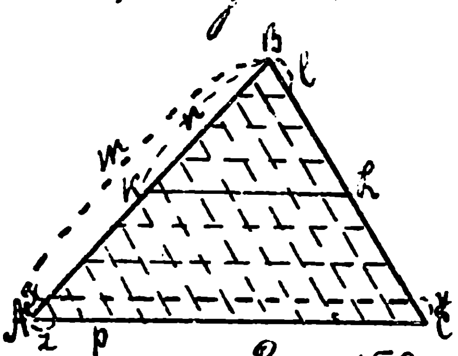


Рис. 152.

Ми вже знаємо, що вартість $\frac{x}{nk}<\frac{1}{n}$ й тому $\frac{AB}{BK}=\frac{m}{n}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Повівши через точки поділу AB рівнобіжні до AC матимем на BC рівні між собою відтинки l і відтинок y, що відповідає відтинку x, де $y<l$ тому $BC = ml + y$ а $BL = nl$.

$$\frac{BC}{BL} = \frac{m}{n} + \frac{y}{nl} = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Далі повівши через точки поділу AB рівнобіжні BC матимем на AC – m рівних між собою відтинків „p" і відтинок $z < p$, а на KL n відтинків p.

Тому $\frac{AC}{KL} = \frac{mp+z}{np} = \frac{m}{n} + \frac{z}{np} = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Відношення, вартости виміру якиж з однакового довільного набличкностю є рівні, – вважаються за рівні, а тому

$\frac{AB}{BK} = \frac{BC}{BL} = \frac{AC}{KL}$ себто $\triangle ABC \sim \triangle KBL$.

Ознаки схожости трикутників.

Теорема. Два трикутники схожі, коли: 1) два кути одного трикутника взаємно рівні двом кутам другого (рис. 153)

2) 2 боки одного Δ-а взаємно пропорційні двом бокам другого, а кути між ними рівні; (рис. 153)

3) всі боки одного Δ-а взаємно пропорційні всім бокам другого. (рис. 153).

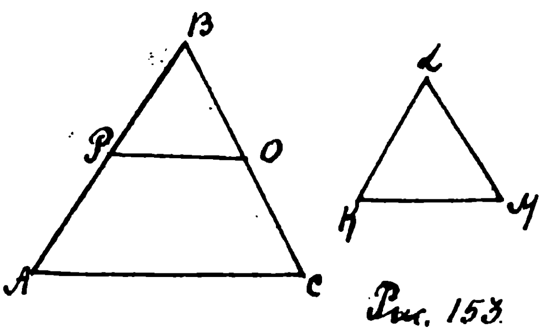


Рис. 153.

1) $\angle K = \angle A$; $\angle B = \angle L$

$\triangle ABC \sim \triangle KLM$.

Від вершка B відкладемо $PB = KL$ і поведемо PO рівнобіжну AC.

Тоді по лемі схожости $\triangle ABC \sim \triangle PBO$.

Лишається довести, що $\Delta POB = \Delta KLM$. $\angle A = \angle P$ як злучні при рівнобіжних AC і BO, але по умові $\angle A = \angle K$ тому $\angle P = \angle K$. Отже в трикутниках ΔPBO і ΔKLM боки $PB = KL$ рівні по відкладенню, $\angle B = \angle L$ по умові й доведено що $\angle P = \angle K$, тому по першій ознаці пристайности $\Delta PBO = \Delta KLM$, але ми знаємо що $\Delta ABC \backsim \Delta PBO$, то замінивши ΔPBO на пристайний йому ΔKLM маємо, що $\Delta ABC \backsim \Delta KLM$.

2) $\dfrac{AB}{KL} = \dfrac{BC}{LM}$

$\angle B = \angle L$

$\Delta ABC \backsim \Delta KLM$?

Також від вершка B відкладемо $BP = LK$ і поведемо рівнобіжну до AC. По лемі $\Delta ABC \backsim \Delta PBO$, а у схожих трикутниках взаємні боки пропорційні, тому

$$\frac{AB}{PB} = \frac{BC}{BO}.$$

але $PB = KL$, а тому

$$\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{BO}.$$

Порівнюючи цю пропорцію з даною в умові, ми спостерегаємо, що три члени одної пропорції рівні трьом членам другої а тому й четверті члени будуть рівні, себто: $BO = LM$.

ΔPBO і ΔKLM мають по 2 боки взаємно рівні: $BP = LK$; $BO = LM$, а кути між ними по умові $\angle B = \angle L$, а тому $\Delta PBO = \Delta KLM$. Заміняючи ΔPBO на пристайний йому ΔKLM маємо $\Delta ABC \sim \Delta KLM$.

3) $$\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{LM} = \frac{AC}{KM}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta KML\ ?$$

Відклавши $PB = KL$ і провівши $PO \parallel AC$ матимем із схожости (по лемі) $\Delta ABC \sim PBO$.

$$\frac{AB}{\cancel{PB}\ KL} = \frac{BC}{BO} = \frac{AC}{PO}$$

Порівняємо пропорцію з перших двох відношень; а саме: $\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{BO}$ з пропорцією з перших двох відношень умови, а саме: $\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{LM}$.
Три члени пропорції рівні то й четвертий $BO = LM$.

Далі порівнявши пропорцію з останніх двох відношень (замінивши в ній BO на рівне LM), а саме

$$\frac{BC}{LM} = \frac{AC}{PO}$$

з пропорцією з останніх двох відношень умови: $\frac{BC}{LM} = \frac{AC}{KM}$
маємо, що також четверті члени

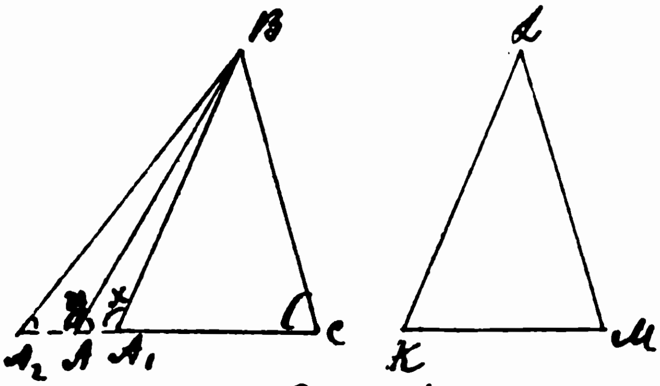
$$PO = KM.$$

Отже ΔPBO і ΔKLM є пристайні, тому що мають взаємно рівними всі три боки. Через те ми замісць ΔPBO можемо взяти ΔKLM, а тоді

$$\Delta ABC \backsim \Delta KLM.$$

4° ознака пристайности Δ-ів.

Два трикутники пристайні, коли два боки й кут проти більшого боку в одному Δ-ові відповідно рівні двом бокам і куту проти більшого боку у другому. (рис. 154).



$AB = KL$
$BC = LM$
$AB > BC$
$KL > LM$
$\angle C = \angle M$

$\Delta ABC = \Delta KLM$?

Рис. 154.

Прикладаємо $\angle M$ на $\angle C$ так, щоб вершок M пристав до вершка C рамено MK пішло по рамену CA. Через пристайність кутів $\angle M$ і $\angle C$, рамено ML піде по рамену CB, а через рівність рамен $CB = ML$ і вершок L впаде у вершок B. Про величину кутів $\angle L$ і $\angle B$ нам невідомо, а тому можливо припустити три випадки: LK прийме 1) положення BA_1; 2) положення BA_2 і 3) положення BA. Розглянемо перше положення BA_1. В Δ-ові ABA_1 $\angle x > \angle C$ (як зовнішній до $\triangle A_1BC$ більший внутрішнього несуміжного йому], а $\angle A < \angle C$ по умові (кут проти меншого боку BC), тому $\angle x > \angle A$, але $\triangle ABA_1$ є рівнораменний, бо A_1B є бік KL а по умові $AB = KL$ тому $AB = A_1B$, тому $\angle x$ мусить бути рівний $\angle A$, а з доведеного $\angle x > \angle A$ й наше припущення неможливе.

Припустим що KL має положення BA_2 ($KL = BA_2$).

$\angle y$ як зовнішній до $\triangle ABC$ більш $\angle C$ себто $\angle y > \angle C$.

$\angle A_2$ як внутрішній у $\triangle A_2BA$ менш зовнішнього до цього $\triangle$-а несуміжного з ним $\angle A$.

$\angle A_2 < \angle A$, а тим скорше буде менше кута $\angle C$, себ-то

$\angle A_2 < \angle C$.

Тоді й $\angle y > \angle A_2$.

Це знова неможливо бо $\triangle A_2BA$ є рівнораменний ($AB = KL = A_2B$). І це припущення не є правильне; лишається, що KL піде по AB, але тоді трикутник $ABC = \triangle KLM$.

<u>4° ознака схожости трикутників.</u>

<u>Два трикутники схожі, коли два боки одного $\triangle$-а пропорційні взаємно двом бокам другого $\triangle$-а, а кути, що</u>

лежать в кожному Δ-ові проти більшого з цих боків є рівні

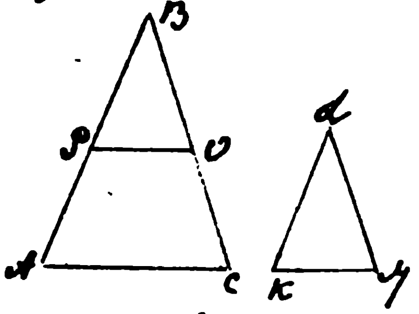


Рис. 155

$$\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{LM}$$

$$\angle C = \angle M \; ?$$

На Δ-ові ABC (рис. 155) від вершика B відкладемо $PB = KL$ і поведемо $PO \parallel AC$.

Тоді по лемі $\Delta ABC \sim \Delta PBO$, а тому

$$\frac{AB}{\cancel{PB}\;KL} = \frac{BC}{BO}$$

Порівнюючи з пропорцією умови маємо 3 члени кожної пропорції взаємно рівні то й четверті члени $LM = BO$. $\angle C = \angle O$ як злучні, а тому $\angle M = \angle O$. $\Delta PBO = \Delta KLM$ (по двох боках і куту проти більшого: $PB = KL$; $BO = ML$ $\angle O = \angle M$), а тому замінивши ΔPBO на ΔKLM маємо $\Delta ABC \sim \Delta KLM$.

Висновки 1) Трикутники, що утворені взаємно рівнобіжними, або взаємно прямими боками схожі, коли всі кути попарно одноіменні (бо всі кути Δ-ів, які створені взаємно рівнобі~~жними~~ або прямими боками й одноіменні є рівні).

2) Прямокутні Δ-и, що мають по одному гострому куту є схожі.

3) Прямокутні трикутники, що

мають пропорційні прямки, або прямку й протипрямку, є схожі.

4) Рівнораменні Δ-и, що мають по одному рівному куту є схожі (бо коли ці кути при основі, то й другі рівні, а коли при вершкові, то при основі рівні теж як половини решт від 2d)

5) Рівнораменні Δ-ки, що мають основу й рамена пропорційні — схожі

6) Всі рівнобічні Δ-ки схожі

Всі боки, кути, обводи й инші лінії, які входять в Δ-к наз. його первнями.

Теорема. В схожих Δ-ах всі лінійні первні взаємно пропорційні, як то:

1) висоти пропорційні взаємним бокам. (рис. 156).

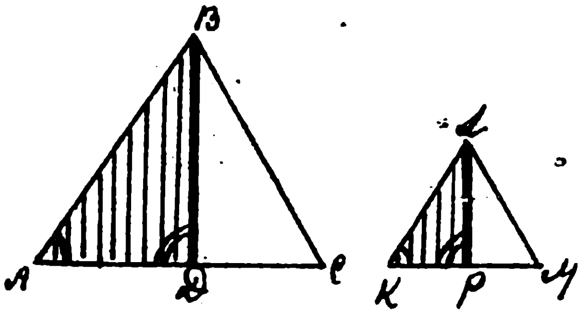


Рис. 156

$\angle A = \angle K$; $\angle B = \angle L$; $\angle C = \angle M$.

$$\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{LM} = \frac{AC}{KM} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{BD}{LP} = \frac{AB}{KL} = \frac{m}{n}\ ?$$

Розглядаючи ΔABD й ΔKLP маємо по умові $\angle A = \angle K$, а тому прямокутний $\Delta ABD \sim \Delta KLP$, а звідси й боки їх пропорційні, с.т.

$$\frac{BD}{LP} = \frac{AB}{KL} = m;$$

2) Осередні пропорційні взаємним бокам трикутника (рис. 157).

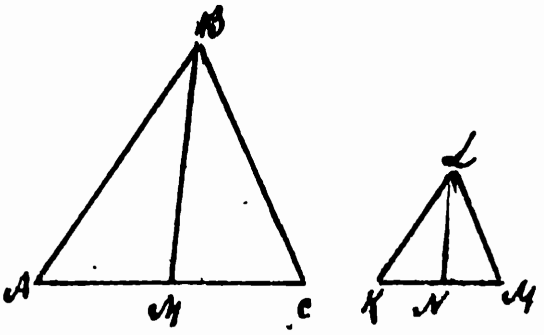


Рис. 157.

$\Delta ABC \sim \Delta KLM$

$AM = MC;\ KN = NM$

$\dfrac{BM}{LN} = \dfrac{AB}{LK} = \dfrac{m}{n}$?

Коли дано, що $\Delta ABC \sim \Delta KLM$, то $\angle A = \angle K$ й $\dfrac{AB}{LK} = \dfrac{AC}{KM} = \dfrac{m}{n}$ але по умові $AC = 2AM$, а $KM = 2KN$, а тому $\dfrac{AB}{LK} = \dfrac{2AM}{2KN}$. Отже $\Delta ABM \sim \Delta KLN$, а зі схожости цих трикутників

$$\frac{AB}{LK} = \frac{BM}{LN} = \frac{m}{n}$$

3) Симетральні пропорційні взаємним бокам (рис. 158).

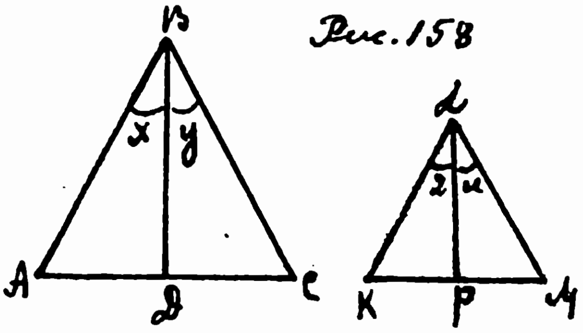


Рис. 158

$\Delta ABC \sim \Delta KLM$

$\angle x = \angle y;\ \angle z = \angle u$

$\dfrac{BD}{LP} = \dfrac{AB}{LK} = \dfrac{m}{n}$?

Зі схожости $\Delta ABC \sim \Delta KLM$ $\angle A = \angle K$; $\angle B = \angle L$ то й половини їх рівні, с. т. $\angle x = \angle z$. Тому $\Delta ABD \sim \Delta KLP$, а через те $\dfrac{BD}{LP} = \dfrac{AB}{KL} = \dfrac{m}{n}$.

4) Обводи пропорційні взаємним бокам (рис. 159)

$\Delta ABC \sim \Delta KLM$

$\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{AB}{KL} = \dfrac{m}{n}$

Зі схожости трикутників маємо:

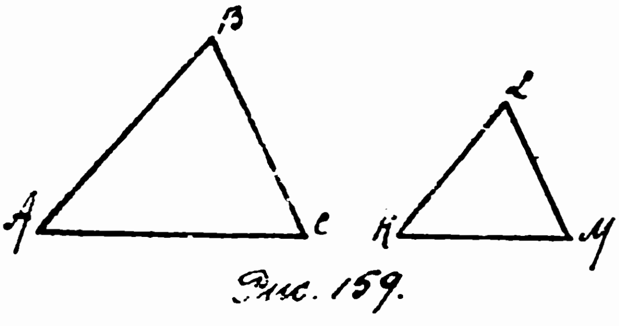


Рис. 159.

$$\frac{AB}{KL}=\frac{BC}{LM}=\frac{AC}{KM}\left(=\frac{m}{n}\right).$$

Але з властивости пропорцій знаємо, що сума попередніх членів так відноситься до суми наступних, як один попередній до одного наступного, себто:

$$\frac{AB+BC+AC}{KL+LM+KM}=\frac{AB}{KL}\left(=\frac{m}{n}\right)$$

$AB+BC+AC=P$ і $KL+LM+KM=P_1$, тому

$$\frac{P}{P_1}=\frac{AB}{KL}\left(=\frac{m}{n}\right).$$

Примітка. Для нагадання виведемо згадану властивість пропорцій.

Хай маємо пропорцію $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{l}{m}\dots$

Частку відношення означимо через p.

тоді $\frac{a}{b}=p$; $\frac{c}{d}=p$; $\frac{e}{f}=p$; $\frac{l}{m}=p\dots$

або

$$\begin{array}{rl} & a=bp \\ + & c=dp \\ & e=fp \\ & l=mp \\ & \vdots \quad \vdots \\ \hline & a+c+e+l=p(b+d+f+m) \end{array}$$

або $p=\frac{a+c+e+l}{b+d+f+m}$. $p=\frac{a}{b}$ тому

$$\frac{a+c+e+l\dots}{b+d+f+m}=\frac{a}{b}$$

Схожість многокутників.

Схожими многокутниками наз. такі многокутники, що мають кути взаємно рівні, а боки взаємно пропорційні.

Теорема. Коли два многокутники косинами з відповідного верхка розбиваються на схожі й одноманітно розположені Δ-ки, то й самі многокутники будуть схожі (рис. 160).

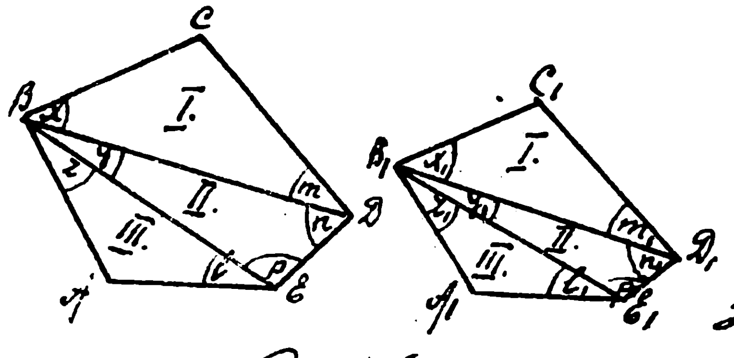


Рис. 160.

$\Delta I \sim \Delta I_1$

$\Delta II \sim \Delta II_1$

$\Delta III \sim \Delta III_1$

$\square ABCDE \sim \square A_1B_1C_1D_1E_1$

Зі схожости $\Delta I \sim \Delta I_1$ маємо, що: $\angle x = \angle x_1$; $\angle m = \angle m_1$; $\angle C = \angle C_1$, а також $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$.

Зі схожости $\Delta II \sim \Delta II_1$ маємо, що $\angle n = \angle n_1$; $\angle y = \angle y_1$; $\angle p = \angle p_1$ і тому $\angle D = \angle D_1$ (як сума паристо рівних кутів) і 2) $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{BE}{B_1E_1}$.

Зі схожости $\Delta III \sim \Delta III_1$ маємо, що $\angle z = \angle z_1$; $\angle l = \angle l_1$; $\angle A = \angle A_1$; тому $\angle B (\text{с.т. } \angle x + \angle y + \angle z) = \angle B_1 (\text{с.т. } \angle x + \angle y + \angle z)$ і $\angle E (\text{с.т. } \angle l + \angle p) = \angle E_1 (\text{с.т. } \angle l + \angle p)$ і 3) $\frac{BE}{B_1E_1} = \frac{AE}{A_1E_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$. Сполучивши всі відношення и викинувши з складеної пропорції ті відношення, які порівнюють косини будемо мати: $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{AE}{A_1E_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

с. т. боки цих многокутників пропорційні, а раніш доведено, що кути в них паристо рівні, то ці многокутники є схожі.

Висновки. I В схожих многокутниках всі елементи їх пропорційні.

II. Всі правильні многокутники є схожі (бо по формулі $\frac{2d(n-2)}{n}$ маємо, що кути в многокутниках є рівні, а боки по рівності між собою пропорційні.

Пропорційні прості.

Визначення. Відтинком відтятим від рамена кута зветься відтинок від верника його до перехрестя рамена якоюсь будь простою.

Теорема. Рівнобіжні, що перехрещують рамена кута:

1) відтинають від них відтинки пропорційні, а також 2) розтинають рамена кута на частини пропорційні. (рис. 161).

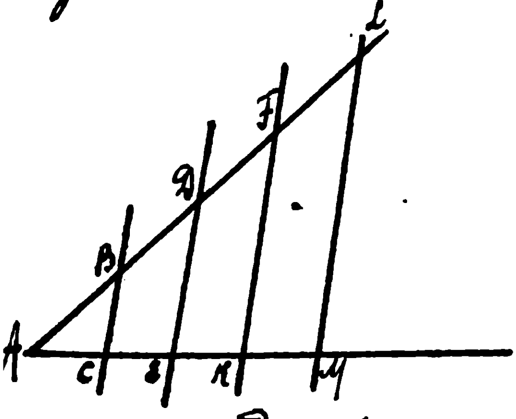


Рис. 161.

1) $BC \parallel DE \parallel FK \parallel LM$

$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AB}; \frac{AK}{AE} = \frac{AF}{AD}$ і т. д.?

або: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AK} = \frac{AL}{AM}$ і т. д.?

Розглянемо $\triangle ADE$; в ньому через точку C на боці його проведено рів-

побіжну до DE а тому по лемі $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$;
Із ΔAFK теж по лемі $\frac{AK}{AE}=\frac{AF}{AD}$ і т. д.
Переставляючи в цих пропорціях крайні члени матимем

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{\underline{AE}};\quad \frac{AD}{\underline{AE}}=\frac{AF}{AK} \text{ і т. д.}$$

або сполучаючи відношення маємо

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{AF}{AK}=\frac{AL}{AM} \text{ і т. д.}$$

2) $\underline{BC \parallel DE \parallel FK \parallel LM}$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CE}=\frac{DF}{EK}=\frac{FL}{KM}\ ?$$

Із пропорцій $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{AF}{AK}=\frac{AL}{AM}\dots$

Складемо похідні пропорції: Різниця попередніх так відноситься до різниці наступних, як один попередній до відповідного наступного:

1) $\frac{AD-AB}{AE-AC}=\frac{AB}{AC}$	$\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}$
2) $\frac{AF-AD}{AK-AE}=\frac{AD}{AE}$	$\frac{DF}{EK}=\frac{AD}{AE}$
3) $\frac{AL-AF}{AM-AK}=\frac{AF}{AK}$ і т. д.	$\frac{FL}{KM}=\frac{AF}{AK}$

Праві частини цих пропорцій рівні, а тому й ліві також. Іми маємо.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} = \frac{DF}{EK} = \frac{FL}{HM} = \ldots \text{ і т. д.}$$

Зворотня теорема. <u>Прості, що відтинають від рамен кута або розтинають рамена кута на відтинки пропорційні є рівнобіжні</u> (рис. 162).

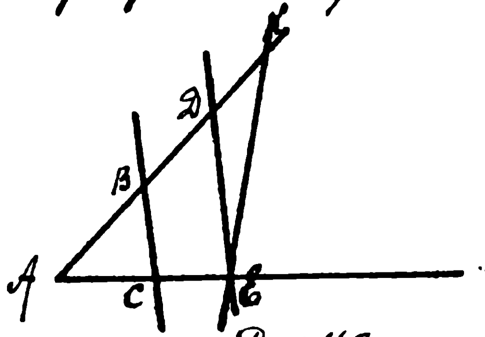


Рис. 162

$$\frac{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}}{BC \parallel DE\,?}$$

Припустим, що DE не $\parallel$ до BC, тоді можемо провести через точку E просту $EK \parallel BC$. З простої теореми ми знаємо що тоді:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Порівнюючи цю пропорцію з пропорцією умови ми бачимо, що по 3 члени у них рівні, а тому й четверті рівні себ то $AK = AD$ й точка K впаде в точку D. Тоді KE буде пристайна до DE, що й треба було довести.

Висновок. <u>Відтинки простих між рівнобіжними пропорційні</u> (рис. 163).

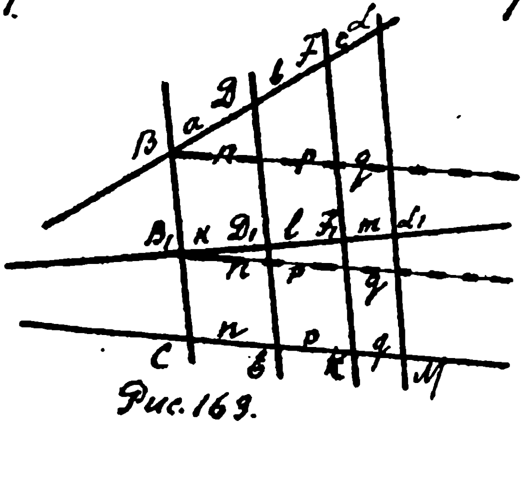


Рис. 163.

Провівши через точки B і B_1 рівнобіжні до CM ми прийдемо до попередньої простої теореми й тому $a:b:c = n:p:q$

$k:l:m = n:p:q$

що ж а коли $a:b:c = k:l:m = n:p:q$

Визначення. Ряд простих, що перехрещуються в одній точці звуться збіжними. Ці збіжні прості утворюють жмуток простих. Точка їх перехрестя зветься вузлом жмутка.

Теорема. Рівнобіжні, що перехрещують жмуток простих

1) відтинають від збіжних пропорційні відтинки й

2) розтинають їх на відтинки пропорційні (рис. 164).

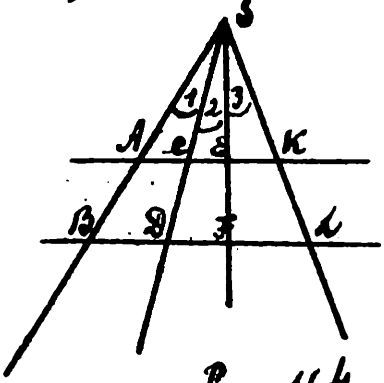


Рис. 164

Розглядаючи кут $\angle 1$ ми маємо: $\frac{BS}{AS} = \frac{DS}{CS}$ або $\frac{BA}{AS} = \frac{DC}{CS}$.

Розглядаючи кут $\angle 2$ маємо $\frac{DS}{CS} = \frac{FS}{ES}$ або $\frac{DC}{CS} = \frac{FE}{ES}$

а з $\angle 3$ маємо $\frac{FS}{ES} = \frac{LS}{KS}$, або $\frac{FE}{ES} = \frac{KL}{KS}$ і т. д.

Зрівнюючи пропорції маємо

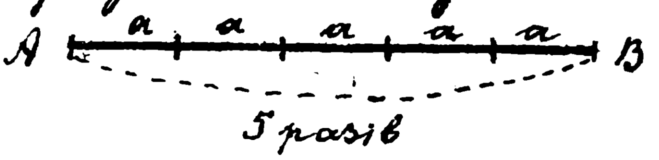
1) $\frac{BS}{AS} = \frac{DS}{CS} = \frac{FS}{ES} = \frac{LS}{KS}$ і т. д.

або 2) $\frac{BA}{AC} = \frac{DC}{CS} = \frac{FE}{ES} = \frac{KL}{KS}$ і т. д.

Геометричне обчислення алгебричних взорів.

Алгебричну величину висловлену числами можна завжди в той або инший спосіб виобразити як величину геометричну.

Найпростійше виображення є вимірного числа напр. 5; принявши за одиницю деякий відтинок —a— ми число пʼять можемо виобразити як відтинок AB:



Коли маємо якийсь алгебричний вираз, то ми можемо обчислити його коли величини, що складають цей вираз виобразимо геометрично й відповідними геометричними будуваннями переведемо дії вказані виразом. Не розглядаючи цього питання в цілому ми розвяжемо декілько окремих простійших задач.

1ша задача. Величину M поділити на частини пропорційні $m:n:p$, [себто $x+y+z=M$; $x:y:z=m:n:p$]

Припустим, що взявши за одиницю який відтинок „a" ми виобразимо 1) M як відтинок AB. 

2) „m" як відтинок CD: 

3) „n" —„— KL 

4). „p" як відтинок RS: 

Тоді до AB через точку A проведемо під довільним кутом просту AN (рис. 165) і від вершка A відкладемо один за одним відтинки m, n і p. Сполучивши точку O з кінцем відтинка B, ми проведемо через кінцеві точки відтинків m і n прості CE і DF || BO, тоді з попередніх теорем відомо,

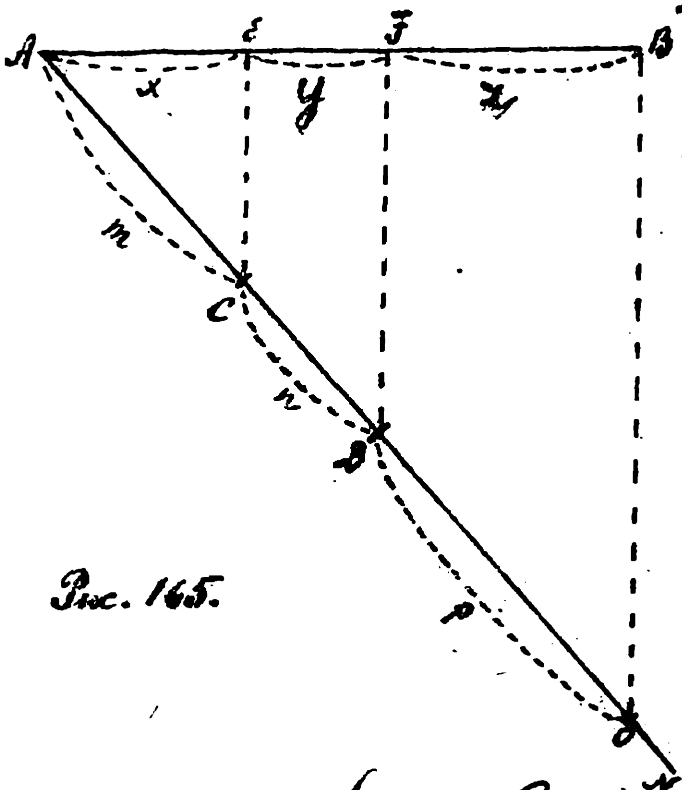


Рис. 165.

що на AB відкладуться відтинки x, y і z пропорційні даним m, n і p себто

$$x : y : z = m : n : p.$$

Виміравши їх через нашу одиницю „u" ми висловимо ці відтинки x, y і z відповідними числами.

В пропорції $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ <u>знайти четверту пропорційну x.</u>

Хай a, b і c можна геометрично виобразити як відтинки 

Тоді задача зводиться до такої: <u>знайти четвер-</u>

тий відтинок, пропорційний даним відтинкам a, b і c.

1-й спосіб. Возьмемо довільний кут AOE (рис. 166); на рамені AO відкладемо послідовно відтинки a і b, а на рамені OE — відтинок c. Сполучивши простою

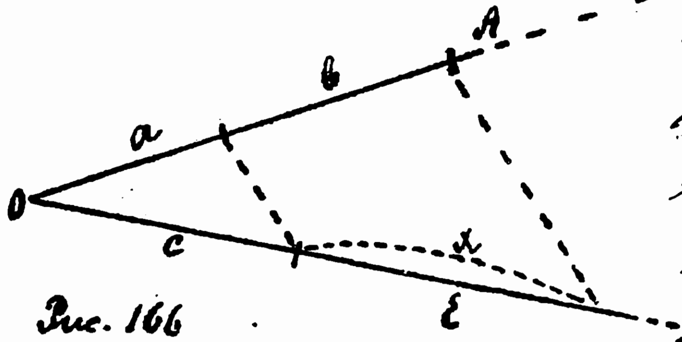
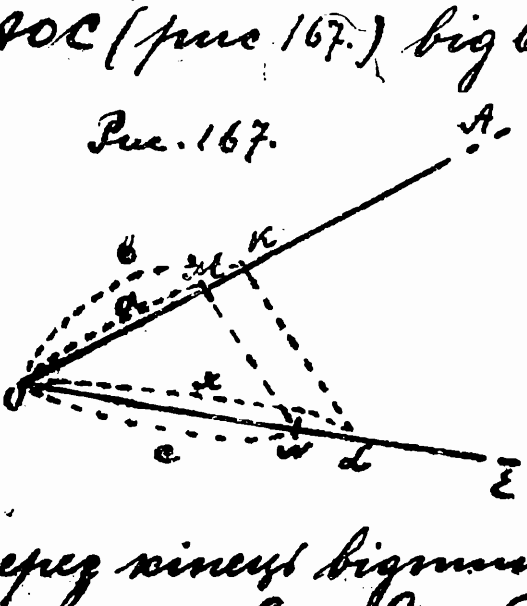


Рис. 166

кінець відтинка „a" з кінцем відтинка c й провівши через кінець відтинка b рівнобіжну будемо мати: $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, бо дві рівнобіжні розтинають кут на частини пропорційні. Тому x буде той відтинок, що шукаємо.

2-й спосіб. На довільному куті AOC (рис 167.) від вершка відкладемо на рамені OA a і b, а на рамені OE — відтинок c. Сполучимо кінці відтинків a і c простою ML проведемо через кінець відтинка b просту KL || MN тоді: $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, бо рівнобіжні відтинають від рамен кута частини пропорційні. Потрібний відтинок бу-

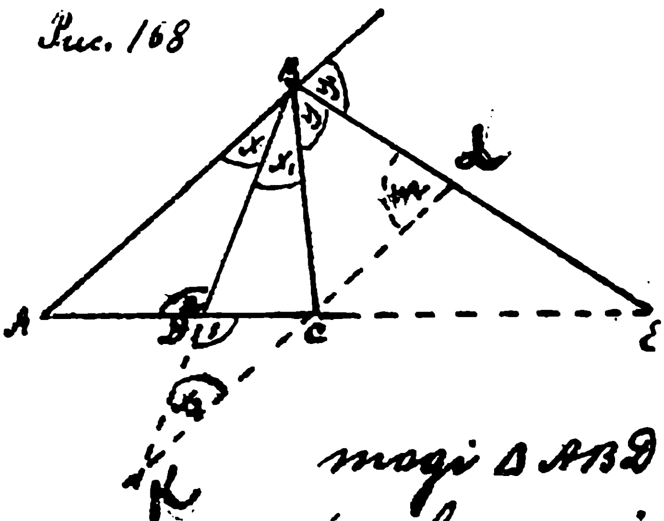
Рис. 167.



де x. [Практична порада:
на одному рамені завжди відкладають-
ся обидва члени відомого відношення,
а на другому рамені відомий член
другого відношення. Сполучують про-
стого завжди відтинки відомого ряд-
ка пропорції (a і c)]

Теорема. Симетральна внутріш-
нього, або зовнішнього кута Δ-а пере-
тинає протилежний бік або його
продовження в такій точці, що від-
далення її від кінців цього бока
пропорційні відповідним бокам Δ-а.

Рис. 168



$$\angle x = \angle x_1;\ \angle y = \angle y_1$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC};\ \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$$

(рис. 168). Через вершок C Δ-а ABC проведено $KC \parallel AB$; тоді $\Delta ABD \sim \Delta DKC$, бо $\angle x = \angle x_2$ (як внутрішні перехресні при $AB \parallel KC$) і $\angle 1 = \angle 2$ (як вершкові), тому $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{KC}$; але $KC = BC$ (бо ΔBCK рівнораменний, що має $\angle x_1 = \angle x_2$) звідси

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

Для доведення, що $\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$ розглячимо $\triangle ABE$ в якому $LC \parallel AB$ (основі), а тому $\triangle LCE \sim \triangle ABE$ і ми маємо:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CL}$$

але $\triangle CLB$ рівнораменний бо $\angle m = \angle y_1$ як внутрішні перехресні при $AB \parallel CL$, а $\angle y_1 = \angle y$ (BE є симетральна) а тому $\angle m = \angle y$ й $CL = CB$.

Підставляючи у пропорцію CB замісць CL матимемо:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CB}.$$

<u>Примітка</u>. Коли $\triangle ABC$ є рівнораменний, то симетральна зовнішнього при вершкові кута не перетинає основи, бо є їй рівнобіжна. Тому, що зовнішній кут, рівний сумі внутрішніх несуміжних з ним, буде рівний $\angle A + \angle C$, себто $2\angle C$. Тому $\angle y = \angle C$, а це внутрішні перехресні при січній BC, а тому $BE \parallel AC$.

Теорема. <u>У прямокутному трикутникові прям спущений з вершка прямого кута на протипрямку (висота на протипрямку) є середнє пропорційне відтинків протипрямки, а кожна прямка є в свою чергу середньо пропорційне між всією протипрямкою</u>

<u>й прилеглою частиною її</u>

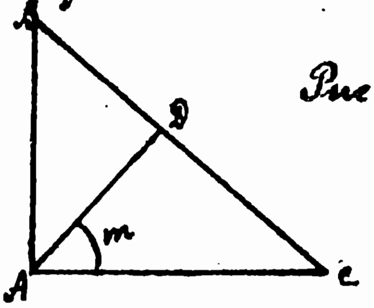


Рис. 169

$AD \perp BC$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ AD^2 = BD.DC \\ 2)\ AB^2 = BC.BD \\ 3)\ AC^2 = BC.DC \end{array}\right\} ?$$

1) Для доведення, що $AD^2 = BD.DC$ $\left(\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD}\right)$ розглянемо ΔABD і ΔADC; ці Δ-и прямокутні й крім того $\angle B = \angle m$ (як складені взаємно прямими боками); тому $\Delta ABD \sim \Delta ADC$ й звідси $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$ або $AD^2 = BD.DC$.

2) Для доведення, що $AB^2 = BC.BD$, розглянемо ΔABC і ΔADB; ці Δ-и схожі, бо вони прямокутні й мають по спільному кутові B; звідси $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ або $AB^2 = BC.BD$.

3) Для прямки AC доказ буде такий самий з розглянення Δ-ів ABC і ADC.

Висновок. (<u>Твердження Пітагора</u>).

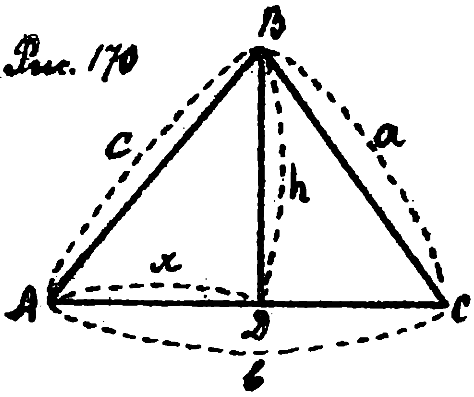
<u>Квадрат протипрямки є рівний сумі квадратів прямок</u>

З попереднього доводу

$$\begin{array}{r} AC^2 = BC.CD \\ + \ AB^2 = BC.DB \\ \hline AC^2 + AB^2 = BC(\underbrace{CD+DB}_{BC}) \\ AC^2 + AB^2 = BC^2 \end{array}$$

Теорема. <u>Квадрат боку косокутного Δ-а, що лежить проти гострого кута = сумі квадратів инших боків без подвійного здобутку одного з цих боків на мет другого боку на нього.</u>

Рис. 170



$\angle A < d$

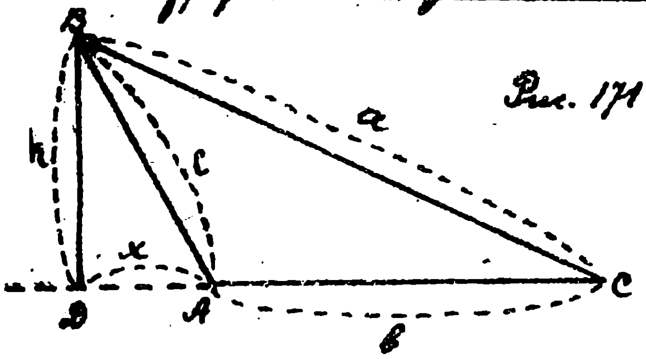
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$?

З прямокутного Δ-а DBC протипрямка $a^2 = h^2 + DC^2$; з прямокутного Δ-а ABD прямка $h^2 = c^2 - x^2$, крім того $DC = b - x$, звідки $DC^2 = (b-x)^2 = b^2 - 2bx + x^2$; підставивши в рівнання $a^2 = h^2 + DC^2$ значіння h^2 і DC^2, будемо мати:

$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2$ і зробивши зведення, будемо мати: $a^2 = c^2 + b^2 - 2bx$.

Теорема. Квадрат боку косокутного трикутника, що лежить проти тупого кута = сумі квадратів двох инших боків плюс подвійний здобуток одного з них на лект другого боку на нього.

Рис. 171

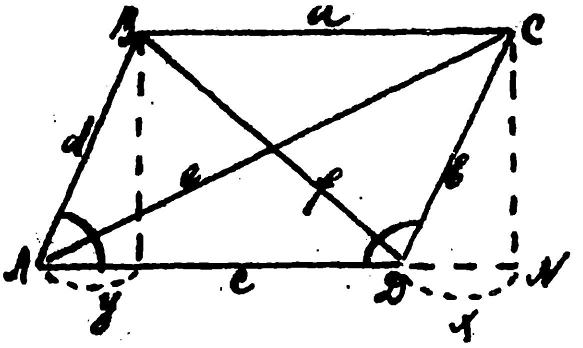


$\angle A > d$

$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$?

Провівши висоту h на продовження боку AC, матимемо з прямокутного Δ-а BDC, що $a^2 = h^2 + DC^2$; але $h^2 = c^2 - x^2$ і крім того $DC = x + b$; й $DC^2 = (x+b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$. Підставивши в рівнання $a^2 = h^2 + DC^2$ значіння h^2 і DC^2 матимемо: $a^2 = c^2 - x^2 + x^2 + 2bx + b^2$; зробивши зведення матимемо: $a^2 = c^2 + 2bx + b^2$.

Висновок. Сума квадратів косин рівнобіжника = сумі квадратів окремих __його боків.__ Рис. 172.



__АВ ‖ СД; АД ‖ ВС__

$f^2+e^2=d^2+a^2+b^2+c^2$?

1) З Δ-а АВД, в якому бік ВД (що є косиною f даного рівнобітника) лежить проти гострого кута А буде:

$$f^2=d^2+c^2-2cy;$$

2) З Δ-а АСД, в якому бік АС (що є косиною e даного рівнобітника) лежить проти тупого ∠Д матимем: $e^2=b^2+c^2+2cx$.

Склавши ці рівнасти, одержим:

$$
\begin{aligned}
1)\ & f^2=d^2+c^2-2cy \\
+\ 2)\ & e^2=b^2+c^2+2cx \\
\hline
& f^2+e^2=d^2+b^2+c^2+c^2-2cy+2cx;
\end{aligned}
$$

але в цім рівнанні можна зробити зведення членів $2cx$ й $-2cy$ (бо $x=y$ як прямки пристайних прямокутних Δ-ів АВМ і ДСN), а одне c^2 замінити на рівне a^2 (бо $a=c$, як протилежні боки рівнобітника) й тоді одержимо:

$$f^2+e^2=d^2+b^2+c^2+a^2$$

Теорема. __Почвірний квадрат осередньої Δ-а = подвійній сумі квадратів рамен без квадрату основи.__

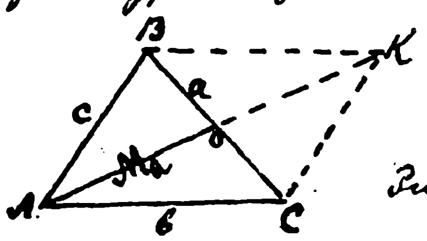


Рис 173

$$\frac{BO=OC}{4AO^2=2(AB^2+AC^2)-BC^2\ ?}$$

або $4M_a^2$ (де M_a є осередня

основи $a) = 2(b^2+c^2)-a^2$?

Проведемо $BK \parallel AC$ і $KC \parallel BA$; і сполучивши O з K доведемо, що AOK є одна проста. Дійсно AK проходить через середину BC і з'єднує протилежні вершки рівнобіжника, с. т. вона є косиною його, а звідси, (по теоремі про квадрат косин рівноб) можемо написати:

$$AK^2+BC^2=AB^2+BK^2+KC^2=AC^2;$$

але $AK=2M_a$ (M_a - половина косини AK) й $AC=BK$ та $AB=KC$, (як боки рівнобіжн.) Тому:

$$(2M_a)^2+a^2=c^2+b^2+c^2+b^2,$$ перенісши a^2 в другу половину рівнання, й зробивши упрощення будемо мати:

$$4M_a^2=2(b^2+c^2)-a^2.$$

Теорема Птоломея. <u>В копному введеному в коло 4-кутникові здобуток косин = сумі здобутків протилежних боків</u> (рис. 174)

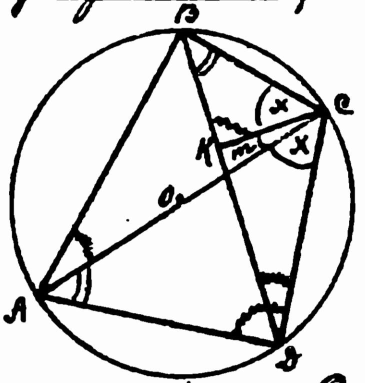


Рис. 174

$$AC.BD=AB.DC+BC.AD.?$$

Відкладаємо від боку BC (рис. 174) при вершку C кут $\angle x$ рівний куту $\angle ACD$ і розглянемо Δ-ки, що творять ці кути $\angle x$. себ-то ΔBCK і ΔACD. Вони схожі бо $\angle BCK=x=\angle ACD$. $\angle A=\angle B$, бо це обводові введені кути, що спираються на спільну дугу CD. Тому взаємні боки (цих Δ-ів) пропорційні, себ-то $\frac{AC}{BC}$ (проти рівних кутів D і K) $=\frac{AD}{BK}$ (проти рівних $\angle x$) звідци: $AC.BK = AD.BC$.

Розглянемо ΔKCD і ΔABC: вони схожі бо $\angle A = \angle D$ (спираються на спільну $\smile BC$), а $\angle KCD = m + x$ і $\angle ACB = m + x$, тому $\angle KCD = \angle ACB$.

Із схожости Δ-ів маємо:

$\frac{AC}{CD}$ (проти рівних третих кутів) $= \frac{AB}{KD}$ [проти рівних кутів $(x+m)$]. Звідци $AC.KD = AB.CD$.

Склавши рівности одержимо:

$$AC.BK = AD.BC$$
$$+\ AC.KD = AB.CD$$
$$AC(\overset{BD}{\cancel{BK+KD}}) = AD.BC + AB.CD$$

або $AC.BD = AD.BC + AB.CD$.

Теорема. <u>Коли в полі кола взяти точку й провести через неї тятиви, то відтинки їх є зворотньо пропорційні, с.т. здобуток відтинків кожної тятиви є величина стала.</u>

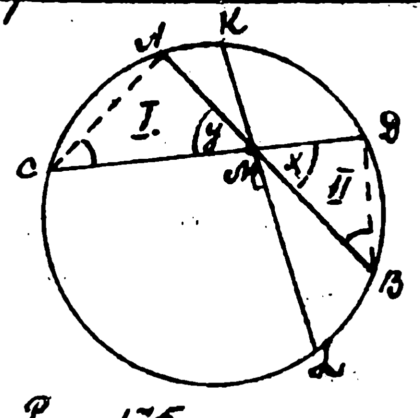


Рис. 175.

$\frac{AM}{MD} = \frac{MC}{MB}$? або $AM.MB = CM.MD$?

Провівши AC і DB (рис. 175) будемо мати, що $\angle C = \angle B$ (виміряються $\frac{1}{2} \smile AD$, на котру спираються) і $\angle x = \angle y$ (вертикові), звідци $\Delta I \sim \Delta II$, а тому

$\frac{AM}{MD} = \frac{CM}{MB}$ або $AM.MB = MD.CM$.

Теж саме доведемо й для кожної іншої тятиви KL, що проходитиме через точку M.

Теорема. <u>Коли з точки поза полем кола проведемо ряд січних і дотичку, то</u>

<u>дотична є середнє пропорційне між відтинками кожної січної й її зовнішнім відтинком, а здобутки кожної січної на свій зовнішній відтинок є величина стала = квадрату дотичної</u>.

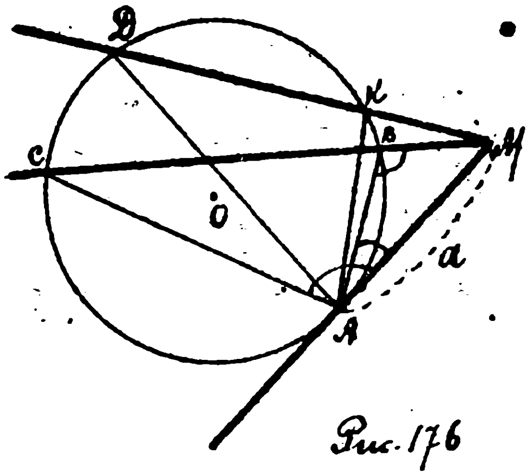


Рис. 176

$a^2 = AM^2 = CM \cdot BM$? і

$CM \cdot BM = DM \cdot KM \ldots\ldots = a^2$?

Доведемо теорему для січної CM і дотичної AM; (рис. 176). Для цього проведемо CA й AB; тоді $\Delta ACM \sim \Delta ABM$, бо $\angle C = \angle BAM$ (виміряються $\frac{1}{2} \cup BA$), а $\angle M$ є для них спільний. Тому $\frac{CM}{AM} = \frac{AM}{BM}$, або $AM^2 = CM \cdot BM$.

Для січної DM і дотичної AM доказ є аналогічний (провести DA і AK); тому $AM^2 = DM \cdot KM$, а коли дві величини рівні зокрема третій, то вони й взаємно рівні с. т. $CM \cdot BM = DM \cdot KM$.

<u>Висновок</u>. Січні й їхні зовнішні відтинки зворотньо пропорційні, бо коли (напр. рис.) $CM \cdot BM = DM \cdot KM$, то звідци: $\frac{CM}{DM} = \frac{KM}{BM}$.

Теорема. <u>Квадрат симетральної кута Δ-а = здобуткові рамен Δ-а без здобутка відтинків основи</u>.

$$\frac{\angle x = \angle x_1}{BK^2 = B_b^2 = ac - AK \cdot KC\ ?}$$

Обведемо на даному трикутникові (рис. 177) коло й продовжимо симетральну $\angle$-а B до перетинання з колом у D; з'єднаємо точку D з C (або з A); тоді $\Delta ABK \sim \Delta BDC$, бо $\angle D = \angle A$ (вимірюються $\frac{1}{2} \smile BC$) і $\angle x = \angle x_1$ (по умові); звідци: $\frac{B_b}{a} = \frac{c}{BD}$, але $BD = DK + B_b$; тому: $\frac{B_b}{a} = \frac{c}{DK + B_b}$ або $(DK + B_b)B_b = ac$; $DK \cdot B_b + B_b^2 = ac$; звідци: $B_b^2 = ac - DK \cdot B_b$; але (з попередньої теореми) $DK \cdot BB_b = AK \cdot KC$ (тятиви, що проходять через точку на кругі) тому $B_b^2 = ac - AK \cdot KC$.

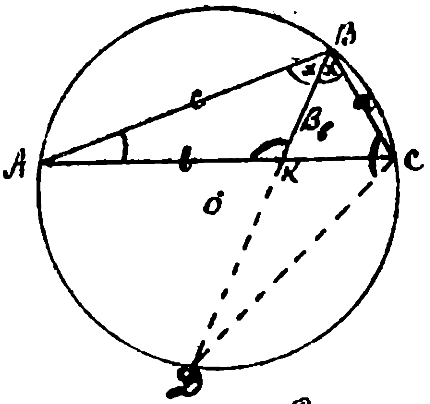


Рис. 177.

Теорема. Луч кола, обведеного на трикутникові = здобуткові двох його боків, поділеному на подвійну висоту, спущену на третій бік.

$$R_0 = \frac{ac}{2h_b} \ ?$$

Провівши луч BO (рис 178) і продовживши його до перетинання з обводом кола ми сполучимо AK точки A і K. Тоді прямокутні трикутники $\Delta BAK \sim BDC$, (бо ці прямокутні трикутники мають по рівному гострому куту: $\angle C = \angle K$ — вимірюються $\frac{1}{2} \smile AB$) тому $\frac{BK}{a} = \frac{c}{h_b}$; $BK = 2R$, тому $2R = \frac{ac}{h_b}$, або $R = \frac{ac}{2h_b}$.

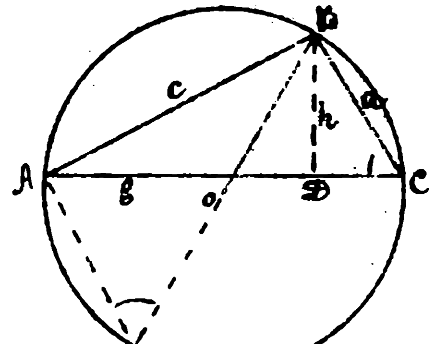


Рис. 178

Введені й обведені правильні многокутники.

Теорема. В правильних одноіменних многокутниках боки відносяться як лучі введених і обведених кол (як межипрями).

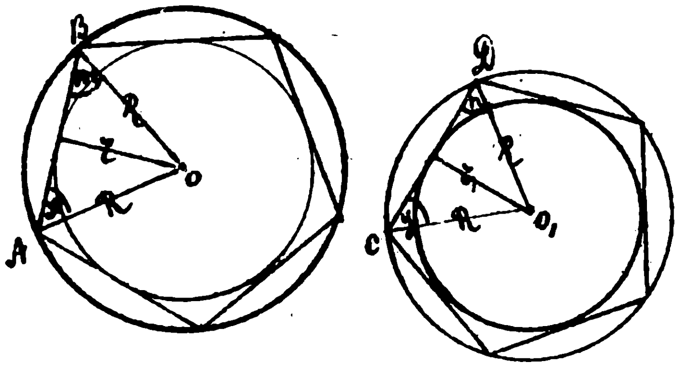


Рис. 179

$\triangle AOB \sim \triangle CO_1D$, бо $\angle x=\angle y$; $\angle m=\angle n$ як половини рівних кутів, а тому всі первні їх пропорційні бокам:

$$\frac{R}{R_1}=\frac{r}{r_1}=\frac{AB}{CD}.$$

Висновок. Обводи правильних одноіменних м-ків пропорційні лучам кол введених (межипрямам) і обведених (бо $\frac{P}{P_1}=\frac{AC}{CD}=\frac{R}{R_1}=\frac{r}{r_1}$).

Задача 1. Ввести в коло й обвести на колі квадрат.

Виходячи з того міркування, що коли квадрат є введений у коло, то косини його будуть взаємно прямовими поперечниками, тому щоб ввести в коло квадрат треба провести в цім колі два взаємно прямові поперечники й з'єднати їх кінці тятивами

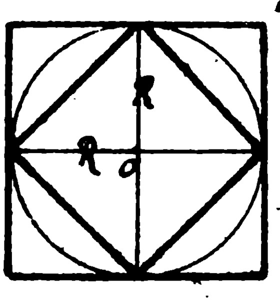


Рис. 180

Коли ж до кінців поперечників проведемо дотичні, так, щоб ці дотичні перетиналися, то матимемо обведений на колі квадрат, бо одержаний чотирьохкутник буде мати противлежні боки рівнобіжні й рівні взаємно прямовим поперечникам.

Будемо означати бік правильного введеного многокутника через a_n, де n показує число боків многокутника, а бік правильного обведеного многокутника через b_n, де n є теж число його боків.

Задача 2. Обчислити a_4 й b_4 (бік введеного й обведеного квадрата).

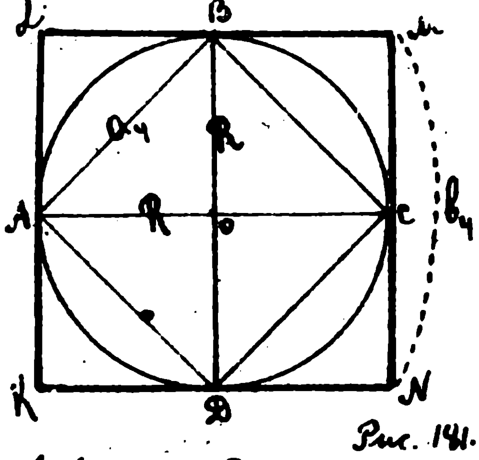


Рис. 181.

Розглядаючи Δ ABO (рис. 181) матимемо, що він прямокутний, а тому (з твердження Пітагора) $a_4^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$, звідки $a_4 = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} = 1,414\ldots R$.

$b_4 = MN = BD$ (як рівнобіжні між рівнобіжними), а тому $b_4 = 2R$

Зад. 3 Ввести в коло й обвести на нім правильний шостикутник й обчислити бік правильного введеного шостикутника: a_6

Припустимо, що шостикутник уже введено в коло. Сполучимо кінці якого будь його боку, напр. AB з центром (рис. 182); тоді в Δ-ові ABO $\angle O = 60°$ (бо рівний $\frac{360°}{6} = 60°$);

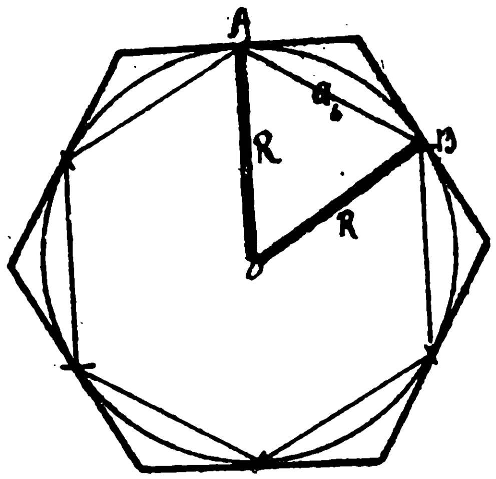


Рис. 182.

але цей же трикутник є рівнораменний, бо $AO = OB = R$; тому кути при основі його взаємно рівні, себ-то тет по $[(180° - 60°) : 2] = 60°$. Звідки $\triangle AOB$ є рівнобічний, а тому $AB = R$, або

$a_6 = R$.

Отже, щоб ввести в коло правильний шостикутник, треба в даному колі його відкласти тятиви $= R$, які будуть боками даного правильного шостикутника.

Провівши через верхи правильного введеного шостикутника дотичні до кола, будемо мати правильний обведений шостикутник, бік якого обчислимо потім.

Зад. 4. Ввести в коло и обвести на колі правильний трикутник та обчислити їх боки: a_3 і b_3 (рис. 183).

Коли маємо правильний введений у коло шостикутник $ABCDEF$ і з'єднаємо верхи його через один, то будемо мати правильний введений $\triangle ACE$ бо кожна дуга $AC = CE = AE =$ третій частини кола. Тому, щоб ввести в коло правильний $\triangle$-к треба відкласти на обводі кола тятиви $= R$ й точки поділу сполучити через одну.

Для вирахування a_3 сполучимо F і C; тоді FC є поперечником кола (бо дуги по обидва боки FC є рівні) й $\Delta\, FCE$ є прямокутний, бо $\angle E = d$, тому що спирається на поперечник $FC = 2R$.

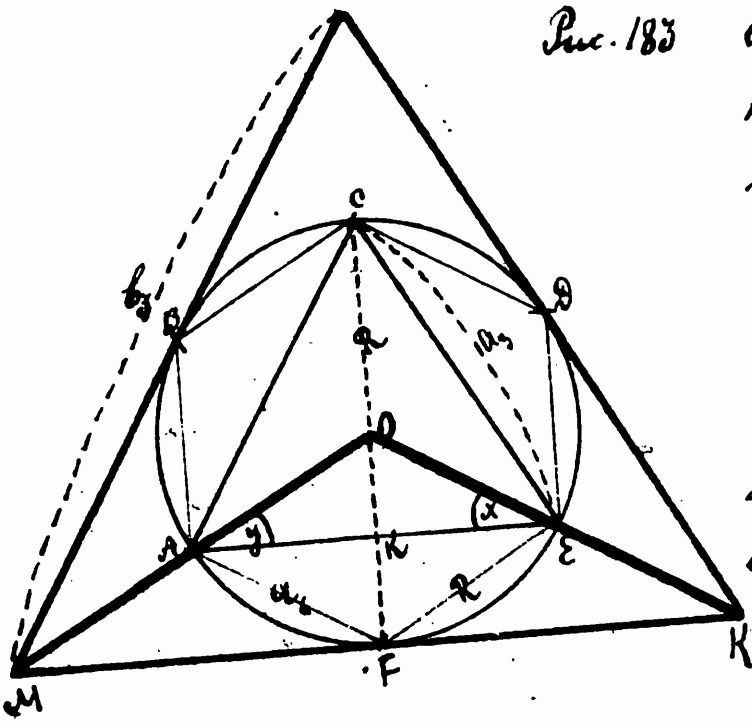


Рис. 183

З цього Δ-а FCE маємо, що $CE^2 = FC^2 - FE^2$; але $FC = 2R$, $FE = R$ й $CE = a_3$; тому $a_3^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$; звідси $a_3 = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3} = 1,732\ldots\ldots R$.

Через точки B, D і F (середини дуг AC, CE і EA) проводимо дотичні до кола. Вони утворять обведений $\Delta\, MCK$, правильний, бо буде схожий до даного (боки рівнобіжні кути гострі).

Сполучимо центр O з вершками M і K (Прості OM і OK пройдуть через вершки A і E, як спільні симетральні відповідних кутів $\angle M$ і $\angle A$; $\angle K$ і $\angle E$).

Розглянемо $\Delta\, MOK$; в ньому $EA \parallel MK$ (тятива й дотична в середині дуги), а тому $\frac{OF}{OK} = \frac{MK}{AE}$ (як висоти схожих трикутників = $\Delta MOK \sim \Delta AOb$). Але чотирекутник $FAOE$ є ромб (бо має боками R), а тому OF, як косина, переполовинюється в точці K, себто $OF = R$; $OK = \frac{R}{2}$. Підставляючи ці вартости в пропорції, маємо:

$$\frac{R}{\frac{R}{2}} = \frac{b_3}{a_3}$$

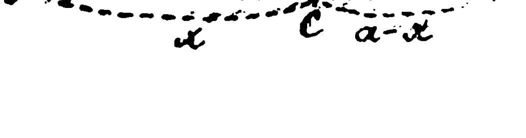
або $\frac{2R}{R} = \frac{b_3}{a_3}$; $b_3 = 2a_3$

Тому: бік правильного обведеного на колі Δ-а є рівний подвійному боку правильного, введеного в те ж коло трикутника. Підставляючи вартість $a_3 = R\sqrt{3}$ маємо $\underline{b_3 = 2R\sqrt{3}}$

Поділ відтинка в крайнім і середнім відношенні (sectio divina).

Щоб поділити в крайнім і середнім відношенні визначений відтинок, треба знайти на нім таку точку, щоб відношення цілого відтинка до більшої його частини було рівне відношенню цієї ж самої більшої частини, до меншої, або-то щоб більший відтинок був середнім пропорційним цілого відтинка і його меншої частини. Коли ми приймемо, що даний відтинок AB (рис. 184)

Рис. 184



вже поділено точкою С в крайнім і середнім відношенні, то вищезазначену теорему можна записати так: $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$; с.т. $x^2=a(a-x)$.

Поділ переводимо так: У кінці В відтинка $AB=a$ (рис. 185) поставим прям, на якому відкладаємо від точки В відтинок ВО, рівний $\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$. З точки О як центра обводимо коло луча $OB(=\frac{a}{2})$ дотичне до АВ.

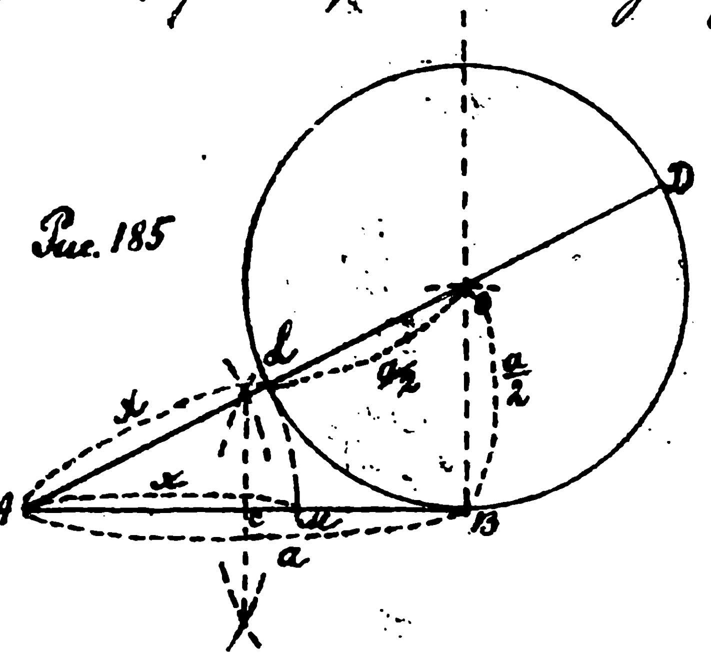


Рис. 185

Сполучивши центр О з кінцем А, відтинка АВ, і продовживши АО до перехрещення з колом у точці D матимем січну AD і дотичну АВ поведені до кола з точки А.

Тому АВ є середня пропорційна між відтинком всієї січної AD й її зовнішнім відтинком AL себ-то

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AL}$$

Взявши похідну пропорцію маємо:

$$\frac{AD-AB}{AB}=\frac{AB-AL}{AL}$$

$DL=AB$; тому $AD-AB=AL$, себ то

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB - AC}{AC}$$

Відкладемо на AB відтинок AM=AC. Тоді AB-AC = MB й матимем

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MB}{AM}$$

або $AM^2 = AB \cdot MB$, себто AB буде поділена в точці M в крайньому й середньому відношенню. Коли AB приймемо за a, AM за x то $MB = a - x$; тоді:

$$x^2 = a(a-x)$$

Щоб обчислити x розглянемо ΔABO. По теориї Пітагора $AO^2 = AB^2 + BO^2$
$AO = (x + \frac{a}{2})$; $AB = a$, $BO = \frac{a}{2}$. Тому:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4a^2 + a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

себто <u>більша частина відтинка, поділеного в крайнім і середнім відношенні = здобуткові половини цього відтинка на ріжницю квадратового корня з пяти й одиниці.</u>

Теорема. <u>Бік правильного введеного в коло десятикутника є більшою частиною лучка поділеного в крайньому</u>

<u>й середньому відношенню.</u>

Припустимо, що такий десятикутник уже введено в кола, с. т., що $AB = a_{10}$ (рис. 186)

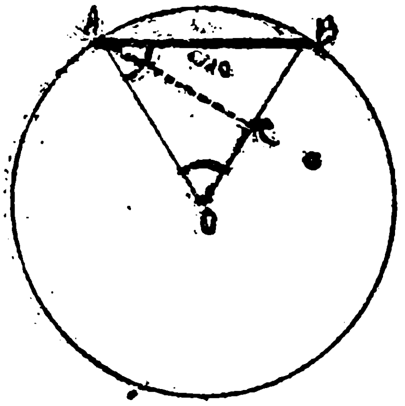


Рис. 186

Сполучивши точки A з O й B з O, маємо, що $AO = OB = r$; тому $\triangle AOB$ є рівнораменний, $\angle O = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ і $\angle A = \angle B = 72^\circ$. Провівши AC = симетральну кута A = маємо з рівнораменного $\triangle ACO$: ($\angle O = 36^\circ$, $\angle OAC = 72:2 = 36^\circ$), що $AC = OC$, а з рівнораменного $\triangle ABC$ ($\angle B = 72^\circ$, $\angle ACB = 180 - 36 - 72 = 72^\circ$), що $AC = AB$, звідки $AC = OC = AB = a_{10}$.

З теореми же про симетральну кутів $\triangle$-а маємо, що $\frac{OC}{BC} = \frac{OA}{AB}$, але $OC = a_{10}$, $OA = R$, $AB = a_{10}$ й $BC = R - a_{10}$; отому:

$$\frac{a_{10}}{r - a_{10}} = \frac{r}{a_{10}}, \text{ або } a_{10}^2 = r(r - a_{10}),$$

с. т. виходить, що луч AO поділено в середнім і крайнім відношенню й більша частина його $= OC = a_{10}$ – бокові правильного введеного десятикутника.

Звідци можемо записати $\underline{\underline{a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)}}$

Взглянемо, як збудувати введений у коло правильний десятикутник: Проводимо в колі два прямовісних попереники AB і CD (рис. 187), луч OC переполовинюємо й з точки поділу K обводимо коло як з центра; сполучаємо A з K і по будуванню AL буде більшою частиною луча OA, поділеного у крайньому й середньому відношенню. Коли лучем AL з A як центра очеркнемо дугу LM, то відтинок AM буде боком a_{10}; далі відкладаючи одну по одній дуги AM і сполучаючи їх кінці тятивами - одержим потрібний десятикутник.

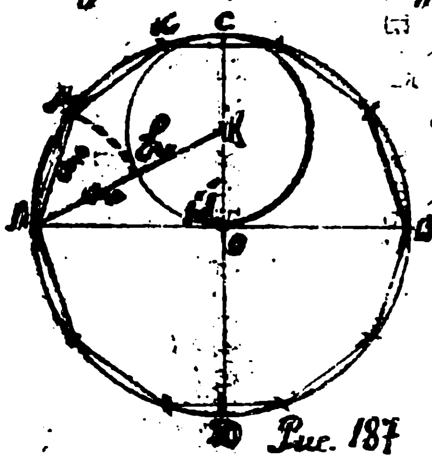


Рис. 187

Ввести в коло правильний пятнадцятикутник. (рис. 188).

Бік AB шестикутника стягує дугу $\smile AB = \frac{1}{6}$ обводу кола. Бік AC десятикутника буде стягувати дугу $= \frac{1}{10}$ обводу кола. Взагалі бік правильного n-кутника введеного в коло буде стягувати дугу $= \frac{1}{n}$ обводу кола. Коли ми візьмемо дугу, що стягує бік правильного введеного шестикутника $\frac{1}{6}C$ (де C = обводу кола) і відлічимо від неї дугу, що стягує бік правильного введеного десятикутника ($\frac{1}{10}C$) то матимемо:

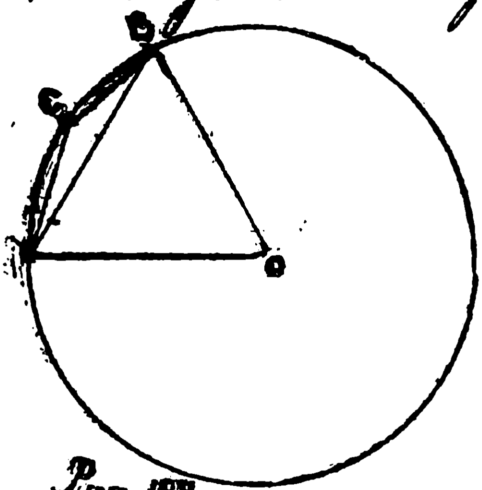
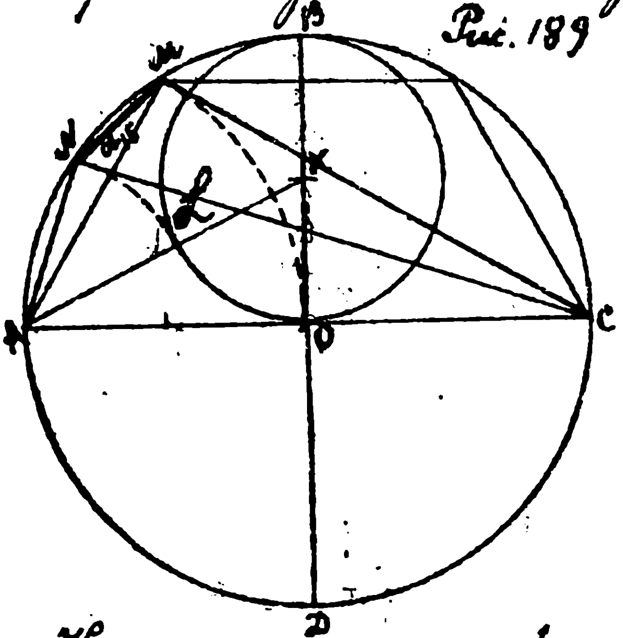


Рис. 188

$\smile CB = \smile AB - \smile AC = \frac{1}{6}C - \frac{1}{10}C = \frac{1}{15}C$.

Отже тятива BC дуги $\cup BC$ буде з вище наведених міркувань боком правильного введеного п'ятнадцятикутника. Тому будування правильного введеного п'ятнадцятикутника переводиться так: беремо коло і в ньому два прямові поперечники AC і BD (рис. 189). З точки A як центра лучем AO очеркуємо дугу OM і тим відкладаємо дугу $\cup AM = \frac{1}{6}C$. Далі переполовинюємо луч OB і з точки K як центра обводимо коло луча $OK = \frac{1}{2}R$. Сполучаємо K з A, тоді, як ми вже знаємо AL буде a_{10}. Коли з точки A як центра очеркнемо дугу LN до перехрестя з колом у точці N то дуга $\cup AN = \frac{1}{10}C$. Тому дуга $\cup NM = \cup AM - \cup AN = \frac{1}{6}C - \frac{1}{10}C = \frac{1}{15}C$.

Рис. 189



Коли дуга $\cup NM = \frac{1}{15}C$, то приналежна їй тятива NM буде боком правильного введеного в це коло п'ятнадцятикутника. Далі відкладаючи одна по одній дугу $\cup NM$ і сполучаючи кінці їх тятивами дістанемо потрібний нам п'ятнадцятикутник.

Виведемо тепер чому рівний бік a_{15}. Сполучимо точки N і M з кінцем C поперечника AC. Тоді маємо введений чотирекутник $ANMC$ і по теорії Птоломея маємо: $NC \cdot AM = AN \cdot MC + MN \cdot AC$.

З прямокутного ΔANC (спирається на поперечник) маємо: $NC^2 = AC^2 - AN^2$; $NC^2 = (2R)^2 - \left[\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(5 - 2\sqrt{5} + 1) = R^2\left(4 - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) = R^2 \cdot \frac{16-6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{R^2}{4}(10 + 2\sqrt{5})$; $NC = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $AM = R$; $AN = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$; MC є бік. введеного Δ-а $= R\sqrt{3}$; $NM = a_{15}$; $AC = 2R$

Підставляючи маємо: $\frac{R^2}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \cdot R\sqrt{3} + 2Ra_{15}$.

Зводючи до спільного знаменника

$$R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = R^2(\sqrt{15}-\sqrt{3}) + 4Ra_{15}$$

скорочуючи на R маємо:

$$R\sqrt{10+2\sqrt{5}} = R(\sqrt{15}-\sqrt{3}) + 4a_{15}$$

$$4a_{15} = R\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)$$

$$a_{15} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right).$$

<u>Ввести в коло визначеного луча правильний 5-кутник.</u>

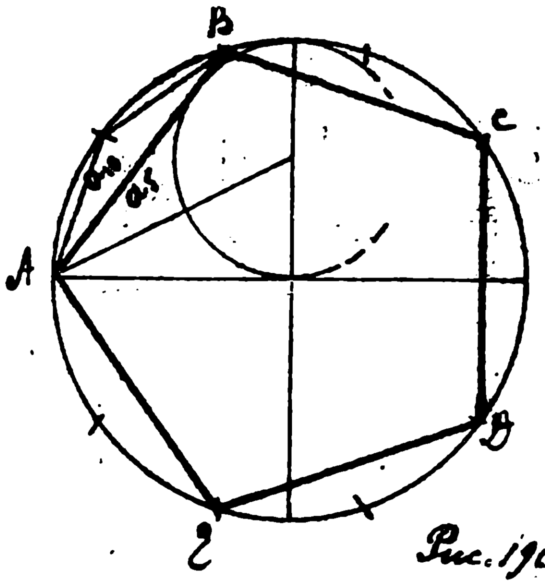


Рис. 190

Коли ми введемо в коло правильний 10-кутник і сполучимо пятивами вершки цього десятикутника через один, то будемо мати правильний введений пятикутник.

<u>Теорема.</u> Бік правильного введеного в коло пятикутника є протипрям-

ною прямокутного Δ-а збудованого на луці й на боці правильного введеного в це коло десятикутника, як на прямках

Відкладемо на колі боки введеного десятикутника AC і CB (рис. 191) і сполучимо A і B тятивою, тоді AB буде бік п'ятикутника a_5. Сполучимо центр O з A, C і B

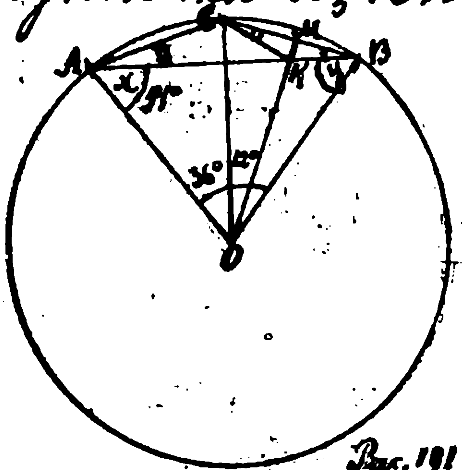


Рис. 191

і спустимо з центра прям на BC. Такий прям на тятиву з центра буде проходить через середину тятиви, а тому точка K буде рівновіддалена від C і B а ΔCKB буде рівнораменний. Розглянемо ΔACB і ΔCKB: вони є схожі бо обидва рівнораменні й мають спільний кут при основі $\angle CBK$. Тому $\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{BK}$ $CB^2=AB\cdot BK$.

$\angle O=\frac{360°}{5}=72°$. $OA=OB=R$, тому $\angle x=\angle y$

$\angle x=\frac{180°-72°}{2}=54°$. ΔAKO теж рівнораменний бо $\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=36°$. $\angle COL=\frac{1}{2}\angle COB=\frac{36}{2}=$
$=18°$. $\angle AOK=\angle AOC+\angle COL=36°+18°=54°$.

Отже в ΔAOK $\angle A=\angle AOK$ і він є рівнораменний. Рівнораменні $\Delta AOB \sim \Delta AOK$ бо мають спільні $\angle A$ при основі, а тому $\frac{AB}{AO}=\frac{AO}{AK}$; $AO^2=AB\cdot AK$. Склавши ці рівності маємо:

$$
\begin{aligned}
&BC^2 = AB \cdot BK \\
+\ &AO^2 = AB \cdot AK \\
\hline
&AO^2 + BC^2 = AB(\overset{AB}{\cancel{BK+AK}}) \\
&AO^2 + BC^2 = AB^2
\end{aligned}
$$

але $AO = R$; $BC = a_{10}$, $AB = a_5$ тому

$$a_5^2 = R^2 + a_{10}^2$$

Коли збудуємо на R і a_{10} як на прямках

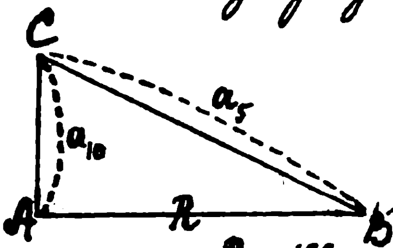


Рис. 192.

прямокутний трикутник то a_5 буде протипрямкою, бо по теореми Пітагора

$$a_5^2 = R^2 + a_{10}^2.$$

Зі всіх наведених збудувань правильних введених многокутників ми переконалися, що для введення правильного многокутника у коло необхідно вміти поділити коло на визначену кількість рівних дуг. Вчений Гаус довів, що це не є можливим для кожного, якого ми бажаємо многокутника. Крім того не завжди в практиці потрібно цілком точного визначення введеного в коло боку многокутника, а можна обмежитися лише наближеного величиною бока й тим уникнути підчас хоч і можливого, але дуже складного будування. Тому тут розглянемо найбільш вживаний наближений спосіб введення в коло правильних многокутників, якого бажано числа боків. Для цього на поперечнику визначеного кола будують рівнобічний трикутник. Сам поперечник ділять на число рівних між собою частин рівне числу боків многокутника. З протилеженого поперечнику вершка трикутника проводять січну через другу точку поділу поперечника від його кінця. Тятива, що сполучатиме цей кінець поперечника з кінцем січної буде наближеною величиною бока заданого многокутника.

Приклад. <u>Ввести у коло правильний 7-ми-кутник</u> (рис. 193)

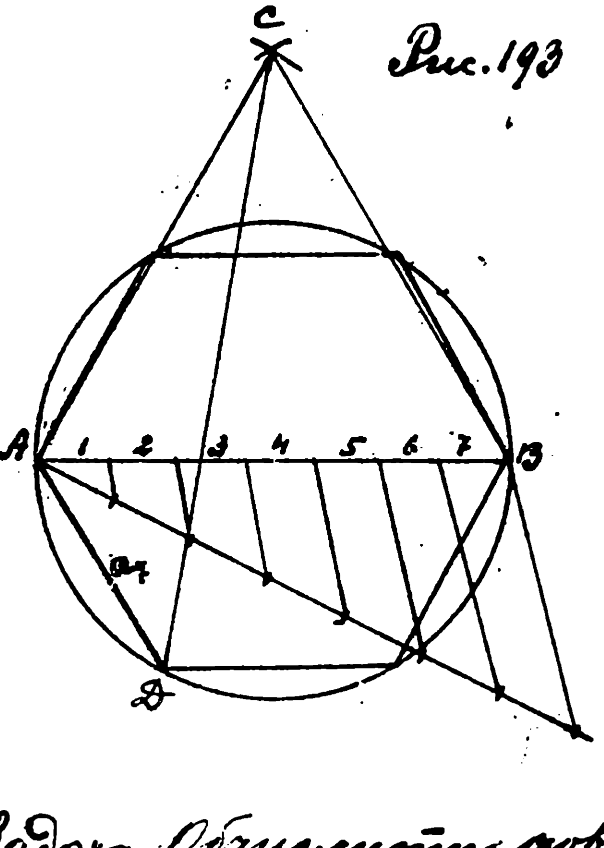


Рис. 193

ABC є рівнобічний Δ збудований на поперечнику. Поперечник AB поділено на 7 рівних частин. CD є січна з вершка Δ ACB поведена через другу точку поділу поперечника AD - тятива є наближено рівна a_7.

Задача <u>Обчислити довжину метипряма</u>

правильного введеного многокутника.

[Примітка: Довжина мешипряма наз. модулем правильних многокутників.]

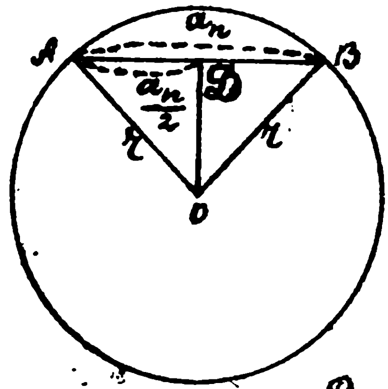


Рис. 194

Коли ми маємо коло центра O (рис. 194), то проведемо в нім тятиву AB й припустимо, що вона є a_n, (с.т. бік якогось правильного введеного многокутника). Сполучимо кінці AB з центром і спустимо з центра прям на AB; цей прям AD й буде мешипрямом правильного многокутника з боком a_n. Означивши цей мешипрям через M і приймавши на увагу, що він є прямкою прямокутного Δ-а BDO, можемо написати: $OD^2 = OB^2 - BD^2$ або

$$M^2 = r^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2, \text{ або } M = \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}} \text{ (модуль)}$$

Зад. Обчислити бік обведеного на колі многокутника по визначеному боку введеного, йому однойменного.

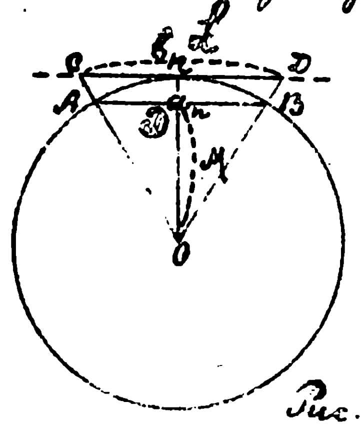


Рис. 195

Припустимо, що AB є a_n (рис. 195); тоді по попередньому $M = \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}$; продовжимо M до перетинання з обводом кола в L і через L проведемо дотичну до кола, яка ми знаємо буде $\parallel AB$. Сполучимо лінії AB з центром і продовжимо ці лучі до перехрещення з цею дотичною. Тоді відтинок CB буде b_n (бік правильного обведеного многокутника однойменного з a_n) Доведемо, що $b_n = \frac{a_n r}{m}$?

Розглядаючи $\Delta\, COD$ і $\Delta\, AOB$, ми бачимо, що вони схожі, бо $AB = CD$; звідци $\frac{CD}{AB} = \frac{OL}{OK}$, або ($CD = b_n$; $AB = a_n$, $OL = r$ і $OK = m$)

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{r}{m}; \text{ тому } b_n = \frac{a_n r}{m}$$

чи инакше $b_n = \frac{a_n r}{\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$ Обчислити бік введеного в коло многокутника по визначеному боку однойменного йому обведеного. Зі схожости тих же Δ-ів, а саме: $\Delta\, COD \sim \Delta\, AOB$, маємо, що $\frac{CD}{AB} = \frac{CO}{AO}$ і звідци $\frac{b_n}{a_n} = \frac{CO}{r}$; але з прямокутного Δ-а CLO можемо написати: $CO^2 = OL^2 + LC^2$, $CO^2 = r^2 + \left(\frac{b_n}{2}\right)^2$ й $CO = \sqrt{r^2 + \frac{b_n^2}{4}}$ тому в пропорції $\frac{b_n}{a_n} = \frac{CO}{r}$ замінимо CO на виражовану вже його вартість і одержимо:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{r^2 + \frac{b_n^2}{4}}}{r} \quad \text{а звідци}$$

$$a_n = \frac{b_n r}{\sqrt{r^2 + \frac{b_n^2}{4}}}.$$

Приклад. Обчислимо тепер бік обведеного правильного шостикутника, що ми раніш залишили.

$a_6 = r$. $b_n = \frac{a_n r}{\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$

тому $b_6 = \frac{r.r}{\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}} = \frac{r^2}{\sqrt{\frac{4r^2 - r^2}{4}}} = \frac{r^2}{\sqrt{\frac{3r^2}{4}}}$

$b_6 = r^2 : \frac{r}{2}\sqrt{3} = \frac{2r.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Бік обведеного правильного шостикутника є $\frac{1}{3}$ боку правильного обведеного трикутника.

Подвоїти число боків кожного введеного й обведеного многокутника.

Припустим, що тятива AB є боком якогось правильного введеного многокутника, с.т. a_n (рис. 196) Спустивши з центра O прям на a_n й продовжнивши його до перетинання в точці C з дугого AB сполучимо A з C і C з B. Тоді $AC = CB$, бо

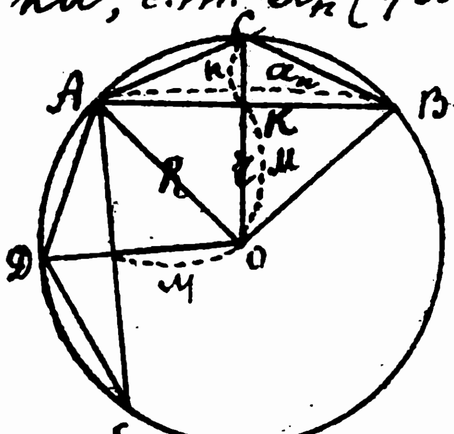


Рис. 196

натягуються рівними дугами $\smile AC$ і $\smile CB$; зробивши так з кожним боком a_n будемо мати правильний введений многокутник з подвійним числом боків, с.т. $CA = AD = DE = \ldots\ldots = BC = a_{2n}$

Сполучимо A з центром O й розглянемо ΔAOC. В ньому кут $\angle AOC$ завжди гострий (бо введений правильний многокутник з найменшим числом боків є трикутник, але тоді $\angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ і кут $\angle AOC = 60^\circ$ для кожного многокутника з числом боків більшим 3. Кут $\angle AOC$ буде $< 60^\circ$). Квадрат боку проти гострого кута:

$$AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2OC \cdot OK$$

$$a_{2n}^2 = AC^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot M \quad (M - \text{модуль})$$

$$a_{2n}^2 = 2r^2 - 2rM = 2r(r - M).$$

<u>Квадрат боку правильного введеного многокутника з подвійним даному числом боків рівний здобутку поперечника кола на ріжницю між лучем і межипрямом даного многокутника.</u> В формулі $a_{2n}^2 = 2r^2 - 2rM$ підставивши вартість M будемо мати:

$$a_{2n}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$

звідки

$$a_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

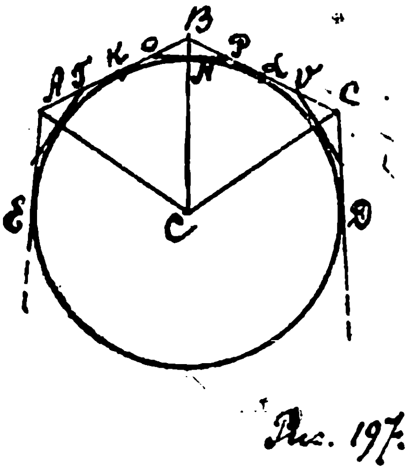


Рис. 197.

Припустимо, що AB й BC (рис. 197) є боки якогось правильного обведеного многокутника $ABCD \dots E$. Сполучивши простими центр з вершками обведеного многокутника ми переполовинимо дуги між точками дотику. Коли ж ми через середини цих дуг проведемо дотичні, то відтинки цих дотичних, замкнені між боками даного многокутника будуть боками многокутника з подвійним числом боків, бо (b_{2n}). ON = OK, як дотичні до кола, поведені з однієї точки. Так само NP = PL; ON = NP, а тому KO і PL є половини OP, а TO і PV рівні OP; таким чином одержаний многокутник буде правильний з числом боків вдвоє більшим ніж даний.

Початки теорії меж

Під величиною розуміється все, що може бути зменшене або збільшене. Таким чином, величинами будуть: протяг, простір, вага, щільність, кут, обсяг і т. д. Підлягаючи певним умовам, обмежуючим величину, вона може приймати ті, або инші вартости, які шляхом порівнання з другою вартостю величини прийнятого за одиницю міри можна виміряти. Тоді ця вартість величини стає конкретною й висловлюється певним числом.

Отже коли ми говоримо про величину напр., лінія, то цим ми тільки зазначаємо прикмету величини, але не даємо жадного розуміння, що до розміру її. Наколи ми взявши певний відтинок цієї лінії й шляхом обміру установили його розмір, висловлений числом - то матимем одну з окремих вартостей величини.

Розглядаючи величини ми спостерегаємо, що вони можуть бути двох родів: 1) величини, що при певних умовах зовсім не змінюють своїх вартостей і які мають назву сталих величин і 2) величини, що при цих умовах змінюють по тому або иншому закону свої вартости і які мають назву змінних величин.

В свою чергу змінні величини можуть бути:
1) Незупинно-змінніми, себто такими, що змінаються ступнево без жадної перерви в тягу своїх змін; коли кожна послідуюча вартість витворюється з попередньої, підлягаючи одному спільному для всього ряду вартостей закону.
2) Довільно-змінними, себ-то такими, що свої послідуючі вартости приймають незалежно від попередніх.

В цьому разі ми будемо розглядати лише незупинно-змінні величини, зміни яких можна підпорядкувати під певні закони.

Візьмемо декілько прикладів:

1) Дріб періодичний 0,(9) - є величина змінна
0,9; 0,99; 0,999; 0,9999..........
При збільшенні числа девяток, цей дріб незупинно наближується до одиниці; так що різниця x між одиницею й дробом незупинно зменшується $x = 0,1$; 0,01; 0,001; 0,0001........ Збільшуючи число девяток необмежно, ми можемо досягнути того, що вартість цієї різниці може стати: <u>менше кожної наперед загаданої, як бажано малої вартости</u>.

2й приклад. Припустимо, що нам дано два несуминомірних відтинка AB і CD (рис.). Переведемо вимір AB через CD як одиницю міри з якою буде довільною наближеностю до $\frac{1}{n}$. Припустимо, що $\frac{1}{n}$ відтинка CD: $\frac{CD}{n} = a$ вкладається на AB якесь ціле число разів і утворює відтинок $AK < AB$, або перевівши вимір з лишком, утворимо відтинок $AM > AB$. І відтинок AK і відтинок AM будуть змінними величинами, бо їх вартости залежатимуть від вартости n. Коли n буде збільшуватись ($1, 2, 3, 4 \ldots \infty$) й $a = \frac{CD}{n}$ буде зменшуватися то точки

К і М будуть наближатися до В, а відтинки: АК буде зростати, АМ буде спадати (малити). Розглянемо різниці між сталою визначеною вартістю відтинка АВ і змінними величинами АК і АМ.

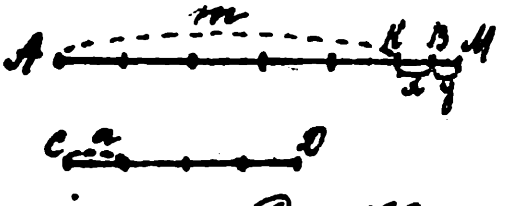


Рис. 198.

Для АК різниця $AB - AK = x < a$, а тому $AB - AK < \frac{CD}{n}$; так само для АМ: $AM - AB = y < \frac{CD}{n}$. Зі збільшенням вартости $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots \infty$ частка $\frac{CD}{n}$ зменшується й коли n давати значіння безмежно великі, то частка $\frac{CD}{n}$ буде висловлюватися як бажано малими величинами й далі буде безупинно зменшуватися, а тому різниці x і y між АВ і АК ($AB - AK$) й між АМ і АВ ($AM - AB$) разом з безмежним збільшенням вартости n будуть незупинно спадати й досягнуть того, що вартість цих різниць може стати <u>менше кожної наперед загаданої, як бажано малої вартости величини.</u>

<u>3-й приклад.</u> Кут правильного многокутника:

$$\angle A = \frac{2d(n-2)}{n} = 2d - \frac{4d}{n}$$

При котрій зміні числа боків $\angle A$, який міркуючи по виміру його, висловленому правого частиного, зазначити лише від числа боків (бо в виразу $2d - \frac{4d}{n}$ $2d$ і $4d$ сталі величини й лише n є змінне), буде змінюватися. Отже $\angle A$, кут правильного многокутника є величина змінна в залежности від числа боків многокутника.

Висловим ріжницю між $2d$ і кутом $\angle A$.

$$2d - \angle A = \frac{4d}{n}.$$

Ясно, що збільшуючи вартости n $(=3,4\ldots\infty)$ до якої лише бажано великої вартости, ми тим самим зменшуємо частки $\frac{4d}{n}$, себ-то ріжницю $2d - \angle A$ так, що вона неодмінно спадаючи може стати менше кожної наперед загаданої, як бажано малої, вартости величини.

У всіх трьох прикладах ми спостерегаємо, що як би n не було великим, ріжниця між змінного й відповідного сталою величиною ніколи, як би вона не була мала, не може стати нулем (бо вислід ділення ніколи не може бути нулем) Отже всі наші змінні величини можуть, як тільки бажано, наближатися до відповідних сталих вартостей, але їх ніколи не досягають.

[Наприклад ці коли б відтинки (2й приклад) AM і AK досягли б вартости AB, то CD й AB) були б сумірними, бо тоді малась би якась спільна міра Z яка б вкладалася ціле число разів і в CD $(Z = \frac{CD}{n})$ і в AB.

2) Коли б різниця $2d - \angle A = 0$, то $\angle A$ був би випростаний і многокутник утворював би просту й при тому замкнену, що протирічить аксіомі простої].

Сталі вартости величин (сталі величини) до яких простують змінні величини звуться їх межами. Визначимо, що є межа змінної величини:

Межою змінної величини зветься та стала (вартість) величина до якої простують вартости змінної величини й хоча її не досягають, але різниця між ними стає меншою кожної наперед загаданої, як бажано малої, вартости величини.

Таким чином 1) 1-є межа до якої простує дріб 0,(9) при збільшенні безмежно числа девяток. 2) Вартість відтинка AB є межа до якої простують величини AK і AM при зростанні безмежно ступеня наближености N. і 3) $2d$ (180°) є межа до якої простує величина $\angle A$, кута правильного многокутника, при неспинному збільшенню до безлічности числа боків цього многокутника.

Змінна величина може прямувати до своєї межі або зростаючи (напр. величина відтинка АК в другому прикладі) або спадаючи (величина відтинка АН в тому-ж прикладі).

В першому випадкові кажуть, що змінна величина обмежена верхньою межою, а в другому — нижньою межою.

Про нуля.

Візьмемо для прикладу величину бока правильного введеного многокутника. Коли ми будемо безмежно побільшувати число його боків, то кожний бік зменшуватися (величина його спадати) це спадання не має жадної межі.

Так само збільшуючи незупинно віддалення тятиви кола від центра, сама тятива буде незупинно зменшуватися без жадної межі. Але і в першому й у другому випадкові величини зменшуючися (спадаючи) самі стають, нарешті меншими кожної наперед загаданої, як бажано малої вартости величини.

Нуль є знак який ми умовно вживамо, щоб означити неіснування якої б то не було величини. Отже нуль має прийняти сталості.

З попередніх міркувань ми бачимо, що коли величина невпинно спадає не маючи визначеної межі свого спаду, то нарешті може стати о стільки малого, що різниця між нею й нулем стає менше кожної наперед заданої, як бажано малої вартости величини, тому на підставі визначення взагалі межи змінної величини, ми можемо за межу даної величини вважати нуль.

Отже нуль вважається за межу безмежно спадаючої величини.

Висловлюються так: Безмежно спадаюча величина прямує до нуля, як до своєї межі

Про безмежність. (∞)

Візьмемо наприклад суму кутів многокутника $S = 2d(n-2)$

Це величина змінна бо залежить від вартостей числа боків n. Коли ми будемо безупинно збільшувати вартости n, то S буде безмежно зростати. Отже межі для зростання немає бо кожній, як бажано великій вартості n ми можемо додати одиницю й одержимо нову вартість S більшу попередньої.

Такі величини як S, мають назву безмежно зростаючих й кажуть, що вони простують до безмежности (знак безмежности ∞)

Визначення нуля, як межі безмежно спадаючої величини, дає нам можливість висловлюватися, що кожна змінна величина простує до своєї межі, так що ріжниця між ними простує до нуля.

Коли ми означимо ріжницю між якою будь змінною M і її межою m через X то

$$M - m = \pm X.$$

Знак + буде тоді, коли змінна M простує до межі m спадаючи, а знак — коли змінна M простує до межі M зростаючи. Для зручности саму ріжницю X можемо вважати, або додатнього або від'ємного й тоді ріжниця:

$$\underline{M - m = X}$$

звідци $\underline{\underline{M = m + X}}$

Кожну змінну величину, яка простує до певної межі можна вибразити як суму її межи й змінної величини, що уявляє ріжницю між змінного й її <u>межою</u>.

Коли змінна x буде простувати до нуля, то змінна M буде простувати до своєї межі m.

<u>Теорема 1. Коли дві змінні величини, простуючи до своїх меж, при всіх своїх змінах лишаються рівними між собою, то й їх межі також будуть рівні між собою.</u>

Припустимо, що маємо дві змінні:

M з межою m

і N з межою n

і ці дві змінні при всіх своїх змінах мають однакові вартости, с.т. $M=N$. Означимо різницю $M-m=x$, а різницю $N-n=y$. Тоді $M=m+x$; $N=n+y$. Коли $M=N$, то й праві частини рівности:

$$m+x=n+y$$

або $\underline{m-n}=\underline{y-x}$ . . . . (1)

Різниця $m-n$, сталих величин є <u>стала</u>; різниця $y-x$, змінних величин мусить бути змінною, за виключенням одного випадка коли $y=x$; с.т. $y-x=0$.

Стала величина не може бути рівною змінній, а тому наша рівність (1) можлива <u>лише</u> тоді коли $y-x=0$

Тоді $m-n=0$; $m=n$.

<u>Теорема 2га Коли дві змінні</u>

величини пропорціональні до своїх меж при всіх своїх змінних мають величини, що знаходяться в сталому між собою відношенню, то й їх межі будуть знаходитися в тому-ж відношенню.

Припустимо що $\frac{M}{N}=\frac{a}{b}$

тоді $\frac{m+x}{n+y}=\frac{a}{b}$, або

$$mb+xb=na+ya;$$

$$mb-na=ya-xb \quad \ldots \quad (2)$$

mb і na, як здобутки сталих величин є сталі, а тому ріжниця $mb-na$ є стала. ya і xb, як здобутки сталих величин на змінні є змінні, а тому ріжниця $ya-xb$ є змінна, яка лише тоді буде сталою, коли $ya=xb$, себто $ya-xb=0$. Тому рівність (2) можлива коли

$$mb-na=0$$

себто $mb=na$.

Складаючи пропорцію маємо:

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{b}.$$

Ці дві теореми мають велике значіння у виміру величин, бо дають можливість сталі відношення між змінними заміновати відношеннями між їх межами й навпаки; так само при рівності змінних, що рівність можна заступати рівністю між межами й навпаки.

Обвід кола є межа обводів введених в нього й обведених на ньому правильних многокутників при безмежному подвоїнню їх боків.

Для доведення цього твердження ми мусимо довести такі теореми:

Теорема 1. Обвід правильного введеного в коло многокутника є величина змінна, зростаюча з подвоїнням числа боків і завжди менша обводу кола.

Введемо в коло правильний многокутник з n боків і подвоїмо число його боків. Припустим, що тятива AB (рис. 199) є бік нашого многокутника. Тоді AC і CB будуть боками многокутника з подвійним числом боків. Означимо $AB = a_n$; $AC = CB = a_{2n}$.

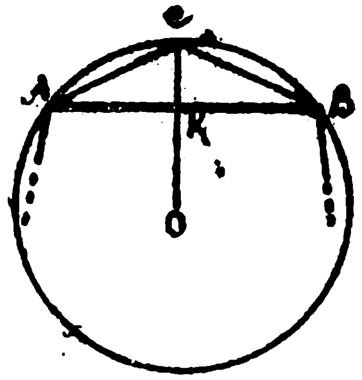


Рис 199

Із $\triangle ACB$ сума двох боків більша третього. Тому: $a_n < a_{2n} + a_{2n}$; $a_n < 2a_{2n}$. Помножимо обидві частини нерівности на число боків n; n є додатне число й тому $n.a_n < 2n.a_{2n}$. Але $n.a_n = P_n$ - обводу правильного n-кутника, а $2n.a_{2n} = P_{2n}$ - обводу правильного $2n$-кутника.

Тому $P_n < P_{2n}$.

Отже P (обвід правильного введеного многокутника) є змінна зростаюча величина при подвоїнні боків многокутника.

Введенним многокутником зветься такий, вершини якого лежать на обводі кола, себ-то боки його є тятивами, а тому скільки б ми не здвоювали боки многокутника, ці боки, як тятиви завжди будуть менші прилеглих дуг (проста, як найкоротше віддалення між двома точками, менше відповідної дуги між цими точками). Коли кожний доданок обводу многокутника менше відповідного доданку дуги обвода кола, то й вся сума - обвід многокутника буде менше суми прилеглих дуг, себ то обвода кола.

$$P < C$$

Теорема 2. <u>Обвід правильного обведеного на колі многокутника є величина змінна, спадаюча при подвоїнні числа боків його залишаючись завжди більше обвіда даного кола.</u>

Припустимо, що AB і AC (рис. 200) боки обведеного на колі многокутника, а KL - бік многокутника з подвійним числом боків. Тоді з Δ-ка AKK' маємо прямокутника $AK > KM$ (як прямих). Додавши по рівному відтинку EK маємо

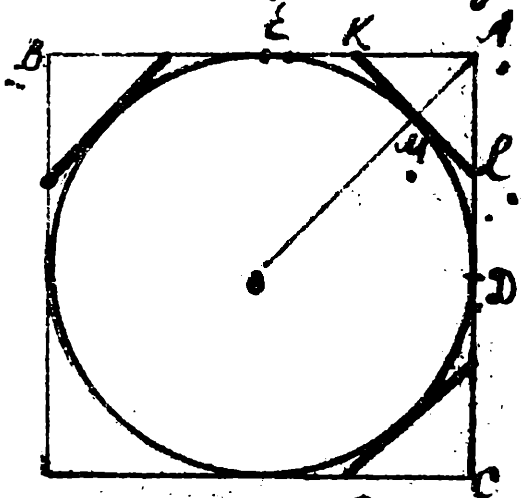


Рис. 200

$$AK + KE > KM + KE$$

але $AK + KE = AE = \frac{b_n}{2}$

$KM = \frac{b_{2n}}{2}$; $EK = \frac{b_{2n}}{2}$ отже $KM + KE = b_{2n}$.

Тому $\frac{b_n}{2} > b_{2n}$ або $b_n > 2b_{2n}$.

Помноживши обидві частини нерівности на n (яке, як число боків є додатнове) матимем:

$$n . b_n > 2n . b_{2n} .$$

але $n.b_n = O_n$ (обвід обведеного многокутника в n боків), а $2n . b_{2n} = O_{2n}$ (обвід обведенного м-кутника в $2n$ боків)

$$\text{Тому } O_n > O_{2n}$$

Цим доводимо, що обвід правильного обведеного на колі многокутника є величина змінна, спадаюча при подвійнні його боків.

Обведеним многокутником зветься такий, що має боки дотичними до кола, а вершки поза колом. Щоб подвоїти боки многокутника, ми проводимо нові дотичні через середини дуг між точками дотику боків даного многокутника.

Отже скількиб ми не подвоювали боки обведених многокутників завжди котрий новий многокутник буде обведений, маючи боками дотичні до кола, а вершки поза колом й тому, як би такі не були боки цього обведеного многокутника, вони не пристануть до обвода кола й обвід цього многокутника завжди буде більше обвода кола, себ-то

$$O > C$$

Теорема 3. <u>Обвід кола є межа обводів введених в нього й обведених на ньому правильних многокутників при безмежному подвоєнню числа їх боків.</u>

Доведемо попереду, що межипрям введеного в коло правильного многокутника при безмежному подвоєнню його боків простує до луча кола, як своєї межі.

Припустимо, що AB (рис. 201) бік введеного в коло правильного многокутника. OK буде межипрям цього многокутника, о OB луч.

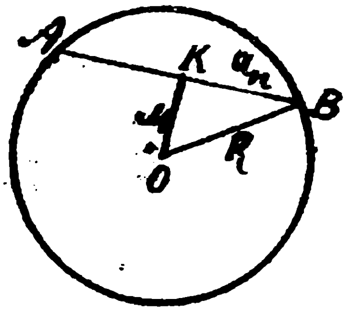


Рис 201

Із $\Delta\, OKB$ маємо що

$$OB - OK < KB$$

(різниця двох боків трикутника менше третього боку) $R - M < \frac{a_n}{2}$

Різниця між лучем і ме-

межипрямом правильного введеного в ко-
ло многокутника менше половини його
бока.

При конечному подвоєнню числа боків
многокутника приналежну дугу пере-
половинюють, а тому й відповідна тя-
тива (бік многокутника) зменшується,
при безконечному подвоєнню боків мно-
гокутника дуга по величині, а разом
і тятива (бік многокутника) простує
до нуля.

Ріжниця між лучем і межипря-
мом, яка менше половини бока тим
скорше простує до нуля, а тому ста-
ла величина (для визначеного кола) R
буде межою для межипряма, зроста-
ючого при безмежному подвоєнню чис-
ла боків введеного в коло правильного
многокутника

себто $\lim\limits_{n \to \infty} M = R$

[lim це є означення межі, від латинсько-
го слова limes = межа]

Ми вже довели, що обводи введених
у коло й обведених на нім правильних
многокутників є змінні величини, пер-
ша менша обводу кола й при под-

воїнні числа боків зростаюча, а друга більша обводу кола й при подвоїнні боків спадаюча. Щоб твердити, що коло є меншою них змінних величин, остається довести, що різниця між цими обводами многокутників і обводом кола прямує до 0, при подвоїнні числа боків їх.

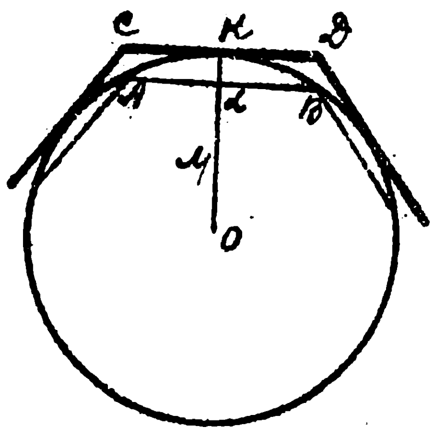


Рис. 202

Означимо різницю між обводом обведеного многокутника й обводом кола через x, себто $O-C=x$, різницю між обводами кола й введеним в нього многокутником через y, себто $C-P=y$. Тоді різниця між обводами обведеного й введеного многокутників буде $O-P=x+y$.

Тому $O-P>x$; $O-P>y$.

Отже розглянемо наші многокутники, вони є правильні однойменні, а тому їх обводи пропорційні відповідним метапрямам. (Обводи правильних однойменних многокутників відносяться, як їх метапрями). Метапрямом введеного многокутника буде OL, а обведеного OK. Тому $\frac{O}{P}=\frac{OK}{OL}=\frac{R}{M}$

Взявши похідну пропорцію маємо:

$$\frac{O-P}{P} = \frac{R-M}{M}$$

а тому ріжниця: $O - P = \frac{P}{M}(R-M)$.

Коли будемо подвоювати безмежно число боків обох многокутників, то число P буде обмеженим (бо не може бути більше обводу кола), M також (бо не може бути більше R), а тому чинник $\frac{P}{M}$ є величина обмежена. Але ми довели, що при цьому подвоєнню ріжниця між луком і тятивами буде проступати до 0, а тому й здобуток $\frac{P}{M} \cdot (R-M)$ буде проступати до нуля (бо здобуток кожного обмеженого числа на нуль є завжди нуль).

Тому $\lim\limits_{n \to \infty} O-P = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{P}{M}(R-M)$ також проступатиме до нуля.

Але коли ріжниця $O-P$ проступує до нуля, то тим скоріше проступують до нуля x і y які менші цеї ріжниці. Себто ріжниці $O-C (=x)$ і $C-P (=y)$ проступують до нуля при безмежному подвоєнню числа боків відповідних многокутників. Тому обвід кола C є межа обводів вводених в коло й обведених на ньому правильних многокутників при безмежному подвоєнню числа їх боків.

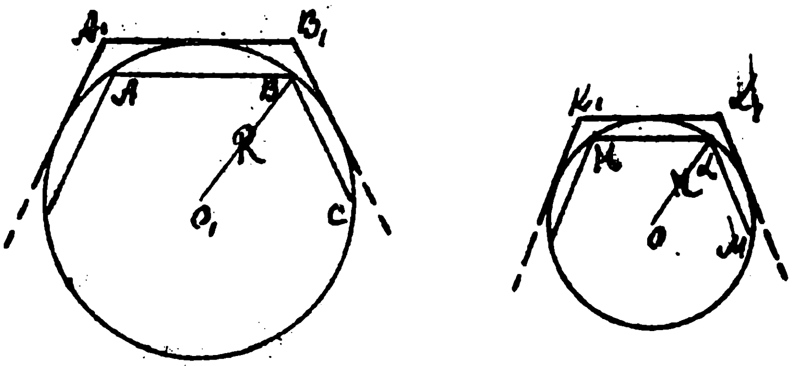
Так $C = \lim\limits_{n \to \infty} O_n$

$$C = \lim_{n \to \infty} P_n$$

Вимір обводу кола.

Теорема 1. Обводи кол пропорційні своїм поперечникам, себто відношення обвода кожного кола до свого поперечника є стала величина.

Рис. 203



Візьмемо 2 кола луча r і R (рис. 203) і введемо в них правильні однойменні многокутники обводів P і P_1, а обводи відповідних кол означимо через C і C_1. Ми знаємо, що обводи правильних однойменних многокутників пропорційні лучам кол обведених на них, тому

$$\frac{P}{P_1} = \frac{r}{R}$$

Коли ми будемо безмежно подвоювати число їх боків, то ці обводи P і P_1 будуть простувати до своїх меж C і C_1, але в той же час їх відношення завжди буде стале рівне $\frac{r}{R}$, а тому в цьому відношенщо будуть знаходиться й межи цих обводів, себ-то: $\frac{C}{C_1}=\frac{r}{R}=\frac{2r}{2R}$

[Теж саме ми доведемо порівнюючи обводи відповідних обведених на колі правильних многокутників]

Означивши поперечники кол через $2R=D_1$, а $2r=D$ маємо:

$$\frac{C}{C_1}=\frac{D}{D_1}$$

або помінявши місцями середні члени:

$$\frac{C}{D}=\frac{C_1}{D_1}=\pi \text{ (стала величина)}$$

Таке означення сталої величини відношення кожного кола до свого поперечника через π введено Архимедом, який знайшов його вартість рівну: $\pi=\frac{22}{7}$ (більш точно $3\frac{10}{71}$). Мецій вираховуючи π, дав такий легкий для вивчення спосіб напису π, а саме напишемо вряд подвійно перші три непарні числа 113|355 розіб'ємо одержане число на дві частини по 3 цифри й більшу візьмемо за чисельника дробу, а першу меншу за знаменателя, отже $\pi=\frac{355}{113}$ (це π буде обраховане з наближенністю до 0,000001).

Спочатку думали вирахувати π точно й тому було потрачено силу енергії на це обраховування, робилося обраховування в десяткових дробах з 10, 15, 20, 35 і т.д. десятковими знаками. Але потім було доведено, що число π є невимірне, яке навіть неможна висловити обмежено (закінчено) в радикалах і тому воно було назване позавимірним (трансцендентним).

Тепер, користуючись вищою математикою знайдено дуже легкий спосіб вираховування π з певного потрібного наближеностю. В практиці вживають для менш точних вимірів $\pi = 3{,}14$ (наближеність 0,01), а при більш точних вимірах $\pi = 3{,}14159$ (наближеність 0,00001).

Теорема 2. <u>Обвід кола рівний здобутку луча на 2π.</u>

Ми довели, що відношення обводу кола до поперечника стале рівне π.

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

Звідси $C = 2\pi R$

<u>Задача.</u> Визначити обвід дуги в n градусів?

Обвід всеї дуги кола $= 2\pi R$, що складає $360°$ кольових градусів; один градус буде менше в 360 разів, а дуга n градусів у n разів більше. тому:

$$S_n = \frac{2\pi R.n}{360} = \frac{\pi R n}{180}$$

Висновок. Дуги приналежні рівним центральним кутам у різних колах відносяться як відповідні лучі кол.

Припустим, що кожний з цих центральних кутів буде в n° ($n = 0 \ldots\ldots 360^\circ$), а радіуси приналежних кол означимо через R і r. Тоді

$$S = \frac{\pi R n}{180} \quad \text{а} \quad S_1 = \frac{\pi r n}{180}$$

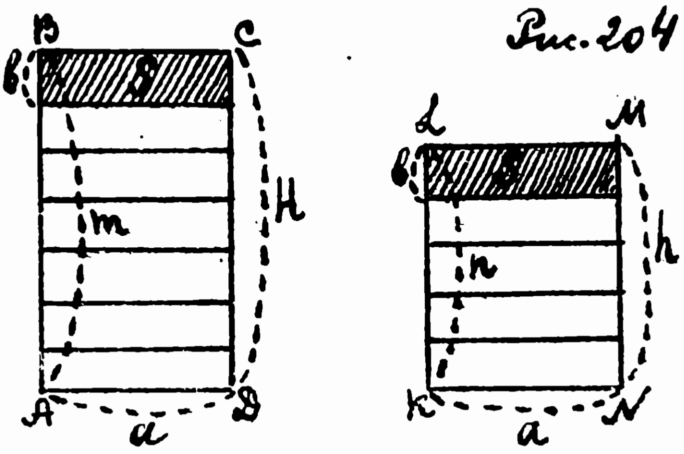
$$\frac{S}{S_1} = \frac{\cancel{\pi} R \cancel{n} . \cancel{180}}{\cancel{180} . \cancel{\pi} r \cancel{n}} = \frac{R}{r}$$

Вимір площ

Визначення. Частина площі, що обмежена з усіх боків обводом фігури називається полем цієї фігури.

Теорема. Поля 2-х прямокутників, що мають однакові основи, є пропорційні їхнім висотам.

Рис. 204



I. Розглянемо випадок, коли висоти спільномірні (рис. 204).

$AB = KN$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{H}{h}$$

Примітимо, що якась спільна міра „в" відкладася на висоті H ціле число m разів, а на висоті h — n разів. Тоді висота H складатиметься з m відтинків „в", с. т. $H = mв$, а висота h - складатиметься з n відтинків „в", с. т. $h = nв$; звідци $\frac{H}{h} = \frac{mв}{nв}$ . . . . (1)

Провівши в обох прямокутниках через кожну точку поділу прості рівнобіжні основі, розіб'ємо ці прямокутники на ряд рівноприставших, а тому рівнопільних прямокутників; обозначивши поле одного з цих рівнопільних прямокутників через S, матимемо, що S_{ABCD} складається з m прямокутників, що мають поле S, а S_{KLMN} — з n таких прямокутників; звідци $S_{ABCD} = mS$, а $S_{KLMN} = nS$, або

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{mS}{nS} \quad \ldots\ldots (2)$$

А з порівнання 1 і другої пропорції можемо написати:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{H}{h}$$

Тепер роздивимося випадок, коли висоти неспільномірні (рис. 205).

Поділивши h на n рівних частин і означивши кожну таку частину через c відкладатимемо цю частку c на H; припустимо, що вона відклалася m разів і залишився якийсь відтинок $x < c$, тоді $h = nc$ й $H = mc + x$, звідки

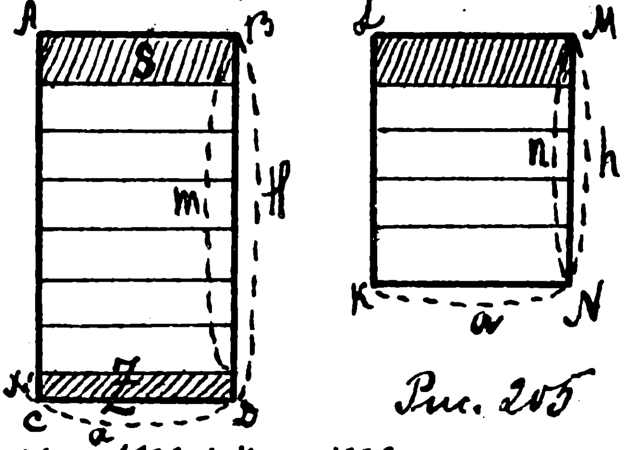


Рис. 205

$\frac{H}{h} = \frac{mc+x}{nc} = \frac{mc}{nc} + \frac{x}{nc}$, але $\frac{x}{nc} < \frac{1}{n}$; тому

$$\frac{H}{h} = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{n}\right) \ldots\ldots (1)$$

Через точки поділу висот проведемо в даних прямокутниках прості рівнобіжні основі; тоді прямокутник KLMN складатиметься з n прямокутників з полем s кожний, а прямокутник ABCD — з m таких же прямокутників s + прямокутник з висотою x; означимо його поле через z; або

$$S_{ABCD} = ms + z \text{ і } S_{KLMN} = ns$$

Звідци $\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{ms+z}{ns} = \frac{ms}{ns} + \frac{z}{ns}$

але $\frac{z}{ns} < \frac{1}{n}$; тому $\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{n}\right) \ldots\ldots (2)$

А з порівнання першої й другої пропорції можемо написати $\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{H}{h}$

Висновок. Поля двох прямокутників, що мають однакові висоти, пропорційні їхнім основам (рис. 206).

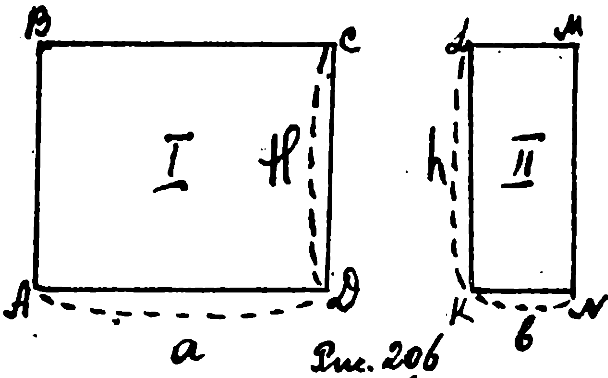


Рис. 206

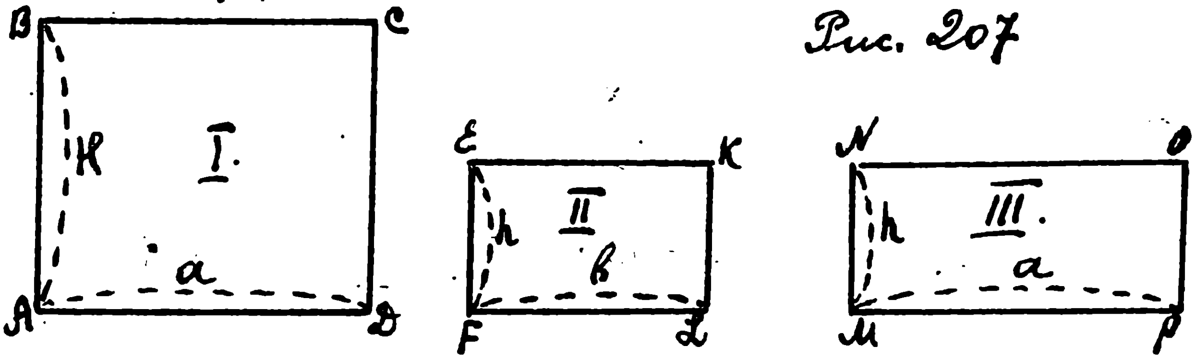
$AB = LK = H$

$\frac{S_I}{S_{II}} = \frac{a}{b}$?

Прийнявши за основу в кожнім з цих прямокутників їх висоти, а за висоти а й в, прийдемо до попередньої теореми.

Теорема: Поля прямокутників з ріжними основами й висотами пропорційні здобуткам основ на висоти.

Рис. 207



$\frac{S_I}{S_{II}} = \frac{Ha}{hb}$? (рис. 207). Для доводу будуємо поміжний прямокутник III, в якому висота $MN =$ висоті $EF = h$ (в II прямокутникові) й основа $MP = AD = a$ (основі I прямокутника). Порівнявши прямокутники I і III можемо написати:

$\frac{S_I}{S_{III}} = \frac{H}{h}$ а порівнявши II і III — $\frac{S_{II}}{S_{III}} = \frac{a}{b}$.

Поділивши почленно першу рівність на другу будемо мати:

$$\frac{S_I \cdot \cancel{S_{III}}}{S_{II} \cdot \cancel{S_{III}}} = \frac{Ha}{hb}$$

<u>Задача.</u> Виміряти поле даного прямокутника.

Щоб виміряти поле ми мусимо за одиницю мір брати також однородну величину, себто поле. За таку одиницю приймають квадрат в якому всі виміри (довжина й ширина, або основа й висота) є одиниця якої міри довжини. Хай такою квадратовою одиницею міри є квадрат $\underline{II}$ (рис. 208) тоді з попередньої теореми можемо написати:

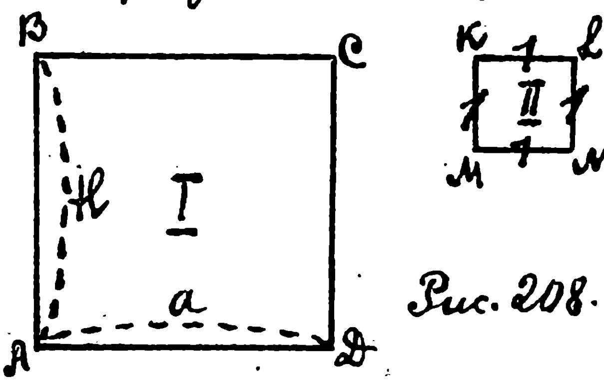


Рис. 208.

$$\frac{S_I}{S_{II}} = \frac{Ha}{1.1} = Ha.$$

Але S_{II} є квадратова одиниця. Тому $\frac{S_I}{S_{II}} = S_I$ квадрат. одиниць.

Таким чином поле прямокутника виміряється здобутком основи його на висоту.

$$S_{\text{прямокут.}} = aH$$

Теорема. <u>Поле кожного рівнобічника виміряється здобутком основи його на висоту.</u> $S_{\text{рівноб.}} = ah$?

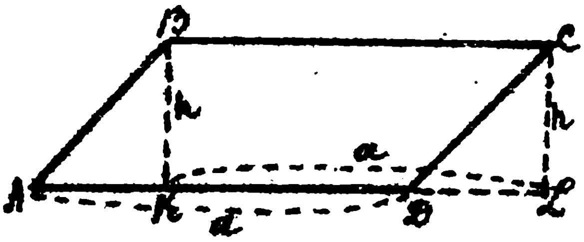


Рис. 209

Для доведення опустимо з B і C прямі BK і CL (висоти h). Тоді прямокутні Δ-и ABK = = Δ DCL (бо AB = CD й BK = CL = h) тому коли віднимемо Δ ABK від рівнобічника ABCD й додамо Δ DCL, то поле його не зміниться, о. т. $S_{ABCD} = S_{BKCL}$; але BKCL є прямокутник; поле його = KL · BK; але KL = BC; BC = AD й тому KL = AD. Звідци: $KL \cdot BK = S_{BKCL} = S_{ABCD} = AD \cdot BK$

або $S_{ABCD} = ah$.

<u>Задача 1.</u> Обвести на даному рівнобічнику рівнобічник двопільний йому (подвоїти поле даного рівнобічника)

Щоб подвоїти поле даного рівнобічника ABCD (рис. 210), треба через вершки його повести до взаємного перехрещення рівнобічні до косин його.

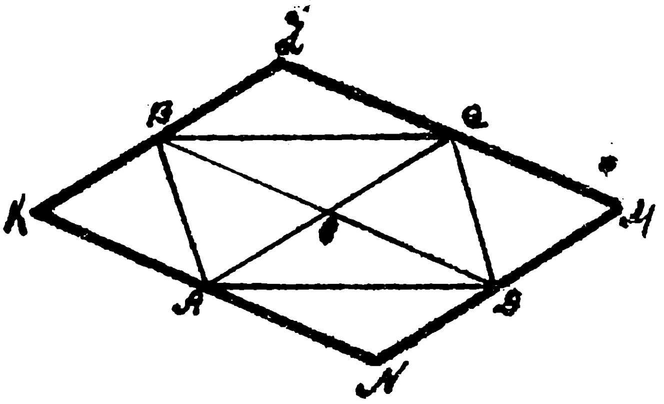


Рис. 210

Довід: Кожний із рівнобічників BLCO, ▭ COMD, ▭ KBOA і ▭ AODN, переполовиняються відповідними косинами: BC, CD, AD і BA на пристайні трикутники, а тому:

$$S_{\square}\ BLCO = 2S_{\triangle}\ BOC$$

Складаючи, маємо:

$$S_{\square}\ COДM = 2S_{\triangle}\ COД$$

$$+\ S_{\square}\ AOДN = 2S_{\triangle}\ AOД$$

$$S_{\square}\ KBOA = 2S_{\triangle}\ BOA$$

$$\overline{S_{\square}\ KLMN = 2S_{\square}\ ABCД}$$

що й треба було довести.

<u>Задача 2.</u> Ввести в даний рівнобіжник рівнобіжник півпільний йому. (переполовинити поле даного рівнобіжника).

Проведемо середники сусідніх боків рівнобіжника ABCД (рис. 211) і вони утворять новий рівнобіжник півпільний даному.

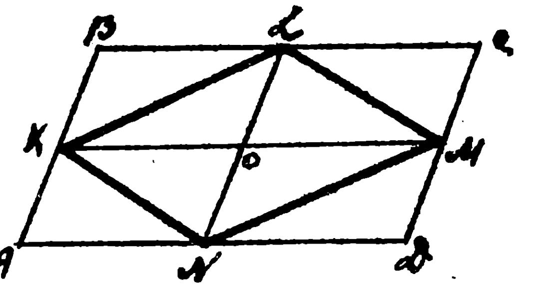


Рис. 211

Довід: З властивости середників сусідніх боків відомо, що чотирикутник ▱KLMN є рівнобіжник. Провівши середники LN і KM рівнобіжних боків ми з їх властивости знаємо, що вони рівнобіжні відповідним бокам рівнобіжника, тому чотирикутники: ▱BKLO, ▱LOCM, ▱NOMД і ▱AKON є рівнобіжники й середники KL, LM, KN, NM, як косини цих рівнобіжників переполовинюють їх на пристайні трикутники. Тому:

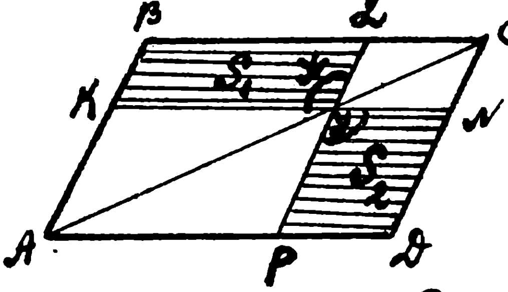
$$S_\triangle KLO = \tfrac{1}{2} S_\square KBLO$$
$$S_\triangle LMO = \tfrac{1}{2} S_\square LOCM$$
$$+\ S_\triangle NOM = \tfrac{1}{2} S_\square NOMD$$
$$S_\triangle KON = \tfrac{1}{2} S_\square AKON$$
$$\overline{S_\square KLMN = \tfrac{1}{2} S_\square ABCD}$$

що й треба було довести.

Так само можна подвоїти поле ромба й квадрата, та переполовинити поле їх.

Задача 3. Довести, що коли ми через довільну точку на косині рівнобіжника проведемо прості рівнобіжні до його боків, то утворюються по обидва боки косини рівнопільні рівнобіжники зі взаємно рівними кутами.

Такими чином косина буде геометричним місцем вершків такого роду рівнобіжників, що звуться доповнюючими.



$KN \parallel BC \parallel AD$
$LP \parallel AB \parallel CD$
$S_\square BLMK = S_\square MNDP$?
(рис. 212):

Рис. 212

Ми знаємо, що косина AC переполовинює рівнобіжник $ABCD$, а тому $S_\triangle ABC = S_\triangle ADC$. Через те саме й рівнобіжникові $AKMP$ і в рівнобіжникові $MLCN$ $S_\triangle KMA = S_\triangle AMP$ і $S_\triangle MLC = S_\triangle MCN$

З рисунка видно, що:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta KMA} + S_{\Delta MLC} + S_{I}$$

Віднімуючи $\quad - \; S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMN} + S_{\Delta MCN} + S_{II}$

маємо: $\quad 0 = S_{I} - S_{II}$

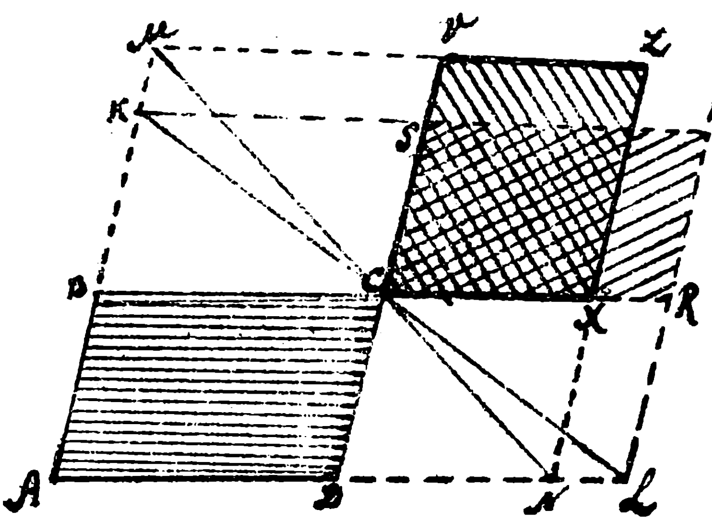
або $\quad S_{I} = S_{II}$

Далі, $\angle x = \angle y$, як вершкові, а коли у двох рівнобіжниках є по одному взаємно рівному куту, то й решта кутів будуть попарно рівні:

Умови доводу будуть однакові й для кожної иншої точки косини, через яку ми проведем рівнобіжні до боків, а тому косина AC буде геометричне місце вершків рівноплощих рівнобіжників S_{I} і S_{II}.

Задача 4. Збудувати рівнобіжник рівноплощий даному ABCD з однаковими з ним кутами (рис. 213).

Рис. 213



1) Через вершок C проводимо довільну просту до перехрещення з продовженнями боків AB і AD в точках N і M. На відтинках AM і AN будуємо рівнобіжник AMZN, косиною якого є довільна MN.

Продовживши боки ВС і DС до перехрестя з протилежними боками збудованого рівнобіт-ника, утворимо рівнобічник CVZX, який буде на підставі попередньої задачі той, що було задано.

Так само: провівши через вершок С ще другу довільну просту KL ми утворимо рів-нобічник C3FR, що задовольнятиме умовам задачі і т. д. Таких довільних простих, щоб перетинали продовження боків АВ і АD можна провести безмежну кількість і задача є неозначена з безмежною кількостю розвязок.

<u>Задача 5.</u> На даному відтинку а збу-дувати рівнобічник рівноплощний даному ABCD з однаковими з ним кутами (рис. 214)

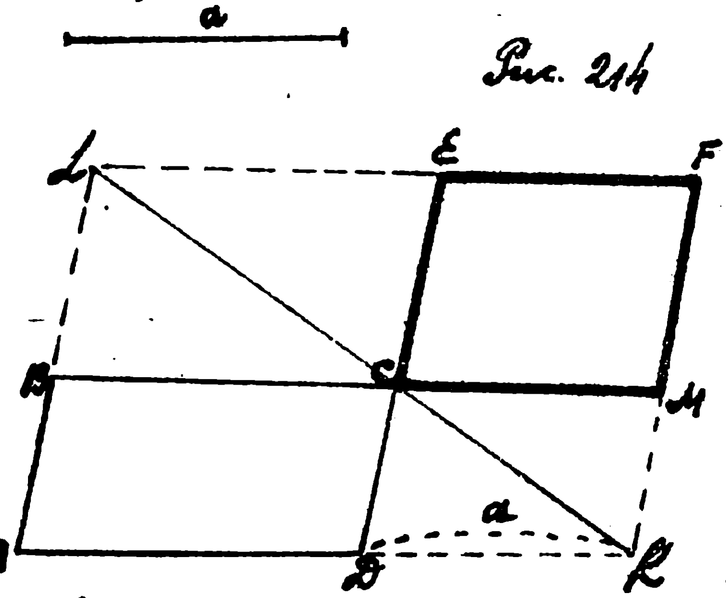


Рис. 214

На продовженні AD боку даного рів-нобічника відкладемо DK рівне а. Через точку K і вер-шок рівнобічни-ка С проведемо просту KL до пе-рехрещення з продовженням бока АВ в точці L. На боках AK, AL і косині LK будуємо рівнобічник ALFK. Продовжимо BC й DC до перетинання з боками збудованого рівнобічника LF і FK. Тоді утвориться рівнобічник CEFM, що буде збудований на відтинку a', як на боці, бо a = DK = CM (рівнобічні між рівнобічниками) й який на підставі задачі 3, буде рівнопільний даному й матиме з ним однакові кути.

Теорема. <u>Поле трикутника рівне півздобуткові основи на висоту</u>

$S_{\triangle ABC} = \frac{ah}{2}$? (рис. 215)

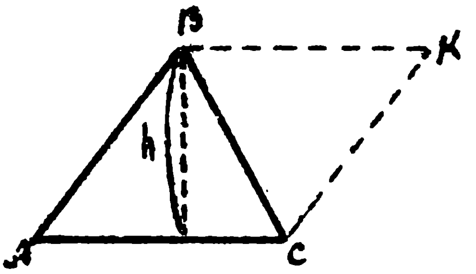


Рис. 215

Провівши $BK \parallel AC$ й $CK \parallel AB$ до перехрестя з BK в точці K ми утворили рівнобічник ABKC для якого BC буде кісною, а тому переполовинює його на пристайні Δ-ки, с. т.

$S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\square ABKC}}{2}$, але $S_{\square ABKC} = ah$; то $S_{\triangle ABC} = \frac{ah}{2}$

<u>Висновки:</u> I. <u>Всі рівнобічники й Δ-ки, що мають однакові основи й висоти є рівнопільні.</u>

II. <u>Рівнобічна до боку Δ-а поведена через протилежний вершок його є геометричне місце вершків рівнопільних даному трикутників, збудованих на визначенім боці,</u> (бо висоти й основи цих

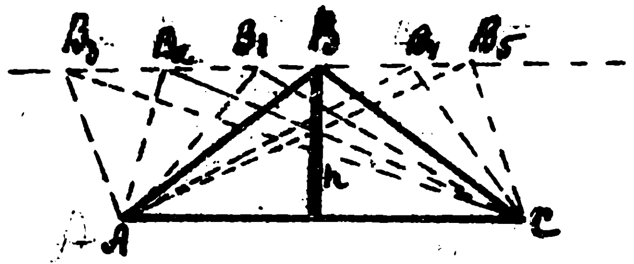


Рис. 216

трикутників рівні), або також: вершок Δ-ка можна перенести рівнобіжно основі не міняючи вартости його поля (рис. 216).

Теорема. <u>Поле рівнобічника й рівнораменника = півздобуткові косих їх</u>

<u>I</u>. $S_{ABCD} = \frac{d \cdot d_1}{2}$? (рис. 217).

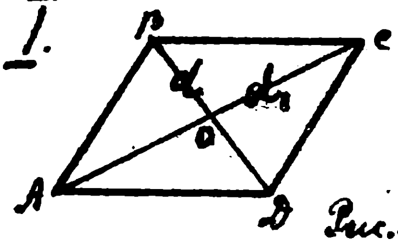


Рис. 217

З Δ-а ABC маємо, що $S_{ABC} = \frac{d_1 \cdot OB}{2}$, а з трикутника ACD — $S_{ACD} = \frac{d_1 \cdot OD}{2}$ (бо BD й AC, як косини рівнобічника прямі, а тому OB і OD є висоти Δ ABC й Δ ACD); склавши обидві рівности, матимемо:

$$
\begin{array}{l}
S_{\triangle ABC} = \frac{d_1 \cdot OB}{2} \\
+\, S_{\triangle ACD} = \frac{d_1 \cdot OD}{2} \\
\hline
S_{ABCD} = \frac{d_1}{2}(\underbrace{OB + OD}_{d}) = \frac{d_1 \cdot d}{2}.
\end{array}
$$

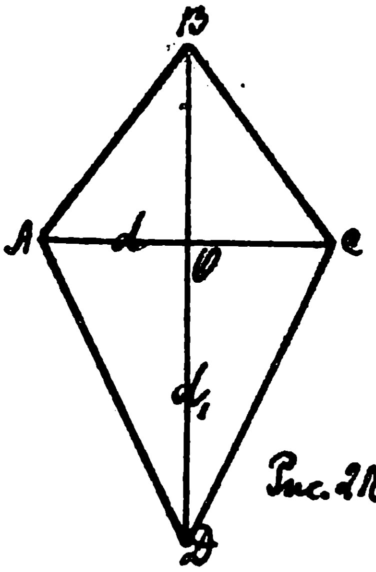


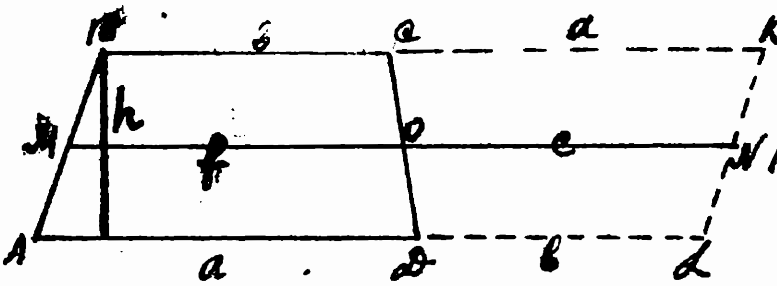
Рис. 218

Подібний доказ буде й для рівнораменника ABCD (рис. 218), бо в ньому також косини взаємно прямі, а тому:

$$
\begin{array}{l}
S_{\triangle ABC} = \frac{d \cdot OB}{2} \\
+\, S_{\triangle ACD} = \frac{d \cdot OD}{2} \\
\hline
S_{ABCD} = \frac{d}{2}(\underbrace{OB + OD}_{d_1}) = \frac{d \cdot d_1}{2}
\end{array}
$$

<u>Висновок I.</u> Поле квадрата = квадрату його бока (бо в квадраті основа й висота є рівні). <u>II.</u> Поле квадрата = півквадратові його косин (бо косині квадрата рівні й взаємно прямі).

Теорема. <u>Поле трапеза = здобуткові середника нерівнобічних боків на висоту, або півздобуткові суми основ на висоту.</u>



$S_{трап.\,ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$ або $S_{тр.\,ABCD} = ch$ (рис. 219).

Ми вже знаємо, що коли на продовженню рівнобічних боків трапезу відкладем обернено протилежні боки $CK=a$, $DL=b$ і сполучим точки K і L, то утвориться рівнобічник $ABKL$ рівний сумі двох пристайних трапезів:

$$\square ABKL = \square 2ABCD.$$

Ми знаємо що поле рівнобічника рівне здобуткові основи на висоту, тому

$$S_{\square ABKL} = 2S_{\square ABCD} = AL \cdot h$$

або поле одного трапезу $= S_{\square ABCD} = \frac{AL \cdot h}{2}$

$AL = a+b$, а тому $S_{\square ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Але $AL = MN = 2c$. Тому $S_{\square ABCD} = \frac{2ch}{2} = ch$.

Теорема. <u>Косинні трапеза утворюють з нерівнобіжними боками його трикутники взаємно рівнотільні.</u>

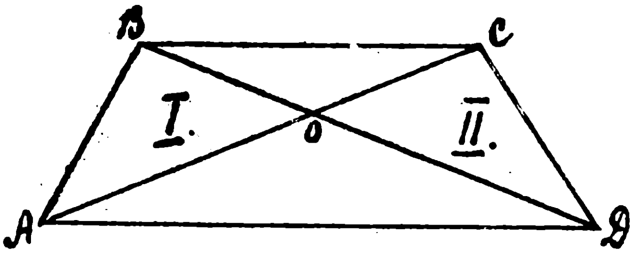


Рис. 220

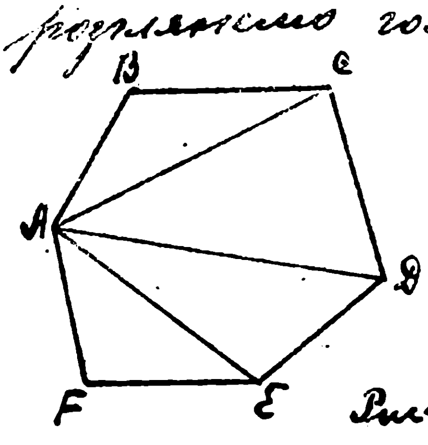
$$\frac{BC \parallel AD}{\Delta AOB \equiv COD.?}$$ (рис. 220)

Трикутники ACD й Δ ABD є рівнотільні бо мають спільну основу AD, а вершки B і C на BC∥AD; поле Δ AOD є спільне, а тому відтявши це поле від обох Δ-ів ACD і ABD матимем рішти: Δ ABO й Δ COD рівнотільні між собою а саме:

$$\Delta ACD \equiv \Delta ABD$$
$$\frac{-\Delta AOD \quad -\Delta AOD}{\Delta ABO \equiv \Delta COD.}$$

Поле многокутника.

Для обчислення поля якого будь неправильного многокутника загальної теореми немає. Обчислити поле такого многокутника можна де кількома способами. Ми розглянемо головніші з них.



<u>I.</u> Коли ми розібємо многокутник косинами з одного вершка його на ряд трикутників (рис. 221), що надаються для обчислення

Рис. 221

поля кожного з них, то поле даного многокутника буде сумою полів цих Δ-ів.

II. Коли в даний многокутник можна ввести коло (рис. 222), то лучі його будуть прямові до боків многокутника, а тому будуть висотами трикутників ΔDOA, ΔAOB, ΔBOC

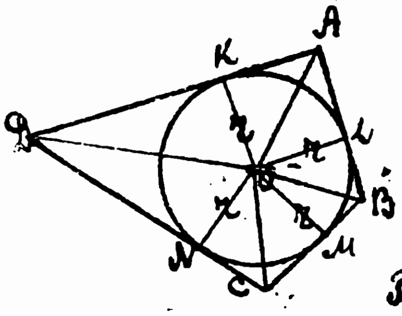


Рис. 222

й ΔCOD то утворені простими, які сполучують центр кола з вершками многокутника.

$$S_\Delta AOD = \frac{AD \cdot r}{2}$$
$$+\; S_\Delta AOB = \frac{AB \cdot r}{2}$$
$$S_\Delta BOC = \frac{BC \cdot r}{2}$$
$$S_\Delta DOC = \frac{DC \cdot r}{2}$$
$$S_\square ABCD = \frac{r}{2}(AD + AB + BC + CD)$$

але $AD + AB + BC + CD = 2p$ (обвід многокутника) а тому <u>поле обведеного многокутника є здобутком півобвода його на луч кола введеного.</u> $S_{мн} = pr$.

<u>Висновок 1</u>: Коли многокутник буде трикутником, то тим самим способом доведемо що: поле трикутника є здобуток півобвода його на луч кола введеного. $S_\Delta = pr$, а звідси

<u>Висновок 2</u>: Луч кола введеного в трикутник або у многокутник рівний

частці від ділення поля їх на півобвід

$$r = \frac{S}{p}$$

Висновок 3-ій. Поле правильного многокутника є здобуток його півобвода на метипрям, (бо в правильному многокутникові луч кола введеного є одночасно й метипрямом).

III. 3-ій спосіб має назву: Перетворення даного многокутника в рівнопільний йому трикутник.

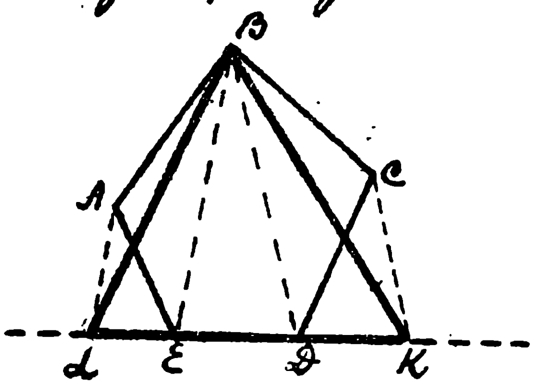


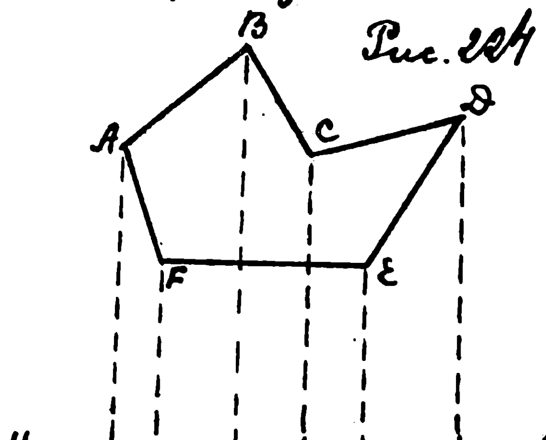
Рис. 223

Продовжимо бік DE (рис. 223) на обидва боки й з верхка B проводимо косину BD. З верхка C відокремленого Δ DCB проводимо CK // BD. Точку K перехрестя CK з продовженням ED сполучаємо з B. Δ BDC й Δ DBK рівнопільні, бо мають спільну основу BD, а верхи їх C і K лежать на CK рівнобіжній до основи BD. Тому коли від многокутника ABCDE відтяти Δ BCD й долучити Δ BDK, то поле многокутника не зміниться. А тому п'ятикутник ABCDE заступається 4-кутником ABKE. Так само, взявши косину BE й через верхок A провівши AL // BE ми можемо відтяти $\triangle ABE$ й долучити до многокутника $\triangle BLE$ рівнопільний $\triangle ABE$. Тим самим ми 4-кутник $ABKE$ перетворимо в рівнопільний йому $\triangle LBK$. Отже даний нам многокутник $ABCDE$ буде рівнопільний $\triangle LBK$. Коли зможемо обчислити поле цього $\triangle$-ка, то тим самим визначимо й поле даного многокутника.

IV. Можна ще для обчислення поля кожного многокутника взяти такий спосіб (що має назву „Способа визначних вісей").

Припустимо, що ми маємо многокутник $ABCDEF$ (рис. 224). Проведемо довільну просту MN (яку звуть визначною віссю). З кожного з верхів многокутника спустимо на цю вісь прямі, тоді ми матимем, що поле нашого многокутника буде рівне сумі полів трапезів: $S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} + S_{C_1CDD_1}$, без суми полів трапезів: $S_{A_1AFF_1} + S_{F_1FEE_1} + S_{E_1EDD_1}$, або

Рис. 224

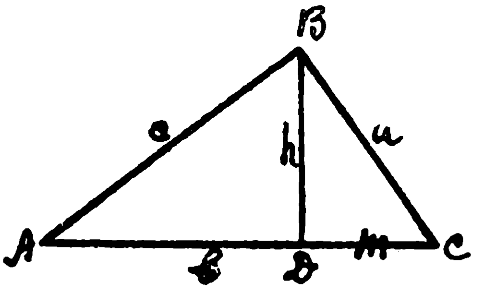


$$S_{ABCDEF} = \left[\frac{AA_1+BB_1}{2}\cdot A_1B_1 + \frac{BB_1+CC_1}{2}\cdot B_1C_1 + \frac{CC_1+DD_1}{2}\cdot C_1D_1\right] - \left[\frac{AA_1+FF_1}{2}A_1F_1 + \frac{FF_1+EE_1}{2}F_1E_1 + \frac{EE_1+DD_1}{2}E_1D_1\right]$$

Коли нам можна обчислити довжину метових прямів з вершків і довжину метів боків многокутника на вісь MN, то поле многокутника легко обчислити по виведеному тут взору.

Теорема: <u>Поле трикутника є рівне корню квадратовому від здобутка півобвода його на всі ріжниці того ж півобвода з кожним окремим боком.</u>

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



Ми знаємо, що $S_\Delta = \frac{b h_b}{2}$. Обчислимо h_b з прямокутного ΔBDC (рис. 225).

$$h_b^2 = a^2 - m^2 = (a+m)(a-m)$$

Рис. 225 Невідоме m, ми можемо обчислити по теоремі :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bm, \text{ або}$$

$$m = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$$

Підставляючи у взір для h^2 маємо:

$$h_b^2 = \left(a + \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)\left(a - \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right) =$$

$$= \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2b} \cdot \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2b} =$$

$$= \frac{(2ab+a^2+b^2)-c^2}{2b} \cdot \frac{c^2(a^2+b^2-2ab)}{2b}$$

$$h_b^2 = \frac{1}{4b^2}\left\{\left[(a+b)^2 - c^2\right]\cdot\left[c^2-(a-b)^2\right]\right\}$$

$$h_b^2 = \frac{1}{4b^2}\left[(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)\right]$$

$$h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)}$$

Означимо $a+b+c = 2p$.

тоді $a+b-c = a+b+c-2c = 2p-2c = 2(p-c)$

так само $a+c-b = 2(p-b)$; $b+c-a = 2(p-a)$

Підставляючи у взір для h_b маємо:

$$h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{2p\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-a)} =$$

$$= \frac{1}{2b}\sqrt{16\cdot p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Підставляючи у взір для S_Δ матимемо:

$$S = \frac{bh_b}{2} = \frac{\cancel{b}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cancel{b}}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

А тому: $$\underline{\underline{S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$$

<u>Висновок 1-ий</u>: Коли Δ-к є рівнобічний з боком a, то $p = \frac{3}{2}a$; $p-a = p-b = p-c = \frac{1}{2}a$, а тому:

$$S_{прав.\Delta} = \sqrt{\frac{3}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{16}a^4} = \underline{\underline{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}}$$

Обчислимо висоту рівнобічного трикутника

$S = \frac{ah}{2}$; $2S = ah$; $h = \frac{2S}{a}$; $h = \frac{\cancel{2}}{\cancel{a}}\cdot\frac{a^{\cancel{2}}}{\cancel{4}_2}\sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

<u>Висновок 2-ий</u>. $S = rp$; $r = \frac{S}{p}$

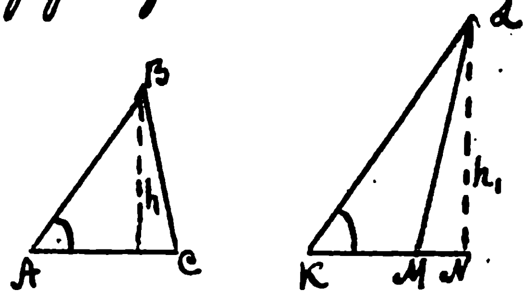
$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Висновок 3-й. Ми знаємо, що луч обведеного на трикутникові кола рівний $R = \frac{ac}{2h_c}$. Помноживши чисельника й знаменателя на b маємо $R = \frac{abc}{2bh_c}$ але $bh_c = 2S_\Delta$ тому

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Відношення полів.

Теорема. Поля трикутників, що мають по рівному куту, відносяться як здобутки боків, що творять цей кут.



$\angle A = \angle K$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}} = \frac{AB \cdot AC}{KL \cdot KM}\ ?$$

(рис. 226).

Рис 226

Поле ΔABC: $S_{ABC} = \frac{AC h}{2}$; Поле ΔKLM: $S_{KLM} = \frac{KM h_1}{2}$; $\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}} = \frac{ACh}{KMh_1} = \frac{AC}{KM} \cdot \frac{h}{h_1}$

Але прямокутні трикутники ΔABD і ΔKLN є схожі бо мають по однаковому гострому куту а тому:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{AB}{KL}$$

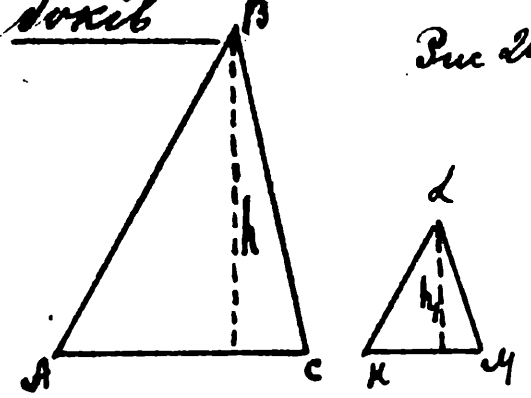
Підставляючи у наше відношення маємо

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}} = \frac{AC \cdot AB}{KM\, KL}$$

Що й треба було довести.

Теорема. <u>Поля схожих трикутників пропорційні квадратам взаємних боків</u>

Рис 227



$\triangle ABC \sim \triangle KLM$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}} = \frac{AC^2}{KM^2} = \frac{AB^2}{KL^2} = \frac{BC^2}{LM^2}\ ?$$

(рис. 227). $S_{ABC} = \frac{AC\,h}{2}$; $S_{KLM} = \frac{KM\,h_1}{2}$; $\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}} = \frac{AC}{KM} \cdot \frac{h}{h_1}$

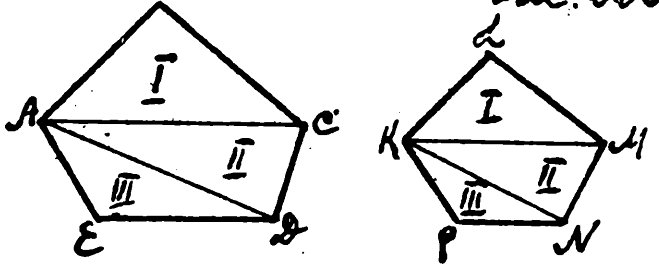
але у схожих Δ-ках висоти пропорційні взаємним бокам, а тому $\frac{h}{h_1} = \frac{AC}{KM}$
Підставляємо у відношення й маємо:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}} = \frac{AC^2}{KM^2} = \dots$$

<u>Висновок</u>. Поля схожих Δ-ів пропорційні квадратам всіх лінійних їх первнів (висот, симетральних, осередніх, обводів), бо всі ці лінійні первні пропорційні бокам

Теорема. <u>Поля схожих многокутників пропорційні квадратам взаємних боків.</u>

Рис. 228



$\square ABCDE \sim \square KLMNP$

$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{KLMNP}} = \frac{AB^2}{KL^2}\ ?$$

(Рис. 228). Коли ці многокутники

схожі, то $\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{LM} = \frac{CD}{MN} = \frac{DE}{NP} = \dots$ Звідси:

$$\frac{AB^2}{KL^2} = \frac{BC^2}{LM^2} = \frac{CD^2}{MN^2} = \frac{DE^2}{NP^2} = \dots\dots$$

З відповідних вершків A і K проведемо косинки, тоді многокутники розіб'ються на схожі й однонакітно розположені Δ-ки $I \sim 1$; $II \sim 2$; $III \sim 3$. Ми довели, що $\frac{S_I}{S_1} = \frac{AB^2}{KL^2}$; $\frac{S_{II}}{S_2} = \frac{CD^2}{MN^2}$; $\frac{S_{III}}{S_3} = \frac{DE^2}{NP^2}$

але праві частини цих рівностей рівні, то й ліві теж і матимем: $\frac{S_I}{S_1} = \frac{S_{II}}{S_2} = \frac{S_{III}}{S_3} = \frac{AB^2}{KL^2}$

Утворюючи похідну пропорцію маємо:

$$\frac{S_I + S_{II} + S_{III}}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{S_I}{S_1} = \frac{AB^2}{KL^2}$$

або $$\frac{S_{ABCDE}}{S_{KLMNP}} = \frac{AB^2}{KL^2}$$

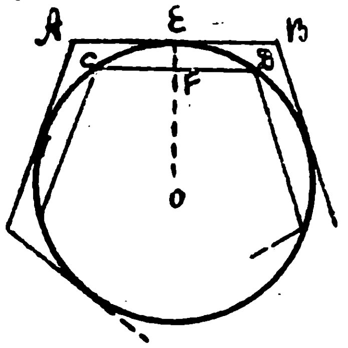
Висновок. Поля правильних однойменних многокутників відносяться, як квадрати взаємних боків, межипрямів, лучів введених і обведених на них кол (бо межипрями лучі введених й обведених на правильних многокутниках кол є пропорційні взаємним бокам).

Круг і його частини.

Поле кола має назву круга.

Доведемо, що:

Теорема. Круг кола є метою полів введених в нього й обведених на ньому правильних многокутників при безкрайньому подвоїнню числа їх боків.



Введемо в коло й обведемо на ньому правильні однойменні многокутники (рис. 229/ Означимо круг кола через S а поля многокутників:

Рис 229 введеного – S_1, обведеного S_2

Тоді очевидно, що $S_2 > S$, а $S_1 < S$. Хай ріжниці $S_2 - S = x$; $S - S_1 = y$, тоді

$$\begin{array}{r} S_2 - S = x \\ + \; S - S_1 = y \\ \hline S_2 - S_1 = x + y \end{array}$$

себто $S_2 - S_1 > S_2 - S$ і $S_2 - S_1 > S - S_1$.

Ми знаємо, що поля правильних однойменних многокутників відносяться як квадрати метиралів, а тому

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{OE^2}{OF^2} = \frac{R^2}{M^2}$$

Зглядно похідну пропорцію маємо:

$$\frac{S_2 - S_1}{S_1} = \frac{R^2 - M^2}{M^2}$$

Звідси $S_2 - S_1 = \frac{S_1}{M^2}(R+M)(R-M)$

S_1 є величина обмежена, бо не може бути більше круга даного кола; M^2 і $R+M$ такою обмежені величини, бо M не може бути більше сталої величини R-луча даного кола. Тому $\frac{S_1}{M^2}(R+M) = K$ є величина обмежена (закінчена). Тому, при безкрайньому подвоєнню числа боків многокутників, коли $R-M$ (як ми вже довели) простує до 0 й здобуток $K(R-M)$ буде простувати до нуля, а через те:

$$\lim_{n\ldots\infty} S_2 - S_1 = K(R-M) = 0.$$

Коли ріжниця S_2-S_1 при безкрайньому подвоєнню числа боків простує до нуля, то тим швидче будуть простувати до нуля ріжниці: $S_2 - S < S_2 - S_1$

$S - S_1 < S_2 - S_1$, а тому

$$\lim_{n\ldots\infty} S_2 = S; \quad \lim_{n\ldots\infty} S_1 = S.$$

Теорема. <u>Круг кола рівний здобуткові π на квадрат луча.</u>

Введемо у дане коло (рис. 230) правильний многокутник, поле якого є рівне здобутку півобвода на метирем, себ-то

$$S_n = \frac{P}{2}\cdot M$$

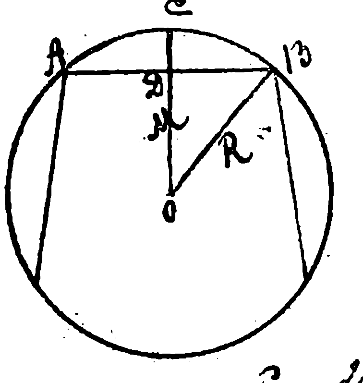


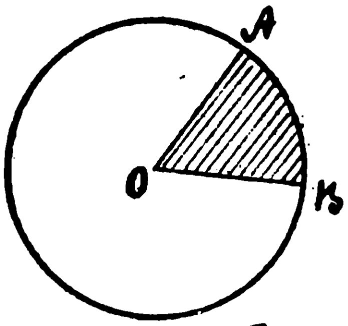
Рис. 230

Будемо подвоювати безкрайнє число боків многокутника. Тоді нам відомо, що S_0 буде простувати до S (круга кола),

як до своєї межі; P — обвід многокутника також прямуватиме до C (обводу кола), а M — метипрями прямуватиме до луча R, як своєї межі. Тому: $S=\lim\limits_{n\ldots\infty} S_n = \frac{C}{2}R$
але $C = 2\pi R$, а тому

$$S=\frac{2\pi R\cdot R}{2}=\pi R^2$$

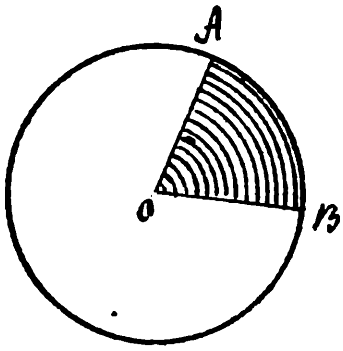
<u>Задача 1.</u> Обчислити поле кругового вирізка в $n°$. (рис. 231).



Круг кола $=\pi R^2$, складає вирізок у $360°$, а вирізок круга в $1°$ буде $\frac{\pi R^2}{360}$ а в $n°$:
$S=\frac{\pi R^2 n}{360}$.

Рис 231

<u>Задача 2.</u> Обчислити поле кругового вирізка з дугою a?



Припустімо, що наша дуга a має $n°$ (рис. 232).
Тоді $a=\frac{\pi R n}{180}$.
Але S вирізка в $n°$ буде $S=\frac{\pi R^2 n}{360}$
або $S=\frac{\pi R n\cdot R}{2\cdot 180}=\frac{\pi R n}{180}\cdot\frac{R}{2}$
$\frac{\pi R n}{180}=a$. Через те $S=a\cdot\frac{R}{2}$.

Рис. 232

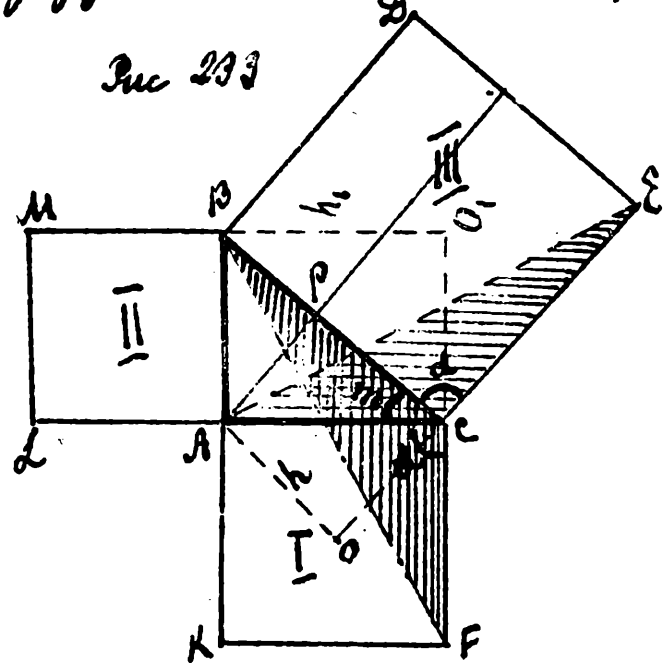
Поле кругового вирізка рівне півздобуткові довжини його дуги на луч кола.

<u>Пітагорова теорема</u>

<u>Сума полів квадратів збудованих на прямках рівна полю квадрата</u>

збудованого на протипрямці.

Рис 233



$S_I + S_{II} = S_{III}$?

Спустимо з вершка прямого кута A (рис. 233) прям на протипрямку й продовжимо його до перехрещення з боком DE. Тоді квадрат BDEC розпадається на два прямокутники PNEC і PNBD. Доведемо що ці прямокутники кожний зокрема рівноплощні сусіднім квадратам збудованим на прямках AC і AB, себто доведемо, що

$$S_{PNEC} \equiv S_I \text{ а } S_{PNBD} \equiv S_2$$

Для цього сполучимо вершки A і E, а також вершки B і F простими. Утворимо △ ACE й △ FBC, які будуть рівноплощні, бо бік 1-го △ ACE EC = BC, боку 2-го △ FBC (як боки квадрата). Так само AC = CF, а кути між ними ∠ACE = ∠BCF (кожний з них рівний $d+m$). Але △ ACE й прямокутник PNCE мають спільну основу CE й однакові висоти, бо $h = AO = PC$ (рівнобіжні між рівнобіжними) а тому $S_{PNCE} = 2S_{ACE}$. Так само квадрат ACKF і △ BCF мають спільну основу CF і рівні висоти (бо $h_1 = AC$, як рівнобіжні між рівнобіжними, а тому

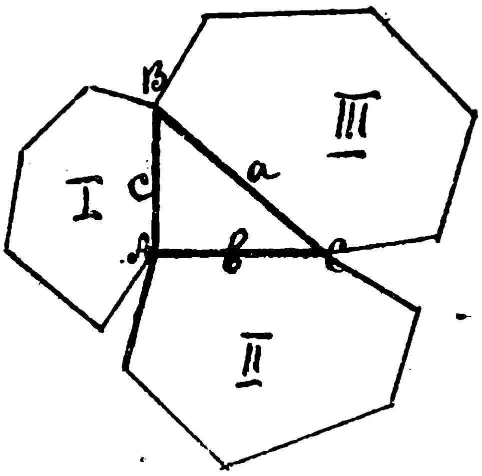
$S_{ACKF} = S_I = 2S_{\triangle BCF}$. Але $\triangle S_{ACE} = \triangle S_{BCF}$ (трикутники рівнопритайні), а тому $S_I = S_{PNCE}$. Так само доводимо, що й $S_{II} = S_{PNBD}$. Додавши одну рівність до одної маємо:

$$
\begin{aligned}
&S_I = S_{PNCE} \\
+\ &S_{II} = S_{PNBD} \\
\hline
&S_I + S_{II} = S_{III}
\end{aligned}
$$

Висновок 1-й. Многокутник збудований на протипрямці, як на боці є рівнопільний сумі скотних йому многокутників збудованих на прямках, як взаємних боках. Дійсно: поля скотних многокутників відносяться як квадрати взаємних боків:

$$\frac{S_I}{S_{III}} = \frac{c^2}{a^2};\quad \frac{S_{II}}{S_{III}} = \frac{b^2}{a^2}$$

(рис. 234). Додамо одну рівність до одної:



$$\frac{S_I}{S_{III}} + \frac{S_{II}}{S_{III}} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}$$ або

Рис 234

$$\frac{S_I + S_{II}}{S_{III}} = \frac{c^2 + b^2}{a^2},$$ але

$c^2 + b^2 = a^2$, тому $\frac{c^2+b^2}{a^2} = 1$. Отже $\frac{S_I + S_{II}}{S_{III}} = 1$; $S_I + S_{II} = S_{III}$.

Висновок 2-й. Круг кола збудованого на протипрямці, як поперечнику є рівний сумі кругів кол збудованих на прямках, як поперечниках.

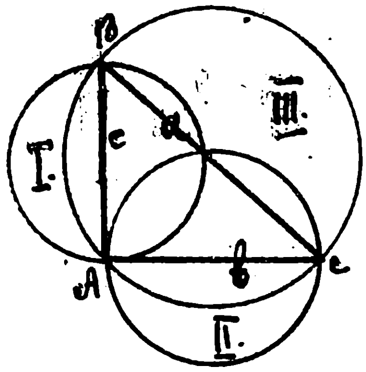


Рис. 235

$b^2+c^2=a^2$ (рис. 235).

Помноживши цю рівність на π маємо: $\pi b^2+\pi c^2=\pi a^2$

$b=2r_2$; $c=2r_1$; $a=2r_3$

тому: $4\pi r_2^2+4\pi r_1^2=4\pi r_3^2$

або скорочуючи на 4 маємо: $\pi r_2^2+\pi r_1^2=\pi r_3^2$

або $S_{II}+S_{I}=S_{III}$.

На увагу: Звичайно, на прикінці слід би було подати всі помічені помилки, але вони складаються в більшости з дрібних описок (як то з переставок літер, помилкових замін однієї літери другою, то-що). Ці описки дуже легко можуть виправити ті, хто буде студіювати, а тому ми їх не подаємо.

В початку курсу, з огляду на нецілковите ознайомлення складачів конспекту з термінологією лектора, є де-які ухилення від цієї термінології й помічається неусталеність у ній, але мається надія в наступному виданні виправити цю хибу.

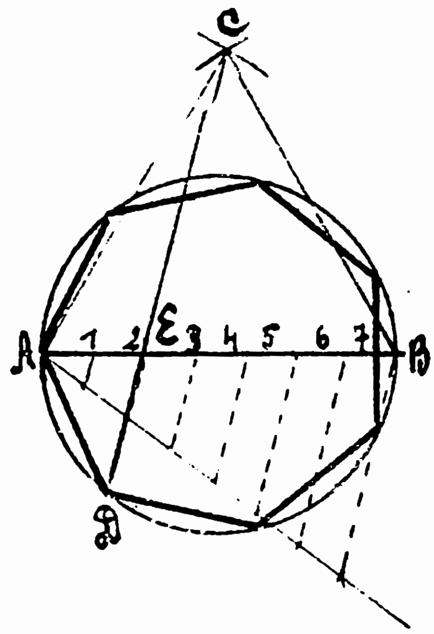
Зупинимося лише на більших помилках, а саме:

1) на сторінці 29-й: а) (3-й рядок згори) після рівности „AD=DC" треба вставити: „а ∠ADB=∠BDC, як кути прямі",

2) " " " б) (14-й рядок згори) - після слів: „Але ∠A є гострий" треба додати: „у прямокутному Δ-ові ABD."

3) на сторінці 146-й а) (4-й рядок від низу) замісць слів „поперечника AD" треба читати „поперечника AB".

Н) на сторінці 146-й замісць рис. 193, нарисованого неправильно, має бути доданий при цьому:



Літографія
Б. ВАНЧУРИ.
м. Подебради.

Видавниче Т-во при Україн. Господ. Академії.
Č. S. R. m. Lázně-Poděbrady. Ukrajin. Akademie.