Є. ІВАНЕНКО
ПРОФ. УКР. ПЕДАГОГИЧНОГО ІНСТИТУТУ ІМ. М. ДРАГОМАНОВА
В ПРАЗІ

КУРС
АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Основи аналітичної геометрії на площі

З термінологичним словником, показчиком взорів і абетковим показчиком змісту книги та з 245 рисунками в тексті.

УКРАЇНСЬКИЙ ГРОМАДСЬКИЙ ВИДАВНИЧИЙ ФОНД
ПРАГА

Є. ІВАНЕНКО
ПРОФ. УКРАЇНСЬКОГО ПЕДАГОГИЧНОГО ІНСТИТУТУ В ПРАЗІ

КУРС
АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

читаний в Українському Педагогичному Інституті імени М. Драгоманова в Празі.

ЧАСТИНА І

Основи аналітичної геометрії на площі

І. Прямові, або прямокутні координати: геометричні осередки та їх основні властивости.
ІІ. Косокутні й бігунові координати.
ІІІ. Окремі геометричні осередки.

ПРАГА
УКРАЇНСЬКИЙ ГРОМАДСЬКИЙ ВИДАВНИЧИЙ ФОНД
1925

Переднє слово.

Під час своїх викладів у Педагогичному Інституті я поділив основний курс аналітичної геометрії на три частини, а саме: 1) Основи аналітичної геометрії на площі (прямові координати; основні властивости геометричних осередків); 2) Геометрія в просторі (визначення положення точки, площи, плоских фігур і простої в просторі; геометричні осередки в просторі та оборотові тіла; 3) Загальна аналіза функцій першого і другого ступеня від двох або 3-х змінних; окремі випадки кривих на площі та в просторі.

Таким поділом мав я на меті досягнути насамперед цілковитого й всебічнього засвоєння слухачами основ дисципліни, а також найконкретнішого уявлення ними аналітичних образів. До цього спонукало мене ще й те, що через війну та революцію нам припадає тепер мати аудіторію з людей, що на протязі кількох років під час революційної борні не мали справи з наукою. Ці люде здебільшого позабували навіть елементи математики, а, головна річ, одвикли математично мислити. Отже, взявши під увагу сказане, я старався викласти предмет найелементарнішим способом і дати як найбільше вправ. Для цього використав усі задачники, що їх мав змогу добути. Власних задач мною складено дуже мало.

Крім того, роблючи такий поділ курсу, мав я на думці, що незабаром, слідом за західно-европейськими школами, і в нас на Україні основи аналітичної геометрії будуть предметом лише середніх шкіл (всіх, крім вузько-класичних), і через те перша частина цього курсу зможе заступити підручник елементів аналітичної геометрії для середніх шкіл. Останні ж дві частини, бувши звільнені від баласту — елементів геометрії, — складуть окрему цілість яко підручник для вищої школи.

Бажаючи вдосконалити цей підручник, ласкаво прошу колег по фаху подати свої зауваження про хиби, що їх зустрінуть у курсі.

Література:

I. В чеській мові: 1) Проф. Др К. Zahradnik: Analytická geometrie. 2) Проф. Др F. Studnička: Úvod do analytické geometrie. 3) Др. I. Vojtěch: Analytická geometrie. 4) F. Močnik: Analytická geometrie.

II. В німецькій мові: 5) Проф. Др M. Simon: Analytische Geometrie. 6) Проф. G. Salmon (нім. переклад): Analytische Geometrie. 7) Esenborn: Analytische Geometrie.

III. В московській мові: 8) Проф. П. Боль: Высшая математика. 9) Проф. Ермаков: Аналитическая геометрія. 10) Проф. Граве: лекціи по аналитической геометріи (литогр. курс). 11) Проф. Андреев: Курс аналитической геометріи.

IV. З елементарних курсів: 12) Проф. О. Любек: Аналитическая геометрія (мос. переклад). 13) М. Грицак: Учебник геометрії. 14) Др Є. Савицький — Геометрія.

V. Задачі вибрано здебільшого: 1) Із задачника І. Кранца (Zbiór zadań matematycznych), 2) З геометрії Е. Савицького, 3) Д-ра Vojtěcha і т. д.

Проф. Є. **ІВАНЕНКО.**

Вступні розуміння.

§ 1. Вимір віддалень на простій.

Візьмемо безмежну просту AB і на ній довільну точку O (рис. 1).

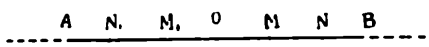


Рис. 1.

Починаючи з точки O, ми можемо посуватися вздовж простої лише у двох напрямах OB і OA. Коли один з них вважати за додатній, як це ми вже робили в алгебрі, розглядаючи від'ємні числа, то другий, протилежний, треба вважати за від'ємний.

За додатній напрям умовилися вважати той, що буде з правої руки, коли дивитися на просту AB поперек її напряму. Звідци промінь простої OB має назву додатнього проміня, а промінь OA — від'ємного.

Так само кожна точка M, що її взято на додатньому промені, має назву додатньої точки, а точка M_1, що її взято на від'ємному промені — від'ємної точки.

Кожний відтинок, що має початком точку O, коли він обмежується додатньою точкою, є додатній, а коли від'ємною точкою, є від'ємний. [OM, ON — є додатні відтинки, а OM_1, ON_1, — є від'ємні відтинки, себто вони мають від'ємну вартість].

З курсу геометрії нам відомо, що кожний відтинок простої можно виміряти яким небудь другим, наперед заданим відтинком, як одиницею міри. Таким чином, кожний відтинок OM можно відзначити *числом*, що показує, скільки разів взята нами одиниця міри вміщується в данім відтинку OM.

Отже, кожному відтинкові OM відповідає одно її лише одно число (одиниць міри), і навпаки кожному числу відповідає один і лише один певно визначений відтинок.

Наприклад: хай відтинкові OM відповідає число $+a$, тоді навпаки, кожному віддаленню $+a$ одиниць міри від точки O відповідає точка M (а разом і відтинок OM). З другого боку точки O відтинкові OM завжди відповідає один і лише один відтинок OM_1 рівний беззглядною величиною $|a|$ з відтинком OM. Цей відтинок має вимір $OM_1 = -a$.

Таким чином місце якої небудь точки на простій (осі) завжди визначається одним числом.

§ 2. Положення точки на площі.

В курсі тригонометрії вже зазначалося про те, як визначити положення точки на площі.

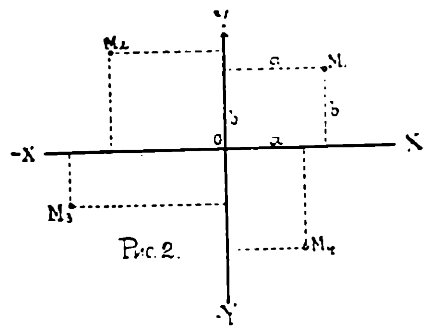


Рис. 2.

Для цього переділюємо площу на 4 частини за допомогою Декартового хреста.

Візьмім на площі дві взаємно прямові прості XX і $УУ$, що перехрещуються в точці O. Будемо називати ці прості осями координат: XX — віссю іксів, а $УУ$ — віссю ігреків. Від точки O, початку координат, на кожній з осей визначаються два напрями. Як що на осі X — ів виберемо за додатній напрям OX (згідно з умовою попереднього §), то обертаючи вісь XX проти стрілки годинника аж до самої осі $УУ$, тим самим визначимо додатній напрям на осі $УУ$ від точки O вгору.

Візьмім довільну точку площі M і з неї спустимо прями на обидві оси координат.

Тоді кожній точці площі відповідає два відтинки: один на осі X, другий на осі $У$. Кожному з цих відтинків згідно з § 1 відповідає одно й лише одно число (міри).

Таким чином, кожній точці площі відповідає тільки одна пара чисел, що визначають положення цієї точки.

Цю пару чисел називаємо значниками даної точки. Значник на осі X — називаємо абсцисою, або відтинковою даної точки, а значник на осі $У$ — ординатою або рядною, даної точки.

Значники точки M умовилися записувати так: $M\ (a, b)$.

Навпаки: коли нам відомі значники якоїсь точки $M\ (a, b)$, то відклавши їх на осях від точки O і поставивши на їх кінцях прями до осей, одержимо точку M на перехресті цих прямів. Дві прості перехрещуються лише в одній точці, а тому даній парі значників відповідає одна й лише одна точка площі. Отже, для визначених осей координат кожна пара значників цілком визначає положення точки на площі.

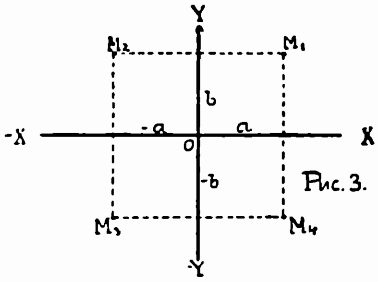


Рис. 3.

Декартів хрест поділяє площу на 4 чвертки (або квадранти).

У кожній чвертці завжди можна знайти точки (M_1, M_2, M_3, M_4), що мають однакової беззглядної величини значники, але справжня величина їх є ріжна.

Напр., точка	M_1	має	значники	$+a$	і	$+b$;	$M_1(a, b)$
»	M_2	»	»	$-a$	і	$+b$;	$M_2(-a, b)$
»	M_3	»	»	$-a$	і	$-b$;	$M_3(-a, -b)$
»	M_4	»	»	$+a$	і	$-b$;	$M_4(a, -b)$

Мнемонична схема

знаків, що їх мають значники точок площі, переділеної Декартовим хрестом.

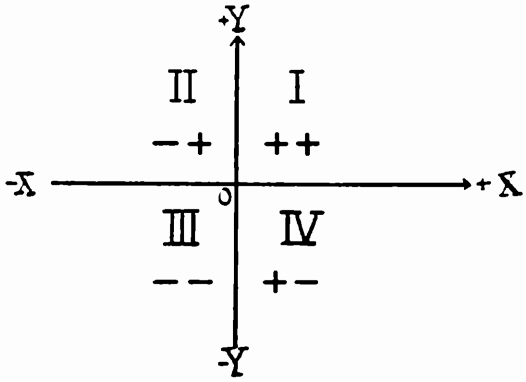


Рис. 4.

Лівий знак належить значникові x, а правий — y. Коли посуватися в напрямности проти стрілки годинника, то під час переходу з однієї чвертки до другої змінюється по черзі знак лише одного значника, а другий лишається той самий. Перший міняє знак завжди значник x.

§ 3. Положення відтинку на площі.

Коли маємо відтинок простої на площі, то перед нами стає завдання:

1) визначити мет цього відтинку на осі,

2) визначити довжину відтинку (віддалення між його крайніми точками),

3) визначити напрямність відтинку

і 4) знайти спосіб поділити відтинок в даній пропорційности, коли нам відомі лише значники кінців відтинку.

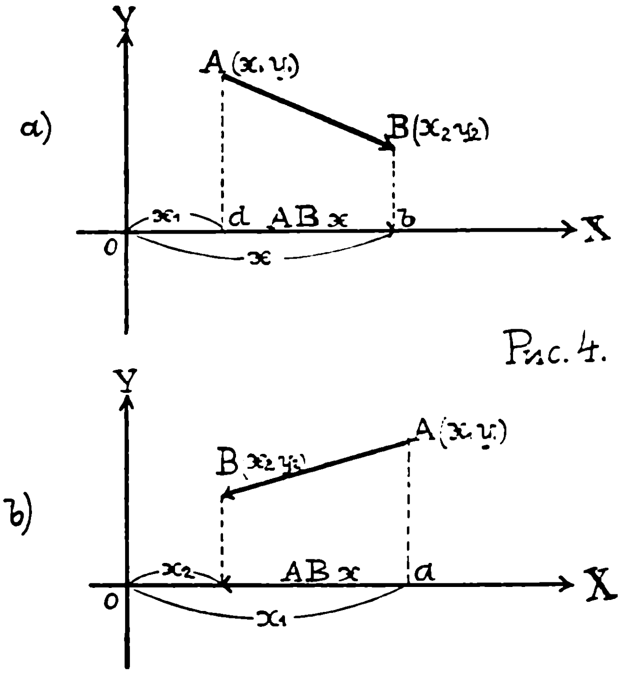


Рис. 4.

Визначення.

а) Будемо вважати, що кожний довільно взятий відтинок має власний певно визначений напрямок, що вважаємо за додатній. Таким чином, кожний відтинок можна завжди вважати за додатню величину, незалежно від напряму координатних осей.

б) За мет відтинку на вісь вважатимемо віддалення між метами на ту саму вісь кінців відтинку.

в) За напрям цього мету будемо приймати напрям від мету початку відтинку до мету його кінця.

г) Коли напрям мету однаковий з напрямом осі — то він має додатню вартість, а в противному випадку — від'ємну вартість.

[На рис. 4 *(a)* — мет AB_x — має додатню вартість, а на рис. 4 *(b)* мет AB_x має від'ємну вартість].

Мет відтинку на одну з координатних осей є ріжницею між значниками кінця й початку відтинка.

$$AB_x = \pm\, p_x = x_2 - x_1 \text{ - - - - } (1)$$

На рис. 4 *(a)* мет відтинку AB є додатній:

$$AB_x = p_x = Ob - Oa = x_2 - x_1$$

На рис. 4 *(b)* мет відтинку AB є від'ємний, а тому:

$$AB_x = -\,p_x = -\,(Oa - Ob) = -\,(x_1 - x_2) = x_2 - x_1$$

Розглянемо випадок, коли відтинок лежить у ріжних чвертках.

На рис. 5 *(a)* мет відтинку AB є додатній:

$$AB_x = +\,p_x = aO + Ob = -\,x_1 + x_2 = x_2 - x_1$$

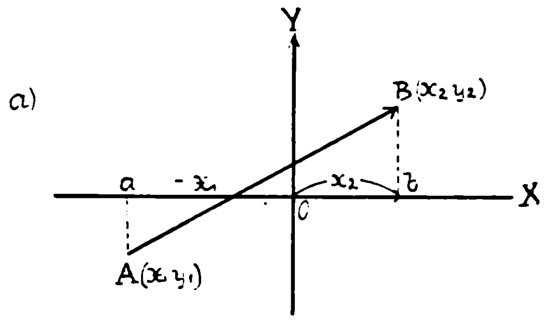
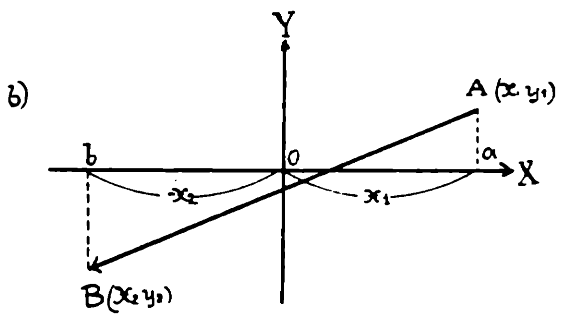


Рис. 5.



На рис. 5 *(b)* мет відтинку AB є від'ємний:

$$AB_x = -\,p_x = -\,(Ob + Oa) = -\,(-x_2 + x_1) = x_2 - x_1$$

Аналогичні міркування доводять, що й:

$$AB_y = \pm\, p_y = y_2 - y_1 \text{ - - - - } (2)$$

Квадрат відтинку є рівний із сумою квадратів його метів на осі.

Розглянемо трикутник ABM (рис. 6).

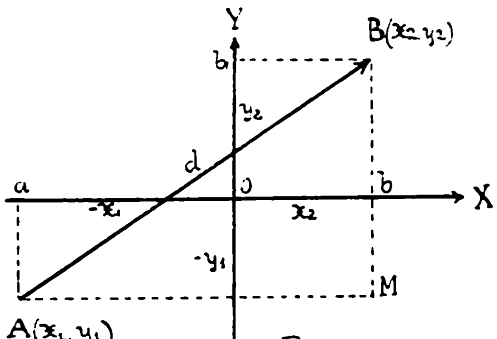


Рис.6.

Його протипрямка є $AB = d$, а прямки:

BM рівна з метом $AB_y = a_1\ b_1$, а тому:

$$BM = y_2 - y_1$$

а AM — рівна мету $AB_x = ab$, а тому:

$$AM = x_2 - x_1$$

З теореми Пітагора ми маємо:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 = AB_x{}^2 + AB_y{}^2;$$

або:
$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

а звідци:

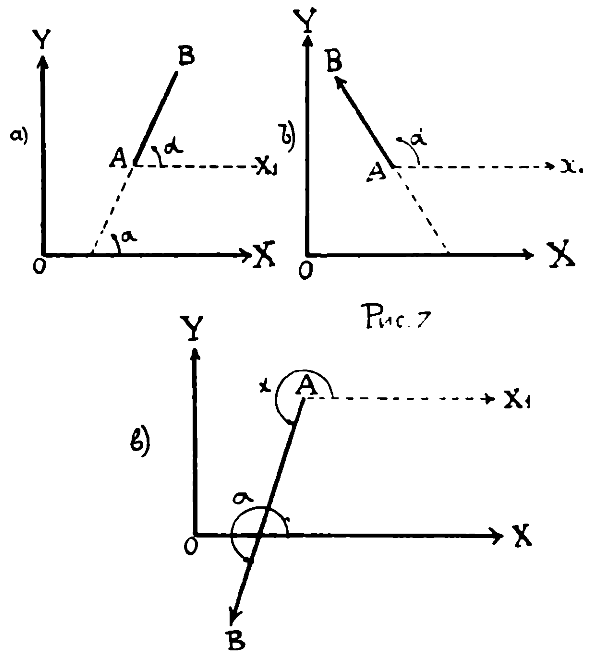
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ - - - - } (3)$$

[Знак перед радикалом + тому, що вважаємо відтинок AB завжди за додатній].

Напрямність відтинку.

За визначення напрямности відтинку вважають кут, що утворює додатній напрям відтинку з додатнім напрямом осі X — ів. Цей кут має назву *кута спаду* простої, або просто *спаду простої*. Цей кут відраховується в напрямності проти стрілки годинника.

Рис. 7 *(а)*, *(б)*, *(в)*: (кут спаду α)

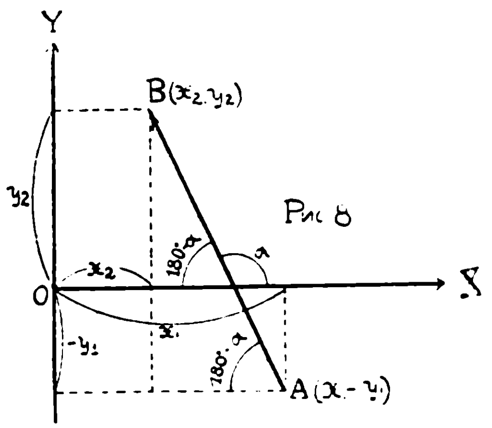


Тангенс кута спаду відтинку є рівний з відношенням мету його на вісь У—ів до мету на вісь Х—ів.

Розглянемо прямокутній трикутник BMA. (Рис. 8).

$$\text{В ньому: } tg\,(180^0 - \alpha) = \frac{BM}{AM}, \text{ але:}$$

$BM = y_2 - y_1$ (як мет AB на вісь $У$). $AM = -(x_2 - x_1)$



$$\text{Отже: } tg\,(180^0 - \alpha) = -tg\alpha = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Звідци:

$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ - - - - } (4)$$

Тангенс кута спаду має назву *кутового змінника простої*, бо від кожної зміни цього тангенса змінюється й напрям простої зглядно координатних осей.

Задача 1.

Знайти значники точки, що переділює визначений відтинок в данному відношеню $m : n = \lambda$?

1-й випадок:

Точка лежить на відтинку.

Припустімо, що відтинок визначається значниками його кінців:

$$A\,(x_1,\ y_1)\ \text{i}\ B\,(x_2,\ y_2).$$

Означимо значники точки переділу P через x і y себто $P\,(x, y)$.

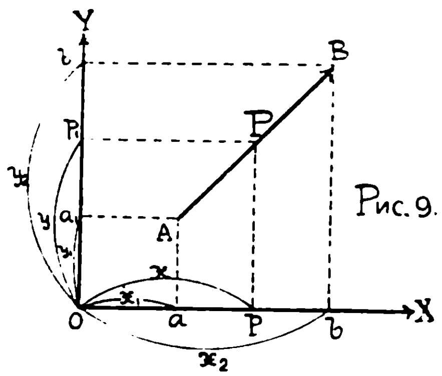


Рис. 9.

Точка P повинна переділити відтинок AB так, щоб:
$\frac{AP}{PB} = \lambda$

З геометрії відомо, що рівнобіжні перетинають відтинки нерівнобіжних на частини пропорційні, себто:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{ap}{pb} \text{ i } \frac{AP}{PB} = \frac{a_1p_1}{p_1b_1}$$

але: $$a\,p = x - x_1 \;;\; p\,b = x_2 - x$$
$$a_1p_1 = y - y_1 \;;\; p_1b_1 = y_2 - y$$

Тому: $$\frac{AP}{PB} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \;;\; \frac{AP}{PB} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda.$$

Звідци: $x - x_1 = x_2\lambda - x\lambda$, або $x(1 + \lambda) = x_1 + x_2\lambda.$

Тому: $$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda.}$$

Також: $y - y_1 = y_2\lambda - y\lambda$, або $y\,(1 + \lambda) = y_1 + y_2\lambda$

Тому: $$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda.}$$

Таким чином значниками точки P будуть:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{aligned}\right\} \text{- - - -} \quad (5)$$

Висновок. Коли точка P переполовинює відтинок AB, то відношення $\frac{AP}{PB} = \lambda = 1.$ Тоді *значники середини відтинка будуть:*

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}\right\} \text{- - - -} \quad (6)$$

2-й випадок.

Точка P лежить на продовженню відтинка AB.

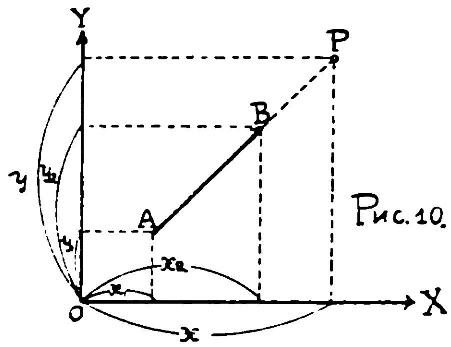


Рис. 10.

Тоді (Рис. 10): $$\lambda_1 = \frac{PA}{PB}$$

З тих самих відношень матимемо:

$$\lambda_1 = \frac{x - x_1}{x - x_2}\ ;\ \lambda_1 = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

Звідци:

$$x - x_1 = \lambda_1 x - \lambda_1 x_2$$
$$y - y_1 = \lambda_1 y - \lambda_1 y_2$$

або:

$$x = \frac{x_1 - \lambda_1 x_2}{1 - \lambda_1}$$
$$y = \frac{y_1 - \lambda_1 y_2}{1 - \lambda_1}$$

Від цих взорів ми можемо перейти до попередніх:

$$x = \frac{x_1 + \lambda\, x_2}{1 + \lambda}\ ;\ y = \frac{y_1 + \lambda\, y_2}{1 + \lambda}.$$

беручи $\lambda_1 = -\lambda$.

Це цілком можливо, бо в першому й у другому випадках, як відтинок PB, так і його мет *рв* беруться в напрямах взаемно протилежних. (Рис. 11).

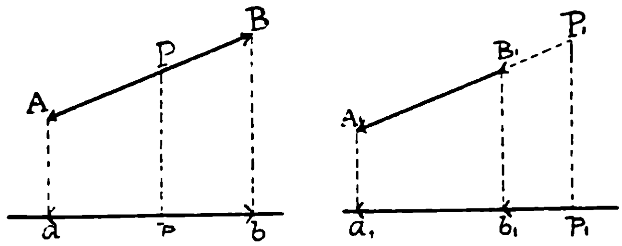


Рис. 11.

Отже: $$\frac{PB}{PA} = -\frac{P_1 B_1}{P A_1}$$

а тому $\lambda_1 = -\lambda$.

Вправи.

Ч—1. *Накреслити в прямокутній системі координат точки: $A(0,5)$; $B(+2, +3)$; $C(-6, +2)$; $D(-3, -5)$; $E(-2, +6)$; $F(+3, -5)$; $K(5,0)$; $L(-2,0)$ беручи за одиницю міри $^1/_2$ сантиметра.*

Ч—2. *Трикутник має значниками вершків: $A(3,-2)$, $B(7,4)$ і $C(10,2)$, викреслити його, взявши за одиницю міри 0,5 снт.*

Ч—3. *Теж викреслити чотирикутник, коли значники вершків його: $A(-3,-2)$; $B(2,6)$; $C(5,3)$ і $D(3,-4)$.*

Ч—4. *Знайти довжину відтинку, що його кінці мають значники: $A(2,5)$ і $B(6,1)$.*

Ч—5. *Знайти спад відтинку Ч—4.*

Ч—6. *Знайти довжину й спад відтинку: $A(0,0)$ і $B(2,-5)$.*

Ч—7. *Теж, коли значники кінців: $A(-4,-5)$ і $B(2,-1)$.*

Ч—8. *Теж, коли $A(0,5)$ і $B(-3,0)$.*

Ч—9. *Знайти віддалення точки $A(6,5)$ від початку координат.*

Ч—10. *Обчислити боки трикутника, що має значникам вершків: $A(-3,-5)$; $B(2,3)$; $C(\ \ 1,8)$.*

Ч—11. *Обчислити боки й косини чотирикутника, що має значниками вершків: $A(0,0)$; $B(4,0)$, $C(0,6)$ $D(-1,2)$.*

Ч—12. *Теж, коли $A(0,2)$, $B(7,4)$, $C(0,-5)$ і $D(-4,-1)$.*

Ч—13. *Знайти кути спаду для простих, що переходять через початок координат і точки:*

1) $(5,4)$; 2) $(-3,4)$; 3) $(3,-5)$; 4) $(-2,-4)$.

Ч—14. *Знайти значники точки, що переділює відтинок $A(2,-4)$, $B(-2,5)$ у відношенню:*

1) $\lambda = {}^2/_3$; 2) $\lambda = -{}^2/_5$; 3) $\lambda = -{}^3/_4$; 4) $\lambda = 2$,

Ч—15. *У якому відношенню точка $P(1,0)$ переділює відтинок $A(2,0)$, $B(6,0)$?*

Ч—16. *У якому відношенню точка $P(-7,9)$ переділює відтинок $A(-3,5)$, $B(5,-3)$?*

Ч—17. *У якому відношенню точка $P(4,3)$ переділює відтинок $A(6,5)$, $B(-2,-3)$?*

Ч—18. *Знайти значники середини відтинків:*

1) $A(-2,3)$ $B(6,-1)$;
2) $A(0,0)$, $B(4,-6)$.

Ч — 19. *Довести, що сума метів боків якого будь трикутника на вісь є рівна з нулем.*

Ч — 20. *Теж — для кожного многокутника.*

Задача 2.

Знайти значники центра ваги (перехрещення осередніх) трикутника, що має значники вершків: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. (Рис. 12).

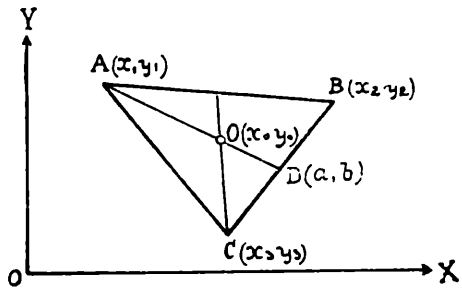


Рис. 12.

Ми знаємо, що центер ваги лежить на осередній трикутника на $^1/_3$ її довжини від основи. Себ-то центер ваги переділює кожну осередню трикутника у відношенню $\lambda = \frac{AO_1}{O_1D} = 2$.

Попереду визначимо значники кінців якоїсь осередньої, напр. AD. Значники початку її $A(x_1,y_1)$; точка-ж D (кінець осередньої) переполовинює відтинок CB, а тому значники її будуть:

$$a = \frac{x_2 + x_3}{2}\ ;\ b = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

Отже лишається розвязати задачу: переділити відтинок

$$A(x_1,y_1), D\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right) \text{ у відношенню: } \lambda = 2.$$

Тоді значники центра ваги O_1 будуть:

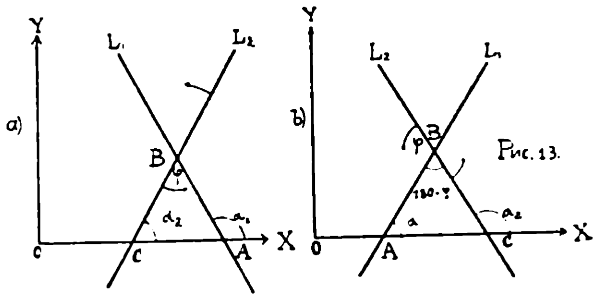
$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{x_1 + 2.\dfrac{x_2 + x_3}{2}}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_0 &= \frac{y_1 + 2.\dfrac{y_2 + y_3}{2}}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (7)$$

Отже:

Значники центру ваги трикутника є середнє аритметичне значників усіх трьох вершків цього трикутника.

§ 4. Кут між простими.

Коли маємо дві простих L_1 і L_2, що перехрещуються, то умовимося називати кутом між цими простими той кут, що відлічується від простої L_2 до простої L_1 в напрямности проти стрілки годинника. (Рис. 13).



У першому випадку (Рис. 13a) кут α_1 як зовнішній у трикутника ABC буде: $\alpha_1 = \alpha_2 + \varphi$.
(де α_1 і α_2 є кути спаду простих).

Звідци: $$\varphi = \alpha_1 - \alpha_2.$$

У другому випадку (Рис. 13b) зовнішнім кутом є α_2 й тому

$$\alpha_2 = \alpha_1 + (180^0 - \varphi)$$
$$\varphi = 180^0 + (\alpha_1 - \alpha_2).$$

Звідци:

$$tg\ \varphi = tg\ (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1\ tg\alpha_2}$$

або:

$$tg\varphi = tg[180^0 + (\alpha_1 - \alpha_2)] = tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2},$$

а тому одержуємо той самий взір. Але ми знаємо, що $tg\alpha_1 = m_1$ і $tg\alpha_2 = m_2$ є кутові змінники даних простих, тому, підставивши їх, матимемо:

$$tg\ \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \text{ - - - - } (8)$$

Взір (8) дає нам можливість обчислити кут φ між даними простими.

Коли-б прості L_1 і L_2 були рівнобіжні, то їх кути спаду були-б рівні, а тому:

$$m_1 - m_2 = 0$$

$$\text{і } tg\ \varphi = 0, \text{ себто } \varphi = 0.$$

Звідци маємо умову рівнобіжности двох простих:

$$m_1 = m_2 \quad \text{- - - -} \quad (9)$$

Дві прості рівнобіжні, коли їх кутові змінники (разом і кути спаду) є рівні.

Щоб прості L_1 і L_2 були взаємно прямові треба, щоб $\varphi = 90^0$, себто $tg\ \varphi = \infty$. Це є можливе, коли $m_1 \neq m_2$ і коли знаменатель є нуль, себто

$$1 + m_1 m_2 = 0,$$

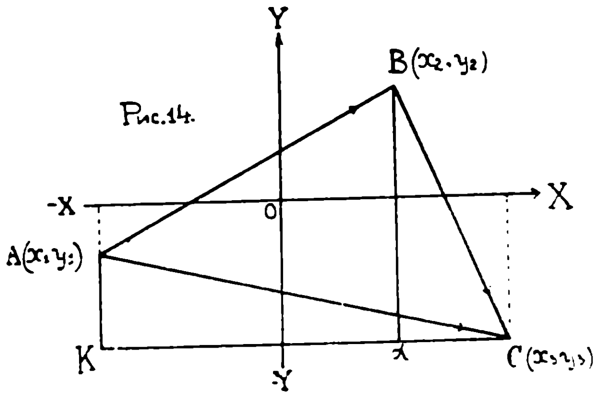
звідки $m_1 m_2 = -1$ і, нарешті,

умова прямовости простих:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{- - - -} \quad (10)$$

Дві прості взаємно прямі, коли їх кутові змінники взаємно зворотні і протилежні знаками.

§ 5. Поле трикутника й многокутника.



Знаючи значники вершків трикутника (рис. 14) легко обчислити його поле. Припустім, що ми маємо трикутник ABC з вершками: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ і $C(x_3,y_3)$.

Проводимо через найнижчий вершок трикутника (через вершок, що має значником найменшу рядну) просту KC, рівнобіжну до осі X—*ів*.

Тоді поле трикутника ABC буде сумою полів трапезу $KABL$ і трикутника CLB без поля трикутника AKC, себто:

$$S_{ABC} = S_{KABL} + S_{CLB} - S_{AKC}$$

або:

$$S_{ABC} = \frac{KA + LB}{2} KL + \frac{LC.LB}{2} - \frac{KA.KC}{2}$$

або: $$2S_{ABC} = (KA + LB).\,KL + LC.\,LB - KA.KC$$

Умовимося надалі, що кожний многокутник має визначений напрям для $n-1$ своїх боків, а останній бік матиме завжди напрям, противний послідовності напрямів инших боків. Цей бік носить назву *замкнення многокутника.*

В даному разі припустім, що боки AB і BC мають додатній напрям від A до B і від B до C, а бік AC має противний їм напрям від A до C (є замкненням).

Тоді ми бачимо, що відтинки KA, LC, KL і т. д. є відповідними метами боків Δ—ка на осі, а саме: $KA = AC_y = y_3 - y_1$; $BL = BC_y = y_3 - y_2$; $KL = AB_x = x_2 - x_1$ $LC = BC_x = x_3 - x_2$; $KC = AC_x = x_3 - x_1$.

Тому $2\,S_{ABC} = [\,(y_3 - y_1) + (y_3 - y_2)\,]\,(x_2 - x_1) +$ $+ (y_3 - y_2)\,(x_3 - x_2) - (y_3 - y_1)\,(x_3 - x_1)$,

або $2\,S_{ABC} = 2x_2y_3 - x_2y_1 - 2x_1y_3 + x_1y_2 - x_3y_2 - x_2y_3 +$ $+ x_3y_1 + x_1y_3$.

Після упорядкування цей взір має вигляд:

$$S_{ABC} = {}^1/_2\,[\,(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\,] \;\text{- - -}\; (11a).$$

Цей взір легко написати за допомогою так званої колової підставки по два: $1.\overset{\frown}{2.3}.1$, або $\boxed{(1.2);\ (2.3);\ (3.1)}$

Поле кожного многокутника можемо розглядати як суму трикутників, що на них дробиться даний многокутник косинами з якогось одного вершка.

Напр.: Поле пятикутника (Рис. 15).

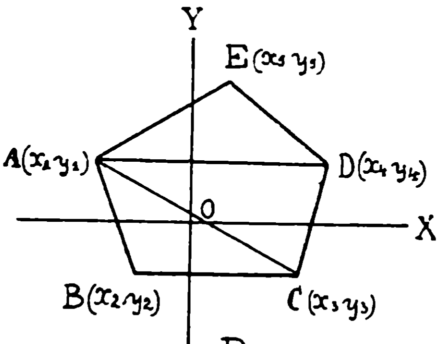


Рис.15.

$$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE}$$

$$\begin{aligned} 2S_{ABCDE} = {} & [(x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)] + \\ & + [(x_1y_3 - y_1x_3) + (x_3y_4 - y_3x_4) + (x_4y_1 - x_1y_4)] + \\ & + [(x_1y_4 - y_1x_4) + (x_4y_5 - y_4x_5) + (x_5y_1 - x_1y_5)], \end{aligned}$$

або $$\begin{aligned} 2S = {} & (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + \\ & + (x_4y_5 - x_5y_4) + (x_4y_1 - x_1y_5). \end{aligned}$$

Індекси при значниках цих сум складаються по правилу колових переставок, а саме:

1.2.3.4.5.1; або: $\boxed{(1.2);\ (2.3);\ (3.4);\ (4.5);\ (5.1).}$

Отже, коли ми умовимося символом:

$\Delta\, x_k y_{k+1}$ означати ріжницю: $(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k)$

то взір поля трикутника або многокутника можно записати:

$$S = {}^1/_2 \sum_{k=1\dots n,1} \Delta\, x_k y_{k+1} \dots (11б).$$

Висновок:

Коли-б усі дані точки лежали на одній простій, то поле многокутника було-б нуль.

Тому рівнання:

$$\sum_{k=1\ldots n,1} \Delta\, x_k y_{k+1} = O \ldots (11в)$$

є умовою, що шерег даних точок лежить на одній простій.*)

Вправи.

Ч — 21. *Обчислити поле трикутника, коли:*

1) A(3, — 2), B(— 4,1), C(— 8,5);
2) A(3,0), B(0,2), C(4,5).

Ч — 22. *Довести, що точки: A(0, — 4), B(2,2), C(—1, — 7) лежать на одній простій.*

Ч — 23. *Обчислити поле чотирикутника: (— 4,0), (1, — 3), (5,1), (0,6).*

***) Зауваження.**

I. Знак вартости поля многокутника.

Обчисливши поле многокутника (також і трикутника), можемо одержати вартість поля від'ємну. Причиною цьому є напрям, що його надаємо бокам многокутника зглядно координатних осей. Коли, напр., обчислюючи поле трикутника, візьмемо за напрям боків його AB, BC і AC і одержимо вартість поля $S = + a$, то змінивши напрям боків цього трикутника, себто взявши, напр., напрям AC, CB і AB, після обчислення його поля, одержимо вартість $S = - a$.

З огляду на це, умовимося вартість поля кожної фігури вважати за додатню, а тому будемо завжди брати лише абсолютну вартість висліду обчислення.

II. Практичний спосіб для обчислення поля многокутника.

Коли нам відомі значники вершків якогось многокутника (або трикутника), напр.: $A(x_1,y_1)$; $B(x_2,y_2)$; $C(x_3,y_3)$; $D(x_4,y_4)$, то виписуємо їх у шерег в напрямі їх боків і дописуємо наприкінці значники першого вершка; напр.: (x_1,y_1); (x_2,y_2); (x_3,y_3); (x_4,y_4); (x_1,y_1).

Щоб обчислити подвійну вартість поля многокутника, сумуємо ріжниці здобутків крайніх і середніх значників кожної пари даних вершків.

Напр.:

$$2\,S_{ABC} = (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_4 - y_3x_4) + (x_4y_1 - y_4x_1).$$

Ч — 24. *Дано дві точки $A(0,5)$, $B(3,0)$.*

Знайти третю точку C, що має рядною 2 і лежить на простій AB.

Ч — 25. *Довести, що дані три точки:*

1) $A(7,7)$, $B(1,4)$, $C(-3,2)$;
2) $K(3,-4)$, $M(0,5)$, $N(-1,8)$.

лежать на простій.

Ч — 26. *Обчислити поле:*

1) *чотирикутника з вершками:*

$$A(1,1),\ B(2,3),\ C(3,3),\ D(4,1);$$

2) *пятикутника з вершками:*

$A(2,3)$, $B(-5,8)$, $C(11,-4)$, $D(9,12)$, $E(14,7)$.

Ч — 27. *Довести, що коли чотирикутник з вершками:*

$$A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3),\ D(x_4,y_4)$$

є рівнобіжник, то:

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4;\ y_1 + y_3 = y_2 + y_4.$$

Ч — 28. *Довести, що чотирикутники:*

1) $(1,6)$, $(-5,-4)$, $(0,-7)$, $(6,3)$;
2) $(4,1)$, $(6,7)$, $(0,5)$, $(-2,-1)$;
3) $(3,5)$, $(-5,1)$, $(-1,-2)$, $(7,2)$;
4) $(4,0)$, $(1,7)$, $(-6,4)$, $(-3,-3)$

є рівнобіжники (обчислити, які саме).

Ч — 29. *Довести:*

1) *Що трикутник: $(8,8)$, $(5,3)$, $(4,7)$ є рівнораменний, а*

2) *трикутник: $(2,11)$, $(-1,6)$, $(-2,10)$ є прямокутній.*

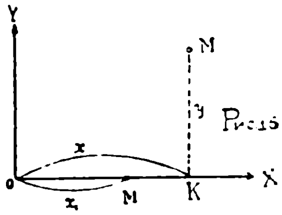
РОЗДІЛ I.

Проста лінія.

§ 6. Рівнання осей.

Ми розглядали досі положення точки на простій і умовилися визначати це положення віддаленням її від другої наперед загаданої точки, прийнятої за початок рахунку (§ 1).

Розглянемо тепер той випадок, коли точка лежить на одній з осей координат. (Напр.: на вісі *X—ів*) й означимо її віддалення від початку координат, виміряне даною лінійною мірою, через x. Коли ми уявимо цю точку M попереду в початку осей (себто при $x = o$), а потім примусимо її посуватися чи в один, чи у другий бік від точки O, то x буде набірати всі можливі вартості від $-\infty$ до $+\infty$, але під час цього слід точки M буде очеркувати просту, що є віссю *X—ів*.



Постараємося знайти таку властивість руху точки, якаб стала прикметою того, що точка у своїм русі утворює дану просту.

Ми вже знаємо, що положення кожної точки M на площі визначається двома значниками x і y (де x є віддалення по осі *X—ів* рядної точки KM_1 від початку координат O, а y — віддалення точки M_1 від осі *X—ів*).

Коли-б ця точка M_1 лежала на осі *X—ів*, то віддалення її від осі *X—ів* було-б нуль і тому її значник $y = o$.

Де б точка M не лежала на осі *X—ів*, завжди вона буде мати значник $y = o$, себто $M(x,o)$.

Отже рівняння: $y = o$ є прикметою того, що довільна точка М лежить на осі Х—ів.

Перебіг всіх можливих вартостей значника x точки M дасть нам слід від руху точки M вздовж осі X—*ів*, себто просту, що є власне віссю X—*ів*, а тому рівняння:

$$y = o \; \ldots\ldots \; (12)$$

є рівнанням осі X—*ів*.

Аналогичними міркуваннями дойдемо до того, що рівняння:

$$x = o \; \ldots\ldots \; (13)$$

є рівнанням осі $У$—*ів*

(і точка, що має значниками $M(o.y)$ завжди лежить на осі $У$—*ів*).

§ 7. Рівнання простих, рівнобіжних до осей.

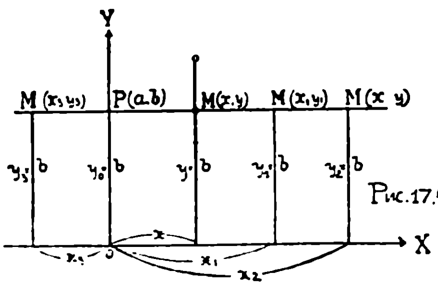


Рис. 17.а

Візьмім якусь точку $M(x,y)$ на площі й будемо спостерігати її рух в напрямі, рівнобіжнім, напр., до осі X—*ів*. Ця точка утворить просту, рівнобіжну до цієї осі X—*ів*.

В якому-б із своїх положень M_1, M_2, M_3 ця точка не була, вона завжди матиме сталу вартість своєї рядної $y = b$ (бо рівнобіжна є геометричний осередок точок, рівновіддалених від даної простої), тим часом як значник x для кожного положення точки M на простій L матиме ріжні вартости, властиві лише даному її положенню. (Цих вартостей безліч).

Віддалення простої L від осі X—*ів*, $y = b$, можно заступити відтинком OP (також рівним b).

Відтинок OP має назву відтинку осі $У$—*ів*, себто відтинку, що утворює на осі $У$—*ів* дана проста L своїм перехрестям $P(o,b)$ з нею. Коли L є рівнобіжна до осі X—*ів*, то відтинок осі $У$—*ів* є рівний з відтинками рядних (значниками y) всіх точок, що лежать на простій L.

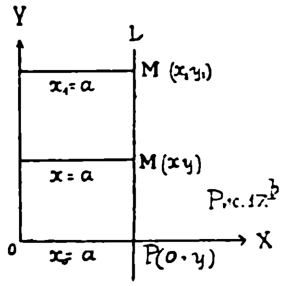
Коли ми візьмемо якусь довільну точку N_1 чи N_2, що не лежать на простій L, то їх рядні $y' = mN_1$, або $y'' = mN_2$

будуть завжди чи менші чи більші від $y = b$ (себто: $y' < b < y''$). Отже, рівнання $y = b$ є конечною й вистарчальною прикметою того, що дана точка при всяких вартостях значника x не сходить із простої L, рівнобіжної до осі X—*ів*, а тому рівнання:

$$y = b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

(де b — є відтинок осі $У$ — *ів)* **можна вважати за рівнання простої, рівнобіжної до осі Х—ів.**

Аналогичними міркуваннями доведемо (рис. 17б), що рівнання: $x = a$ є конечною й вистарчальною прикметою того, що дана точка при всяких вартостях значника y, не сходить з простої L, рівнобіжної до осі $У$—*ів*.

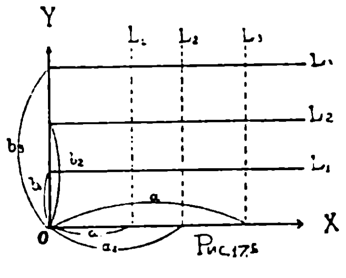


Тому рівнання:

$$x = a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

(де a — є відтинок осі X — *ів)* **є рівнанням простої, рівнобіжної до осі У — ів.**

Коли в рівнанню $y = b$ (чи $x = a$) будемо надавати сталій величині b довільні вартости b_1, b_2 і т. д. $(a_1, a_2 \ldots)$, то кожній з цих вартостей відповідатиме окрема проста $L_1, L_2 \ldots$, рівнобіжна до осі X—*ів* (чи осі $У$ — *ів)*, що відтинатиме від осі $У$ — *ів* $(X$ — *ів)* відтинки, відповідно рівні b_1, b_2 і т. д.



Ці прості, як рівнобіжні до одної й самої простої — осі X — *ів*, будуть також рівнобіжні між собою.

Отже, кожна зміна вартости вільного члена рівнання простої, рівнобіжної до осі координат, утворює нову просту, рівнобіжну до першої. В окремому випадку, коли цей вільний член приймає вартість нуль, проста стає відповідною віссю, що й показує саме рівнання.

Справді, коли в рівнанню $y = b$ візьмемо $b = o$, то рівнання $y = o$ визначає вісь X — *ів;* те саме й для рівнання $x = a$.

Вправи.

Ч — 30. *Який образ утворює точка* $A(x,a)$, *де* x *може одержувати всі можливі вартости від* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Визначити загальну прикмету цих точок, а також подати графично образ сукупности точок A, *що мають цю загальну прикмету.*

Ч — 30а. *Теж для точок:* $B(-2{,}5,y)$; $C(o,y)$; $D(x,-3)$.

Ч — 31. *Накреслити прості, що визначаються рівняннями:* $y=6$; $x=-0{,}5$; $y=o$; $x=3$; $y=-3{,}5$.

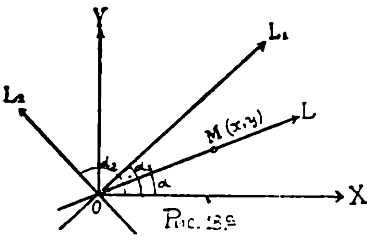
Ч — 32. *Рівнання простої* $y=3$.

Написати рівнання рівнобіжних до неї простих, віддалених від даної на 5;2;8 (розглянути віддалення по обидва боки простої).

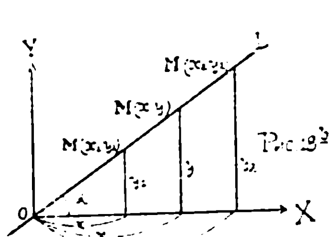
Ч — 33. *Знайти точку перехрестя простих:* $x=a$, $y=в$; $x=2{,}5$, $y=-4$.

§ 8. Рівнання простої, що переходить через початок координатних осей.

Будемо звати точку, що її слід утворює просту, творчою точкою даної простої.



Хай якась творча точка $M(x,y)$, посуваючись од початку O координат (в той чи инший бік), утворює якусь просту L. Положення цієї простої зглядно осей XY залежить од величини кута спаду a, що утворює ця проста з віссю X — *ів;* ріжним кутам спаду: a, a_1, a_2... відповідають ріжні положення простої L, L_1, L_2....



Візьмім шерег окремих положень творчої точки M на простій L. Напр.: $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ і т. д. (Рис 18b). Ми бачимо, що значники кожної з цих точок завжди утворюють прямокутній трикутник з гострим кутом a, а тому для кожного з положень точки M на простій L завжди існуватиме рівність: $\dfrac{y}{x}=tga$,

Треба, зауважити що для даної простої $L: tga = const$

(так для точки $M_1 : \frac{y_1}{x_1} = tg\alpha = m;$ для точки $M_2 : \frac{y_2}{x_2} =$
$= tg\alpha = m$ і т. д.).

Отже, в кожному окремому положенню творчої точки M на простій L відношення рядної її до відповідної відтинкової є величина стала, рівна з тангенсом кута спаду простої на вісь X — *ів*.

Ця стала величина (тангенс кута спаду простої на вісь X — *ів*), має назву кутового змінника даної простої.

Коли ми візьмемо якісь точки $N_1(x',y')$ і $N_2(x'',y'')$, що не лежать на простій L (рис. 19), то через початок координат і відповідні точки N_1 і N_2 можна провести прості L_1 і L_2, що утворять свої кути спаду α_1 і α_2 не рівні з кутом α, або більші, або менші від нього.

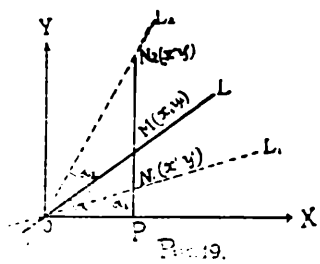


Рис. 19.

Тому, з відповідних трикутників: 1) $\triangle\, N_1OP$ і 2) $\triangle\, N_2OP$ матимемо:

$$\frac{y'}{x'} = tg\alpha_1 \, ; \frac{y''}{x''} = tg\alpha_2$$

Але $\alpha_1 \neq \alpha;$ $\alpha_2 \neq \alpha$ (α_1 і α_2 також не рівні $180^0 + \alpha$, бо тоді-б точки N_1 і N_2 лежали на простій L, властиво на промені її, спрямованому у від'ємний бік від точки O).

Тому:

$$\frac{y'}{x'} \neq \frac{y}{x} \text{ і } \frac{y''}{x''} \neq \frac{y}{x}$$

Таким чином рівність $\frac{y}{x} = m(const)$ не є властивою для значників точок, що не лежать на даній простій L.

А тому рівнання $\frac{y}{x} = m$, або $y = mx$ **є конечною й вистарчальною прикметою того, що при всіх можливих вартостях своїх значників x і y дана точка M лежить на простій, що переходить через початок координат і утворює кут α, спаду на вісь X — *ів* (тангенс цього куту має сталу величину m).**

Коли-ж, перебігом всіх можливих вартостей своїх значників x і y, творча точка M утворює дану просту L, то рівнання:

$$y = mx \;\ldots\ldots\; (16)$$

(де $m = tg\alpha$) **є рівнанням** цієї **простої, що переходить через початок визначених осей.**

Даючи кутовому змінникові m довільні вартости від $-\infty$ до $+\infty$, одержимо жмуток простих, що переходять через (мають своїм вузлом) початок координат (Рис. 18а).

Кожній окремій вартости змінника m буде відповідати одна й лише одна проста цього жмутка.

1) Коли m має додатню вартість, то кут спаду простої є гострий (Рис. 18а, прості L і L_1); коли-ж m від'ємне, то кут спаду є тупий (Рис. 20).

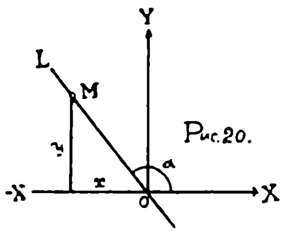


Рис. 20.

2) Коли $m = o$ (тоді $tg\alpha = o;\ \alpha = o$), то рівнання приймає вигляд $y = o.x$, або $y = o$. А це є рівнання осі X — *ів* (справді при $\alpha = o$ проста L пристає до осі X — *ів*).

3) Коли $m = \infty$ ($tg\alpha = \infty;\ \alpha = 90^0$), то визначивши з рівнання $y = mx$ невідоме x, матимемо $x = \dfrac{y}{m}$, а при $m = \infty$, буде $x = \dfrac{y}{\infty} = o$; таким чином одержуємо рівнання осі $У$ — *ів* (і справді при $\alpha = 90^0$ проста L пристає до осі $У$ — *ів*).

Вправи.

Ч — 34. *Написати рівнання простої, що переходить через початок координат і має кути спаду:*

1) $\alpha = 45^0$ 2) $\alpha = 60^0$ 3) $\alpha = 30^0$.

Ч — 35. *Знайти кут спаду на вісь X-ів простої, що має рівнання:*

1) $y = -\dfrac{3}{5}x$

2) $\dfrac{y}{x} = -1$

Ч — 36. *Яке рівняння має проста, що переходить через початок координат і утворює з віссю X — ів кут (спаду): 1) 120^0, 2) 150^0, 3) 135^0, 4) 180^0?*

Ч — 37. *1) Довести, що точки: $A(1,3)$, $B(-5,-15)$, $C(0,0)$ лежать на простій: $y = 3x$.*

2) Які з точок $(4,2)$, $(1,-5)$, $(3,3)$, $(-2,10)$ лежать на простій: $y = -5x$.?

Ч — 38. *Накреслити прості:*

$$y = 2x; \quad y = -3x; \quad 2y = -x.$$

Ч — 39. *Теж накреслити прості:*

$$y - x = o; \quad x + y = o; \quad y = \sqrt{3}\,x; \quad 2y = x.$$

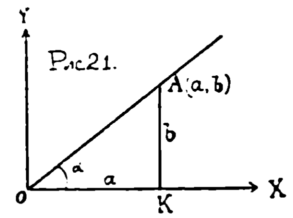
Задача 3.

Написати рівняння простої, що переходить через початок координат і точку $A(a,b)$.

Рівняння кожної простої, що проходить через початок координат, є

$$y = mx \ldots\ldots (I)$$

але точка A(з умови) лежить на цій простій, а тому її значники мусять обертати це рівнання (I) в тотожність, себто:



$$b = ma \quad (II)$$

Це можна одержати безпосередньо з $\triangle$ KAO (рис. 21): $b = a tg\alpha$; $b = ma$. Поділивши почленно рівність (I) на (II), матимемо:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}, \text{ або } y = \frac{b}{a}\,x.$$

Ч — 40. *Написати рівняння простої, що переходить через початок координат і точку: 1) $A(-8,12)$; 2) $B(5,4)$; 3) $C(3,3)$; 4) $D(2,0)$; 5) $E(-4,8)$.*

Ч — 41. *Довести, що рівняння:*

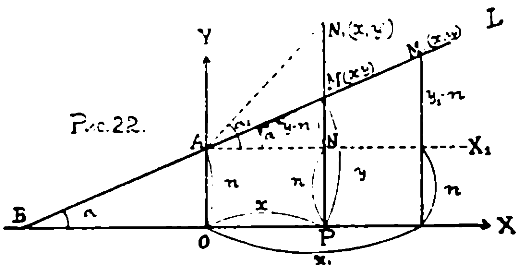
$$\frac{2xy - y}{2xy - 1} = \frac{2x}{2x + 1} \quad і \quad \frac{2x + 6y - 5}{9y - 5} = 1$$

є рівняннями простих, що переходять через початок координат і накреслити їх.

§ 9. Загальне рівняння кожної простої.

Припустім, що нам дано якусь просту L, що має кут спаду на вісь X — *ів* $\sphericalangle\ a$ і творить на осі $У$ — *ів* відтинок n.

Рис. 22.



Через точку A перехрестя простої L з віссю $У$ — *ів* поведемо просту $AX_1 \| OX$. Тоді утвориться кут: $LAX_1 = \sphericalangle B = a$ (є кутом спаду простої L на вісь X — *ів*).

Деб ми не брали точку M на простій L, то завжди значники її утворюють прямокутний трикутник MAN з гострим кутом a.

Отже:
$$\frac{MN}{AN} = tg\, a = m\ (const);$$

але
$$MN = MP - NP = y - n;\ \ AN = x$$

тому
$$\frac{y - n}{x} = tg\, a = m\ \ (const)$$

[для якоїсь точки M_1 на простій L буде: $\frac{y_1 - n}{x_1} = tga = m$].

Одно слово, при кожному окремому положенню творчої точки M на простій L відношення ріжниці між рядною й відтинком осі $У$ — *ів* до відповідної відтинкової є величина стала, рівна з тангенсом кута спаду простої на вісь X — *ів* (себто з кутовим змінником цієї простої).

Кожній точці $N(x', y')$, що не лежить на простій L, відповідає инший кут спаду $a_1 \neq a$, а тому й відношення $\frac{y' - n}{x'} \neq tga$.

Таким чином, рівність $\frac{y - n}{x} = m$ *(const)* не є властивою для значників точок, що не лежать на даній простій L.

А тому рівнання:

$$\frac{y - n}{x} = m, \text{ або } y = mx + n$$

є конечною й вистарчальною прикметою того, що, при всіх можливих вартостях своїх значників x і y, дана точка M лежить на простій, що має кут спаду на вісь X — *ів*: $a = \operatorname{arctg} m$ і відтинає від осі $У$ — *ів* відтинок $y = n$.

Коли-ж перебігом всіх можливих вартостей своїх значників x, y творча точка M утворює дану просту L, то рівнання:

$$y = mx + n \;\ldots\ldots\; (17)$$

(де $m = tga$) буде рівнанням простої в довільному положенню зглядно координатних осей.

Це загальне рівнання простої має назву **основного, або каноничного рівнання простої на площі**.

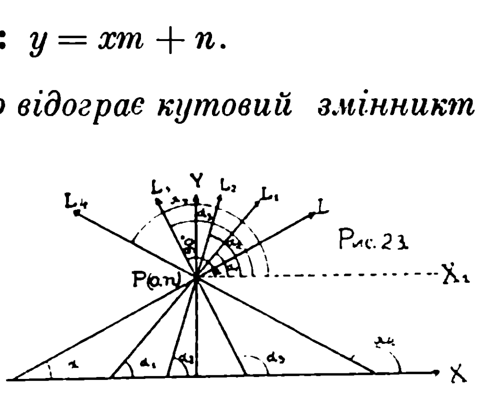
Примітка: В деяких випадках можна зустрінути рівнання простої вигляду: $x = m_1 y + n_1$.

Очевидно, що таке рівнання визначає просту, що має кут спаду на вісь $У$—*ів*, $\beta = \operatorname{arc\,tg} m_1$ і відтинає від осі X — *ів* відтинок n_1.

Аналіза рівнання: $y = xm + n$.

I. Розгляньмо, яку ролю в рівнанню відограє кутовий змінникт.

Коли почнемо довільно змінювати вартости кутового змінника m, то разом будуть змінюватися і вартости кутів спаду простої L *(бо $m = tga$)* В цьому разі проста L буде.



обертатися навколо точки $P(o,n)$, бо ми залишаємо вартість відтинку осі $У$ — *ів* сталою $= n$. Під час цього кожній окремій вартости змінника m_k відповідатиме одна й лише одна проста L_k.

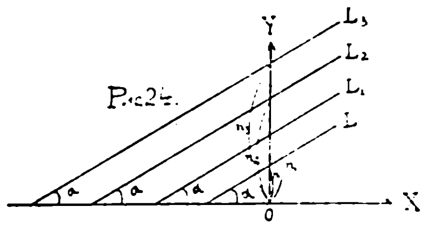
Коли-ж проста L в якомусь зі своїх окремих положень, напр.: L_3, стане прямою до первісного положення L, тоді матимемо $\sphericalangle\, a_3 = 90^0 + a$, а через те: $m_3 = tga_3 = tg\ (90^0 + a)$;

але $$tg\ (90^0 + a) = - ctga = - \frac{1}{tga}$$

А тому $$m_3 = - \frac{1}{tga} = - \frac{1}{m}:$$

Ми одержали умову прямовости простих, вже подану в § 4, взір (10).

II. Роля вільного члена рівняння простої.



Коли ми при сталій вартости змінника m, будемо довільно змінювати вартости вільного члена n (Рис. 24), то одержимо ряд простих, рівнобіжних одна до одної, бо кут спаду їх на вісь X—*ів* буде однаковий (тому що $m = const$).

Отже, дві прості є рівнобіжні, коли їх рівняння (вигляду 17) відріжняються лише вільними членами.

Таким чином, шерег простих, що мають рівняння:

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + n_1 \\ y = mx + n_2 \\ y = mx + n_3 \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad \dots . \ (17a)$$

є снопом рівнобіжних.

Числовий приклад:

Рівняння: $$\left.\begin{array}{l} y = 4x + 2 \\ y = 4x + 7 \\ y = 4x - 3 \\ \text{і т. д.} \end{array}\right\}$$ є рівняння снопа рівнобіжних.

Доведене зараз твердження цілковито відповідає умові рівнобіжности, що її виведено в § 4 (взір 9), а саме:

Дві прості, що мають однакові кутові змінники $(m_1 = m)$, *є рівнобіжні.*

§ 10. Основні задачі на просту.

Задача 4.

Написати рівнання простої, що проходить через загадану точку $A(a,b)$.

Рівнання кожної простої є: $y = mx + n$

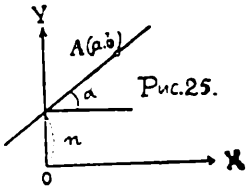


Рис.25.

(де $m = tg\alpha$, кута спаду простої на вісь X — *ів*, а n — є відтинок осі $У$ — *ів* утворений перехрестям її з даною простою.)

Як що проста переходить через точку A, то значники цієї точкибудуть розвязками рівнання даної простої, бо инакше точка A не лежала-б на ній), а тому:

$$y = mx + n \quad (1)$$

обертається в тотожність:

$$b = ma + n \quad (2).$$

Відлічуючи рівність *(2)* від рівности *(1)* матимемо:

$$y - b = m(x - a)$$

Прiмiтка: В загальному випадку умовились означати значники точки A через x_1, y_1, а тому рівнання буде мати вигляд:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

Геометричний довід.

Візьмім визначні осі $XУ$ і якусь точку $A(a,b)$ (Рис. 26).

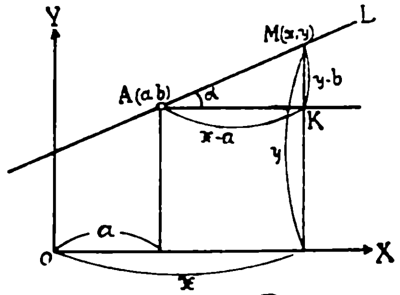


Рис.26.

Через цю точку поведемо довільну просту L і на ній візьмемо якусь точку M з неозначеними значниками x і y. Повівши рядні її просту $AK \parallel OX$, матимемо трикутник MAK, де $AK = AM^x = x - a$; $MK = AM_y = y - b$. Означаємо кут спаду простої L на вісь x-ів через α, і тоді з трикутника AMK, маємо :

$$y - b = (x - a)\, tg\alpha.$$

Але $tg\alpha$ є кутовий змінник простої $L: tg\alpha = m$,
тому: $y - b = m(x - a)$.

Це і є рівнання простої L, що переходить через точку A, бо воно встановлює залежність між значниками довільної точки на цій простій і кутом спаду її на вісь X-ів.

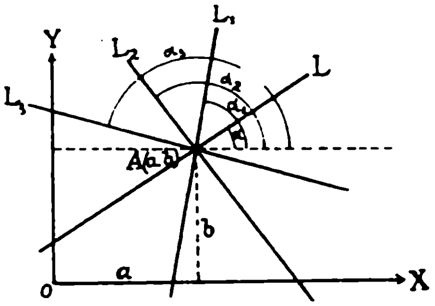


Рис. 27.

Аналіза.

Очевидно, що через точку $A(a,b)$ можно повести безліч простих.

Ми можемо кутовому змінникові m давати безліч довільних вартостей і тим самим одержати безліч простих, що переходитимуть через точку A.

Задача 5.

Написати рівнання простої, що переходить через 2 загадані точки: $A(a,b)$ **і** $B(c,\partial)$.

Напишимо попереду рівнання простої, що переходить через точку $A(a,b)$. На підставі попередньої задачі маємо:

$$y - b = m(x - a) \quad (1).$$

Але ця ж проста переходить і через точку $B(c,\partial)$, а тому значники її мусять обертати рівнання (1) в тотожність:

$$\partial - b = m(c - a).$$

Звідци кутовий змінник:

$$m = \frac{\partial - b}{c - a}$$

Вставивши вартість m у рівнання (1), одержуємо:

$$y - b = \frac{\partial - b}{c - a}(x - a)$$

В загальному випадкові, коли $A(x_1 y_1)$, $B(x_2 y_2)$, матимемо рівнання простої, що переходить через 2 загадані точки

такого вигляду: $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \ldots \quad (19)$$

Цьому рівнанню можна дати ще й инший вигляд, дуже легкий для пам'яти, а саме:

написавши рівнання (19) так:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

складаемо похідну пропорцію:

$$\frac{(y-y_1)-(y_2-y_1)}{y-y_1}=\frac{(x-x_1)-(x_2-x_1)}{x-x_1},$$

або:

$$\frac{y-y_2}{y-y_1}=\frac{x-x_2}{x-x_1};$$

Звідци:

$$\frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{x-x_2}{y-y_2} \quad .\ .\ .\ .\ (19\ а)$$

Геометричний довід.

Візьмім осі координат XY і дані точки $A(x_1 y_2)$ і $B(x_2 y_2)$.

Поведемо через ці дві точки просту L і візьмемо на ній довільну точку $M(x, y)$

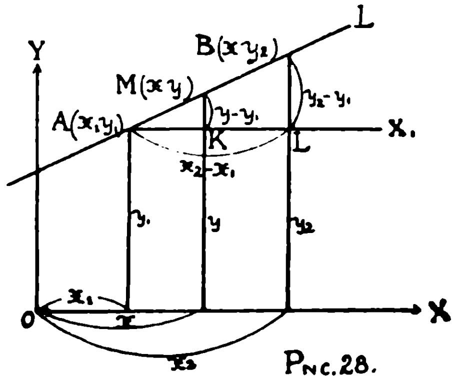


Рис. 28.

Спустивши з усіх точок рядні і повівши просту $AX_1 \parallel OX$, матимемо зі схожости трикутників AKM і ALB, що:

$$\frac{KM}{BL}=\frac{AK}{AL};\ \text{або}\ KM=\frac{BL}{AL}\cdot AK$$

Але: $KM = (= AM_y) = y-y_1$;
$BL (= MB_y) = y_2-y_1$;
$AK (= AM_x) = x-x_1$;
$AL (= AB_x) = x_2-x_1$.

Тому, підставивши вартости: KM, BL..., матимемо:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Це рівнання встановлює залежність між значниками кожної точки на простій L і тому є її рівнанням. В цьому рівнанню кутовий змінник $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ є величина стала, що й мусить бути, бо дві точки цілковито визначають просту, тоб-то така проста є одна.

Висновок.

Три точки лежать на простій, коли вони обертають у тотожність рівнання (19), (себто рівнання простої, що переходить через дві, загадані з тих трьох, точки).

Справді, коли дано три точки: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ і $C(x_3y_3)$, то рівнання простої, що переходить через точки A і B буде:

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=\frac{x-x_1}{x-x_2} \quad \ldots . \quad (19)$$

Як що-ж і точка C лежить на цій самій простій, то її значники мусять задовольняти рівнання (19) (себто бути його розвязками) а тому:

$$\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} \quad \ldots . \quad (20)$$

є тотожність.*)

Задача 6.

Дано просту $y=kx+l$ (де k і l є дані сталі величини); провести через точку $A(a,b)$ рівнобіжну до цієї простої.

Ми вже знаємо, що кожна проста L, що проходить через точку $A(a,b)$, має рівнання:

$$y-b=m(x-a).$$

---

*) Ця умова простоположности трьох точок не є нова. Вона є відмінною формою загальної умови (11), коли обмежитися лише трьома точками, а саме:

$$\sum_{1\ldots n,1} \Delta\, x_ky_{k+1}=0$$

Пояснимо це:

Приводимо до спільного знаменателя рівнання (20):

$$\underline{x_3y_3}-x_2y_3-x_3y_1+x_2y_1=\underline{x_3y_3}-x_1y_3-x_3y_2+x_1y_2$$

або:

$$\underline{\underline{x_2y_3}}+\underline{\underline{\underline{x_3y_1}}}-\underline{x_2y_1}-\underline{\underline{\underline{x_1y_3}}}-\underline{\underline{x_3y_2}}+\underline{x_1y_2}=0$$

Це можна написати так:

$$(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)=0\,;$$

але ріжницю $(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k)$ ми умовились означити через $\Delta\, x_ky_{k+1}$, а тому наша рівність матиме вигляд:

$$\sum_{k=1,2,3,1} \Delta\, x_ky_{k+1}=0$$

як і взір (11).

Таких простих буде безліч, в залежності від змін вартостей кутового змінника m (рис. 27), тому треба дібрати таку вартість змінника m, щоб ця проста L була рівнобіжна до даної. З умови рівнобіжности двох простих (взір 9), знаємо, що такі прості повинні мати однакові кутові змінники, а тому $m = \kappa$.

Отже, рівнання простої, що переходить через точку $A(a,b)$ рівнобіжно до простої $y = \kappa x + l$, буде:

$$y - b = \kappa(x - a) \quad \ldots . \quad (21)$$

або визначаючи y, матимемо:

$$y = \kappa x + (b - a\kappa) \quad \ldots . \quad (21a).$$

Щоб написати рівнання простої, що переходить через загадану точку $A(a,b)$ рівнобіжно до даної простої $y = \kappa x + l$, досить змінити в рівнанню цієї простої вільний член на ріжницю рядної даної точки без здобутку її видтинкової на кутовий змінник.

Приклад:

Написати рівнання простої, що переходить через точку $A(4,5)$ рівнобіжно до простої: $y = 3x + 2$.

Новий вільний член буде: $b - a\kappa = 5 - 4.3 = -7$, а тому рівнання простої L буде:

$$y = 3x - 7.$$

Задача 7.

Написати рівнання простої, що переходить через точку $A(a,b)$ прямово до даної простої $y = \kappa x + l$.

[Коли точка $A(a,b)$ лежить на даній простій, то вживаемо такого вислову: написати рівнання пряму, поставленого до простої $y = kx + l$ в точці A (a,b); коли-ж точка лежить по-за простою, то кажемо: написати рівнання пряму, спущеного на просту $y = kx + l$ з точки $A(a,b)$].

Рівнання кожної простої L, що переходить через точку $A(a,b)$. буде:

$$y - b = m(x - a),$$

Таких простих буде безліч, в залежності від змін вартости кутового змінника m. Нам, отже, треба дібрати таку вартість цього змінника, щоб проста L була пряма до даної.

З умови прямовости простих знаємо, що кутовий змінник простої, прямої до даної, є рівний *з оберненою величиною* кутового змінника даної простої, взятою *з противним знаком* (взір. 10) себто:

$$m = -\frac{1}{k}$$

Тому рівнання простої L, що переходить через точку $A(a,b)$ *прямово* до даної простої $y = kx + l$, буде:

$$y - b = -\frac{1}{k}(x - a) \quad \ldots . \quad (22),$$

або, визначаючи y, матимемо другий вигляд цього рівнання:

$$y = -\frac{1}{k}x + \left(b + \frac{a}{k}\right) \quad \ldots . \quad (22а)$$

Щоб одержати рівнання простої, що переходить через точку $A(a,b)$ і є пряма до даної простої $y = kx + l$, треба в рівнанню даної простої:

1) кутовий змінник змінити на обернену величину його, взяту з протилежним знаком;

2) вільний член змінити на суму рядної даної точки з її відтинковою, поділеною на кутового змінника рівнання даної простої.

Приклад.

Дано просту: $y = 3x + 2$.

Написати до неї рівнання пряму, спущеного з точки $A(6,5)$.

Змінник буде: $-\frac{1}{3}$

Вільний член: $b + \frac{a}{k} = 5 + \frac{6}{3} = 7$.

Тому рівнання пряму:

$$y = -\frac{x}{3} + 7.$$

§ 11. Алгебричне рівнання простої.

Кожне алгебричне рівнання першого ступеня з двома невідомими визначає певну просту лінію.

(Инакше: кожне алгебричне рівнання першого ступеня з двома невідомими можна завжди графично з'інтерпретувати, як певно визначену просту лінію на площі).

Візьмім загальну форму такого рівнання:

$$Ax + By + C = o \;.\;.\;.\;.\; (23)$$

Визначимо з нього y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = O$$

Функція тангенс може мати всі вартости від $-\infty$ до $+\infty$, а тому дріб $-\frac{A}{B}$ завжди може бути tg якогось кута α, себто:

$$-\frac{A}{B} = tg\alpha = m$$

Відношення сочинників $-\frac{C}{B}$ завжди є якесь число. Це число завжди може означати відтинок на осі $У$, виміряний в якихось певних одиницях міри.

Тому, дріб $-\frac{C}{B}$ можемо вважати за рівний з n, себто:

$$-\frac{C}{B} = n$$

Таким чином, рівнання:

$$Ax + By + C = O$$

перетворюється в:

$$y = mx + n.$$

Це є знайоме рівнання (17).

1) Кут спаду цієї простої легко визначається з рівности:

$$tg\alpha = -\frac{A}{B}\text{, а}$$

2) Відтинок осі $У$ — *ів* також легко визначається з рівности:

$$n = -\frac{C}{B}$$

Примітка: У практиці таке перетворення алгебричного рівнання простої в канонічне переводиться шляхом визначення з алгебричного рівнання y.

Напр. $2x + 3y - 6 = 0.$

Звідци: $3y = -2x + 6$ або $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Отже $tg\alpha = -\frac{2}{3}; n = 2.$

Аналіза алгебричного рівнання простої.

У рівнанню $Ax + By + C = 0$ сочинники A і B не можуть одночасно обертатися в нуль, бо в такому разі само рівнання згубило-б рацію. Проаналізуймо окремі випадки:

1) Коли сочинник $C = 0$ $(A \neq 0;\ B \neq 0)$.

Тоді рівнання $Ax + By = o$ обертається в таке:

$$y = -\frac{A}{B}x\text{, або } y = mx \left(\text{де } m = -\frac{A}{B}\right):$$

Таким чином рівнання:

$$Ax + By = 0$$

є рівнанням простої, що переходить через початок координатних осей.

2) Коли $A = 0$ $(B \neq 0)$.

Тоді рівнання має вигляд: $By + C = 0$ або, $y = -\frac{C}{B}$.

Звідци $y = n \left(\text{де } n = -\frac{C}{B}\right)$.

В цьому разі може бути два випадки:

а) коли сочинник $C \neq O$, тоб-то $n \neq o$, і *проста*, що має рівняння:

$$By + C = O$$

є рівнобіжна до осі X — ів;

б) коли сочинник $C = O$, тоб-то $n = o$, і проста, що має рівняння:

$$By = 0 \text{ (або } y = o)$$

є віссю іксів.

Аналогичні з попередніми міркування доводять, що:

3) коли $B = O$ $(A \neq O)$

то рівнання вигляду:

$$Ax + C = O$$

є рівнанням простої, рівнобіжної до осі $У$ — ів.

Таким чином, алгебричне рівнання:

1) $Ax + By + C = O$ (повне)

є рівнанням простої в довільному положенню зглядно координатних осей;

2) $Ax + By = O$

є рівнанням простої, що переходить через початок осей;

3) $Ax + C = O$

є рівнанням простої, рівнобіжної до осі $У$ — *ів*;

4) $By + C = O$

є рівнанням простої, рівнобіжної до осі X — *ів*;

5) $Ax = O$

є рівнанням самої осі $У$ — *ів*;

і 6) $Bx = O$

є рівнанням самої осі X — *ів*.

§ 12. Алгебрична форма рівнань пряму та рівнобіжної до даної простої.

Виведім для випадку, коли рівнання простої відзначено загальним алгебричним рівнанням:

$$Ax + By + C = O$$

I) **Рівнання простої, що переходить через загадану точку** $M(x_1 y_1)$.

Ми вже знаємо, що рівнання такої простої є $y - y_1 = m(x - x_1)$; але $m = -\frac{A}{B}$; тому: $y - y_1 = -\frac{A}{B}(x - x_1)$,

або: $$B(y - y_1) = - A(x - x_1),$$

або: $$\underline{A(x - x_1) + B(y - y_1) = O.}$$

II) Той самий вигляд має **рівнання простої, що переходить через якусь точку** $M(x_1, y_1)$ **рівнобіжно до даної простої.**

Ріжниця лише в тім, що в першому випадку вартості A і B є довільні (а через те й кутовий змінник $m = -\frac{A}{B}$ може мати ріжні вартості), а в другому A і B є величини сталі, рівні з наперед загаданими сочинниками рівнання $Ax + By + C = O$ даної простої.

Приклад.

Дано просту: $15x + 5y + 9 = O$; рівнобіжна до неї, що переходить через точку $M(3,4)$, буде:

$$15(x - 3) + 5(y - 4) = O$$

або: $$3x + y - 13 = O$$

III) **Рівнання простої, що переходить через точку** $\mathbf{M(x_1, y_1}$ **прямово до простої** $\mathbf{Ax + By + C = 0}$ буде: (взір 22)

$$y - y_1 = + \frac{B}{A}(x - x_1), \text{ або}$$

$$\underline{B(x - x_1) - A(y - y_1) = o}$$

Приклад.

Дано просту: $15x + 5y + 9 = O$.

Рівнання пряма до неї, що переходить через точку $M(3,4)$, буде:

$$5(x - 3) - 15(y - 4) = O$$

або: $$x + 3y + 9 = O.$$

§ 13. Про первні, що можуть визначати положення простої на площі зглядно визначних осей.

Щоб визначити положення простої на площі, зглядно визначних осей, вистарчає двох первнів. В цьому ми переконаемося при розгляді окремих способів визначення положення простої на площі.

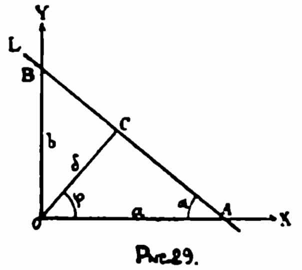


Рис.29.

1-й спосіб. Положення простої на площі цілком визначається, коли відомі кут спаду простої на одну з осей і відтинок другої осі від початку осей до точки перехрестя простої з віссю (відомі $\angle\alpha$ і b). Справді, коли маемо лише кут спаду простої, напр., на вісь X-ів, то можемо мати безліч простих, рівнобіжних одна до одної, що матимуть однаковий кут спаду (рис. 34).

Так само, коли маемо лише один відтинок b, осі $У$-ів що його утворює перехрестя простої з віссю, то можемо мати безліч простих, що відтинатимуть однаковий відтинок осі $У$-ів (рис. 31).

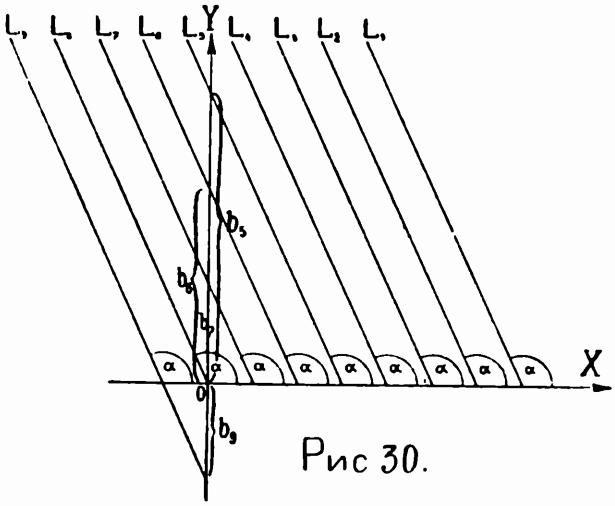


Рис 30.

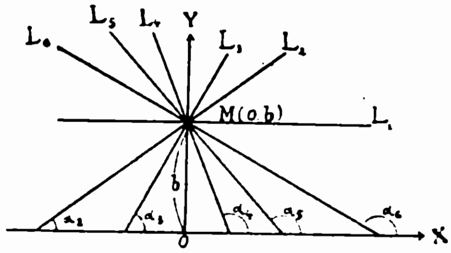


Рис.31

Але в першому випадку (рис. 30) кожна з рівнобіжних простих відтинала ріжні, лише їй одній властиві, відтинки осі $У$-ів ($y = b$), а в другому випадку кожна з простих жмутка M (рис. 31) мала свій окремий, власний кут спаду a_k, відмінний од кутів спаду инших простих.

Коли-ж маемо кут спаду, що творить проста L з віссю X-ів, а заразом і відтинок, що утворює вона своїм перехрестям на осі $У$-ів, то (рис. 29) тим самим маемо прямокутний трикутник AOB, із сталою прямкою $OB = b$ і сталим гострим кутом $\angle OAB = 180^0 - \alpha$.

Із геометрії відомо, що ці первні цілковито визначають трикутник, а тому проста L (протипрямка трикутника) буде единою. Отже, положення простої на площі щодо визначних осей буде цілковито визначене.

Виводячи канонічне рівнання простої, ми й користувалися цим способом визначення положення простої на площі зглядно осей. Само канонічне рівнання : $y = xm + n$ установлює цю залежність значників творчої від розглянених первнів ($m = tg\alpha$ — є функція кута спаду, а n — е величина відтинку на осі $У$-ів, утвореного перехрестям простої з віссю).

2-й спосіб.

Відтинкове визначення положення простої на площі зглядно визначних осей.

Коли маємо лише відтинок на одній з осей координат (напр.: на осі $У$-ів: $y = b$ рис. 31), то матимемо цілий жмуток простих, що відповідають нашій умові переходженя їх через точку $M(o,b)$. Так само, коли маємо відтинок лише на осі X-ів ($x = a$, рис. 32), то матимемо цілий жмуток простих, що відповідають нашій умові переходження їх через точку $N(a,o)$.

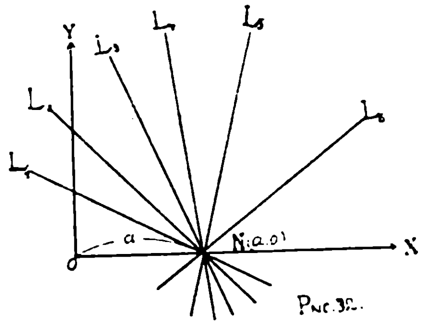


Рис. 32.

Але, коли маємо разом обидва первні: відтинок на осі X-ів і відтинок на осі $У$-ів ($x = a$; $y = b$), то в такому разі проста L (рис. 29) проходить через 2 наперед загадані точки A і B, а тому, в силу аксіоми про просту, є **єдина.**

Отже, величини відтинків, що утворює проста на осях, цілком вистарчає, щоб визначити її положення на площі зглядно осей.

3-й спосіб.

Прямове (нормальне) визначення положення простої на площі зглядно визначних осей.

Припустім, що нам відомі або довжина δ пряму, спущеного на просту L з початку координат, або кут φ, що творить цей прям з одною з осей. (З якою саме, це все одно, бо сума обох кутів з осями є 90^0, себто: $\varphi + \varphi_1 = 90$. Тому, коли відомий один з кутів, то відомий і другий).

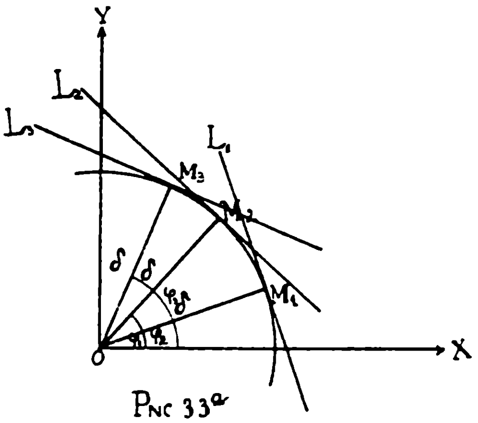


Рис 33а

1) Коли відома лише одна довжина δ пряму, спущеного з початку координат на просту L, то таких простих буде безліч; всі вони будуть дотичними до кола луча δ (з ценром O) в кожній з точок обводу цього кола (рис 33а).

2) Коли відомий лише кут φ, що творить з якоюсь із осей, напр. з віссю X-ів, прям, спущений з початку координат на просту L, то таких простих L також буде безліч. Всі вони (рис 33б) складуть сніп рівнобіжних, як прями до спільної простої в кожній з точок: M_1, M_2, M_3...

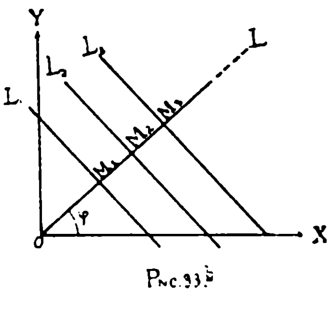


Рис. 33б

Але, коли дано і довжину δ зазначеного пряму і кут, що утворює він з віссю X-ів або $У$-ів), то положення простої L зглядно осей цілком визначене, бо (рис. 29) тоді маємо прямокутній трикутник *AOC*, із сталою прямкою δ і гострим кутом φ. Як уже сказано, величина такого трикутника е цілком визначена, а тому цілком визначене і положення простої *L*, яко другої прямки трикутника *AOC*.

Отже, довжина пряму, спущеного з початку координат на просту, і кут, що утворює цей прям з осями координат, цілком визначають положення даної простої на площі зглядно визначних осей.

Перший спосіб визначення положення простої на площі був, як ми вже зазначили, використаний для складання каноничного рівнання простої... Тепер перейдемо до складання ще других форм рівнань простої, що грунтуються на другому і третьому способах визначення положення простої на площі.

§ 14. Відтинкове рівнання простої.

Як свідчить сама назва, в основу рівнання положено другий спосіб визначення простої на площі.

Як що award зможемо встановити залежність між відтинками на осях і значниками довільної творчої точки, що лежить на простій, то матимемо рівнання цієї простої.

Припустім, що нам дано визначні осі *XY* і просту *L*, що відтинає на осях відтинки $x = a$ і $y = b$. Де-б ми не взяли на простій *L* довільну точку $M(x,y)$ (рис. 34), то завжди значники її x і y утворюють трикутник, напр.: *KMB*, схожий на трикутник *AOB*, утворений простою *L* з визначними осями. Тим то завжди існуватиме відношення вигляду:

$$\frac{KM}{OA} = \frac{KB}{OB}$$

Вставляючи вартости відтинків *KM*, *OA*, *KB*, *OB* одержуємо:

$$\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a}\,; \quad \frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a}$$

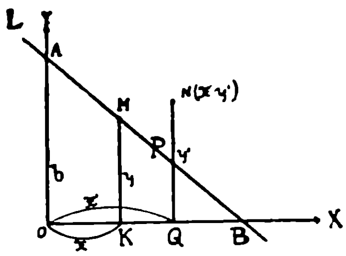


Рис. 34.

Звідци маємо: $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \ldots . \quad (26)$$

Це і є прикметою того, що точка лежить на простій *L*, себто рівнання (26) є рівнанням цієї простої.

Це рівнання носить назву: відтинкового рівнання простої.

Примітка. Щоб довести, що рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ є й вистарчальною прикметою того, що довільна точка M, якої значники задовольняють це рівняння, може лежати лише на простій, що відтинає від осей відтинки $x=a$, $y=b$, розглянемо (рис. 34) яку-небудь точку $N(x',y')$, що не лежить на простій L:

$$\triangle PQB \backsim \triangle AOB.$$

Тому:

$$\frac{QP}{OA}=\frac{QB}{OB}$$

але

$$QP=y'-PN;\; OA=b;\; QB=a-x';\; OB=a$$

Отже:

$$\frac{y'-PN}{b}=\frac{a-x'}{a} \text{ або:}$$

$$\frac{y'}{b}-\frac{PN}{a}=1-\frac{x'}{a} \text{ або}$$

$$\frac{x'}{a}+\frac{y'}{b}=1+\frac{PN}{b}.$$

Таким чином, щоб значники x' і y' точки N задовольняли рівняння: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, треба, щоб $\frac{PN}{b}=O$; але, $b \neq \infty$ а тому треба, щоб $PN=O$. PN — є віддалення точки N від точки P (де рядна точки N перетинає просту L), а тому віддалення PN може бути рівне з нулем лише тоді, коли точка N лежить на простій L. Таким чином, значники кожної точки, що не лежить на простій L, не задовольняють рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$: Отже рівняння (26) є вистарчальною прикметою того, що дана точка лежить на простій L і може вважатися за рівняння цієї простої L

§ 15. Прямове (або нормальне) рівняння простої.

З самої назви видко, що це рівняння грунтується на тому, що положення простої на площі зглядно визначних осей цілком визначається довжиною пряму, спущеного з початку визначних осей на дану просту (віддалення простої від початку визначних осей) і кутом цього пряму з одною з визначних осей. Отже, це рівняння встановлює залежність між значниками довільної творчої точки на цій простій та розгляненими вище первнями: віддаленням простої від початку координат та кутом цього пряму з одною з визначних осей.

1 спосіб.

Припустім, що нам дано визначні осі XY і просту L. Хай віддалення цієї простої L від початку осей буде δ, а кут цього пряму з віссю X — *ів* буде $\sphericalangle\, \varphi$.

Візьмім на простій L яку-небудь точку $M(x,y)$, що має значники: $x = ON$, а $y = NM$.

Обчислимо довжину пряму $OK = \delta$.

Для цього з точки K спускаємо прям KP на вісь X — *ів* і ведемо просту $NR \parallel L$.

Тоді: $OK = \delta = OR + RK$.

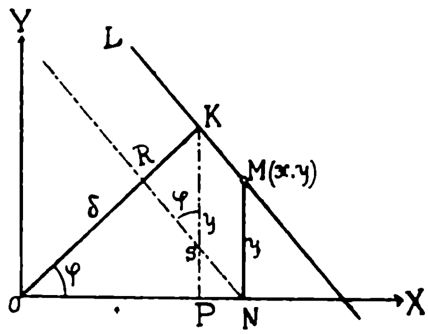


Рис.35.

Але: 1) з прямокутнього трикутника ORN маємо $OR = ON cs\varphi = x cos\varphi$.

2) з прямокутнього трикутника RKS маємо $RK = KS sn\varphi =$ $= y sn\varphi$ (бо $\sphericalangle\, RSK = \varphi$, яко складений з $\sphericalangle\, RON$ взаємно прямовими раменами).

Тому:

$$x cs\varphi + y sn\varphi = \delta \quad \ldots. \quad (27)$$

2-й спосіб.

З прямокутніх трикутників (рис. 36) $\triangle AKO$ і $\triangle BKO$ визначаємо через дані величини: довжину пряма δ і кут його φ з віссю X-ів, відтинки, що творить проста L на осях.

1) З $\triangle\, OKA$ маємо:

$$b = \frac{\delta}{sn\varphi}$$

2) З $\triangle\, BKO$ маємо:

$$a = \frac{\delta}{cs\varphi}.$$

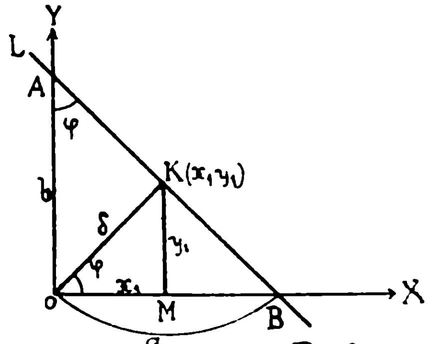


Рис 36

Тоді, взявши відтинкове рівнання простої L:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

вставляємо в нього знайдені вартості a і b й одержимо:

$$\frac{x}{\frac{\delta}{cs\varphi}} + \frac{y}{\frac{\delta}{sn\varphi}} = 1,$$

або: $$\frac{x cs\varphi}{\delta} + \frac{y sn\varphi}{\delta} = 1;$$

а звідци: $$x cs\varphi + y sn\varphi = \delta. \quad \ldots(27)$$

§ 16. Перетворення однієї форми рівнання простої у другу.

I. Перетворення каноничного рівнання в инші форми.

а) Каноничне рівнання форми $y = mx + n$ перетворюється в алгебричне простим звільненням його від знаменателя (коли такий є) і перенесенням усіх членів у ліву частину.

Приклад: $$y = -\frac{3}{5}x + 2$$
$$5y + 3x - 10 = 0$$

б) перетворимо каноничне рівнання у відтинкове.

Дано рівнання: $y = mx + n$.

Щоб перетворити його у відтинкове, треба лише кутовий змінник m визначити через відтинки на вісях, бо n є вже таким відтинком.

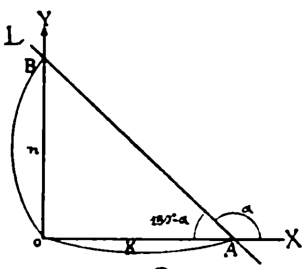


Рис. 37.

З трикутника AOB (Рис. 37) маємо:

$$tg(180^0 - a) = -tga = -m = \frac{n}{k}$$

або: $$m = -\frac{n}{k}$$

Вставляючи в каноничне рівнання знайдену вартість змінника m, матимемо:

$$y = -\frac{n}{k}x + n, \text{ або } y + \frac{n}{k}x = n$$

Поділивши члени рівнання на n, одержимо:

$$\frac{y}{n} + \frac{x}{k} = 1$$

Практично це перетворення робиться дуже просто:

1) Поділимо всі члени рівнання $y = mx + n$ на вільний член:

$$\frac{y}{n} = \frac{m}{n} x + 1$$

2) Сочинник $\frac{m}{n}$ невідомого x переносимо в знаменателя, а увесь член у праву частину:

$$\frac{y}{n} = \frac{x}{\frac{n}{m}} + 1, \text{ або: } \frac{y}{n} + \frac{x}{-\frac{n}{m}} = 1$$

Це й буде потрібне рівнання, бо $-\frac{n}{m} = \kappa$ (див. *(A)*].

Приклад:

1) $y = 4x + 2;\ \frac{y}{2} = 2x + 1;\ \frac{y}{2} + \frac{x}{-{}^1/_2} = 1$

2) $y = -3x + 6;\ \frac{y}{6} = -\frac{x}{2} + 1;\ \frac{y}{6} + \frac{x}{2} = 1.$

Розглянемо заразом перетворення кожного алгебричного рівнання простої у відтинкове.

1) Вільний член рівнання: $Ax + By + C = O$ відокремлюємо у праву частину:

$$Ax + By = -C$$

2) Ділимо всі члени рівнання на вільний член з його знаком:

$$-\frac{A}{C} x + \left(-\frac{B}{C}\right) y = 1$$

і 3) переносимо сочинники у знаменатель:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

Таким чином, відтинки на осях, що робить проста, визначена рівнанням $Ax + By + C = O$, є:

1) на осі X — *ів:* $a = -\frac{C}{A}$

1) на осі $У$ — *ів:* $b = -\frac{C}{B}$

Приклад.

1) $3x + 2y - 5 = 0; \quad 3x + 2y = 5;$

$$\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = 1 \quad \text{або:} \quad \frac{x}{^5/_3} + \frac{y}{^5/_2} = 1.$$

2) $4x - 9y + 12 = 0; \quad 4x - 9y = -12;$

$$-\frac{1}{3}x + \frac{3}{4}y = 1 \quad \text{або:} \quad \frac{x}{-3} + \frac{y}{^4/_3} = 1$$

Перетворення канонічного рівнання в прямову форму й навпаки розглянемо окремо.

II. Перетворення відтинкового рівнання в канонічну та инші форми рівнання простої.

а) Рівнання: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ перетворюється в рівнання канонічне: $y = mx + n$ шляхом визначення кутового змінника m, бо n, як відтинок осі Y — ів, утворений простою L, є рівний b $(n = b)$.

$m = tg\alpha$, кута спаду простої L на вісь X — ів.

З трикутника ABO маємо: (рис. 38).

$$tg(180^0 - \alpha) = \frac{b}{a}, \text{ або:}$$

$$-tg\alpha = \frac{b}{a}, \text{ звідки } m = tg\alpha = -\frac{b}{a}$$

Тому канонічне рівнання простої через відтинки на осях має вигляд:

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

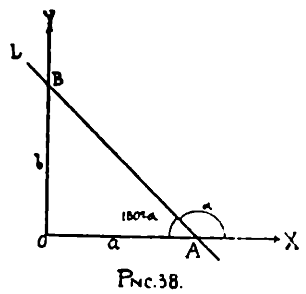


Рис. 38.

На практиці відтинкове рівнання $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ перетворюється в канонічне звичайним визначенням з цього рівнання невідомого y через x.

Справді: $\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1; \; y = -\frac{b}{a}x + b$

Таким чином, кут спаду простої буде: $\alpha = arc\,tg\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Приклад.

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1\ ;\ \frac{y}{8}=-\frac{x}{4}+1\ ;\ y=-2x+8$$

б) Звільнивши відтинкове рівнання $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ від знаменателя, одержимо алгебричне рівнання простої вигляду:

$$Ax+By+C=O.$$

Справді:

$$bx+ay=ab, \text{ або}$$
$$bx+ay-ab=o$$

Приклад:

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{4}=1\ ;\ 4x-5y+20=O$$

Перетворення відтинкової форми рівнання у прямову розглянемо окремо.

III. Перетворення алгебричної форми рівнання простої у прямову форму.

а) Алгебрична форма рівнання:

$$Ax+By+C=O$$

Звідци:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

ми знаємо, що $m=tg\alpha=-\frac{A}{B}$; $n=-\frac{C}{B}$;

Кут α, яко зовнішній (рис. 39) трикутника AOD, є рівний: $\alpha=90^0+\varphi$, тому:

$$\underline{m}=tg\alpha=tg\ (90^0+\varphi)=-\underline{ctg\ \varphi}.$$

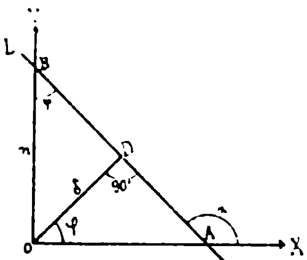


Рис. 39.

З трикутника OBD маємо:

$$\delta=nsn\ \varphi$$

Таким чином:

$$-ctg\ \varphi=-\frac{A}{B}, \text{ або } ctg\ \varphi=\frac{A}{B}\ \dots\ (I)$$

Далі: 1) $1+ctg^2\,\varphi = csc^2\,\varphi$; $\dfrac{1}{sn^2\,\varphi} = 1 + \dfrac{A^2}{B^2} = \dfrac{A^2+B^2}{B^2}$;

отже: $sn\,\varphi = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ .... (II)

2) $cos^2\,\varphi = 1 - sn^2\,\varphi = 1 - \dfrac{B^2}{A^2+B^2} = \dfrac{A^2+B^2-B^2}{A^2+B^2}$;

отже: $cos\,\varphi = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ .... (III)

3) $\delta = n sn\,\varphi = -\dfrac{C}{B} \cdot \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \dfrac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ ...(IV)

Вставивши вартости (II), (III) і (IV) у прямову форму рівнання: $xcs\,\varphi + ysn\,\varphi = \delta$, маємо:

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

або:

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

де $cos\,\varphi = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$; $sn\,\varphi = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, инакше:

$$ctg\varphi = \frac{A}{B} \text{ і } \delta = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};$$

δ — умовилися вважати за додатнє і тому знак перед $\sqrt{A^2+B^2}$ береться такий, щоб $\delta = \dfrac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} > 0$

Правило:

Щоб звести алгебричну форму рівнання простої до прямової форми, треба перенести всі члени рівнання в ліву частину; многочлен лівої частини рівнання поділити на квадратовий корінь із суми квадратів сочинників при невідомих, взятий із знаком, протилежним знакові вільного члена; одержаний дріб прирівнати до нуля.

Це й буде прямова форма алгебричного рівнання простої. Щоб одержати прямову форму рівнання простої в остаточному вигляді, треба обчислити φ і δ з рівностей:

$$ctg\,\varphi = \frac{A}{B}$$

$$\delta = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Приклади:

Звести до прямової форми рівнання:

$$4x + 3y = 12;\quad 3y - 4x = 12;\quad 3x - 4y = 8;\quad x - y = 0;\quad 5x - 3 = 0.$$

Розвязка першого:

$$4x + 3y = 12;\quad 4x + 3y - 12 = 0;$$

$$\frac{4x + 3y - 12}{+\sqrt{16 + 9}} = 0;\quad \text{або: } \frac{4x + 3y - 12}{+5} = 0;$$

$$\left[\; ctg\,\varphi + \frac{4}{3};\qquad \delta = -\frac{-12}{+5} = \frac{12}{5} \;\right]$$

$$lg\; ctg\varphi = lg4 - lg3 = 0{,}60206 - 0{,}47712 = 0{,}12494;\quad \angle\varphi = 36^0\,52'\,11''.$$

(φ — в 1-й чвертці, бо sn і cos є додатні; коли-б вони були від'ємні, то — в 3-й).

б) *Перетворення инших форм рівнань простої у прямову.*

Загальний спосіб такий: перетворюємо всі инші форми рівнання простої в алгебричну, а потім від неї переходимо до прямової форми. Напр :

1) *Канонічне рівнання:* $y = xm + n$ звільняємо від знаменателя, коли він є, і переносимо члени у ліву частину. Маємо:

$$y - mx - n = o$$

Тоді, згідно з доведеним попереду, прямова форма буде:

$$\frac{y - mx - n}{\pm\sqrt{1 + m^2}} = o$$

де $sn\,\varphi = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + m^2}}$; $cos\varphi = \dfrac{-m}{\pm\sqrt{1 + m^2}}$;

$$ctg\,\varphi = -m\;;\; \delta = \frac{+n}{\pm\sqrt{1 + m^2}}$$

Знак перед $\sqrt{\;}$ *взято всюди так, щоб* δ *було додатне.*

Приклад.

$$y = -\frac{5}{12}x + 4; \quad 12y + 5x - 48 = 0$$

Прямова форма: $$\frac{5x + 12y - 48}{\sqrt{25 + 144}} = 0.$$

або: $$\frac{5x + 12y - 48}{13} = 0.$$

1) $\delta = -\frac{-48}{13} = \frac{48}{13}$: 2) $csx = \frac{5}{12}$; 3) $snx = \frac{12}{13}$ 4) $ctg\varphi = \frac{5}{12}$

(кут у 1-й чвертці).

$$lg\ ctg\ \varphi = lg\ 5 - lg\ 12 = 0{,}69897 - 1{,}07918 = \bar{1}{,}61979;$$
$$\varphi = 67^0\,22'\,48''.$$

Рівнання мае вигляд:

$$x\cos 67^0\,22'\,48'' + y\ sn\ 67^0\,22'\,48'' = \frac{48}{13}.$$

2) ***Відтинкове рівнання:***

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Звідци: $bx + ay = ab$.

Прямове рівнання:

$$\frac{bx + ay - ab}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

де $\delta = \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $sn\,\varphi = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$; $cs\,\varphi = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$;

$ctg\,\varphi = \frac{b}{a}$.

Приклад:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = 1\ ;\ 4x + 3y = 12;$$

$$\frac{4x + 3y - 12}{+\sqrt{16 + 9}} = 0;\quad \frac{4x + 3y - 12}{+5} = 0;$$

$$\delta = -\frac{-12}{+5} = \frac{12}{5}\ ;\ ctg\varphi = \frac{3}{4}\ ;$$

sin і *cos* однакового знаку. а тому: $\varphi = 36^0\,52'\,11''$.

Рівнання: $$x cs\ 36^0\,52'\,11'' + y\ sn\ 36^0\,52'\,11'' = \frac{12}{5}.$$

IV. Перетворення прямової форми рівнання простої в инші форми (себто складення рівнань ріжних форм, коли відомі віддалення простої від початку визначених осей δ і кут φ цього віддалення з віссю *X — ів)*.

Припустім, що маємо рівнання простої в прямовій формі:

$$x cs\, \varphi + y sn\, \varphi = \delta$$

де φ і δ — є відомі сталі величини.

Перший спосіб. *Перетворення цього рівнання в каночне, а звідци вже в инші форми (див I).* Ми вивели, що (III):

$$ctg\, \varphi = -m, \text{ а звідци: } m = -ctg\, \varphi \ldots . \ (A)$$

$$\text{Далі, } \delta = n sn\, \varphi, \text{ або } n = \frac{\delta}{sn\, \varphi} \ldots . \ (B)$$

Ці два рівнання дають можливість обчислити сочинники каноничного рівнання і вставити їх у загальний вигляд цього рівнання: $y = xm + n$.

Другий спосіб. *Перетворення в алгебричну форму.*

З рівнання $x cs\varphi + y sn\varphi = \delta$ шляхом логаритмування й числування по таблицях звичайних чисел обчислюємо вартости $cs\varphi$ і $sn\varphi$ і вставляємо їх в рівнання. Тоді одержуємо алгебричне рівнання даної простої.

Приклад:

$$x cs\, \varphi + y\, sn\, \varphi = \frac{8}{5}, \text{ де } \varphi = 323^0\, 7'\, 49''.$$

1-й спосіб: $m = -ctg\, \varphi = -ctg\, 323^0\, 7'\, 49'' = -ctg\, (270^0 + 53^0 7' 49)$

$m = tg\, 53^0\, 7'\, 49''$ (себто: $\alpha = 53^0\, 7'\, 49''$); $lg\, m = 0{,}12494$ а звідци:

$m = 1{,}(3) = \frac{4}{3}$;

$$n = \frac{\delta}{sn\, \varphi}$$

$$sn\, \varphi = sn\, 323^0\, 51'\, 11'' = sn\, (360^0 - 36^0\, 52'\, 11'') = -sn\, 36^0\, 52'\, 11''.$$

$$lg\, sn\, 36^0\, 52'\, 11'' = \bar{1}{,}77815.$$

$$sn\varphi = -N\, \bar{1}{,}77815 = -0{,}6 = -\frac{3}{5}.$$

$$n = \frac{8}{5} : -\frac{3}{5} = -\frac{8}{3}.$$

Тому рівняння буде: $y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$

[1) Алгебричне рівняння: звільнивши від знаменателя, маємо: $4x - 3y - 8 = 0$, або $4x - 3y = 8$. 2) Відтинкове: (поділивши на вільний член) $\frac{x}{2} + \frac{y}{{}^8/_3} = 1$.]

2-й спосіб.

$$sn\,\varphi = sn\,323^0\,7'\,49'' = sn\,(360^0 - 36^0\,52\,11'')$$

$$sn\,\varphi = -sn\,36^0\,52'\,11''; \qquad lg\,sn\,36^0\,52'\,11'' = \overline{1},77815$$

$$sn\,\varphi = -0,6 = -\frac{3}{5}$$

$$cos\,\varphi = cos\,323^0\,7'\,49'' = cs\,(360^0 - 36^0\,52'\,11'') = cos\,36^0 52' 11''.$$

$$lg\,cos\,\varphi = \overline{1},90309; \quad cos\,\varphi = 0,8 = \frac{5}{4},$$

Але $$x\,cos\,\varphi + y\,sn\,\varphi = \delta,$$

Тому: $$\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y = \frac{8}{5}\;;\; 4x - 3y = 8 \text{ (те саме)}$$

Таким чином, коли нам відомі віддалення простої від початку визначних осей і кут цього віддалення з якоюсь віссю, то завжди можна скласти рівнання цієї простої в кожній з инших форм.

§ 17. Точка перехрещення двох простих, визначених рівнаннями:

$$(1)\quad ax + by + c = 0$$
$$(2)\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

Ясна річ, що ця точка лежить одночасно і на простій (1) і на простій (2), а тому її значники мусять задовольняти обидва рівнання; инакше кажучи, значники цієї точки є спільними розвязками системи рівнань (1) і (2).

Таким чином, щоб знайти значники точки перехрещення двох простих, визначених рівнаннями, треба ці рівнання розвязати, яко систему.

Розвязки цієї системи рівнань будуть значниками точки перехрещення простих.

Аналіза:

Розвязавши рівнання (1) і (2), яко систему, одержимо:

$$x_1 = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}\ ;\ y_1 = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$$

1-й випадок: коли $ab_1 - a_1b = o$, тоді $x_1 = \infty$, $y_1 = \infty$.

Прості є рівнобіжні (бо перехрещуються на безмежності).

Але в цьому випадкові $ab_1 = a_1b$, або:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \ldots . \quad (28)$$

Коли рівнання простих мають пропорційні сочинники при невідомих, то прості рівнобіжні.

Инакше:

Дві прості є рівнобіжні, коли здобуток сочинника при x у першому рівнанню на сочинника при y у другому рівнанню є рівний із здобутком сочинника при y у першому рівнанню на сочинника при x — у другому. (Рівність здобутків сочинників навхрест).

2-й випадок; Коли: $ab_1 - ba_1 \neq o$.

В цім разі може бути:

1) $cb_1 - c_1b = o$, а $ca_1 - ac_1 \neq o$, або $x = o$, $y \neq o$.

Точка перехрестя лежить на осі У — ів.

Але в цьому разі: $cb_1 = c_1b$, або $\dfrac{c}{c_1} = \dfrac{b}{b_1}$ ...(29)

Так само, коли:

2) $c_1b - c_1b \neq o$, а $ca_1 - ac_1 = o$. Тоді $x \neq o$, $y = o$,

Точка перехрестя лежить на осі X — ів.

Але в цьому разі: $ac_1 = a_1c$, або $\dfrac{c}{c_1} = \dfrac{a}{a_1}$ . . . . (29)

Отже: **Коли рівнання простих мають вільні члени, пропорційні сочинникам одної з невідомих, то точка перехрестя цих простих лежить на осі, що визначається прирівнанням нулеві другої невідомої.**

Напр.:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 6x - y &= 10 \end{aligned}\right\} \quad \frac{10}{5} = \frac{6}{3};$$ тому точка лежить на осі X — *ів*.

Справді:

$$\begin{array}{r} 6x + 4y = 10 \\ -\ 6x - \ \ y = 10 \\ \hline 5y = 0 \end{array}$$

$$y = o\ ;\ 3x = 5\ ;\ x = \frac{5}{3}.$$

3) Коли: $cb_1 - c_1b = o$; $ca_1 - ac_1 = o$,

то може бути два випадки:

а) Ці рівности можливі, коли $c = c_1 = o$ і $ab_1 - a_1b \neq o$; тоді $x = o$; $y = o$, себто

прості переходять через початок визначних осей.

б) Коли $c \neq o$, тоді:

$$cb_1 = c_1b,\ \textit{або}: \frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1} \quad ca_1 = a_1c,\ \text{або}: \frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1}$$

Дві величини, рівні з третьою, є рівні собі, а тому всі сочинники рівнань пропорційні:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

Але в цьому разі: $x = \dfrac{o}{o}$; $y = \dfrac{o}{o}$;

Себто, *прості* перехрещуються у кожній точці, инакше кажучи — вони є *пристайні:*

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 6x + 9y &= 12 \end{aligned}\right| \quad \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$$

Це є пристайні прості, бо коли ми друге рівнання скоротимо на змінника пропорційности $n = 3$, то одержимо: $2x + 3y = 4$, себто перше рівнання.

Розглянемо ще **умову прямовости простих:**

$$ax + by + c = o \quad (1)$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = o \quad (2)$$

В каноничній формі ці рівнання будуть:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (1)$$

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \quad (2)$$

Ми вже знаемо, що умовою прямовости простих є:

$$m = -\frac{1}{m_1}$$

В даному разі $m = -\frac{a}{b}$; $m_1 = -\frac{b_1}{a_1}$;

тому: $$-\frac{a}{b} = +\frac{b_1}{a_1}$$

Звідци: $-aa_1 = bb_1$,

або: $aa_1 + bb_1 = o$ .... (30)

Отже:

Дві простих, визначених рівнаннями в алгебричній формі, є взаємно прямі, коли сума здобутків сочинників однакових невідомих є рівна з нулем.

§ 18. Точки перехрещення простої з осями.

Хай рівнання простої є:

$$ax + by + c = o \qquad (1)$$

Рівнання осей:

осі X — *ів:* $y = o$ (2)
осі $У$ — *ів:* $x = o$ (3)

Щоб знайти точку перехрещення простої (1) з віссю X — *ів*, треба розвязати систему (1), (2). Але, це однаково, що в рівнанні (1) положити $y = o$ і розвязати його зглядно x (ми одержимо відтинок осі X — *ів)*.

Так само, щоб знайти точку перехрещення простої (1) з віссю $У$ — *ів*, треба розвязати систему (1) (3), а це однаково, що в рівнанні (1) положити $x = o$ і розвязати його що до y.

О т ж е:

Щоб знайти на осях відтинки, утворені простою, визначеною яким-небудь рівнянням, треба почерзі покласти замість x і y нулі й обчислити з рівняння ту змінну, що залишається.

Приклади:

I. Знайти відтинки на осях, утворені простою:

а) $3x + 5y = 15$.

1) $x = 0;\ 5y = 15;\ \underline{y = 3};$ 2) $y = 0;\ 3x = 15;\ \underline{x = 5}.$

Тому, відтинкове рівняння буде:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1.$$

б) $y = 2x - 6$.

1) $x = 0;\ y = -6,$ 2) $y = 0;\ 2x - 6 = 0;\ x = 3.$

Тому, відтинкове рівняння буде:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-6} = 1.$$

II. Нарисувати прості:

1) $2x + 7y = 28$ 2) $y = -6x + 12.$

1) $y = 0;\ 2x = 28;\ x = 14;\ x = 0;\ 7y = 28;\ y = 4.$

$$\frac{x}{14} + \frac{y}{4} = 1. \text{ (Рис. 40)}$$

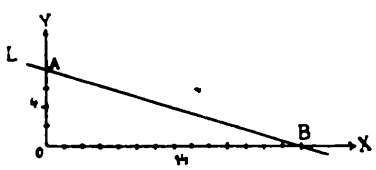


Рис. 40.

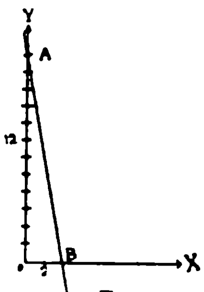


Рис. 41.

2) $y = 0;\ -6x + 12 = 0;\ \underline{x = 2};\ x = 0;\ \underline{y = 12}$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{12} = 1 \text{ (Рис. 41)}$$

Відтинкове рівняння дає найлегший спосіб нарисувати просту відкладанням відтинків на осях.

Вправи.

Ч — 42. *Написати рівнання простих:*

1) що переход. через точку: $A(4, -2)$ і має кут спаду: 60^0;
2) » » » $B(-3, -5)$ » » 115^0;
3) » » » $C(-6,4)$ » » $50^0\,11'\,39''$;
4) » » » $D(3,8)$ » » $65^0 33' 21''$.

Ч — 43. *Написати рівнання простої, що переходить через точки:*

1) $A(-2,2)$, $B(5,-3)$;
2) $C(0,4)$, $D(4,0)$;
3) $K(5,5)$, $L(-3,-4)$;
4) $M(-2,-3)$, $N(6,-8)$.

Ч — 44. *Написати рівнання боків трикутника, що має значники вершків:*

1) $(24,-8)$, $(2,25)$, $(12,-5)$;
2) $(-4,-1)$, $(2,3)$, $(-6,0)$;
3) $(0,0)$, $(3,5)$, $(12,-6)$;
4) $(-2,-5)$, $(0,8)$, $(10,1)$.

Ч — 45. *Довести:*

1) що точка $(4,4)$ лежить на одній простій з точками: $(3,5)$ і $(5,3)$.

2) те саме: точка $(5,-7)$ — з точками $(3,0)$ і $(1,7)$.

3) те саме: точка $(0,-5)$ — з точками $(6,17)$ і $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$.

Ч — 46. 1) *Через точку $(3,-6)$ повести рівнобіжну до простої: $y = 2x + 1$.*

2) *Через точку $(0,4)$ повести рівнобіжну до простої: $y = -\frac{3}{}x + 2$.*

3) *Через точку $(0,0)$ повести рівнобіжну до простої: $6x + 4y = 15$.*

4) *Через точку $(5,6)$ повести рівнобіжну до простої: $2x - 3y = 0$.*

Ч — 47. *Написати рівнання пряму, поставленого:*

1) в точці: $(3, -4)$ до простої: $y = -5x + 11$;
2) » $(2,2)$ $2x + 7y = 18$;
3) » $(-1, 4^1/_2)$ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$?

Ч — 48. *Написати рівнання пряму, спущеного:*

1) з точки: $(-3, -7)$ на просту: $y = -\frac{1}{3}x + 9$;
2) » $(2, -4)$ » » $6x - 11y = 1$;
3) » $(0,0)$ » » $\frac{x}{5} - \frac{y}{8} = 1$.

Ч — 49. *До простих, що визначені рівняннями в алгебричній формі, повести рівнобіжні: (див. взір 24).*

1) через точку: $(7,7)$ до простої: $2x + 3y = 29$
2) » » $(-2,4)$ » $5x - 7y - 1 = 0$
3) » » $(-1, -8)$ » $6x + y = 9$?

Ч — 50. *Повести прямові (взір 25):*

1) через точку: $(8,1)$ до простої: $13x + 11y = 44$
2) » » $(2, -5)$ » $6x - 7y + 18 = 0$
3) » » $(-4, -1)$ » $7x - y + 12 = 0$?

Ч — 51. *Написати рівнання простих, що творять відтинки на осях:*

1) $x = 2$, $y = 5$; 2) $x = -\frac{1}{2}$, $y = 4$; 3) $x = -1$: $y = +1$?

Ч — 52. *Написати рівнання простих, що мають:*

1) віддалення від початку осей $\delta = 14$ і кут спаду $a = 120^0$;

2) Теж: $\delta = 2{,}4$, а кут спаду $a = 126^0 52' 11''$?
(Примітка: кут спаду $a = 90^0 + \varphi$, яко зовнішній).

Ч — 53. *Перетворити рівнання:*

1) $y = -\frac{2}{3}x + 4$ в алгебричну і відтинкову форми.

2) $\frac{x}{-{}^1/_2} + \frac{y}{3} = 1$ в канонічну й алгебричну форми.

Ч — 54. *Перетворити в прямову форму рівнання:*

1) $3x - 16y = 2;$ 2) $2x + 3y + 5 = 0;$

3) $y = -3x - 2;$ 4) $y = -\frac{3}{4}x + 5;$

5) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1.$ 6) $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{3} = 1.$

Ч — 55. *Перетворити в инші форми прямове рівнання простої:* $x cs\,\varphi + y sn\,\varphi = \delta$, *коли:*

1) $\varphi = 315^0$; $\delta = 0;$
2) $\varphi = 216^0\ 52'\ 11''$; $\delta = 2{,}4;$
3) $\varphi = 153^0\ 7'\ 49''$; $\delta = 2{,}4;$
4) $\varphi = 143^0\ 7'\ 49''$; $\delta = 1{,}6;$
5) $\varphi = 0;$ $\delta = 0{,}6;$
6) $\varphi = 270^0;$ $\delta = 0{,}75.$

Ч — 56. *Знайти значники x точок:* $A(x,2)$; $B(x,-3)$; $c(x,-1)$; $D(x,0)$, *а також значник у точок:* $M(-2,y)$; $N(1,y)$; $P(-3,y)$, *коли відомо, що всі ці точки лежать на простій:* $4x - 3y - 2 = 0$.

Ч — 57. *1) Знайти точку перехрещення простих:* $3x + 2y = 5$; $3y - x - 2 = 0$.

2) Знайти точки перехрещення кожної з цих простих з осями.

Ч — 58. *Написати рівнання простої, що сполучує перехрестя простих:*

1) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - 5y = 4. \end{cases}$

Ч — 59. *Визначити взаємне положення простих:*

1) $8x + 6y = 15$
$3x - 4y = 6$

2) $2x + 5y = 16$
$y = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}x$

3) $2x + y = 6$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

4) $3x + 5y = 12$
$2x + 5y = 12$

4) $x + 4y - 6 = 0$
$3x + 12y - 18 = 0$

6) $3x - 5y = 14$
$\frac{x}{1{,}5} + \frac{5y}{2{,}5} = 1$

Ч — 60. *Визначити значники вершків трикутника, що має боками:*

1) $x + 3y = 3$; *2)* $2y = x + 4$; *3)* $2x - y - 2 = 0$.

Ч — 61. *Те саме, коли боки трикутника:* $y + x = 5$; $y = \frac{3}{2}x - 2{,}5$; $y - 9x = 5$.

Ч — 62. *Перетворити взір для визначення кута між простими* $\left(tg\,\varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$ *для випадку, коли рівнання простих дано в алгебричній формі:*

$$ax + by + c = o$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = o$$

[*Відповідь:* $tg\,\varphi = -\frac{ab_1 - a_1b}{aa_1 + bb_1}$ .... (31)]

Ч — 63. *На підставі задачі Ч 62 визначити кути між простими, що мають рівнання:*

1) $2x + 3y - 5 = 0$ *і* $3x - y - 2 = 0$;

2) $2x + 5y = 4$ *і* $0{,}4y - x + 3 = 0$.

Ч — 64. *Теж, визначити кут трикутника, що має боки:* *1)* $y - 6x = 8$; *2)* $3x + 2y - 2 = 0$; *3)* $4y - 2x - 5 = 0$.

Ч — 65. *Знайти боки й кути трикутника:*

1) $A(2,1)$, $B(3,-2)$, $C(-4,-1)$;

2) $A(2,3)$, $B(4,-5)$, $C(-3,-6)$.

§ 19. Віддалення точки від простої.

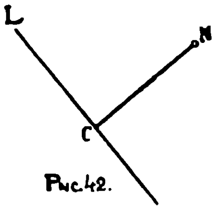


Рис.42.

Із геометрії відомо, що віддалення простої від точки й навпаки — точки від простої міряється довжиною пряму, спущеного з цієї точки на просту. За напрям цього віддалення беремо напрям від точки до простої (рис 46).

Точка M може лежати з обох боків простої L (рис 43). Тим-то віддалення MC і M_1C_1 мають взаємно противні напрями, а через те, коли один з них умовимося вважати за додатній, то другий треба брати за від'ємний.

Хоч само по собі віддалення точки від простої завжди вважається за величину додатню, але обчислюючи його, ми можемо мати вартости обох знаків в залежності від того, з якого боку простої лежатиме точка M.

За додатній напрям віддалення точки від якої небудь простої умовилися вважати той, коли точка і початок координатних осей лежать з ріжних боків простої. Таким чином (рис. 43) $MC = +d$ а $M_2C_1 = -d_1$.

Обчислимо тепер віддалення якої небудь точки $M(x_0, y_0)$ від простої L, загаданої рівнанням: $x cs\,\varphi + y sn\,\varphi = \delta$ (рис. 44). Через точку M ведемо просту L_0 рівнобіжну до даної L.

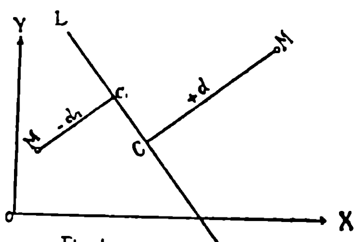


Рис 43.

Рівнання цієї простої очевидно буде: $x cs\,\varphi + y sn\,\varphi = \delta_0$.

Віддалення $MC = NK$.

Але $NK = NO - OK$, тому:

$$d = \delta_0 - \delta$$

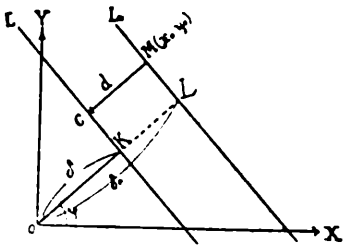


Рис 44.

Обчислимо тепер δ_0.

Для цього звернемо увагу, що проста L_0 поведена через точку M, а тому значники цієї точки обертатимуть рівнання простої L_0 у тотожність, себ-то матимемо:

$$x_0 \; cs\,\varphi + y_0 \; sn\,\varphi = \delta_0.$$

Вартости x_0, y_0 і φ відомі нам, а через те δ_0 буде цілком визначеним.

Вставляючи вартість δ_0 у рівність $d = \delta_0 - \delta$, матимемо:

$$d = x_0 cs\,\varphi + y_0 sn\,\varphi - \delta$$

Розглянемо тепер ще другий випадок, коли точка $M(x_0, y_0)$ лежить із того боку простої, що й початок координат (рис 49).

В цьому разі $\mathbf{MC} = -\mathbf{d}$. Але $MC = LK = OK - OL$,

або $$-d = \delta - \delta_0; \text{ звідки } d = \delta_0 - \delta.$$

Міркуючи аналогично з попереднім, ми з рівнання простої $Lo \equiv x cs\,\varphi + y sn\,\varphi = \delta o$ визначаємо:

$$\delta_0 = x_0 cs\,\varphi + y_0 sn\,\varphi$$

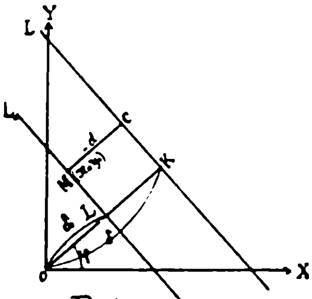


Рис.45.

Нарешті, вставивши цю вартість у рівність $d = \delta_0 - \delta$, одержимо:

$$d = x_0 cs\,\varphi + y_0\,sn\,\varphi - \delta.$$

Таким чином, пересвідчуемося, що в обох випадках вартість d має однаковий взір:

$$d = x_0 cs\,\varphi + y_0\;\; sn\,\varphi - \delta\,.\,.\,.\,.\;(32)$$

Отже:

Віддалення точки від простої (що має рівнання в прямовій формі) є рівне з лівою частиною рівнання цієї простої, коли в нього вставити вартости значників даної точки.

Поміркуємо ще про знак вартости d.

В першому випадку, коли точка її початок осей лежить з ріжних боків простої, сума $x_0 cs\,\varphi + y_0 sn\,\varphi$ більша ніж δ (бо $\delta_0 > \delta)$, а тому d після обчислення взору (32) є додатнє.

У другому випадку, коли точка лежить з тогож боку простої, що й початок координат, то сума $x_0 cs\varphi + y_0 sn\varphi$ менш від δ (бо $\delta_0 < \delta$), а тому d, після обчислення взору (32) є від'ємне.

Нам лишається розглянути, ще один випадок, коли точка $M(x_0\,y_0)$ лежить з тогож боку простої, що й початок координат, але далі, ніж він. (рис. 46).

В цім разі згідно з нашою умовою

$$MC = -d$$

Але $MC = OK + OL$, себ-то $-d = \delta_0 + \delta$,

або: $\qquad d = -(\delta_0 + \delta)$.

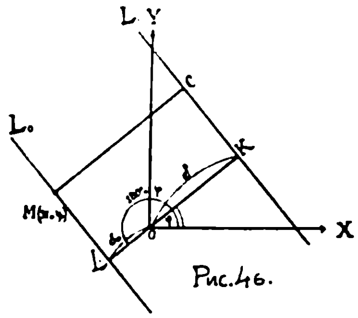


Рис.46.

Але коли проста L_0 лежить з протилежного боку від початку координат, порівнюючи з простою L, то кут, що його утворює прям δ_0 з додатнім напрямом осі X — іє, буде вже не φ, а $180^0 + \varphi$. Тому рівнання простої L_0 матиме вигляд: $x\,cs\,(180^0 + \varphi) + y\,sn\,(180^0 + \varphi) = \delta_0$,

$$\text{або: } -xcs\,\varphi - ysn\,\varphi = \delta_0.$$

Беручи на увагу те, що проста L_0 переходить через точку $M(x_0, y_0)$, ми матимемо для δ_0 вартість:

$$\delta_0 = -(x_0 cs\,\varphi + y_0 sn\,\varphi).$$

Таким чином: $d = -\ \delta_0 - \delta = x_0 cs\varphi + y_0 sn\varphi - \delta.$

[Одержуємо той самий взір, що й перед цим].

Зручніш, коли рівнання простої визначено в алгебричній формі: $ax + by + c = o.$

Тоді переводимо його в прямову форму:

$$\frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

(де знак $\sqrt{\ }$ противний знакові c, бо $\dfrac{-c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = \delta$ мусить бути додатнім).

Тоді: $\dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = cs\,\varphi\,;\quad \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}; = sn\,\varphi\,;$

$\delta = \dfrac{-c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}.$ Вставивши знайдені вартости у взір для віддалення точки $M(x_0, y_0)$ від простої, а саме у взір: $d = x_0 cs\,\varphi + y_0 sn\,\varphi - \delta$, матимемо:

$$d = \frac{ax_0}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{by_0}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \;\ldots\ldots \quad (33)$$

(де знак перед $\sqrt{\ }$ є противний знакові перед c).

Щоб обчислити віддалення точки від простої, визначеної алгебричним рівнанням, треба перевести це рівнання в прямову форму, взяти ліву частину його і вставити в неї значники даної точки.

Приклад:

Обчислити віддалення точок 1) $A(0,1)$ і 2) $B(2,1)$ від простої:

$$3x + 4y = 6.$$

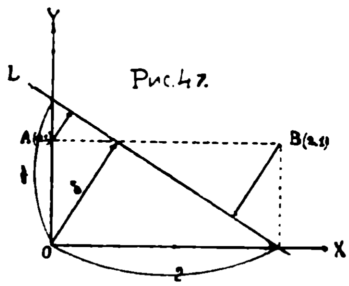
Рівнання простої в прямовій формі буде:

$$\frac{3x + 4y - 6}{+\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0, \text{ або } \frac{3x + 4y - 6}{5} = 0$$

Тому: $$d_1 = \frac{3.0 + 4.1 - 6}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$d_2 = \frac{3.2 + 4.1 - 6}{5} = +\frac{4}{5}.$$

Відклавши на рисунку 47 просту L і помітивши точки A і B, ми переконуємося в правдивості наших вислідів.



Загальний взір для віддалення точки від простої надається також і до обчислення довжини пряму, спущеного з початку осей на просту.

Справді, у взір:

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

вставимо значники початку осей $O(o,o)$ й одержимо:

$$d = \frac{a.o + b.o + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Але ми знаємо вже, що:

$$\delta = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

Тому: $\delta = -d.$

Приклад:

Візьмім рівнання попереднього прикладу:

$$\frac{3x+4y-6}{5}=0$$

$$\delta = -d = -\frac{3.0+4.0-6}{5} = +\frac{6}{5}$$

Вправи.

Ч — 66. *Обчислити віддалення:*

1) точки $A(2,7)$ *від простої:* $3x+4y=14$
2) » $B(-2,3)$ *»* $2x+y-4=0.$

Ч — 67. *Обчислити віддалення від простої:* $5x+12y+$ $+60=0$ *точок: 1)* $A(-9,-6)$; *2)* $B(2,4)$; *3)* $C(4,-10)$; *4)* $D(-5,-2)$; *5)* $E(-12,0)$.

Ч — 68. *Теж — від простої:* $5x+2y+10=0$ *точок: 1)* $A(1,-3)$; *2)* $B(-4,1)$; *3)* $C(-2,0)$; *4)* $D(-5,-2)$.

Ч — 69. *Обчислити довжину висот трикутника, що має вершками:*

1) $A(1,2)$, $B(2,-2)$, $C(-3,-4)$;
2) $A(3,7)$, $B(5,-1)$, $C(-3,5)$.

Ч — 70. *Написати рівнання простої, що переходить через точку* $A(-4,6)$ *і має від точки* $B(4,5)$ *віддалення* $p=4$.

Розвязок:

Рівнання простої, що переходить через A буде:

$$y-6=m(x+4) \quad \ldots(1)$$

Треба визначити змінник m. Дамо рівнанню *(1)* прямову форму:

$$\frac{mx-y+4m+6}{\pm\sqrt{m^2+1}}=0$$

Віддалення простої від точки B дано $p = 4$, а тому:

$$d = \frac{4.m - 5 + 4m + 6}{\pm\sqrt{m^2 + 1}} = 4$$

або: $$48m^2 + 16m - 15 = 0$$

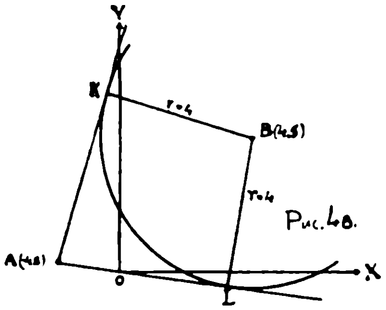
Звідци: $$m_1 = -\frac{3}{4};\ m_2 = \frac{5}{12}.$$

Тому рівнання *(1)* одержує вигляд:

1) $y - 6 = -\frac{3}{4}(x + 4)$, або $3x + 4y - 12 = 0$;

2) $y - 6 = \frac{5}{12}(x + 4)$, або $5x - 12y + 92 = 0$

Два розвязки, бо з точки (рис. 48) можна повести дві дотичні до кола. Через те одержимо прості AK і AL, що відповідають умові задачі.

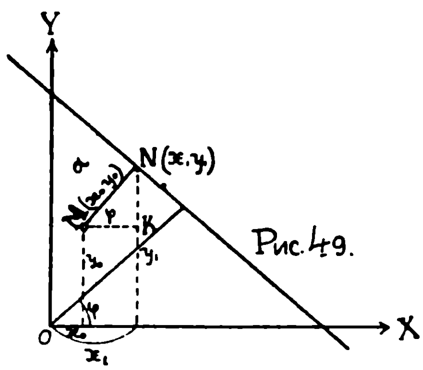


Ч — 71. *Написати рівнання простих, що:*

1) переходить через точку $A(1, -1)$ і має віддалення $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ від точки $B(2,7)$;

2) творить на осі X — ів відтинок $^{19}/_8$ і має віддалення $p = -3$ від точки $C(5, {}^3/_2)$.

§ 20. Мет точки на просту.



Як відомо, метом точки на просту зветься основа пряму, спущеного з даної точки на просту. Знайдемо значники такого мету. Хай точка $M(x_0, y_0)$ є та, що з неї спущено прям на просту, а точка $N(x_1, y_1)$ є основа цього пряму.

З трикутника MNK маємо:

$MK = x_1 - x_0 = MN\cos\varphi$; $KN = y_1 - y_0 = MN\sin\varphi$,

але $MN = -d$. Тому:

$$x_1 - x_0 = -dcs\,\varphi\,;\ y_1 - y_0 = -dsn\,\varphi.$$

А звідци:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 - dcs\,\varphi \\ y_1 &= y_0 - dsn\,\varphi \end{aligned}\right\} \dots\dots (34)$$

або:
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 - (x_0 cs\,\varphi + y_0 sn\,\varphi - \delta) cs\varphi \\ y_1 &= y_0 - (x_0 cs\,\varphi + y_0 sn\,\varphi - \delta) sn\,\varphi \end{aligned}\right\} \dots\dots (35)$$

Коли рівнання дано в алгебричній формі, то ми знаємо, що:

$$cs\,\varphi = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}};\ sn\,\varphi = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

Тому:

$$x_1 = x_0 - dcs\,\varphi = x_0 - \frac{ax_0 + by_0 + c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

або:

$$x_1 = x_0 - \frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2+b^2}$$

аналогично:

$$y_1 = y_0 - \frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2+b^2} \quad \dots\dots (36)$$

Приклад:

Знайти мет точки $A(2, -4)$ на просту: $3x + 4y - 15 = 0$
Прямова форма рівнання простої буде:

$$\frac{3x + 4y - 15}{5} = 0$$

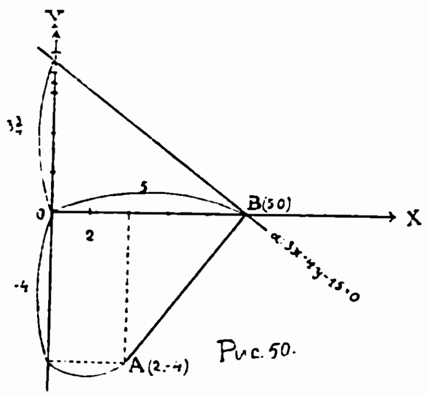
Отже:

$$x_1 = 2 - \frac{3\,(3.2 - 4.4 - 15)}{25} = 2 + 3 = 5$$

$$y_2 = -4 - \frac{4\,(3.2 - 4.4 - 15)}{25} = -4 + 4 = 0.$$

Дамо геометричну інтрепретацію: проста $3x + 4y - 15 = 0$ творить на осях відтинки: $x = 5$; $y = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Нарисувавши точку $A\ (2, -4)$ і спустивши прям на просту L, маемо:



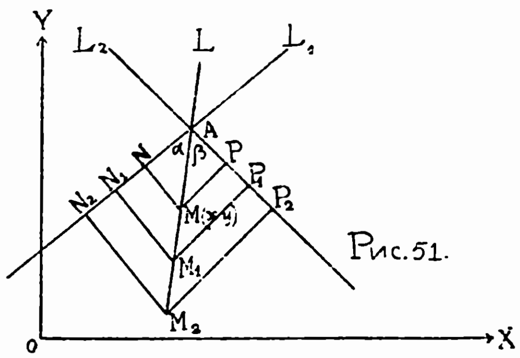
§ 21. Жмуток простих.

Хай дано дві простих, що визначаються рівнаннями:

$$x\, cs\, \varphi_1 + y\, sn\, \varphi_1 = \delta_1 \quad (L_1)$$
$$x\, cs\, \varphi_2 + y\, sn\, \varphi_2 = \delta_2 \quad (L_2)$$

Теорема. **Коли через точку перехрестя двох простих повести третю довільну просту, то вона е геометричний осередок точок, що віддалення їх від двох даних простих е в сталому відношенню для всіх точок цієї простої.**

Доведемо це. Візьмім шерег точок $M_1\, M_1\, M_2 \ldots.$ на простій L і спустимо на дані прості L_1 і L_2 прями: MN, M_1N_1 $M_2N_2 \ldots.$ MP, M_1P_1, $M_2P_2 \ldots.$ Утвориться шерег схожих трикутників (рис. 51).



Визначимо з кожного з цих трикутників $sn\, \alpha$ і $sn\, \beta$. Тоді матимемо:

$$sn\, \alpha = \frac{MN}{MA} = \frac{M_1N_1}{M_1A} = \frac{M_2N_2}{M_2A} = \text{і т д.}$$

$$sn\,\beta = \frac{MP}{MA} = \frac{M_1P_1}{M_1A} = \frac{M_2P_2}{M_2A} = \text{і т д.}$$

Поділивши перші рівности на другі матимемо:

$$\frac{sn\,a}{sn\,\beta} = \frac{MN}{MP} = \frac{M_1N_1}{M_1P_1} = \frac{M_2N_2}{M_2P_2} =, \text{ і т. д. } (const)$$

Таким чином, проста L є геометричний осередок точок, віддалення яких від обох даних простих мають стале відношення, рівне з відношенням *sinus'ів* кутів, що творить L з цими простими.

Сталу величину (const) відношення віддалень простої L від простих L і L_2 означимо через λ і тоді матимемо для якої небудь довільної точки $M(x,y)$, що лежить на простій L, рівнання:

$$\frac{MP}{MN} = \lambda$$

Це рівнання буде прикметою того, що точка $M(x,y)$ напевне лежить на простій L. Ми вже знаємо, що таке рівнання має назву рівнання даної простої L. Визначимо тепер з рівнань даних простих L_1 і L_2 вартости MP *і* MN.

MP — є віддалення точки $M(x,y)$ від простої L_2, а тому:

$$MP = x\,cs\,\varphi_2 + y\,sn\,\varphi_2 - \delta_2$$

[де x,y — значники точки $M(x,y)$].

Так само MN, як віддалення точки M від простої L_1 буде:

$$MN = x\,cs\,\varphi_1 + y\,sn\,\varphi_1 - \delta_1$$

(де x,y значники точки M).

Таким чином, **рівнання простої, що переходить через перехрещення двох даних простих є:**

$$\frac{x\,cs\,\varphi_2 + y\,sn\,\varphi_2 - \delta_2}{x\,cs\,\varphi_1 + y\,sn\,\varphi_1 - \delta_1} = \lambda$$

або:

$$(x cs\,\varphi_2 + y\,sn\,\varphi_2 - \delta_2) - \lambda\,(x cs\,\varphi_1 + y\,sn\,\varphi_1 - \delta_1) = o. \quad (37)$$

Примітка: Ми мали змогу означити через λ і обернене відношення, себто $\frac{MN}{MP} = \lambda$ і тоді рівняння мало-б вигляд:

$$(x cs \varphi_1 + y\, sn\, \varphi_1 - \delta_1) - \lambda(x\, cs\, \varphi_2 + y\, sn\, \varphi_2 - \delta_2) = o$$

Це показує, що черга рівнань даних простих при складанню рівнання нової простої, що переходить через їх перехрестя, не має значіння.

Означимо, слідом за німецьким геометром Плюкером, ліві частини рівнань:

$$x cs\, \varphi_1 + y\, sn\, \varphi_1 - \delta_1 = o \quad (L_1)$$
$$x\, cs\, \varphi_2 + y\, sn\, \varphi_2 - \delta_2 = o \quad (L_2)$$

через P_1 і P_2.

Тоді маємо рівняння простих: $P_1 = O$ і $P_2 = O$.

Коли в рівнанні простої, що переходить через перехрестя даних, також означимо ліву частину через P, то рівнання простої L буде: $P = O$.

Тоді: $$(P =)\ P_1 - \lambda P_2 = O \ldots . \quad (38)$$

буде рівнання простої, що переходить через перехрестя даних простих $P_1 = O$ і $P_2 = O$.

Дослідимо тепер, яку ролю в рівнанню (37) відограє змінник λ.

Як ми вже раніш переконалися, він має вартість:

$$\lambda = \frac{sn\, \alpha}{sn\, \beta}$$

Коли давати λ ріжні довільні вартости, напр: $\lambda'\ \lambda'' \ldots .$ то одержимо ріжні прості L', $L'' \ldots .$, що для них:

$$\lambda' = \frac{sn\, \alpha_1}{sn\, \beta_1}\ ;\ \lambda'' = \frac{sn\, \alpha_2}{sn\, \beta_2} \text{ і т. д.}$$

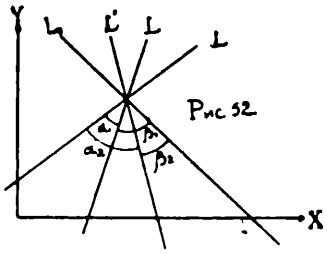
Всі ці прості переходять через точку перехрестя простих L_1 і L_2.

Тому рівнання:

$$P_1 - \lambda P_2 = O \ldots . \quad (39)$$

можна вважати за **рівняння жмутка простих, що переходить через перехрестя двох даних простих; останні будемо звати напрямними жмутка.**

Даючи окремі вартости змінникові жмутка (параметрові) λ, будемо мати рівняння окремих простих з цього жмутка.



[Самі прості L_1 і L_2 також належать до цього жмутка.

Справді:

1) давши λ вартість $\lambda = o$, одержимо $P_1 = O$],

2) перетворивши рівняння так: $P_1 = \lambda\, P_2$; $P_2 = \frac{P_1}{\lambda}$ і давши вартість $\lambda = \infty$, матимемо $P_2 = O$].

Розглянемо ще випадок, коли рівняння простих дані в алгебричній формі:

$$P_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 = O$$
$$P_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 = O$$

Перевівши ці рівняння в прямову форму, одержимо:

$$P_1 = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B^2{}_1}} = 0$$

$$P_2 = \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$

І через те рівняння жмутка переміниться в:

$$P = P_1 - \lambda\ P_2 = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \lambda\ \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$

Або, помноживши члени рівняння на $\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ дамо рівнанню такий вигляд:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 - \lambda\frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\,(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$$

Нарешті, означивши:

$$\lambda\frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \kappa$$

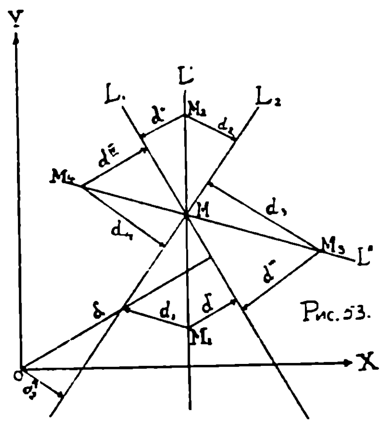
матимемо остаточну форму рівнання жмутка, а саме:

$$A_1x + B_1y + C_1 - \kappa (A_2x + B_2y + C_2) = 0 \; .... \quad (40)$$

де $\kappa = \lambda \dfrac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B^2_2}}$ також довільна величина, бо має чинником λ.

Розглянемо тепер, якого знаку буде жмутковий змінник λ.

Ми знаємо, що λ є відношення прямів на дані прост. L_1 і L_2 з якої небудь точки простої L (L' або L''), що переходить через точку перехрестя даних (рис. 53).



Проста L може мати два положення L' і L'' зглядно простих: L_1 і L_2. Розглянемо попереду точки M_1 і M_2, що лежать на простій L_1.

Взявши на увагу взаємне положення початку координат O і точок M_1, M_2, M_3 і M_4 зглядно даних простих L_1 і L_2, побачимо, що:

1) для точки M_1 змінник буде:

$\lambda = \dfrac{d_1}{d'}$, де d' — від'ємне а d_1 — додатнє, а тому:

λ, або κ величина від'ємна.

2) Теж саме для точки M_2:

$\lambda = \dfrac{d_2}{d''}$, де d'' — додатнє, а d_2 — від'ємне, а тому:

λ, або κ_1 — величина від'ємна.

Отже для простої L_1 жмутковий змінник λ є число від'ємне.

Розглянемо тепер точки M_3 і M_4 на простій L''.

1) Для точки M_3 змінник λ буде:

$\lambda = \dfrac{d_3}{d'''}$, де d_3 є величина додатня і d''' також додатня, тому λ — величина додатня.

2) Для точки M_4 змінник λ буде:

$\lambda = \dfrac{d_4}{d^{IV}}$, де d_4 — величина від'ємна і d^{IV} — також величина від'ємна, а тому λ — величина додатня.

Отже, для простої L'' жмутковий змінник λ є число додатне.

Таким чином, проста, що переходить через перехрестя двох даних і визначається рівнанням $P_1 - \lambda P_2 = 0$, має жмутковий змінник λ додатній, коли проста перетинає кут, що в його полі лежить початок осей, і від'ємний, коли проста перетинає кут, суміжний з першим.

Задача 8.

Написати рівнання симетральної кута, утвореного простими.

1) $x cs\,\varphi_1 + y sn\,\varphi_1 = \delta_1$, або $P_1 = 0$

2) $x cs\,\varphi_2 + y sn\,\varphi_2 = \delta_2$, або $P_2 = 0$.

Рівнання якої небудь простої, що переходить через перехрестя даних буде:

$$P_1 - \lambda P_2 = 0$$

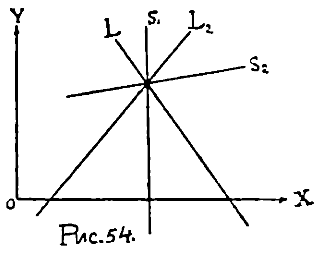


Рис. 54.

Як би ця проста була симетральною, то абсолютною величиною змінника λ була-б одиниця (бо симетральна є геометричний осередок точок, рівновіддалених від рамен кута). Але з попередніх міркувань що-до знаку λ, ми знаємо, що, коли проста S_2 є симетральною кута, що в його полі лежить початок осей, то $\lambda = +1$; а коли проста S_1 є симетральною кута, суміжного з першим, то $\lambda = -1$.

Таким чином, рівнання симетральної S_1 буде:

$$P_1 - (-) P_2 = 0, \text{ або}$$

$$P_1 + P_2 = 0 \;.\;.\;.\;.\; (39)$$

а рівнання симетральної S_2 буде:

$$P_1 - P_2 = 0 \;.\;.\;.\;.\; (40)$$

Висновок:

Коли ліва частина рівняння симетральної внутрішнього куту трикутника складається (в залежности від положення зглядно початку вісей самого Δ - ка) із суми (або ріжниці) лівих частин рівнань рамен його, то й ліва частина рівнання симетральної суміжного йому зовнішнього куту тогож Δ - ка буде завжди ріжницею (або сумою) тих самих величин і навпаки.

Напр., коли рівнання симетральної внутрішнього куту трикутника має вигляд: $P_1 \pm P_2 = 0$, то рівнання симетральної зовнішнього, суміжного йому, куту має протилежну форму, а саме: $P_1 \mp P_2 = 0$.

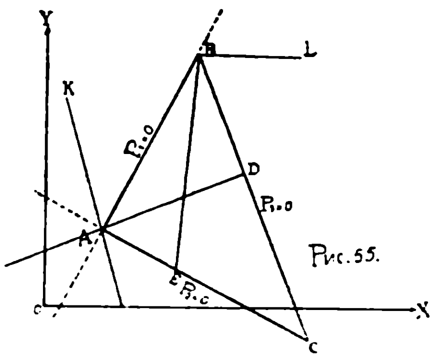
Наприклад, в даному положенню трикутника (рис. 55)

1) Рівнання симетральної AD буде: $P_1 - P_2 = 0$

(бо симетральна перетинає кут, що має в своїм полі початок осей), а рівнання симетральної AK буде: $P_1 + P_2 = 0$

2) Рівнання симетральної BE буде: $P_1 + P_3 = 0$

а рівнання симетральної BL: $P_1 - P_3 = 0$



В тому разі, коли рівнання простих має алгебричну форму, знак жмуткового змінника κ рівнання: $L_1 - \kappa L_2 = 0$ підлягає тому самому правилу, що й λ, бо й справді:

$$\kappa = \lambda \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$ і тому знак κ є однаковий зі знаком λ.

Приклад: Припустім, що прості мають рівняння:

$$3x + 4y - 12 = 0$$
$$5x + 12y - 48 = 0$$

тоді рівняння симетральної кута, утвореного ними, буде:

$$3x + 4y - 12 \mp \frac{5}{13}(5x + 12y - 48) = 0$$

Також, коли рівняння простих буде:

$$3x + 4y - 12 = 0$$
$$5x + 12y + 16 = 0$$

то рівняння симетральноі кута між ними буде:

$$3x + 4y - 12 \mp \frac{5}{-13}(5x + 12y + 16) = 0$$

§ 22. Умова того, що три дані прості переходять через одну спільну точку.

Ми тільки що довели, що коли (рис. 56) проста $P_1 = 0$ переходить через перехрестя двох других: $P_2 = 0$ і $P_3 = 0$, то ліва частина її рівняння буде:

1) $P_1 = P_2 - \lambda P_3 \ (= 0)$.

Так само ліва частина рівняння простої L_2 буде:

2) $P_2 = P_3 - \mu P_1 \ (= 0)$,

а простої L_3 буде:

3) $P_3 = P_1 - \nu P_2 \ (= 0)$.

Додавши всі ці рівности одну до одної, ми, після скорочення схожих членів, одержимо:

$$\mu P_1 + \nu P_2 + \lambda P_3 = 0 \ . \ . \ . \ . \quad (41)$$

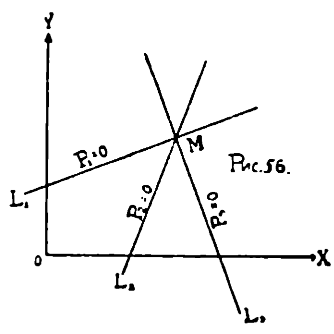


Рис. 56.

З наших міркувань видко, що рівність (41) є конечним вислідом з того, що три прості переходять через загадану точку. Покажемо тут, що зазначена рівність (41) є також і вистарчальною умовою (або ознакою) для того, щоб три загадані прості мали одну спільну точку перехрещення.

Для цієї мети доведемо таке твердження:

Коли для трьох простих, загаданих рівняннями в прямовій формі: $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, і $P_3 = 0$, можна дібрати такі, нерівні з нулем, довільні чинники λ, μ і ν, щоб сума здобутків лівих частин кожного з цих рівнань відповідно на λ, μ і ν рівналася нулю, то ці прості мають одну спільну точку перехрещення.

Коли для простих $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ і $P_3 = 0$ існує умова:

$$\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 = 0 \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

то точка перехрестя двох з них, напр. точка $(x_1 y_1)$ перехрестя простих $P_1 = 0$ і $P_2 = 0$, конче і належить 3-ій простій $P_3 = 0$, бо значники x_1, y_1 мусять обертати в нуль многочлени P_1 і P_2, а тому й сума здобутків їх на λ і μ буде рівна нулю:

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; (б)$$

Коли ми вартість $\lambda P_1 + \mu P_2$ з рівности $(б)$ вставимо в рівність (a), то одержимо:

$$\nu P_3 = 0$$

А що $\nu \neq 0$, то мусить бути $P_3 = 0$,

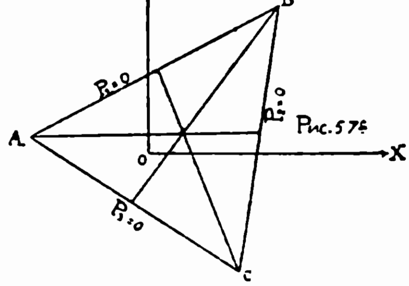
себто, значники точки перехрестя двох перших простих обертатимуть у нуля многочлен P_3, а через те точка (x_1, y_1) лежить і на простій $P_3 = 0$.

Отже, всі 3 прості мусять перехрещуватися в цій одній точці.

Задача І.

Довести, що симетральні внутрішніх кутів трикутника перехрещуються в спільній точці.

1-й випадок.



Коли початок визначних осей лежить в середині трикутника.

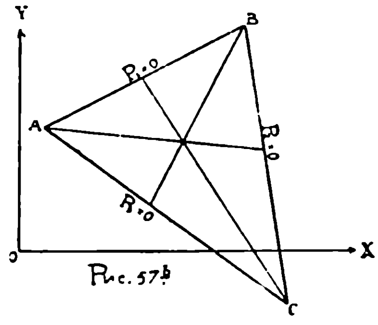
В цім разі зазначений початок лежить у полі всіх кутів, а через те симетральні кутів мають рівнання: 1) $P_1 - P_2 = 0$ 2) $P_2 - P_3 = 0$ 3) $P_3 - P_1 = 0$.

Звідци сума їх:

$$P_1 - P_2 + P_2 - P_3 + P_3 - P_1 = 0.$$

Надаючи довільним чинникам вартости рівні з одиницею і додавши одна до одної ліві частини всіх трьох рівнань симетральних, матимемо нуль.

2-й випадок.



Коли початок визначних осей лежить поза трикутником.

В цім разі згаданий початок лежить в полі одного з кутів трикутника, напр., B, і рівнання симетральних будуть:

$$1)\ P_1 - P_2 = 0 \quad 2)\ P_2 + P_3 = 0 \quad 3)\ P_3 + P_1 = 0$$

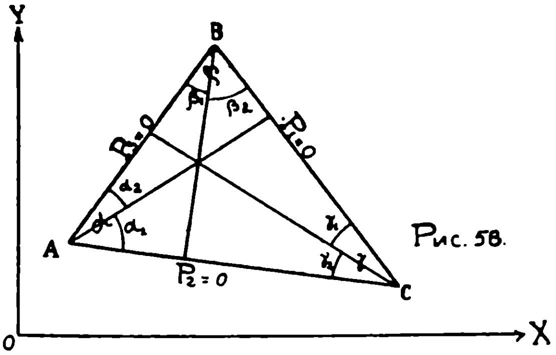
Помноживши перші два рівнання на довільний чинник $+1$, а третє на чинник -1, ми, додавши ліві частини цих трьох рівнань одно до одного, одержимо:

$$\begin{array}{r} P_1 - P_2 \\ +\quad P_2 + P_3 \\ -P_3 - P_1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Таким чином, всі симетральні внутрішніх кутів трикутника перехрещуються в одній точці.

Задача II.

Довести, що висоти трикутника перехрещуються в одній спільній точці.



Напишемо рівнання кожної висоти, користуючись тим, що вона переходить через перехрестя двох із боків трикутника.

Рівнання висоти h_{BC} буде:

$$P_2 - \lambda P_3 = 0$$

Обчислимо λ. Ми знаємо, що: $\lambda = \frac{sn\alpha_1}{sn\alpha_2}$, але тому, що h_{BC} є висотою трикутника, то $\alpha_1 = 90^0 - \gamma$; $\alpha_2 = 90^0 - \beta$,

тому: $$\lambda = \frac{cs\,\gamma}{cs\,\beta}$$

Отже: $P_2 - \lambda P_3 = 0$ буде мати вигляд:

$$1)\ P_2 cs\,\beta - P_3 cs\,\gamma = 0$$

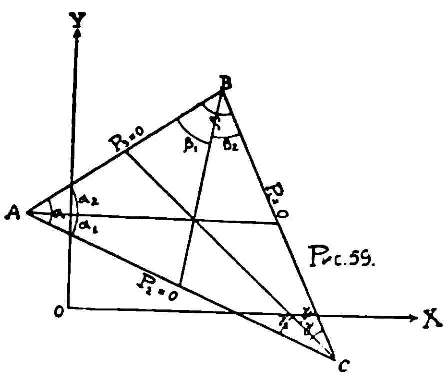
Аналогично виведемо рівнання

висоти h_{AC}: $P_3 - \lambda_1 P_1 = 0$, або:

$$2)\ P_3 cs\,\gamma - P_1 cs\,\alpha = 0$$

і висоти h_{AB}: $P_1 - \lambda_2 P_2 = 0$ або:

$$3)\ P_1 cs\,\alpha - P_2 cs\,\beta = 0$$



Додавши ліві частини рівнань висот одну до одної, матимемо:

$$\begin{array}{r} P_2 cs\,\beta - P_3 cs\,\gamma \\ + P_3 cs\,\gamma - P_1 cs\,\alpha \\ P_1 cs\,\alpha - P_2 cs\,\beta \\ \hline 0 \end{array}$$

Отже, висоти трикутника перехрещуються в одній точці.

Задача III.

Довести, що всі три осередні трикутника перехрещуються в одній спільній точці.

Як і в попередній задачі, напишемо рівнання осередніх, яко простих, що переходять через перехрестя двох инших:

Тому: 1) рівнання M_{BC} буде : $P_2 - \lambda P_3 = 0$

2) » M_{AC} » : $P_3 - \lambda_2 P_1 = 0$

3) » M_{AB} » : $P_1 - \lambda_3 P_2 = 0$

Вартости змінників λ_1, λ_2, λ_3 виведемо з тієї властивости осередньої, що вона дробить кут на частини, що їх sinus'и пропорційні sinus'ам кутів при основі.

Тому:

$$\lambda_1 = \frac{sn\,\alpha_1}{sn\,\alpha_2} = \frac{sn\,\gamma}{sn\,\beta}$$

$$\lambda_2 = \frac{sn\,\beta_1}{sn\,\beta_2} = \frac{sn\,\alpha}{sn\,\gamma}$$

$$\lambda_3 = \frac{sn\,\gamma_1}{sn\,\gamma_2} = \frac{sn\,\beta}{sn\,\alpha}$$

Тому рівнання осередніх будуть:

1) $M_{BC}: \; P_2 sn\,\beta - P_3 sn\,\gamma = 0$
2) $M_{AC}: \; P_3 sn\,\gamma - P_1 sn\,\alpha = 0$
3) $M_{AB}: \; P_1 sn\,\alpha - P_2 sn\,\beta = 0$

Склавши ліві частини рівнань матимемо:

$$\begin{array}{r} P_2 sn\,\beta - P_2 sn\,\gamma \\ + \; P_3 sn\,\gamma - P_1 sn\,\alpha \\ P_1 sn\,\alpha - P_2 sn\,\beta \\ \hline 0 \end{array}$$

Задача IV.

Довести, що симетральні боків кожного трикутника перехрещуються в одній спільній точці (центр кола обведеного).

Хай трикутник буде загаданий значниками його вершків: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) C(x_3, y_3)$.

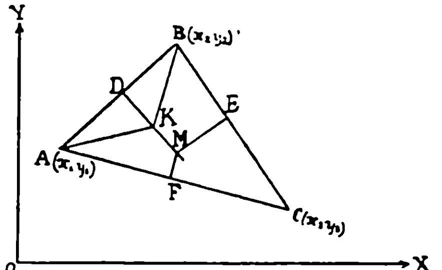


Рис.60.

Складемо рівнання напр. DK— симетральної боку AB.

Коли на цій симетральній візьмемо якусь довільну точку $K(x,y)$, то на підставі того, що симетральна відтинку є геометричним осередком точок рівновіддалених від кінців відтинку, будемо мати рівність: $KA = KB$. Це є основною прикметою точок, що належать до симетральної боку AB, а тому є її рівнанням. Обчислюючи вартости KA і KB через значники їх кінців, маємо:

$$AK = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$
$$BK = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}.$$

Тому рівнання симетральної боку AB матиме вигляд:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 \dots \quad (1)$$

(Це є рівнання простої, бо другі степени x й y зникають, коли знести дужки).

Аналогичним способом можемо скласти рівнання:

1) Симетральної боку BC:

$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=(x-x_3)^2+(y-y_3)^2 \dots \quad (2)$$

і 2) Симетральної боку AC:

$$(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 \dots \quad (3)$$

Звичайним почленним сумуванням рівнань (1), (2) і (3), переконуємося, що всі ці симетральні збігаються в одній спільній точці.

Справді:

$$\begin{array}{rl} & (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 \\ + & (x-x_2)^2+(y-y_2)^2=(x-x_3)^2+(y-y_3)^2 \\ & (x-x_3)^2+(y-y_3)^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 \\ \hline & 0 \quad = \quad 0 \end{array}$$

§ 23. Задачі до розділу I-го „проста лінія“.

Ч — 72. *Знайти кут, що творять прості:*

1) $6y=\frac{5}{4}x+11$ 2) $3x+5y=4$ 3) $y-x=0$

з віссю X — ів (теж з віссю $У$ — ів)

[1) $\alpha=11^0\,46'\,6''$ 2) $\alpha=149^0\,2'\,10''$ 3) $\alpha=45^0$]

Ч — 73. *Написати рівнання простих, що:*

1) творить з віссю X — ів кут 60^0; відтинає від осі $У$ — ів відтинок $b=4{,}5$

2) відтинає від осей відтинки: $a=-2$, $b=5$.

3) творить з віссю $У$ — ів кут в 45^0 і відтинає від осі X — ів відтинок $a=-3$.

[1) $y=x\sqrt{3}-4{,}5$ 2) $y=2{,}5x+5$ 3) $y=x+3$].

Ч — 74. *Скласти рівнання простої, що:*

1) рівнобіжна до осі X — ів і творить відтинок на осі $У$ — ів: $b=3$

2) рівнобіжна до осі Y — ів і творить відтинок на осі X — ів: $a = -4,5$.

3) переходить через початок осей і має кут спаду на вісь X — ів : $a = 150^0$

4) переходить через точку $A(13, -4)$ і має кут спаду на вісь X ів : $a = 150^0$

4) переходить через точку $B(-5, -7)$ і має кут спаду на вісь X — ів : $a = 225^0$

[*1)* $y = 3,2$; *2)* $x = -4,5$; *3)* $3y + x\sqrt{3} = 0$; *4)* $3y + x\sqrt{3} + 12 - 13\sqrt{3} = 0$; *5)* $y = x - 2$.]

Ч — 75. *Скласти рівнання прстої, що переходить через точки:*

1) $A(3,5)$ і $B(4, -1)$; *2)* $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ і $B(-3,5, 0,5)$

3) $M(x_1, y_1)$ і $N(-e, o)$.

[*1)* $y = -6x + 23$ *2)* $22y + 3x = 2$ *3)* $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 + e}(x - x_1)$]

Ч — 76. *Скласти рівнання боків трикутника, що має своїми вершками:*

1) $A(4,5)$, $B(2, -2)$ і $C(-5,0)$;
2) $A(0,0)$, $B(8,6)$ і $C(10, -4)$;
3) $A(3,5)$, $B(7, -3)$ і $C(-4, -3)$.

[*1)* $y = \frac{7x}{2} - 9$; $7y + 2x + 10 = 0$; $9y - 5x = 25$.

2) $3x = 4y$; $5x + y = 46$; $2x + 5y = 0$.

3) $2x + y = 11$; $y = -3$; $8x - 7y + 11 = 0$].

Ч 77. *Скласти рівнання простих, що:*

1) переходить через точку $A(3, -1)$ рівнобіжно до простої: $2y + 4 = 3x$;

2) переходить через точку $B(-5,2)$ прямово до простої $2y - x + 5 = 0$.

[*1)* $2y = 3x - 11$; *2)* $2x + y + 8 = 0$].

Ч — 78. *Написати рівнання простих, що переходять через точку $A(4,5, 6)$ і одна з них рівнобіжна, а друга прямова до простої, що сполучує точки: $B(-3,3)$ і $C(3, -4)$*

[*1)* $y = -\frac{7}{6}x + 11,25$; *2)* $7x - 6x = 15$].

Ч — 79. *Обчислити віддалення точки* $A\ (5, -12,2)$ *від простих:*

$$1)\ y = \frac{3}{4}x + \frac{2}{3};\ 2)\ 3x = y - 5;\ 3)\ \frac{y}{3} - \frac{x}{4} = 1;$$

$$4)\ 5y + 13x - 4 = 0.$$

$$[\,1)\ 13\frac{44}{75}\ \ 2)\ 3,22\sqrt{10}\ \ 3)\ 15,16\ \ 4)\ 0\,]$$

Ч — 80. *Обчислити боки трикутника, що має вершками:* $A\ (2,3);\ B\ (1,13);\ C\ (-4, -2)$.

$$[\,AB = \sqrt{101}\ ;\ BC = \sqrt{250}\ ;\ AC = \sqrt{61}\,].$$

Ч — 81. *Обчислити значники центра ваги трикутника з вершками:* $A\ (-15, -15)$, $B\ (-3,15)$, $C\ (15, -3)$.

$[\,x_0 = -1,\ y_0 = -1\,]$.

Ч — 82. *Знайти точки перехрестя простих:*

1) $3x = y - 5\ ;\ 5y + 13x + 3 = 0;$

2) $y = 3x - 1\ ;\ y - 3x - 7 = 0;$

3) $4x + 2y = 1\ ;\ 6x + 3y - \frac{3}{2} = 0.$

[1) $x_1 = -1$ $y_1 = 2$; 2) *прості рівнобіжні*; 3) *одна проста*.

Ч — 83. *Знайти значники вершків і центру ваги трикутника, що має рівнання боків:* $y + 3x = 7\ ;\ x + 7y + 11 = 0\ ;$ $x = 3y - 1$ $\left[\text{Центр ваги: } x_0 = \frac{1}{3};\ y_0 = -\frac{2}{3}\right]$

Ч — 84. *Трикутник має вершками:* $A\ (-4, -2)$ $B(5,7)$ $C\ (8,3)$. *Треба:*

1) *накреслити трикутник.*

2) *Обчислити основу* AB *і висоти* h_{AB}.

3) *Обчислити поле* $\triangle$ *- а через основу і висоту.*

$$\left[AB = 9\sqrt{2}\ ;\ h_{AB} = \frac{7\sqrt{2}}{2}\ ;\ S = 31,5\right]$$

Ч — 85. *Знайти віддалення від початку осей простої, що переходить через точки:* $A\ (-5,0)$, $B\ (-1, -7)$. $\left[\delta = \frac{7\sqrt{65}}{13}\right]$

Ч—86. *Знайти віддалення між простими: 1)* $y = 9x - 1$, *2)* $y - 9x = 7$. $\left[d = \frac{3\sqrt{82}}{41}\right]$

Ч—87. *Обчислити віддалення:*

1) точки A (2,2) від простої, що сполучує точки: B (4, —3) C (—5, —2);

2) точки A (10,11) і точки B (—10,1) від простої: $3x + 4y - 24 = 0$. $\left[1)\ d = \frac{43}{\sqrt{82}}\quad 2)\ d_1 = -10\ d_2 = +10\right]$

Ч—88. *Знайти висоти трикутника з вершками:* *A (2,1), B (3, —2) і C (—4, —1).* $[2\sqrt{2}, \sqrt{10}, 2\sqrt{10}.]$

Ч—89. *Через точку M (1,7) повести дві взаємопрямові прості, рівновіддалені від початку осей. Написати рівнання і знайти їх однакове віддалення.*

$[4x + 3y - 25 = 0;\ 4y - 3x - 25 = 0;\ \delta = 5]$.

Ч—90. *Обчислити кути, що творять між собою прості:*

1) $2x = 3y - 4$ і $2x - y = 2$;

2) $y = 2{,}5x + 0{,}5$ і $6x = 3y + 2{,}4$;

3) $y = 4x$ і $4x + y = 4$.

$$\left[1)\ tg\varphi = -\frac{4}{7}\quad 2)\ tg\,\varphi = \frac{1}{12}\quad 3)\ tg\varphi = -\frac{8}{17}\right]$$

Ч—91. *Обчислити кут між простими:* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *і* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *і користуючись знайденим при цьому взором, обчислити кути між простими:*

1) $4y - 3x = 4$ і $6y = 12x - 5$;

2) $y + 3x = 8$ і $3y = 12 - 2x$;

$6y + 5x = 30$ і $x = 5y - 10$.

$\left[tg\,\varphi = -\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2};\ 1)\ \varphi = 79^0 41' 42'';\ 2)\ \varphi = 37^0 52' 30'';\right.$ $\left.3)\ \varphi = 128^0 53' 4''.\right]$

Ч—92. *Знайти рівнання осередніх трикутника, обчислити їх довжину і значники їх перехрестя, коли вершки трикутника є: A (—5,2) B (3, —6) і C (4,7).*

$$\left[\text{Значники центру ваги: } x_0 = \frac{2}{3};\ y_0 = 1.\right]$$

Ч — 93. *Знайти точку перехрестя висот трикутника* 1) $A(0,0)$, $B(6,0)$ і $C(3,5)$;
2) $A(0,-1)$, $B(3,2)$ і $C(4,-3)$.

$$\left[\ 1)\ x_0 = 3;\ y_0 = \frac{9}{5};\ 2)\ x_0 = 6{,}25;\ y_0 = 4{,}75.\right]$$

Ч — 94. *Обчислити боки й кути трикутника:* 1) $A(2,1)$, $B(3,-2)$, $C(-2,-1)$; 2) $A(2,3)$, $B(4,-5)$, $C(-3,-6)$. [$\sqrt{10}$, $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{10}$.]

Ч — 95. *Скласти рівнання простої:*

1) *що переходить через перехрестя двох простих:* $2x = 3y + 12$ і $x = 6y - 12$ *рівнобіжно до осі* X — *ів.*

2) *що переходить через перехрестя простих:* $3y - 4x + 2 = 0$ і $5y - 3x - 4 = 0$ *рівнобіжно до осі* $У$ — *ів.*

[$y = 4$; $x = 2$]

Ч — 96. *Скласти рівнання простої, що переходить через перехрестя простих:* $y = 5x + 3$ і $4x - y + 1 = 0$ і *через середину відтинку:* $A(-1,4)$ і $B(4,3)$. [$y = 3x - 1$]

Ч — 97. *Написати рівнання простої, що:*

1) *з віссю* X — *ів утворює кут* $\alpha = 120^0$ *і має віддалення від початку осей* $\delta = 3$;

2) *переходить через точку* $A(6,7)$ *і віддалена від точки* $B(5,-8)$ *на* $d = \sqrt{113}$.

3) *переходить через точку* $A(-4,3)$ *і віддалена від початку вісей на* $\delta = 5$.

[1) $y + x\sqrt{3} = \pm 6$; 2) $7x - 8y + 14 = 0$; 3) $3y - 4x = 25$.]

Ч — 98. *Трикутник має вершки:* $A(6,-4)$, $B(8,2)$ і $C(-2,6)$; *обчислити значники центру кола, обведеного на цьому трикутникові.* $\left[x_0 = \frac{29}{17},\ y_0 = \frac{13}{17}\right]$

Ч — 99. *Обчислити луч кола, обведеного на трикутникові з боками:* $y = 4x - 9$, $x + y = 1$ і $4y = x + 9$.

[$r = \sqrt{5{,}78} = 2{,}4$]

Ч — 100. *Рівнання боків трикутника:* $y - x + 1 = 0$; $y + x = 1$; $x = 6$. *Обчислити значники перехрестя висот.* [*Трикутник прямокутній:* $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.]

Ч — 101. *Довести, що висоти трикутника:* $A(1,1)$, $B(-2,2)$ *і* $C(3,-5)$ *перехрещуються в одній точці.*

$$[\,2(x-3y+8)-1\,(5x-7y+2)+1\,(3x-y-14)=0\,]$$

Ч — 102. *Трикутник має вершки:* $A(-4,2)$ $B(4,-10)$ $C(10,6)$. *Довести, що центр ваги, перехрестя висот і центр кола, обведеного на трикутникові, лежат на одній простій.* [*центр ваги:* $\left(\frac{10}{3},-\frac{2}{3}\right)$, *точка перехрестя висот:* $\left(\frac{28}{25},\frac{2}{25}\right)$, *центр кола обведеного:* $\left(\frac{111}{25},-\frac{26}{25}\right)$; $\dfrac{\frac{111}{25}-\frac{10}{3}}{\frac{111}{25}-\frac{28}{25}}=\dfrac{-\frac{26}{25}+\frac{2}{3}}{-\frac{26}{25}-\frac{2}{25}}$, *або* $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.]

Ч — 103. *Розвязати трикутник, що має рівнання боків:*

$$y=x\,;\,x+y=0\,;\,y=2(x-1).$$

Ч — 104. *Дано трикутник ABC. Взявши основу AC і висоту* h_{AC} *за визначні осі, знайти: 1) рівнання і перехрестя висот 2) рівнання симетральних боків і центр обведеного кола.* [*Увага: За значники вершків вважати:* $A(x_1,0)$ $B(0,y_2)$ *і* $C(x_3,0)$. *Розвязок: 1) рівнання висот:* $yy_2-x(x-x_3)=0\,;x=0$ *і* $yy_2-x_3(x-x_1)=0$; *2) точка їх перехрестя:* $\left(0,\frac{x_1x_3}{x_2}\right)$]

Ч — 105. *Скласти в прямовій формі рівнання висот, коли вершки трикутника:* $A(6,0)$, $B(0,12)$ *і* $C(0,-3)$.

Ч — 106. *Вершок трикутника* $A(-1,2)$. *Рівнання висоти* h_{AB}: $x=2y$, *а* $h_{AC}: y=3x+10$. *Обчислити решту вершків трикутника і написати рівнання третьої висоти* h_{BC}? [*Увага: Точка перехрестя висот:* $M(-4,-2)$, *а рівнання третьої висоти, що переходить через точку A і M буде:* $4x-3y+10=0$. *Рівнання боків трикутника, яко прямів до висот:* $y+2x=0$, $3y+x-5=0$ *і т. д.*]

[*Розвязок:* $B(2,1)$ *і* $C(-2,4)$].

Ч — 107. *Написати рівнання симетральних, коли рамена кутів:*

1) $4x + 3y - 9 = 0$ *і* $8x - 15y + 12 = 0;$

2) $3x + 4y = 5$ *і* $12x - 5y + 8 = 0.$

$$\left[\ 1)\ 36x - 8y - 31 = 0\ ;\ 2x + 9y - \frac{213}{14} = 0\right.$$

$$\left. 2)\ 11x + 3y = 2\frac{7}{9}\ \text{ і }\ -3x + 11y = 15.\ \right]$$

Ч — 108. *Скласти рівнання простої, що переділює кут на части в* 36^0 *і* 63^0, *коли рамена мають рівнання:* $3x - 4y = 8$ *і* $12x - 5y = 12.$ $\left[\dfrac{3x - 4y - 8}{5} sn\, 63^0 = \dfrac{12x - 5y - 12}{13} sn\, 36^0\right]$

Ч — 109. *Написати рівнання простої, що:*

1) переходить через перехрестя простих: $5x + 3y - 15 = 0;$ $2x - 3y + 6 = 0$ *і точку:* $(2{,}5);$

2) переходить через перехрестя тих самих простих, а також через перехрестя простих: $5x - 4y - 20 = 0\ ;\ 5x + 7y - 35 = 0$ *[Увага. Задачу розвязати, користуючись властивістю жмутка простих, а перевірити, склавши рівнання простої, що переходить через дві визначені точки.]*

Ч — 110. *Довести, що середник двох боків трикутника є рівнобіжний до третього боку і рівний з його половиною (теж для трапезу).*

Ч — 111. *Написати рівнання простої, що належить до жмутка, визначеного двома простими:* $4x + 7y - 15 = 0$ *і* $9x - 14y - 4 = 0$ *і*

1) рівнобіжна до осі У — ів;

2) рівнобіжна до простої $2x - 3y - 9 = 0;$

3) прямова до першої з даних простих.

[Увага. В 1) Змінник рівнання визначається з тої умови, що рівнобіжна до осі У — ів має значник перехрестя з віссю Х — ів $y = 0\ ;\ x = const$*].*

[Розв: 1) $x = 2$ *2)* $2x - 3y = 1$ *3)* $3x + 2y - 8 = 0$*]*

Ч — 112. *Скласти рівнання геометричного осередку точок, що їх віддалення від даних простих:* $12x - 16y + 9 = 0$ *і* $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ *мають відношення* $\lambda = \frac{2}{3}$.

[$68x - 72y - 69 = 0$]

Ч — 113. *Рівнання боків трикутника:* $12x + 5y + 60 = 0$; $4x - 3y = 36$; $8x + 15y = 16$. *Знайти значники центра і луч введеного кола.* [$0\,(1, -4)$; $r = 4$].

Ч — 114. *Рівнання боків чотирикутника:* $x - 4y + 10 = 0$; $5x + 2y = 16$; $4x - 9y = 34$; $3y - 8x = 22$. *Довести, що середники сусідніх боків утворюють рівнобіжник.*

[*Рівнання середників:*

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{2};\quad y = -\frac{2}{3}x - \frac{13}{3};\quad y = \frac{9}{7}x + \frac{5}{2};$$

$y = \frac{9}{7}x - \frac{47}{14}$. *Отже, кутові змінники парами рівні.*]

Ч — 115. *Вершки чотирикутника:* $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(8,4)$ *і* $D(3,4)$. *Визначити, що це за чотирикутник і який чотирикутник утворюють середники сусідніх боків.*

[*1) ромб 2) прямокутник*]

Ч — 116. *Довести, що середники сусідніх боків прямокутника з вершками:* $A\,(3,3)$, $B\,(11,3)$, $C\,(11,-5)$ *і* $D\,(3,-5)$ *утворюють ромб.*

Ч — 117. *Довести, що середники сусідніх боків квадрату з вершками:* $A\,(0,0)$, $B\,(4,0)$, $C\,(4,-4)$ *і* $D\,(0,-4)$ *утворюють знова квадрат?*

Обчислення поверхнь та обсягів оборотових тіл за допомогою аналітичної геометрії.

Ч — 118. *Вершки трикутника:*

1) $A\,(0,0)$, $B\,(10,0)$ *і* $C\,(9,3)$;

2) $A\,(2,-3)$, $B\,(6,0)$ *і* $C\,(3,-1)$.

Обчислити поверхню і обсяг тіла, утвореного обертанням кожного з цих трикутників зокрема навколо осі X *— ів.*

[*1)* $S = 12\pi\sqrt{10} = 119{,}21$ *кв. од.*; $V = 30\pi = 94{,}25$ *кб. од.*

2) $S = \pi(15 + \sqrt{10} + 4\sqrt{5}) = 85{,}175$ *кв. од.*; $V = \frac{20}{3}\pi =$

$= 20{,}944$ *кб. од.*]

Ч — 119. *Вершки трикутника: $A(2,3)$, $B(5,7)$ і $C(-3,1)$. Обчислити обсяг тіла, утвореного обертанням цього $\triangle$ — а навколо найдовшого з боків.*

[*Рівнання найдовшого боку:* $y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$; $h = \frac{7}{5}$ і

$V = 6\frac{8}{15}\pi = 20{,}525$ *кб. од.*]

Ч — 120. *Вершки трикутника: $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $C(x_3,y_3)$. Обчислити обсяг тіла, утвореного обертанням цього трикутника навколо осі Y — ів. (У вислід вставити: $x_1 = 1$; $y_1 = 1$;*

$x_2 = 2$; $y_2 = 3$; $x_3 = 3$; $y_3 = 1{,}5$).

$$\Big[V = \frac{\pi}{3} [(y_2 - y_3)(x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3) +$$

$$+ (y_3 - y_1)(x_3^2 + x_1^2 + x_3x_1) - (y_2 - y_1)(x_2^2 + x_1^2 + x_2x_1)] =$$

$$= \frac{2}{3}\pi S(x_1 + x_2 + x_3), \text{ де } S \text{ — поле } \triangle \text{ — а. } V = 21{,}99 \text{ кб. од.} \Big]$$

Ч 121. *Рівнання боків трикутника: $y = x$; $4y + 3x = 42$; $y = 3$. Обчислити поверхню й обсяг тіла, утвореного обертанням цього трикутника навколо осі X — ів.*

[$S = 3\pi(29 + 9\sqrt{2}) = 393{,}27$ *кв. од.* $V = 84\pi = 263{,}90$ *кб. од.*]

Ч — 122. *Вершки чотирикутника $A(2,1)$, $B(4,3)$, $C(7,3)$ і $D(9,1)$. Обчислити V тіла, утвореного обертанням чотирикутника навколо осі X — ів.*

$$\Big[V = \frac{112}{3}\pi = 117{,}286 \text{ кб. од. } \Big]$$

Ч — 123. *Висота тристінної пираміди 12. Обчислити її обсяг, коли трикутник основи має вершки: $A(-4,2)$, $B(3,-5)$ і $C(4,5)$.* [$V = 154$ *кб. од.*].

Ч — 124. *Пряма чотиристінна призма має висоту 10, а в основі чотирикутник з вершками: $A(3,3)$, $B(0,5)$; $C(-4,0)$ і $D(-2,-5)$. Обчислити S і V призми.*

$[\,S = 10(\sqrt{13} + \sqrt{41} + \sqrt{29} + \sqrt{89}\,);\ V = 320$ *кб. од.* $]$

§ 24. Перетворення визначних осей.

Дуже часто буває потрібно обчислювати через значники точки, віднесені до однієї системи координат, нові значники тієї самої точки, віднесені до другої системи. Цю операцію звуть перетворенням визначних осей.

1-й випадок перетворення.

Осі нової системи рівнобіжні до осей старої.

Це перетворення має назву **рівнобіжного перенесення осей.**

Припустім, що осі даної системи є $XУ$, а осі нової системи $X'У'$. Початок нових осей має значники зглядно старої системи: $A(a,b)$.

На рисунку 61 бачимо, що:

$$x = OK;\ x' = AK;\ = PK\ \text{ і }\ a = OP.$$

Але: $\quad OK = OP + PK$, тому:

$$x = a + x'.$$

Так само: $OL = OR + RL$,

або: $$y = b + y'.$$

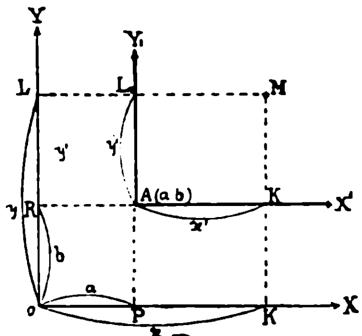


Рис. 61.

Звідци маємо такі взори перетворення:

Значники точки, зглядно нових координат через старі, будуть:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Значники точки, зглядно старих координат через нові, будуть:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

Приклад.

Визначити значники точки $A(2,-3)$ зглядно нових, рівнобіжних до перших, координат з початком $O_1(1-5)$

$$x' = x - a\ ;\ x' = 3 - (-1) = 4$$
$$y' = y - b\ ;\ y' = -2 - 5 = -7$$

Отже, значники точки A, зглядно нових координат, будуть: $A(4, -7)$ (рис. 62).

II-й випадок перетворення.

Обертання осей навколо початку.

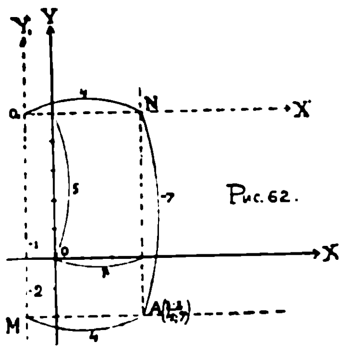


Рис. 62.

Припустім, що нові осі координат $X'У'$ повернені коло старих осей $XУ$ на кут φ. Візьмім яку небудь точку M. Хай значники цієї точки зглядно осей $XУ$ будуть x і y, а зглядно $X'У'$ будуть: x' і y'.

Спустивши з точки N_1 прями на MN і OX, матимемо:

$$x = OR - NR\ ;\ y = MK + KN$$

З трикутника N_1OK маємо:

$$OR = ON_1\, cs\, \varphi = x'\, cs\, \varphi$$
$$N_1R = ON_1\, sn\, \varphi = x' sn \varphi$$

З трикутника KMN_1 маємо:

$$KN_1 = MN_1\, sn\, \varphi = y' sn\, \varphi$$
$$MK = MN_1\, cs\, \varphi = y'\, cs\, \varphi.$$

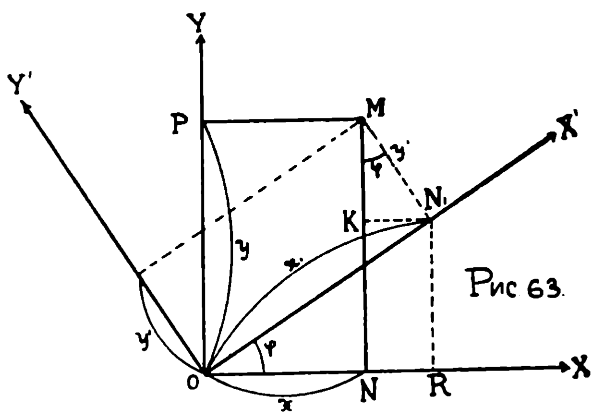


Рис 63.

Тому:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\, cs\, \varphi - y' sn\, \varphi \\ y &= x'\, sn\, \varphi + y' cs\, \varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (44)$$

Розвяжемо систему рівнань:

$$
\begin{array}{rl|l}
1) & x = x' cs\,\varphi - y' sn\,\varphi & cs\,\varphi \\
 & y = x' sn\,\varphi + y' cs\,\varphi & sn\,\varphi
\end{array}
$$

$$
+\begin{array}{l}
x cs\,\varphi = x' cs^2\,\varphi - y' sn\,\varphi cs\,\varphi \\
y sn\,\varphi = x' sn^2\,\varphi + y' sn\,\varphi\, cs\,\varphi
\end{array}
$$

$$x cs\,\varphi + y sn\,\varphi = x' (sn^2\,\varphi + cs^2\,\varphi)$$

Отже:

$$\underline{x' = x cs\,\varphi + y sn\,\varphi}, \text{ або } \underline{x' = y sn\,\varphi + x cs\,\varphi}$$

$$
\begin{array}{rl|l}
2) & x = x' cs\,\varphi - y' sn\,\varphi & sn\,\varphi \\
 & y = x' sn\,\varphi + y' cs\,\varphi & cs\,\varphi
\end{array}
$$

$$
+\begin{array}{l}
- x sn\,\varphi = - x' sn\,\varphi + y' sn^2\,\varphi \\
y cs\,\varphi = x' sn\,\varphi\, cs\,\varphi + y' cs^2\,\varphi
\end{array}
$$

$$y cs\,\varphi - x sn\,\varphi = y' (sn^2\varphi + cs^2\,\varphi)$$

Отже:

$$\underline{y' = y cs\,\varphi - x sn\,\varphi.}$$

Таким чином, значники точки, зглядно нових осей, відзначаються через значники старих так:

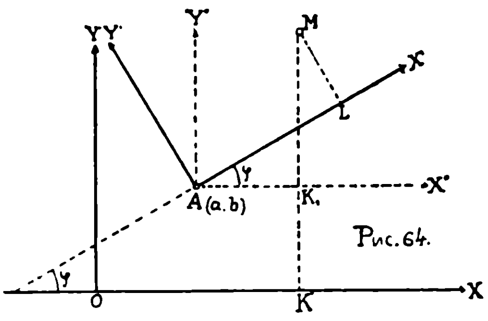
$$\left.\begin{array}{l} x' = y sn\,\varphi + x cs\,\varphi \\ y' = y cs\,\varphi - x sn\,\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots . \quad (45)$$

III-й випадок перетворення.

Довільне перенесення осей.

Нашим завданням є перенести систему визначних осей в якусь довільну точку $A(a, b)$ так, щоб нова вісь X — *ів* мала, зглядно старої, певний кут спаду φ.

Щоб при даних умовах перейти від однієї системи осей XY до другої $X'Y'$, уведемо помічну систему $X''Y''$ так, щоб вона мала початком точку $A(a,b)$ і була рівнобіжною до старої XY.



Означимо значники якої небудь точки M:

1) зглядно старих осей: x і y
2) » нових » x' і y'
3) » помічних » x'' і y''.

З першого випадку перетворення маємо:

$$x'' = x - a\ ;\ \ y'' = y - b \quad (а)$$

Далі з 2-го випадку перетворення матимемо:

$$\begin{aligned} x' &= y''\, sn\,\varphi + x''\, cs\,\varphi \\ y' &= y''\, cs\,\varphi - x''\, sn\,\varphi \end{aligned} \quad (в)$$

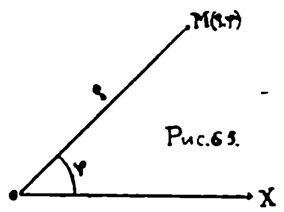
Вставивши з рівностей (а) вартости x'' і y'' у (в), матимемо:

$$\begin{aligned} x' &= (y - b)\, sn\,\varphi + (x - a)\, cs\,\varphi \\ y' &= (y - b)\, cs\,\varphi - (x - a)\, sn\,\varphi \end{aligned} \quad \ldots\ldots (46)$$

Бігунові визначні осі.

Розглянемо ще один спосіб визначення положення точки на площі.

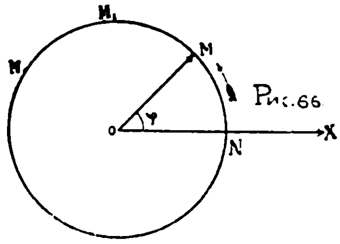
Візьмім якусь довільну вісь X і на ній точку O. Положення точки на площі можна докладно визначити, коли будемо знати відступ її ϱ від точки O і кут спаду простої OM, що переходить через точки O і дану M. (рис. 65).



І справді, коли матимемо стале віддалення точки M від O, себто $\varrho = \text{const}$, то ріжним вартостям $< \varphi$ буде відповідати безліч точок M, що лежатимуть на обводі кола луча ϱ. Але при цьому кожній даній вартості φ буде відповідати одна й лише одна вартість дуги NM, а тому дані вартости ϱ і $< \varphi$ цілковито визначають положення точки M на площі.

Навпаки, при сталій вартості кута φ ріжним вартостям віддалення ϱ відповідатиме безліч точок, що лежать на простій OM.

Але кожній окремій вартості ϱ також відповідатиме одно й лише одно положення точки M на простій OM, а тому, дані вартости ϱ і $< \varphi$ цілковито визначають положення точки M на площі.



Вісь OX — має назву бігунової осі, точка O — назву бігуна, а віддалення OM точки M від бігуна O зветься лучем — вектором точки M. Луч — вектор має додатній напрям од бігуна O до точки M, а кут φ, що зветься фазою або азимутом точки M, має додатню напрямність зростання проти стрілки годинника.

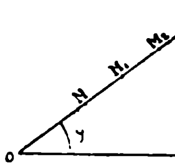


Рис. 67.

Довжина луча вектора ϱ і величина кута φ (фази) називаються **бігуновими значниками точки** $M(\varrho, \varphi)$.

Перетворення прямокутних координат у бігунові й навпаки.

Проведемо через бігун (рис. 68) вісь $У$ — *ів*, тоді значники точки M будуть: $ON = x$ і $NM = y$.

З прямокутного трикутника ONM маємо:

$$1)\ x = \varrho\, cs\, \varphi\ ;\ y = \varrho\, sn\, \varphi$$

$$2)\ \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ tg\, \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\left[sn\, \varphi = \frac{y}{\varrho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ і } cs\, \varphi = \frac{x}{\varrho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right].$$

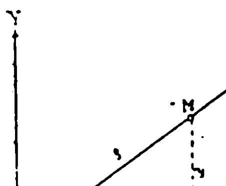


Рис. 68.

Отже, щоб перетворити взори геометричних величин з прямокутніх координат на бігунові, треба вставити в них вартости:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho\, cs\, \varphi \\ y &= \varrho\, sn\, \varphi \end{aligned} \right\} \dots . \quad (47)$$

Навпаки, щоб перетворити взори геометричних величин з бігунових координат на прямокутні, треба вставити в них вартости:

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\, \varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \dots . \quad (48)$$

Коли у взорах кут φ входить у функціях *sn* і *cos*, то зручно вживати взорів:

$$\left.\begin{aligned} sin\,\varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ cos\,\varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (49)$$

Вправи.

Ч — 125. *Знайти значники точок: A (3,4); B (— 12,5); C (— 4, — 3) у бігунових координатах.*

Ч — 126. *Знайти значники вершків трикутника: A $(3, 45_0)$; B $(5, 60^0)$ C $(10, 135^0)$ в прямокутних координатах.*

Ч — 127. *Дано рівнання:* $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$. *Перетвотити це рівнання до нових осей, що мають початком точку A (3, — 2) і є рівнобіжні до попередніх.* $[x^2 + y^2 = 16]$

Ч — 128. *Який вигляд матиме рівнання простої:*

$2x + 3y = 6$, *коли осі координати повернути навколо початку на: 1) 30^0; 2) 90^0; 3) 60^9; 4) -30^0; 5) -60^0.*

Ч — 129. *Який вигляд матимуть рівнання: 1)* $x^2 - y^2 = 4$ *2)* $x^2 + y^2 - 6(x + y) = 9$ *коли осі координат повернути навколо початку на 45^0?* $[xy = 2;\ x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}\,x = 9.]$

Ч — 130 *Рівнання 1)* $x^2 + y^2 = 3x$ *2)* $x^2 - y^2 = a^2$ *перетворити на бігунові осі.* $\left[\varrho = 3cs\,\varphi;\ cs2\,\varphi = \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2\right]$

Ч — 131. *Бігунові рівнання: 1)* $\varrho^2\, sn\,2\,\varphi = 2a^2$ *2)* $acs2\,\varphi = \varrho^2$, *перетворити на прямокутні.*

$[xy = a^2;\ x^2 + y^2 = \sqrt{a(x^2 - y^2)}]$

Ч — 132. *Перетворити в бігунові рівнання: 1)* $x^2 + y^2 = a^2$; *2)* $y = mx$; *3)* $y = 2x$.

$[\varrho = a$ *(const) — коло;* $tg\,\varphi = m$ *(const),* $tg\,\varphi = 2$].

РОЗДІЛ II.

КОЛО.

§ 25. Коло та його рівнання.

З геометрії, знаємо, що коло є геометричний осередок точок, рівновіддалених від центра. Тому, де-б ми не взяли на обводі кола точку $M(x,y)$, то віддалення її від центру (точки A) буде завжди однакове, рівне r. Це є основна прикмета того, що точка M лежить на обводі кола, а тому рівнання, що встановлює залежність між лучем r і значниками точки $M(x,y,)$, буде рівнанням кола.

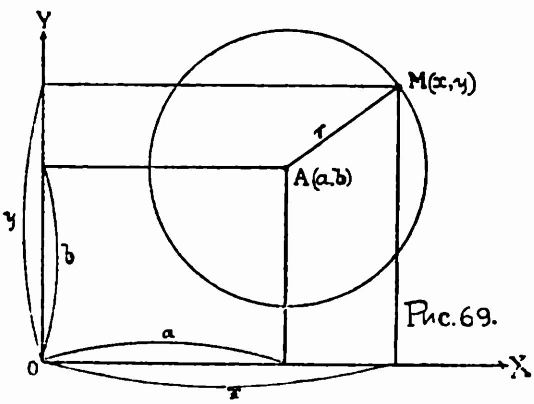


Рис. 69.

Ми знаємо, що квадрат довжини відтинку є рівний із сумою квадратів його метів на осі, а через те:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2, \text{ або:}$$

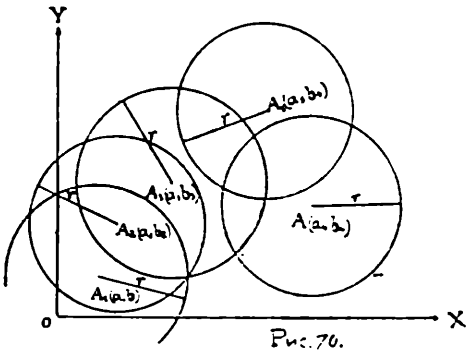
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (50)$$

Виведене рівнання звемо **основним рівнанням кола.**

Для кожної точки $N(x_1,y_1)$, що лежить поза колом, її віддалення від центру (a,b) буде $r_1 > r$, а тому для неї $(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 > r^2$.

Подібні міркування доводять, що для точки $N_2(x_2,y_2)$, що лежить на крузі кола (в середині кола):

$$(x_2-a)^2+(y_2-b)^2<r^2.$$



Рівнання кола має в собі три незалежних змінники: значники a і b і луч кола r. Даючи значникам a і b довільні вартости при незмінному r, одержимо шерег рівних між собою кол, з центрами в ріжних, зглядно осей, місцях площі. Ці кола визначатимуться рівнаннями: (рис. 70).

1) $r^2=(x-a_1)^2+(y-b_1)_2$

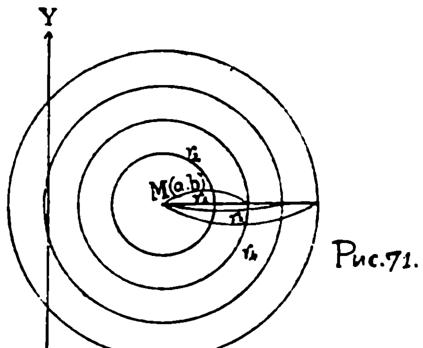
2) $r^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2$

3) $r^2=(x-a_3)^2+(y-b_3)^2$

. . . .

і т. д.

Навпаки, даючи лучеві r довільні вартости, ми, при незмінних вартостях значників a і b, матимемо шерег спільноцентрових (концентричних) кол зі спільним центром $A(a,b)$. Ці кола визначатимуться рівнаннями: (рис. 71).



$$(x-a)^2+(y-b)^2=r_1^2$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r_2^2$$

. . . .

і т. д.

Висновок.

Два спільноцентрові кола визначаються рівнаннями, що відріжняються лише квадратом змінника r.

§ 26. Аналіза основного рівнання кола.

Проаналізуємо рівнання кола: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Визначимо з цього рівнання по черзі x та y і матимемо:

$$x=a\pm\sqrt{r^2-(y-b)^2}$$

$$y=b\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}$$

Ці рівности доводять, що кожній окремій вартості x відповідає завжди дві вартості y і, навпаки, кожній вартості y відповідає завжди дві вартості x.

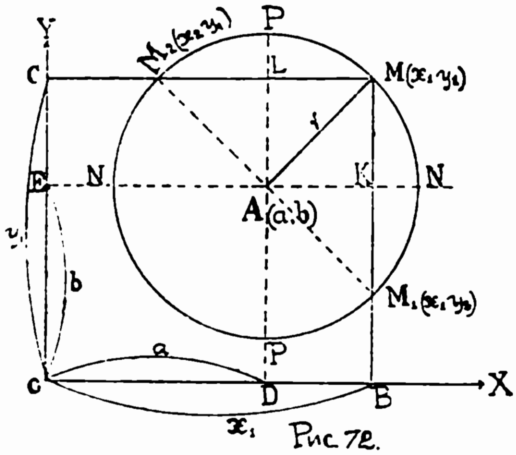


Рис. 72.

Себ-то, коли з якої небудь точки $M(x_1,y_1)$ кола спустимо прями на осі, то кожний з цих прямів перетне коло в двох точках: 1) прям MB — в точках M і M_1, що мають значники: $M(x_1,y_1)$ а $M_1(x_1,y_2)$ 2) прям MC — в точках M і M_2, що мають значники: $M(x_1,y_1)$ а $M_2(x_2,y_1)$. Ці точки будуть кінцями відповідних тятив: MM_1 і MM_2 і будуть, як відомо з геометрії, положені симетрично зглядно середин своїх тятив: 1) з трикутників: AMK і AM_1K, де $AM=AM_1=r$, $KM=KM_1$, $AK=x_1-a$, матимемо: $MK=M_1K=\sqrt{r^2-(x_1-a)^2}$, але $b=KB$. Тому:

$$y=b\pm\sqrt{r^2-(x_1-a)^2}=KB\pm KM.$$

Коли змінювати вартости x_1 значника точки M, посуваючи її вздовж обводу кола, то середина тятиви посуватиметься вздовж поперечника NN рівнобіжного до осі X, бо при всіх вартостях x для $y=KB\pm KM$ змінюватиметься лише KM, а KB лишатиметься незмінне; тому відповідні точки перетину кола (кінці тятиви) завжди будуть симетрично положені зглядно поперечника NN, рівнобіжного до осі X — *ів*.

Аналогично з трикутників ALM і ALM_2, де $AM = AM_2 = r$; $AL = y_1 - b$ і $ML = ML_2$, матимемо:

$$ML = \sqrt{r^2 - (y-b)^2}, \text{ а тому:}$$
$$x_1 = a \pm \sqrt{r^2 - (y_1 - b)^2} = CL \pm ML.$$

Отже, через міркування, подібні до попередніх, можемо пересвідчитися, що коли перетяти коло простою, рівнобіжною до осі X, то точок перетину буде дві M і M_2; ці точки також лежатимуть симетрично зглядно поперечника кола PP, рівнобіжного до осі $У$ — *ів*.

Розглянемо, які найбільші й найменьші вартости можуть набірати значники точок, що лежать на обводі кола. Для цього візьмемо, виведені вже, взори:

$$x = a \pm \sqrt{r^2 - (y-b)^2}$$
$$y = b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$$

Очевидно, що: $(y - b)$ і $(x - a)$ не можуть бути по своій безоглядній (абсолютній) вартості більші від r, бо тоді x і y були-б уявними величинами. Таких точок на колі не існувало-б. Найбільші й найменші вартости x і y будуть тоді, коли у першому випадку $(y - b)$, а у другому випадку $(x - a)$ є рівні з нулем.

Отже:
$$x = a \pm r$$
$$y = b \pm r$$

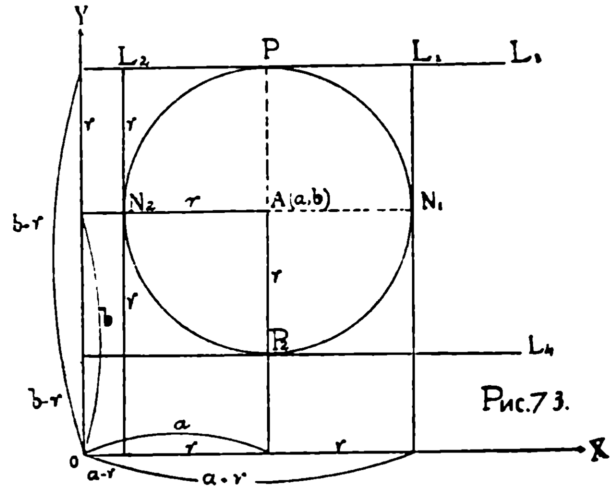
Тому x має найбільшу вартість $x_1 = a + r$, найменшу вартість $x_2 = a - r$. Ці вартости x має тоді, коли $y - b = o$, $y = b$, себто для точок, що лежать на кінцях поперечника NN.

Так само, y має найбільшу вартість $y_1 = b + r$, найменшу $y_2 = b - r$. Ці вартости також y має тоді, коли $x - a = o$; $x = a$, себто для точок, що лежать на кінцях поперечника PP.

Що ж відзначають собою рівнання: $x = a + r$; $x = a - r$?

Це, як уже знаємо, є рівнання простих, рівнобіжних до осі Y—*ів*, віддалених від неї на $(a + r)$ і на $(a - r)$. Це будуть (рис 73) прості L_1 і L_2.

Так само рівнання $y = b + r$ і $y = b - r$ є прості рівнобіжні до осі X—*ів* і віддалені від неї. на $(b + r)$ і на $(b - r)$, себто це будуть прості L_3 і L_4.



Отже, звідци переконуємось, що всі точки кола лежать на полі квадрата, обмеженого простими: L_1, L_2, L_3 і L_4, що є дотичними до кола в точках N_1, N_2, M_1 і M_2, де значники точок кола мають найбільші й найменші свої вартости.

Нарешті, x і y матимуть одну лише вартість (себто по дві однакові) тоді, коли абсолютні вартости:

$$(y - b) = r \text{ і } (x - a) = r.$$

Тоді:

$$x = a \pm \sqrt{r^2 - r^2} = a$$

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - r^2} = b.$$

Але ми вже бачили, що в той час, коли $x = a$, то $y = b \pm r$, а коли $y = b$, то $x = a \pm r$.

Тому значники x і y будуть мати по одній вартості лише у точках дотику до квадрату $L_1\,L_2\,L_3\,L_4$.

[Це саме доводимо й безпосередньо, бо коли:

$$(y - b) = r \text{ і } (x - a) = r,$$

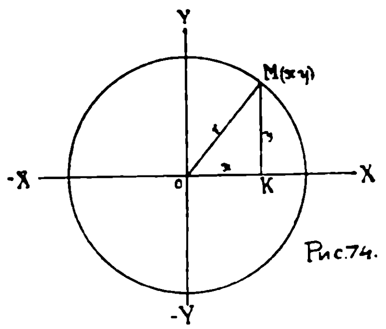
то:

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & \pm(y - b) = r, \text{ або} & y = b \pm r \\ 2) & \pm(x - a) = r, \text{ або} & x = a \pm r \end{array}\right]$$

§ 27. Центрове рівнання кола.

Розглянемо випадок, коли коло лежить своїм центром у початку визначних осей. Очевидно, що тоді значники центра: $a = o$, $b = o$, а тому рівнання матиме вигляд:

$$x^2 + y^2 = r^2 \ldots\ldots (51)$$



Те саме рівнання можна одержати безпосередньо (рис. 74) з трикутника *OMK*, пристосовуючи теорему Пітагора:

$$OK^2 + KM^2 = OM^2, \text{ або:}$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Це рівнання має назву **центрового рівнання кола.**

Розглянені нами дві форми рівнання кола (основне й центрове — є головніші.

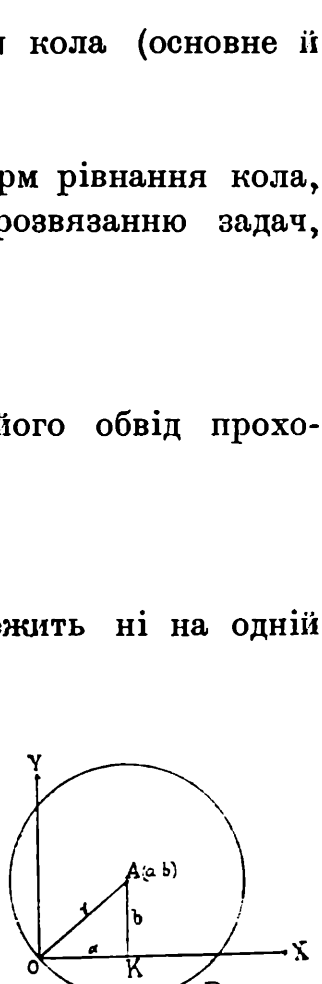
Але ж згадаємо ще кілька инших форм рівнання кола, що дуже зручні для вживання їх при розвязанню задач, а саме:

Обводове (вершкове) рівнання.

Цю назву має рівнання кола, що його обвід проходить через початок координат.

1-й випадок.

Припустім, що центр кола *A* не лежить ні на одній з осей. (Рис. 75).



Тоді з трикутника *OAK* маємо $r^2 = a^2 + b^2$.

Вставивши цю вартість r^2 в основне рівнання кола, маємо:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 \text{ , або:}$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = a^2 + b^2$$

Звідци маємо:

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by = o$$

або: $$x(x - 2a) + y(y - 2b) = o \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

Це рівнання має назву **загального обводового рівнання кола.**

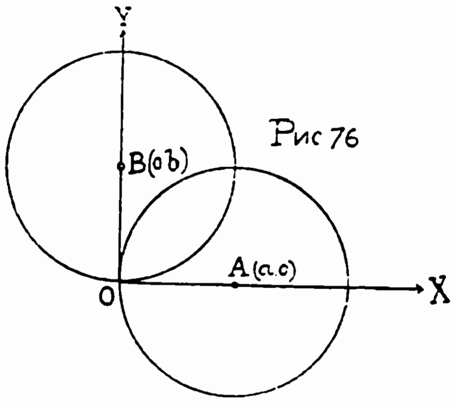


Рис 76

Коли коло, що його обвід переходить через початок координат (рис. 76) має центр або на осі X—*ів* $[A(a,o)]$, або на осі $У$—*ів* $[B(o,b)]$, то вставивши в загальне обводове рівнання, замість значників центру кола a і b у першому випадку значники $A(a,o)$, матимемо:

$$x^2 - 2ax + y^2 = o \quad \ldots\ldots \quad (53),$$

обводове рівнання віднесене до осі X—ів, а в другому випадку, вставивши в теж загальне рівнання значники $B(o,b)$, матимемо:

$$x^2 - 2by + y^2 = o \quad \ldots\ldots \quad (54),$$

обводове рівнання, віднесене до осі У—ів.

Вправи.

Ч—133. *Накреслити кола, що мають рівнання:*

1) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36;$

2) $x^2 + y^2 = 9;$

3) $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0;$

4) $x^2 - 10x + y^2 = 0;$

5) $x^2 - 6y + y^2 = 0.$

Увага: *Рівнання 3) є обводове вигляду:*

$$x(x - 2a) + y(y - 2b) = 0,$$

а тому центр кола має значники a і b, а луч його є віддалення точки A (a,b) від O (o,o). Рівнання 4) і 5) теж обводові і центр цих кол лежить на одній з осей. Лучі кола обчисляються із сочинників середніх членів.

Ч — 134. *Написати рівнання кол, що мають центр A і луч r, коли:* 1) $A(0,0)$, $r = 4$; 2) $A(-4,0)$, $r = 7$; 3) $A(0,5)$, $r = 5$; 4) $A(3,4)$, $r = 6$; 5) $A(-4,-6)$, $r = 3$.

Ч — 135. *Яке положення, зглядно кола:* $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$, *точок:* 1) $A(-4,-4)$; 2) $B(5,1)$; 3) $C(3,2)$.

Ч — 136. *Написати рівнання кола з лучем* $r = 5$, *коли центр його:*

1) *лежить на осі У — ів і має віддалення від початку осей:* a) $y = 6$ б) $y = -5$.

2) *лежить на осі X — ів і має віддалення від початку осей:* a) $x = -4$ б) $x = 3$.

3) *лежить в точці* $(6,4)$

Ч — 137. *Написати рівнання кола, що:*

1) *дотикається до осі X — ів в точці:* a) $x = 3$, b) $x = -5$ *і має луч* $r = 5$;

2) *дотикається до осі У — ів в точці:* a) $y = -2$, b) $y = 2$ *і має луч* $r = 3$.

Ч — 138. *Написати рівнання кола луча* $r = 5$, *дотичного до обох осей разом (всі 4 випадки)*

Ч — 139. *Проаналізувати рівнання кола* $x^2 + y^2 = r$.

Ч — 140. *Перетворити в основну форму рівнання кола:*

1) $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$;

3) $x^2 - y^2 - 3y - 4 = 0$.

Увага: *треба цим рівнанням дати форму:* $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. *Напр:* *рівнання* $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ *перетворюється так:*

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) - 12 = 0$$
$$(x^2 - 2.3x + 9) - 9 + (y^2 + 2.2y + 4) - 4 = 12$$
$$\text{або: } (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$$
$$\text{а тому: } (\mathbf{x} - \mathbf{3})^2 + (\mathbf{y} + \mathbf{2})^2 = \mathbf{5}^2.$$

§ 28. Алгебрична форма рівнання кола.

Кожному основному рівнанню кола дуже легко дати алгебричну форму. Для цього досить перевести зазначені в ньому дії і зробити зведення схожих членів, напр.:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r$$
$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$

Упорядковуючи його, матимемо:

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=o.$$

Це і є алгебрична форма рівнання кола.

Щоб дати ще більш загальний вигляд, помножимо всі члени одержаного рівнання на який небудь довільний чинник, напр. на κ.

Тоді матимемо:

$$\kappa x^2+\kappa y^2-2a\kappa x-2b\kappa y+\kappa(a^2+b^2-r^2)=o.$$

Припустімо, що висліди дії:

1) здобутку: $-2.a.\kappa$ буде p, себто: $-2a\kappa=p$;

2) здобутку: $-2.b.\kappa$ буде q, себто: $-2b\kappa=q$;

3) суми й здобутку: $\kappa(a^2+b^2-r^2)$ буде s, себто: $\kappa(a^2+b^2-r^2)=s$.

Тоді наше рівнання матиме загальний вигляд:

$$\kappa x^2+\kappa y^2+px+qy+s=o \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

Числовий приклад:

$$(x-1)^2+(y+2)=\frac{25}{4}.$$
$$x^2-2x-1+y^2+4y+4-\frac{25}{4}=o$$

або:
$$x^2+y^2-2x+4y-\frac{5}{4}=o.$$

Помноживши все рівнання на чинника 4 (себто звільнивши його від знаменателя), будемо мати:

$$4x^2+4y^2-8x+16y-5=o$$

Це й буде рівнання кола в загальній алгебричній форми (рівнання другого ступіня).

Тепер поставимо собі питання: при яких умовах алгебричне рівнання другого ступіня, що має загальний вигляд:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = o$$

може бути рівнанням кола?

Для цього порівнюємо це рівнання з рівнанням кола, якому ми надали загальну алгебричну форму, себто з рівнанням:

$$\kappa x^2 + \kappa y^2 + px + qy + s = o.$$

З цього порівнання ми бачимо, що:

1) $A = \kappa$ і $B = \kappa$ (де κ є довільне число) себто $A = B$.

2) В загальній алгебричній форми рівнання кола не існує того члена, що має здобуток xy, себто $C = O$.

Отже, щоб яке небудь алгебричне рівнання другого ступіня могло бути рівнанням кола конче треба: 1) щоб сочинники при других ступінях невідомих були однакові і 2) щоб сочинник при здобуткові невідомих був рівний з нулем (щоб рівнання не мало члена зі здобутком невідомих).

Щоб ці умови були також і вистарчальними треба буде довести, що коли загальне альгебричне рівнання другого ступіня від двох змінних підлягає їм, то воно є завжди рівнанням якого небудь кола.

Для цього алгебричне рівнання:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = O$$

постараємося перетворити до алгебричної форми рівнання кола, себто до вигляду:

$$\kappa x^2 + \kappa y^2 + px + qy + s = o.$$

Поділивши кожне з цих рівнань на однакового сочинника невідомих у другому ступіню, матимемо:

$$(1)\quad x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = o$$

$$(2)\quad x^2 + y^2 + \frac{p}{\kappa}x + \frac{q}{\kappa}y + \frac{s}{\kappa} = o$$

Отже треба, щоб:

$$\frac{D}{A} = \frac{p}{к}; \quad \frac{E}{A} = \frac{q}{к} \text{ і } \frac{F}{A} = \frac{s}{к}.$$

Вставивши вартости p, q і s маємо:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{D}{A} = \dfrac{-2aк}{к}; \quad \dfrac{D}{A} = -2a \\ \dfrac{E}{A} = \dfrac{-2bк}{к} = -2b \\ \dfrac{F}{A} = \dfrac{к(a^2+b^2-r^2)}{к} = a^2+b^2-r^2. \end{array} \right.$$

Очевидно, що рівнання (1) тоді лише перетвориться в основну форму рівнання кола, коли ми з рівностей (3) зможимо реально обчислити значники центру кола a і b, а також луч його r.

З рівностей (3) маємо:

$$a = -\frac{D}{2A}; \quad b = -\frac{E}{2A}$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - \frac{F}{A}.$$

Або, вставивши тільки що визначені вартости a і b, у визначення r^2 матимемо:

$$r^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}.$$

Звідци:

$$r = \sqrt{\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}} = \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}$$

Вартости a і b (а тому й центр кола) існують завжди, бо дроби: $-\dfrac{D}{2A}$; $-\dfrac{E}{2A}$ є авжди реальні величини. Щож торкається вартости r, то вона буде реальною лише тоді, коли виразник (діскрімінант): $D^2 + E^2 - 4AF > O$.

Таким чином кожне алгебричне рівнання другого ступіня, що задовольняє умові:

1) рівности сочинників при других ступінях невідомих

і 2) відсутности члена зі здобутком невідомих,

є рівнанням кола лише тоді, коли виразник: $D^2 + E^2 - 4AF > O$.

Але, щоб узагальнити це твердження, вважають, що:

1) коли виразник: $D^2 + E^2 - 4AF = 0$, то це є коло з нулевим лучем (себто точка);

2) коли виразник: $D^2 + E^2 - 4AF < 0$, то це коло з уявним лучем, себто уявне коло.

Таким чином, при таких умовних визначеннях можна твердити, що:

Кожне алгебричне рівнання другого ступіня, що має рівні сочинники при других ступінях невідомих і не має члена зі здобутком невідомих, є рівнання відповідного кола.

Приклад I.

$$2x^2 + 2y^2 + 6x + 10y + 9 = 0$$

1) $a = -\dfrac{D}{2A} = -\dfrac{3}{2}$

2) $b = -\dfrac{E}{2A} = -\dfrac{5}{2}$

3) $r = \dfrac{1}{2A}\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF} =$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{6^2 + 10^2 - 4.2.9} = \frac{1}{4}\, 8 = 2.$$

Таким чином, рівнання (I) обертається в рівнання:

$$(x + {}^3/_2)^2 + (y + {}^5/_2)^2 = 2^2$$

Приклад II.

Дано рівнання: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$.

Це є рівнання кола, бо сочинники при x^2 та y^2 є однакові, члена зі здобутком xy не існує.

Подивимось, яке коло визначає це рівнання, а для цього розглянемо виразник: $D^2 + E^2 - 4AF$.

$$D = -4;\ E = -2;\ F = 5;\ A = 1, \text{ тому}$$

$$16 + 4 - 4.1.5 = 0.$$

Отже, це коло нулевого луча (точка). Знайдемо значники цієї точки:

$$a = \frac{-D}{2A} = -\frac{-4}{2.1} = +2.$$

$$b = -\frac{E}{2A} = -\frac{-2}{2.1} = +1.$$

Таким чином, значники точки-центру: $A(2,1)$.

Рівнання цього кола — точки буде:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0.$$

Примітка. Перенісши осі рівнобіжно собі в точку $A(2,1)$, одержимо нові значники:

$$\xi = x - 2 \text{ і } \eta = y - 1.$$

Таким чином, рівнання $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$ переміниться на рівнання:

$$\xi^2 + \eta^2 = 0.$$

Коли $\xi = 0$, $\eta = 0$, то це рівнання стає тотожністю, й є рівнанням точки—**початку осей.**

Приклад III.

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y = 38.$$

Рівнання сповнює поставлені умови й тому є рівнанням кола. Розглянемо, що це за коло?

Виразник: $M = D^2 + E^2 - 4AF = 36 + 16 - 4.1.38 = -100$; $r = \frac{1}{2A}\sqrt{M} = {}^1/_2 . 10i = 5i$. Коло уявне з центром:

$$a = \frac{-D}{2A} = \frac{6}{2} = 3; \; b = -\frac{E}{2A} = \frac{4}{2} = 2.$$

Рівнання кола:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (5i)^2$$

або:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = -25.$$

Будемо називати ту форму алгебричного рівнання кола, що має сочинником при других ступінях невідомого одиницю, упорядкованим алгебричним рівнанням кола. Загальний вигляд упорядкованого алгебричного рівнання кола буде:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = o} \quad \ldots . \quad (56)$$

де:
$$M = \frac{D}{A};\ N = \frac{E}{A}\ \text{і}\ P = \frac{F}{A}.$$

А через те змінники основного рівнання кола визначаються через сочинники упорядкованого алгебричного рівнання так:

$$a = -\frac{D}{2A} = -\frac{M}{2};\ \text{аналогично:}\ b = -\frac{E}{2A} = -\frac{N}{2};$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{D}{2A}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{F}{A}} =$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{M}{2}\right)^2 + \left(-\frac{N}{2}\right)^2 - P} = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 + N^2 - 4P}$$

[Коло є правдиве, або реальне, коли $M^2 + N^2 - 4P > 0$; коло є нулевого луча, коли $M^2 + N^2 - 4P = 0$ і коло є уявне, коли $M^2 + N^2 - 4P < 0$].

Отже взори зведення рівнання кола з алгебричної форми до основної є:

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{M}{2} \\ b &= -\frac{N}{2} \\ r &= {}^1/_2\sqrt{M^2 + N^2 - 4P} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (57)$$

Приклад

Рівнання кола: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0.$

Тому:
$$a = -\frac{M}{2} = -\frac{-6}{2} = 3$$
$$b = -\frac{N}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$$

$$r = {}^1/_2\sqrt{M^2 + N^2 - 4P} = {}^1/_2\sqrt{6^2 + 4^2 - 16} = {}^1/_2\sqrt{36} = 3$$

Тому:
$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Задача ч. 11.

Скласти рівнання кола, що переходить через три загадані точки: $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_1)$.

Розвязання.

Візьмім загальне (упорядковане) алгебричне рівнання кола: $x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = O \ldots\ldots (A)$.

Очевидно, що рівнання (A) буде лише тоді рівнанням даного кола, коли в ньому підберемо такі вартости невідомих (довільних) сочинників M, N і P, що при них виконуватимуться умові переходження цього кола через три загадані точки. Але, в такому випадку значники цих точок мусять обертати рівнання даного кола [себто, рівнання (A)] у тотожність.

Тому маємо три рівности:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + Mx_1 + Ny_1 + P = O \\ x_2^2 + y_2^2 + Mx_2 + Ny_2 + P = O \\ x_3^2 + y_3^2 + Mx_3 + Ny_3 + P = O \end{aligned}\right\} \ldots . (Б)$$

Ці рівности $(Б)$ якраз і складають систему трьох рівнань із трьома невідомими M, N і P, що їх вартости, як ми вже зазначали, треба визначати.

Не будемо розвязувати цю систему в загальному вигляді, бо розвязки дуже складні, трудні до заучування й не мають жадної практичної вартости, бо в кожному окремому випадку, цю систему, яко систему першого ступіня, дуже легко розвязати. (При відповідних зведеннях підчас розвязанн, ця праця не більша від безпосередньої вставки вартостей значників у загальні складні взори). Коли визначимо з системи $(Б)$ вартости змінників M, N і P і вставимо їх в рівнання (A), то одержимо алгебричне рівнання кола, що переходить через три дані точки. Останнє рівнання при потребі можна перетворити в основне.

Приклад.

Скласти рівнання кола, що переходить через точки: $A(-3, 3)$, $B(6, 6)$ і $C(2, -2)$.

Загальне алгебричне рівнання кола:

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0.$$

З нього маємо систему:

$$\begin{aligned} (-3)^2 + 3^2 + M(-3) + N.3 + P = 0 \\ 6^2 + 6^2 + M.6 + N.6 + P = 0 \\ 2^2 + (-2)^2 + M.2 + N(-2) + P = 0 \end{aligned}$$

або: $$18 - 3M + 3N + P = 0$$
$$72 + 6M + 6N + P = 0$$
$$8 + 2M - 2N + P = 0.$$

Відлічивши почленно третє рівняння з першого, матимемо:

$$10 - 5M + 5N = 0 \text{ або: } M - N = 2.$$

Вставляючи в третє рівняння $2(M-N) = 4$, одержуємо:

$$\underline{P = -12.}$$

Тому друге рівняння прийме вигляд:

Але $$M + N = -10$$
$$M - N = 2$$

Отже: $$\underline{M = -4}; \quad \underline{N = -6}.$$

Таким чином алгебричне рівняння кола є:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0.$$

Перетворимо його в основне:

$$a = -\frac{M}{2} = 2; \; b = -\frac{N}{2} = 3$$

$$r = {}^1/_2 \sqrt{M^2 + N^2 - 4P} = {}^1/_2 \sqrt{16 + 36 + 48} = 5$$

Отже основне рівняння кола, що переходить через дані точки A, B і C буде:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

Вправи.

Ч — 141. *Перетворити в основну форму рівняння кола:*

1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0;$
2) $18x^2 + 18y^2 - 12x + 18y - 11{,}5 = 0;$
3) $x^2 - 8x + y^2 = 0;$
4) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 48y + 99 = 0.$

Ч — 142. *Скласти рівняння кола, що переходить через точки:*

1) $A(2,-3)$, $B(5,-1)$ і $C(4,3)$;
2) $A(0,0)$, $B(3,-1)$ і $C(8,4)$;
3) $K(8,5)$, $L(-6,7)$ і $R(-10,-1)$.

Ч — 143. *Скласти рівняння кола, що переходить через точку $A(4,2)$ і дотикається до обох осей. Нарисувати це коло.*

Увага: найліпше користатися основним рівнянням (значники центра $a = r$, $b = r$)

[*2 розвязки:* 1) $x^2 + y^2 - 4(x+y) + 4 = 0;$
2) $x^2 + y^2 - 20(x+y) + 100 = 0$]

§ 29. Взаємне положення кола й простої.

Коло й проста можуть бути лише у трьох взаємних положеннях:

Проста може 1) перехрещувати коло,

2) дотикатися до нього,

3) не перехрещувати і не дотикатися до нього (мимобіжна кола).

Розглянемо ті прикмети, що характеризують кожне з цих положень простої.

Поведемо через центр даного кола координатні осі й тоді рівнання його буде:

$$x^2 + y^2 = r^2 \ \ldots\ldots \ (A)$$

Кожна проста:

$$y = mx + n \ \ldots\ldots \ (Б),$$

що стикається з колом, мусить мати хоч одну спільну з ним точку M. Отже, значники цієї точки обертатимуть в тотожність одночасно рівнання обох і кола й простої, а тому будуть розвязками системи, що складається із згаданих рівнань (A) і (B).

Розвяжемо цю систему:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ y &= mx + n \end{aligned}\right\} \ \ldots\ldots \ (B)$$

Вставивши в перше рівнання вартість y з другого, матимемо:

$$x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 = r^2$$

або:

$$(1 + m^2)\, x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0 \ \ldots\ldots \ (Г)$$

А тому:

$$x = \frac{-mn \pm \sqrt{r^2\,(1 + m^2) - n^2}}{1 + m^2}.$$

Значник y одержуємо звичайною вставкою вартости x у рівнання: $y = mx + n$.

Дослідимо одержаний розвязок x.

Виразник (діскрімінант): $D = r^2 (1 + m^2) - n^2$ можна перетворити так: вставивши $m = tg a$ (тангенс кута спаду простої), матимемо:

$$D = r^2(1 + tg^2 a) - n^2,$$

або:
$$D = r^2 \ (1 + m^2) \ - n^2 = \frac{r^2}{cs^2 a} - n^2$$

1) Коли $D > O$, то x, а разом і значник y мають по дві вартости, себто проста перехрещує коло в двох точках і є його **січною**.

2) Коли $D = O$, то x, а разом і значник y, мають по одній вартості, себто проста є **дотичною** кола.

3) Коли $D < O$, то значник x, а разом і y не мають жадної реальної вартости, а тому проста не має спільних точок з колом: вона проходить поза колом (**мимобіжна** до кола).

Уявімо це геометрично й для цього дамо нерівностям:

$$D = \frac{r^2}{cs^2 a} - n^2 \underset{<}{\overset{>}{=}} O$$

другий вигляд, а саме:

$$\frac{r^2}{cs^2 a} \underset{<}{\overset{>}{=}} n^2 \text{, звідци: } \frac{r}{cs\, a} \underset{<}{\overset{>}{=}} n$$

або:
$$ncs\, a \underset{>}{\overset{<}{=}} r.$$

Далі обчислимо вартість здобутку: $ncs\, a$.

З трикутника KBO (рис. 77) маємо: $d = ncs\, a$.

Таким чином, вираз $ncs\, a$ є віддалення простої $y = mx + n$ від центру кола й тому:

1) коли віддалення простої (напр. L_1) від центру кола: $ncs\, a < r$, або $d < r$, то проста є **січною** кола (має з колом дві точки перехрестя M_1 та M_2).

2) Коли віддалення простої (напр. L_2) від центру кола: $n cs\, a = r$, або: $d = r$, то проста є **дотичною** кола (має одну точку перехрестя M).

3) Коли віддалення простої (напр. L_3) від центру кола: $n cs\, a > r$ або $d > r$, то проста є **мимобіжною** кола (себто не має жадної спільної точки з колом).

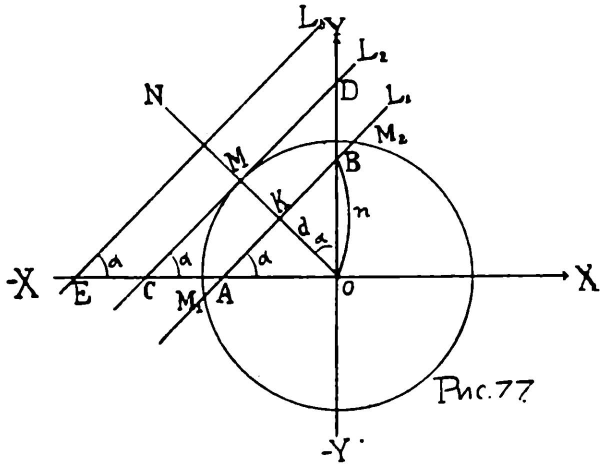


Рис. 77

Приклад.

В якому положенню зглядно кола $x^2 + y^2 = 9$ лежить проста: $y = x + a$?

Очевидно, що $tg\, \alpha = 1$, а тому $\alpha = 45^0$. Звідци: $d = n cs\, \alpha =$

$$= a cs\, 45^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Отже, коли:

1) $\frac{a\sqrt{2}}{2} < 3,\ (r = 3)$, або: $a\sqrt{2} < 6$, то проста є січною кола;

2) коли $a\sqrt{2} = 6$, то проста є дотичною;

3) коли $a\sqrt{2} > 6$, то проста є мимобіжною кола;

Висловимо це ще инакше:

Коли $a = 3\sqrt{2}$, то $a\sqrt{2} = 6$.

Таким чином:

1) Для вартостей a, менших від $3\sqrt{2}$, проста $y = x + a$ буде січною кола;

2) Для вартостей a, більших від $3\sqrt{2}$, проста $y = x + a$ буде мимобіжною кола, і нарешті:

3) Коли вартість $a = 3\sqrt{2}$, то проста $y = x + a$ є дотичною до кола $x^2 + y^2 = 9$.

Задача.

Обчислити значники середини тятиви й написати рівнання геометричного осередку середин рівнобіжних до неї тятив.

Припустім, що центр кола лежить в початку осей; тоді рівнання його буде: $x^2 + y^2 = r^2$.

Коли яка небудь проста: $y = mx + n$ є січною цього кола, то значники перехрестя її з колом будуть, як знаємо, розвязками рівнання (Г), а саме:

$$(1 + m^2)\,x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0,$$

або:
$$x^2 + \frac{2mn}{1 + m^2}\,x + \frac{n^2 - r^2}{1 + m^2} = 0$$

З властивости розвязків квадратового рівнання маємо:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2mn}{1 + m^2},$$

де x_1 і x_2 є значники (відтинкові) точок перехрещення простої $y = mx + n$ з колом, себто є відтинковими кінців відповідної тятиви.

Але ми знаємо, що значники середини відтинка є середнє аритметичне значників його кінців, а тому відтинкова x_0 середини згаданої тятиви буде рівна:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \text{ або } x_0 = -\frac{mn}{1 + m^2}$$

Обчислім рядні кінців тятиви й для цього, вставивши вартости x_1 і x_2 в рівнання простої, матимемо:

$$y_1 = mx_1 + n$$
$$y_2 = mx_2 + n$$

Звідци:
$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{m(x_1 + x_2) + 2n}{2},$$

або вставивши вартість $x_1 + x_2$, одержимо:

$$y_0 = -\frac{m^2 n + n + m^2 n}{1 + m^2} = \frac{n}{1 + m^2}$$

Щоб скласти рівнання геометричного осередку середин рівнобіжних тятив, звернемо увагу на те, що у визначення значників середини тятиви:

$$x_0 = -\frac{mn}{1 + m^2} \text{ і } y_0 = \frac{n}{1 + m^2} \;\ldots\ldots\; (A)$$

входить змінник n. А він є прикметою того, що точка (x_0, y_0) належить лише до даної тятиви, бо змінюючи вартости n, будемо одержувати все нові й нові тятиви. (Ці тятиви рівнобіжні, бо мають однаковий кут спаду $\alpha = arc\, tg m$).

Отже, значниками середин цих тятив в залежности від n будуть що раз відповідно инші вартости x_0 її y_0.

Коли ми з рівностей (A) вилучимо змінник n, то одержимо рівнання, що буде звязувати функціонально значники x_0 і y_0 середин шерегу рівнобіжних тятив, незалежно від їх положення. А це й буде, потрібним нам, геометричним осередком.

З другої рівности (A) маємо: $n = y_0\ (1 + m^2)$, а вставивши цю вартість змінника n у перше рівнання, одержимо:

$$x_0 = -\frac{m.y_0(1 + m^2)}{1 + m^2}, \text{ або } y_0 = -\frac{1}{m} x_0$$

В даному разі значники x_0 і y_0 стають змінними величинами (рівнання шерегу точок) і, тому, ми надамо їм звичайне означення для змінних величин через x і y. Отже рівнання геометричного осередку середин рівнобіжних тятив буде мати вигляд:

$$y = -\frac{1}{m} x. \;\ldots\ldots\; (58)$$

Ми бачимо, що цим геометричним осередком є:

1) **проста** (бо складене рівнання є рівнання першого ступіня, в каноничній формі).

2) що ця проста є **прям** до тятиви поведеній через її середину (бо кутовий змінник знайденого рівнання є величина обернена і має противний знак, порівнюючи з кутовим змінником рівнання тятиви $y = mx + n$).

3) цей прям переходить через початок координатних осей (бо рівнання не має вільного члена) й крім того через центр кола. Тому цей осередок є **поперечником кола, прямовим до рівнобіжних тятив.** Такий поперечник зветься **здруженим з даними тятивами.**

Виправи.

Ч — 144. *Обчислити довжину тятиви кола* $x^2 + y^2 = 100$, *коли значники її середини* $A(1, -1)$.

Увага: (скористатися взорами для x_0 і y_0 — значників середини тятиви. Звідти обчисляємо: $m = 1$, $n = -2$; рівнання тятиви $y = x - 2$. Далі знаходимо точки перехрещення й самий відтинок тятиви).

Ч — 145. *Обчислити довжину тятиви, що має рівнання*

$$x - 2y + 2 = 0$$

і належить до кола з лучем $\sqrt{5}$ *і центром* $(3,1)$. [*відп:* $1{,}6\sqrt{5}$]

Ч — 146. *Обчислити довжину тятив перетину:*

1) *кола:* $x^2 + y^2 = 25$ *і простої:* $5x - 2y - 7 = 0$,

кола: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ *і простої* $3x + 4y = 12$.

Ч — 147. *Обчислити відтинки на осях координат, що творить коло* $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 + 0$.

(Увага: брати по черзі $x = 0$; $y = 0$; чому?)

[*відп:* $P_x = x_2 - x_1 = 1$; $P_y = y_2 - y_1 = 5$]

§ 30. Дотична до кола.

1. Рівнання дотичної до кола, поведеної через загадану точку на обводі його.

Припустім, що дане коло має центр в початку осей й, тому, його рівнання:

$$x^2 + y^2 = r^2 \;\ldots\ldots\; (A).$$

Значники точки, що лежить на обводі кола і через неї треба повести дотичну, є $M(x_1, y_1)$.

Візьмемо загальне рівнання простої в каноничній формі:

$$y = mx + n \;\ldots\ldots\; (B).$$

Очевидно, що це рівнання буде рівнанням нашої дотичної лише тоді, коли ми визначимо змінники m і n так, щоб рівнання *(B)* підлягало умовам дотичної.

Коли ми розвяжемо рівнання *(A)* і *(B)* яко систему, то одержимо (як це доведено у попередньому §):

$$x = \frac{-mn \pm \sqrt{r^2(1+m^2) - n^2}}{1+m^2}$$

Ми вже довели, що проста: $y = mx + n$ буде дотичною в тому разі, коли виразник (діскрімінант)

$$D = r^2(1+m^2) - n^2 = o\,.$$

Тому, прирівнявши $\sqrt{r^2(1+m^2) - n^2}$ до нуля, одержимо відтинкову точки дотику M, себто.

$$x_1 = -\frac{mn}{1+m^2} \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Вставивши вартість x_1 у рівнання $y = mx + n$, одержимо:

$$y_1 = -\frac{m^2 n}{1+m^2} + n = \frac{n}{1+m^2} \quad \ldots\ldots \quad \text{(б)}$$

Як що ці вартости x_1 і y_1 будемо вважати за систему рівнань зглядно змінників m і n, то розвязавши її, знайдемо потрібні вартости m і n, що відповідатимуть рівнанню *(B)* нашої дотичної.

З другого рівнання: маємо $n = y_1(1+m^2)$, а вставивши цю вартість у перше рівнання *(a)*, матимемо:

$$x_1 = -\frac{my_1(1+m^2)}{1+m^2}, \text{ або: } x_1 = -my_1$$

Звідци:
$$m = -\frac{x_1}{y_1}$$

Далі:
$$n = y_1(1+m^2) = y_1\left(1 + \frac{x_1^2}{y_1^2}\right) = \frac{(y^2_1 + x^2_1)}{y_1}$$

Але $x^2_1 + y^2_1 = r^2$, бо точка лежить на колі, а тому:

$$n = \frac{r^2}{y_1}$$

Вставивши в рівнання *(B)* знайдені вартости змінників m і n, одержимо **рівнання дотичної, що переходить через загадану точку на колі,** а саме:

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{r^2}{y_1},$$

або: $$xx_1 + yy_1 = r^2 \dots\dots (59)$$

Спосіб написання рівнання дотичної, що переходить через загадану точку $M(x_1,y_1)$ кола, відзначеного рівнанням в центровій формі, є такий:

Пишемо в рівнанню кола квадрати невідомих, яко здобутки:

$$xx + yy = r^2$$

і один із чинників кожного здобутку замінюємо на відповідний значник точки M:

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

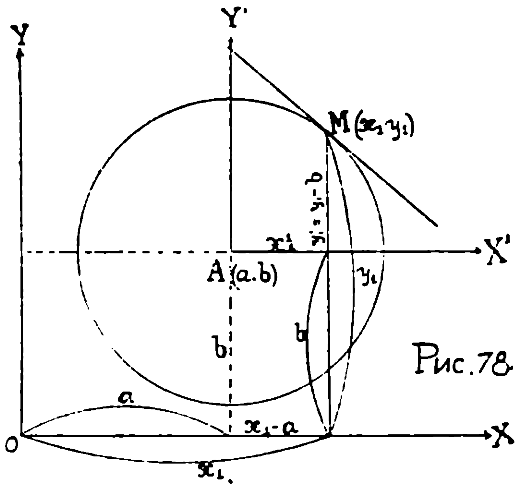


Рис. 78

Припустім тепер, що рівнання кола дано в основній формі:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \dots\dots (A)$$

Візьмім нові помічні координатні осі $X'Y'$, що мають початок в центрі кола $A(a,b)$ і є рівнобіжні до даних осей.

Тоді, як нам відомо, взори перетворення координат будуть:

$$x = x' + a \; ; \; y = y' + b$$

Коли перетворимо рівнання даного кола до нових координат, то матимемо:

$$(x' + a - a)^2 + (y' + b - b)^2 = r^2$$

або:

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \ldots\ldots (B)$$

Означимо значники точки дотику M в нових координатах через x_1', y_1'

(де очевидно: $x_1' = x_1 - a$, $y_1' = y_1 - b$).

Рівнання (B) буде центровою формою рівнання кола, а тому рівнання дотичної, поведеної до нього через точку $M(x_1', y_1')$ буде:

$$x' x_1' + y' y_1' = r^2$$

Перейдемо тепер назад від помічних до даних осей (для чого вставляємо $x' = x - a$; $y' = y - b$; $x_1' = x_1 - a$; $y_1' = y_1 - b$) і одержимо знову попереднє основне рівнання кола:

$$(x - a)^2 + (y - b) = r^2$$

і рівнання дотичної до нього в точці $M(x_1, y_1)$:

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2 \ldots\ldots (60)$$

Спосіб творення рівнання дотичної до кола, відзначеного в основній формі, як ми бачимо, однаковий до попереднього.

Пишемо в рівнанню кола квадратові ступіні двочленів, що містять в собі змінні, яко здобутки: напр. для рівнання кола:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, пишемо: $(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = r^2$

і в одному з чинників кожного здобутка замінюємо змінну на відповідний значник точки M.

$$(x - a)(x_1 - b) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$$

Примітка:

Це рівнання дотичної можна було вивести безпосереднім розвязанням системи рівнань:

кола $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \quad \text{(I)}$$

і простої: $$(y+mx)+n \dots \quad \text{(II)}$$

і обчисленням змінників m і n. Подаємо цей спосіб розвязання. Перетворимо рівнання $y=mx+n$ так: відлічимо від обох частин рівности (II) по $(b+am)$ і рівнання матиме вигляд:

$$(y-b)-am=m(x-a)+n-b,$$

або: $$y-b=m(x-a)+(n+am-b).$$

Означимо многочлен $(n+am-b)$ через p. Тоді рівнання простої одержить вигляд:

$$y-b=m(x-a)+p \dots \quad \text{(III)}$$

В рівнання (I) і (III) вводимо помічні змінні:

$$(x-a)=z\,;\ (y-b)=u,$$

і після того одержимо систему рівнань:

$$\left.\begin{aligned} z^2+u^2&=r^2 \\ u&=mz+p \end{aligned}\right\} \dots \quad \text{(IV)}$$

Це є система ідентична з центровою, що ми вже розвязали, и тому з аналогії буде:

$$z_1=-\frac{mp}{1+m^2} \qquad u_1=\frac{p}{1+m^2}$$

$$[\text{де: } z_1=x_1-a\,;\ u_1=y_1-b]$$

А звідци: $$m=-\frac{z_1}{u_1};\quad p=\frac{r^2}{u_1}$$

Знайдені вартости вставляємо в рівнання простої: $u=mz+p$ і одержуємо рівнання дотичної:

$$u=-\frac{z_1}{u_1}z+\frac{r^2}{u_1}$$

або: $$\underline{uu_1+zz_1=r^2}$$

Замінюючи помічні змінні через їх вартості: $z = x - a$; $u = y - b$; $z_1 = x_1 - a$; $u_1 = y_1 - b$, матимемо:

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$$

§ 31. Прямова́ або нормаль до кола.

Прямово́ю, або нормалю зветься проста, що переходить через точку дотику прямово до дотичної. Щоб написати рівнання прямової кола, віднесеного центром до початку осей, звернемо увагу, що прямова і дотична взаємно прямі й тому кутові змінники їх є взаємно зворотні величини, противні своими знаками.

Коли точка дотику є $M(x_1, y_1)$, то рівнання кожної простої, що переходить через цю точку є:

$$(y-y_1)=m_1(x-x_1)$$

З рівнання дотичної ми знаємо, що її кутовий змінник $m = -\frac{x_1}{y_1}$, тому:

$$m_1 = -\frac{1}{m} = \frac{y_1}{x_1}$$

Отже рівнання прямової (нормалі) в точці $M(x_1, y_1)$ кола, віднесеного центром до початку осей (рівнання: $x^2+y^2=r^2$), буде:

$$y-y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x-x_1),$$

або:

$$xy_1 = x_1 y \;\ldots\ldots\; (61)$$

Иноді це рівнання пишуть ще в такій формі:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} \;\ldots\ldots\; (62)$$

Рівнанням прямової кола, віднесеного центром до початку осей, є рівність відношень змінних рівнання до відповідних значників точки дотику:

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x_1}} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{y_1}}$$

Коли рівнання кола дається в основній формі:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

то, як уже доведено, кутовий змінник дотичної є: $m=-\dfrac{x_1-a}{y_1-b}$, а тому змінник m_1 рівнання прямової буде:

$$m_1=-\frac{1}{m}=\frac{y_1-b}{x_1-a}$$

Через те рівнання прямової матиме вигляд:

$$y-y_1=\frac{y_1-b}{x_1-a}(x-x_1),$$

або: $$(x_1-a)(y-b)=(x-a)(y_1-b)\ \ldots\ldots\ (63)$$

а звідци: $$\frac{x-a}{x_1-a}=\frac{y-b}{y_1-b}\ \ldots\ldots\ (64)$$

Висновок.

Прямова кола є лучем його (переходить через центр кола).

В цьому твердженні легко переконатися звичайною вставкою в рівнання прямової значників центра кола.

§ 32. Визначення рівнання дотичної до кола, поведеної з точки по-за колом.

Розглянемо, яким чином написати рівнання дотичної, що переходить через загадану точку по-за колом. Припустім, що центр кола віднесено до початку осей; тоді його рівнання буде:

$$x^2+y^2=r^2\ \ldots\ldots\ (\mathrm{I})$$

Хай значники загаданої точки по-за колом $N(x_0, y_0)$.

Очевидна річ, що для того, щоб написати рівнання дотичної, користуючись уже доведеним способом, треба знайти значники точки $M(x_1, y_1)$ дотику її до кола.

Будемо поки - що вважати точку M за загадану. Рівнання дотичної, що переходить через точку M, є:

$$xx_1 + yy_1 = r^2 \;\ldots\ldots\; \text{(II)}$$

Але ця дотична мусить переходити й через точку N, а тому значники останньої мусять задовольняти рівнання (II).

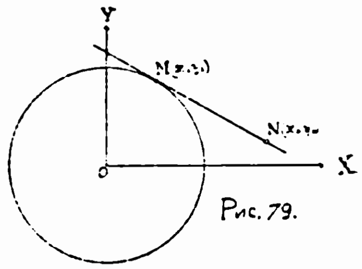


Рис. 79.

Отже: $x_0 x_1 + y_0 y_1 = r^2 \;\ldots\ldots\; \text{(III)}$.

Коли точку $M(x_1, y_1)$ ми вважаємо за загадану на обводі кола, то значники її мусять задовольняти й рівнання (I), тому:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \;\ldots\ldots\; \text{(IV)}.$$

Але ми лише тимчасово припускали, що точка $M(x_1, y_1)$ є загадана. В дійсности це є невідома нам змінна величина, а тому рівности (III) і (IV) є лише система рівнань зглядно невідомих x_1 й y_1.

Розвязавши цю систему:

$$x_0 y_1 + y_0 y_1 = r^2$$
$$x_1^2 + y_1^2 = r^2,$$

визначимо значники невідомої точки дотику $M(x_1, y_1)$, а саме:

$$y_1 = \frac{r^2 - x_0 x_1}{y_0};$$

$$x_1 = \frac{r^2 x_0 \pm \sqrt{r^4 x_0^2 - (r^4 - r^2 y_0^2)(x_0^2 + y_0^2)}}{x_0^2 + y_0^2}$$

Після перемноження двочленів, зведення й виводу за корінь $r y_0$, матимемо:

$$x_1 = \frac{r^2 x_0 + r y_0 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - r^2}}{x_0^2 + y_0^2}$$

Проаналізуємо розвязок x_1.

Характер розвязку залежить від вартости виразника рівнання (діскрімінанта):

$$D = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

1) Коли $D > O$, себто $x_0^2 + y_0^2 > r^2$, то розвязків два, себто маємо дві точки дотику.

2) Коли $D = O$, себто $x_0^2 + y_0^2 = r^2$, то розвязок один, себто маємо лише одну точку дотику.

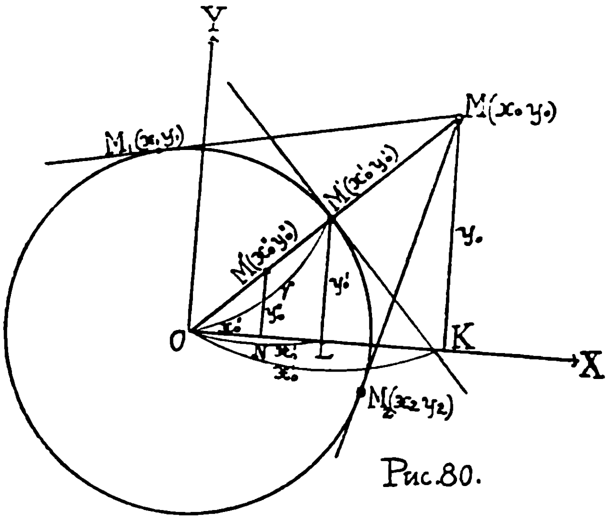


Рис. 80.

3) Коли $D < O$, себто $x_0^2 + y_0^2 < r^2$, то розвязки уявні, себто точок дотику не має.

Дамо цим твердженням геометричну інтерпретацію.

Дослідимо ріжницю $(x_0^2 + y_0^2) - r^2$.

Для цього розгляньмо трикутник OMK (рис. 80). Він є прямокутній, а тому згідно з теоремою Пітагора, маємо:

$$x_0^2 + y_0^2 = OM^2.$$

Але $OM = r + d$, де d є змінне віддалення точки M від обводу кола. Тому: $x_0^2 + y_0^2 = (r + d)^2$.

Коли точка M лежить по-за колом, то віддалення d є завжди додатня величина, а тому $(r+d)^2 > r^2$.

А звідци:

$$x_0^2 + y_0^2 > r^2.$$

Таким чином, коли точка M лежить по-за колом, то $D > O$ і тоді через точку M можно повести дві дотичних до кола [точок дотику дві: $M(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$].

Будемо наближати точку M до кола, тоді віддалення d буде зменшуватися, але лишатиметься додатнім і тільки на обводі обернеться в нуль; коли-ж точка лежить на обводі кола, то $x_0^2 + y_0^2 = r^2$ (що можна перевірити з $\triangle OM'L)$, себто $D = O$. Ми бачимо, що через точку, що лежить на обводі кола, можна повести лише одну дотичну до кола (рівнання має один розвязок $x_1 = x_0'$; $y_1 = y_0')$.

Нарешті, коли точка M, наближуючися до центру кола, переїде через обвід його й буде лежати на крузі, то віддалення d стає від'ємним. [З трикутника $OM''N$ маємо: $x_0''^2 + y_0''^2 = (r - M''M')^2$, себто $x_0''^2 + y_0''^2 < r^2$].

Тоді $D < O$ і точок дотику не має; і дійсно, з точок, що лежать на крузі, повести дотичних до кола не можна.

Звідци випливає загальне правило складання рівнання дотичної до кола.

Коли дано рівнання кола і точка (значники її), то перед тим, як складати рівнання дотичної, треба зробити аналізу; порівнати суму квадратів значників точки з квадратом луча кола і цим з'ясувати де лежить точка зглядно кола.

I. Коли аналіза покаже, що точка лежить на обводі кола, то рівнання пишеться на підставі вже розгляненого правила складання рівнання дотичної, поведеної через точку на обводі кола [рівнання (59)], себто рівнання матиме вигляд:

$xx_1 + yy_1 = r^2$ (де x_1 і y_1 значники точки дотику).

II. Коли пересвідчуємося, що точка лежить по-за колом, то:

1) пишемо звичайне рівнання дотичної вигляду: $xx_1 + yy_1 = r^2$, де замісць значників x_1, y_1 вставляємо вартости значників точки, даної по-за колом.

Себто; $$xx_0 + yy_0 = r^2$$

2) Розвязуємо систему із складеного нами рівнання й даного рівнання кола:

$$1)\ xx_0 + yy_0 = r^2$$
$$2)\ x^2 + y^2 = r^2$$

Визначені вартости змінних x_1 і y_1, x_2 і y_2 (два розвязки) і будуть точками дотику.

3) Знаючи точки дотику, загальним (I) способом складаємо рівнання дотичних, а саме:

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$
$$xx_2 + yy_2 = r^2$$

III. Коли аналіза покаже, що сума квадратів значників точки менша від квадрату луча кола, то дотичних немає (точка на крузі кола)

Приклад.

До кола: $x^2 + y^2 = 25$ повести дотичні через точки 1) $A(5{,}2,5)$ 2) $(-1,4)$ 3) $C(4,3)$.

Аналіза; 1) $5^2 + 2,5^2 = 31,25 > 25$. Точка A по-за колом.

Тому, а) складаємо рівнання простої $5x + 2,5y = 25$, або $x + 0,5y = 5$.

б) розвязуемо систему:

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x + 0,5y = 5.$$

і одержуємо:

$$x_1 = 5 \quad y_1 = 0;$$
$$x_2 = 3 \quad y_2 = 4.$$

в) складаємо рівнання дотичних, а саме: (рис. 81).

$$1)\ 5x = 25\,;\quad x = 5.$$
$$2)\ 3x + 4y = 25$$

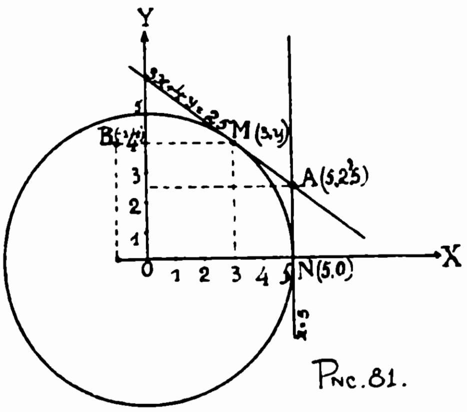


Рис. 81.

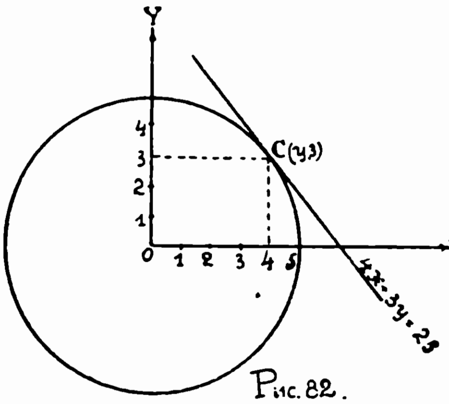


Рис. 82.

2) А н а л і з а: $(-1)^2 + 4^2 = 17 < 25.$

Точка $B(-1,4)$ лежить на крузі. Дотичних немає.

3) А н а л і з а: $4^2 + 3^2 = 25.$

Точка $C(4,3)$ лежить на колі, а тому рівнання дотичної:

$$4y + 3y = 25.$$

Те саме правило поширюється й на складання рівнання дотичної до кола, визначеного рівнанням в основній формі:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Приклад:

До кола: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ повести дотичну через точку $M(7,2)$.

А н а л і з а: вставивши значники точки $M(x_0 = 7,\ y_0 = 2)$ в рівнання даного кола, маємо:

$$(7-2)^2 + (2-1)^2 = 26 > 25.$$

Точка лежить поза колом, а тому рівнання допомогової простої буде:

$$(7-2)(x-2) + (2-1)(y-1) = 25,$$

або:
$$5(x-2) + (y-1) = 25.$$

Ведемо помічні змінні: $z = x - 2$ і $u = y - 1$ і матимемо:

$$1)\ z^2 + u^2 = 25.$$
$$5z + u = 25.$$

Розвязуємо систему й одержуємо:

$$z_1 = 5\,;\ z_2 = 4^{8}/_{13}\,;\ u_1 = 0;\ u_2 = 1^{12}/_{13}$$

Звідци: $x_1 = 7, \cdot \quad y_1 = 1;$
$$x_2 = 6^8/_{13}, \; y_2 = 2^{12}/_{13}.$$

А тому, вставляючиці вартости замісць x_1 і y_1 у рівнання дотично до кола:

$$(x-2)\;(x_1-2)+(y-1)\;(y_1-1)=25,$$

маємо остаточно:

1) $x = 7$

2) $12\,(x-2)+5\,(y-1)=65.$

Це є потрібні нам рівнання дотичних у точках $P_1\,(x_1, y_1)$ і $P_2\,(x_2, y_2)$.

§ 33. Бігункова (поляра.)

Треба зауважити, що кожне розвязання системи, що складається з двох рівнань: кола й простої, є власне від-

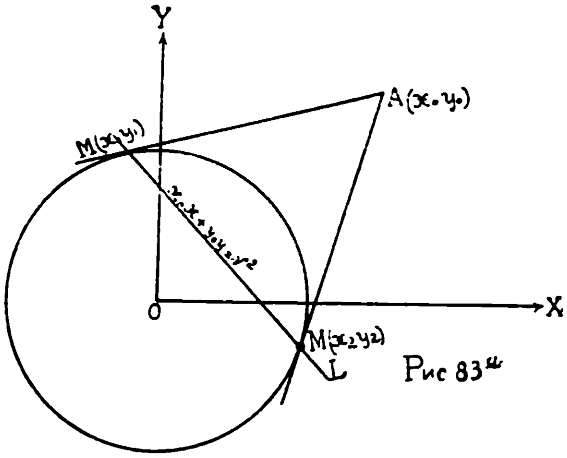


Рис 83a

шуканням точок перехрещення кола з січною даною рівнанням простої. Розвязки цієї системи, очевидно, є значниками цих точок перехрещення, спільних й для кола й для даної простої (січної).

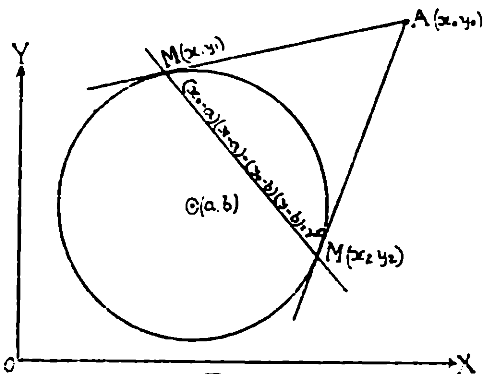


Рис 83b

Коли в § 32 для складення рівнання дотичної, що поведено через точку $A(x_0, y_0)$ по-за колом, ми шукали точку дотику її до кола, то мусіли розвязувати систему, що складалася з рівнань самого кола й простої.

Розвязки цієї системи були значниками потрібних точок дотику й одночасно точками перехрещень кола з даною простою.

Таким чином, зрозуміло, що проста, рівнання якої входило в систему, була січною, що переходила через точки дотику. (Геометричний образ цієї простої дає проста L на рис. 83*a* і 83*b*).

Ця проста має назву бігункової (поляри) точки A, а сама точка A — бігуна (полюса).

Визначення.

Бігунковою (полярою) даної точки (по-за колом) зветься проста, яка сполучує точки дотику промінів, що виходять з точки А, яко бігуна, й є дотичними до кола.

Згадаймо тепер, як ми складали в попередньому §-фі рівнання бігункової, себто тої простої, що за допомогою її рівнання, через розвязання системи, ми відшукували потрібні нам точки дотику промінів з точки A.

Для цього члени рівнання кола, що містять квадрати невідомих, ми писали, яко здобутки перших ступінів, і вставляли в один із чинників кожного здобутку замісць невідомого вартість відповідного значника бігуна (точки A).

Напр. 1) для кола, визначеного рівнанням в центральній формі: $x^2 + y^2 = r^2$, писали: $x \, . \, x + y \, . \, y = r^2$ і вставивши значники точки A, одержували рівнання бігункової:

$$x_0 x + y_0 y = r^2 \;\ldots\ldots\; (1),$$

2) для кола, визначеного рівнанням в основній формі:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

писали: $(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = r^2$ і вставивши значники точки A, одержували рівнання бігункової:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2 \;\ldots\ldots\; (2)$$

З попередніх міркувань видко, що рівнання *(1)* і *(2)* є рівнання бугункових (рис. 83, *a* і *b*) себто січних, що сполучують точки дотику промінів поведених з $A(x_0, y_0)$, бо рівнання цих простих входять у ту систему, що її розвязки дали значники точок дотику.

Таким чином, рівнання:

$$\left.\begin{array}{r} x_0 x + y_0 y = r^2 \\ (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (65)$$

є рівнання бігункових точки $A(x_0, y_0)$ для кола, віднесеного в першому випадку центром до початку осей, а в другому у довільну точку (a, b).

§ 34. Кут січної з колом.

Визначення.

Кутом січної з колом в даній точці А умовилися звати кут, що утворює ця січна з дотичною, поведеною до кола через точку А.

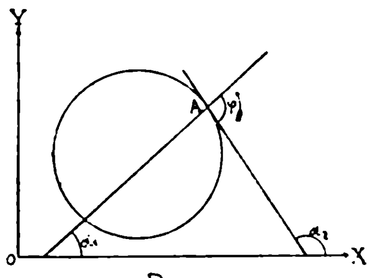


Рис. 84.

Цей кут відлічуєгься від дотичної до січної в напрямности проти стрілки годинника (рис. 84). Як кут між двома простими, він є рівний (§ 4 взір 8):

$$tg\ \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Отже, для обчислення кута січної з колом треба знати кутові змінники січної й дотичної, що його утворюють.

§ 35. Піддотична і підпрямова (піднормаль).

Визначення

Візьмім коло з центром у початку координат. Через яку небудь точку $M(x_1, y_1)$ цього кола (рис. 85) ведемо дотичну й прямову.

I) Довжиною, або відтинком дотичної до кола в якій небудь точці його обводу зветься відтинок цієї дотичної від точки дотику до перехрестя її з віссю іксів (дотична $MB = t$).

II) Довжиною, або відтинком прямової (нормалі) до кола в якій небудь точці М його обводу зветься відтинок її від точки дотику до перехрестя з віссю іксів (в даному разі до центру кола).

III) Піддотичною (субтангентою) зветься мет даного відтинку дотичної (I) на вісь іксів (піддотична: BN; рис. 85).

IV) Підпрямовою (субнормалю) зветься мет даного відтинку прямової (II) на вісь іксів (підпрямова: ON; рис. 85).

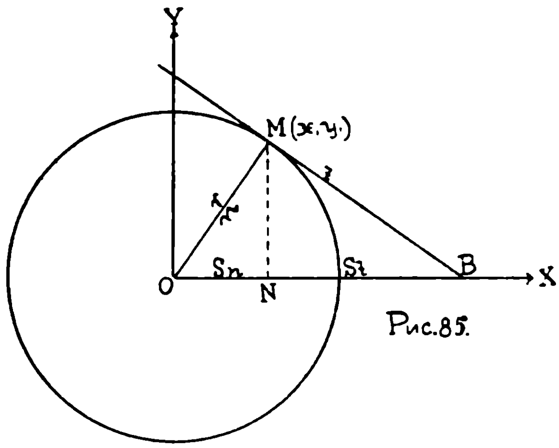


Рис. 85.

Обчислимо їх величини:

1) Ми бачимо, що відтинок прямової OM є рівний з лучем кола, тому:

$$n = r \ldots\ldots (66)$$

2) Підпрямова $S_n = ON$ буде знэчником x_1 точки M_1, тому:

$$S_n = x_1 \ldots\ldots (67)$$

3) Довжина дотичної $t = MB$ з $\triangle OMB$ є рівна: $t = r tg\varphi$, де φ є кут $\sphericalangle MOB$, але: $tg\varphi = \frac{y_1}{x_1}$, тому:

$$t = r\frac{y_1}{x_1} \ldots\ldots (68)$$

4) Піддотична $S_t = BN$ визначається з $\triangle NMB$, а саме:

$$S_t = y_1 tg\,\varphi, \text{ але } tg\,\varphi = \frac{y_1}{x_1};$$

тому:
$$S_t = \frac{{y_1}^2}{x_1} \ldots\ldots (69)$$

§ 36. Положення точки зглядно кола.

З геометрії нам відомо, що:

1) коли повести з точки по-за колом жмут січних до нього, то здобуток відтинків *) кожної січної є величина стала для всіх січних, рівна з квадратом дотичної, поведеної з тієї ж точки. (Рис. 86).

$$AC \,.\, AB = AE \,.\, AD = AG \,.\, AF = AL \,.\, AK = AM^2.$$

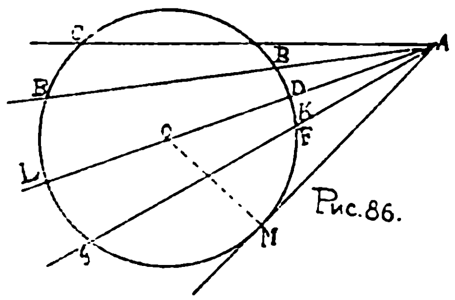


Рис. 86.

2) Коли через точку на крузі повести жмут тятив до кола, то здобуток відтинків кожної тятиви є величина стала для всіх тятив, рівна зі здобутком відтинків поперечника кола, що переходить через цю точку. (Рис. 87).

$$AC \,.\, AB = AD \,.\, AE = AG \,.\, AF = AM \,.\, AN = AK \,.\, AL$$

Але півтятива AN (прямова до поперечника KL) є середнє пропорційне між відтинками поперечника, себто:

$$AN^2 = AK \,.\, AL.$$

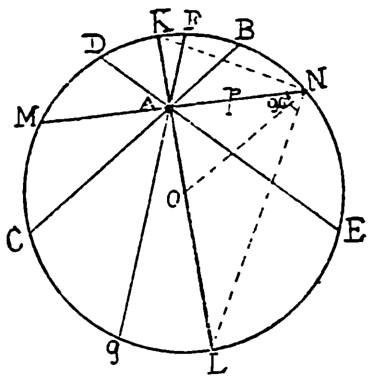


Рис 87.

А тому здобуток відтинків кожної тятиви, що переходить через якусь точку на крузі, є величина стала, рівна з квадратом півтятиви, що переходить через туж саму точку прямово до відповідного поперечника.

Ці дві геометричні теореми можна узагальнити таким чином:

Коли коло перетинає жмут простих, то здобуток віддалень вузла цього жмута від точок перетину кожної простої з колом є величина стала для всіх простих жмута, рівна абсолютною величиною:

---

*) Відтинками січної AC (рис. 86) звуть віддалення точки A вздовж січної від обводу кола: AC — є відтинок цілої січної, а AB — є зовнішній відтинок січної.

1) з квадратом дотичної, поведеної до кола з цього вузла, коли він лежить по-за колом, або

2) з квадратом півтятиви, прямової до поперечника, поведеного через даний вузел, коли він лежить на крузі.

Серед усіх простих жмутка, що перетинаються колом, завжди є й така, що переходить через центр кола. Цю просту умовимося звати **лінією сполуки** точки з колом.

За довжину лінії сполуки d беруть віддалення даної точки від центру кола ($d = AO$; рис. 86).

Віддалення даної точки від точок перепину лінії сполуки з колом звуть віддаленнями даної точки від обводу кола (AK, AL; рис. 86).

Здобуток віддалень точки від обводу кола умовилися звати степенем точки зглядно кола.

I) Коли точка лежить по-за колом, то її віддалення від обводу кола будуть:

$$1)\ AL = d + r$$
$$2)\ AK = d - r$$

Тому степень точки буде:

$$\sigma = (d + r).\ (d - r).$$

А ми знаємо, що здобуток віддалень вузла жмутка від точок перетину простих жмута з колом є рівний з квадратом дотичної поведеної з цього вузла до кола, а тому:

$$AL \cdot AK = AM^2 = t^2$$

отже:

$$(d + r)\ (d - r) = t^2$$

або:

$$\underline{d^2 - r^2 = t^2.}$$

[Останній взір можна одержати безпосередньо на підставі теореми Пітагора з $\triangle AMO$; рис. *86*]

Таким чином:

Степень точки, що лежить по-за колом, є рівний з квадратом дотичної, поведеної з цієї точки до кола.

II) Коли точка лежить на крузі (рис. 87). то її віддалення від обводу кола будуть:

$$1)\ AL = AO + OL = d + r$$
$$2)\ AK = OK - OA = r - d = -(d - r).$$

Тому степень точки буде:

$$(d+r).[-(d-r)] = -(d+r).(d-r).$$

А ми знаємо, що здобуток відтинків тятиви є рівний з квадратом півтятиви, що переходить через вузел прямово до відповідного поперечника, себто:

$$AL.AK = AN^2$$

або: $$-(d+r).(d-r) = p^2$$

або: $$\underline{(d+r)\ (d-r) = -p^2}.$$

Таким чином:

Степень точки, що лежить на крузі є рівний з від'ємним квадратом півтятиви, прямової до поперечника, що переходить через цю точку разом з тятивою.

Взір: $(d+r)\ (d-r) = -p^2$, можно перетворити в: $d^2 + r^2 = -p^2$. [Той самий взір також одержимо безпосередньо з $\triangle$ AON (рис. *87*), користуючись теоремою Пітагора].

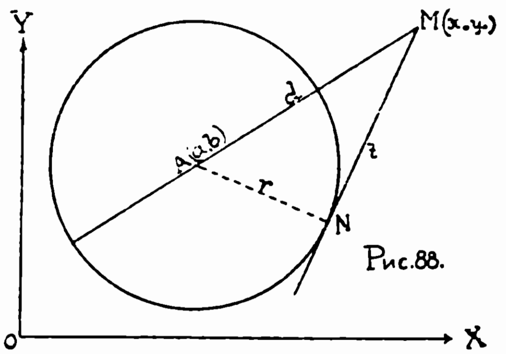


Рис. 88.

Знайдемо тепер аналітичний образ степеня точки зглядно кола.

Візьмім рівнання кола в основній формі:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Хай значники даної точки M є x_0 і y_0, тоді з трикутника AMN (рис. 88) маємо:

$$t^2 = d^2 - r^2$$

але $d^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2$ (через значники кінців відтинка).

Тому: $$\underline{\sigma = t^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2}$$

Розгляньмо випадок, коли точка $M(x_0, y_0)$ лежить на крузі.

З $\triangle$ AMN (рис. 89) маємо:

$$r^2 = d^2 + p^2$$

або: $$-p^2 = d^2 - r^2$$

Але $d^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2$, тому:

$$\underline{\sigma = -p^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2}$$

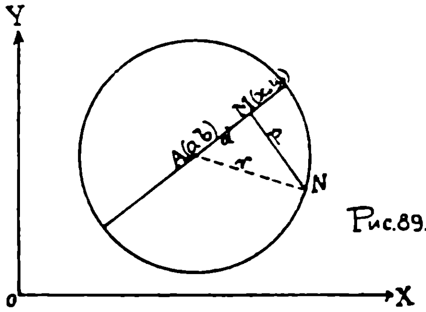


Рис. 89.

Таким чином:

Щоб одержати вартість степеня точки зглядно кола, треба всі члени рівнання кола перенести в ліву частину і вставити замісць змінних відповідні значники точки. Одержаний таким чином многочлен і буде степенем точки зглядно кола (додатнім, коли точка лежить по-за колом, і від'ємним, коли лежить на крузі кола):

$$\sigma = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 \; \ldots\ldots \; (70)$$

Примітка:

Для кола, що має центр у початку осей, степень даної точки буде:

$$\sigma = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

Пропонується довести це самим студентам.

Задача. Знайти геометричний осередок точок, що мають однаковий степень зглядно даного кола.

Розвязок.

Хай рівнання даного кола: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Тоді степень якої небудь точки $A(x_0, y_0)$ зглядно цього кола буде:

$$\sigma = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$$

Щоб одержати рівнання геометричного осередку точок, що мають даний степень σ треба значники точки A вважати за змінні x і y, тоді матимемо рівнання:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2+\sigma$$

Але, в обох випадках, і коли точка по-за кругом (рис 86), і коли точка лежатиме на крузі (рис 89), вартість $r^2+\sigma$ буде рівна d^2.

Через те рівнання нашого геометричного осередку матиме вигляд:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=d^2$$

Себто, **геометричний осередок точок, що мають одинаковий степень зглядно даного кола, є також коло, спільноцентрове з даним, що має за луч відповідну лінію сполуки.**

Висновок.

Для кожної точки січної кола завжди можна знайти на тій самій січній взаємну їй другу точку однакового степеня з першою. Ця друга точка буде симетричною до першої зглядно центра тятиви січної.

Вправи.

Ч — 148. *Написати рівнання дотичної та прямової:*

1) до кола: $x^2+y^2=25$ *в точці:* $A\ (-3{,}4)$;

2) до кола: $x^2+y^2+2x^2-6y-19=0$ *в точці:* $B\ (-6{,}5)$.

Ч — 149. *До кола:* $x^2+y^2-6x-4y-3=0$, *написати рівнання дотичної: 1) рівнобіжної до простої:* $6x+8y-21=0$, *або 2) прямової до простої:* $4x+y-9=0$.

Увага: Для зразку розвяжемо в загальному вигляді таку задачу: написати рівнання дотичної до кола $x^2+y^2=r^2$, рівнобіжної до простої $y=mx+n$.

Припустім, що така дотична переходить через точку обводу кола (x_1, y_1), тоді її рівнання буде: $x_1 x + y_1 y = r^2$, або в канонічній формі: $y = -\frac{x_1}{y_1} x + \frac{r^2}{y_1}$. Коли ця дотична рівнобіжна до даної простої: $y = mx + n$ то їх кутові змінники е рівні, себто: $m = -\frac{x_1}{y_1}$, або: $x_1 + y_1 m = 0 \ldots (A)$. Значники x_1 та y_1 нам невідомі; щоб їх визначити, крім даного рівнання (A), потрібне, ще й друге, але ми знаємо, що точка (x_1, y_1) лежить на колі, а тому: $x^2_1 + y_1^2 = r^2 \ldots (B)$.

Розвязавши систему (A) і (B) зглядно x_1 і y_1, одержимо:

$$\underline{x_1 = \pm \frac{mr}{\sqrt{1+m^2}}} \quad \underline{y_1 = \mp \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}}$$

Отже рівнання дотичних будуть:

$$1) \quad \frac{mr}{\sqrt{1+m^2}} x - \frac{r}{\sqrt{1+m^2}} y = r^2$$

$$2) \quad -\frac{mr}{\sqrt{1+m^2}} x + \frac{r}{\sqrt{1+m^2}} y = r^2$$

або:

$$1) \quad mx - y = r\sqrt{1+m^2}$$

$$2) \quad y - mx = r\sqrt{1+m^2}$$

Таких дотичних буде дві, поведених через кінці поперечника. Що до розвязання задачи, коли треба написати рівнання дотичної, прямової до даної простої, то воно аналогичне з попереднім. Лише кутовий змінник дотичної: $-\frac{x_1}{y_1}$ на підставі умови прямовости беремо рівний $-\frac{1}{m}$ (де m кутовий змінник даної простої)

Отже: $$-\frac{x_1}{y_1} = -\frac{1}{m}$$

або: $$\underline{y_1 = mx_1}$$

Ч — 150. *Визначити кут між дотичними, поведеними до кола:* $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 27 = 0$ *в точках:* $A(-2,1)$ *і* $B(-3,8)$.

Ч — 151. *Написати рівнання дотичної, поведеної:*

1) до кола: $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0$ *з точки:* $0(0,0)$;

2) » : $x^2 + y^2 = 29$ *з точки:* $A(7, -3)$;

3) » : $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ *з точки:* $B(9,2)$.

Ч — 152. *Обчислити довжину дотичних і кут між ними, коли вони поведені з точки:* $A(5,1)$ *до кола:* $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$.

Ч — 153. *Написати рівняння кола, що має:*

1) *центр у точці* $0(o,o)$ *і дотикається простої:* $5x + 4y = 25$.

2) *центр в точці* $0(o,o)$ *і дотикається простої:* $3x - 4y + 10 = 0$.

3) *центр в точці:* $A(6,7)$ *і дотикається простої:* $5x - 12y = 24$.

Ч — 154. *Написати рівняння бігункової:*

1) *до кола:* $x^2 + y^2 = 36$, *для бігуна:* $(0,3)$;

2) » : $x^2 + y^2 = 25$, » » : $(3, -2)$;

3) » : $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ *для бігуна:* $(5, -1)$.

Ч — 155. *В якому положенню проста:*

1) $2x + 5y + 9 = 0$ *зглядно кола:* $x^2 + y^2 = 9$;

2) $3x + 2y - 6 = 0$ » » : $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 - 4 = 0$?

Ч — 156. *Знайти степень точки:*

1) $A(7,8)$ *зглядно кола:* $x^2 + y^2 - 4x + 18y - 21 = 0$;

2) $B(2,3)$ » » : $x^2 + y^2 = 4$;

3) $C(5, -2)$ » » : $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$.

Ч 157. *Обчислити довжини: дотичної й піддотичної та прямової й підпрямової:*

1) *до кола:* $x^2 + y^2 = 25$ *в точці:* $(4,3)$

2) » : $x^2 + y^2 = 225$ » : $(0,15)$

§ 37. Взаємне положення кол.

Щоб визначити взаємне положення кол, будемо шукати точки їх перехрещень. Для цього, як ми знаємо, треба розвязати систему, що складається з рівнань даних кол, а саме:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r_1^2 \quad \ldots\ldots \quad (б)$$

Відлічимо почленно друге рівнання з першого й одержимо:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=(x-m)^2+(y-n)^2-r_1^2$$

Це є рівнання простої, бо другі степені x та y зникають після зведення схожих членів.

Отже, маємо:

$$2(m-a)x+2(n-b)y+(a^2+b^2-m^2-n^2+r_1^2-r^2)=o$$

або: $$px+qy+s=o$$

де $p=2(m-a)$; $q=2(n-b)$; $s=a^2+b^2-m^2-n^2+r_1^2-r^2)$

Таким чином, ми звели розвязання системи двох квадратових рівнань до розвязання системи квадратового й лінійного рівнань. Розвязуючи цю нову систему, ми можемо:

1) одержати по 2 розвязки для значників x та y.
2) » » 1 » » » » »
3) » ні одного розвязка » » »
(уявні розвязки)

в залежності від того, чи відповідний виразник рівнання: $D \gtreqless O$.

В першому разі кола будуть перехрещуватися в двох точках, в другому — дотикатися, а у третьому — не стикатися (лежати окремо).

§ 38. Степенна (або радикальна) вісь.

Розглянемо просту, що її рівнання одержали із системи рівнань двох даних кол *(а)* і *(б)*, а саме:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=(x-m)^2+(y-n)^2-r_1^2 \quad \ldots\ldots (71)$$

або: $$\underline{K_1-K_2=O} \quad \ldots\ldots (72)$$

де через K_1 і K_2 ми умовно означили ліві частини рівнань кол, після перенесення всіх членів їх в ці ліві частини, себто:

$$K_1=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$$
$$K_2=(x-m)^2+(y-n)^2-r_1^2$$

З розвязання системи видко, що ця проста в першому випадку, коли кола перехрещуються, є спільною тятивою, в другому випадку, коли кола дотикаються, є спільною їх дотичною (рис. 90) й у третьому випадкові, коли кола не стикаються, вона лежить по-за ними (є їх мимобіжною) (рис. 91). Щоб уяснити собі ролю цієї простої зглядно даних кол, розвяжемо таку задачу:

Знайти геометричний осередок точок, що мають одинаковий степень зглядно обох кол. Припустім, що така точка S має значники x_0 і y_0, тоді її степень:

1) зглядно першого кола буде:

$$\sigma_1 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$$

2) зглядно другого кола буде:

$$\sigma_2 = (x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 - r_1^2$$

Коли точка S однакового степеня що до обох кол, то $\sigma_1 = \sigma_2$, себто:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = (x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 - r^2$$

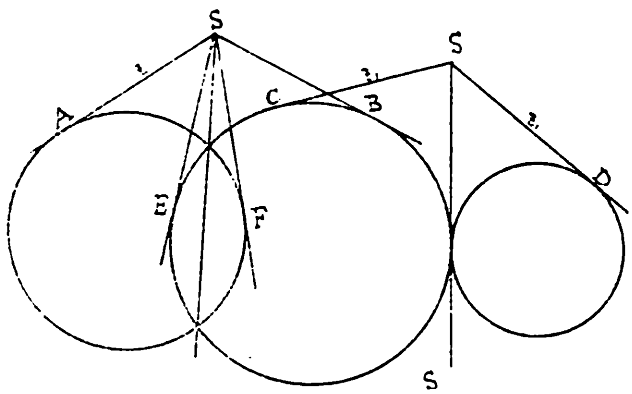


Рис. 90.

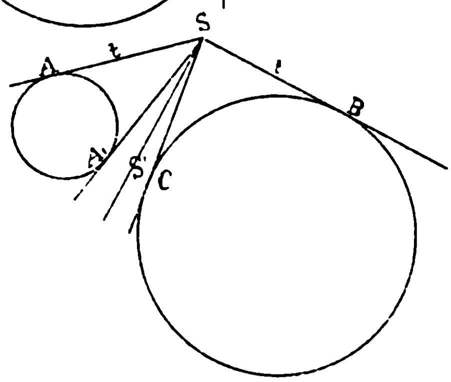


Рис. 91.

Щоб одержати не одну точку, а геометричний осередок точок однакового степеня, треба вважати значники x_0 та y_0 за змінні, себто за x та y, а тому рівняння геометричного осередку точок однакового степеня зглядно обох кол буде:

$$(x - a)^2 + (y - b^2) - r^2 = (x - m)^2 + (y - n)^2 - r_1^2$$

Коли порівняємо це рівнання з рівнанням простої, що сполучує точки перехрещення кол (що ми розглядали), то побачимо, що ці рівнання тотожні. Отже проста:

$$K_1 - K_2 = O.$$

є геометричним осередком точок однакового степеня зглядно обох кол.

Ця проста має назву степенної, або радикальної осі.

Степень точки зглядно кола вимірюється квадратом дотичної поведеної з даної точки до кола, а тому степенна вісь є геометричний осередок точок рівних дотичних, поведених із кожної точки її до обох кол.

Таким чином:

Щоб написати рівнання степенної осі двох даних кол, треба прирівнати одну до одної ліві частини рівнань цих кол (перенісши в ці частини всі члени обох рівнань).

§ 39. Степенна точка трьох кол.

Візьмім три яких-небудь кола; їх рівнання, нехай будуть:

$$K_1 = O,\ K_2 = O,\ K_3 = O.$$

Тоді степенною віссю:

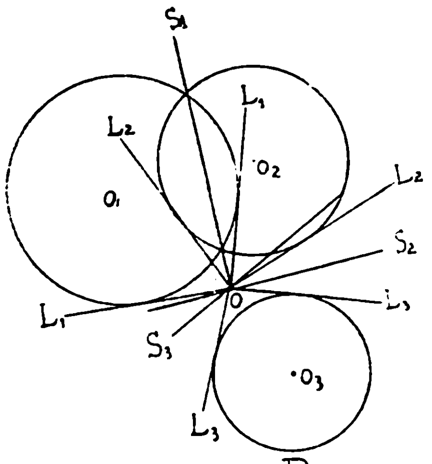


Рис 92.

1-го і 2-го	кола буде проста:	$K_1 - K_2 = O$
2-го і 3-го	» » »	$K_2 - K_3 = O$
3-го і 1-го	» » »	$K_3 - K_1 = O$

Додавши почленно одно до одного ці рівнання, одержимо тотожність:

$$o = o.$$

А це, як знаємо, є умовою того, що всі три степенні осі переходять через спільну точку (Рис. 92).

Цю точку збігу всіх степенних осей звуть **степенною точкою.**

Дотичні, поведені з неї до всіх даних кол, є рівні.

Властивість степенної осі.

Степенна вісь завжди прямова до лучника кол.

Коли маємо два кола: 1) $(x-a)^2+(y-b)^2=r_1^2$ і 2) $(x-m)^2+(y-n)^2=r_2^2$, то рівнання степенної осі буде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(x-m)^2-(y-n^2)=r_1^2-r_2^2;$$

або:

$$(m-a)\,x+(n-b)\,y=p^2, \text{ де } p^2=\frac{r_1^2+m^2+n^2-r_2^2-a^2-b^2}{2}$$

Звідци каноничне рівнання степенної оси матиме вигляд:

$$y=-\frac{m-a}{n-b}\,x+\frac{p^2}{n-b}\ \ldots\ldots\ (a)$$

З другого боку рівнання лучника кол, що переходить через центри, себ-то через точки $O_1(a,b)$ і $O_2(m,n)$ (рис. 92а) буде:

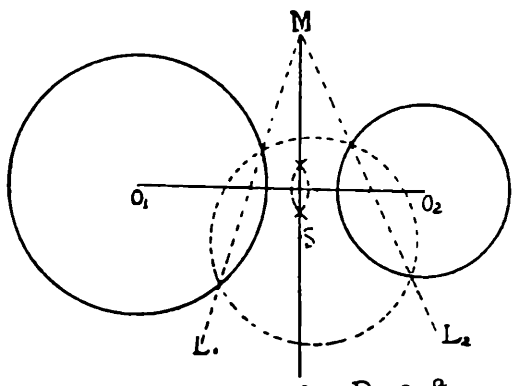


Рис. 93.а

$$y-b=\frac{n-b}{m-a}\,(x-a)\ \ldots\ldots\ (b)$$

Прості (a) і (b) мають взаємно обернені й протилежного знаку кутові змінники $-\dfrac{m-a}{n-b}$ і $+\dfrac{n-b}{m-a}$, а це свідчить, що ці прості взаємно прямові.

Будування степенної осі двох кол.

Коли кола перехрещуються, то степенною віссю їх є спільна їх тятива; коли кола дотикаються, то їх степенною віссю є спільна дотична. Тому вціх випадках дуже легко нарисувати степенну вісь двох даних кол. Зовсім инакша справа, коли кола не перехрещуються. Тоді ми знаємо лише, що степенна вісь перетинає лучник обох кол і йде прямово до нього, але цього мало й ми мусимо знайти ще хоч одну точку по-за цим лучником.

Коли довільним лучем з довільної точки S (рис. 92а) поведемо коло, так щоб воно перехрещувало обидва дані кола, то спільні їх тятиви L_1 і L_2 зійдуться в точці M, що буде очевидно степенною точкою всіх трьох кол O_1, O_2 і S.

Тим то ця точка M безумовно лежагиме її на степенній осі даних кол O_1 і O_2. Коли тепер з точки M спустимо прям MN на лучника $O_1 O_2$, то простa MN і буде потрібною нам степенною віссю.

§ 40. Жмуток кол.

Коли два кола $K_1 = O$ і $K_2 = O$ перехрещуються в двох точках, то значники цих точок мусять задовольняти одночасно обидва рівнання: $K_1 = O$ й $K_2 = O$.

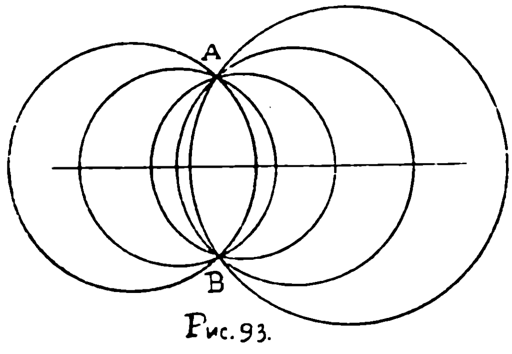


Рис. 93.

Але ціж значники обертатимуть в тотожність і кожне рівнання вигляду: $K_1 - \lambda K_2 = O$
де λ є довільний змінник.

Таким чином, даючи λ ріжні вартости, одержимо жмуток кол, що переходять через дві загадані точки. (Рис. 93).

В окремому випадку коли дані кола $K_1 = 0$ і $K_2 = 0$ дотикаються, то рівнання:

$$K_1 - \lambda K_2 = 0$$

є рівнанням жмутка кол, дочичних в даній спільній точці.

Задача.

Обчислити кут двох даних кол.

Кутом двох даних кол зветься кут утворений дотичними до кол в точці їх перехрещення (рис. 94). Написавши рівнання дотичних в точці перехрещення кол і давши їм канонічну форму, знайдемо відповідні кутові змінники m_1 і m_2.

Тоді:
$$tg\,\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

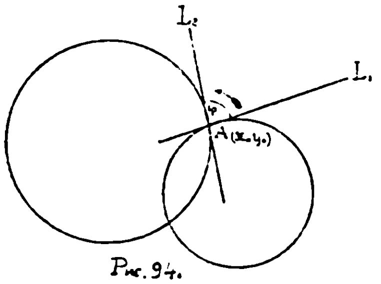


Рис. 94.

Приклад. Знайти кут кол:

1) $x^2 + y^2 = 16$
2) $(x - 5)^2 + y^2 = 9.$

Розвязуємо ці рівнання, яко систему й маємо:

$$x = 3{,}2\,;\; y = \pm 2{,}4.$$

Дотичні в точці: $(3{,}2\,;\; 2{,}4)$ будуть:

1) до першого кола:

$$3{,}2x + 2{,}4y = 16,$$

або: $y = -\,^4/_3 x + \,^{20}/_3$, (тому $m_1 = -\,^4/_3$);

2) до другого кола:

$$(3{,}2 - 5)\;(x - 5) + 2{,}4y = 9,$$

або: $y = \,^3/_4 x$ (тому $m_2 = \,^3/_4$).

Таким чином, кут між дотичними (кут двох даних кол) є прямий, бо задовольняється умова прямовости:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Задача.

Написати рівняння спільної дотичної до двох кол:

Хаї рівнання цих кол будуть:

$$1)\ x^2 + y^2 = r^2$$

$$2)\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r_1^2$$

Напишемо рівнання дотичної до першого кола в якій небудь точці $M(x_1, y_1)$; це рівнання буде:

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

Коли дотична: $x_1 x + y_1 y = r^2$ буде дотичною й до другого кола, то вона буде віддалена на r_1 від центра цього другого кола.

Центр кола: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r_1^2$ має значники $O_1(a, b)$ і тому віддалення точки O_1 від дотичної $x_1 x + y_1 y = r^2$, буде:

$$\frac{x_1\, a + y_1\, b - r^2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \pm r_1$$

Але $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r$, тому:

$$x_1\, a + y_1\, b - r^2 = \pm r r_1$$

Це є перше рівнання, що звязує невідомі значники точки $M(x_1, y_1)$.

За друге рівнання будемо вважати: $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ (бо точка M лежить на першому колі:)

Отже для визначення точки дотику M маємо дві системи з квадратового й лінійного рівнань, а саме:

$$1)\ ax_1 + by_1 = r^2 + rr_1$$
$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

$$2)\ ax_1 + by_1 = r^2 - rr_1$$
$$x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

Ці дві системи дають кожна по двоє розвязків для x_1 та y_1. Разом 4 розвязки.

Отже, таких дотичних можна повести дві парі: система 1) дає точки дотику двох внутрішніх дотичних *(AB* і *CD*, рис. 95); а система 2) дає точки дотику двох зовнішніх дотичних *(KL* і *MN)*.

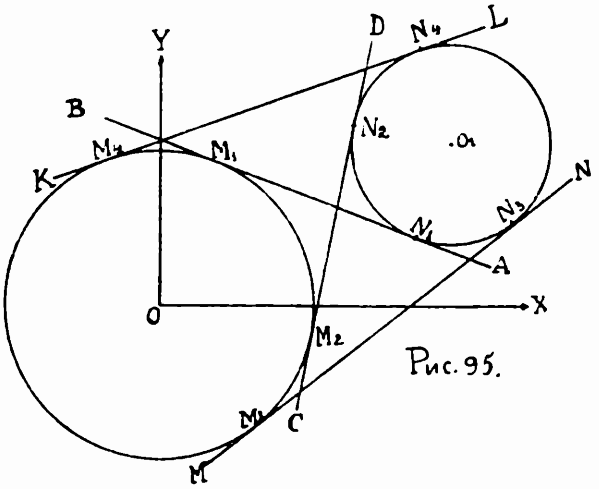


Рис. 95.

Приклад:

Два кола визначаються рівняннями: 1) $x^2 + y^2 = 36$, 2) $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 4$. Написати рівняння спільних до них дотичних.

Складаємо помічне рівняння:

$$8x_1 + 4y_1 - 36 = \pm 12.$$

Тоді маємо 2 системи рівнянь:

Система I:

$8x_1 + 4y_1 = 48$, або: $2x_1 + y_1 = 12$.

$x_1^2 + y_1^2 = 36$.

Система II:

$8x_1 + 4y_1 = 24_1$ або: $2x_1 + y_1 = 6$.

$x_1^2 + y_1^2 = 36$.

Розвязавши, кожну закрема ці системи, одержимо:

а) для системи (I): 1) $x_1 = 6;\ y_1 = 0$.

2) $x_2 = 3{,}6;\ y_2 = 4{,}8$.

б) для системи (II: 1) $x_1 = 0;\ y_1 = 6$.

2) $x_2 = 4{,}8;\ y_2 = -3{,}6$.

Рівняння внутрішніх дотичних: (вставляемо вартости x_1 та y_1 у рівнання $x_1x + y_1y = r^2$)

1) $6x = 36$, $x = 6$

2) $3,6x + 4,8y = 36$

або: $3x + 4y = 30$.

Рівняння зовнішніх дотичних:

1) $6y = 36$, $y = 6$

2) $4,8x - 3,6y = 36$

або: $4x - 3y = 30$.

Вправи.

Ч — 158. *Дослідити взаємне положення кол:*

1) $x^2 + y^2 - 2y = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 18 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ і $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$.

Ч — 159. *Обчислити кут кол:*

$(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 9$; $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Ч — 160. *Написати рівнання спільних дотичних до кол:*

1) $x^2 + y^2 = 9$ і $x^2 + y^2 - 24x + 108 = 0$;

2)• $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$ і $(x - 4)^2 + y^2 = 9$.

Ч — 161. *Написати рівнання степенної осі кол:*

$x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$.

Ч — 162. *Знайти значники степенної точки кол:*

$x^2 + y^2 = 36$; $x^2 + y^2 - 2x - 5y - 5 = 0$ і $x^2 + y^2 + 6x + 11y - 125 = 0$.

§ 41. ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ II.

(коло)

Ч — 163. *Визначити значники центру і луч кола, коли його рівнання:*

1) $x^2 + y^2 - 24 = 6x + 8y$;

2) $x^2 + y^2 = 2x$;

3) $x^2 + y^2 = 16 + 6y$;

4) $4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 3 = 0$;

5) $36x^2 + 36y^2 + 36x + 144y + 89 = 0$.

Ч — 164. *Накреслити коло, визначене рівнанням:*

1) $x^2 + y^2 - 6y = 16$;

2) $x^2 + y^2 = x$;

3) $x^2 + y^2 - x = {}^{19}|_4 - 4y$;
4) $x^2 + y^2 + 6x = 4(x + 3)$;
5) $144x^2 + 144y^2 = 216y - 192x - 1$.

Ч — 165. *Знайти рівняння, довжину й віддалення від початку осей лучника кол:*

1) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$;
2) $x^2 + y^2 = 2y$ і $x^2 + y^2 = 2x$;
3) $(x + 7)^2 + (y - 5)^2 = 81$ і $x^2 - 4x + 49 = 24 + 22y - y^2$.

[1) $3x - 4y + 11 = 0$; $\delta = {}^{11}|_5$; 2) $y = 1 - x$; $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $3y - 2x = 29$; $\delta = \frac{29}{\sqrt{13}}$].

Ч — 166. *Перехрестя простих:*

$$2y - 5x = 3 \text{ і } 3y + 2x = 14$$

узято за центр кола, що переходить обводом через точку (5,6). Написати рівняння кола.

$$[\, x^2 + y^2 - 2x - 8y = 3 \,]$$

Ч — 167. *Центр кола лежить на осі У — ів на віддаленню 2 снт. від початку осей. Написати рівняння кола, коли його обвід переходить через точку В (4,5)*

$$[\, x^2 + y^2 - 4y = 21 \,]$$

Ч — 168. *Написати рівняння кола, що переходить через точки:*

1) $A(0,0)$, $B(8,0)$, $C(0,6)$; 2) $A(-1,2)$, $B(3,3)$, $C(2,-1)$; 3) $A(4,-2)$, $B(-1,3)$, $C(5,-1)$.

[1) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$; 2) $x - (1{,}3)^2 + (y - 1{,}3)^2 = 5{,}78$.

3) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$]

Ч — 169. *Написати рівняння кола, що переходить через вершки трикутника:*

1) $A(2,8)$, $B(5,7)$, $C(6,6)$;
2) $A(8,5)$, $B(-6,7)$, $C(-10,-1)$;

3) $A(-3,3)$, $B(6,6)$, $C(2,-2)$
[a, b *і* r: *1)* $2; 3; 5;$ *2)* $0; -1; 10;$ *3)* $2; 3; 5;$]

Ч — 170. *Написати рівняння кола, обведеного на трикутникові з боками:*

1) $x + 2y = 4;\ x - 2y = 0;\ y = 0$
2) $x + y = 5;\ x - y + 3 = 0;\ y = 6$
3) $y - 3 = 0;\ 5x + 2y + 4 = 0;\ 2y - 5x + 4 = 0.$
[a, b, r: *1)* $2; 1,5; 2,5;$ *2)* $2; 6; 3;$ *3)* $0; 0,9; 2,9$]

Ч — 171, *Написати рівняння кола, що обведене на трикутникові з вершками:* $A(-2,3)$; $B(7,0)$; $C(2,5)$ *і обчислити ріжницю полів кола та трикутника?*

[$(x-2)^2 + y^2 = 25$; $S = 63,54$ *кв. од.*]

Ч — 172. *1) Через точку* $(3,6)$ *повести коло, що дотикається координатних осей, і написати його рівняння;*
2) теж, — через точку $(9,2)$;
3) теж, — через точку $(4,2)$;

[*Значники центра рівні з лучем кола: 1)* $r_1 = 15; r_2 = 3$ *2)* $r_1 = 17$; $r_2 = 5$; *3)* $r_1 = 10$; $r_2 = 2$]

Ч — 173. *1) Написати рівняння кола, що переходить через точку* $A(5,2)$ *і дотикається до осі іксів на віддаленню від початку осей* $a = 3$. *2) Написати рівняння кола, що переходить через точку* $B(-17,-5)$ *і дотикається до осі іксів на віддаленню від початку осей* $a = -2$. *3) Написати рівняння кола, що переходить через точку* $C(-4,13)$ *і дотикається до осі ігреків, на віддаленню від початку осей* $b = 1$.

[*1)* $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$, *2)* $(x+2)^2 + (y+25)^2 = 625$; *3)* $(x+20)^2 + (y-1)^2 = 400$].

Ч — 174. *Написати рівняння кола, що має центр* $A(a, b)$ *і дотикається до простої* : $y = mx + n$.

[*Увага: луч* r *є віддаленням центру* A *від даної простої.*

Розв.: $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \left(-\frac{ma - b + n}{\pm\sqrt{m^2+1}}\right)^2$$]

Ч — 175. *Написати рівнання кола. що:*

1) має центр: A (2,5) і дотикається до простої: $3x + 4y = 1$

2) » *:* $B(5,3)$ » » *:* $3x + 2y = 10$

3) » *:* $C(2, -0{,}5)$ » » *:* $2y - x = 2$

4) » *:* $D(2, -0{,}5)$ » » *:* $x + 2y = 6$.

[*1)* $(x-2)^2 + (y-5)^2 + 25$; *2)* $13x^2 + 13y^2 - 130x - 78y + 321 = 0$ *3) і 4)* $(x-2)^2 + (y + {}^1/_2)^2 = 5$.]

Ч — 176. *Написати рівнання кола, що 1) має луч* $r = 13$ *і дотикається простої:* $3x + 4y = 12$ *в точці:* $A(4{,}0)$; *2) має луч* $r = 10$ *і дотикається простої:* $4x + 3y + 70$ *в точці:* $B(10{,}10)$ [*Увага: Величину луча кола можна обчислити 1) яко віддалення між двома точками 2) як віддалення центра від дотичної.*

[*Відп:* $(x - 11{,}8)^2 + (y - 10{,}4)^2 = 169$; *2)* $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 100$, *або* $(x-18)^2 + (y-16)^2 = 100$].

Примітка. Як розвязати тіж самі задачі, коли б дано було тільки один із значників точок, напр: коли сказано, що коло *(1)* дотикається простої в точці A, що має відтинкову $x = 4$, або. що має рядну $y = 0$. Теж для кола *(2)*.

Ч — 177. *Написати рівнання кола, що має луч* $r = 5$ *і дотикається до простої:* $3x + 4y = 1$, *а центр цього кола лежить на простій* $y - x = 3$. [$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$]

Ч — 178. *Написати рівнання кола, що: 1) переходить через точку* $M(2, -2)$ *і дотикається до простої:* $2x + y = 1$ *в точці* $N(5{,}1)$; *2) переходить через точку* $K(5{,}9)$ *і дотикається до простої:* $4x + 3y = 3$ *в точці* $L(-3{,}3)$.

[*1)* $(x-3)^2 + y^2 = 5$; *2)* $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 25$]

Ч — 179. *Написати рівнання кола, що: 1) переходить через точки:* $A(2{,}0)$ *і* $B(-2{,}0)$ *і дотикається до простої:* $4y = 3x + 6$;

2) переходить через точки: $M(0{,}0)$ *і* $N(2{,}0)$ *і зовні дотикається кола:* $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$.

[*1)* $3x^2 + 3y^2 + 16y = 12$ *2)* $(x-1)^2 + y^2 = 1$, *або:* $(x-1)^2 + (y + {}^{24}|_7)^2 = {}^{625}|_{49}$].

Увага: в задачі 2) вважаемо, що лучник кол, рівний $d = r + 4$, сполучує центри даного й невідомого кола.

Ч — 180. *1) Написати рівнання дотичної до кола:* $x^2 + y^2 = 34$, *рівнобіжної до простої* $5x - 3y + 5 = 0$ *(проаналізувати).*

2) Теж — написати рівнання дотичної до кола $x^2 + y^2 = 100$, *прямової до простої* $4x + 3y = 3$ *(проаналізувати).*

3) Написати рівнання дотичної до кола $x^2 + y^2 = 169$, *рівнобіжної до по простої* $5y + 12y = 3$.

[*1)* $5x - 3y = 34$; $3y - 5x = 34$; *2)* $3x - 4y = 50$; $4y - 3x = 50$; *3)* $12y + 5x = \pm 169$.]

Ч — 181. *Знайти перехрестя:*

1) простої: $x - y = 1$ *з колом:* $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 3$;
2) » : $3x + y = 25$ » : $x^2 + y^2 = 65$;
3) » : $4x + 3y = 70$ » : $x^2 + y^2 - 4x - 8y = 80$.

[*1)* $(3,2)$; $(-1,-2)$; *2)* $(7,4)$; $(8,1)$. *3)* $(10,10)$]

Ч — 182. *Знайти спільні точки:*

1) кола: $x^2 + y^2 = 169$ *і простої:* $3x - 2y + 9 = 0$;
2) » : $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ *і простої:* $3x - 4y = 19$;
3) » : $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ » : $y = 5x - 8$.

А також проаналізувати в якому положенню ці прості зглядно кола.

[*1) Січна в точках:* $(5,12)$ *і* $(-9\,{}^2|_{13}, -9\,{}^3|_{13})$. *2) дотична в точці:* $(5, -1)$ *3) не зустрічається з колом, бо розвязки уявні, напр:* $x_{1,2} = \dfrac{53 \pm 5i}{26} \ldots$]

Ч — 183. *Обчислити тятиву, що утворює:*

1) з колом: $3x^2 - 29x + 3y^2 + 43 = 0$ *січна:* $4x - 3y = 11$;
2) » : $x^2 + y^2 = 25$ *січні: 1)* $x + y = 7$ *і 2)* $x + 5y = 20$;
3) » : $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ *січна:* $3x + y = 0$.

$$\left[\ 1)\ 5;\ 2)\ \sqrt{2}\ \text{і}\ 2\sqrt{5};\ 3)\ \frac{9\sqrt{10}}{5}\ \right]$$

Ч — 184. *До кола:* $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ *поведено січну* $4x - 3y = 6$. *Перехрестя січної з колом сполучено з початком осей. Обчислити поле утвореного трикутника* [*9,6 кв. од.*]

Ч — 185. *До кола:* $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 4$ *поведено січну* $3y - 4x + 11 = 0$. *Обчислити відтинок січної, замкнений колом, і віддалення цієї січної від початку координатних осей.*

[5; ${}^{11}|_5$].

Ч — 186. *Обчислити кут:*

1) *кола:* $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$ *з простою:* $3x - y = 8$;
2) » : $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 100$ » : $4x + 3y = 5$.
[1) $71^0\,33'\,54''$ 2) 90^0]

Ч — 187. *Написати рівняння й обчислити довжину дотичних, поведених з*

1) *точки:* $A\,(-8{,}5; -17)$ *до кола:* $x^2 + y^2 - 22x + 8y = 32$;
2) » : $B\,(2{,}14)$ *до кола:* $x^2 + y^2 = 100$;
3) *з точок:* а) $M\,(6{,}5;5)$; б) $N\,(-5{,}4)$ і в) $P\,(0{,}9^1/_3)$ *до кола:* $x^2 + (y-5)^2 = 13$.

[1) $5y - 12x = 17$; $y = -17$; $t = 19{,}5$. 2) $4y - 3x = 50$; $4x + 3y = 50$; $t = 10$. 3) а) $2x + 3y = 28$; $2x - 3y + 2 = 0$ $t = \frac{13\sqrt{3}}{2}$. б) $2y - 3x = 23$; $2x + 5y = 2$; $t = \sqrt{13}$.
в) $3y \pm 2x = 28$; $t = \frac{2\sqrt{13}}{3}$]

Ч — 188. *Обчислити кути, що їх обіймають дотичні, обчислені в попередній задачі.*
[1) $67^0\,22'\,48''$; 2) 90^0; 3) а) $67^0\,22'\,48''$; б) 90^0 в) $112^0\,37'\,12''$]

Ч — 189. *Під яким кутом видко (кут зору):*
1) *коло:* $x^2 + y^2 = 169$ *з точки* $M\,(17, -7)$
2) » : $(x-8)^2 + (y-7)^2 = 25$ *з точки:* а) $A\,(3{,}13)$;
б) $B\left[\left(8 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right), \left(7 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\right]$
[1) 90^0; 2) а) 90^0; б) 45^0]

Ч — 190. *Написати рівняння бігункової точки* $M\,(17, -2)$ *зглядно кола:* $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$ *і обчислити її відтинок, замкнений колом.* [$3x - y = 8$; $d = 3\sqrt{10}$]

Ч — 191. *Знайти значники бігуна, коли рівняння*
1) *кола:* $x^2 + y^2 = 64$, *а бігункової:* $2x - 5y + 12 = 0$
[$x_0 = -10^2/_3$; $y_0 = 26^2/_3$]
2) *теж — для кола:* $x^2 + y^2 = 65$ *і бігункової:* $x + 5y = 13$.
[$x_0 = 5$; $y_0 = -25$]

3) теж — для кола: $x^2+y^2-6x+4y=3$ *і бігункової* $x-y=1$.

[*1)* $(-10^2/_3,\ 26^2/_3)$, *2)* $(5{,}25)$ *і 3)* $(-1{,}2)$.]

Ч — 192. *Знайти перехрестя й обчислити спільні тятиви кол:*

1) $x^2+y^2=100$; $x^2+y^2-12x=4$;

2) $x^2+y^2=40x$; $x^2+y^2=30y$;

3) $x^2+y^2=25$; $(x-2)^2+(y-1)^2=10$;

4) $(x-9)^2+(y-8)^2=64$; $x^2+y^2+6x-16y+57=0$;

5) $(x-5)^2+(y+6)^2=9$; $x^2+y^2=16$;

6) $x^2+y^2-12y=25$; $x^2+y^2-12x-7y=25$.

[*1)* $(8{,}6)$; $(8,-6)$; $d=12$. *2)* $(0{,}0)$; $(14{,}4{,}19{,}2)$; $d=24$. *3)* $(3{,}4)$; $(5{,}0)$; $d=2\sqrt{5}$. *4) дотикається в точці* $(1{,}8)$. *5) не перехрещується 6)* $(5{,}12)$ *і* $(^{125}/_{169},\ -^{300}/_{169})$; $d=14^{12}/_{13}$]

Ч — 193. *Написати рівнання степенної (радикальної) осі кол, поданих у попередній задачі.*

Ч — 194. *Написати рівнання степенної осі й лучника кол:*

1) $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ *і* $(x-1)^2+(y-2)^2=16$;

2) $x^2+y^2-4x-6y=3$; $x^2+y^2+6x-2y+1=0$ *і довести, що вони прямові.*

[*1)* $6x-2y=1$; $x+3y=7$; *2)* $5x+2y+2=0$; $5y-2x=11$; *в обох випадках задовольняється умова прямовости* $AA_1+BB_1=0$]

Ч — 195. *Теж — для кол:* $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ і $x^2+y^2+2x-6y+6=0$, *а також обчислити віддалення центрів.* [$2x+3y=7$; $3x-2y+1=0$; $\sqrt{13}$].

Ч — 196. *Знайти степенну точку кол:*

1) $(x-3)^2+y^2=5$; $(x+4)^2+(y+1)^2=9$ і $(x-1)^2+(y-2)^2=7$.

2) $x^2+y^2+34x-14y+169=0$; $(x-1)^2+(y-13)^2=1$ і $(x-13)^2+(y-2)^2=4$.

[*1)* $(-^1/_{16},\ -^{25}/_{16})$ *2) початок коорд. осей*]

Ч — 197. *Визначити рівнання кол, що дотикаються:*

1) зовнішньо до кол: $(x-3)^2+y^2=1$; $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ *і* $(x+3)^2+(y+3)^2=16$.

2) внутрішньо до кол: $x^2 + y^2 = 25$ *та* $(x+5)^2 + (y+8)^2 = 16$ *і зовнішньо до кола:* $(x+10)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Увага: Визначивши довжину лучників, напр:, для першого випадку: $(\varrho + 1)^2 = (a-3)^2 + b^2$; $(b+2)^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2$ і т.д. де a, b і ϱ є відповідно значники центра і луч невідомого кола, одержимо три рівнання з трьома невідомими.

[Відп: 1) $(x-1)^2 + y^2 = 1$; 2) $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 225$]

Ч — 198. *Під яким кутом перехрещуються кола:*

1) $x^2 + y^2 = 64$ і $(x-5)^2 + y^2 = 49$;

2) $(x-9)^2 + (y-8)^2 = 64$ і $(x+3)^2 + (y-8)^2 = 16$;

3) $(x-6)^2 + y^2 = 40$ і $x^2 + y^2 = 100$.

[1) $\varphi = 38^0 12' 48''$; 2) $\varphi = 0$. *Що це означає?*

3) $tg\varphi = = -{}^9/_{13}$. $\varphi = 145^0 18' 18''$].

Ч — 199. *Обчислити відтинки дотичної, піддотичної, прямової й підпрямової, а також написати рівнання дотичної й прямової, поведених:*

1) *через точку:* $A(8,6)$ *до кола:* $x^2 + y^2 = 100$;

2) » » : $B(15,8)$ » : $x^2 + y^2 = 289$;

3) » » : $C(4,0)$ » : $x^2 + y^2 = 16$.

[1) $4x + 3y = 50$; $3x - 4y = 0$; $t = 7,5$; $S_t = 4,5$; $n = 10$; $S_n = 8$.

2) $15x + 8y = 279$; $8x - 15y = 0$; $t = 9^1/_{15}$; $S_t = 4^4/_{15}$; $n = 17$; $S_n = 15$.

3) $x = 4$; $y = 0$; $t = 0$; $S_t = 0$; $n = 4$; $S_n = 4$.]

Ч — 200. *Обчислити відтинки дотичної, піддотичної, прямової та підпрямової, а також написати рівнання дотичної та прямової, поведених:*

1) *через точку:* $M(9,9)$ *до кола:* $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25$

2) » » : $N(-4,10)$ » : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 169$.

Увага: Щоб визначити відтинки дотичної та прямової, визначаємо з їх рівнань точки перехресть з віссю іксів. Тоді легко визначити відтинки через значники їх кінців, а також і мети їх $S_t = t_x$, $S_n = n_x$.

[$4x + 3y = 63$; $4y - 3x = 9$; $t = 11^1/_4$; $S_t = 6^3|_4$; $n = 15$. $S_n = 12$; 2) $12y - 5x = 140$; $12x + 5y = 2$; $t = 26$; $S_t = 24$; $n = 10^5/_6$; $S_n = 4^1/_6$].

Ч — 201. *Обчислити обвід та поле кола, визначенного рівнанням:* $x^2 + y^2 + 4x - 14y = 47$

$[P = 62{,}83$ *кв.од.*; $S = 314{,}16$ *кб.од.*$]$

Ч — 202. *Обчислити ріжницю полів трикутника з боками:*

$$3x - 4y + 17 = 0;\ x + 7y + 39 = 0; 7x - y = 77$$

і кола, обведеного на ньому.

$[225(\pi - 2) = 256{,}86$ *кв. од.*$]$

Ч — 203. *Обчислити поле, введеного в коло:* $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ *трикутника, що його два боки визначаються рівнаннями:* $x - y + 1 = 0$ *і* $x + y = 1$ $[S = 2$ *кв. од.*$]$

Ч — 204. *Розвязати трикутник, що має вершок в точці* $M(0{,}3)$ *і раменами дотичні, поведені з цієї точки* M *до кола:* $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 34$. [*Трикутник рівнораменний і прямокутний; його боки:* $\sqrt{34}$; $2\sqrt{17}$; $S = 17$ *кв. од.*]

Ч — 205. *Теж — коли вершок є в точці* $A(7{,}23)$, *а рамена є дотичні до кола:* $x^2 + y^2 = 289$.

[*прямокутний; боки його:* 17, $17\sqrt{2}$; $S = 144{,}5$]

Ч — 206. *Розвязати трикутник, що має вершком точку* $A(0{,}0)$, *а основою тятиву* $4x - 3y = 6$ *кола* $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$.

[*боки:* 6; $7.50...$; $1{,}34$; $S = 4{,}8$ *кв. од.*]

Ч — 207. *Обчислити поле рівнораменника, утвореного лучами, поведеними у точки перехрестя кол:*

1) $x^2 + (y-5)^2 = 16$ *і* $x^2 + y^2 = 9$;
$4x^2 + 4y^2 = 289$ *і* $(x - 10{,}5)^2 + y^2 = 25$.

[1) $S = 12$ *кв. од.* 2) $S = 42$ *кв. од.*]

Ч — 208. *Знайти геометричний осередок вершків трикутників, що мають спільну основу* $2b$ *і сталу суму (або ріжницю) квадратів инших двох боків:* $a^2 + c^2 = m$ (*або:* $c^2 - a^2 = n$).

Розвязок: Будемо вважати середину основи за початок осей, основу $2b$ за вісь X — ів, симетральну основи (прям з середини її) за вісь $У$ — ів, а значники вершка B означимо через (x,y) сполучивши точку O з вершком B (рис. 96), матимемо осередню основи OB.

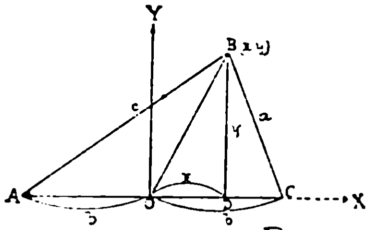


Рис. 96

З трикутника $\Delta\ ODB$ матимемо:

$$x^2 + y^2 = OB^2.$$

Але в геометрії нам відомо, що четверний квадрат осередньої є рівний з подвійною сумою квадратів рамен трикутника без квадрату основи, себто:

$$4OB^2 = 2(a^2 + c^2) - 4b^2, \text{ а тому:}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - 4b^2}{4}$$

Згідно з умовою задачі, вартости $a^2 + c^2 = m$ і b^2 є сталі величини, а тому: $x^2 + y^2 = OB^2$ є рівнання кола з лучем OB (осереднього основи трикутника, рівною: $OB = {}^1/_2\sqrt{2m - 4b^2}$ (рис. 97).

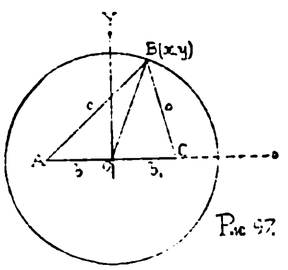


Рис. 97

В окремому випадку, коли: $a^2 + c^2 = 4b^2$ себ-то: $m = 4b^2$, то $OB = {}^1/_2\sqrt{2.4b^2 - 4b^2} = b$. Себто B є вершком прямого кута, що спирається на основу трикутника, яко на поперечник.

Ч — 209. *Знайти геометричний осередок вершків трикутників зі спільною основою $2b = 6$, що їх рамена заховують сталe відношення:* $\frac{a}{c} = \lambda = {}^1/_2$.

Увага: Беручи осі координат, як у попередній задачі (рис 96) визначаемо з прямокутних трикутників ABD і CBD квадрати протипрямок a^2, і c^2 на підставі теореми Пітагора. Далі беремо їх відношення й замісць $\frac{a^2}{c^2}$ вставляємо вартість $\lambda^2 = {}^1/_4$. Остаточно матимемо розвязок: $(x - 5)^2 + y^2 = 16$.

Ч — 210. *Знайти геометричний осередок вершків трикутників, що мають спільну основу $2b$ і сталий вершковий кут β^0.*

Коли вершковий кут B е стала величина, то й сума решти кутів $\alpha + \gamma$ є також стала величина.

План розвязку:

$$tg\,\beta = tg\,[180^0 - (\alpha + \gamma)] = - tg\,(\alpha + \gamma)$$

$$\text{тому}\quad tg\,\beta = - tg\,(\alpha + \gamma) = - \frac{tg\,\alpha + tg\,\gamma}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\gamma} \ldots (1)$$

Беручи початок та напрям осей, як у попередніх задачах, ми з Δ ABD і Δ DBC обчислюємо $tg\,\alpha$ і $tg\,\gamma$, а саме: (рис. 98)

$tg\,\alpha = \dfrac{y}{b+x}$; $tg\,\gamma = \dfrac{y}{b-x}$ і вставивши ці вартости у взір (*1*).

маємо:
$$tg\,\beta = -\frac{\frac{y}{b+x} + \frac{y}{b-x}}{1 - \frac{y^2}{(b+y)\,(b-x)}}$$

Звідци зробивши спрощення, одержимо:

$$x^2 + y^2 - \frac{2b}{tg\,\beta}\,y - b^2 = o$$

Але додаючи й відлічуючи по $\dfrac{b^2}{tg^2\,\beta}$ матимемо:

$$x^2 + \left(y - \frac{b}{tg\,\beta}\right)^2 = b^2\,(1 + ctg^2\,\beta),$$

або:
$$x^2 + (y - b\,ctg\,\beta)^2 = \left(\frac{b}{sn\,\beta}\right)^2$$

Це є рівнання кола з лучем $r = \dfrac{b}{sn\,\beta}$ і центром в точці $K(o,\ b\,ctg\,\beta)$.

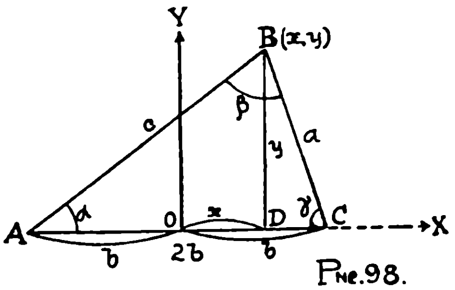


Рис.98.

Ч — 211. *Розвязати попередню задачу для таких окремих випадків:*

1) $2b = 2$; $\beta = 90^0$; *2)* $2b = 4$; $\beta = 60^0$;
3) $2b = 8$; $\beta = 45^0$; *4)* $2b = 10$; $\beta = 30^0$.

[*1)* $x^2 + y^2 = 4$; *2)* $x^2 + \left(y - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{3}$;

3) $x^2 + (y-4)^2 = 32$; *4)* $x^2 + (y - 5\sqrt{3})^2 = 100$].

Ч — 212. *Визначити висоту прямої тристінної призми, що має обсяг 12672 кб. снт, а двоє з боків основи є тятивами:* $4y - 3x = 60$ *і* $4x + 3y = 80$, *обведеного на цьому трикутникові, кола:* $x^2 + y^2 = 400$. [$h = 33$ *снт.*]

Ч — 213. *Бічниця правильної чотиристінної пирамиди 20 кв. метр. Коли через косину основи повести осьовий переріз пирамиди, то на його площі, сама косина відзначатиметься рівнанням:* $6x + 8y = 5$, *а вершок пирамиди лежатиме в точці* $D\ (2,1)$. *Обчислити обсяг та бік основи?*

$$[\,V = 8 \text{ кб. м. } a = 4 \text{ м.}\,]$$

Ч — 214. *Правильні многостінні призма й пирамида мають спільні висоту й основу Рівнання боку основи є:* $12x - 5y = 11$, *а центр кола, введеного у многокутник основи, лежить на перехресті простих:* $2y - 5x = 27$ *і* $3x + y = 8$. *Обчислити спільну висоту призми та пирамиди, коли бічниці їх відносяться як 8 до 5.*

$$[\,h = 8\,]$$

Ч — 215. *Обчислити обсяг тристінної пирамиди, що має боками основи:* $AB \equiv x+y=2$, $BC \equiv y-x=4$ *і* $AC \equiv x+9y+14=0$, *а висотою поперечник кола, обведеного на цьому трикутникові.*

$$\left[\text{луч кола } r = \frac{\sqrt{82}}{2};\ V = \frac{20\sqrt{82}}{3} = 60.37 \text{ кб. од.}\right]$$

Ч — 216. *Правильний чотиристінний пирамидний пень має обсяг 4074 кб. од. На нижній основі пня обведено коло, що має рівнання:* $x^2 + (y - 9{,}5)^2 = 144{,}5$. *Коли через точку* $A(8^1/_2, 18)$ *обводу цього кола повести до нього дотичну, то її піддотична буде рівна з висотою самого пня.*

Обчислити бік верхньої основи пня. $[\,b = 13\,]$.

Ч — 217. *Обчислити поверхню та обсяг правильної чотиристінної призми, що має висоту* $= 1$, *а за основу квадрат, уведений в коло* $16x^2 + 16y^2 - 24x + 32y = 375$.

$$[\,S = 128{,}28 \text{ кв. од. } V = 50 \text{ кб. од.}\,]$$

Ч — 218. *Осьовий переріз вальця є квадрат. Обвід основи цього вальця переходять через точки:* $A\ (0,1)$, $B\ (1,0)$ *і* $C\ (1,2)$. *Обчислити обсяг і поверхню вальця.*

$$[\,V = 6{,}283 \text{ кб. од. } S = 18{,}85 \text{ кв. од.}\,]$$

Ч — 219. *Осьовий переріз вальця 40 кв. од. До кола основи поведено дві січні:* $3x - 5y = 23$ *і* $2x + 7y = 5$, *що переходять через центр, і дотична:* $4x - 3y = 2$.

Обчислити бічницю та обсяг вальця.

[$S = 125{,}664$ *кв. од.* $V = 314{,}16$ *кб. од.*]

Ч — 220. *Творча стіжка нахилена до основи, що визначається рівнанням:* $x^2 + y^2 - 22x + 12y + 57 = 0$, *під кутом* $a = 64^0\,24'\,40''$.

Обчислити обсяг стіжка.

$$\left[\; V = \frac{\pi r^3 ctg a}{3} = 2186{,}75 \text{ кб. од.} \;\right]$$

Ч — 221. *Обчислити поверхню та обсяг прямого стіжка, що його творча рівна з подвійним поперечником кола основи, що переходить через точки (0,8), (6,2), (12,8).*

[$S = 432\,\pi$ *і* $V = 576\,\pi\sqrt{3}$]

Ч — 222. *Валець має за основу коло, що переходить через точки (2,3), (—2,3), (0,—2) і висоту, рівну з поперечником цього кола. Обчислити обсяг і поверхню правильної, обведеної на вальці шостистінної призми.*

[$S = 201{,}84$ *кв. од.* $V = 195{,}11$ *кб. од.*]

Ч — 223. *Обчислити обсяг та поверхню кулі, утвореної обертанням навколо свого поперечника кола, що переходить через точку (9,2) і дотикається до координатних осей.*

[$S_1 = 3631{,}68$, *кв. од.* $S_2 = 314{,}16$ *кв. од.* $V_1 = 20579{,}46$ *кб. од.* $V_2 = 523{,}60$ *кб. од.*]

Ч — 224. *З центрів кол:* $x^2 + y^2 - 16x + 39 + 0$ *і* $x^2 + y^2 = 49$, *поведено лучі у верхню точку їх перехрестя. Утворений за допомогою цих лучів трикутник обертається навколо лучника, яко осі. Обчислити обсяг та поверхню цього круглого тіла.*

[$S = 30\,\pi\sqrt{3}$; $V = 50\,\pi$]

Ч — 225. *Осьовий переріз стіжка є правильний трикутник, а обвід основи стіжка переходить через центри трьох кол: 1)* $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 41 = 0$, *2)* $x^2 + y^2 -$

$-10x+6y=2$ і 3) $x^2+y^2+2x+6y=6$. Обчислити поверхню й обсяг кули, обведеної на цьому стіжкові.

$$\left[S=\frac{400\,\pi}{3}\text{ кв. од.; } V=\frac{4000\,\pi}{27}\sqrt{3}=806{,}13\text{ кб. од.}\right]$$

Ч — 226. *Вирізок круга в $53^0\,7'\,49''$ обертається навколо одного зі своїх бічних лучів. Обчислити обсяг і сферичну поверхню утвореного кулистого вирізку, коли відомо, що метовий прям з кінця дуги даного вирізку на вісь очеркує коло: $x^2+y^2-8x-6y+9=0$.*

$$\left[V=\frac{80\,\pi}{3}\text{ кб. од.; } S=62{,}83\text{ кв. од.}\right]$$

§ 42. Де-які зауваження до другого розділу.

I.

Складення рівнання дотичної до кола в якій-небудь його точці $M(x_1,y_1)$ коли рівнання цього кола дано в алгебричній формі.

Ми знаємо, що основна форма рівнання кола:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2\;\ldots\ldots\;(1)$$

перетвориться в загальне алгебричне рівнання тогож кола:

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0,$$

або в упорядковану форму того самого алгебричного рівнання:

$$x^2+y^2+Mx+Ny+P=0,$$

коли будемо вважати, що:

$$1)\; m=-\frac{D}{2A},\; n=-\frac{E}{2A}\text{ і } r=\frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF}\ldots(2)$$

або:

$$2)\; m=-\frac{M}{2},\; n=-\frac{N}{2}\text{ і } r=\frac{1}{2}\sqrt{M^2+N^2-4P}\ldots(3)$$

Поведемо, тепер, до кола (1) дотичну в точці $Q(x_1,y_1)$. Рівнання її буде:

$$(x-m)\;(x_1-m)+(y-n)\;(y_1-n)=r^2,$$

або: $$xx_1+yy_1-m(x+x_1)-n(y+y_1)+(m^2+n^2-r^2)=0.$$

Очевидно, що вставляючи в останнє рівнання вартости m, n і r з рівностей (2) і (3), ми одержимо рівнання тієїж дотичної, визначене через сочинники відповідних алгебричних рівнань кола.

А саме:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ Axx_1 + Ayy_1 + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = O \\ 2)\ xx_1\ + yy_1\ + \frac{M}{2}(x + x_1) + \frac{N}{2}(y + y_1) + P = O \end{array}\right\} \ldots (75)$$

Рівнання (75) дають загальне правило написання рівнання дотичної в якій небудь точці обводу кола, а саме:

Щоб одержати рівнання дотичної до кола даного рівнанням в алгебричній формі, треба в цьому рівнанню написати квадрати змінних, яко здобутки їх, а подвійні змінні першого ступіня, яко суми їх

[напр.: $Axx + Byy + \frac{D}{2}(x + x) + \frac{E}{2}(y + y) + F = O$,

або: $xx + yy + \frac{M}{2}(x + x)\ \frac{N}{2}(y + y) + P = O$]

і в кожній парі цих змінних змінити одно з них на відповідного значника точки дотику.

Приклади.

Дано коло:

1) $x^2 + y^2 - 2x - 5y - 5 = 0.$

Пишемо:

$$xx + yy - (x + x) - {}^5/_2\,(y + y) - 5 = 0$$

Тому рівнання дотичної матиме вигляд:

$$xx_1 + yy_1 - (x + x_1) - {}^5/_2\,(y + y_1) - 5 = 0.$$

2) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 48y + 99 = 0.$

Пишемо:

$$4xx + 4yy - 4(x + x) + 24(y + y) + 99 = 0.$$

Звідци рівнання дотичної:

$$4xx_1 + 4yy_1 - 4(x + x_1) + 24(y + y_1) + 99 = 0.$$

Відтинкове рівнання кола.

II.

Візьмім центрове рівнання кола:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Поділивши усі члени його на r^2, матимемо:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \;\ldots\ldots\; (76).$$

Рівнання кола в такому вигляді звуть «відтинковим», або «рівнанням через осі».

Для кола, що має центр у точці $A(a,b)$, рівнання його через осі матиме вигляд:

$$\frac{(x-a)^2}{r^2} + \frac{(y-b)^2}{r^2} = 1,$$

або:

$$\left(\frac{x-a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1 \;\ldots\ldots\; (76a).$$

РОЗДІЛ III.

Криві другого ступіня.

В цьому розділі ми маємо на думці розглянути ще кілька кривих, що подібно колу визначаються також рівняннями другого ступіня. Ці криві будуть: парабола, еліпса й гипербола.

I.

ПАРАБОЛА.

§ 43. Визначення параболи, яко геометричного осередку, та основне (вершкове) рівняння її.

Розвяжемо таку задачу:

Знайти геометричний осередок точок, рівновіддалених від даних точки й простої.

Хай ця проста буде aa (рис. 99) а точка F. Означимо віддалення точки F від простої aa через p.

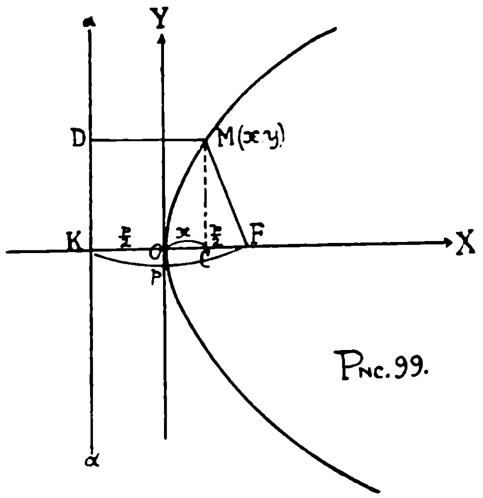


Рис. 99.

Одна з точок, що належить до даного геометричного осередку, безумовно лежить в точці O, посередині KF (бо додержується умова рівновіддаленности точки: $KO = OF$). Ця точка найближча до простої aa (бо віддалення KO і OF творять просту) і тому її будемо звати вершком геометричного осередку. Беремо цей вершок O за початок координат, прям OX з точки F до простої aa — за вісь X — *ів*, а прям OY до осі X — *ів* у точці O — за вісь Y — *ів*. Де-б точка $M(x_1, y_1)$ не лежала на даному геометричному осередку, завжди утворюватиметься прямокутній трикутник CMF, за допомогою якого ми можемо звязати функціонально значники цієї точки зі сталими величинами, що дає умова.

Справді, з трикутника CMF маємо:

$$MF^2 = MC^2 + CF^2 \ldots\ldots \quad (1)$$

Але з умови нашого геометричного осередку виходить, що:

$$MF = MD = KO + OC = \frac{p}{2} + x;$$

крім того $\qquad MC = y; \; CF = OF - OC = \frac{p}{2} - x.$

Отже, вставивши у рівність (1) знайдені вартости величин MF, MC і CF, одержимо:

$$\left(\frac{p}{2} + x\right)^2 = y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2,$$

$$\text{або: } y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = p \,.\, 2x$$

Таким чином, ми одержали рівняння: $y^2 = 2px$ нашого геометричного осередку, що зветься **параболою.**

Укладаючи це рівняння, ми взяли за початок координат вершок параболи й тому рівняння:

$$y^2 = 2px \ldots\ldots \quad (77)$$

зветься **вершковим** рівнанням параболи.

Дана проста aa має назву **напрямної**, або **директрити** параболи.

Точка F має назву **вогнища** або **фокуса** параболи. Віддалення KF, вогнища від напрямної зветься **вогнищевим** або **фокусовим** віддаленням; воно означається завжди літерою p і вважається за додатню величину. Величина подвійного вогнищевого віддалення має назву **змінника,** або **параметра** параболи.

Тому, вогнищеве віддалення p часто звуть їще півзмінником (півпараметром) параболи.

Аналіза рівнання параболи: $y^2 = 2px$

Визначивши з рівнання параболи y, матимемо:

$$y = \pm \sqrt{2px}.$$

1) Перш за все бачимо, що коли вважати p за додатню величину, то x не може мати від'ємних вартостей, бо тоді вартости y були-б уявні й реальних точок кривої не існувало-б.

Тому парабола лежить лише по один бік осі У — ів, а саме з боку додатніх х — ів.

2) Коли $x = o$, то й $y = o$, себ-то крива переходить через початок осей.

3) Коли зростають вартости x, то й абсолютні вартости y також зростають і коли $x + \infty$, то й $y = \pm \infty$. Крива є безмежна.

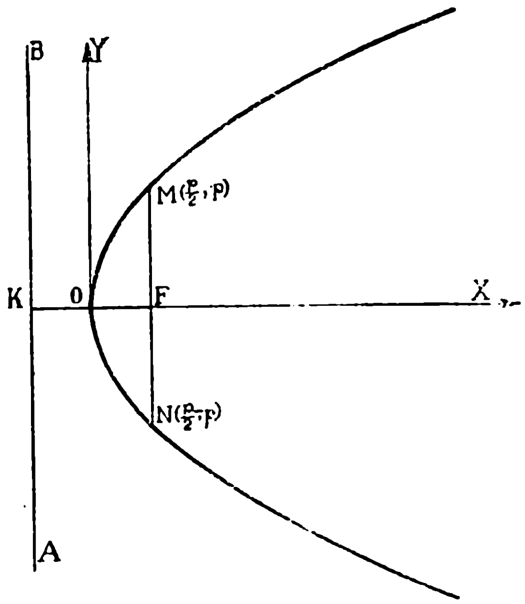


Рис 100.

4) Кожній вартості x відповідає дві вартости y, рівні величиною і противні знаком. Таким чином, парабола складається з двох галузей, симетрично положених зглядно осі X — *ів*, а тому остання має назву осі симетрії параболи, або, просто, осі параболи.

5) Найменшій вартості $x = o$ відповідає лише одна точка (одна вартість $y = o$), що лежить на цій осі. Ця точка $O(o,o)$ як ми умовилися, має назву: **вершка параболи.**

Розгляньмо ще той випадок, коли $x = \frac{p}{2}$.

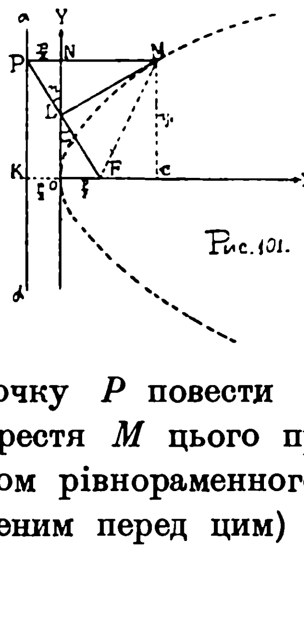
Тоді: $$y = \pm\sqrt{2p.\frac{p}{2}} = \pm p.$$

Відтинок простої, що сполучує ці точки $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ і $\left(\frac{p}{2}, -p\right)$, є тятива параболи, що переходить прямово до її осі через вогнище F, бо віддалення F від початку координат рівне $\frac{p}{2}$.

Ця тятива своєю величиною рівна зі змінником параболи: $2p$ (рис. 100).

§ 44. Геометричне визначення точок параболи та її креслення.

Розгляньмо ще одну властивість параболи. Візьмім яку небудь точку $M(x,y)$ на ній (рис. 101); віддалення MF і MP, як відомо, рівні: $MF = MP$. Коли сполучимо вогнище F з точкою P, то одержимо рівнораменний трикутник MPF, а тому точка M завжди лежатиме на прямі LM, що поставимо до основи FP трикутника з її середини. Ця властивість дає нам можливість визначити кожну окрему точку параболи. А саме: щоб найти яку небудь точку параболи, треба через вогнище F повести довільний промінь FP до перехрещення в точці P з напрямною, із середини відтинка FP поставити до нього прям, а через точку P повести рівнобіжну до осі параболи; тоді перехрестя M цього пряма LM з рівнобіжною PM і буде вершком рівнораменного трикутника MPF, себто (згідно з доведеним перед цим) точкою самої параболи.



Зауважимо ще одну властивість параболи, а саме: **як що з довільної точки параболи M повести рівнобіжну до її осі, то промінь, спрямований з вогнища до перехрестя P згаданої рівнобіжної з директритою, переполовинюватиметься вісю ігреків, а сам відтинатиме від цієї осі відтинок** *(OL)*, **рівний з половиною рядної точки** M.

Трикутники OLF і PNL, що мають рівні прямки: $OF = PN = \frac{p}{2}$ і гострі кути: $\sphericalangle m$ і $\sphericalangle n$ рівні, як вершкові, є рівнопристайні: $\Delta\ OLF = \Delta\ PNL$.

Звідци боки:

1) $FL = LP$ 2) $OL = LN$, але $ON = CM = y_1$.

Отже: $$OL = LN = \frac{y_1}{2} \ldots\ldots (78)$$

Ці спостереження допомогають знайти середину даного проміня, поведеного з вогнища.

Тим-то, щоб збудувати параболу, знаючи її змінник $2p$, треба робити так: (рис 102)

1) повести довільну просту, що буде віссю параболи;

2) помітити на цій осі довільну точку A і взяти її за початок напрямної (директрити);

3) відкласти від точки A в напряму додатніх x — *ів* відтинки $\frac{p}{2}$ і p; кінці їх будуть: O — початком координат а F — вогнищем.

4) через точки A і O повести прями до вибраної нами осі параболи й ци прями будуть:

а) aa_1 — напрямною.

б) OY — віссю ігреків.

Після цього ведемо з точки F як можна більше променів, що перехрещують напрямну і 1) з кожного перехрестя променя й осі $У$ — *ів* ставимо до даного променя прям; 2) з кожного перехрестя напрямної з цим променем також ставимо до неї прям.

Точки збігу кожної пари відповідних прямів до променя й до напрямної завжди будуть точками параболи.

Креслення від'ємної галузі параболи аналогичне з кресленням додатньої галузі.

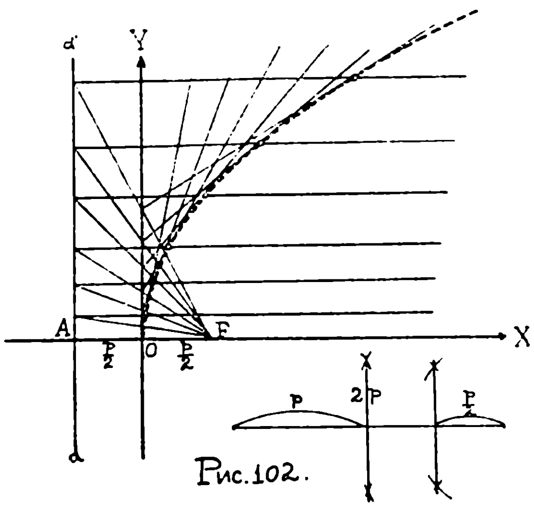


Рис. 102.

Є ще кілька способів креслення параболи, але в нашому курсі розглядати їх не будемо:

Для креслення параболи існує спеціяльний техничний прилад, що має назву **параболографа.**

Але ми обмежимося тим, що покажемо техничний спосіб креслення параболи за допомогою лише лінійки та косинця. (Тим більше, що в основі своїй параболограф має той самий принціп). Накреслімо довільну просту CD і візьмім її за напрямну вісь (директриту). Прикладаємо до неї лінійку MN (рис 103). До вершка $к$ косинця $mnк$ прикріплюємо міцну (таку, що не витягується) нитку, рівну по довжині з прямкою $mк$.

До простої CD в якій небудь точці O ставимо прям OK_1, що буде віссю параболи, й на ньому від точки O відкладаємо віддалення $OF = p$ (пів даного змінника параболи). Точка F — стане таким чином вогнищем параболи. Кінець нитки m закріплюємо в точці F і нитку (натягнувши) притискаємо оливцем до руба косинця mk (напр. в точці A). Коли приложимо косинець mnk рубом mn до лінійки MN, а рубом mk до простої OK_1, то вістря оливця буде в точці A_1 посередині між O і F $(OA_1 = A_1F)$. Коли далі посуватимемо цей косинець вздовж лінійки MN вгору, то вістря оливця накреслить горішню галузь параболи. Щоб накреслити нижню галузь, перекидаємо косинець до гори, як показано на малюнку і робимо так, як у першому разі.

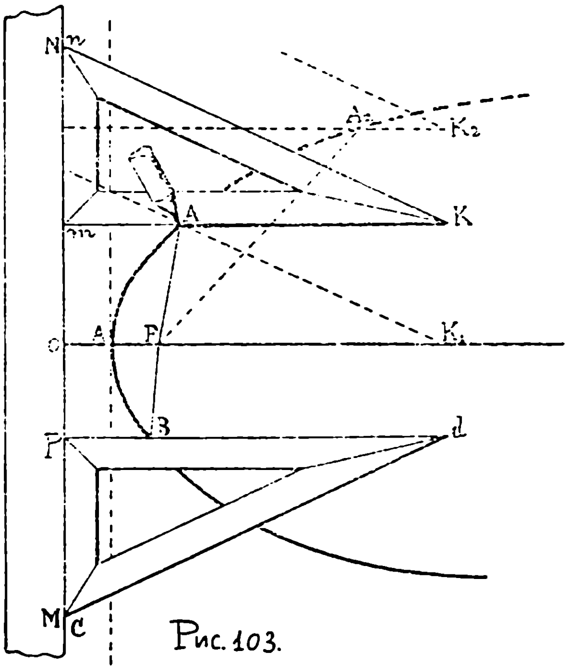


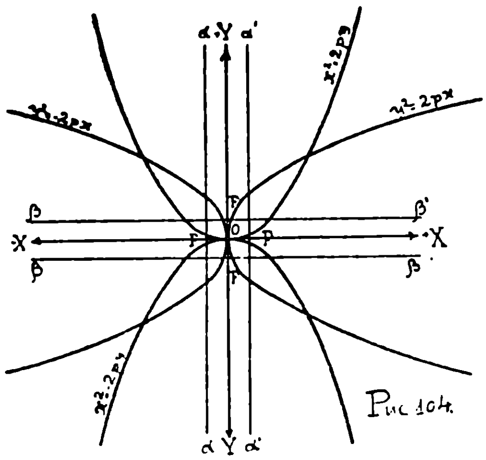
Рис. 103.

Цей техничний спосіб креслення параболи є фактичним виконанням поданого нами перед цим теоретичного способу.

Справді, коли нитка має довжину руба косинця mk, то в кожному положенню цього косинця довжина частини нитки FA є рівна з довжиною частини руба mA, що з нього знято нитку. Таким чином, точка A лежатиме у вершку рівнораменного трикутника, збудованого на довільному проміні Fm, поведеному з вогнища, що й виповнює умову параболи, яко геометричного осередку, бо ця точка A завжди рівновіддалена і від вогнища F і від напрямної CD $(FA = Am)$.

§ 45. Инші форми рівнання параболи.

І. Дуже просто можна вивести вершкові рівнання параболи для тих випадків, коли (рис. 104).



1) За вісь параболи взято від'ємну вісь іксів. Рівнання такої параболи буде:

$$y^2 = -2px \quad \ldots\ldots \quad (79)$$

2) За вісь параболи взяти додатню вісь ігреків; тоді рівнання параболи буде:

$$x^2 = 2py \quad \ldots\ldots \quad (80)$$

і 3) За вісь параболи взято від'ємну вісь ігреків; тоді рівнання:

$$x^2 = -2py \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

Цих рівнань окремо не доводимо, а для зразка подаємо далі довід елеваційного рівнання параболи.

Примітка:

Розвязки рівнань: $y^2 = -2px$ та $x^2 = -2py$ реальні, бо коли p додатнє зглядно з нашою умовою, а вартости x та y від'ємні, то здобутки: $-2py$ і $-2px$ є додатні.

II. Рівняння параболи, що має вершок у довільній точці $A(a,b)$, **а вісь її рівнобіжна до осі іксів (або ігреків).** Це рівнання звуть **загальним рівнанням** параболи.

Розгляньмо випадок, коли вершок параболи лежить в точці $A(a,b)$, а вісь її KN рівнобіжна до осі іксів й однаково з нею спрямована (рис. 105). Хай точка $M(x,y)$ лежить на цій параболі, тоді з трикутника FMN маємо:

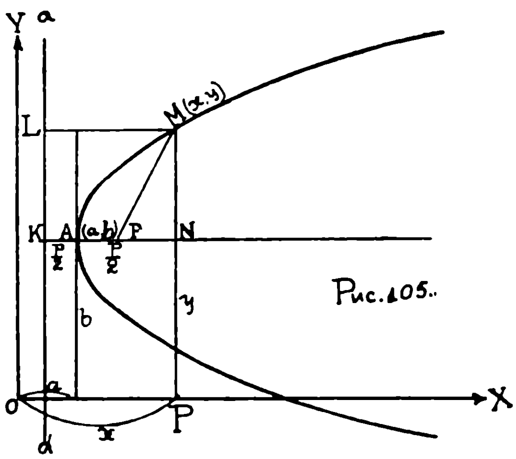


Рис. 105.

$$MN^2 = MF^2 - FN^2$$

Але: 1) $MN = MP - PN = y - b$

2) $MF = ML = KN$; де: $KN = AN + KA$,

але: $AN = OP - OB = x - a$ і $KA = \frac{p}{2}$;

тому: $MF = KN = (x - a) + \frac{p}{2}$

3) $FN = AN - AF = (x - a) - \frac{p}{2}$

Отже: $(y - b)^2 = \left((x - a) + \frac{p}{2}\right)^2 - \left((x - a) - \frac{p}{2}\right)^2$

Розклавши ріжницю квадратів на чинників, одержимо:

$$(y - b)^2 = 2p\,(x - a) \quad \ldots\ldots \quad (82)$$

Аналогично й для параболи, що має вісь рівнобіжну до осі Y — $ів$, матимемо рівнання:

$$(x - a)^2 = 2p\,(y - b) \quad \ldots\ldots \quad (82a)$$

III. Розглянемо ще одну форму рівнання параболи, що має назву елеваційного. (Це є рівнання траєкторії лету тіла, кинутого в порожнечі під кутом до позему).

У даному разі парабола має вершок в якій небудь точці $A(a,b)$, а вісь спрямовану рівнобіжно до осі $У$—ів згори униз; початок координатних осей лежить на одній із галузей параболи.

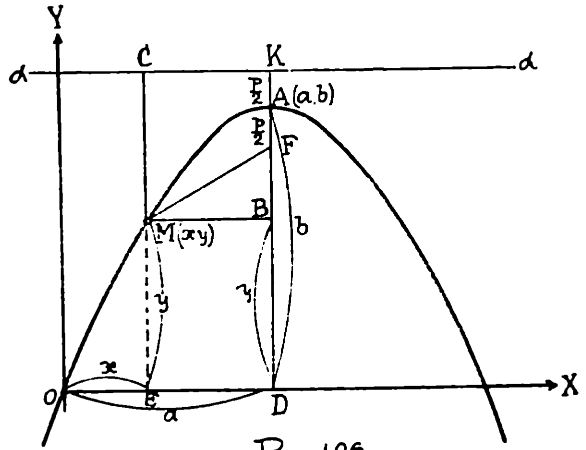


Рис. 106.

Розгляньмо трикутник BMF і з нього маємо:

$$BM^2 = FM^2 - BF^2$$

Але: 1) $BM = OD - OE = a - x$

2) $FM = MC = BK$; (з властивости параболи) де $BK = BA + AK$;

$$BA = DA - DB = b - y\ ;\ AK = \frac{p}{2}.$$

$$\text{Тому } FM = (b - y) + \frac{p}{2}$$

3) $BF = DA - DB - FA = (b - y) - \frac{p}{2}$

Вставляючи вартости BM, FM і BF, маємо:

$$(a - x)^2 = \left[(b - y) + \frac{p}{2}\right]^2 - \left[(b - y) - \frac{p}{2}\right]^2,$$

а розклавши ріжницю квадратів на чинників, одержимо:

$$(a - x)^2 = 2p\,(b - y).$$

Поки-що ми не брали під увагу умови, що парабола мусить переходити через початок координатних осей, а тому доведене нами рівнання є рівнанням взагалі кожної параболи, що має вісь, рівнобіжну до осі ігреків і спрямовану в бік від'ємних ігреків.

Вивід цього рівнання ми подаємо лише для вправи студентам, бо на підставі попередніх міркувань можна було-б написати його безпосередньо а саме:

рівнання параболи, що має вісь, рівнобіжну до осі У—ів і спрямовану в бік від'ємних *y — ів*, буде:

$$(x - a)^2 = -2p\,(y - b)$$

або:

$$(a - x)^2 = 2p(b - y).$$

Тепер заважимо ще ту умову, що парабола переходить через початок осей, себ-то значники початку $x = o$, $y = o$ мають обертати рівнання цієї параболи у тотожність, а саме:

$$(a - o)^2 = 2p\,(b - o)^2$$

або:

$$a^2 = 2pb.$$

Вставивши цю вартість в рівнання параболи, матимемо:

$$x^2 - 2ax + 2py = O \quad \ldots\ldots \quad (83)$$

Цьому рівнанню можно дати ще такий вигляд:

$$x^2 - 2ax + a^2 = a^2 - 2py,$$

а звідци:

$$(x - a)^2 = a^2 - 2py \quad \ldots\ldots \quad (84)$$

Ці два рівнання й мають назву елеваційних рівнань параболи.

Задача.

Для того, щоб з'ясувати причину назви тільки-що доведеного рівнання параболи й показати його значіння в теоретичній механиці, розвяжемо таку задачу:

Тіло кинуто вгору під даним елеваційним кутом (кутом нахилу до позему). Визначити: 1) шлях лету (траєкторію) тіла 2) висоту його піднесення над поземом і 3) далину лету тіла, коли відомо початкову скорість і час лету (тревалість лету).

Припустімо, що нам відомі:

1) початкова скорість — v,

2) тревалість лету — t (секунд),

3) елеваційний кут (під яким кинуто тіло) — α

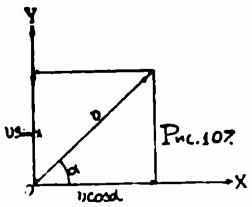
і 4) прискорення сили ваги для даної місцевости — g.

Треба знайти:

1) форму траєкторії,

2) висоту піднесення тіла, що означимо через h

і 3) далину лету тіла, що означимо через l.



Візьмемо за початок координатних осей початок руху тіла, вісь X — *ів* спрямуємо вздовж поземої площи, а вісь $У$ — *ів* прямовісно до неї.

Кожне тіло, що буде кинуте з якоюсь силою в порожнечі, завжди знаходитиметься під впливом двох сил, а саме:

1) ударної сили (штовчка, що викликав рух тіла)

і 2) сили ваги.

Згідно із законами механики, перша сила дасть рівномірний простолінійний рух, а друга рівномірно—припізнений рух.

Тому скорість v можна розкласти за правилом рівнобіжника на дві складові скорости:

1) скорість рівномірного руху (мет на вісь іксів) $v_x = v\,cs\,\alpha$

і 2) скорість рівномірно припізненого руху (мет скорости на вісь ігреків) $v_y = v\,sn\,\alpha$.

Припустім, що рух тревае t сек; тоді тіло у першому рівномірному рухові пройде шлях:

$$S_1 = v\,cs\,\alpha\,.\,t$$

(це буде його повздовжне просунення), а в другому рухові за ті ж t секунд воно пройде шлях:

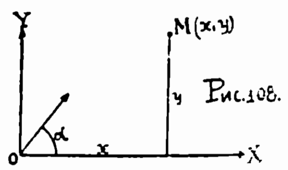
$$S_2 = v\,sn\,\alpha\,.\,t - \frac{gt^2}{2}$$

(це буде його прямовісне просунення).

Колиб за t секунд тіло опинилося в точці $M(x,y)$, то повздовжне просунення тіла за t секунд булоб значником x точки M, а прямовісне просунення тіла булоб значником y тієї ж точки.

Себто:
$$x = S_1 = v\,cs\,\alpha\,.\,t \qquad (1)$$
$$y = S_2 = v\,sn\,\alpha\,.\,t - \frac{gt^2}{2} \qquad (2)$$

Щоб визначити траєкторію лету тіла, нам треба знайти геометричний осередок точок, що визначають положення цього тіла на траєкторії незалежно від часу (в кожну мить).



Очевидно, що для цього треба виключити із вартостей x і y величину t (час) і тим самим скласти рівнання цієї траєкторії.

Визначаємо з рівнання (1) вартість t:

$$t = \frac{x}{v\,cs\,\alpha}$$

і вставляємо її в рівнання (2), тоді маємо:

$$y = \frac{xsn\,\alpha}{cs\,\alpha} - \frac{gx^2}{2\,v^2cs^2\,\alpha}$$

або:

$$y = xtg\,\alpha - - \frac{g}{2\,v^2cs^2\alpha}\,x^2$$

Це й буде рівнанням траєкторії тіла, кинутого в порожнечі під даним елеваційним кутом; воно дуже часто вживається в механиці, але ми надамо йому другий вигляд, а саме:

поділимо всі члени на сочинника x^2 і перенесемо їх у ліву частину тоді матимемо:

$$x^2 - \frac{v^2sn2\,\alpha}{g}\,x + \frac{2\,v^2cs^2\,\alpha}{g}\,y = o$$

Величини: v, α і g є сталі, а тому ми можемо висліди дій над ними означити через сталі вартости, а саме:

$$(a)\quad \frac{v^2\,sn2\,\alpha}{g} = 2a\ ;\quad (b)\quad \frac{2\,v^2cs^2\,\alpha}{g} = 2p$$

Тоді рівнання приймає вигляд:

$$\underline{x^2 - 2ax + 2py = O};$$

Як бачимо, це є елеваційне рівнання параболи.

Отже траєкторія тіла, кинутого в порожнечі під якім-небудь кутом до позему, є парабола, обернена вершком вгору, з віссю, спрямованою прямовісно до позему. Ця порабола однією своєю галуззю переходить через початок руху тіла.

Очевидно, що найвищою точкою, якої досягне тіло, буде вершок параболи $A(a,b)$ (рис 109) і тому висотою лету буде рядна вершка параболи, себто:

$$h = b$$

Далиною лету тіла буде $l = 2a$ (бо кожній вартости y відповідатиме 2 рівні по абсолютній величині вартости x). Тому, щоб обчислити вартости h і l, ми мусимо визначати вартости значників вершка $A(a,b)$.

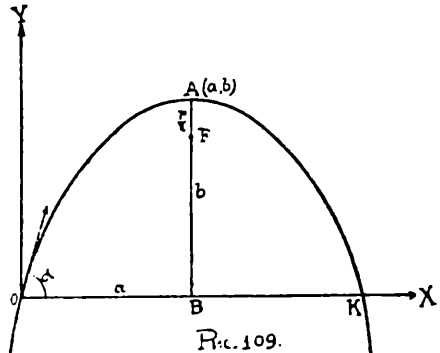


Рис. 109.

З рівности (a), маємо:

$$2a = \frac{v^2\,sn2\,\alpha}{g}\ ;\quad a = \frac{v^2\,sn2\,\alpha}{2g}$$

З рівности (b), маємо:

$$2p = \frac{2\,v^2cs^2\,\alpha}{g}\ \text{(змінник параболи).}$$

Але ми знаємо, що умовою переходження такої параболи через початок координат є:

$$a^2 - 2pb = O$$

а звідци:

$$b = \frac{a^2}{2p}$$

А через те, вставивши в цю рівність вартости a й $2p$, одержимо:

$$b = \frac{v^2 sn^2 \alpha}{2g}$$

Таким чином висота лету тіла буде:

$$h = b = \frac{v^2 sn^2 \alpha}{2g}$$

а далина лету тіла буде:

$$l = 2a = \frac{v^2 sn2 \alpha}{g}$$

Ці величини h і l залежать лише від вартости відповідних функцій *sinus*, бо v і g — є сталі величини. Тому найбільші вартости для h і l будуть, коли $sn^2\alpha = 1$ і $sn2\alpha = 1$. Отже положивши $sn^2\alpha = 1$ і $sn2\alpha = 1$, будемо мати:

1) $sn\alpha = 1$; $\alpha = 90^0$; тоді $l = \frac{v^2}{2g}$

2) $sn2\alpha = 1$; $2\alpha = 90^0$; $\alpha = 45^0$, тоді $h = \frac{v^2}{g}$

Таким чином, тіло досягає найвищого положення тоді, коли його кинути прямовісно в гору $\left(h = \frac{v^2}{2g}\right)$ а залетить воно найдальше тоді, коли його кинути під елеваційним кутом $\alpha = 45^0$ $\left(l = \frac{v^2}{g}\right)$.

Коли лет тіла відбувається в повітрі, то приходиться вводити поправку на опір повітря.

Розглянемо ще випадок, коли тіло з якої небудь висоти h кинуто рівнобіжно до позему. В цьому разі елеваційний кут α є нуль.

Отже в рівнанню: $x^2 - 2ax + 2py = o$,

$$a = \frac{v^2 sn2\alpha}{2g} = \frac{v^2.o}{2g} = O$$

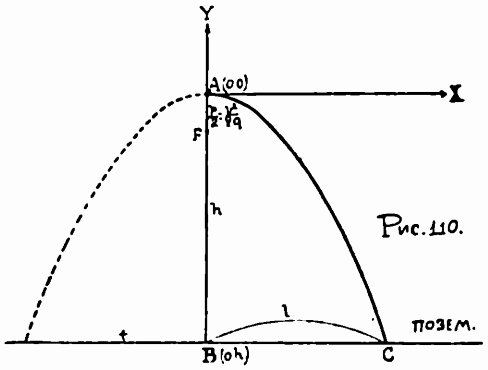
$$2p = \frac{2v^2 cs^2 \alpha}{g} = \frac{2v^2.1}{g} = \frac{2v^2}{g}$$

Тому рівнання параболи приймає вигляд:

$$x^2 + \frac{2v^2}{g}\ y = o$$

або:
$$x^2 = -2py \ (\text{де } \frac{2v^2}{g} = 2p).$$

Це, як бачимо, є парабола з вершком в початку координаті з віссю, спрямованою в бік від'ємних ігреків.



Визначимо в цьому разі далину лету. Очевидно, що лет тіла припиниться, коли воно впаде на землю, але тоді рядна точки C буде $y = -h$. Отже, $l = x$ визначиться вставкою в рівнання параболи $y = -h$.

Тому:
$$x^2 = l^2 = -\frac{2v^2}{g} \cdot -h = \frac{2v^2h}{g}$$

$$l = \sqrt{\frac{2v^2h}{g}} = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

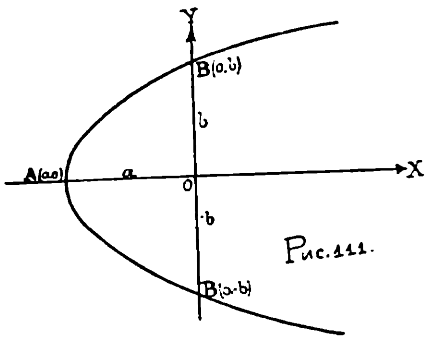
IV. Відтинкове рівнання параболи.

Припустім, що вершок параболи лежить на осі X — ів у точці $A(a,o)$, а вісь параболи спрямована в бік додатніх іксів. (Вартість a в залежности від умови може бути від'ємна й додатня). Тоді (як нами було вже доведено) загальне рівнання параболи матиме вигляд:

$$(y - o)^2 = 2p\,(x - a), \text{ або:}$$

$$y^2 = 2p\,(x - a),$$

Звідци:
$$y^2 = 2px - 2pa$$



Визначимо тепер відтинки, що творить парабола на вісях. Коли парабола має спільну з віссю X — ів точку, то рядна цієї точки $y = o$. Так само, коли парабола має спільну точку з віссю $У$ — ів, то відтинкова цієї точки $x = o$. Тому, беручи по черзі:

1) $y = o$, матимемо:

$$2px - 2pa = O\,, \quad \text{або } x = \frac{2pa}{2p} = a$$

2) $x = o$, матимемо:

$$y^2 = -2pa\,, \quad \text{або } y = \pm\sqrt{-2pa} = \pm\, b$$

Отже парабола творить: 1) на осі X — ів відтинок a а 2) на осі $У$ — ів відтинки: $b = \pm\sqrt{-2pa}$. Коли вартість b є уявна (себто $-2pa < o$) то точок перетину параболи з віссю $У$ — ів немає. Колиж відтинки на осях означити через a і $b = \pm\sqrt{-2pa}$, або $b^2 = -2pa$, то наше рівнання може мати вигляд: (ділимо всі члени рівнання на $-2pa$, і у вислід вставляємо, замісць $-2pa$, його вартість b^2)

$$\frac{y^2}{-2pa} = -\frac{x}{a} + 1\,, \text{ або}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = -\frac{x}{a} + 1$$

Переносючи змінні в ліву частину рівнання, одержуємо, так зване, відтинкове рівнання параболи.

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x}{a} = 1, \text{ або } \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \frac{x}{a} = 1 \; \ldots\ldots \; (85)$$

Приклади:

1) Написати рівнання параболи, що творить на координатних осях відтинки:
на осі X — ів: $+5, -5$
на осі $У$ — ів: -2.

Очевидно, вершок лежить на осі $У$ — ів і вісь параболи йде в бік додатніх ігреків. Тому:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \frac{y}{-2} = 1$$

2) Проаналізувати рівняння (визначити положення параболи).

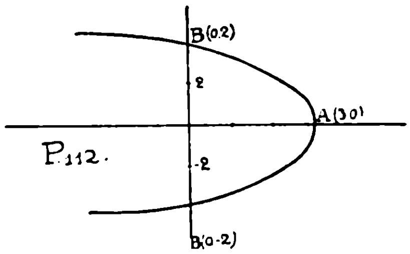
$$\frac{y^2}{4} + \frac{x}{3} = 1$$

Ясно, що вершок параболи має значники $(3,0)$, вісь параболи лежить на осі X — iв і спрямована в бік від'ємних іксів; відтинки на осі будуть $+2$ і -2. (Рис. 112).

3) Проаналізувати рівняння:

$$\frac{y^2}{-16} + \frac{x}{2} = 1$$

Парабола не перетинає осі $У$ — iв, бо $b = 4i$. Зводимо до спільного знаменателя й маємо:



Р.112.

$$y^2 - 8x = -16; \; y^2 = 8x - 16, \text{ або } y^2 = 8(x-2).$$

Ця парабола має вершок на осі X — iв $A(2,0)$, спрямована в бік додатніх іксів і має параметром $2p = 8$.

§ 46. Алгебричне рівняння параболи.

Візьмім загальне рівняння параболи, коли:

1) вісь параболи рівнобіжна до осі X — iв то:

$$(y-b)^2 = \pm 2p(x-a) \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

2) вісь параболи рівнобіжна до осі $У$ — iв то:

$$(x-a)^2 = \pm 2p(y-b) \quad \ldots\ldots \text{(B)}$$

[Знаки $\pm$ вживаються: «+» коли вісь параболи спрямована в бік додатніх значників, а «—», коли вісь параболи спрямована в бік від'ємних значників].

Виконавши зазначені в рівняннях дії, будемо мати:

1) $y^2 - 2by + b^2 = \pm 2px \mp 2pa,$

або: $y^2 \mp 2px - 2py + (b^2 \pm 2pa) = 0 \quad \ldots\ldots (1)$

2) $x^2 - 2ax + a^2 = \pm 2py \mp 2pb,$

або: $x^2 - 2ax \mp 2py + (a^2 \mp 2pb) = 0 \quad \ldots\ldots (2)$

Одержані рівняння (1) і (2) будуть уже алгебричними формами рівнянь відповідних парабол.

Щоб надати цим рівнянням більш загальний характер, помножимо всі члени кожного з них на довільні додатні чинники, напр. рівняння (1) на κ, а рівняння (2) на l, тоді матимемо:

$$\kappa y^2 \mp 2p\kappa x - 2b\kappa y + \kappa(b^2 \pm 2pa) = 0 \; \ldots\ldots \; (1^1)$$

$$lx^2 - 2alx \mp 2ply + l(a^2 \pm 2pb) = 0 \; \ldots\ldots \; (2^2)$$

Припустім, що висліди дій будуть:

$$\mp 2p\kappa = m_1 \,; - 2b\kappa = n_1 \,; + \kappa(b^2 \pm 2pa) = q_1$$

$$- 2al = m_2 \,; \mp 2pl = n_2 \,; + l(a_2 \pm 2pb) = q_2$$

Тоді рівняння матимуть вигляд:

$$\left.\begin{array}{l} \kappa y^2 + m_1 x + n_1 y + q_1 = o \\ lx^2 + m_2 x + n_2 y + q_2 = o \end{array}\right\} \ldots\ldots \; (86)$$

де $\underline{m_1 = \mp 2p\kappa}$, $n_1 = -2b\kappa$, і $q_1 = \kappa(b^2 \pm 2pa)$.

$m_2 = 2al$, $\underline{n_2 = \mp 2pl}$ і $q_2 = l(a^2 \pm 2pb)$

Дослідимо знаки вартостей сочинників:

$$m_1 = \mp 2p\kappa \text{ і } n_2 = \mp 2pl.$$

З умові p — є величина завжди додатня, чинники κ і l також узято додатні, тому знак сочинників m_1 і n_2 завжди буде залежати від знаку, що стоїть перед здобутками $2p\kappa$ і $2pl$, а цей знак відворотній знакам, що стоять перед правою частиною рівнань (A) і (B).

Таким чином, m_1 і n_2 будуть від'ємні, коли в рівняння (A) і (B) праві частини додатні, й навпаки — m_1 і n_2 будуть додатні, коли праві частини рівнань (A) і (B) від'ємні.

Але праві частини рівнань (A) і (B) — додатні, коли вісь параболи спрямована в бік додатніх значників, і навпаки — від'ємні, коли вісь параболи спрямована в бік від'ємних значників. **Тому, коли сочинники при змінних, що входять в алгебричне рівняння лише в перших ступінях, є від'ємні, — то рівняння визначає параболу, що має вісь спрямовану в бік відповідних додатніх значників, і навпаки — коли ці сочинники додатні, то вісь параболи спрямована в бік відповідних від'ємних значників.**

Приклади:

1) Хай дано параболу: $(x-3)^2=8(y-{}^5/_3)$; перетворимо це рівнання в алгебричну форму:

$$x^2-6x+9=8y-{}^{40}/_3, \text{ або } 3x^2-18x-24y+67=0.$$

2) Ріьнання параболи: $(x-3)^3=-8(y-{}^5/_3)$. Тому:

$$x^2-6x+9=-8y+{}^{40}/_3,$$

або:

$$4x^2-18y+24y-13=0.$$

Тепер поставимо собі питання: в яких умовах алгебричне рівнання другого ступіня, що має загальний вигляд:

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0,$$

може бути рівнанням параболи?

Для цього порівнаємо це алгебричне рівнання з алгебричними формами рівнань параболи (86)

У тому й в другому рівняннях немає члена із здобутком змінних, себ-то $C=0$.

Далі, у першому рівнанню параболи, що має вісь, рівнобіжну до осі X—*ів*, немає члена, що містить квадрат змінного значника цієї осі (себто x^2), инакше кажучи для рівнання цієї параболи $A=0$.

Так само, у другому рівнанню параболи, що має вісь, рівнобіжну до осі $У$—*ів*, також нема члена, що містить квадрат змінного значника (y^2) цієї осі, себто для рівнання цієї параболи $B=0$.

Таким чином,

щоб яке-небудь алгебричне рівнання другого ступіня з двома змінними могло бути рівнанням параболи, є конечним, щоб сочинники при здобутку цих змінних і при квадраті одної з них були нулі (при чому нулем буває сочинник квадрату тої змінної, що відповідає значникам осі параболи).

Доведемо тепер, що алгебричне рівнання другого ступіня, що задовольняє поставлені умови, є завжди рівнанням якої-небудь параболи (себто доведемо, що ці умови не тільки є конечні, але й вистарчальні).

В цьому доводі будемо розглядати лише таку параболу, що має вісь, рівнобіжну до осі X—*ів*, бо для параболи, що має вісь, рівнобіжну до осі $У$—*ів*, уживаємо аналогичного доводу.

Отже, візьмім рівняння:

$$By^2 + Dx + Ey + F = O \; \ldots\ldots \; (\mathrm{A})$$

Щоб це рівняння було рівнянням параболи, що має вісь рівнобіжну до осі X — *ів*, треба показати, що його завжди можна перетворити в загальне рівняння зазначеної параболи такої алгебричної форми:

$$\kappa y^2 + m_1 x + n_1 y + q_1 = o.$$

З порівнання цих рівнань бачимо, що для цього має бути:

$$B = \kappa, \;\; D = m_1; \;\; E = n_1, \;\; i \;\; F = q_1;$$

$$\text{але } m_1 = \mp 2p\kappa; \;\; n_1 = -2b\kappa; \;\; i \;\; q_1 = \kappa(b^2 \pm 2pa).$$

Тому:

$$D = \mp 2p.B; \;\; E = -2b.B; \;\; i \;\; F = B(b^2 \pm 2pa); \; \ldots\ldots \; (\mathrm{B})$$

Зауваження: для параболи що має вісь, рівнобіжну до осі $У$ — *ів*, ці рівнання мають вигляд:

$$A = K\,; \;\; D = -2a.A\,; \;\; E = \mp 2p.A\,; \;\; F = A(a^2 \pm 2pb)\,.$$

Певна річ, що наше алгебричне рівняння визначає параболу лише в тому разі, коли можна з одержаних рівностей (B) визначити реально 1) параметр і 2) значники вершка цієї параболи.

Але: $2p = \mp \dfrac{D}{B}$; $b = \dfrac{E}{2B}$; крім того, $b^2 \pm 2pa = \dfrac{F}{B}$,

а звідци, вставивши вартости b і $2p$, матимемо:

$$\frac{E^2}{4B^2} \pm \left(\mp \frac{D}{B}\right).a = \frac{F}{B}\,,$$

що дає: $$D\,.\,a = \frac{E^2}{4B} - F = \frac{E^2 - 4FB}{4B}.$$

А тому $$a = \frac{E^2 - 4FB}{4BD}$$

Сочинники B, D, E, F є величини реальні, а тому й обчислені значники й параметр параболи

$$a = \frac{E^2 - 4FB}{4BD}\,; \;\; b = -\frac{E}{2B} \; i \;\; 2p = \mp \frac{D}{B}$$

є величини реальні.

Для параболи, що має вісь, спрямовану рівнобіжно до осі $У$ — *ів*, ці рівности мають вигляд:

$$a = \frac{D^2 - 4AF}{4AE}, \quad b = -\frac{D}{2A} \text{ і } 2p = \mp \frac{E}{A}$$

Величини також реальні.

Отже парабола, що визначається алгебричним, довільно взятим рівнанням (A), є реальна і тому можна твердити, що:

кожне алгебричне рівнання з реальними сочинниками, що задовольняє поставлені умови: 1) $C = 0$ і 2) $A = 0$; $B \neq 0$, або: $B = 0$; $A \neq 0$, завжди визначає параболу з віссю, рівнобіжною до однієї з координатних осей.

Розглянемо ще зміст подвійного знаку $\mp$ перед вартостю $2p = \mp \dfrac{D}{B}$ (або для другого рівнання з віссю рівнобіжною до осі $У$ — *ів*: $2p = \mp \dfrac{E}{A}$).

Ми знаємо, що величини p і $B = к$ додатні, а тому, щоб рівність задовольнялася, D мусить мати знак однаковий із знаком, що стоїть перед дробом, а саме:

коли $2p = -\dfrac{D}{B}$, той D мусить бути від'ємне, а коли $2p = +\dfrac{D}{B}$, той D мусить бути додатнє.

Але $D = m_1$, себто має знак однаковий з m_1, а ми довели, що знаки вартости m_1 — протилежні знакам вартостей змінних значників осі, а тому:

коли в алгебричному рівнанні сочинник при змінному, що входить в нього у першому ступіню, від'ємний ($D < 0$), то рівнання визначає параболу з віссю, спрямованою в бік додатніх вартостей свого змінного значника, а коли той самий сочинник додатній ($D > 0$), то рівнання визначає параболу з віссю, спрямованою в бік від'ємних вартостей свого змінного значника.

Коли сочинник при другому ступіню змінного є одиниця $(B=1)$, себ-то алгебричне рівнання параболи буде **упорядковане**, то змінники її матимуть такі вартости:

$$a=\frac{E^2-4F}{4D}\ ;\ b=-\frac{E}{2}\ ,\ a\ 2p=\mp D\ \ldots\ldots\ (87).$$

Для параболи, що має вісь, спрямовану рівнобіжно до осі $У$ — *ів*.

$$a=-\frac{D}{2}\ ;\ b=\frac{D^2-4F}{4E}\ ;\ 2p=\mp E\ \ldots\ (88).$$

Приклади:

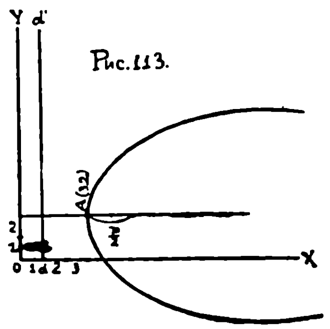
1) Рівнання: $y^2-8x-4y+28=0$ визначає параболу, бо $C=O$, $A=O$, $B\neq O$.

Як бачимо, ця парабола має вісь рівнобіжну до осі X — *ів* (сочинник при x^2 рівний з 0) і спрямовану в бік додатніх іксів $(D=-8<0)$. (Рис. 113).

Обчислючи: 1) параметр її: $2p=-(-8)=8$ і

2) значники вершків:

$$a=\frac{16-4.28}{-4.8}=3\ ;\quad b=-\frac{-4}{2}=2\ ;$$



Ми маємо змогу скласти загальне рівнання цієї параболи, а саме:

$$(y-2)^2=8(x-3).$$

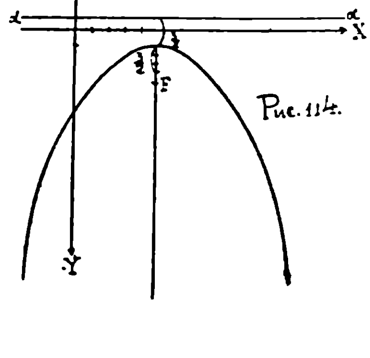
2) Рівнання $x^2-10x+6y+31=0$ визначає параболу, бо $C=O$; $B=O$ і $A\neq O$.

Для неї:

$$a=-\frac{-10}{2}=5\ ;\ b=\frac{100-4.31}{4.6}=-1$$

$$2p=+6.$$

Парабола має вісь, рівнобіжну до осі $У$ — *ів* (бо сочинник при y^2 рівний з 0) і спрямовану в бік від'ємних ігреків (бо $E=6>0$).



Загальне рівнання цієї параболи (рис. 114), буде:

$$(x-5)^2=-6(y+1)$$

Перетворення загального рівняння параболи в алгебричне й навпаки.

Як ми вже казали, загальне рівняння перетворюється в алгебричне звичайним переведенням зазначених в ньому дій, та зведенням до спільного знаменателя.

Навпаки, алгебричне рівняння параболи перетворюється в загальне за допомогою:

1) Теоретичного способу, доведеного перед цим, і

2) звичайним сповненням членів, що містять в собі квадрат і перший ступінь змінного, до повного квадрату, перенесенням решти членів у праву частину й винесенням за дужки спільного чинника.

Напр., рівняння: $y^2 - 8x - 4y + 28 = 0$ можна перетворити в загальну форму таким чином:

1) Доповнюємо по повного квадрату члени, що містять y^2 та y, а саме: $y^2 - 4y + 4 - 4 - 8x + 28 = 0$.

2) Переносимо решту членів у праву частину й робимо зведення схожих членів:

$$(y-2)^2 = +8x - 24$$

3) Виводимо за дужки спільного чинника й матимемо загальну форму рівняння параболи:

$$(y-2)^2 = 8(x-3).$$

Приклад 2.

$$x^2 - 14x + 12y + 1 = 0$$

1) $x^2 - 14x + 49 - 49 + 12y + 1 = 0$

2) $(x-7)^2 = -12y + 48$

3) $(x-7)^2 = -12(y-4)$.

Вправи.

Ч — 227. *Написати вершкові рівняння парабол, що мають вісь спрямовану в бік додатніх x — ів, коли:*

1) параметр її $2p = 4$; 2) — віддалення вогнища від вершка: $d = 3$; 3) — ця парабола переходить через точку $(4, -6)$ і 4) — переходить через точку $(2,3)$.

Ч — 228. *Знайти положення точок:* $A(9, -9)$, $B(5,8)$ *і* $C(10,7)$ *зглядно параболи:* $y^2 = 9x$?

Ч — 229. *Обчислити змінник і положення вогнища парабол: 1)* $y^2 = 11x$; *2)* $y^2 = -7x$; *3)* $x^2 = 6y$ *і 4)* $x^2 = -8y$.

Ч — 230. *Написати рівнання напрямної осі зазначених в попередній задачі парабол.*

Ч — 231. *Написати рівнання параболи, що має: 1) вершок* $A(3, -4)$, *змінник* $2p = 12$ *і вісь, рівнобіжну до осі* X *— ів; 2) вершок* $B(3, -2)$, *змінник* $2p = 12$ *і вісь, рівнобіжну до осі* x *— ів і 3) коли віссю параболи є проста:* $x = 4$, *вершком параболи* $C(4,2)$, *а змінником:* $2p = 7$.

(Написати рівнання обох парабол: спрямованих у додотній та у від'ємний боки).

Ч — 232. *Написати в основній формі рівнання парабол:*

1) $x^2 - 4x - 6y + 10 = 0$; 2) $y^2 - 8x - 6y = 7$;

3) $y^2 + x - 8y + 10 = 0$; 4) $45x^2 + 30x + 90y = 31$;

5) $x^2 - 2x + 10y + 11 = 0$; 6) $y^2 - 6x + 30 = 0$:

7) $4y^2 - 20y - 12x + 29 = 0$; 8) $y^2 - 2(x + y) + 1 = 0$.

Ч — 233. *Визначити основні величини (значники вершків, змінник і напрям осі) парабол і накреслити їх, коли відомі рівнання:*

1) $(y - 2)^2 = 5(x - 3)$; 2) $(y + 3)^2 = -8x$;

3) $x^2 - y + 3 = 0$; 4) $y = (x + 1)^2$; 5) $y^2 - 4y - 6x - 3 = 0$.

Ч — 234. *Обчислити змінник і значники вершків, а також визначити напрями осей парабол:*

1) $y^2 - 6y - 12x + 57 = 0$; 2) $y^2 + 10x + 50 = 0$;

3) $x^2 + 6x + 9y = 0$; 4) $2x^2 + 12x + y + 13 = 0$;

5) $4y^2 - 20y - 24x - 47 = 0$; 6) $x^2 - 8x + 15 = y$.

Ч — 235. *Написати рівнання параболи, що має вісь рівнобіжну до осі* X *— ів і переходить через точки: 1)* $A(-5,3)$; $B(1,9)$: $C(-3{,}5{,}_6)$; *2)* $A(1,1)$; $B(7,3)$ *і* $C(3,2)$. *Теж, написати рівнання параболи, що має вісь, рівнобіжну до осі* $У$ *— ів і переходить через точки:* $M(5,4)$; $N(3,3)$ *і* $P(0,6)$. *Накреслити ці параболи.*

Ч — 236. *Написати рівнання траєкторії й обчислити висоту та далину лету тіла, кинутого у порожнечі з початковою скорістью 275 т. під елеваційним кутом 30⁰.*

Ч — 237. *Пожарова помпа може подати струмок води на 15 т. прямовісно вгору. Під яким елеваційним кутом треба спрямувати струмок води, щоби на віддаленню помпи на 11 т. від будинку досягнути вершка його даху, що підноситься на 8 т. над землею.*

Ч — 238. *Накреслити параболи:*

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \frac{x}{-2} = 1\,; \quad \frac{x}{4} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1\,; \quad \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \frac{y}{2} = 1\,.$$

§ 47. Взаємне положення простої та параболи.

Хай рівнання параболи буде дане у вершковій формі $y^2 = 2px$, а рівнання простої — в каноничній: $y = mx + n$. Щоб знайти спільні точки параболи й простої (значники цих точок будуть одночасно належати обом лініям, а тому задовольнятимуть їх рівнання) треба розвязати систему:

$$y^2 = 2px$$
$$y = mx + n$$

Вставивши вартість y з другого рівнання у перше матимемо:

$$m^2x^2 + 2mnx + n^2 = 2px$$

або
$$m^2x^2 - 2x(p - mn) + n^2 = 0;$$

звідци
$$x = \frac{p - mn \pm \sqrt{(p - 2mn)}}{m^2}$$

Вставивши вартість x у друге рівнання, одержимо:

$$y = \frac{p - mn \pm \sqrt{p(p - 2mn)}}{m} + n,$$

або:
$$y = \frac{p \pm \sqrt{p\,(p - 2mn)}}{m}$$

Проаналізуймо виразник:

$$D = p\ (p - 2mn).$$

Ми умовилися p вважати за додатню величину, а тому знак виразника D залежить від знаку чинника $p - 2mn$.

1) Коли $p - 2mn > 0$, або $p > 2mn$, тоді й $D > 0$.

Тоді ми маємо по дві вартости значчиків x та y. Тому існує дві точки перехрестя простої з параболою, себто проста є **січною** параболи.

2) Коли $p - 2mn = 0$, або $p = 2mn$, тоді й $D = 0$: ми маємо по одній вартости значчиків точки перехрестя. Тому існує лише одна точка перехрестя й проста $y = mx + n$ є **дотичною** до параболи $y^2 = 2px$,

і 3) Коли $p - 2mn < 0$, або $p < 2mn$, тоді й $D < 0$. Вартости значчиків точки перехрестя є **уявні**, себ-то не існує жадної точки перехрестя даної простої з параболою; проста $y = mx + n$ є **мимобіжною** до параболи $y^2 = 2px$.

Отже показчиком взаємного положення простої та параболи є двочлен: $p - 2mn$,

або: $$2p - 4mn,$$

де $2p$ — є змінник параболи, а m і n є змінники простої, тому:

Щоб дослідити взаємне положення простої та параболи, треба порівнати змінник параболи $(2p)$ з четверним здобутком обох змінників рівнання простої в каноничній формі $(4mn)$ і коли:

$2p > 4mn$ — **проста є січною параболи;**

$2p = 4mn$ — » » **дотичною** »

$2p < 4mn$ — » » **мимобіжною».**

З'інтерпретуємо це геометрично:

Нам відомо, що змінник простої $m = tg\alpha$ (тангес кута спаду простої), а змінник n є відтинок, що творить проста на осі $У$ — $ів$.

Тому $2p \gtreqless 4mn$, або $p \gtreqless 2mn$ можна написати так:

$p \gtreqless 2n tg\, \alpha$,

звідци: $n \lesseqgtr \frac{p}{2tg\,a}$, або $\underline{n \lesseqgtr \frac{p}{2}\,ctg\,a}$

Подивимося, що визначає собою здобуток: $\frac{p}{2}\,Ctg\,a$?

Для цього з вогнища F спустимо прям на дану просту й розглянемо $\Delta\ OPF$, що творить цей прям з відтинками на осях. В цьому Δ — ові вогнищеве віддалення від початку координат $OF = \frac{p}{2}$, кут $\sphericalangle\ OPF = a$ — куту спаду простої (бо $\sphericalangle\ DEO = a = \sphericalangle\ OPF$, як прямовораменні). Отже з $\Delta\, OPF$ маємо:

$$OF\,.\,ctg\,a = OP,$$

або, вставивши вартість OF, одержимо:

$$\frac{p}{2}\,ctg\,a = OP$$

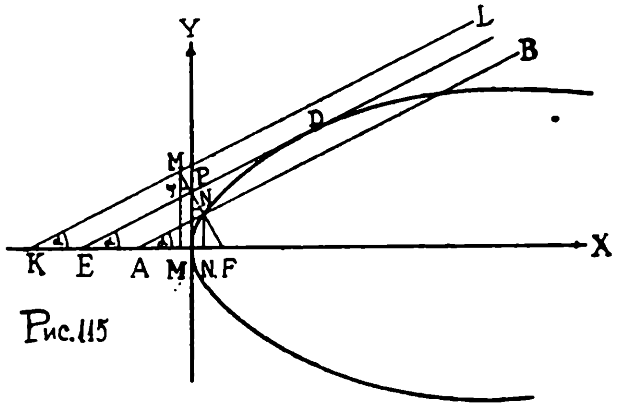


Рис. 115

де OP є **відтинок, що творить на осі** $У$ — *ів* **прям, спущений з вогнища** F **на просту.**

Але, з другого боку, порівнюючи рівности:

$$\frac{p}{2}\,ctg\,a = OP$$

і $\quad \frac{p}{2}\,ctg\,a = n_1 \quad$ (випадок, коли проста є дотичною параболи)

бачимо, що: $\quad \underline{OP = n_1}$

Таким чином, коли дана проста є дотичною до параболи, то вона прямова до проміня поведеного з вогнища параболи у точку перехрестя цієї простої з віссю У — ів і навпаки коли через перехрестя з віссю У — ів якого-небудь вогнищевого проміня повести просту прямову до цього проміня, то вона буде дотичною до даної параболи.

Згадаймо тепер, що в цих вислідах ми вже раз переконалися, розглядаючи способи, як накреслити параболу. Крім того, ми тоді довели, що ця точка перехрестя дотичної з віссю *У — ів* віддалена від початку координат на половину рядної точки її дотику, себто:

$$OP = n_1 = \frac{y_1}{2}$$

Вертаючись тепер до аналізи виразу:

$$n \underset{>}{\overset{<}{=}} \frac{p}{2} \ ctg\, a,$$

ми можемо заступити його таким:

$$n \underset{>}{\overset{<}{=}} OP.$$

А тому:

1) Коли рядна точки перехрестя простої з проміном, поведеним з вогнища прямово до неї, менша від відтинку, що творить цей промінь на осі *У — ів* $(n = NN_1 < OP)$, то **ця проста є січною параболи.**

2) Коли-ж рядна точки перехрестя простої і згаданого проміня є рівна з відтинком, що творить цей промінь на осі *У — ів*, (себто — промінь прямовий до даної простої перехрещується з нею на осі *У — ів:* $n = OP)$, то **проста є дотичною до параболи** й нарешті.

3) Коли рядна точки перехрестя простої й згаданого проміня більша за відтинок, що творить цей промінь на осі *У — ів* $(MM_1 = n > OP)$, то **дана проста є мимобіжною параболи.**

Розгляньмо теперь ще ті випадки, коли проста, або рівнобіжна, або прямова до осі параболи.

Коли проста рівнобіжна або прямова до осі параболи, то загальні розвязки розгляненої системи не дають конкретних вартостей.

Справді, коли проста рівнобіжна до осі *X — ів* (параболи), то кутовий її змінник $m = 0$, а коли проста прямова до осі *X — ів*, то кутовий змінник $m = \infty$.

Вставивши ці вартости у розвязки нашої системи, одержимо:

1) $m = 0;\quad x = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2}}{0} = \dfrac{p \pm p}{0}$; $y = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2}}{0} =$

$= \dfrac{p \pm p}{0}$

себто: $x_1 = \infty$; $x_2 = \dfrac{0}{0}$; $y_1 = \infty$; $y_2 = \dfrac{0}{0}$.

В цім разі одна точка перехрестя простої з параболою лежить на безмежності, а друга на параболі в неозначеному місці.

2) Коли $m = \infty$, то:

$$x = \frac{p - \infty \pm \sqrt{p^2 - \infty}}{\infty} = -\frac{\infty}{\infty};\quad y = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - \infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

і в цьому разі сімволи $\dfrac{\infty}{\infty}$ також є неозначеніст, себто точки перехрестя простої й параболи лежать на параболі в неозначених місцях.

Щоб розгорнути ці неозначености, звернемо увагу на те, що коли проста рівнобіжна до осі X—ів, то її рівнання має вигляд:

$$y = n,$$

а коли ця проста прямова до осі X—ів, то рівнання її має вигляд:

$$x = q \text{ (const)}.$$

Коли в розгляненій раніш системі замінимо рівнання простої на відповідні форми його в разі рівнобіжности або прямовости цієї простої до осі X—ів, то матимемо системи:

1) Коли проста рівнобіжна до осі X—ів:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2px \\ y &= n \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \ (a)$$

2) Коли проста прямова до осі X—ів:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2px \\ x &= q \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \ (b)$$

Система *(a)* має розвязки:

$$x = \frac{n^2}{2p}\ ;\ y = n,\ \text{а}$$

система *(b)* — розвязки:

$$x = q\ ;\ y = \pm\sqrt{2pq}.$$

Аналізуючи загальний вигляд системи рівнань параболи й простої, ми довели, що проста, рівнобіжна до осі X — *ів*, має дві точки перехрестя з параболою: одну — на **безмежности,** а другу **неозначену.** Значники цієї неозначеної точки й дають розвязки системи *(a)*, а саме $\left(\frac{n^2}{2p}\ ,\ n\right)$. Ці значники справді неозначені, бо n — є змінник простої, і йому можемо надавати ріжні довільні вартости. Але разом зі зміною вартости n змінюватимуться й вартости значника $x = \frac{n^2}{2p}$, де p для даної параболи є стала величина (рис. 116).

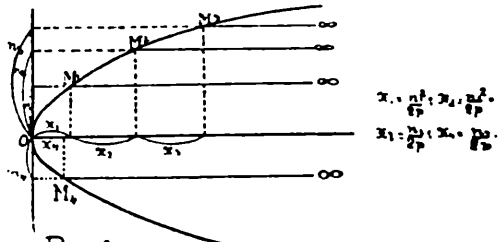


Рис. 116.

Ці тятиви $(M_1 \ldots \infty)$, $(M_2 \ldots \infty)$ і т. д. мають назву **поперечників параболи.**

В разі прямовости простої до осі X — *ів* система рівнань *(b)* дає значники двох точок перехрестя, положених на спільній лінії рядної симетрично до осі X — *ів*, а саме:

$$1)\ \ x = q\ ;\ \ y = \sqrt{2pq}$$

$$2)\ \ x = q\ ;\ \ y = -\sqrt{2pq}\ .$$

Положення цих точок на параболі, як це показує аналіза загальної системи, є також неозначене $\left(x = \frac{\infty}{\infty}\ ;\ y = \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Справді:

Величина q — є довільна й може мати ріжні вартости від O до ∞. Разом з цим і вартости значника y — також довільні, бо $y = \pm\sqrt{2pq}$, де $2p$ — є величина стала для даної параболи. Таким чином, надаючи q всі можливі вартости від O до ∞, одержимо безліч тятив параболи, рівнобіжних між собою і прямових до осі параболи. Разом із зростанням вартости q зростає й величина тятив (до безмежности (рис. 117).

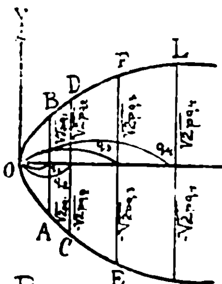


Рис.117

Ці всі тятиви переполовинюються на осі параболи й тому мають назву **тятив, здружених з віссю параболи.**

§ 48. Здружені поперечники параболи.

Як ми вже згадували, поперечником параболи називають необмежену тятиву її, рівнобіжну до осі параболи.

Значники перехрестя поперечника з параболою будуть $\left(\frac{n^2}{2p}, n\right)$ і (∞, ∞).

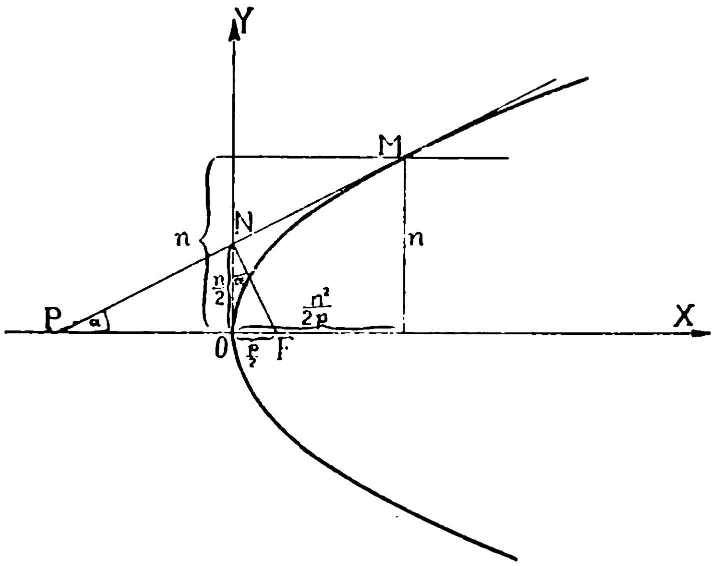


Рис 118.

Щоб скласти рівнання такого поперечника, розгляньмо рівнання $y = n$, простої, що на ній цей поперечник лежить. Згадане рівнання $y = n$ не може вважатися за рівнання поперечника параболи, бо в ньому не дається функціональної залежности між значниками точок, що лежать на цьому поперечнику і зміниками, що характеризують параболу, до якої він належить.

Тому поставимо собі завдання перетворити дане рівнання $y = n$ у друге, що встановлювалоб згадану вище функціональну залежність між змінниками параболи та її поперечника.

Для цього через точку $M\left(\frac{n^2}{2p}, n\right)$ перехрещення поперечника з параболою ведемо до цієї параболи дотичну MP (рис. 118). Ця дотична, як ми знаємо, перетинає вісь Y—ів у точці N, так що: $ON = \frac{n}{2}$ (половині рядної точки дотику).

Але з $\triangle ONF$ маємо:

$\frac{n}{2} = \frac{p}{2} \operatorname{ctg} \alpha$ (бо $\sphericalangle N = \sphericalangle P$ прямоворамені), звідци

$$n = p \operatorname{ctg} \alpha, \text{ або } n = \frac{p}{\operatorname{tg} \alpha},$$

де $\operatorname{tg} \alpha$ є кутовий змінник дотичної MP, поведеної до параболи через точку перехрещення її з поперечником. Тому

$$n = \frac{p}{m}.$$

Таким чином, рівнання $y = n$ приймає вигляд:

$$y = \frac{p}{m}.$$

Це рівнання задовольняє наші вимоги, бо звязує значники точок поперечника із змінником параболи p.

Щож торкається до кутового змінника m, то він цілковито визначає взаємне положення поперечника та осі параболи, бо кожному такому окремому положенню поперечника відповідатиме й окрема дотична до параболи в точці перехрестя цієї параболи з поперечником, і тому кожній вартости кутового змінника зазначеної дотичної відповідатиме лише одно-єдине положення поперечника що-до осі параболи.

Заміна вартости n на $\frac{p}{m}$ змінює і вартости значників точки $\left(\frac{n^2}{2p}, n\right)$, перехрестя поперечника з параболою на такі:

$$\left(\frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m}\right)$$

Доведемо тепер, що **кожний поперечник параболи є здружений з тятивами рівнобіжними до дотичної, поведеної до цієї параболи через перехрестя її з поперечником.**

Ми вже умовилися тятиви, що мають свої середини на осі параболи, звати здруженими з цією віссю. Подібно до того й кожний **поперечник, що переходить через середини шерегу даних тятив,** також **зватиметься здруженим з ними.**

Тому наша теорема може бути сформульована ще й так:

Кожний поперечник параболи є геометричним осередком середин тятив, рівнобіжних до дотичної, поведеної через кінець поперечника, й тому він зветься здруженим з цими тятивами.

Візьмім який-небудь поперечник MN параболи $y = 2px$, (рис. 119).

Через точку M перехрещення цього поперечника з параболою поведемо дотичну MD. Припустім, що кутовий змінник цієї дотичної є $m = tg\, a$. Тоді, як ми довели, рівнання поперечника MN буде $y = \dfrac{p}{m}$.

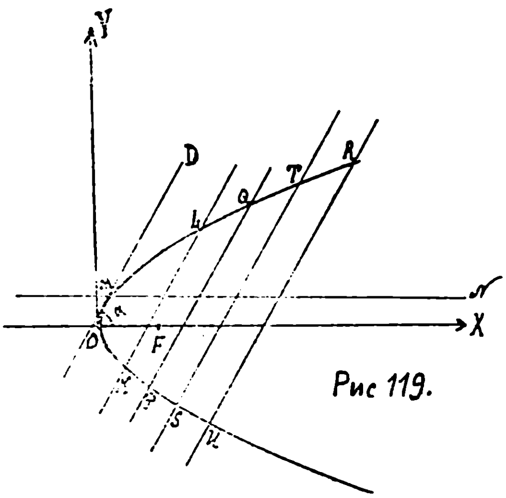


Рис 119.

Поведім шерег простих KL, PQ, ST і т. д., рівнобіжних до дотичної, так щоб вони перехрещували параболу. Рівнанням таких простих дамо вигляд: $y = mx + n_1$; $y = mx + n_2$ і т. д., де m — є кутовий змінник простих, однаковий із змінником дотичної (а x приймає вартости однакового знаку зі знаком змінних значників осі параболи).

Щоб довести нашу теорему, ми, незалежно від рівнання даного поперечника, будемо складати рівнання геометричного осередку середин даних тятив.

Ми знаємо, що значники середини кожного відтинку є середнім аритметичним значників його кінців:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}\ ;\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}\ ;$$

Отже, насамперед, треба обчислити значники кінців якої-небудь з даних тятив, напр.: $y = mx + n_1$.

Розвязуючи систему рівнань параболи й простої, ми довели, що значниками кінців кожної такої тятиви є:

$$x_1 = \frac{p - mn_1 + \sqrt{p(p - 2mn_1)}}{m^2}$$

а)

$$y_1 = \frac{p + \sqrt{p(p - 2mn_1)}}{m}$$

$$x_2 = \frac{p - mn_1 - \sqrt{p(p - 2mn_1)}}{m^2}$$

б)

$$y_2 = \frac{p - \sqrt{p(p - 2mn_1)}}{m}$$

Тому значниками середини тятиви будуть:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2(p - mn_1)}{2m^2} = \frac{p - mn_1}{m^2}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2p}{2m} = \frac{p}{m}$$

Коли розглянемо вартости знайдених значників x_0 й y_0, то побачимо, що значник y_0 є величина стала для всіх тятив, рівнобіжних до даної дотичної, бо для цих тятив змінник m — є величина стала й лише від зміни вартости n $(n_1, n_2, n_3 \ldots)$, ми одержуємо нові й нові тятиви рівнобіжні до даної дотичної. Вартість y_0 не має в собі змінника n, а тому й відношення $\frac{p}{m}$ — буде стала величина, а разом з ним і $y_0 = Const.$

Значник же x_0 змінюватиме свої вартости в залежності від змін вартостей n (відтинку, що творить на осі $У$ — *ів* продовження кожної тятиви) і буде загалом величиною зміного.

Разом і проста, що сполучує середини даних тятив, матиме вартости значника y — сталі, а x — змінні, а тому вона буде рівнобіжна до осі X — *ів* і визначатиметься рівнанням:

$$y = \frac{p}{m}.$$

Але ж, це саме рівнання, визначає також і даний поперечник, а тому він є геометричним осередком серединтятив, рівнобіжних до дотичної, поведеної до параболи через її перехрестя з цим поперечником, инакше кажучи:

кожний поперечник параболи є здружений з тятивами, рівнобіжними до дотичної, поведеної через перехрестя параболи з цим поперечником.

§ 49. Поле відрізку параболи.

Відрізком параболи зветься частина площі, що обмежена дугою параболи та її тятивою.

Бажаючи обчислити поле такого відрізку, доведемо теорему:

Поле відрізка, обмеженого тятивою здруженою з віссю параболи, рівне $^4/_3$ здобутку додатніх значників точки перехрестя даної тятиви з параболою.

Розглянемо попереду поле половини відрізка KOA обмеженої дугою параболи OA, віссю параболи OK і рядною точки $A(AK = b)$. Беремо тятиву OA, і через середину її Q ведемо, здружений з нею, поперечник BQ

Кінець B поперечника сполучуємо тятивами з точкаим O і A. Через середини M і N тятив BA і BO ведемо знову здружені з відповідними тятивами поперечники. Точки C і D перехресть цих поперечників з параболою сполучуємо тятивами з точками A, B і O; знову через середини нових тятив ведемо здружені з ними поперечники і т. д. без краю . . .

Таким будуванням ми одержимо безліч трикутників: AKO, ABO, ACB, BDO і т. д.

Величина полів цих трикутників буде увесь час спадати (зментуватися), простуючи до нуля. Нам треба знайти закон цього спадання. Будемо звати $\Delta\ AKO$ — основним і порівнаємо його поле з полем наступного $\Delta\ ABO$. Ми бачимо, що основа OA цих трикутників спільна, а висота h першаго Δ — ка в чотирі рази більша за висоту h_1 другого. Доведемо це.

Трикутники $\triangle\, OLK \backsim \triangle\, QBP$ (прямокутні, і гострі кути: $\sphericalangle\, BLP = \sphericalangle\, LOK$, яко внутрішні перехресні).

Тому:

$$\frac{LK}{BP} = \frac{OK}{BQ} \text{ або } \frac{h}{h_1} = \frac{OK}{BQ} \ldots\ldots (a)$$

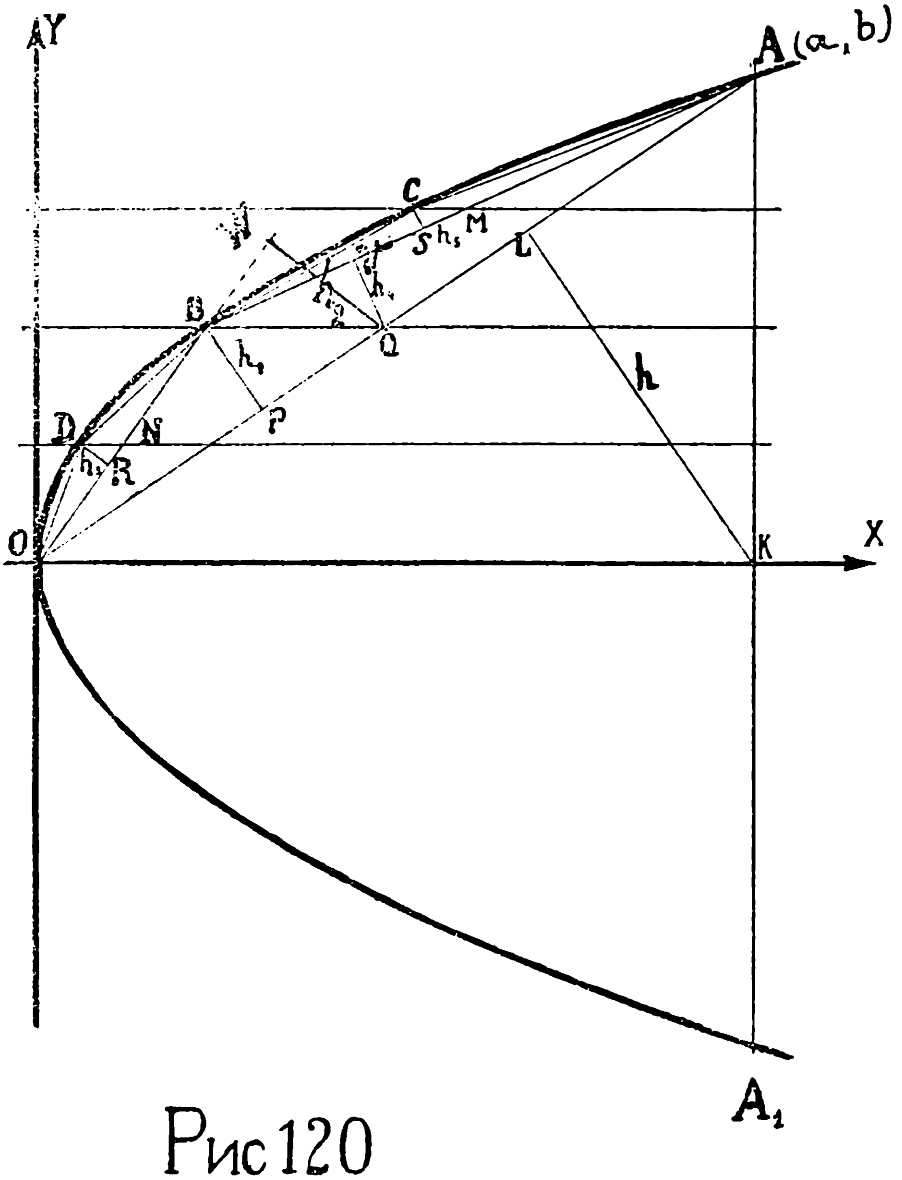


Рис 120

Обчислимо OK і BQ.

OK є відтинкова точки A, а тому $OK = a$;

$BQ = x_1 - x_2$ (де x_1, x_2 є відтинкові точок QB).

Точка Q є середина тятиви AO, що має значники кінців $(0,0)$ і $(a, b = \sqrt{2ap})$. Тому значниками точки Q будуть:

$$x_1 = \frac{a - o}{2} = \frac{a}{2}\ ;\ y_1 = \frac{b + o}{2} = \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{2pa}}{2} = \sqrt{\frac{pa}{2}}.$$

Таким чином, здружений із тятивою AO поперечник BQ має рівнання: $y = \sqrt{\frac{pa}{2}}$.

Щоб знайти значчники x_2 і y_2 точки B (перехрестя поперечника $y = \sqrt{\frac{pa}{2}}$ і параболи $y^2 = 2px$, розвяжемо систему з цих рівнань і матимемо:

$$\left(\sqrt{\frac{pa}{2}}\right)^2 = 2px_2 \; ; \; \frac{pa}{2} = 2px_2 \; ;$$

$$x_2 = \frac{pa}{4p} = \frac{a}{4} \; ; \; y_2 = \sqrt{\frac{pa}{2}} \, .$$

Відтинок $BQ = x_1 - x_2 = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}$, а тому вставивши знайдені вартости $OK = a$ і $BQ = \frac{a}{4}$ у пропорцію (a), матимемо: $\frac{h}{h_1} = 4$.

Отже: $$h_1 = \frac{h}{4} \, .$$

Таким чином, коли поле $\triangle\, OKA$ означимо через S (де $S = \frac{AO \,.h}{2}$), то поле $\triangle\, AOB = \frac{AOh_1}{2} = \frac{AOh}{8} = \frac{S}{4}$.

Порівнаємо тепер поля $\triangle\, OBQ$ і $\triangle\, ODB$. Ці трикутники мають спільну основу OB, а висота: QW у чотирі рази більша за висоту: $DR = h_3$. Доведемо це:

$\triangle\, BQW \backsim \triangle\, RDN$, (бо вони прямокутні і гострий кут $\sphericalangle\, WBQ = \sphericalangle\, DNR$, яко зовнішні перехресні).

Тому: $$\frac{QW}{DR} = \frac{BQ}{DN} \text{ або } \frac{h_2}{h_3} = \frac{BQ}{DN} \, .$$

Ми вже довели, що $BQ = \frac{a}{4}$.

Щоб обчислити $DN = x_2 - x_4$ [де $N(x_3, y_3)$, а $D(x_4, y_4)$], треба обчислити значчники x_3 і x_4.

Значники x_3, y_3—є значниками точки N, середини тятиви OB, що має значники кінців: $O(o,o)$ і $B\left(\frac{a}{4}, \sqrt{\frac{pa}{2}}\right)$.

Тому $\quad x_3 = \frac{o + \frac{a}{4}}{2} = \frac{a}{8}\,;\; y_3 = \frac{o + \sqrt{\frac{pa}{2}}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{pa}{2}}\,.$

Щоб знайти значники точки D, перехрестя параболи $y^2 = 2px$ і поперечника DN, що визначається рівнянням $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{pa}{2}}$. треба розвязати систему їх рівнянь, отже:

$$y^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{pa}{2} = 2px;\; x_4 = \frac{pa}{8.2p} = \frac{a}{16}\,.$$

Таким чином: $\quad \frac{h_2}{h_3} = \frac{a}{4} : \frac{a}{16} = 4.$

а звідци $\quad h_3 = \frac{h_2}{4}$

Тепер, порівнуючи поля $\triangle\, ABQ$ і $\triangle\, ABC$, побачимо, що їх висоти $\frac{QV}{CS} = \frac{h_4}{h_5} = \frac{BQ}{CM}\,.$

Але $BQ = \frac{a}{4}$, а $CM = x_5 - x_6$; де x_5, відтинкова точки M, обчисляється, яко значник середини тятиви AB, що має значники своїх кінців: $A(a,b)$ і $B\left(\frac{a}{4}, \sqrt{\frac{pa}{2}}\right)$.

Тому $x_5 = \frac{a + \frac{a}{4}}{2} = \frac{5a}{8}\,;\; y_5 = \frac{b + \sqrt{\frac{pa}{2}}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{2pa} + \sqrt{\frac{pa}{2}}}{2} = \frac{2\sqrt{\frac{pa}{2}} + \sqrt{\frac{pa}{2}}}{2}$, або $y_5 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{pa}{2}}\,.$

Значники точки C визначаємо, яко значники перехрестя параболи $y^2 = 2px$ і поперечника CM: $y = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{pa}{2}}\,.$

Розвязавши цю систему, одержимо:

$$x_6 = \frac{9pa}{8.2p} = \frac{9a}{16}\,.$$

Тому відтинок $CM = x_5 - x_6 = \frac{5a}{8} - \frac{9a}{16} = \frac{a}{16}$, а через те $\frac{h_4}{h_5} = \frac{BQ}{CM} = \frac{a}{4} : \frac{a}{16} = 4.$

Звідци $$h_5 = \frac{h_4}{4}.$$

Коли при однаковій основі висота $\Delta\, ODB$ у чотирі рази менша, ніж висота $\Delta\, OBQ$, то поле

$$S_{\text{ODB}} = \frac{1}{4} S_{\text{OBQ}}$$

З тих самих міркувань виходить, що

$$S_{\text{BAC}} = \frac{1}{4} S_{\text{QBA}}$$

Сума ж полів цих трикутників:

$$S_{\text{ODB}} + S_{\text{BAC}} = \frac{1}{4} (S_{\text{OBQ}} + S_{\text{QBA}}) = \frac{1}{4} S_{\text{AOB}}$$

Але ми довели, що поле $\Delta\, AOB$ є четверта частина основного $\Delta\, AOK$, себто $S_{\text{AOB}} = \frac{1}{4} S.$

Таким чином,

$$S_{\text{ODB}} + S_{\text{BAC}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} S\right) = \frac{1}{16} S.$$

Продовжуючи далі обчислення все нових Δ — ів, ми переконаємося, що сума полів Δ — ів, утворених зазначеним раніш способом (проведення здружених поперечників до тятив AC, CB, BD, DO і сполучення кінців їх з кінцями відповідних тятив і т. д.) спадає в геометричному поступі (кратність якого $\frac{1}{4}$).

Тому, продовжуючи поділ тятив без краю одержимо безмежно спадаючий поступ:

$$S, \frac{S}{4}, \frac{S}{16}, \frac{S}{64} \; \ldots\ldots$$

Межа суми членів цього поступу буде вартістю поля половини відрізка, обмеженого простими AK і OK і дугою параболи OA.

Обчислимо цю межу суми членів безмежно спадаючого геометричного поступу:

$$S_1 = S + \frac{S}{4} + \frac{S}{16} + \frac{S}{64} + \ldots = \frac{S}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S$$

Поле цілого відрізка параболи, обмеженого тятивою AA_1 і дугою параболи $\smile AOA_1$ буде удвічі більше за поле S_1, себто

$$S_{\text{відр.}} = 2S_1 = \frac{8}{3}S .$$

Але S є рівне з полем $\triangle\ AOK = \frac{AK\,.\,OK}{2} = \frac{a\,.\,b}{2}$, а тому

$$\underline{\underline{S_{\text{відр.}}}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{ab}{2} = \underline{\underline{\frac{4}{3}ab}} \ldots\ldots (89)$$

[Часто вживають взору поля, обмеженого дугою $\smile AO$, півтятивою AK і віссю X—*ів*, себто поля половини відрізка S_1

$$\underline{\underline{S_1}} = \frac{4}{3}S = \frac{4}{3} \cdot \frac{ab}{2} = \underline{\underline{\frac{2}{3}ab}} \ldots\ldots (90)$$]

Але $y = \sqrt{2px}$, або $b = \sqrt{2pa}$; звідци $a = \frac{b^2}{2p}$ Вставивши цю вартість a у поле відрізка, одержуємо

$$\underline{S_{\text{відр.}}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{b^3}{2p} = \underline{\frac{2b^3}{3p}} \ldots\ldots (91)$$

Поле відрізка параболи, утвореного тятивою прямовою до осі, рівне $^4/_3$ відношення кубу рядної кінця тятиви до змінника параболи:

$$S_{\text{відр.}}\ \frac{4}{3} \cdot \frac{b^3}{2p} \ldots\ldots (92),$$

Обчислимо ще поле відрізка параболи, обмеженого дугою параболи і якою-небудь тятивою MN, непрямовою до осі параболи.

Доведемо, що:

Поле кожного відрізку параболи, утвореного тятивою, непрямовою до осі X — ів, рівне $^1/_6$ відношення куба ріжниці рядних кінців тятиви до параметру параболи.

$$\underline{\underline{S_{\text{відр.}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(y_2 - y_1)^3}{2p} = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}}} \quad \ldots\ldots \quad (93)$$

Поле відрізку MPN можна розглядати, яко ріжницю поля піввідрізка ONK без суми полів трапезу $LMNK$ і піввідрізка OML.

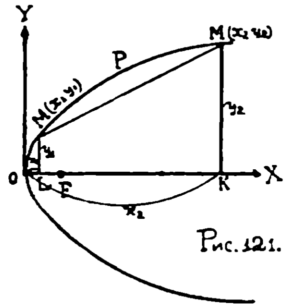


Рис. 121.

$$S_{MPN} = S_{ONK} - (S_{LMNK} + S_{OML}),$$

але:
$$S_{ONK} = \frac{2}{3}\, x_2 y_2\,;$$

$$S_{LMNK} = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1) \text{ і}$$

$$S_{OML}\ \frac{2}{3} x_1 y_1, \text{ тому:}$$

$$S_{MPN} = \frac{2}{3}\, x_2 y_2 - \frac{(y_1 + y_2)\,(x_2 - x_1)}{2} - \frac{2}{3}\, x_1 y_1$$

або
$$S_{MPN}\ \frac{4x_2 y_2 - 3x_2 y_1 - 3x_2 y_2 + 3x_1 y_1 + 3x_1 y_2 - 4x_1 y_1}{6} =$$

$$= {}^1/_6\ (x_2 y_2 - 3x_2 y_1 + 3x_1 y_2 - x_1 y_1);$$

Але нам відомо, що $y_1 = \sqrt{2px_1}$;

$y_2 = \sqrt{2px_2}$, а звідци $x_1 = \dfrac{y_1^2}{2p}$; $x_2 = \dfrac{y_2^2}{2p}$.

Вставивши ці вартости у вираз для поля відрізка маємо:

$$S_{MPN} = \frac{1}{6}\left(\frac{y_2^3}{2p} - 3\,\frac{y_2^2\, y_1}{2p} + 3\,\frac{y_1^2\, y^2}{2p} - \frac{y_1^3}{2p}\right) = \underline{\frac{1}{6}\ \frac{(y_2 - y_1)^3}{2p}}$$

або:
$$\underline{S_{MPN} = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}}\,.$$

Приклади:

1) Обчислити поле відрізка параболи, що творить проста: $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ з параболою $y^2 = 8x$.

Обчислюємо значники кінців тятиви $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ і для цього розвязуємо систему:

$$y^2 = 8x$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

$$y^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{32}{9}x + \frac{64}{9} = 8x; \text{ або } x^2 - 10x + 16 = 0;$$

Звідци: $x_1 = 2 : x_2 = 8 ; y_1 = 4 ; y_2 = 8.$

Отже $S_{\text{відр.}} = \frac{(8-4)^3}{6.8} = \frac{4}{3}$ кв. од.

2) Обчислити поле відрізка параболи $y^2 = 6x$, що творить тятива $x = 24$.

Обчислюємо значники кінців тятиви:

$$y^2 = 6.24; \; y = \pm\sqrt{144}; \; y_1 = 12; \; y_2 = -12.$$

Тятива прямова до осі X — *ів*, тому:

$$S = \frac{4}{3}.24.12 = 384 \text{ кв. од.}$$

або $$S = \frac{2b^3}{3p} = \frac{2.12^3}{3.3} = \frac{2.1728}{9} = 384 \text{ кв. од.}$$

Вправи.

Ч — 239. *Написати вершкове рівняння параболи, що в неї можна ввести рівнораменний трикутник з основою 10, а висотою 2,5, так, щоб він лежав вершком своїм у вершк у параболи; 2) Теж, коли в тих самих умовах можна ввести рівнобічний* Δ *-ик з боком 4,5 метра.*

Ч — 240. *Дослідити взаємне положення простих:*

1) $y + 2x = 0$ *і 2)* $2x + 2y + 5 = 0$ *та парабол: 1)* $y^2 = 12x$ *і 2)* $y^2 = 10x$.

Ч — 241. *Знайти значники кінців і довжину тятиви, що творить проста* $x = \frac{5}{4}y + 1$, *яко січна параболи* $x^2 = 9x$.

Ч — 242. *Написати рівняння поперечника параболи* $y^2 = 5x$, *а також знайти значники перехрестя його з параболою, коли він здружений з тятивою* $5x - 9y + 20 = 0$.

Ч — 243. *Теж,—для поперечника параболи* $y^2 - 5x - 6y + 29 = 0$, *здруженого з тятивою* $x + y = 17$.

Ч — 244. *Написати рівняння січної до параболи* $y^2 = 9x$, *коли ця січна переходить через точку* $(3,4)$ *і здружена з поперечником* $y = 2$.

Ч — 245. *Обчислити поле відрізка параболи* $y^2 = 2px$, *що творить тятива, переходячи через вогнище прямово до осі.*

Ч — 246. *Теж—для параболи* $y^2 = 10x$, *коли відрізок обмежений тятивою* $x = 2{,}5$.

Ч — 247. *Обчислити поля відрізків параболи* $y^2 = 12x$, *що утворюються січними до параболи:* 1) $y = -6(x + 4)$; 2) $y = -3(x - 10)$ *і* 3) $3x = 10 - y$.

§ 50. Рівняння дотичної, поведеної через дану точку на параболі.

Досліджуючи взаємне положення простої і параболи, ми зауважили вже такі властивости дотичної до параболи:

1) Дотична відтинає від осі Y — *ів* відтинок, рівний з половиною рядної точки дотику.

2) Дотична є прямова до проміня, поведеного з вогнища параболи в точку перехрестя дотичної з віссю Y — *ів*.

Цими властивостямм ми скористуємося, щоб написати рівняння дотичної до параболи.

Візьмім параболу, визначену рівнянням у вершковій формі:

$$y^2 = 2px.$$

Треба повести до неї дотичну через точку $M(x_1, y_1)$, що лежить на цій параболі.

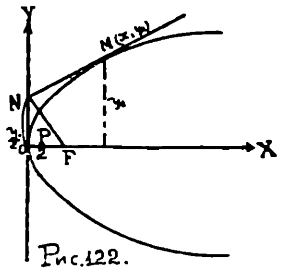


Рис. 122.

Рівняння кожної простої, що переходить через дану точку $M(x_1, y_1)$ буде:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Щоб ця проста була дотичною до параболи, треба дібрати кутовий змінник її m, так, щоб вона була прямова до проміня FN, поведеного з вогнища в точку $N\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$ перехрестя дотичної з віссю Y—*ів*. Але промінь FN творить на осях відтинки: $x = \frac{p}{2}$; $y = \frac{y_1}{2}$, а тому його рівнання буде:

$$\frac{x}{\frac{p}{2}} + \frac{y}{\frac{y_1}{2}} = 1, \text{або } y = -\frac{y_1}{p}x + \frac{y_1}{2}.$$

Як що проста $y - y_1 = m(x - x_1)$ має бути прямова до простої FN, то кутовий змінник її m мусить задовольняти умову прямовости простих, себ-то:

$$m = +\frac{p}{y_1}.$$

Таким чином рівнання дотичної в точці $M(x_1, y_1)$ буде:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \quad \ldots\ldots \quad (94)$$

або:

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1.$$

Але, коли точка $M(x_1, y_1)$ лежить на даній параболі, $y_1^2 = 2px_1$, а тому, вставивши замісць y_1^2 знайдену вартість матимемо:

$$yy_1 - 2px_1 = px - px_1 \quad \text{або}$$

$$yy_1 = p(x + x_1) \quad \ldots\ldots \quad (95)$$

Це рівнання дотичної до параболи, даної рівнанням у вершковій формі.

Ми бачимо, що правило складання рівнання дотичної до параболи таке саме, як і для кола, визначеного рівнанням в алгебричній формі, себ-то:

Щоб скласти рівнання дотичної до параболи, треба у рівнанню цієї параболи квадрат змінної написати яко здобуток, а подвійну змінну першого ступіня, яко суму [напр., для рівнання: $y^2 = 2px$ пишемо $yy = p(x + x)$] **і в кожній парі цих змінних одну з них змінити на відповідний значник даної точки дотику.**

[напр. у $yy = p(x + x)$ робимо заміну $yy_1 = p(x + x_1)$].

Примітка: Можна скласти рівнання дотичної ще другим способом, а саме: кожна дотична мусить переходити через 2 точки 1) дану точку дотику $M(x_1,y_1)$ і 2) через точку на осі Y — ів, віддалену від початку осей на пів рядної точки дотику, себ-то через точку $N\left(O, \frac{y_1}{2}\right)$ (рис. 122).

Рівнання такої простої буде:

$$y - \frac{y_1}{2} = \frac{y_1 - \frac{y_1}{2}}{x_1},$$

або

$$y = \frac{y_1}{2x_1}\left(x + x_1\right)$$

Помноживши обидві частини рівнання на y_1 маємо:

$$yy_1 = \frac{y_1^2}{2_1x}\left(x + x_1\right)$$

Але точка (x_1, y_1) належить до параболи й тому задовольняє її рівнання, отже $y_1^2 = 2px_1$. Звідци $\frac{y_1^2}{2x_1} = p$. Вставивши цю вартість в наше рівнання дотичної, одержуємо:

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Себ-то попереднє рівнання.

Третій спосіб. Два перших способи грунтуються на геометричних властивостях дотичної, тим часом як цей третій спосіб дає можливість довести рівнання дотичної шляхом алгебричним. Третій способ корисний з того боку, що він є спільний для всіх кривих.

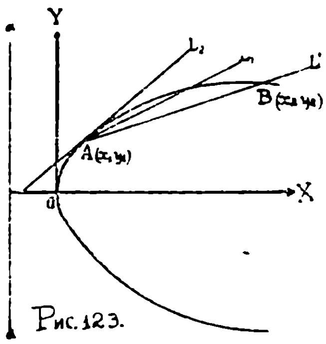


Рис. 123.

Візьмім на нашій параболі: $y^2 = 2px$. дві точки: $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$ і поведемо через них січну AB. (Рис. 123).

Рівнання простої взагалі, яко простої, що переходить через дві загадані точки, є

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \ldots\ldots (\mathrm{I}).$$

Але таке рівнання визначає кожну просту, що переходить через точки A і B, і не дає підстав твердити, що це є рівнання січної даної параболи $y^2 = 2px$.

Щоб воно було рівнанням січної параболи треба кутовий змінник $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ визначити за допомогою рівнання цієї параболи: $y^2 = 2px$ через змінник її $2p$.

Точки A і B належать до параболи й тому значники їх повертають рівнання $y^2 = 2px$ у тотожність.

Отже:

$$y_2{}^2 = 2px_2 \qquad (1)$$

$$y_1{}^2 = 2px_1 \qquad (2).$$

Звідци, відлічуючи тотожність (2) з тотожности (1) почленно, матимемо:

$$y_2{}^2 - y_1{}^2 = 2p(x_2 - x_1)$$

або:

$$(y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = 2p(x_2 - x_1).$$

Складаючи пропорцію, одержуємо:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p.}{y_2 + y_1.} \ldots\ldots (\mathrm{II}).$$

Ліва частина на цієї рівности є кутовий змінник рівнання січної (I), праваж частини є визначення того ж змінника через змінник параболи $2p$.

Вставивши вартість (II) в рівнання (I), матимемо рівнання січної даної параболи,

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1} (x - x_1) \ldots\ldots (\mathrm{III}).$$

Будемо тепер цю січну обертати навколо точки A в тому напрямі, щоб дуга AB зменшувалась. В міру обертання точка B наближатиметься до A і в той момент, коли вона зілляється з точкою A, січна AB стане дотичною L_2 (рис. 123).

Але тоді значники точки B стають: $x_2 = x_1$ і $y_2 = y_1$. Очевидно, що, коли ми у рівнанню (III) замість y_2 вставимо y_1, то одержимо рівнання потрібної дотичної L_2, а саме:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1).$$

Перетворимо це рівнання:

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1$$

або:

$$yy_1 = px + y_1^2 - 2px_1 + px_1.$$

Коли точка (x_1, y_1) належить до параболи $y^2 = 2px$, то вона обертатиме це рівнання в тотожність, а тому $y_1^2 - 2px_1 = O$.

Звідци матимемо:

$$yy_1 = px + px_1$$

або:

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Це вже відоме нам рівнання дотичної до параболи. Як що маємо рівнання параболи в загальній формі:

$$(y - b)^2 = 2p(x - a),$$

то шляхом рівнобіжного перенесення осей в точку (a,b), визначення при тих умовах рівнання дотичної і перетворення його назад до старих осей, одержимо таке рівнання дотичної:

$$(y - b)\ (y_1 - b) = p\ [(x - a) + (x_1 - a)].$$

Себ-то — правило складання рівнання дотичної те саме.

§ 51. Властивости дотичної.

Крім уже доведених властивостей:

1) **Дотична до параболи (вершково-положеної) відтинає від осі У — ів відтинок, рівний з піврядною точки дотику;**

2) **Дотична до параболи прямова до проміня, поведеного з огнища її в точку перехрещення цієї дотичної з віссю У — ів;**

маємо ще дві властивости:

3) **Дотична відтинає від осі Х — ів відтинок, рівний з від'ємною величиною відтинкової точки дотику;**

4) Дотична до параболи є симетральною кута, утвореного лучем-вектором параболи й від'ємним напрямом поперечника, поведених через точку дотику.

Звідци висновок: **кут спаду дотичної до параболи є рівний з половиною кута, утвореного лучем-вектором і від'ємним напрямом поперечника, поведених через точку дотику.**

5) Відтинок дотичної переполовинюється віссю $У$ — ів.

Доведемо останні властивости дотичної (рис 124).

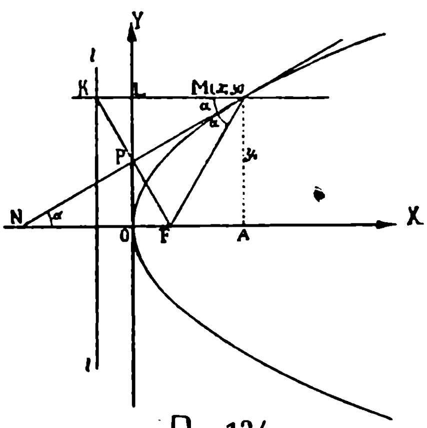


Рис.124.

3) Розглянемо $\triangle NMA$ і $\triangle NPO$; вони схожі, бо $MA \parallel PO$, тому:

$$\frac{AN}{ON} = \frac{AM}{OP} = \frac{MN}{NP}$$

але $AM = y_1$, а $OP = \frac{y_1}{2}$, тому

$$\frac{AN}{ON} = 2,$$

себ-то $ON = OA$.

Звідци значники точки N будуть $(-x_1, o)$.

Цей самий вислід одержимо, шукаючи точку перетину осі X—ів дотичною $yy_1 = p(x + x_1)$.

Справді, покладаючи $y = 0$, маємо $0 = p(x + x_1)$, або $x + x_1 = 0$; а звідци: $x = -x_1$.

5) Разом з цим маємо $\frac{MN}{NP} = 2$, себто відтинок дотичної переполовинюється віссю $У$ — *ів*.

4) З визначення параболи відомо, що $FM = MK$, тому $\triangle KMF$ є рівнораменний. Як ми довели раніш, дотична переполовинює основу KF цього трикутника у точці P, а тому, яко осередня основи рівнораменого $\triangle$-ка є одночасно і симетральною вершкового кута $\sphericalangle KMF$, себто його переполовинює.

Але $KM \parallel NA$, тому кут спаду дотичної: $\alpha = \sphericalangle PMK$ (яко внутрішні перехресні), себто — є половиною кута, утвореного лучем-вектором і від'ємним напрямком поперечника, поведених через точку дотику.

§ 52. Прямова до параболи.

Ми вже знаємо, що прямовою до кривої в даній точці зветься прям, поставлений до дотичної поведеної через цю точку.

Хай рівнання дотичної, поведеної через точку параболи $M(x_1,y_1)$ буде:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(y - x_1); \text{ [див. рівнання (94)].}$$

Тоді рівнання прямової, яко простої, що переходить через точку $M(x_1,y_1)$, матиме вигляд: $y - y_1 = m(x - x_1)$; але ця прямова є прямом до дотичної, а тому її кутовий змінник

$$m = -\frac{y_1}{p}.$$

Отже рівнання прямової в якій небудь точці параболи $M(x_1,y_1)$ є:

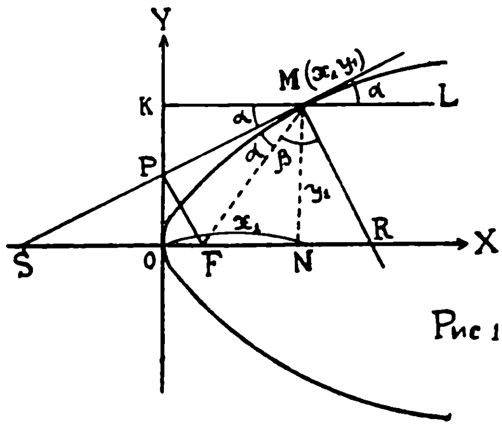


Рис 125.

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \ldots\ldots (96).$$

Властивість прямової параболи є та, що кожна прямова є сіметральною куту, утвореного лучем-вектором і додатнім напрямом поперечника, поведених через точку дотику.

§ 53. Довжина (відтинок) дотичної та піддотичної, прямової та підпрямової.

1) **Довжина піддотичної рівна:** $S_t = 2x_1$.

Справді, $S_t = SN = SO + ON = x_1 + x_1 = 2x_1$. (Рис. 125).

2) Довжина підпрямової $S_n = p$.

Розглянемо $\triangle$-ки: SMR і SPF. Ми бачимо, що $PF \parallel MR$, тому:

$$\frac{MR}{PF} = \frac{SR}{SF} = \frac{SM}{SP};$$

але зі схожости $\triangle\, OPS$ і $\triangle\, MNS$ ми бачили, що $\frac{SM}{SP} = 2$, тому:

$$\frac{SR}{SF} = 2.$$

Отже вогнище переполовинює відтинок осі X — ів, обмежений перехрестями з нею дотичної та прямової, тому:

$SO + OF = FN + NR$, але $SO = x_1$; $OF = \frac{p}{2}$, $FN = ON - OF = x_1 - \frac{p}{2}$; $NR = S_n$.

Таким чином, $x_1 + \frac{p}{2} = x_1 - \frac{p}{2} + S_n$.

Звідци: $$S_n = p$$

Підпрямова параболи є величина стала, рівна з півзмінником параболи.

З прямокутних $\triangle$-ів SMN і NMR одержуємо довжину:

1) дотичної $t = \sqrt{4x_1^2 + y_1^2}$
2) прямової: $n = \sqrt{p^2 + y_1^2}$

Таким чином відтинки:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1) дотичної} & t = \sqrt{4x_1^2 + y_1^2} \\ \text{2) прямової} & n = \sqrt{p^2 + y^2_1} \\ \text{3) піддотичної} & S_t = 2x_1 \\ \text{4) підпрямової} & S_n = p \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (97)$$

§ 54. Креслення дотичної та прямової до параболи.

Щоб накреслити дотичну поведену до параболи через дану на ній точку скористуємось, або:

1) властивістю дотичної відтинати від осі $У$ — *ів* відтинок, рівний з половиною рядної данної точки, або:

2) властивістю дотичної відтинати від осі X — *ів* відтинок, рівний (своєю абсолютною величиною) з відтинковою даної точки.

В першому разі креслення переводимо так:

Рядну AMданої точки M (рис. 126) переполовинюємо и через середину AM ведемо рівнобіжну KB до осі X — *ів*. Тоді одержуємо $OB = \frac{y_1}{2}$.

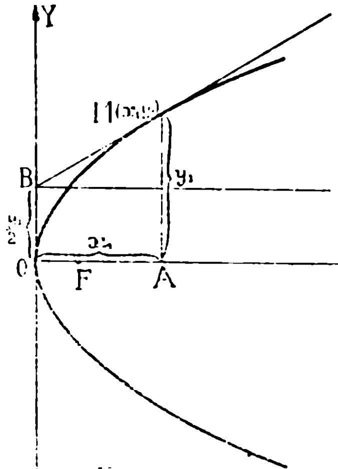


Рис 126.

Через точки B і M ведемо просту BM, що й буде дотичною до параболи в точці її $M(x_1,y_1)$.

В другому разі відтинкову OA даної (рис. 127) точки $M(x_1,y_1)$ відкладуємо по осі X — *ів* у ліворуч від початку осей O, і через точки B і M ведемо просту.

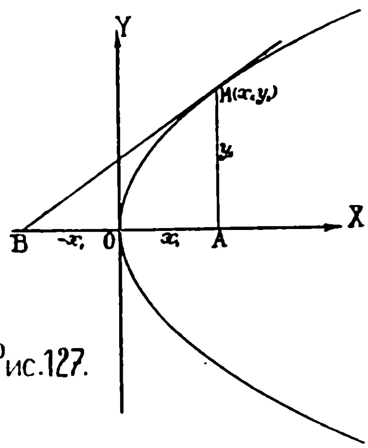


Рис.127.

Для накреслення прямової до параболи в даній точці скористуємось тою властивістю, що вогнище параболи переполовинює відтинок осі X — *ів* між перехрестями з нею дотичної й прямової.

А тому креслимо так: (рис. 128). Відтинкову OA даної точки $M(x_1,y_1)$ на параболі відкладуємо на осі X — *ів* у ліворуч від початку осей O (як це робили в другому випадку будування дотичної).

Потім віддалення BF одержаної точки B від вогнища F відкладуємо на осі X — *ів* у праворуч від вогнища (відтинок FC). Одержана точка C є перехрестям прямової (нормалі) з віссю X — *ів*, а тому, сполучивши точки M і C простою, матимемо саму прямову MC.

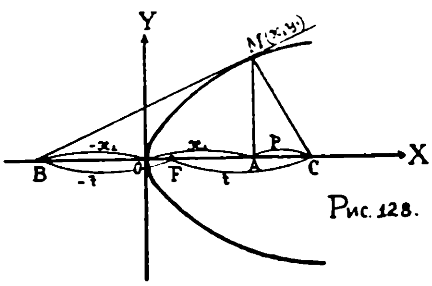


Рис. 128.

2-й спосіб. З точки M параболи спускаємо на вісь іксів прям MA і від нього в додатній напрямності відкладуємо $AC = p$. Через точки M і C ведемо просту, що й є даного прямовою.

Примітка. Очевидно, що коли парабола не дається у вершковій формі, то будування дотичної й прямової ведеться зглядно осі параболи та її вершка, так само як це робился для вершкової форми зглядно осі X та початку осей.

§ 55. Дотична до параболи, проведена через точку по-за нею.

Припустім, що дотична поведена через дану точку $M_0(x_0,y_0)$, дотикається параболи в якійсь невідомій точці $M(x_1,y_1)$

Рівнання її буде $yy_1 = p(x + x_1)$. Але з умови ця дотична переходить через точку M_0, а тому значники її повинні обертати дане рівнання дотичної у тотожність, себ-то $y_0y_1 = p(x_0 + x_1)$. Ця тотожність провізорична, бо ми вважали значники x_1,y_1 за дані.

Щоб їх визначити, мусимо вважати рівність $y_0,y_1 = p(x_0 + x_1)$ за рівнання з невідомими x_1 і y_1. Щоб мати ще друге рівнання, скористуємось тим, що точка M лежить на параболи, а тому значники: x_1 і y_1 повінні задовольняти рівнання самої параболи, себ-то:

$$y_1^2 = 2px_1$$

Таким чином, щоб знайти точку дотику M, треба розвязати систему рівнань:

$$y_1y_0 = p(x_1 + x_0)$$
$$y_1^2 = 2px_1,$$

або означаючи x_1 і y_1, яко невідомі, просто через x і y, систему:

$$\left.\begin{aligned} yy_0 &= p(x + x_0) \\ y^2 &= 2px \end{aligned}\right\} (a)$$

Звідци:

$$y = y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2px_0}$$

Таким чином y, а разом і $x = \frac{y^2}{2p}$, мають:

1) або **2 вартости,** коли виразник $D = y_0 - 2px_0 > o$ (Себто, в тому разі, з точки по-за параболою можна повести до неї дві дотичні);

2) або **1 вартість** (дві однакові), коли виразнак: $D = y_0^2 - 2px_0 = O$ (одна дотична) і

3) або **ні одної реальної вартости,** коли $D = y_0^2 - - 2px_0 < O$ (дотичної повести не можна).

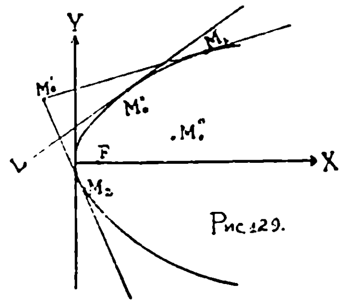
Геометрично уявимо собі це так:

Нерівність, $y_0^2 = 2px_0 \gtreqless O$ можна написати ще й так:

$$y_0^2 \gtreqless 2px_0.$$

А з аналізи рівнання параболи знаємо, що коли значники даної точки (x_0, y_0), обертають рівнання параболи $y^2 = 2px$ в тотожність $y_0^2 = 2px_0$, то точка лежить на параболі. Для точки, що лежить по-за параболою, існує нерівність $y_0^2 > 2px_0$, а для точки, що лежить в полі самої параболи, — нерівність $y_0^2 < 2px_0$.

Отже, 1) **коли дана точка лежить по-за параболою, то через неї можна повести до цієї параболи дві дотичних** (напр. одна M_0M_1, а друга M_0M_2 (рис. 129).



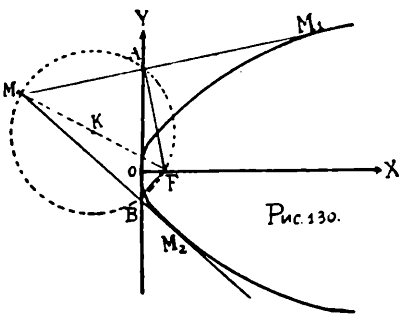
2) **Коли точка (M_0') лежить на параболі, то через неї можна повести лише одну дотичну до цієї параболи** (напр. L рис. 129).

і 3) **Коли точка (M_0'') лежить на полі параболи, то через неї не можна повести жадної дотичної до цієї параболи.**

§ 56. Будування дотичних до параболи, проведених з точок, що лежать по-за нею.

Припустім, що ми вже повели дотичні M_0M_1 і M_0M_2 з точки M_0 по-за параболою. Ми знаємо таку властивість дотичної до параболи:

Кожна дотична до параболи прямова до проміня поведеного з вогнища параболи в точку перехрещення дотичної з вісю $У$ — *ів*, а тому кути $\sphericalangle FAM_0$ і $\sphericalangle EBM_0$ є прямі (рис. 130).



Ці кути спіраються на кінці відтинку M_0F, що сполучує вогнище з даною точкою, а через те їх вершки A і B мусять лежати на перехрестях обводу кола, збудованого на відтинку M_0F, як на поперечнику, з віссю $У$ — *ів*. Ці міркування дають спосіб до будування дотичних до параболи, поведених з точки, що лежить по-за нею. А саме (рис. 130).

Щоб збудувати дотичні, поведені до параболи з якої небудь точки по-за нею, треба сполучити відтинком простої дану точку з вогнищем параболи й на цьому відтинкові, яко на поперечникові, збудувати коло. Через дану точку M_0 і точки A і B перехресть кола з віссю $У$ — *ів* ведемо прості M_0A і M_0B, що й будуть потрібними дотичними.

§ 57. Бігункова параболи.

Як було для кола, так і тепер **січну, що її перехрестя з даною параболою є точками дотику дотичних, поведених з якої небудь точки по-за цією параболою, будемо звати бігунковою (полярою) зазначеної точки, а саму точку бігуном.**

Як видко із системи рівнань, що визначають значники точок дотику, **рівнання бігункової** буде:

$$yy_0 = p(x + x_0) \quad \ldots\ldots \quad (98)$$

(Спосіб написання рівнання нам уже відомий)

Примітка: Очевидно, що рівнання бігункової до параболи: $(y - b)^2 = 2p\,(x - a)$ буде:

$$(y - b)\ (y_0 = b) = p\ [\,(x - a) + (x_0 - a)\,] \quad \ldots\ldots \quad (99)$$

Властивости бігункової.

1) **Бігункова є здружена з поперечником параболи, поведеним через її бігун.**

Довід: Значники кінців дотикової тятиви (відтинку бігункової між точками дотику M_1 і M_2) будуть (див. розвязання системи *(a)* § 55:

$$y_1 = y_0 + \sqrt{y_0^2 - 2px_0}$$

$$y_2 = y_0 - \sqrt{y_0^2 - 2px_0}$$

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p} = \frac{y_0^2 - px_0 + y_0 \sqrt{y_0^2 - 2px_0}}{p}$$

$$x_2 = \frac{y_2^2}{2p} = \frac{y_0^2 - px_0 - y_0 \sqrt{y_0^2 - 2px_0}}{p}$$

Тому, значники середини дотикової тятиви будуть:

$$a = \frac{x_1 + x^2}{2} = \frac{y_0^2 - px_0}{p}; \quad b = \frac{y_1 + y_2}{2} = y_0$$

Ми бачимо, що рядна бігуна й середини дотикової тятиви однакові $b = y_0$, а тому проста, що переходить через них, рівнобіжна до осі X — *ів*, себто є поперечником параболи (рівнання $y = y_0$). Таким чином, бігункова (скорше її дотикова тятива) здружена з поперечником параболи, що переходить через бігун.

2) **Парабола переполовинює відтинок поперечника, здруженого з полярою** (відтинком поперечника називаємо віддалення бігуна від середини дотикової тятиви)

і 3) **Дотична до параболи, що рівнобіжна до бігункової переполовинює дотичні поведені з бігуна, а також і відтинок самої цієї дотичної, замкнений бігуновими дотичними, переполовинюється точкою дотику.**

Довід.

1) Щоб довести, що парабола переполовинює відтинок AM_0 поперечника, здруженого з полярою $M_1 M_2$, визначимо значник x точки B, перехрестя даної параболи з поперечником M_0A. Ми знаємо, що рівнання параболи: $y^2 = 2px$, і рівнання поперечника $y = y_0$, тому $y_0^2 = 2px$, а звідци $x' = \frac{y_0^2}{2p}$. (Рис. 132).

З другого боку будемо шукати взагалі значники x'' *і* y'' середини відтинку M_0A:

$$x'' = \frac{x_0 + a}{2} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{y_0^2 - px_0}{p}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{px_0 + y_0^2 - px_0}{p},$$

або $x'' = \dfrac{y_0^2}{2p}$. Ми бачимо, що значник x' перехрестя поперечника $M_0\,A$ з параболою і значник x'', середини відтінку M_0A, є той самий (а що-до значника y', то він для відтинка M_0A є завжди рівний y_0).

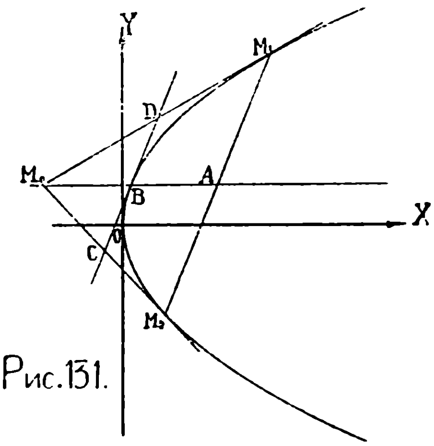


Рис.131.

Отже цим ми доводимо, що **парабола переполовинює відтинок M_0А поперечника, здруженого з бігунковою.**

2) Розглядаючи жмут простих: M_0M_1, M_0A, M_0M_2, перетятих рівнобіжними: $C\|M_2M_1$, ми бачимо що $\dfrac{M_0D}{DM_1} = \dfrac{M_0C}{CM_2} = \dfrac{M_0B}{BA}$; але $M_0B = BA$, а тому: $M_0D = DM_1$; $M_0C = CM_2$.

3) Нарешті, проста M_0A є осередньою (медіяною) основи трикутника $M_1M_0M_2$, а тому вона переполовинюватиме кожний відтинок, замкнений боками трикутника і рівнобіжний до основи M_1M_2, себто $CB = CD$.

Вправи.

Ч — **248.** *Написати рівнання дотичної, поведеної через дану точку на параболі:*

1) $y^2 = 8x$; $A\ (2,4)$

2) $y^2 = 8x$; $B\ (3,y_1)$, *де* $y_1 > 0$

3) $y^2 = -6x$; $C\,(-{}^2/_3, y_1)$; *де* $y_1 > 0$

4) $(y-5)^2 = 7\,(x+2)$; $M\,(5, -2)$

5) $x^2 = y$; $M\,(3, y_1)$

Примітка: Значник y_1 *має бути обчислений.*

Ч — 249. *Написати рівнання дотичної до параболи:* $y^2 = 8x$, *рівнобіжної до простої* $y = x - 3$.

Теж, — дотичної до параболи $y^2 = 5x$, *рівнобіжної до простої* $3x - 2y + 7 = 0$.

Ч — 250. *Написати рівнання дотичної до параболи: а)* $y^2 = 6x$; *б)* $x^2 = -12y$, *прямової до простої а)* $2x + 2y = 9$; *б)* $2y - 4x = 7$.

Ч — 251. *Написати рівнання прямової поведеної: 1) до параболи* $y^2 = 10x$ *через точку на ній:* $A\,({}^8/_5, y_1)$, *де* $y_1 < 0$; *2) теж — до параболи* $(y+3)^2 = 5\,(x-4)$ *через точку* $B\,(9, -8)$.

Ч — 252. *Обчислити відтинки: дотичної, прямової, піддотичної та підпрямової, поведених до параболи:* $y^2 = 10x$, *через точку на ній:* $M(7, y_1)$, *де* $y_1 > 0$.

Ч — 253. *Знайти перехрестя й кут між кривими:*

$$y^2 = 8x \;\; і \;\; x^2 + y^2 = 128.$$

Ч — 254. *Написати рівнання дотичних, поведених з точки по-за параболою, коли відомі:*

1) парабола: $y^2 = 6x$ *і точка* $A(-6, 0)$;

2) парабола: $y^2 = 8x$ *і точка* $B(6, 8)$;

3) парабола: $(y-b)^2 = 2p(x-a)$ *і точка* $O(o, o)$.

Ч — 255. *Написати рівнання бігункової, коли дано:*

1) параболу: $y^2 = 14$ *і бігун:* $A(7, 8)$;

2) параболу: $y^2 = 4x$ *і бігун:* $B(5, -4)$.

Ч — 256. *Довести, що директрита параболи є геометричний осередок бігунів, що їх бігункова переходить через вогнище параболи.*

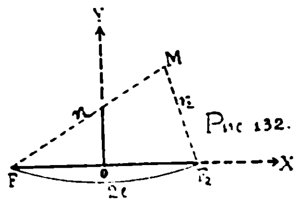
II. ЕЛІПСА Й ГИПЕРБОЛА.

§ 58. Центрові рівнання елипси й гиперболи.

Розвяжемо такі задачі:

1) Знайти геометричний осередок точок, що сума їх віддалень від загаданих двох точок є величина стала.

2) Теж, — знайти геометричний осередок точок, що ріжниця їх віддалень від загаданих двох точок є величина стала.



Візьмім 2 точки: F_1 і F_2 (рис. 132), з віддаленням між ними F_1F_2 — $2e$.

Вважатимем просту F_1F_2 за вісь X — ів, середину відтинку O за початок осей, а симетральну цього відтинку F_1F_2 за вісь $У$ — ів. Тоді значники точок F_1 і F_2 будуть: F_1 $(-e, o)$ і $F_2(+e,o)$.

1) Припустім, що точка M (x,y) належить до першого геометричного осередку і сума віддалень її від точок F_1 та F_2 є

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

1) Припустім також, що другий геометр. осередок має якусь иншу точку M^1, також зі змінними значниками x_1 і y_1, що задовольняють умову цього другого геометричного осередку, а саме:

$$r_1 - r_2 = 2a$$

(У в першому і в другом разі під алгебричним сімболом a вважається стала, хоч для першого і другого випадку й не однакової вартости, величина).

З огляду на схожість умов:

$r_1 + r_2 = 2a;$ $r_1 - r_2 = 2a,$ ми можемо їх об'єднати в спільну умову: $r_1 \pm r_2 = 2a$ і разом шукати обидва геометричних очередки.

Щоб скласти рівнання наших геометричних осередків, треба звязати значники довільних точок осередків з даною умовою: $r_1 \pm r_2 = 2a$. Це легко зробити, коли r_1 і r_2 визначимо через значники їх кінців, а саме:

$$r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

Вставивши вартости r_1 і r_2 у згадану умову: $r_1 \pm r_2 = 2a$, матимемо:

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

Це й будуть рівнання наших осередків точок.

(1-й осередок матиме між радикалами $+$, а другий $-$).

Подвійним квадратуванням позбавимо ці рівнання невимірности й одержимо:

$$x^2(a^2-e^2)+a^2y^2=a^2(a^2-e^2) \text{ *)}$$

В даному разі рівнання обох геометричних осередків мають однаковий вигляд, але внутрішнє вони дуже відрізняються, а саме:

1) для першого геометричного осередку $r_1+r_2=2a$, а тому, розглядаючи $\triangle F_1MF_2$, бачимо, що $r_1+r_2>2e$, (бо сума двох боків $\triangle$-ка більша від третього боку). Звідци $2a>2e$ і $a>e$. Отже, a^2-e^2 є додатна величина і ми можемо вважати її за рівну: $a^2-e^2=b^2$.

2) навпаки для другого геометричного осередку: $r_1-r_2=2a$, а тому, розглядаючи той самий $\triangle F_1MF_2$, приходимо до висновку, що $a<e$ й через те $a^2-e^2<0$; коли вважати абсолютну величину ріжниці $|a^2-e^2|=b^2$, то справжня величина цієї ріжниці у другому геометричному осередку буде: $a^2-e^2=-b^2$.

Таким чином, рівнання першого осередку є:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

а другого осередку:

$$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2,$$

або:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

Перший геометричний осередок точок має назву **еліпси**, а другий — **гиперболи**.

---

*) Подаємо відповідні алгебричні операції:

$\sqrt{(x+e)^2+y^2}=2a\mp\sqrt{(x-e)^2+y^2}$. Квадратуємо й спрощуємо:

$$(x+e)^2+y^2=4a^2\mp4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}+(x-e)^2+y^2;$$

$$(x+e)^2-(x-e)^2-4a^2=\mp4a\sqrt{(x-e)^2+y^2};$$

$$(x+e+x-e)(x+e-x+e)-4a^2=\mp4a\sqrt{(x-e)^2+y^2},$$

або (після скорочення на 4):

$$xe-a^2=\mp a\sqrt{(x-e)^2+y^2}.$$

Квадратуємо ще раз:

$$x^2e^2-2a^2ex+a^4=a^2x^2-2a^2ex+a^2x^2+a^2y^2$$

й одержуємо:

$$x^2(a^2-e^2)+a^2y^2=a^2(a^2-e^2).$$

Визначення:

1) **Еліпсою зветься геометричний осередок точок, що сума їх віддалень від двох загаданих точок є величина стала.**

Як ми довели, **центрове рівнання еліпси** є:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad \ldots\ldots \quad (100)$$

2) **Гиперболою зветься геометричний осередок точок, що ріжниця їх віддалень від двох загаданих точок є величина стала.**

Центрове рівнання гиперболи буде:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad \ldots\ldots \quad (101)$$

§ 59. Канонична форма рівнань еліпси й гиперболи.

Поділивши всі члени центрових рівнань еліпси й гиперболи на їх вільного члена, матимемо: **канонічні рівнання:**

1) **еліпси:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (102)$$

2) **гиперболи:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (103)$$

Для памяти.

Рівнання еліпси й гиперболи:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \text{центрові:}\ bx^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2 \\ &2)\ \text{канонічні:}\ \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (104)$$

$+$ відповідає еліпсі; — гиперболі.

Аналіза рівнань еліпси й параболи.

Щоб мати уяву: 1) що-до геометричного образу кривих і 2) що-до вартостей змінників a і b для кожної кривої, зробимо анализу рівнань цих кривих:

§ 60. Аналіза каноничного рівнання еліпси.

Визначимо з рівнання: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вартости x і y, кожну через друге невідоме, а саме:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \qquad (1)$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (2)$$

Тоді бачимо, що:

1) x і y набирають найбільші і найменші вартости, коли в рівнанню (1) вважаемо $y = 0$, а в рівнанню (2) — $x = 0$.

Тоді:

$$1)\ x = \pm a;\ (y = 0).$$
$$2)\ y = \pm b;\ (x = 0).$$

Ці вартости $x = \pm a$ і $y = \pm b$ своєю абсолютною величиною є найбільші вартости значників еліпси, бо при вартостях $x > a$ і $y > b$ виразники $D_1 = b^2 - y^2$ і $D_2 = a^2 - x^2$ будуть менші від нуля, а тому відповідні вартости:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \text{ і } y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

будуть уявні, себ-то точки, що для них $x > a$, або $y > b$, лежить по-за геометричним осередком (еліпсою).

Таким чином, еліпса має найбільші з абсолютної величини вартости значника x на осі X—*ів*. Ці точки відстоять від початку осей на віддаленні a. Проста AB, що сполучує визначені точки: $A(+a,o)$ і $B(-a,o)$, зветься **великою віссю еліпси.**

Велика вісь еліпси рівна $2a$. Звідци a зветься **великою піввіссю еліпси.**

Так само, еліпса має найбільші з абсолютної величини вартости для значника y на осі $У$—*ів*. Ці точки від-

стоять від початку осей на віддаленню b. Проста CD, що сполучує визначені точки: $C(o, +b)$ і $D(o, -b)$, має назву малої осі еліпси.

Мала вісь еліпси рівна $2b$.

Звідци b **зветься малою піввіссю еліпси.**

Як бачимо, осі еліпси служать для неї і осями координат, тому рівнання $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ має ще назву **осьового рівнання еліпси.** Кінці осей, точки: A, B, C і D, **мають назву вершків еліпси.**

3) **Точки F_1 і F_2 — звуться вогнищами еліпси. Віддалення MF_1 і MF_2 якої небудь точки еліпси від огнища звуться лучами-векторами, або, просто, — векторами еліпси.**

З попередніх міркувань бачимо, що:

Сума лучів-векторів еліпси, поведених до одніеї точки його обводу, завжди рівна з великою віссю еліпси.

$$r_1 + r_2 = 2a \;\ldots\ldots\; (105)$$

3) Зі взорів (1) і (2) видно, що кожнії вартости x відповідає дві однакові величиною і ріжні знаком вартости y і навнаки. Тому можемо зробити висновок, що еліпса симетрична що-до своїх осей (що є разом і осями координат). **Отже, осі еліпси є завжди осями симетрії, а точка O (початок координат), що є серединою цих осей $2a$ і $2b$, зветься центром еліпси і є центром симетрії еліпси.**

4) Підчас доведення рівнання еліпси, ми вважали

$$b^2 = a^2 - e^2,$$

звідци

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Віддалення $F_1F_2 = 2e$ має назву міживогнища. Пів міживогнища e, себ-то віддалення центра еліпси від якогось із вогнищ, зветься ексцентриситетом (в перекладі: відступ від центра).

Вартість:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \;\ldots\ldots\; (106)$$

зветься лінійною вартістю ексцентриситета, або лінійним ексцентриситетом.

Коли ексцентриситет обміряти в одиницях великої півосі a (беручи за одиницю міри довжини піввісь a), то матимемо таку вартість ексцентриситету:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

Тому ε завжди менш від одиниці: $\varepsilon < 1$.

Цю вартість ексцентриситету:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \qquad (107)$$

звуть **числовим, або астрономичним екцентриситетом** і щоб відріжнити від лінійного, означають його грецькою литерою ε.

Висновок: Коло є лише окремим випадком еліпси, що має однакові осі.

Справді, коли матимемо еліпсу з однаковими осями то:

$$a = b,$$

а тому рівнання еліпси приймає вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

або;

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Це, як бачимо, є центрове рівнання кола з лучем a.

В цьому випадкові ексцентриситет:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

є нуль, себ-то обидва вогнища зливаються в центрі еліпси і творять центр кола.

Таким чином, приходимо до висновку, що еліпса є замкнена крива, витягнута вздовж великої осі й стиснена вздовж малої. Її геометричний образ одержимо, коли вживемо зазначеного нижче способу кресления кривої.

§ 61. Креслення еліпси.

З аналізи еліпси ми бачимо, що

$$r^2 + r^2 = 2a.$$

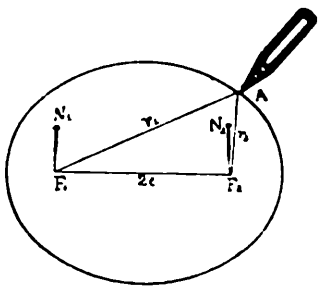


Рис. 133.

Тому, щоб накреслити еліпсу, визначену віссю $2a$ і віддаленням (межиогнищем) $F_1F_2 = 2e$, робимо так: відкладаємо відтинок простої $F_1F_2 = 2e$ і в кінцях відтинку в точках F_1 і F_2 (рис. 133) укріплюємо шпильки N_1 і N_2. Потім беремо нитку довжиною обводу $\triangle\, F_1F_2A$ (себ-то довжиною $2a + 2e$), звязуємо її і надягаємо на шпильки. Кінцем олівця A натягаємо нитку і даємо цьому олівцеві рух. Вістря олівця очеркне еліпсу, бо воно буде порушатися вздовж геометричного осередку точок, що мають стале віддалення від F_1 і F_2 (вогнищ), рівне $2a$ тому, що у кожному положенню вістря A, довжина нитки $F_1A + AF_2$ рівна з довжиною цілої нитки без відтинку F_1F_2, се-бто $2a + 2e - 2e = 2a$.

§ 62. Аналіза каноничного рівнання гиперболи.

Визначимо з рівнання $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вартости x і y, кожну через друге невідоме:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2} \qquad (1)$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (2)$$

Тоді:

1) розглянемо точки перехрестя кривої з віссю X—ів, а для цього у рівнанню (1) положимо $y = o$, тоді:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + o^2} = \pm\, a.$$

Отже гипербола зустрічає вісь X — ів з обох боків початку координат на віддаленню $+a$ і $-a$;

2) розглянемо тепер точки перехрестя кривої з віссю $У$—ів, для цього у рівнанню (2) положимо $x = o$, тоді

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{o^2 - a^2} = + bi$$

Вартости y — є уявні. Себ-то гипербола не має спільних точок з віссю Y — ів, але положена по обидва боки єї $(x = \pm a)$. Тому точки $x = +a$ і $x = -a$ мають назву **вершків гиперболи.**

3) Коли x буде простувати до безмежности, то також буде простувадити туди й y. Дійсно, беручи у рівнанню (2) $x = \infty$, матимемо:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\infty - a^2} = \infty$$

Таким чином, гипербола є крива, що своїми галузями йде до безмежности.

4) Кожній вартості x відповідає дві, однакові величиною й противні знаком, вартости y і навпаки.

Тому **гипербола положена своїми галузями симетрично і що-до осі** X—*ів* **і що-до осі** Y — *ів*. Віддалення на осі X — *ів* (Рис. 133) $P_1P_2 = 2a$ зветься (як і в еліпси) **великою, або головною віссю гиперболи.** F_1 і F_2 — **звуться вогнищами гиперболи.** Середина відтинку F_1F_2, точка O зветься **центром гиперболи,** а довжина відтинку F_1F_2 — **межевогнищем. Півмеживогнища** e (відступ вогнища від центру) **зветься ексцентриситетом гиперболи.**

Для гиперболи ми вважали:

$$a^2 - e^2 = b^2$$

тому $\qquad c^2 = a^2 + b^2,$

отже, **лінійний ексцентрисистет гиперболи** буде:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} \; \ldots\ldots \; (108)$$

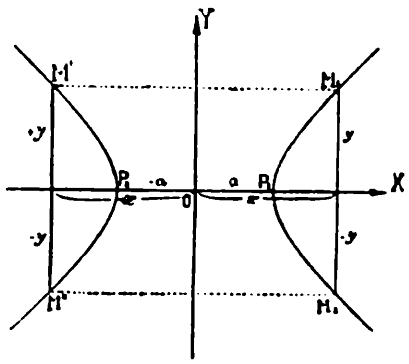


Рис 133a

Коли e визначимо в одиницях великої осі, то матимемо **числовий ексцентрисистет** гиперболи:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} \; \ldots\ldots \; (109)$$

Очевидно, що числовий ексцентриситет гиперболи:

$\varepsilon > 1$ (тоді, як для еліпси $\varepsilon < 1$).

Обчислимо ще малу вісь $2b$.

$$a^2 - e^2 = -b^2;\ b^2 = e^2 - a^2$$

Звідци: $$b = \pm \sqrt{e^2 - a^2}$$

Щоб дати «b» геометричний образ, зачеркуємо з точки A лучем $r = OF_1, = e$ дугу CD. Відтинки $OD = b$ і $OC = -b$ і будуть малими півосями, бо з $\triangle\ ODA$ маємо:

$$OD^2 = AD^2 - OA^2:\ OD^2 = e^2 - a^2;\ OD = b = \pm\sqrt{e^2 - a^2}.$$

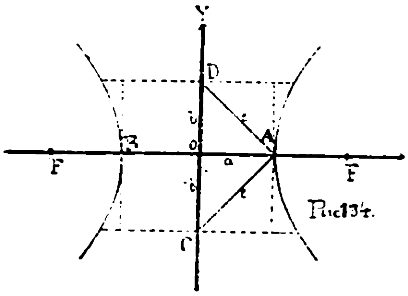


Рис.134.

Коли $a = b$, то гипербола зветься **рівноосьовою, або рівнобокою.** Для неї $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Рівнання **рівнобокої гиперболи** є:

$$x^2 - y^2 = a^2 \ \ldots\ldots \ (110)$$

§ 63. Креслення гиперболи.

Припустім, що нам треба накреслити гиперболу при умові, що: $r_1 - r_2 = 2a$ (з головною віссю $= 2a$). Для цього беремо лінійку і до одного з її кінців N (рис. 135) прикріплюємо нитку довжини меншої, ніж довжина лінійки на $2a$.

На папері ведемо просту й намічуємо на ній вогнища F_1 і F_2 ($F_1F_2 > 2a$). У вогнищі F_1 прикріплюємо протилежний до зачіпу нитки кінець лінійки так, щоб він міг обертатися навколо цієї точки, як коло осі, а кінець нитки прикріплюємо до точки F_2. Коли тепер з положення MN обертати лінійку навколо F_1, проти стрілки годинника й при цьому натягувати нитку вістрям олівця, то це вістря очеркне гиперболу (горішню додатню галузь).

Перекладаючи відповідно лінійку: 1) догори, напр. у положення F_1N''; 2) прикліплюючи лінійку до F_2 (щоб лінійка оберталася в точці F_2 як навколо осі) і роблячи те саме, що її раніш для вогнища F_1, одержимо всі 4 галузі гиперболи.

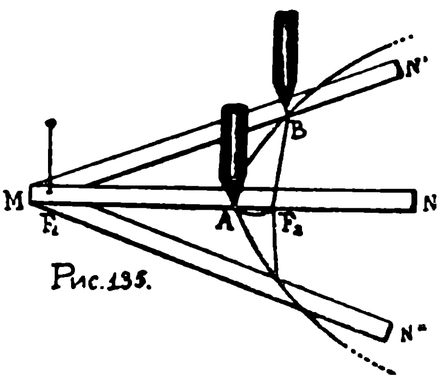


Рис.135.

Справді, в якім положенню лінійка не булаб, завжди та частина нитки BF_2, що знялася з лінійки, буде рівна з тим віддаленням на лінійці, звідки цю нитку знято. Отже луч F_1B завжди збільшуеться на довжину нитки F_2B і тому ріжниця лучів $F_2B - F_2B$ завжди е величина стала, рівна з $2a$, з того величиною, на яку нитку було взято коротшою, ніж довжина лінійки.

§ 64. Порівнання рівнань еліпси й гиперболи.

Ми довели, що рівнання еліпси й гиперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Покажемо тепер геометрично, які саме криві визначають ці рівнання. Вживши зазначених способів креслення еліпси й гиперболи, матимемо рис. 136:

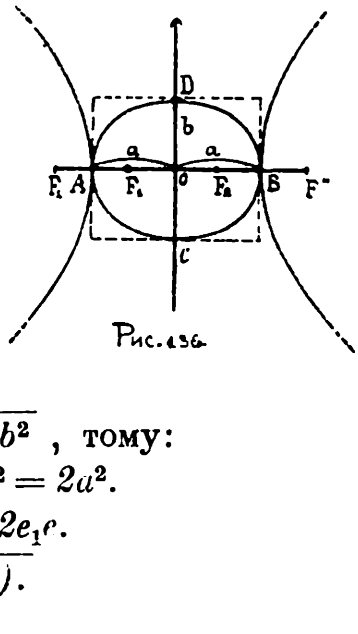


Рис. 136.

Ці елипса й гипербола мають спільні осі: $AB = 2a$ і $CD = 2b$.

Обчислимо віддалення їх вогнищ $F'F_1$:

$F_1F' = F'O - F_1O = e_1 - e;$

$(F'F_1)^2 = e_1^2 + e^2 - 2e_1e;$

(e_1 — лінійний ексцентриситет гиперболи
e — лінійн. ексцентриситет еліпси)

але: $e_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, а $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, тому:

$$e_1^2 + e^2 = a^2 + b^2 + a^2 - b^2 = 2a^2.$$

Отже: $$(F'F_1)^2 = 2a^2 - 2e_1e.$$

А звідци: $$F'F_1 = \sqrt{2(a^2 - ee_1)}.$$

§ 65. Обчислення: 1) лучів-векторів 2) центрового віддалення, 3) змінника (параметра) еліпси та гиперболи.

1) **Обчислення лучів-векторів.**

I. Лучі-вектори елипси:

Ми вже доводили, що довжина лучів-векторів е:

$$r_1 = \sqrt{(x + e)^2 + y^2} \text{ а } r_2 = \sqrt{(x - e)^2 + y^2}$$

Дамо цим вартостям ще другий, зручніший вигляд.

Для цього підносимо вартости r_1 і r_2 до квадрату і висліди відлічуємо один з одного, тоді одержуємо:

$$
\begin{array}{r}
-\,r_1^2 = (x+e)^2 + y^2 \\
r_2^2 = (x-e)^2 + y^2 \\
\hline
r_1^2 - r_2^2 = (x+e)^2 - (x-e)^2
\end{array}
$$

або:

$$(r_1 + r_2)\ (r_1 - r_2) = 2x.2e = 4ex\ (A);$$

Але нам відомо, що $r_1 + r_2 = 2a$, а через те:

$2a\ (r_1 - r_2) = 4ex$, звідки: $r_1 - r_2 = \frac{2ex}{a}$.

Маючи вартости суми: $r_1 + r_2 = 2a$ і ріжниці: $r_1 - r_2 = \frac{2ex}{a}$, можемо визначити лучі-вектори, а саме:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = a + \frac{ex}{a} \\ r_2 = a - \frac{ex}{a} \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (111)$$

Таким чином, знаючи вартість лише відтинкової даної точки еліпсу, маємо змогу обчислити вартости лучів-векторів, поведених у цю точку.

II. Довжина лучів-векторів гиперболи:

Ми бачимо з (A), що:

$$(r_1 + r_2)\ (r_1 - r_2) = 4\,ex,$$

але для гиперболи $r_1 - r_2 = 2a$, тому $r_1 + r_2 = \frac{2ex}{a}$

Розвязуючи систему рівнань:

1) $r_1 + r_2 = \frac{2ex}{a}$ і 2) $r_1 - r_2 = 2a$,

одержимо:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = \frac{ex}{a} + a \\ r_2 = \frac{ex}{a} - a \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (112)$$

Це і є величини лучів-векторів гиперболи.

2) **Обчислення центрових віддалень.**

Відтинок простої R, що сполучує центр еліпси або гиперболи з якою небудь точкою M обводу їх зветься центровим відділенням даної точки еліпси, або гиперболи.

Величину R легко обчислити з $\triangle$ OMB: (рис. 137, a і b).

$$R^2 = x^2 + y^2,$$

але для еліпси:

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ (див. аналізу каноничного рівнання еліпси).

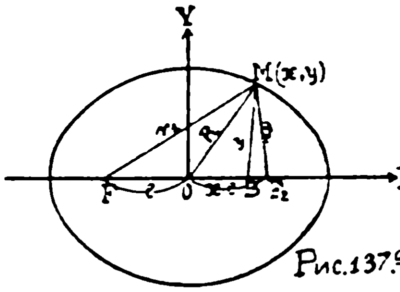


Рис.137а

Тому, для еліпси буде:

$$R^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = x^2 + b^2 - \frac{b^2x^3}{a^2}$$

$$R^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x^2$$

Але нам **відомо**, що $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$, а через те: $R^2 = b^2 + \varepsilon^2x^2$ і **звідци: центрове віддалення якої небудь точки еліпси буде:**

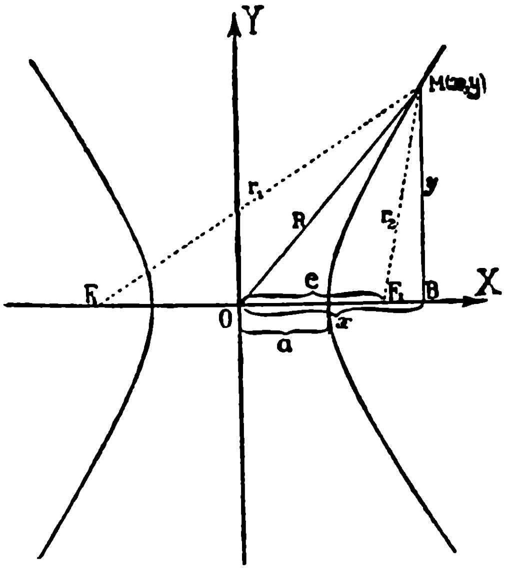


Рис 137b

$$R_{\text{еліп.}} = \sqrt{\varepsilon^2 x^2 + b^2} \quad \ldots\ldots (113)$$

А для гиперболи буде:

$R^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$, а звідци після заміни $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = \varepsilon^2$, одержимо:

$$R_{\text{гиперб.}} = \sqrt{\varepsilon^2x^2 - b^2} \quad \ldots\ldots (114)$$

3) **Обчислення змінника еліпси, або гиперболи.**

Змінником (параметром) еліпси або гиперболи звуть дов-

жину, здруженої з великою віссю і прямової до неї, тятиви, що переходить через вогнище кривої.

Цей змінник, як і для параболи, означають через $2p$. (Легко довести, що довжина тятиви не залежить від того, через яке вогнище її поведемо, себ-то $A_1B_1 = A_2B_2 = 2p$). Довжина цієї тятиви і для еліпси й для гиперболи очевидно буде рівна з подвійною величиною рядної y_2 точки B_2 (рис. 138 *a* і *b*), що має відтинкову $x = +e$.

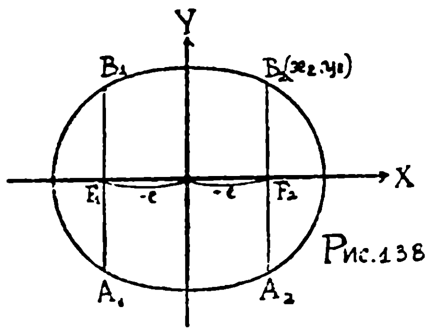


Рис. 138ª

Ми знаємо, що рядна кожної точки елипси є рівна:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ ,\ \text{а гиперболи}\ y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},\ \text{а тому,}$$

вставивши у ці взори вартість відтинкової $x_2 = e$, одержимо:

$$y_2 = + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2}\ ;\ y'' = + \frac{a}{b}\sqrt{e^2 - a^2}$$

але 1) для елипси $e^2 = a^2 - b^2$, а тому:

$$y_2 = + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2 + b^2} = \frac{b^2}{a}$$

і 2) для гиперболи: $e^2 = a^2 + b^2$, а тому:

$$y'' = + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2 - a^2} = \frac{b^2}{a}$$

Отже, і для еліпси й для гиперболи: $p = \frac{b^2}{a}$, а цілий змінник їх буде:

$$2p = \frac{2b^2}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (115)$$

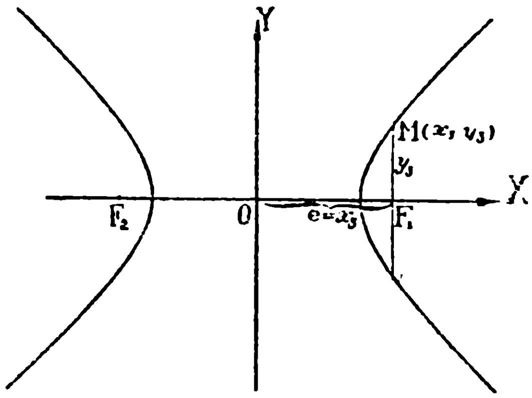


Рис 138^b.

§ 66. Вершкове рівнання еліпси й гиперболи.

Коли за початок осей будемо вважати вершок еліпси або гиперболи, за вісь X—*ів* їх велику вісь, а за вісь Y—*ів* дотичну до даної кривої, поведену через зазначений вершок, то рівнання, що при цих умовах визначатиме відповідну криву, зветься **вершковим**, (рис. 139 a, b).

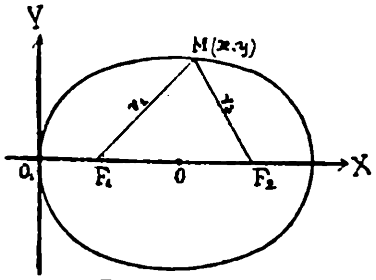


Рис. 139^a.

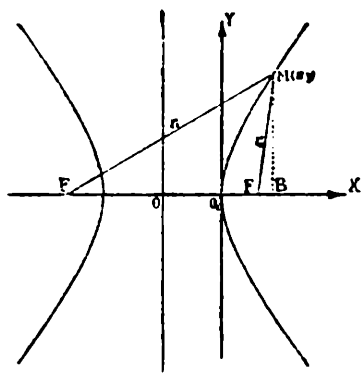


Рис. 139^b.

Вершкові рівнання еліпси та гиперболи можемо одержати шляхом звичайного рівнобіжного пересунення координатних осей у точку O, вершок кривої.

I. Вершкове рівнання еліпси:

Для еліпси початок координатних осей матиме значники: $(-a, o)$, а тому взори перетворення координат будуть:

$$x = x' - a \text{ і } y = y' \ldots\ldots (M).$$

Коли в центрове рівнання еліпси: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ вставити вартости (M), то одержимо:

$$b^2(x' - a)^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$$

Звідци:
$$y'^2 = b^2 - \frac{b^2(x' - a)^2}{a^2},$$

або:
$$y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 + \frac{2b^2x}{a} = \frac{b^2}{a}x\left(2 - \frac{x}{a}\right)$$

Примітка: ми видкинули індекси при y' і x', — вони в даному разі не потрібні, бо x' і y' є звичайні змінні значники точок еліпси.

Нарешті, беручи на увагу, що $\frac{b^2}{a} = p$, будемо мати:

$$y^2 = px\left(2 - \frac{x}{a}\right),$$

або:
$$y^2 = 2py - \frac{px^2}{a} \ldots\ldots\ldots (116)$$

Це і є вершкове рівнання еліпси.

Висновок: Парабола є окремий випадок еліпси, коли в неї величини осей необмежено зростають.

Справді, коли візьмемо $a = \infty$, $b = \infty$, то вершкове рівнання еліпси матиме вигляд:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{\infty}x^2, \text{ а тому } y^2 = 2px.$$

II. Вершкове рівнання гиперболи.

Для гиперболи, початок координатних осей має значники $(+a, o)$. Тому взори перетворення координат будуть:

$$x = x' + a \text{ і } y = y' \ldots (N).$$

Коли в центрове рівнання гиперболи $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, вставити вартости (N), то одержимо:

$$b^2(x' + a)^2 - a^2y'^2 = a^2b^2, \text{ звідци:}$$

$$y'^2 = \frac{b^2(x' + a)^2}{a^2} - b^2, \text{ або } y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} + b^2 + \frac{2b^2x}{a} - b^2 =$$
$$= \frac{b^2}{a}x\left(2 + \frac{1}{a}\right).$$

Але беручи на увагу, що $\frac{b^2}{a} = p$, будемо мати вершкове рівняння гиперболи.

$$y^2 = 2py + \frac{px^2}{a} \quad \ldots\ldots. \quad (117)$$

§ 67. Узагальнення вершкового рівнання для всіх кривих другого ступіня (стіжкових перерізів).

Означивши величину $\pm \frac{p}{a} = q$, можемо сказати, що загальна форма вершкового рівнання кривих 2-го ступіня (стіжкових перерізів) буде:

$$y^2 = 2py + qx^2 \quad \ldots\ldots \quad (118)$$

1) Коли $q < o$ — то це є рівнання еліпси.

2) Коли $q > o$ — то це є рівнання гиперболи.

і 3) Коли $q = o$ — то це є рівнання параболи, бо у параболи головна вісь $a = \infty$, тому $q = \frac{p}{a} = o$.

§ 68. Инший спосіб трактування еліпси та гиперболи (директрита цих кривих).

Розвяжемо задачу:

Знайти геометричний осередок точок, що їх віддалення від загаданих точки та простої мають стале відношення λ?

Хай загадана проста є L, а точка F. За вісь іксів візьмім просту, що переходить через точку F прямово до простої L.

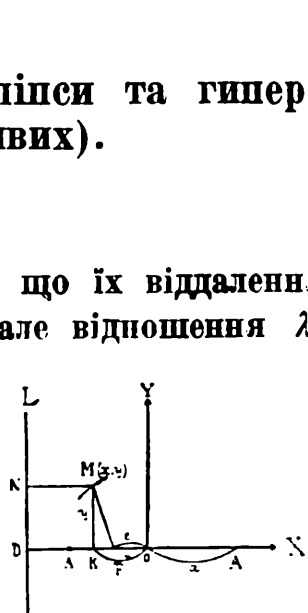


Рис. 140.

Очевидно, що невідомий геометричний осередок перетинамиме вісь X — ів у двох точках A і A_1, так щоб:

$$\frac{AF}{AD} = \lambda \text{ i } \frac{A_1F}{A_1D} = \lambda \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Переполовинимо віддалення $AA_1 = 2a$ і через його середину O поведемо вісь Y-*ків*, прямово до осі іксів. Тоді з рівностей *(a)* матимемо: $A_1D = \frac{A_1F}{\lambda}$; $AD = \frac{AF}{\lambda}$, а через те:

$$AA_1 = 2a = A_1D - AD = \frac{1}{\lambda}(A_1F - AF).$$

Коли відтинок OF означимо через e, то одержимо:

$$A_1F = a + e; \quad AF = a - e.$$

Тому:

$$A_1A = 2a = \frac{1}{\lambda}(a + e - a + e) = \frac{2e}{\lambda}.$$

Звідки: $$\lambda = \frac{e}{a}.$$

Теперь коли знаємо вартість кратности відношення $\lambda = \frac{e}{a}$, легко вивести рівнання самого осередку.

Коли візьмемо на цьому осередку довільну точку $M(x,y)$, то з умови нашої задачі мусимо мати:

$$\frac{MF}{MN} = \lambda, \text{ себто } \frac{MF}{MN} = \frac{e}{a} \quad (б)$$

Обчисляємо MF і MN через значники точки M і дані величини a і e.

З $\triangle$ KMF маємо: $MF^2 = MK^2 + KF^2$, де $MK = y$, а $KF = x - e$, а тому одержуємо:

$$MF^2 = y^2 + (x - e)^2 \quad \ldots\ldots \quad (в)$$

З другого боку:

$$MN = KD = OD - x$$

Але:

$OD = AD + a$, де AD обчислюється з рівностей *(a)*,

а саме: $$\frac{AF}{AD} = \lambda = \frac{e}{a} \text{ і } AD = \frac{a \,.\, AF}{e} = \frac{a(a-e)}{e}$$

Отже:

$$OD = \frac{a(a-e)}{e} + a = \frac{a^2}{e} \quad \ldots\ldots \quad (г).$$

Таким чином:

$$MN = OD - x = \frac{a^2}{e} - x \quad \ldots\ldots (\partial).$$

Вставивши вартости *(в)* і *(д)* у рівність *(б)*, після спрощення, одержимо:

$$\frac{y^2 + (x - e)^2}{\left(\frac{a^2}{e} - x^2\right)^2} = \frac{e^2}{a^2}, \text{ або}$$

$$(a^2 - e^2)\, x^2 + a^2 y = a(a^2 - e^2).$$

Це рівнання подано вже раз у § 58. Ми знаємо, що воно є центровим рівнанням або еліпси, коли $a^2 - e^2 = b^2 > 0$, або гиперболи, коли $a^2 - e^2 = -b^2 < 0$.

З цих міркувань маємо змогу твердити що:

1) **Еліпса є геометричним осередком точок, що їх віддалення від даної точки й простої мають стале відношення** $\lambda < 1$ (бо, коли $a^2 - e^2 > 0$, то $a^2 > e^2$, або $a > e$; звідки $\lambda = \frac{e}{a} < 1$).

2) **Гипербола є геометричним осередком точок, що їх віддалення від даної точки й простої мають стале відношення** $\lambda > 1$ (бо, коли $a^2 - e^2 < 0$, то $a < e$ і $\lambda = \frac{e}{a} > 1$).

Тільки-що подані визначення еліпси й гиперболи дають можливість дати наступне спільне визначення для кривих другого порядку:

Еліпса, парабола й гипербола є геометричними осередками точок, що їх віддалення від загаданої точки й простої мають стале відношення. Коли кратність відношення: 1) $\lambda < 1$ — крива є еліпсою, 2) $\lambda = 1$ — крива є параболою й 3) $\lambda > 1$ — крива є гиперболою.

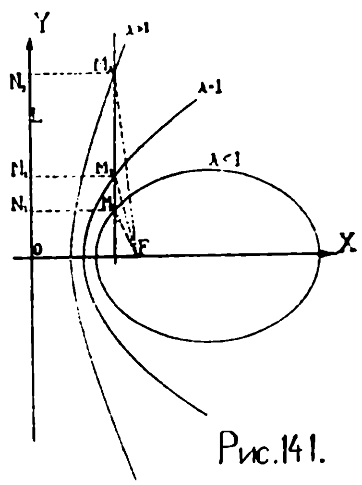


Рис. 141.

Як ми вже знаемо, величини: a — є великою піввісю кривої, а e — лінійним ексцентриситетом.

Як відомо, відношення $\dfrac{e}{a} = \varepsilon$ має назву числового ексцентриситету.

Таким чином відношення віддалень точок згаданих кривих від вогнища й даної простої, яку звемо напрямною, або директритою, завжди рівне з числовим ексцентриситетом цієї кривої. (Рис. 142, a і b).

Очевидно, що еліпса й гипербола матимуть по 2 директрити, відповідно до обох вогнищ.

Разглянемо їх рівняння.

Ми бачимо, що:

1) директрити рівнобіжні до осі *y-ків*, і

2) їх віддалення від початку координат $|OD| = \left|\dfrac{a^2}{e}\right| = \left|\dfrac{a}{\varepsilon}\right|$.

Тому рівняння директрит цих відзначатиметься:

$$\pm \frac{a}{\varepsilon} = x \text{ або } a \pm \varepsilon x = o$$

З рівнань директрити маемо: $a^2 = ex$, або $\dfrac{e}{a} = \dfrac{a}{x}$.

Тому будуемо їх так:

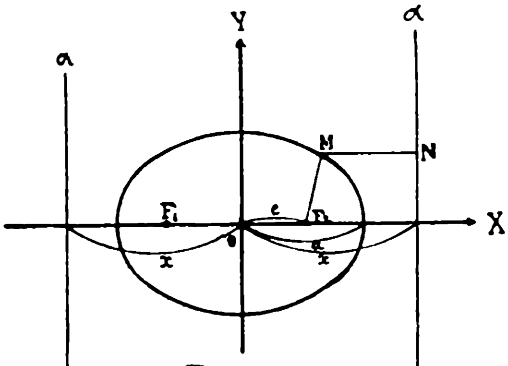
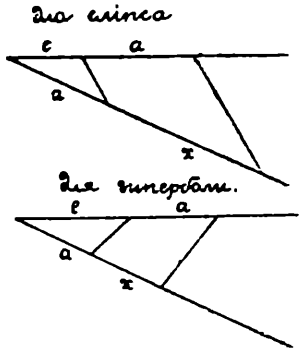


Рис.142ª



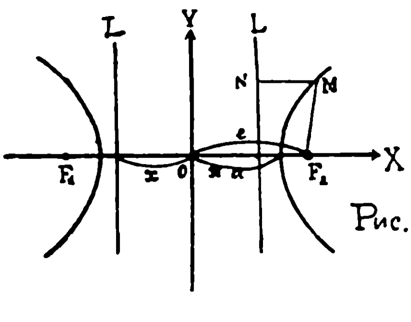
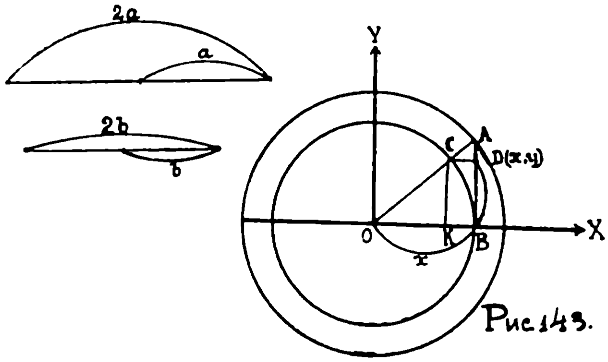


Рис.142ᵇ

§ 69. Будування еліпси.

Геометричних способів будування еліпси існує декілька. Ми тут зупинимося на одному з них.



Припустім, що нам треба збудувати еліпсу, що має осі: $2a > 2b$. Для цього переполовинюємо відтинки $2a$ і $2b$ і помітивши довільно центр O (рис. 143), очеркуємо два спільноцентрові кола лучів $r_1 = a$ і $r_2 = b$. Через центр O поведемо два прямових поперечники й один з них приймемо за вісь X — *ів*, а другий — за вісь Y — *ів*. Коли на зовнішньому колі візьмемо довільну точку A і поведемо до неї луч OA, а з перехрестя C цього луча з внутрішнім колом поведемо рівнобіжну до осі X — *ів*, то точка D, стику цієї рівнобіжної з рядною точки A, буде точкою, що належить еліпсі.

Доведемо це: через точку C поведемо просту $CK \| AB$ і тоді матимемо відношення:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CK}.$$

Обчислімо величини OA, OC, AB і CK:

1) $OA = r_1 = a;$

2) $OC = r_2 = b;$

3) коли означимо невідомі значники точки D через x та y, то:

$AB^2 = OA^2 - OB^2 = a^2 - x^2$, або: $AB = \sqrt{a^2 - x^2}$;

4) $CK = BD = y.$

Вставивши знайдені вартости у наше відношення, одержимо:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{y}, \text{ або:}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{y^2},$$

звідки:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ми одержали рівнання еліпси, а це свідчить, що значники точки D задовольняють рівнання еліпси, себ-то точка D лежить на її обводі.

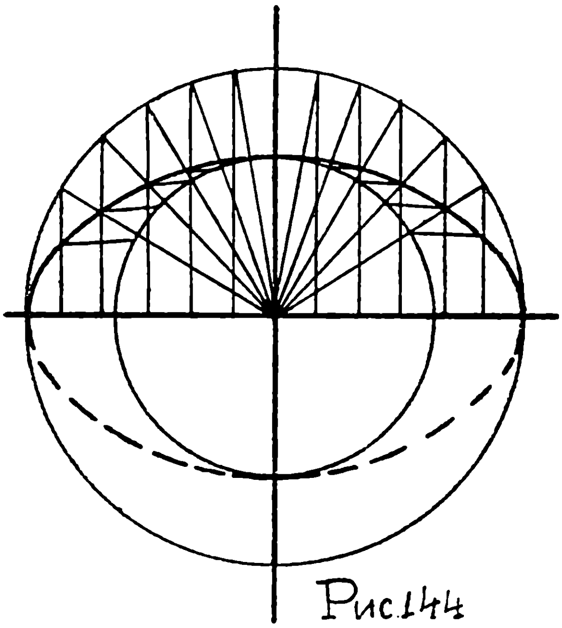


Рис.144

Отже, коли з центра кола O (рис. 144) поведемо як можна більш лучів і для кожного з них таким самим способом, як ми шукали точку D, знайдемо відповідні точки еліпси, то крива, що сполучатиме ці точки, буде обводом цієї еліпси.

§ 70. Будування гиперболи.

Припустім, що нам треба збудувати гиперболу, що має осі: $2a > 2b$. Візьмемо які небудь осі координат XOY і на осі X—ів від початку O відкладемо відтинки $OA = a$ і $OB = b$. У точках A і B поставимо прямі AP і BQ. Коли через початок осей повести довільну просту OK, то відтинок її OK, від початку осей до перехрестя з прямом AK, буде відтинковою якоїсь точки нашої гиперболи, а відтинок BL, пряму, поставленого в кінці відтинка b до перехрестя з довільною простою OK, буде рядною тієї ж точки гиперболи.

Тому, коли ми лучем OK очеркнем дугу, то точка N перехрестя дуги з віссю X — *ів* буде метом точки гиперболи на вісь.

Отже, поставивши прям NM, ми знайдемо точку M гиперболи. А саме, коли поведемо через точку L рівнобіжну до осі X — *ів*, то перехрестя її з прямом MN і буде точкою M гиперболи.

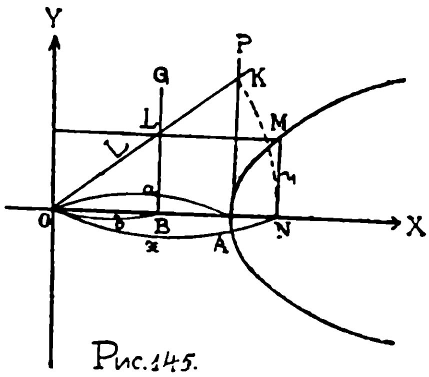


Рис. 145.

Доведемо це:

$$\text{З } \triangle\text{-ів: } OKA \text{ і } OLB \text{ маємо: } \frac{AK}{BL} = \frac{OA}{OB}$$

Означивши відтинок OK через x, а відтинок BL через y, матимемо:

$$AK = \sqrt{OK^2 - AO^2} = \sqrt{x^2 - a^2};\ AO = a;\ OB = b,$$

тому:

$$\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{y} = \frac{a}{b} \text{ або, } \frac{x^2 - a^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2};$$

звідци

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Це є рівнання гиперболи, а тому ON і MN мусять по своїй величині бути значниками точки цієї гиперболи, бо вони задовольняють її рівнання.

На підставі наших міркувань будуємо гиперболу так: взявши осі координат і відклавши на осі X — *ів* від O півосі a і b, ставимо в кінцях цих відтинків прями й через початок координат ведемо як мога більше простих.

Таким чином, одержимо цілий шерег вартостей для значників точок гиперболи і зазначеним способом відкладаємо їх на осі X — *ів* та на відповідних рядних. Крива, що сполучатиме кінці цих рядних і буде гиперболою. (Рис. 146).

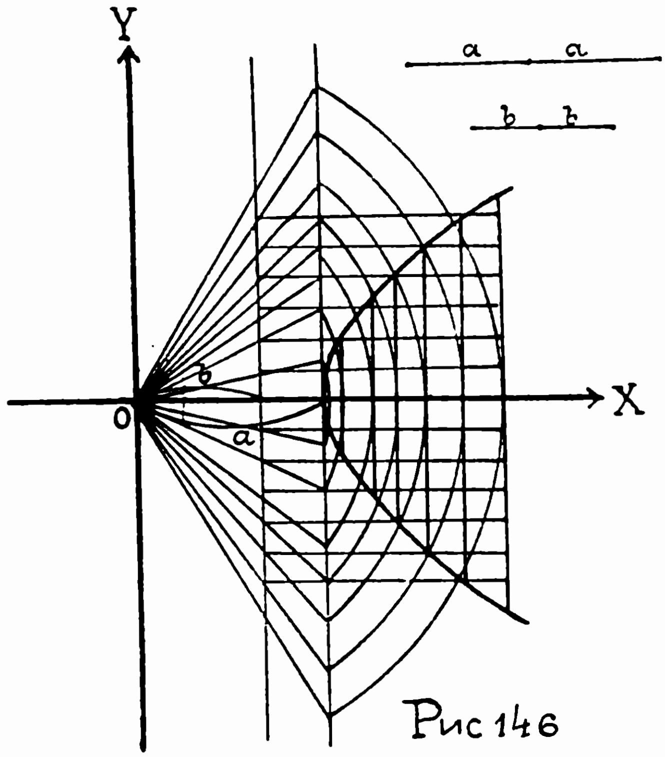


Рис 146

Вправи.

Ч — 257. *Еліпса має 5 змінників: a, b, e, ε і p. Як через два з них обчислити решту?*

Ч — 258. *Написати рівняння:*

I) еліпси, коли: 1) $a = 12$; $b = 8$; 2) $e = 3$, $a = 5$, $p = 12$.

II) гиперболи, коли: 1) $e = 2$, $a = \sqrt{3}$; 2) $\varepsilon = 5/4$; $b = 3$.

Ч — 259. *Написати осьове рівняння еліпси, що має: 1) велику вісь $2a = 16$ і переходить через точку $A(3,2)$; 2) змінник $p = 4/3$ і переходить через точку $(0,2)$.*

Ч — 260. *Написати також осеве рівняння еліпси, коли вона переходить через точки 1) $(4,8)$ і $(-2,4)$; 2) $(4,2)$ і $(2,3)$.*

Ч — 261. *Написати осьове рівняння гиперболи, коли вона переходить через точки: 1) $(3,2)$ і $(4,3)$; 2) $(1,2)$ і $(4,3)$.*

Ч — 262. *В якому положенню що до:*

1) еліпси: $16x^2 + 9y^2 = 144$ точки: 1) $(5,3)$ і 2) $(-10,2)$;

2) гиперболи: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16}$ — точки: *1) $(2,3)$ і $(12,4)$.*

Ч — 263. *Рівнання гиперболи:* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$; *знайти, для яких точок її кут між лучами-векторами є* 90^0?

Ч — 264. *Для яких точок еліпси відтинкова в n разів більша від рядної (розвязати в загальному вигляді).*

В окремому випадку, коли відтинкова вдвічі більша за рядну і рівнання еліпси: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Ч — 265. *Перетворити у вершкові такі рівнання:*

1) a) $25x^2 + 36y = 900$, 2) $x^2 + y^2 = 4$, 3) $16x^2 - 25y^2 = 400$, 4) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Ч — 266. *Накреслити криві:*

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, 2) $x^2 + 4y^2 = 4$, 3) $16x^2 + 9y^2 = 144$,

4) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, 5) $x^2 - 4y^2 = 4$, 6) $x^2 - y^2 = 16$.

Ч — 267. *Написати рівнання лучів-векторів еліпси й довести, в яких точках кривої вони взаємно прямові?*

Ч — 268. *Обчислити довжину лучів-векторів:*

1) *еліпси:* $9x^2 + 16y = 576$, *поведених через точку* $(4, 3\sqrt{3})$;

2) *гиперболи:* $x^2 - 4y^2 = 4$, *поведених через точку* $(4, \sqrt{3})$.

§ 71. Загальне рівнання еліпси й гиперболи.

Коли еліпса або гипербола мають центр в якій небудь довільній точці $M(m, n)$, а головні осі рівнобіжні до осі X—ів, то рівнання, що визначають ці криві, носять назву загальних рівнань еліпси або гиперболи.

Маючи каноничні рівнання еліпси та гиперболи:

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

можемо скласти загальні рівнання цих кривих шляхом звичайного рівнобіжного перенесення осей у точку O, що для неї центр кривих M буде мати значники m і n.

В цьому разі взори перетворення координат будуть:

$$x_1 = x - m; \quad y_1 = y - n.$$

Вставивши вартости x_1 та y_1 у наше рівнання, матимемо такий вигляд загальних рівнань еліпси й гиперболи: (рис. 147)

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} \pm \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots (119).$$

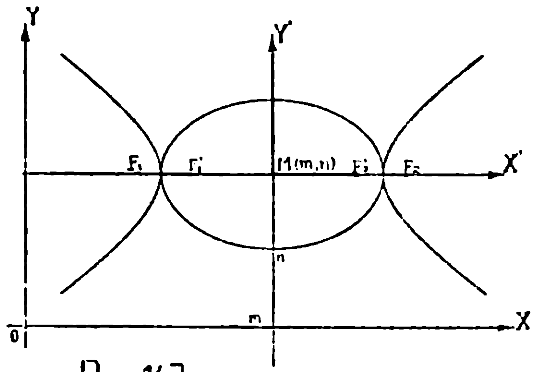


Рис 147.

Примітка. Коли за головну вісь кривої взяти вісь Y—ів, або просту рівнобіжну до неї, то легко довести, що рівнання еліпси або гиперболи матимуть вигляд: (рис. 148 a, b):

$$\left.\begin{aligned} &1)\ b^2y^2 \pm a^2x^2 = a^2b^2 \\ &2)\ \frac{y^2}{a^2} \pm \frac{x^2}{b^2} = 1 \\ &3)\ \frac{(y-n)^2}{a^2} \pm \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (120)$$

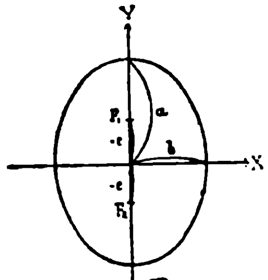


Рис.148a

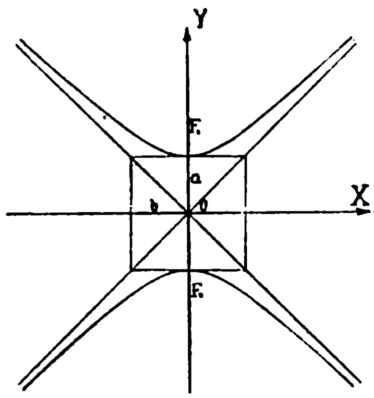


Рис.148b.

Це, яко задачу, пропонуєтьси довести самим читачам. (Довід можна зробити чи безпосереднім складанням рівнання, чи оберненням осей на 90°).

§ 72. Алгебричне рівнання еліпси й гиперболи.

I. Зведемо загальне рівнання еліпси:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

до алгебричної форми:

$$b^2x^2-2b^2mx+b^2m^2+a^2y^2-2a^2ny+a^2n^2=a^2b^2$$

або:

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2mx-2a^2ny+(b^2m^2+a^2n^2-a^2b^2)=0.$$

Для зведення рівнання до більш загального вигляду, помножимо всі члени його на довільного чинника κ^2, після чого матимемо:

$$b^2\kappa^2x+a^2\kappa^2y-2\kappa^2b^2mx-2\kappa^2a^2ny+$$
$$\kappa^2(b^2m^2+a^2n^2-a^2b^2)=0 \;\ldots\ldots\; (1)$$

Те саме одержимо, коли загальне рівнання гиперболи: $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}$ зведемо до алгебричної форми:

$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2my+2a^2ny+(b^2m^2-a^2n^2-a^2b^2)=0,$$

або:

$$b^2\kappa^2x-a^2\kappa^2y^2-2b^2\kappa^2mx+2a^2\kappa^2ny+$$
$$\kappa^2(b^2m^2-a^2n^2-a^2b^2)=0 \;\ldots\ldots\; (2)$$

де κ^2 — також довільний додатній чинник.

Візьмемо загальне алгебричне рівнання другого ступіня $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ і порівнаемо його з рівнаннями *(1)* і *(2)*.

Ми бачимо, що:

1) і в рівнанню *(1)* і в рівнанню *(2)* нема членів, що містять здобуток невідомих, себ-то сочинник $C=0$;

2) рівнання *(1)* і *(2)* відріжняються від алгебричного рівнання кола тим, що в них сочинники при невідомих у другому ступіню ріжні $A \neq B \neq 0$;

і 3) рівнання *(1)* і *(2)* відріжняються між собою тим, що знаки сочинників при квадратах невідомих в 1-му рівнанні однакові $\left(A \gtrless 0,\ B \gtrless 0\right)$, а у рівнанні *(2)* — ріжні $\left(A \gtrless 0.\ B \lessgtr 0\right)$.

Таким чином, щоб алгебричне рівнання другого ступіня було рівнанням еліпси або гиперболи, треба: 1) щоб сочинник при здобуткові невідомих $C = O$ і 2) щоб сочинники при квадратах невідомих були нерівні між собою.

Коли ці сочинники при квадратах невідомих одного знаку, то рівнання визначає еліпсу, коли вони ріжного знаку, то — гиперболу.

Доведемо, що ця умова є її вистарчальною, себ-то — доведемо, що кожне рівнання другого ступіня з двома невідомими, що задовольняє поставлені умови, визначає неодмінно одну з цих даних кривих (еліпсу, або гиперболу).

Візьмемо алгебричне рівнання:

$$Ax^2 \pm By^2 + Dx + Ey + F = O$$

і порівнаємо з рівнаннями *(1)* і *(2)*

Ми бачимо, що:

$$A = k^2 b^2;\ \pm B = \pm k^2 a^2; D = -2b^2 k^2 m; E = \mp 2a^2 k^2 n$$

$$\text{і} \quad F = k^2 (b^2 m^2 \pm a^2 n^2 - a^2 b^2).$$

Коли з цих рівнань зможемо визначити реальні вартости значників центра m і n, а також вартости півосей a і b, то дане алгебричне рівнання буде завжди визначати або еліпсу, або гиперболу.

$$D = -2Am, \text{ звідци: } \underline{m = -\frac{D}{2A}};$$

$$E = \pm(\mp 2Bn); E = -2Bn, \text{ звідци: } \underline{n = -\frac{E}{2B}}$$

(і для еліпси і для гиперболи).

Визначаємо півосі a і b:

$$\frac{a^2}{b^2} = \pm \frac{B}{A};$$

$$F = k^2 b^2 \left(m^2 \pm \frac{a^2}{b^2} n^2 - a^2\right); \ F = A\left[\frac{D^2}{4A^2} \pm \left(\pm \frac{B}{A} \cdot \frac{E^2}{4B^2}\right) - a^2\right] =$$

$$= A\left(\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4AB} - a^2\right); \quad \text{отже:} \quad \frac{F}{A} = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4AB} - a^2,$$

звідци: $$a^2 = \frac{BD^2 + AE^2 - 4ABF}{4A^2B}$$

анологично:

$$b^2 = \frac{BD^2 + AE^2 - 4ABF}{4AB^2}$$

отже:

$$a = \sqrt{\frac{BD^2 + AE^2 - 4ABF}{4A^2B}};\quad b = \sqrt{\frac{BD^2 + AE^2 - 4ABF}{4AB^2}}$$

Таким чином, переконуємося, що завжди можна визначити через сочинники даного алгебричного рівняння як значники центра, так і осі кривих.

А тому можемо твердити, що кожне алгебричне рівнання другого ступіня з двома невідомими, що підлягає доведеним умовам, завжди визначає або еліпсу, або гиперболу.

§ 73. Механичний спосіб перетворення алгебричного рівнання еліпси, або гиперболи в загальну форму.

Пояснимо цей спосіб на прикладі:

Дано рівнання: $\underline{25x^2} + 16y^2 - \underline{18x} - 14y + 5 = 0.$

1) У членах, що містять окремо x, або y виносимо сочинника при квадраті невідомого за дужки й у дужках доповнюємо многочлена до повного квадрату:

$$25\left(x^2 - \frac{18}{25}x\right) + 16\left(y^2 - \frac{14}{16}y\right) = -5;$$

$$25\left(x^2 - \frac{18}{25}x + \frac{81}{625} - \frac{81}{625}\right) + 16\left(y^2 - \frac{14}{16}y + \frac{49}{256} - \frac{49}{256}\right) = -5,$$

Звідці:

$$25\left(x - \frac{9}{25}\right)^2 - \frac{81.25}{625} + 16\left(y - \frac{7}{16}\right)^2 - \frac{49.16}{256} = -5$$

або:

$$25\left(x - \frac{9}{25}\right)^2 + 16\left(y - \frac{7}{16}\right)^2 = -5 + \frac{81}{25} + \frac{49}{16} = \frac{521}{400}.$$

2) Поділемо всі члени на вільного члена:

$$\frac{10000}{521}\left(x-\frac{9}{25}\right)^2+\frac{6400}{521}\left(4-\frac{7}{16}\right)^2=1.$$

3) Переносимо сочинники членів до знаменателя:

$$\frac{\left(x-\frac{9}{25}\right)^2}{\frac{521}{10000}}+\frac{\left(y-\frac{7}{16}\right)}{\frac{521}{6400}}=1$$

Це є рівнання елипси з центром $\left(\frac{9}{25}, \frac{7}{16}\right)$ і піввісями:

$$a=\frac{\sqrt{521}}{100};\quad b=\frac{\sqrt{521}}{80}.$$

2-й приклад: Рівнання: $9x^2-49y^2+72x+98y-346=0$;

$$9(x^2+8x+16)-49(y^2-2y+1)=346+9.16-49;$$

$$9(x+4)^2-49(y-1)^2=441.$$

Ділимо це рівнання на вільний член і маємо:

$$\frac{(x+4)^2}{49}-\frac{(y-1)^2}{9}=1.$$

Це рівнання гиперболи з центром $(-4, 1)$ і піввісями $a=7, b=3$.

§ 74. Положення простої що-до еліпси або гиперболи.

Припустім, що нам дано еліпсу або гиперболу, що визначаються рівнаннями:

$$b^2x^2 \pm a^2y^2=a^2b^2 \quad (1)$$

і просту, визначену рівнанням $y=mx+n$ *(2)*.

Щоб визначити спільні точки цих кривих з даною простою, треба розвязати відповідні системи рівнань. Вставивши з рівнання *(2)* вартість y у рівнання *(1)* і розвязавши відповідні квадратові рівнання, одержимо:

$$x_{1,2}=\frac{-a^2mn \pm ab\sqrt{b^2 \pm (a^2m^2-n^2)}}{a^2m^2 \pm b^2},$$

а $y_{1,2} = m.x_{1,2} + n$ (де знак $\pm$ під корінем і у знаменателі вживається так: ,, + '' для еліпси і ,, — '' для гиперболи)

Розглядаючи виразник: $D = b^2 \pm (a^2 m^2 - n^2)$, бачимо, що: 1) проста є січною кривої, коли $D > O$ (x, а разом і y мають по 2 вартості) 2) проста є дотичною до кривої, коли $D = O$ (одна вартість x і y) і, нарешті, 3) проста не має спільних точок з кривою, коли $D < O$.

Покажемо це геометрично:

Ми знаємо, що $m = tg\, a$, тому: $D = b^2 \pm (a^2 tg^2 a - n^2) =$

$$= \frac{b^2 cs^2 a \pm (a^2 sn^2 a - n^2 cs^2 a)}{cs^2 a} \gtreqless O.$$

Звідці: $$b^2 cs^2 a \pm (a^2 sn^2 a - n^2 cs^2 a) \gtreqless O,$$

але $e^2 = a \pm b^2$ (,, — '' для еліпси, ,, + '' для гиперболи), а тому $b^2 = \pm (a^2 - e^2)$. Через те: $\pm (a^2 - e^2) cs^2 a \pm a^2 sn^2 a \pm$ $\pm n^2 cs^2 a \gtreqless O$, або: $\pm (a^2 - e^2) cs^2 a \pm a^2 sn^2 a \gtreqless \pm n^2 cs^2 a$.

Розгляньмо ці нерівности окремо:

1) для еліпси:

$$(a^2 - e^2) cs^2 a + a^2 sn^2 a \gtreqless n^2 cs^2 a \ldots (a)$$

2) для гиперболи:

$$(a^2 - e^2) cs^2 a + a^2 sn^2 a \lesseqgtr n^2 cs^2 a \ldots (b)$$

З нерівности (a) одержимо:

$$a^2 cs^2 a - e^2 cs^2 a + a^2 sn^2 a \gtreqless n^2 cs^2 a,$$

або: $$a^2 (cs^2 a + sn^2 a) \gtreqless (n^2 + e^2) cs^2 a.$$

А звідци: $$a^2 \gtreqless (n^2 + e^2) cs^2 a \ldots\ldots (c).$$

Так само з нерівности (b) одержимо:

$$a^2 \lesseqgtr (n^2 + e^2) cs^2 a \ldots (d)$$

Щоб зінтерпретувати взори (c) і (d) геометрично, накреслимо еліпсу й гиперболу та очеркнемо на їх головних осях, яко на поперечниках, кола лучем a. Ці кола будемо звати *прикметними* колами даної кривої.

Обчислимо величину: $(e^2 + n^2) cs^2 a$.

З $\triangle\, OBF_2$, (Рис. 149-а), маємо: $OB = e\, cs\, a = A_1 M_1$

З $\triangle\, A_1 OK$ маємо: $OA_1 = n\, cs\, a$

А з $\triangle A_1OM$ маємо: $OM_1^2 = A_1M_1^2 + OA_1^2$

або $OM_1^2 = e^2 cs^2 a + n^2 cs^2 a = (e^2 + n^2) cs^2 a.$

Таким чином

$$a^2 \gtreqless OM_1^2, \text{ або } OM_1 \lesseqgtr a$$

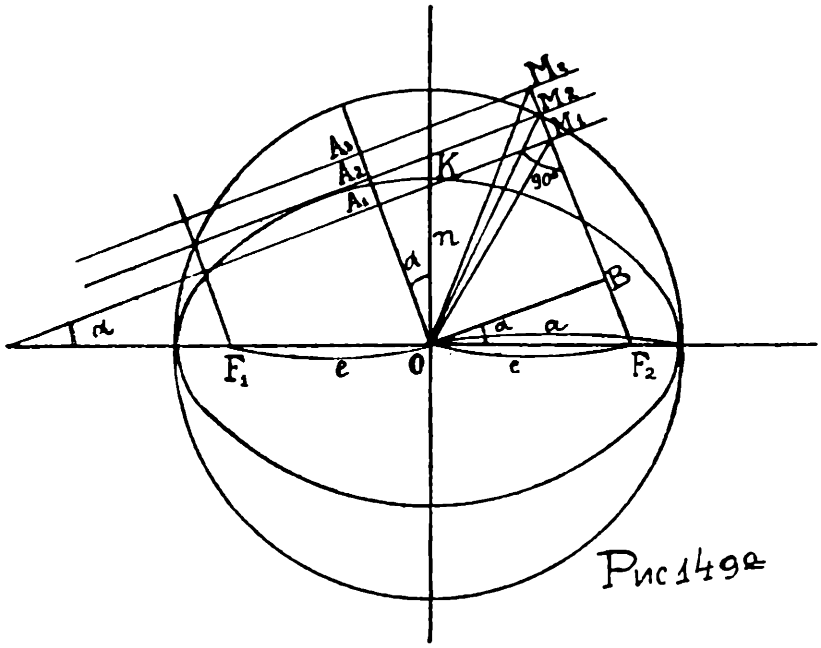


Рис 149а

Але OM_1 — є віддалення точки M_1 від центра кола, а величина „a“ — є луч тогож прикметного кола.

Тому, коли:

1) $OM_1 < a$ — точка M_1 лежить на крузі,

2) $OM_1 = a$ — точка M_1 (на рис. — M_2) лежить на обводі кола,

3) $OM_1 > a$ — точка M_1 (на рис. — M_3) лежить по-за колом.

Звідци згадана проста:

1) є січною еліпси, коли мети на неї вогнищ кривої лежать на полі прикметного кола;

2) є дотичною до еліпси, коли мети на неї вогнищ лежать на обводі прикметного кола.

і 3) є мимобіжною еліпси, коли мети на неї вогнищ лежать по-за прикметним колом.

Прикладемо аналогичні міркування й до гиперболи (рис. 149-b).

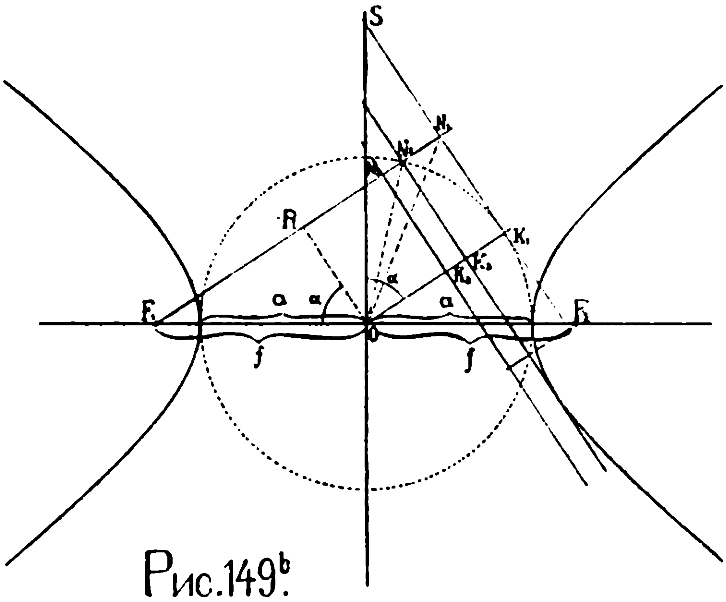


Рис.149^b.

1) З $\triangle F_1RO$ маємо: $OR = ecs\,a = K_1N_1$

2) З $\triangle K_1SO$ маємо $\sphericalangle K_1OS = a$; $OS = n$, тому $OK_1 = OScs\,a = ncs\,a$.

Отже з $\triangle K_1N_1O$ маємо: $ON_1^2 = K_1N_1^2 + OK_1^2$, або $ON_1^2 = e^2cs^2\,a + n^2cs^2\,a = (e^2+n^2)\,cs^2\,a$.

Таким чином $a^2 \lesseqgtr ON_1^2$, або $ON_1 \gtreqless a$

Ця нерівність показує, що для трьох ріжних положень даної простої що-до гиперболи точка N_1 лежить або поза прикметним колом, або на обводі його, або на крузі його, а тому дана проста:

1) є **січною гиперболи, коли мети на неї вогнищ кривої лежать по-за прикметним колом гиперболи;**

2) є **дотичною гиперболи, коли мети на неї вогнищ лежать на обводі прикметного кола й**

3) є **мимобіжною гиперболи, коли мети на неї вогнищ лежать на крузі прикметного кола.**

Висновок. Прями, спущені з вогнищ еліпси або гиперболи на їх дотичну, завжди переходять через перехрестя цієї дотичної з прикметним колом кривої.

Розгляньмо тепер випадок, коли в знаменателі вартостей значників x_1, y_1 (точки перехрестя даної простої з гиперболою) двочлен:

$$a^2 m^2 - b^2 = o \ldots\ldots (a)$$

З цього рівнання можна визначити кутовий змінник простої:

$$m = \pm \frac{b}{a}$$

Коли вставимо безпосередньо цю вартість m у визначення $x_{1,2}$, то одержимо неозначенність $\frac{0}{0}$. Щоб позбавитися від неї, треба помножити числителя й знаменателя дробу вартости

$$x_{1,2} = \frac{-a^2 mn \pm ab\sqrt{b^2 - a^2 m^2 + n^2}}{a^2 m^2 - b^2}$$

на чинник: $\quad -a^2 mn \mp ab\sqrt{b^2 - a^2 m^2 + n^2}$.

Звідци одержимо:

$$x_{1,2} = \frac{a^4 m^2 n^2 - a^2 b^4 + a^4 b^2 m^2 - a^2 b^2 n^2}{(a^2 m^2 - b^2)(-a^2 mn \mp ab\sqrt{b^2 - a^2 m^2 + n^2})}$$

Коли-ж згрупуємо члени рівности парами й винесемо спільних чинників за дужку, то одержимо (після скрочення на $a^2 m^2 - b^2$):

$$x_{1,2} = \frac{a(n^2 + b^2)}{-amn \mp \sqrt{b^2 - a^2m^2 + n^2}} = \frac{a(n^2 + b^2)}{-amn \mp bn},$$

або: $\quad x_1 = \frac{a(n^2 + b^2)}{-n(am + b)}; \quad x_2 = \frac{a(n^2 + b^2)}{-n(am - b)}$

Вставивши сюди вартість $m = \pm \frac{b}{a}$, матимемо:

$$x_1 = -\frac{a(n^2 + b^2)}{2nb} \text{ і } x_2 = -\frac{a(n^2 + b^2)}{o} = \infty$$

далі:

$$y_1 = mx_1 + n = \frac{b}{a}\left(-\frac{a(n^2 + b^2)}{2nb}\right) + n = \frac{n^2 - b^2}{2n};$$

$$y_2 = mx_2 + n = m.\infty + n = \infty.$$

Випадок $a^2mn - b^2 = O$ характеризує прості, що мають дві точки перехрестя з гиперболою, а саме одну,

$$\left(-\frac{a(n^2+b^2)}{2nb}, \frac{n^2-b^2}{2n}\right)$$

а другу на безмежності. Ці прості рівнобіжні між собою і мають кут спаду $\alpha = arctg \pm \frac{b}{a}$. Та з цих простих, що переходить через початок координат (має $n = O$) зветься **асимптотою гиперболи.**

Обчислимо точки перехрестя асимптоти з гиперболою. Для цього у вартости x_1 і y_1 вставляємо $n = o$ і маємо:

$$x_1 = \frac{-a(o+b^2)}{2.o.b.} = \infty\ ;\ y_1 = \frac{o-b^2}{2.o.} = \infty;$$

А вартости x_2 та y_2, як і раніш: $x_2 = \infty$; $y_2 = \infty$. Асимптот дві, перша має кутовий змінник $m = +\frac{b}{a}$, а друга: $m = -\frac{b}{a}$. Асимптоти перехрещуються з гиперболою у двох точках на безмежності (рис. 150).

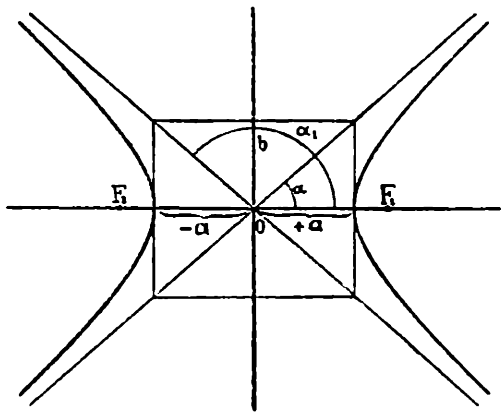


Рис 150.

§ 75. Дотична до еліпси та гиперболи.

Візьмім на еліпси, або на гиперболі дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ і поведемо через них січну (Рис. 151 a i b).

Рівнання такої простої, що переходить черев дві загадані точки, буде:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \; \ldots \; (a)$$

Але це є рівнанням кожної простої, що переходить черев дві довільні точки, а щоб мати рівнання саме січної даних кривих, треба кутовий змінник $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ перетворити так, щоб він звязував змінники (параметри) даних кривих.

Хай рівнанням даних еліпси або гиперболи буде:

$$b^2 x^2 \pm a^2 y^2 = a^2 b^2 \ldots (б),$$

(де « + » — для еліпси а « — » — для гиперболи).

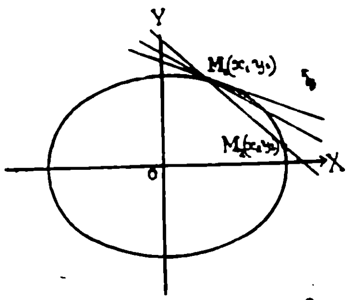


Рис. 151a

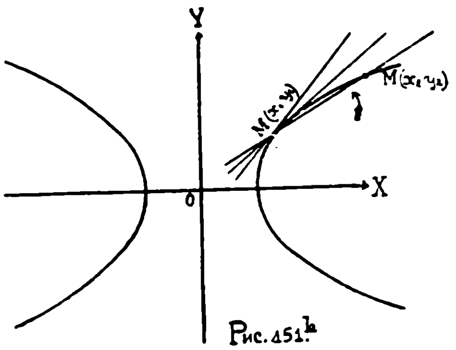


Рис. 151b

Коли проста $M_1 M_2$, що визначається рівнанням (a), є січною одніеї з цих кривих, то значники точок M_1 і M_2 конче обертатимуть рівнання (b) у тотожність, а тому матимемо:

$$\left.\begin{aligned} b^2 x_2^2 \pm a^2 y_2^2 &= a^2 b^2 \\ b^2 x_1^2 \pm a^2 y_1^2 &= a^2 b^2 \end{aligned}\right\} \ldots (в).$$

Відлічуємо ці рівности почленно одна з одної й одержуємо: $b^2 (x_2^2 - x_1^2) \pm a^2 (y_2^2 - y_1^2) = 0$, або

$$\mp a^2 (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = b^2 (x_2 + x_1)(x_2 - x_1).$$

Поділивши обидві частині рівности на:

$$\mp a^2 (x_2 - x_1)(y_2 + y_1)$$

одержуємо: $$\frac{y^2 - y_1}{x_2 - x_1} = \mp \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} \ldots (г)$$

де „—" відповідає еліпси, а „+" — гиперболі.

Тепер можемо одержану вартість кутового змінника січної $(г)$ вставити у рівнання (a) і тоді матимемо рівнання самої січної:

$$y - y_1 = \mp \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} (x - x_1)$$

(де зі знаком „—“ буде січна до еліпси, а зі знаком „+“ — до гиперболи).

Коли обертати січну $M_1 M_2$ навколо точки M_1 так, щоб вона віддалювалася від центру кривої, то точка M_2 буде наближатися до точки M_1 і настане момент, коли точка M_2 зіллється з точкою M_1 й тоді січна стане дотичною до кривої. Але в цьому разі $x_2 = x_1$ а $y_2 = y_1$ і рівняння дотичної буде:

$$y - y_1 = \mp \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2x_1}{2y_1} (x - x_1)$$

або:

$$\mp a^2 y y_1 \pm a^2 y_1^2 = b^2 x x_1 - b^2 x_1^2$$

Звідци: $$b^2 x x_1 \pm a^2 y y_1 = b^2 x_1^2 \pm a^2 y_1^2.$$

Але з тотожностей *(в)* відомо, що $b^2 x_1^2 \pm a^2 y_1^2 = a^2 b^2$; а тому:

$$b^2 x x_1 \pm a^2 y y_1 = a^2 b^2.$$

Також, поділивши всі члени на $a^2 b^2$, одержуємо:

$$\frac{x x_1}{a^2} \pm \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Рівняння:

$$\left.\begin{aligned} b^2 x x_1 \pm a y y_1 = a^2 b^2 \\ \frac{x x_1}{a^2} \pm \frac{y y_1}{b^2} = 1 \end{aligned}\right\} \ldots \quad (121)$$

є рівняннями дотичних: 1) до елипси (+) і 2) до гиперболи (—).

Очевидно, що правило написання дотичних до еліпси та гиперболи е однакове з правилом написання дотичних до кола й параболи.

По аналогії напишемо рівнання дотичних до еліпси й гиперболи, що визначаються иншими рівнаннями:

1) Для загального рівнання:

$$\frac{(x - m)(x_1 - m)}{a^2} \pm \frac{(y - n)(y_1 - n)}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (122)$$

2) Для вершкового рівнання:

$$y y_1 = p(x + x_1) \mp \frac{p}{a} x x_1 \quad \ldots\ldots \quad (123).$$

Рівнання дотичної до кожної кривої другого порядку, визначеної рівнанням:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots (\alpha)$$

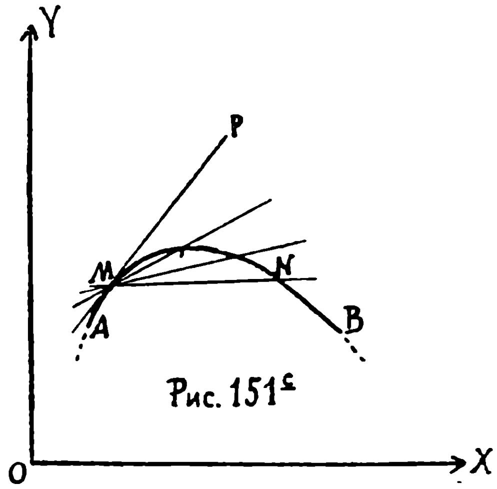


Рис. 151с

Припустім, що якась крива AB (рис. 151, с) визначається рівнанням (α). Візьмім на ній дві точки M і N і поведім через них січну.

Нам відомо, що рівнання кожної простої, що переходить через загадані дві точки $M(x_1, y_1)$ і $N(x_2, y_2)$, буде:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ldots\ldots (\beta)$$

Таке рівнання матиме кожна проста, що переходить через дві визначені точки, незалежно від того чи є вона січною якоїсь кривої, чи ні.

Щоб мати рівнання власне січної даної кривої ми мусимо перетворити кутовий її змінник $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ так, щоб він звязував сочинники рівнання даної кривої. Для цього ми беремо під увагу, що, коли проста MN є січною кривої, то точки M і N лежать на цій криві, а через те значники їх мусять обертати саме рівнання кривої у тожність а саме:

$$\left.\begin{aligned} Ax_2^2 + By_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0 \\ Ax_1^2 + By_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \end{aligned}\right\} (\gamma)$$

Відлічуючи з першої тотожности другу, матимемо:

$$A(x_2^2 - x_1^2) + B(y_2^2 - y_1^2) + D(x_2 - x_1) + E(y_2 - y_1) = 0$$

Перетворюючи ріжниці квадратів у здобутки сум на ріжниці й виносючи за дужки з відповідних членів чинники: $(x_2 - x_1)$ і $(y_2 - y_1)$, одержимо:

$$(x_2 - x_1)\,[A(x_2 + x_1) + D] = -(y_2 - y_1)\,[B(y_2 + y_1) + E].$$

А звідци, складаючи пропорцію, матимемо:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{A(x_2 + x_1) + D}{B(y_2 + y_1) + E}$$

Знайдену вартість кутового змінника $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ вставляємо у рівнання простої (β) і одержуємо рівнання потрібної січної а саме:

$$y - y_1 = -\frac{A(x_2 + x_1) + D}{B(y_2 + y_1) + E}(x - x_1) \ldots\ldots (\delta).$$

Коли тепер почнемо обертати січну MN навколо точки M так, щоб точка N наближалася до M, то наступить момент, коли точка N віллється в M (себ-то, стане: $x_2 = x_1$ і $y_2 = y_1$). Тоді січна MN зробиться дотичною MP до кривої.

Очевидно, що ми одержимо рівнання цієї дотичної, коли в рівнанню (δ), вважатимемо:

$$x_2 = x_1 \text{ і } y_2 = y_1.$$

Тоді:

$$y - y_1 = -\frac{2Ax_1 + D}{2By_1 + E}(x - x_1).$$

Спростимо й упорядкуємо це рівнання:

1) зводючи до спільного знаменателя, маємо:

$$2Byy_1 - 2By_1^2 + Ey - Ey_1 + 2Axx_1 - 2Ax_{12} + Dx - Dx_1 = 0,$$

або:

$$2Axx_1 + 2Byy_1 + Dx + Ey = 2Ax_1^2 + 2By_1^2 + Dx_1 + Ey_1;$$

2) додамо до обох частин рівнання многочлен:

$$Dx_1 + Ey_1 + 2F,$$

й тоді матимемо:

$$2Axx_1 + 2Byy_1 + D(x + x_1) + E(y + y_1) + 2F = 2(Ax_1^2 + By_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F)$$

Але на основі тотожностей (γ) многочлен в дужках є рівний з нулем, а тому, остаточно:

рівнання дотичної до кривої другого порядку (визначеної рівнанням $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$), має вигляд:

$$2Axx_1 + 2Byy_1 + D(x + x_1) + E(y + y_1) + 2F = 0,$$

або:

$$Axx_1 + Byy_1 + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0.$$

Як бачимо правило складання рівнання дотичної лишається теж саме, що й мали.

§ 76. Властивости дотичної до еліпси.

Визначення:

1) Лучі-вектори еліпси, прямові до дотичної, своїм продовженням переходять через перехрестя цієї дотичної з прикметним колом.

2) Дотична до еліпси переполовинює зовнішній кут поміж лучами-векторами, поведеними через точку дотику.

3) Дотична до еліпси творить з лучами - векторами, поведеними через точку дотику, кути, рівні між собою.

4) Луч - вектор еліпси, прямовий до дотичної, відтинає від другого луча вектора, поведеного через точку дотику, відтинок, рівний з великою віссю $(2a)$.

Коло, очеркнуте цим відтинком $(2a)$ з вогнища, яко центра, має назву **напрямного.**

Перша властивість дотичної уже доведена нами при розгляді взаємного положення простої та еліпси. Тепер доведемо решту властивостей, а саме: кожна проста, що переходить через точку перехрестя на еліпсі лучів-векторів і переполовинює зовнішній між ними кут, є конче дотичною еліпси.

Припустим, що (рис. 152) через точку M перехрестя двох лучів-векторів $F_1 M$ і $F_2 M$ поведено просту NK, що переполовинює $\sphericalangle\ LMF_2 = 2\alpha$, зовнішній між даними лучами.

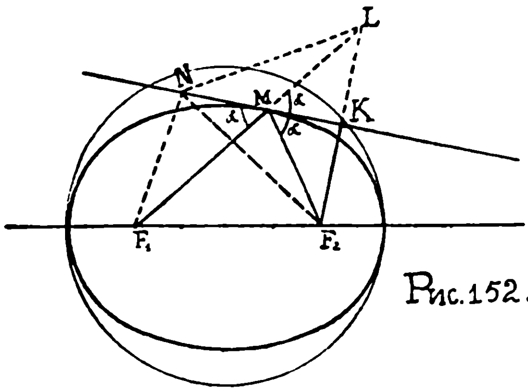


Рис. 152.

На продовженню луча-вектора F_1M відкладемо відтинок $ML = MF_2$. Тоді утворюється $\triangle\ F_2ML$ рівнораменний, а тому проста MK, що є його симетральною, є одночасно й осередньою (бо переполовинює LF_2, себ-то $F_2K = KL$) й висотою трикутника (себ-то $MK \perp F_2L$). Таким чином NK є симетральною відтинку F_2L. Доведемо, що проста NK є дотичною еліпси, себ-то крім точки M вона не має инших точок, спільних з еліпсою.

Візьмім яку небудь довільну точку N на простій NK. Через те, що проста MK є симетральною відтинку LF_2, то похилі: $NF_2 = NL$. Розглядаючи $\triangle\ F_1NL_1$ ми бачимо, що $F_1N + NL > F_1L$. Але $NL = NF_2$; $F_1L = F_1M + ML = F_1M + MF_2 = 2a$, а тому:

$$F_1N + F_2N > 2a.$$

Отже сума віддалень точки N від вогнищ F_1 і F_2 більша за $2a$, а тому точка N лежить по-за еліпсою. Аналогичним способом можна довести, що кожна точка простої NK (крім точки M) лежить по-за еліпсою, а тому NK є дотична еліпси.

Таким чином:

дотична до еліпси в якійсь його точці переполовинює зовнішній кут між лучами-векторами, поведеними через точку дотику.

1-й висновок. $\sphericalangle NMF_1 = \sphericalangle LMK$, яко вершкові, а тому маємо третю властивость дотичної еліпси:

дотична еліпси творить рівні кути з лучами-векторами, поведеними через точку дотику.

2-й висновок. Ми вже довели, що відтинок $F_1L = 2a$. Таким чином,

відтинок луча-вектора, поведеного через точку дотику до зустрічі з другим лучем-вектором, прямовим до дотичної, є рівний з великою віссю еліпси. Точка перехрестя цих векторів має назву зеркальної точки вогнища що-до даної дотичної.

§ 77. Властивости дотичної до гиперболи.

Визначення.

1) Лучі-вектори гиперболи, прямові до дотичної, переходять через перехрестя цієї дотичної з прикметним колом.

2) Дотична до гиперболи переполовинює внутрішній кут між лучами-векторами, поведеними через точку дотику.

3) Луч-вектор гиперболи, прямовий до дотичної, відтинає від другого луча-вектора, поведеного через точку дотику, відтинок рівний з основною віссю *(2a)*.

Перша властивість вже доведена нами при розгляді взаємного положення простої та гиперболи. Доведемо ще другу властивість цієї дотичної, а саме:

Кожна проста, поведена через точку перехрестя лучів-векторів на гиперболі є дотичною, коли переполовинює внутрішній кут між ними.

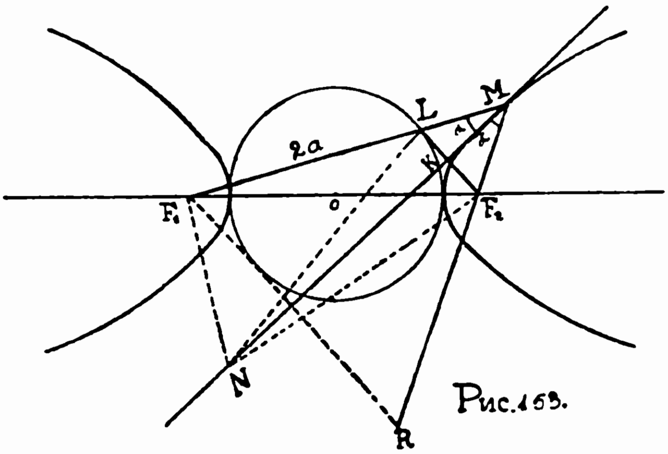


Рис. 153.

Ведемо в точку дотику лучі-вектори: F_1M і F_2M (рис. 153) і від точки M відкладаємо відтинок $ML = MF_2$. Одержуємо рівнораменний $\triangle LMF_2$, де проста MK є симетральною $\sphericalangle LMF_2$ й одночасно симетральною LF_2 основи $\triangle$-а.

Дальший довід що-до того, що проста MN не має инших спільних точок з гиперболою, крім M, є аналогічний з попереднім доводом для дотичної еліпси, а тому ми його не подаємо.

Відтинок $LM = MF_2 = r_2$; тому $LF_1 = r_1 - r_2 = 2a$, що стверджує третю властивість дотичної.

Точка L **зветься зеркальною точкою вогнища що-до дотичної гиперболи.**

Коло, очеркнуте з вогнища F_1, **яко центра, відтинком** $F_1L = 2a$ **(або з вогнища** F_2 **відтинком** $F_2R = F_1L$**) зветься напрямним колом гиперболи.**

§ 78. Рівнання прямової (нормалі) еліпси або гиперболи.

Рівнання дотичної до еліпси й гиперболи є:

$$b^2xx_1 \pm a^2yy_1 = a^2b^2.$$

Визначаючи з нього y, маємо:

$$y = \mp \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x \pm \frac{b^2}{y_1}.$$

З другого боку, рівнання простої, що переходить через точку M, буде: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Щоб ця проста була прямовою кривої, треба дібрати вартість змінника m так, щоб сповнювалася умова прямовости цієї простої з даною дотичною, себ-то в даному випадку мусить бути:

$$m = -\left(\mp \frac{a^2y_1}{b^2x_1}\right) = \pm \frac{a^2y_1}{b^2x_1}$$

Огже рівнання прямової до еліпси, або до гиперболи буде:

$$y - y_1 = \pm \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1) \ldots\ldots (124)$$

Зводячи до спільного знаменателя і роблячи зведення схожих членів, одержимо: $b^2yx_1 \mp a^2xy_1 = (b^2 \mp a^2)x_1y_1$.

Але для еліпси: $a^2 - b^2 = e^2$, а для гиперболи $a^2 + b^2 = e^2$, тому $b^2yx_1 \mp a^2xy_1 = \mp e^2x_1y_1$, або після поділу членів рівнання на вільного члена, матимемо:

$$\frac{a^2}{e^2}\frac{x}{x_1} \mp \frac{b^2}{e^2}\frac{y}{y_1} = 1 \ldots\ldots (125).$$

Вже з рогляду теорем про властивости дотичних легко довести, що:

1) прямова еліпси переполовинює внутрішній кут, замкнений лучами-векторами, поведеними через точку дотику;

2) прямова гиперболи переполовинює зовнішній кут, замкнений лучами-векторами, поведеними через точку дотику.

Примітка. Прямові еліпси й гиперболи переходять через їх центри лише тоді, коли точки дотику лежать у вершках кривих.

§ 79. Будування дотичних та прямових еліпси або гиперболи.

Будування дотичних, та прямових, поведених через яку небудь точку на еліпсі або на гиперболі, дуже просте, бо зводиться до звичайного геометричного будування симетральних зовнішніх та внутрішніх кутів між лучами - векторами, поведеними через точку дотику.

§ 80. Дотична до еліпси або до гиперболи, проведена з точки по-за кривою.

Для складення рівнання дотичної до еліпси або до гиперболи, поведеної до них з точки по-за кривою $M(x_0, y_0)$, скористуємося загальним способом, що його ми вже вживали для складення рівнань такого роду дотичних до кола й параболи. Будемо тимчасово вважати точку дотику такої дотичної до еліпси або до гиперболи за відому й значники її x_1 та y_1 за дані.

Тоді рівнання дотичної, що переходитиме через цю точку, як відомо, буде: $b^2 xx_1 \pm a^2 yy_1 = a^2 b^2$ (де верхній знак „+" відповідає дотичній до еліпси, а нижній „—" — дотичній до гиперболи).

Алеж ця сама дотична мусить, згідно з умовою, переходити й через дану точку $M(x_0, y_0)$, тому значники цієї точки M також задовольнятимуть рівнання дотичної, себ-то:

$$b^2 x_1 x_0 \pm a^2 y_1 y_0 = a^2 b^2.$$

Ця рівність, з огляду на те, що в дійсности x_1 та y_1 не дані, є рівнання з невідомими x_1, y_1.

Щоб визначити їх, нам треба розвязати систему:

$$\text{і } b^2 x_1 x_0 \pm a^2 y_1 y_0 = a^2 b^2$$
$$b^2 x_1^2 \pm a^2 y_1^2 = a^2 b^2$$

(бо точка $A(x_1, y_1)$ лежить і на обводі кривої).

Ця система рівнань другого й першого ступіня дасть нам два розвязки, а саме:

$$x_{1,2} = \frac{(\pm a^2 b^2 x_0) \pm a^2 y_0 \sqrt{a^2 y_0^2 \pm (b^2 x_0^2 - a^2 b^2)}}{a^2 y_0^2 \pm b^2 x_0^2};$$

$$y_{1,2} = \pm \frac{a^2 b^2 - b^2 (x_{1,2}) x_0}{a^2 y_0}$$

(де ми вставляємо по черзі вартости x_1та x_2)
[подвійні знаки $\pm$ читаються так: „+“ для точки дотику (x_1, y_1) на еліпсі, а „—“ для гіеї ж точки на гиперболі].

Розгляньмо виразник: $D = a^2 y_0^2 \pm (b^2 x_0^2 - a^2 b^2)$:

1) Коли $D > O$, то точок дотику дві [з точки $M (x_0, y_0)$ можна повести дві дотичних до еліпси, або до гиперболи].

2) Коли $D = O$, то точка дотику одна (одна дотична).

і 3) Коли $D < O$, то точок дотику немає (вартости x_1 та y_1 уявні).

Для геометричного уявлення цього, розглянемо попереду випадок $D = O$.

Тоді: $a^2 y_0^2 \pm (b^2 x_0^2 - a^2 b^2) = o$, або $\pm a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - - a^2 b^2 = o$, а звідци:

$$b^2 x_0^2 \pm a^2 y_0^2 = a^2 b^2$$

Порівнюючи одержану тотожність з рівнаннями $b^2 x^2 \pm \pm a^2 y^2 = a^2 b^2$ еліпси та гиперболи, ми бачимо, що при $D = O$ значники точки $M(x_0, y_0)$ задовольняють ці рівнання, себ-то точка M лежить на кривій (одна дотична).

При $D > O$ маємо: $b^2 x_0^2 \pm a^2 y_0^2 - a^2 b^2 > O$, а це показує, що точка M лежить по-за кривими (дві дотичні) і, нарешті, при $D < O$ маємо: $b^2 x_0^2 \pm a^2 y_0^2 - a^2 b^2 < o$, себ-то точка M лежить на полі кривої (жадної дотичної).

Для гиперболи розглянемо ще той випадок, коли знаменатель: $a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2 = O$ (себ-то значники точки $M(x_0, y_0)$ пропорційні з піввосями гиперболи: $\frac{y_0}{x_0} = \frac{b}{a} = m$. В цьому разі значники точок дотику $x_1 = \infty$ і $y_1 = \infty$, себ-то одна з дотичних до гиперболи, поведена з цієї точки, дотикається до кривої на безмежності (є її асимптотою).

Друга точка x_2, y_2 буде реальною й на обмеженому віддаленню від вершка.

Справді, помножаючи числителя її знаменателя вартости $x_{1,2} = \frac{a^2b^2x_0 \pm a^2y_0\sqrt{a^2y_0^2 - b^2x_0^2 + a^2b^2}}{a^2y_0^2 - b^2x_0^2}$ на двочлен: $-a^2b^2x_0 \mp a^2y_0\sqrt{a^2y_0^2 - b^2x_0^2 + a^2b^2}$, групуючи члени числителя й виносючи спільних чинників за дужки, одержимо:

$$x_{1,2} = -\frac{a^4(a^2y_0^2 - b^2x_0^2)(b^2 + y_0^2)}{(a^2y_0^2 - b^2x_0^2)\left[-a^2b^2x_0 \mp a^2y_0\sqrt{a^2y_0^2 - b^2x_0^2 + a^2b^2}\right]} =$$

$$= \frac{a^4(b^2 + y_0^2)}{a^2b^2x_0 \pm a^2y_0\sqrt{a^2y_0^2 - b^2x_0^2 + a^2b^2}}.$$ Скорочуючи на a^2 і замінюючи під корінем ріжницю: $a^2y_0^2 - b^2x_0^2$ через нуль ми, остаточно, матимемо: $x_{1,2} = \frac{a^2(b^2 + y_0^2)}{b^2x_0 \mp aby_0} = \frac{a^2(b^2 + y_0^2)}{b(bx_0 \mp ay_0)}$,

Отже, $x_1 = \frac{a^2(b^2 + y_0^2)}{b(bx_0 - ay_0)}$, що, при рівности $bx_0 = ay_0$, дає: $x_1 = \infty$ (а разом і $y_1 = \infty$) і $x_2 = \frac{a^2(b^2 + y_0^2)}{b(bx_0 + ay_0)}$, що при тій же рівности дає: $x_2 = \frac{a^2(b^2 + y_0^2)}{2aby_0} = \frac{a(b^2 + y_0^2)}{2by_0}$ число обмежне.

Колиб точка (x_0, y_0) була початком координат, то її вартість x_2 була ∞. Ми малиб справу з двома асимптотами.

Як вже раніш було для кола й параболи, так само й тепер для еліпси й гиперболи, проста:

$$b^2xx_0 \pm a^2yy_0 = a^2b^2$$

або:

$$\frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

є бігунковою (полярою) еліпси (+), або гиперболи (—) зглядно точки $M(x_0, y_0)$, яко її бігуна.

§ 81. Збудування дотичної до еліпси, або гиперболи, поведеної з точки по-за ними.

Для збудування дотичної, поведеної з точки A (по-за кривою) до еліпси або до гиперболи, скористуємося першою властивістю дотичних, поведених до згаданих кривих, а саме, що:

луч-вектор, поведений з якого небудь вогнища еліпси або гиперболи через перехрестя дотичної з прикметним колом, є прямом до дотичної.

Таким чином, коли припустимо, що AM (рис. 154a-b) є дотична до еліпси або до гиперболи, то луч - вектор F_2M буде прямом до дотичної AM, себ-то між цими простими завжди утворюється прямий кут AMF_2, що спирається на точки A і F_2. З геометрії нам відомо, що вершок такого прямого кута конче лежить на обводі кола збудованого на відтинку AF_2, яко на поперечникові. Але з властивости дотичної ясно, що

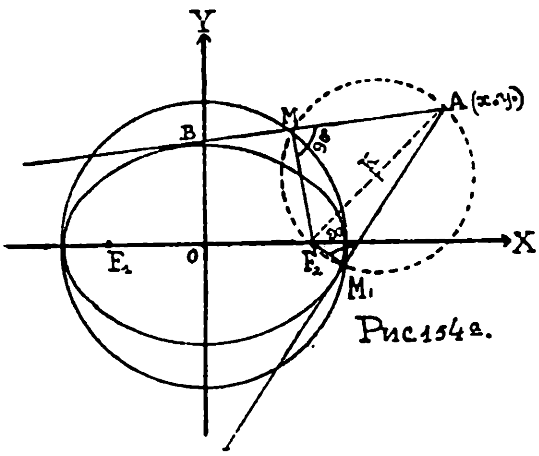


Рис 154а.

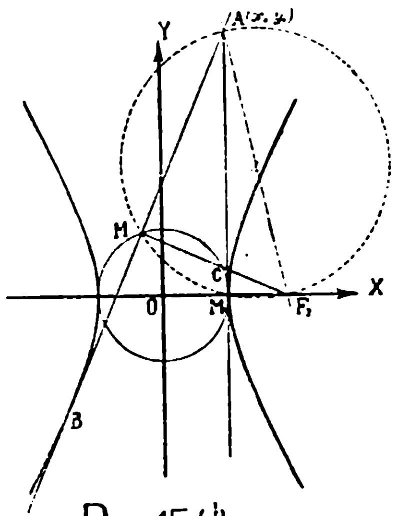


Рис154b

цей самий вершок прямого кута мусить лежати й на прикметному колі. Тому точка M (друга точка дотичної, крім A) буде лежати на перехресті цих двох кол: кола, збудованого на AF_2, яко на поперечникові, і прикметного кола.

Точок перехрестя двох кол є дві: M і M_1, тому одержимо й дві дотичних: AM і AM_1.

Ці пояснення дають такий спосіб будування дотичних до еліпси або до гиперболи, поведених до них з точки A по-за кривою: (рис. 152a і b).

1) Очеркуємо прикметні кола.

2) Сполучаємо одно з вогнищ кривої з точкою A й на цьому відтинку AF, яко на поперечнику, будуємо коло

і 3) а) через точку A і точку M, б) через точку A і точку M_1 (де M і M_1 є перехрестя збудованого кола з прикметним) ведемо прості. Ці прості й будуть дотичними до даних кривих.

Вправи.

Ч — 269. *Написати рівнання:*

I. Еліпси, коли:

1) велика вісь рівнобіжна до осі X — ів, центр її — $(3,5)$ *й півосі:* $a=7$, $b=4$.

2) велика вісь рівнобіжна до осі У — ів, центр еліпси — $(2,3)$, *а півосі* $a=5$, $b=2$.

II. Гиперболи, коли:

1) велика вісь рівнобіжна до осі X — ів, центр — $(2,-5)$, *а півосі* $a=4$, $b=6$;

2) велика вісь рівнобіжна до осі У — ів, центр — $(3,2)$, *а півосі* $a=6$, $b=4$.

Ч — 270. *Перетворити дані рівнання в загальні:*

1) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$; 2) $9x^2+16x+36+96y+36=0$; 3) $x^2-4y^2-6x-16y=11$; 4) $9x^2-16y^2-90x-64y+17=0$; 5) $4x^2-y^2+24x+32=0$; 6) $9x^2+4y^2-36x-24y+36=0$; 7) $x^2-9y^2+7x+9y+10=0$; 8) $5x^2-4y^2+10x-16y=0$.

Ч — 271. *Визначити взаємне положення кривої з простою:*

1) $x^2+4y^2=4$ і $2x+3y-5=0$; 2) $25x^2-9y^2=225$ і $12x+25y=45$; 3) $25x^2+36y^2=900$ і $10x-9y-75=0$; 4) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ і $4x-5y+2=0$; 5) $4x^2+9y^2=36$ і $8x=9y$; 6) $36x^2+100y^2-360=0$ і $y=0{,}6x$.

Ч — 272. *Написати рівнання гиперболи, що має асимитотою* $y=2x$ *і переходить через точку* $(1, \sqrt{3})$.

Ч — 273. *Знайти точки перехрестя еліпси:* $9x^2+16y^2=144$ *з простими:* 1) $y=3x+5$; 2) $y=x+5$ і 3) $y=2x-9$.

Теж — для гиперболи: $4x^2-9y^2=36$ *і простих:* 1) $3y=4x+6$; 2) $y=2x-8$ і 3) $y=\frac{5}{6}x-65$.

Ч — 274. *1) Через точку* $(-3, \frac{4}{5})$ *повести дотичну до еліпси:* $x^2+25y^2=25$ *і накреслити її; 2) теж, — через точку* $6\frac{2}{3}$, 4 *повести дотичну до гиперболи:* $9x^2-16y^2=144$ *і накреслити її.*

Ч — 275. *Через точку (3,8) повести дотичні до еліпси:* $9x^2 + 16y^2 = 144$. *2) Теж, — через точку* $(8, 5^1/_4)$ *повести дотичні до гиперболи* $9x^2 - 16y^2 = 144$. *Написати їх рівнання, рівнання прямових у точках дотику і накреслити їх.*

Ч — 276. *Написати рівнання дотичної та прямової до даних кривих у даних точках:*

$$1)\ 4x^2 + 25y^2 = 100;\ (3, y > 0);\ 2)\ \frac{(x+3)^2}{100} + \frac{(y-5)^2}{64} = 1,$$

$(5, y > 0)$; $3)\ 4x^2 - 6y^2 = 36$, $(5, y < 0)$.

Ч — 277. *Написати рівнання дотичних (а також визначити точки дотику): 1) до кривої:* $4x^2 + 9y^2 = 36$, *коли дотична рівнобіжна до простої* $2x + 4y = 15$;

2) теж — до кривої: $4x^2 - 9y^2 = 36$, *коли дотична рівнобіжна до простої* $y = {}^8/_{15}\, x + 2$.

3) теж — до кривої: $9x^2 + 25y^2 = 225$, *коли дотична прямова до простої* $4y - 5x = 6$.

4) теж — до кривої: $x^2 - 4y^2 = 4$, *коли дотична прямова до простої* $3x + 2y = 5$.

Ч — 278. *До еліпси:* $x^2 + 4y^2 = 100$ *повести дотичні в точках (8,3) і (6, — 4). Знайти точку їх перехрестя та кут між ними.*

Ч — 279. *Написати рівнання дотичних поведених:*

1)	з точки	$(3, 7^2/_5)$	до кривої:	$9x^2 + 25y^2 = 225$;
2)	» »	$(3,0)$	» » »	$x^2 - y^2 = 25$;
3)	» »	$(0,-3)$	» » »	$5x^2 + 9y^2 = 45$;
4)	» »	$(2,5)$	» » »	$4x^2 - 9y^2 = 36$.

Ч — 280. *Написати осьове рівнання кривої:*

1) еліпси, коли $e = 2$, *а рівнання дотичної* $2x + 3y + 9 = 0$;

2) гиперболи, коли $e = 5$, *а рівнання дотичної* $15x - 16y = 36$.

Ч — 281. *Написати рівнання бігункової, коли:*

1) рівнання кривої: $5x^2 + 9y^2 = 45$, *а бігуном є точка* $(2, -1^2/_3)$:

2) рівнання кривої: $9x^2 - 4y^2 = 36$, *а бігуном точка* $(-2, -3)$;

3) рівнання кривої: $9x^2 + 25y^2 = 225$, *а бігуном точка* $(-5,9)$;

4) рівнання кривої: $x^2 - 2y^2 = 1$, *а бігуном точка* $(-1,3)$.

Ч — 282. *Знайти кути перехрещення кривих:*

1) $3x^2 + 5y^2 = 15$ *і* $x^2 + y^2 = 4$: 2) $9x^2 + 9y^2 = 544$ *і* $9x^2 - 16y^2 = 144$; 3) $x^2 + 4y^2 = 4$ *і* $4x^2 + y^2 = 4$; 4) $x^2 - 4y^2 = 4$ *і* $4x^2 - y^2 = 4$.

Ч — 283. *Обчислити бік: 1) квадрату, введеного в еліпсу* $9x^2 + 4y^2 = 144$; *2) квадрату, введеного в еліпсу:* $4x^2 + 9y^2 = 144$.

Ч — 284. *Під яким кутом зору видко еліпсу* $x^2 + 4y^2 = 4$ *з точки* $(5,3)$;

2) теж — еліпсу: $9x^2 + 16y^2 = 144$ *з точки* $(6,1)$.

§ 82. Обчислення довжин дотичної, піддотичної, прямової та підпрямової еліпси або гиперболи.

I еліпса. (рис. 155а).

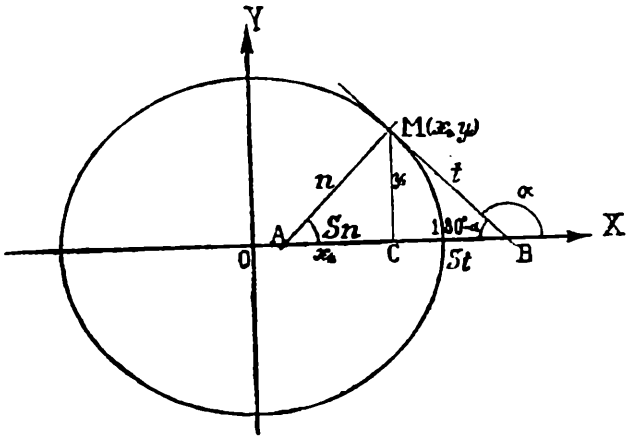


Рис155^a

З $\triangle$ MCB маємо: $S_t = y_1 \, ctg\,(180^0 - a) = -y_1 \, ctg\, a =$
$= -\dfrac{y_1}{tg a}$.

З $\triangle$ AMC маємо: $S_n = y_1 \, ctg\, \beta = \dfrac{y_1}{tg \beta}$.

Але ми вже довели, що кутові змінники: 1) дотичної до еліпси: $m = -\dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ і 2) прямової еліпси: $\kappa = \dfrac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$.

тому:

$$1)\ S_t = -y_1 : \left(-\frac{b^2}{a^2}\ \frac{x_1}{y_1}\right) = \frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1}.$$

А колиж вставити вартість $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}$, то можна одержати:

$$S_t = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1} \ \ldots\ldots \ (\text{а})$$

$$2)\ S_n = y_1 : \left(\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right) = \frac{b^2 x_1}{a^2} \ \ldots\ldots \ (\text{б})$$

З $\triangle\ MCB$ і $\triangle\ AMC$ за теоремою Пітагора матимемо:

$$1)\ t^2 = y_1^2 + S_t^2;$$
$$2)\ n^2 = y_1^2 + S_n^2;$$

або:

$$3)\ t^2 = y_1^2 + \left(\frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1}\right)^2 = y_1^2 + \frac{a^4 y_1^4}{b^4 x_1^2} = \frac{y_1^2}{b^4 x_1^2}\left(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2\right)$$

Звідци:

$$t = \frac{y_1}{b^2 x_1}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} \ \ldots\ldots \ (\text{в})$$

$$4)\ n^2 = y_1^2 + \left(\frac{b^2 x_1}{a^2}\right)^2 = \frac{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}{a^4};$$

$$n = \frac{1}{a^2}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} \ \ldots\ldots \ (\text{г})$$

II гипербола. (Рис. 155б).

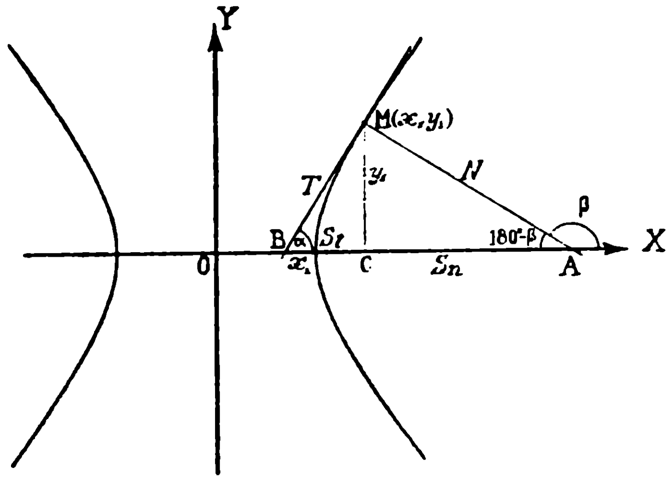


Рис 155b

З $\triangle$ BCM маємо: $S_t = y_1 \, Ctg \, a = \dfrac{y_1}{tg \, a}$

З $\triangle$ AMC маємо: $S_n = y_1 ctg(180^0 - \beta) = -y_1 ctg\beta = -\dfrac{y_1}{tg \, \beta}$.

Але кутовий змінник дотичної до гиперболи: $m = tg \, a = \dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$, а кутовий змінник прямової до гиперболи:

$$\kappa = -\frac{1}{m} = tg \, \beta = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}.$$

Тому: $S_t = \dfrac{a^2 y_1^2}{b^2 y_1}$, а вставивши $y_1 = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, матимемо:

$$S_t = \frac{x^2 - a^2}{x_1} = -\frac{a^2 - x^2}{x_1} \; \ldots\ldots \; (\text{д})$$

Так само:

$$S_n = -y_1 : \left(-\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right) = \frac{b^2 x_1}{a^2} \; \ldots\ldots \; (\text{е})$$

З тих самих трикутників за теоремою Пітагора маємо:

$$t = \sqrt{y_1^2 + \left(\frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1}\right)^2} = \frac{y_1}{b^2 x_1}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} \; \ldots\ldots \; (\text{ж})$$

$$n = \sqrt{\left(\frac{b^2 x_1}{a^2}\right)^2 + y_1^2} = \frac{1}{a^2}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} \; \ldots\ldots \; (\text{з})$$

Таким чином, величини дотичности будуть:

Відтинок:

1) дотичної елипси й гиперболи ,, ,, ,, $t = \frac{y_1}{b^2 x_1^2} \sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}$

2) піддотичної ,, ,, ,, $S_t = \pm \frac{a^2 - x_1^2}{x_1^2}$

3) прямової ,, ,, ,, $n = \frac{1}{a^2} \sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}$

4) підпрямової ,, ,, ,, $S_n = \frac{b^2 x_1}{a^2}$

(126)

Де подвійний знак $\pm$ відповідає: ,,+" для еліпси, а ,,—" для гиперболи.

§ 83. Поперечники еліпси й гиперболи.

Визначення. **Поперечником еліпси або гиперболи зветься відтинок простої, що переходить через їх центр і сполучує точки, взяті на обводі цих кривих.**

Доведемо такі теореми:

1) **Кожний поперечник еліпси або гиперболи переполовинюється центром кривої.**

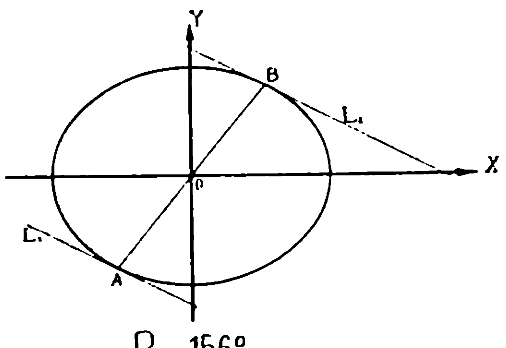


Рис.156а

Рівнання поперечника (еліпси й гиперболи), яко простої, що переходить через початок осей O (рис. 156 a і b), можна написати так:

$$y = mx.$$

З другого боку, взявши рівнання самих кривих:

$$b^2 x^2 \pm a^2 y^2 = a^2 b^2$$

і розвязавши їх спільно з першим, знайдемо значники кінців цього поперечника, а саме:

$$b^2 x^2 \pm a^2 m^2 x^2 = a^2 b^2,$$

звідци:
$$x^2 (b^2 \pm a^2 m^2) = a^2 b^2.$$

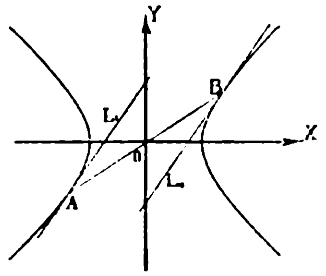


Рис.156.b

Ми бачимо, що для визначення x ми одержали неповне квадратове рівнання, де сочинник при першому ступіню x є *нуль*. Отже й сума розвязків цього рівнання є нуль. А через те відтинкова середини поперечника $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ є також нуль. Коли $x_0 = 0$, то й $y_0 = mx_0$ також є рівне з нулем, себто $y_0 = 0$.

Таким чином, початок координат лежить у середині поперечника еліпси або гиперболи, себ-то цей поперечник переполовинюється центром кривої.

2) Дотичні, поведені до еліпси або гиперболи через кінці якогось поперечника їх, рівнобіжні.

З доводу попередньої теореми ми бачимо, що коли значники одного кінця поперечника еліпси або гиперболи означимо через x', y', то значники другого кінця будуть завжди рівні зі значниками першого кінця своєю величиною й противні їм знаком, себ-то будуть: $-x'$, $-y'$ (бо сума їх є нуль).

Напишемо рівнання дотичних до еліпси й гиперболи, поведених через кінці якогось поперечника, себ-то — через точки:

$$A\,(x', y') \text{ і } B\,(-x', -y').$$

Ці рівнання будуть:

$$1)\quad b^2 xx' \pm a^2 yy' = a^2 b^2$$

$$2)\quad -b^2 xx' \pm (-a^2 yy') = a^2 b^2, \text{ або}$$
$$b^2 xx' \pm a^2 yy' = -a^2 b^2$$

Ми бачимо, що рівнання цих дотичних ріжняться лише знаком вільного члена (себто мають кутові змінники однакові), а тому вони рівнобіжні.

3) Кожний поперечник еліпси або гиперболи є здружений з тятивами, рівнобіжними до дотичних поведених через кінці цього поперечника. Инакше кажучи, **кожний поперечник еліпси або гиперболи є геометричним осередком середин тятив, рівнобіжних до дотичних, поведених через кінці цього поперечника.**

Припустім, що маємо шерег, рівнобіжних між собою, тятив: $y = mx + n$; $y = mx + n_1$ і т. д. Знайдемо кінці якоїсь із цих тятив, напр. $y = mx + n$. Для цього нам треба буде розвязати систему рівнань: $y = mx + n$ і $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$. Вставивши вартість y у друге рівнання, матимемо:

$$b^2x^2 \pm a^2(mx+n)^2 = a^2b^2,$$

або: $$b^2x^2 \pm (a^2m^2x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2) = a^2b^2,$$

або: $$x^2(b^2 \pm a^2m^2) \pm 2a^2mnx - (a^2b^2 \pm a^2n^2) = 0$$

звідци маємо:

$$x^2 \pm 2\frac{a^2mn}{b^2 \pm a^2m^2}x - \frac{a^2b^2 \pm a^2n^2}{b^2 \pm a^2m^2} = 0$$

Де верхній знак відповідає еліпси, а нижчий гиперболі.

З властивости квадратового рівнання маємо:

$$x_1 + x_2 = \mp 2\frac{a^2mn}{b^2 \pm a^2m^2},$$

а тому відтинкова середини тятиви буде:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \mp \frac{a^2mn}{b^2 \pm a^2m^2}$$

Але x_0 та y_0 повинні задовольняти рівнання тятиви, себ-то: $y_0 = mx_0 + n$, а через те:

$$y_0 = \mp \frac{a^2m^2n}{b^2 \pm a^2m^2} + n =$$

$$= \frac{b^2n}{b^2 \pm a^2m^2}.$$

Коли рівнання тятив відріжняються лише вартістю вільних членів, то й вартости x_0 та y_0 будуть для ріжних тятив відріжнятися лише вартостями цих вільних членів а тому: щоб знайти геометричний осередок середин цих усіх тятив, треба з вартостей x_0 та y_0 виключити вартість вільного члена n. Цього досягнемо, поділивши вартість x_0 на y_0, а саме:

$$\frac{x_0}{y_0} = \mp \frac{a^2 m.n\,(b^2 \pm a^2 m^2)}{b^2 n\,(b^2 \pm a^2 m^2)} = \mp \frac{a^2 m}{b^2}$$

Звідци рівнання геометричного осередку середин рівнобіжних тятив еліпси або гиперболи буде:

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2 m}\, x \ldots . \quad (127)$$

(де „—" — для еліпси „+' — для гиперболи).

З форми рівнання можемо зробити висновок, що ця проста повинна переходити через початок координат, себ-то через центр даної кривої, а тому вона є поперечником цієї кривої.

Нам лишається ще довести, що ці тятиви є також рівнобіжні до дотичних, поведених через кінець одержаного нами поперечника.

Означимо значники якогось кінця поперечника через x_1 і y_1. Тоді дотична, поведена через цю точку, матиме рівнання:

$$b^2 xx_1, \pm a^2 yy_1 = a^2 b^2 \left(\begin{array}{l} \text{„+" — еліпса} \\ \text{„—" — гипербола} \end{array}\right)$$

А звідци: $$y = \mp \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}\, x \pm \frac{a^2 b^2}{a^2 y_1}\, .$$

Знайдемо вартість відношення $\dfrac{x_1}{y_1}$.

Точка (x_1, y_1) є кінець поперечника $y = \mp \dfrac{b^2}{a^2 m} x$, а тому значники x_1 та y_1 повинні задовольняти це рівнання, себ-то:

$$y_1 = \mp \frac{b^2}{a^2 m}\, x_1,$$

а звідци: $$\frac{x_1}{y_1} = \mp \frac{a^2 m}{b^2}$$

Вставивши знайдену вартість $\frac{x_1}{y_1}$ у рівнання дотичної,

одержимо: $$y = \mp \frac{b^2}{a^2} \cdot \mp \frac{a^2 m}{b^2} \cdot x \pm \frac{b^2}{y_1}$$

Після спрощення рівнання дотичної має вигляд:

$$y = mx \pm \frac{b^2}{y_1}$$

Кутовий змінник дотичної m однаковий з кутовим змінником тятив, а тому дані тятиви рівнобіжні до дотичних, проведених через кінці здруженого з ними поперечника.

4) Поперечник еліпси або гиперболи, рівнобіжний до тятив, здружених з яким небудь другим поперечником, також буде здружений з тятивами, рівнобіжними до цього другого поперечника.

Ми мали шерег рівнобіжних тятив: $y = mx + n$; $y = mx + n_1$ і т. д.; очевидно, що поперечник, рівнобіжний до цих тятив, матиме рівнання: $y = mx$, а другий поперечник, здружений з цими тятивами, матиме рівнання:

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2 m} x, \text{ або } y = m_1 x, \text{ де } m_1 = \mp \frac{b^2}{a^2 m}.$$

Коли збудуємо шерег нових тятив, рівнобіжних до поперечника $y = m_1 x$, здруженного з першими тятивами, то їх рівнання матимуть вигляд:

$$y = m_1 x + k_1, \ y = m_1 x + k_2 \text{ і т. д.}$$

Посилаючись на попередню теорему, можемо також написати й рівнання поперечника, здруженого з цими новими тятивами, а саме:

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2 m_1} x.$$

Коли в це рівнання вставимо вартість $m_1 = \mp \frac{b^2}{a^2 m}$, то

одержимо: $$y = \left[\mp \frac{b^2}{a^2} : \left(\mp \frac{b^2}{a^2 m}\right)\right] x, \text{ або: } \quad y = mx$$

Таким чином переконуємося, що це є рівнання поперечника, рівнобіжного до першого шерегу тятив.

Такі поперечники називаються здруженими, а тятиви, рівнобіжні до них, — взаємно здруженими.

З означення $m_1 = \mp \frac{b^2}{a^2 m}$ одержуємо ознаку здружености двох поперечників, а саме:

$$m_1 m = \mp \frac{b^2}{a^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (128).$$

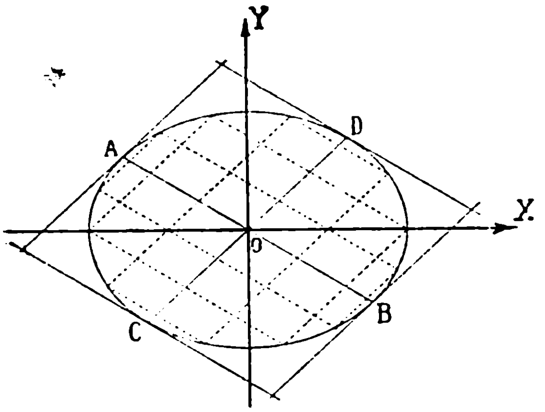


Рис 157ª

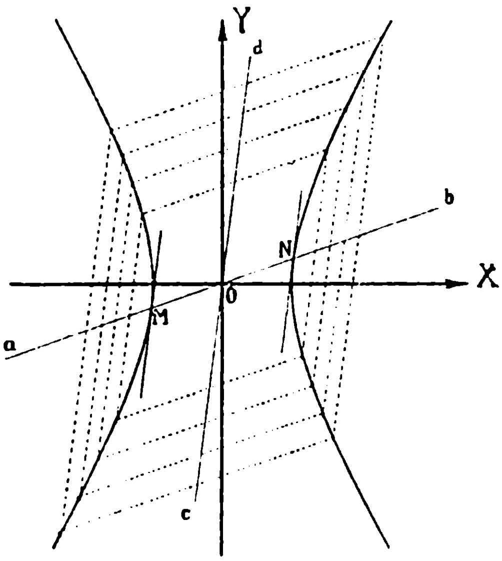


Рис.157ᵇ

Два поперечники гиперболи або еліпси здружені, коли здобуток їх кутових змінників рівний з відношенням квадратів малої півосі до великої; для гиперболи це відношення додатне, а для еліпси—від'ємне.

Що до гиперболи, то її тятиви (рис. 157-б) будемо поділяти на тятиви внутрішні і тятиви зовнішні.

Кожному шерегу рівнобіжних між собою внутрішніх тятив відповідає шерег рівнобіжних між собою зовнішніх, взаємно дружених з першими. Тому здруженому з внутрішніми тятивами поперечникові ab завжди відповідає здружений з ним поперечник cd зовнішніх тятив. Таким чином здружені поперечники гиберболи завжди лежать по обидва боки асимптом. Поперечник, дружений зі зовнішніми тятивами гиперболи, безконечний, бо ніколи не зустрічає гиперболи.

Розвязуючи рівнання поперечника: $y = mx$ і рівнання гиперболи: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, яко систему, ми одержимо значники точок перехрестя цього зовнішнього поперечника з самою гиперболою, а саме:

$$x_{1,2} = \frac{ab}{\pm\sqrt{b^2 - m^2a^2}} \text{ і } y_{1,2} = \frac{abm}{\pm\sqrt{b^2 - m^2a^2}}$$

Але зовнішній поперочник завжди лежить між асімптотами гиперболи, а тому має кутовий змінник з абсолютної величини більший за кутового змінника самих асімптот. Отже (§ 74):

$$m = tg\,\alpha > \left|\frac{b}{a}\right|$$

Тому: $m^2 > \frac{b^2}{a^2}$, або $m^2 = \frac{b^2}{a^2} + k^2$, де k^2 — відповідня додатня величина.

Вставляючи вартість m^2 у виразника розвязків x і y, а саме в $D = b^2 - m^2a^2$, одержимо $D = b^2 - \left(\frac{b^2}{a^2} + k^2\right)a^2$.

А звідци: $\quad D = -k^2a^2 < O.$

Це свідчить, що розвязки $x_{1,2}$ і $y_{1,2}$ є уявні її точки перехрестя зовнішнього поперечника з гиперболою є також уявні (реально не існуть).

Тому зовнішні поперечники гиперболи мають ще назву **уявних поперечників гиперболи.**

В § 71 ми розглядали також і гиперболу, що має за свою основну вісь побічну даної й, навпаки, за свою побічну вісь основну даної. Таку гиперболу називали **здруженою з даною** й визначали рівнянням (120), а саме:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

(де головною піввіссю цієї гиперболи є вартость b, а побічною піввіссю — a).

Коли ми розвяжемо, яко систему, рівняння даного поперечника: $y = mx$ і рівняння цієї гиперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, то матимемо значники точок перехрестя їх такі:

$$x_{1,2} = \frac{ab}{\pm\sqrt{m^2a^2 - b^2}} \text{ і } y_{1,2} = \frac{abm}{\pm\sqrt{m^2a^2 - b^2}}.$$

Але в цьому разі вартість виразника буде:

$$D_1 = m^2a^2 - b^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} + k^2\right) a^2 - b^2 = a^2k^2 > 0$$

й тому точки перехрестя зовнішнього поперечника даної гиперболи з гиперболою здруженою їй є **реальні.**

Можна так само довести, що й внутрішній поперечник даної гиперболи буде конче уявним для другої гиперболи, здруженої з першою. Ці міркування дають підставу твердити що:

Кожний поперечник, внутрішній для даної гиперболи є одночасно зовнішнім для гиперболи з нею здруженої й, навпаки, зовнішній поперечник даної гиперболи є внутрішнім для гиперболи з нею здруженої.

§ 84. Де які властивости поперечників еліпси й гиперболи.

I.

Косини прямокутника, збудованого на осях еліпси як на середниках, є здруженими поперечниками цієї еліпси.

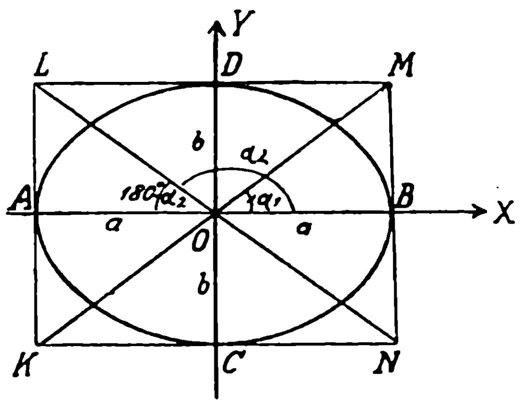


Рис. I.

Збудуємо на осях еліпси $ABCD$ (Рис. I) як на середниках прямокутник $KLMN$. Очевидно, що центр еліпси O буде й центром цього прямокутника, а тому косини його KM і LN будуть і поперечниками самої еліпси.

Доведемо, що ці поперечники є здруженними.

З $\triangle\ OMB$ маємо; що кутовий змінник поперечника KM буде:

$$m_1 = tg\,\alpha_1 = \frac{BM}{OB} = \frac{b}{a}$$

А з $\triangle\ AOL$ маємо, що:

$$tg\ (180^0 - \alpha_2) = \frac{AL}{OA} = \frac{b}{a},$$

а звідци:

$$m_2 = tg\,\alpha_2 = -\frac{b}{a},$$

Взявши здобуток кутових змінників:

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Ми бачимо, що умова здруженности поперечників сповнюється (див. взір 128),

Таким чином, можна твердити, що косини даного, обведеного на еліпсі, прямокутника є для цієї еліпси здруженими поперечниками.

II.

Тятиви сповнення.

Визначення:

Коли в еліпсі, або в гиперболі взяти довільний поперечник і конці його сполучити з якою небудь точкою кривої, то одержані при цьому тятиви мають назву тятив сповнення (Рис. II, a і b).

Доведемо теорему:

Поперечники еліпси або гиперболи, рівнобіжні до яких будь двох тятив сповнення є здружені.

З геометрії відомо, що проста, поведена через середину якого небудь бока трикутника рівнобіжно до другого боку, завжди переполовинюватиме 3-й бік цього трикутника (себ-то буде середником його).

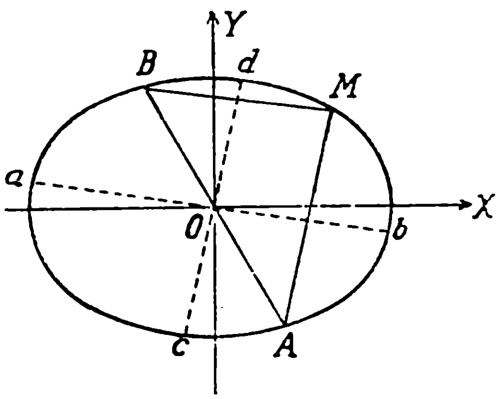


Рис. II-a

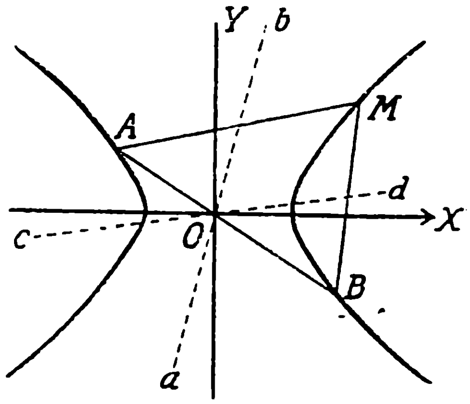


Рис. II-b

Коли взяти й еліпсу (рис. II-a) й гиперболу (рис. II-b), то поперечник ab буде переходити через середину боку AB в $\triangle$-ові ABM й згідно умові буде рівнобіжний до боку BM, а тому переполовинюватиме тятиву AM. Очевидно з попереднього, що він буде здруженим з тятивами рівнобіжними до тятиви AM. Так само доведемо, що й поперечник cd переполовинюватиме тятиву BM, а тому буде здружений зі всіма тятивами рівнобіжними до BM. Таким чином: 1) поперечник ab є здружений з тятивами рівнобіжними до AM й сам рівнобіжний до тятиви BM, а 2) поперечник cd здружений з тятивами рівнобіжними до BM і сам рівнобіжний до тятиви AM, а тому, на підставі визначення взаємної здруженности поперечників, можно твердити що поперечник ab є здружений з поперечником cd.

Доведеною теоремою скористаємося для розвязання такої задачи:

Задача:

Збудувати поперечник еліпси, або гиперболи здружений з даним.

(З огляду на цілковиту схожість методів будування згаданого поперечника й для еліпси й для гиперболи, ми зупинимося лише на випадку еліпси).

Припустім, що дано поперечник AB (рис. III) й треба збудувати другий поперечник з ним здружений.

Ведемо довільну тятиву MN рівнобіжну до поперчника AB і через кінець цієї тятиви ведемо поперечник MK.

Коли тепер сполучимо кінець K поперечника з кінцем N тятиви, то матимемо другу тятиву сповнення KM.

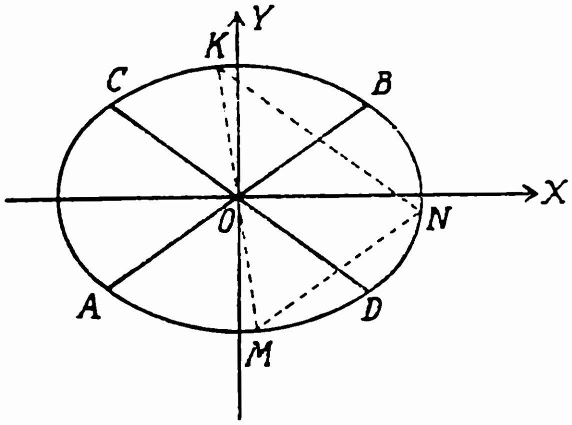


Рис. III.

Тому поперечник CD поведений рівнобіжно до тятиви KN і буде потрібним поперечником здруженим з даним AB.

Теорема:

Коли в еліпсі, або гиперболі тятиви сповнення творять між собою прямий кут, то вони є рівнобіжні до відповідніх осей кривої.

Візьмім на еліпсі (рис. IV-b) або на гиперболі (рис. IV-a) який небудь поперечник AB, де $A(x_1, y_1)$ і $B(-x_1, -y_1)$.

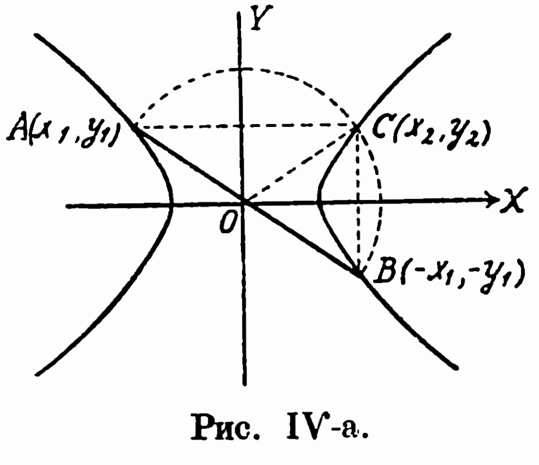


Рис. IV-a.

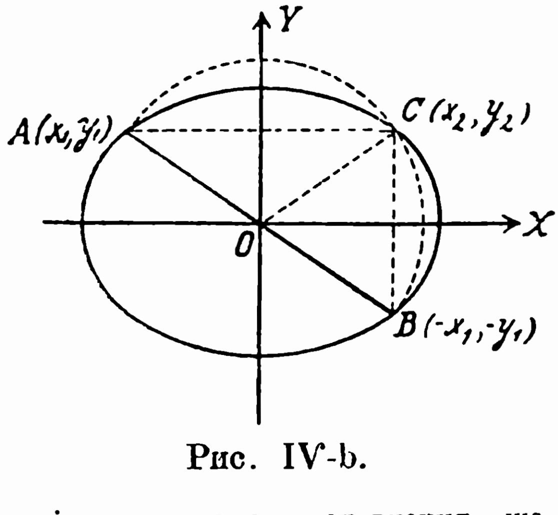


Рис. IV-b.

Хай тятиви AC і BC є відповідними тятивами сповнення, що мають кут $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2}$. Раз кут $\sphericalangle C$ є прямий, то вершок його C має лежати на колі збудованому на AB як поперечникові, а тому:

$$OA = OC = OB.$$

Але: $OA = OB = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$; $OC = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

Тому:

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \ldots\ldots (\alpha)$$

Точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) лежать відповідньо на еліпсі або на гиперболі, а через те ми мусимо мати тотожности:

$$b^2 x_1^2 \pm a^2 y_1^2 = a^2 b^2$$
$$b^2 x_2^2 \pm a^2 y_2^2 = b^2 a^2$$

А звідци: $$y_1^2 = \pm \frac{b^2 (a^2 - x_1^2)}{a^2}$$

$$y_2^2 = \pm \frac{b^2 (a^2 - x_2^2)}{a^2}$$

Вставляючи ці вартости в рівність (α), одержимо:

$$x_1^2 \pm \frac{b^2 (a^2 - x_1^2)}{a^2} = x_2^2 \pm \frac{b^2 (a^2 - x_2^2)}{a_2},$$

або: $$a^2 x_1^2 \pm a^2 b^2 \mp b^2 x_1^2 = a^2 x_2^2 \pm a^2 b^2 \mp b^2 x_2^2,$$

а звідци: $$x_1^2 (a^2 \mp b^2) = x_2^2 (a^2 \mp b^2),$$

або: $$x_1^2 = x_2^2$$

Отже: $$x_2 = \pm x_1.$$

Так само одержимо, що:

$$y_2 = \pm y_1.$$

Це показує, що точки A і C, C і B положені симетрально що-до осей кривої, а тому AC є рівнобіжною до осі X—ів, а CB—до осі $У$—ів й теорема наша є доведеною.

Висновок.

Кожний прямокутник введений у еліпсу, або гиперболу має бокі рівнобіжні до осей симетрії кривої.

Задача:

Збудувати в даних еліпсі, або гиперболі їх осі симетрії.

На підставі попередньої теореми цю задачу дуже легко розвязати таким способом:

1) візьмем довільний поперечник і збудуємо на ньому дві взаємнопрямові тятиви сповнення (на поперечникові очеркуємо коло й точку перехрестя цього кола з даною кривою сполучаємо з кінцями взятого поперечника).

і 2) ведемо поперечники рівнобіжні до збудованих нами тятив сповнення.

Ці поперечники, згідно доведеної теореми й будуть осями симетрії.

III.

Звязок між значниками кінців здружених поперечників еліпси або гиперболи.

Припустім, що нам дано два здружених поперечники M_1N_1 і M_2N_2, при чому значники кінців їх будуть відповідньо:

$$M_1(x_1, y_1) \text{ і } N_1(-x_1, -y_1).$$
$$M_2(x_2, y_2) \text{ і } N_2(-x_2, -y_2).$$

Означимо кути спаду цих поперечників на вісь X—ів через α_1 і α_2. Тоді:

$$m_1 = tg\, \alpha_1 = \frac{y_1}{x_1}.$$

$$m_2 = tg\, \alpha_2 = \frac{y_2}{x_2}.$$

Раз поперечники є здружені, то має сповнюватися умова здруженности, а саме:

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \mp \frac{b^2}{a^2}$$

(де верхній знак відповідає еліпсі, а нижчий — гиперболі)

А звідці: $$\frac{y_1 \cdot y_2}{b^2} = \frac{x_1 x_2}{\mp a^2},$$

або: $$\frac{y_1}{b} \cdot \frac{y_2}{b} = \frac{x_1}{a} \cdot \frac{x_2}{\mp a}$$

Складаємо пропорцію й маємо:

$$\frac{x_1}{a} : \frac{y_2}{b} = \frac{y_1}{b} : \frac{x_2}{\mp a}$$

(де „—“ відповідає еліпсі, а „+“ — гиперболі)

Підносимо всі члени пропорції до квадрату й складаємо такі похідні пропорції:

а) для еліпси:

$$(1) \quad \frac{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}{\frac{y_2^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{a^2}} = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 : \left(\frac{y_2}{b}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 : \left(\frac{x_2}{-a}\right)^2$$

б) для гиперболи:

$$(2)\quad \frac{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}}{\frac{y_2^2}{b^2} - \frac{x_2^2}{a^2}} = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 : \left(\frac{y_2}{b}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 : \left(\frac{x_2}{a}\right)^2$$

або:

$$(1)\quad \frac{x_1}{a} : \frac{y_2}{b} = \frac{y_1}{b} : \frac{x_2}{-a} = \pm \frac{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}}{\sqrt{\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}}}$$

$$(2)\quad \frac{x_1}{a} : \frac{y_2}{b} = \frac{y_1}{b} : \frac{x_2}{a} = \pm \frac{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}}}{\sqrt{\frac{y_2^2}{b^2} - \frac{x_2^2}{a^2}}}$$

Обчислимо радикали:

I) Коли крива є еліпса й точки M_1 і M_2 лежать на ній, то значники цих точок дають тотожности:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$\text{і}\quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1,$$

а тому рівности *(1)* матимуть вигляд:

$$\frac{x_1}{a} : \frac{y_2}{b} = \frac{y_1}{b} : \frac{x_2}{-a} = \pm 1 \;\ldots\ldots (3)$$

II) Коли крива є гипербола й точка M_1 лежить на ній, то точка M_2 буде (як було доведено в § 83) лежати на гиперболі здруженій з даною, а тому маємо такі тотожности:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$\text{і}\quad \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = -1,$$

або:

$$\frac{y_2^2}{b^2} - \frac{x_2^2}{a^2} = 1.$$

Отже, рівности *(2)* матимуть вигляд:

$$\frac{x_1}{a} : \frac{y_2}{b} = \frac{y_1}{b} : \frac{x_2}{a} = \pm 1 \;\ldots\ldots (4)$$

Рівности *(3)* і *(4)* спільно можна записати так:

$$\frac{x_1}{a} : \frac{y_2}{b} = \frac{y_1}{b} : \frac{x^2}{\mp a} = \pm 1$$

Звідци маємо звязок для значників кінців здружених поперечників:

1) еліпси:

$$\frac{x_1}{a} = \pm \frac{y_2}{b} \quad \text{і} \quad \frac{y_1}{b} = \mp \frac{x_2}{a} \; \ldots\ldots \; (5)$$

і 2) гиперболи:

$$\frac{x_1}{a} = \pm \frac{y_2}{b} \quad \text{і} \quad \frac{y_1}{b} = \pm \frac{x_2}{a} \; \ldots\ldots \; (6).$$

IV.

Поле трикутника збудованого на здружених півпоперечниках еліпси або гиперболи.

Хай MN і PQ є здружені поперечники еліпси (рис. V-a), або гиперболи (рис. V-b).

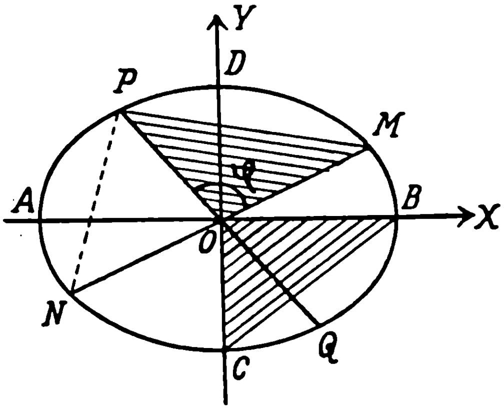


Рис. V-a.

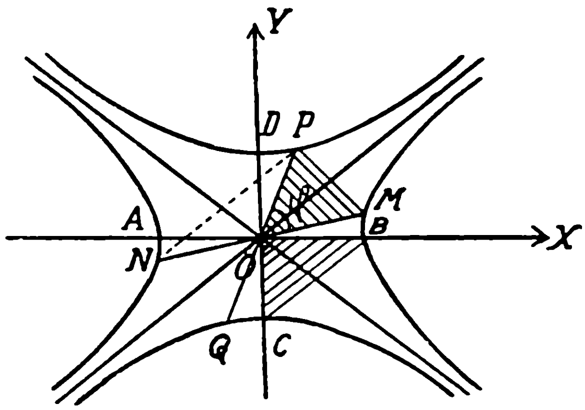


Рис. V-b.

Означимо значники точок: M — через x_1 і y_1, а P — через x_2 і y_2 й обчислимо поля трикутників $\triangle MOP$ (для обох кривих) через значники їх вершків. Тоді одержимо:

$$2S = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(і для еліпси й для гиперболи).

Вставляючи з рівностей *(5)* і *(6)* вартости x_2 і y_2, (беручи лише верхні знаки), матимемо:

$$2S = x_1 \cdot \frac{b}{a} x_1 - \left(\mp \frac{a}{b} y_1 \right) y_1,$$

або:

$$2S = ab \left(\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} \right)$$

де „+“ — для еліпси, а „—“ — для гиперболи.

Але точка $M(x_1, y_1)$ лежить на кривій, а тому:

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

Отже:

$$2S = ab, \quad \text{або:} \quad S = \frac{ab}{2.}$$

Коли візьмемо поле $\triangle OBC$ збудованого на півосях кривої, то воно також буде рівне:

$$S = \frac{ab}{2}$$

А Тому:

Поле трикутника, збудованого на здружених півпоперечниках еліпси або гиперболи, є рівне з полем трикутника, збудованого на самих півосях кривої.

Коли б ми взяли заміоць $\triangle$-ка MOP йому суміжний $\triangle PON$, то твердження теореми не порушилосяб, бо:

$$2S_{MOP} = OM \,.\, OP \, sn\, \varphi$$

$$\text{а} \ \ 2S_{NOP} = ON \,.\, OP\, sn\,(180^0 - \varphi) = OM\, OP\, sn\, \varphi$$

$$(\text{бо} \ \ ON = OM, \ \ \text{а} \ \ sn\,(180^0 - \varphi) = sn\, \varphi)$$

Отже: $\qquad S_{NOP} = S_{MOP} = S_{COB}$

Означивши $OM = \alpha$, а $OP = \beta$; матимемо: $2S_{MOP} = \alpha\beta\, sn \varphi$,

а тому: $\qquad \alpha\beta\, sn\, \varphi = ab,$

або: $\qquad \alpha\beta = ab\, cosec\, \varphi \ldots\ldots \ (129)$

себ-то:

Здобуток здружених півпоперечників еліпси, або гиперболи є рівний із здобутком їх півосей на косеканс куту між цими поперечниками.

V.

§ 85. Теореми Аполонія.

I теорема

Звязок між здруженими поперечниками й осями еліпси, або гиперболи полягає в тому, що:

1) Сума квадратів здружених півпоперечників еліпси є рівна з сумою квадратів півосей її

і 2) Ріжниця квадратів здружених півпоперечників гиперболи є рівна з ріжницею квадратів півосей її.

Обчислимо довжини півпоперечників OM і OP (рис. V a і b), через значники їх кінців і матимемо:

$$AM^2 = \alpha^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$OP^2 = \beta^2 = x_2^2 + y_2^2$$

Тому сума, або ріжниця квадратів цих півпоперечників буде;

$$\alpha^2 \pm \beta^2 = (x_1^2 + y_1^2) \pm (x_2^2 + y_2^2).$$

Вставляючи з рівностей *(5)* і *(6)* вартости x_2^2 і y_2^2, одержимо:

$$\alpha^2 \pm \beta^2 = (x_1^2 + y_1^2) \pm \left(\frac{a^2}{b^2} y_1^2 + \frac{b^2}{a^2} x_1^2 \right)$$

або:

$$\alpha^2 \pm \beta^2 = \frac{a^2 \pm b^2}{a^2} x_1^2 \pm \frac{a^2 \pm b^2}{b^2} y_1^2 .$$

Тому:

$$\alpha^2 \pm \beta^2 = (a^2 \pm b^2). \left(\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} \right)$$

Точка $M(x_1, y_1)$ лежить на кривій, а тому мусимо мати тотожність:

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

(де „+" відповідає еліпсі, а „—" — гиперболі).

Таким чином;

$$\alpha^2 \pm \beta^2 = a^2 \pm b^2$$

(де верхній знак відповідає випадку еліпси, а нижчий знак — випадку гиперболи).

II теорема

Поле обведеного на здружених гиперболах рівнобіжника, що має боки рівнобіжні до відповідних здружених поперечників, є рівне з полем прямокутника збудованого на осях цих гипербол.

Ця теорема є висновком теореми IV про вартість поля Δ-ка збудованого на здружених півпоперечниках.

Справді:

З елементарної геометрії ми знаємо, що (рис. VI) *KSOP*; *SLQO*; *OQMT* і *TNPO* є рівнобіжники, що переділюються відповідніми косинами *SP*, *SQ*, *QT* і *TP* на рівні між собою трикутники.

Але поле каждого з цих Δ-ів, як доведено теоремою IV, є рівне: $\frac{ab}{2}$,

а тому поле цілого рівнобіжника *KLMN* буде:

$$S = 8 \,.\, \frac{ab}{2} = 4ab.$$

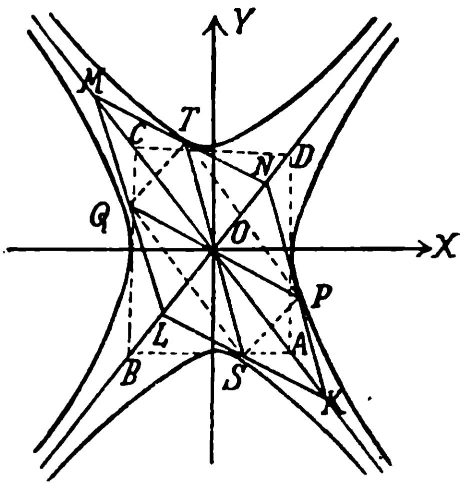


Рис. VI.

З другого боку поле прямокутника збудованого на осях, як середниках також буде:

$$S_1 = 2a.\ 2b = 4ab.$$

Таким чином теорема Аполонія доведена.

§ 86. Поле еліпси.

Доведемо попереду таку теорему:

Рядні точок, що лежать на еліпсі та на її прикметному колі й мають спільну відтинкову, відносяться між собою як мала піввісь до великої (рис. 158), себ-то: $\frac{y_1}{n} = \frac{b}{a}$.

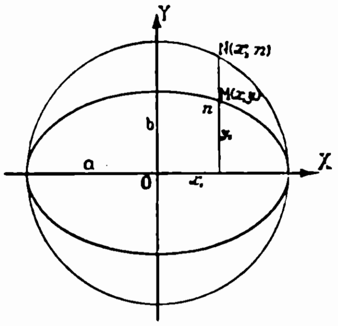


Рис.158.

Рівнання еліпси: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Вставивши в це рівнання вартість відтинкової x_1, знайдемо рядну:

$$y_1 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2}\,.$$

Подібним чином з рівнання кола: $x^2 + y^2 = a^2$ знаходимо вартість рядної:

$$n = \pm \sqrt{a^2 - x_1^2}.$$

Взявши відношення знайдених вартостей y_1 та n, матимемо:

$$\frac{y_1}{n} = \frac{\pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2}}{\pm \sqrt{a^2 - x_1^2}} = \frac{b}{a}.$$

Теперь уведемо в прикметне коло правильний многокутник і з вершків його спустимо прями на вісь X—*ів*.

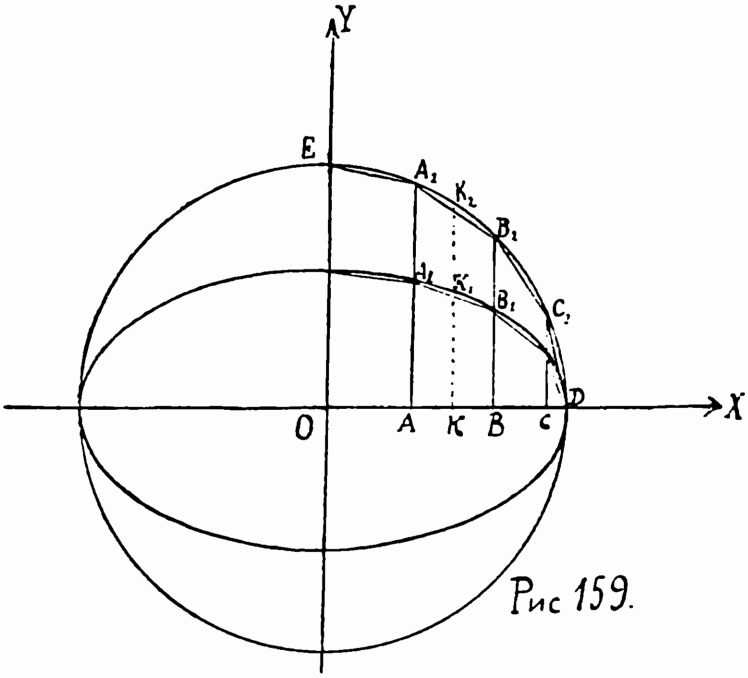


Рис 159.

Перехрестя цих прямів з обводом еліпси ($A_1 B_1$ і т. д.) сполучимо між собою тятивами (рис. 159). Тоді одержимо, в кожній чвертці кола й еліпси зокрема, шерег трапезів і один прямокутний трикутник.

Кожному довільно взятому трапезу AA_2BB_2, утвореному цим способом у колі, завжди відповідатиме в еліпси другий трапез AA_1BB_1, що спирається боком на той самий відтинок AB осі X—*ів*.

З геометрії відомо, що:

1) поле трапезу AA_2BB_2 буде: $P = KK_2 . AB$ (де KK_2 є середник цього трапезу).

2) поле трапезу AA_1BB_1 також буде: $S = KK_1 . AB$ (де KK_1 є середник цього трапезу).

Тому відношення цих полів буде:

$$\frac{S}{P} = \frac{KK_1}{KK_2} \;\ldots\ldots\; (A).$$

Доведемо, що відношення цих середників $\frac{KK_1}{KK_2}$ рівне з відношенням малої півосі до великої.

Справді: $KK_1 = l_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2}$; $KK_2 = l_2 = \frac{AA_2 + BB_2}{2}$,

тому $$\frac{KK_1}{KK_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{AA_1 + BB_1}{AA_2 + BB_2} = \frac{y_1 + y_2}{y' + y''};$$

але на підставі попередньої теореми можемо написати пропорцію:

$$\frac{y_1}{y'} = \frac{y_2}{y''} = \frac{b}{a}$$

і з неї одержати таку похідну: $\frac{y_1 + y_2}{y' + y''} = \frac{y'}{y_1} = \frac{b}{a}$.

Таким чином $\frac{KK_1}{KK_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{b}{a}$, а через те відношення полів трапезів (A) буде:

$$\frac{S}{P} = \frac{b}{a}$$

Таким самим чином можна довести, що й відношення полів прямокутних $\triangle$—ів: C_1CD і $\triangle\ C_2CD$ є також рівне: $\frac{S_n}{P_n} = \frac{b}{a}$ (бо ці трикутники мають спільну висоту CD_1 а основами CC_1 і CC_2, що є рядні точок еліпси й кола зі спільною відтинковою OC).

Припустім далі, що правильний многокутник, уведений нами у прикметне коло, має $4n$ боків. Тоді поле чвертки цього кола міститиме в собі $(n-1)$ трапезів (таких, як напр. AA_2BB_2) і один прямокутний трикутник (напр. C_2CD). Цим трапезам (і трикутникові) завжди відповідатиме $(n-1)$ трапезів (таких як напр. AA_1BB_1) і один трикутник (напр. CC_1D, що будуть замкнені у відповідній чвертці еліпси).

Ми вже довели, що відношення полів довільно узятої, а тому й кожної пари, таких трапезів (і трикутників) є сталe, а саме $\frac{S}{P} = \frac{a}{b}$, тому можемо написати пропорцію:

$$\frac{S_1}{P_1} = \frac{S_2}{P_2} = \frac{S_3}{P_3} \; \ldots\ldots = \frac{S_n}{P_n} = \frac{b}{a},$$

або (складаючи похідну пропорцію):

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \ldots\ldots + S_n}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \ldots\ldots + P_n} = \frac{b}{a}.$$

Инакше кажучи:

$$\frac{\sum\limits_1^n S}{\sum\limits_1^n P} = \frac{b}{a}$$

Будемо подвоювати число боків многокутника до безмежности, тоді $\sum\limits_1^n S$ і $\sum\limits_1^n P$ будуть простувати, як до своєї межі, перша — до поля чвертки еліпси, а друга — до поля чвертки кола, а тому:

$$\lim_{n \ldots\ldots \infty} \frac{\sum\limits_1^n S}{\sum\limits_1^n P} = \frac{b}{a}$$

Себ-то, відношення поля чвертки еліпси до поля чвертки прикметного кола рівне $\frac{b}{a}$ а звідци можна твердити, що: поле еліпси відноситься до прикметного круга, як мала вісь елипси до великої.

$$\frac{S_e}{S_k} = \frac{2b}{2a}$$

З елементарної геометрії нам відомо, що поле кола (круг):

$$S_k = \pi r^2 = \pi a^2.$$

Тому:

$$\frac{S_e}{\pi a^2} = \frac{b}{a},$$

а звідци:

$$S_e = \pi ab \quad \ldots\ldots \quad (130)$$

Цим способом можна обчислити й поле кожної, довільно взятої, частини поля еліпси.

Що ж торкається до поля відрізку гиперболи, то елементарна математика не дає способу для його обчислення.

§ 87. Асимптоти гиперболи.

I. Рівнання асимптот гиперболи.

При розгляді взаємного положення простої й гиперболи, ми назвали асимптотами гиперболи такі прості, що переходять через центр її (початок осей) і дотикаються до неї на безмежности, маючи кутовий змінник $m = \pm \frac{b}{a}$.

Беручи на увагу всі ці прикмети асимптот, дуже легко скласти їх рівнання, а саме:

1) асимптоти переходять через початок осей, а тому їх рівнання має загальний вигляд: $y = mx$.

2) кутовий змінник асимптот: $m = \pm \frac{b}{a}$. А тому (вставивши цю вартість m), одержимо такі рівнання асимптот гиперболи з осями $2a$ і $2b$:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad \ldots\ldots \quad (131)$$

або:

$$ay \mp bx = O \quad \ldots\ldots \quad (132)$$

II. Креслення асимптот гиперболи.

Щоб накреслити асимптоти гиперболи, досить повести косини прямокутника, збудованого на осях гиперболи, яко на середниках.

Доведемо це: вершки цього прямокутника належатимуть до точок асимптот, бо значники їх (абсолютною величиною) рівні з півосями й через те задовольняють відповідні рівняння, що легко переконатися звичайною вставкою (рис. 160).

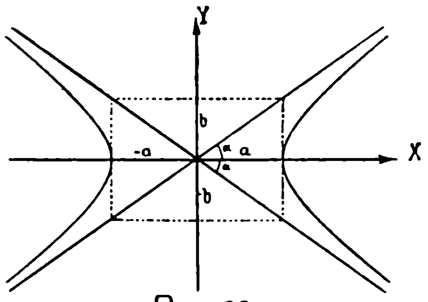


Рис.160.

§ 88. Асимптотичне рівнання гиперболи.

(Рівнання гиперболи, віднесеної до асимптот її, як до координатних осей).

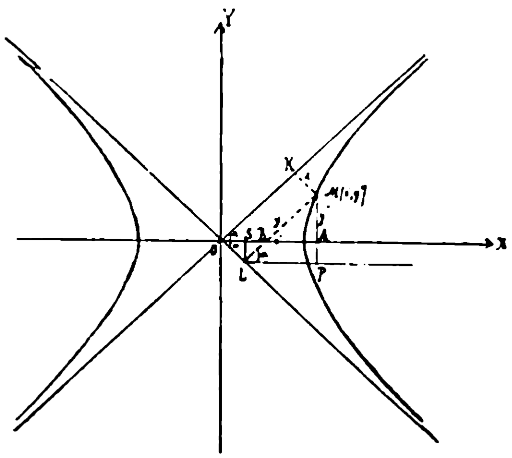


Рис. 161.

Надзвичайно просту форму має рівнання гиперболи, віднесеної до асимптот (себ-то, коли за осі координат взято самі асимптоти). До цього часу ми уникали користуватися системою визначних (координатних) осей не прямоположних (таких, що мають між собою кут $\neq 90^0$). Але з огляду на простоту і зручність рівнання гиперболи, віднесеної до її асимптот, ми в цьому разі зробимо виключення і скористуємося косокутною системою координат, складеною із асимптот гиперболи.

На рис. 161 означимо: 1) старі прямові координати через x' і y', 2) нові, що творять асимптоти, через x і y і 3) кут, що замикають асимптоти з віссю X—ів—через a. Коли ми візьмемо якусь довільну точку M на гиперболі зі значниками x', y' зглядно старих осей, і поведемо через точку M прості, рівнобіжні до асимптот, то одержимо значники x і y цієї точки M зглядно нових осей. Тепер у нас вистарчить даних, щоб скласти взори переходу від одної системи координат до другої, а саме: повівши через точку L просту, рівнобіжну до OX', і означивши через P точку перехрестя цієї простої з продовженням рядної AM, одержимо $\triangle\, LMP$, а з нього матимемо:

$MP = MLsn\, a$, або $y' + AP = ysn\, a$, але AP обчислюємо з $\triangle\, OSL$: $AP = LS = OLsn\, a = xsn\, a$, тому: $y' + xsn\, a = ysn\, a$, а звідци: $$y' = (y - x) sn\, a \;\ldots\; (1)$$

Так само $x' = OA = OS + LP$, але (з $\triangle\, OSL$): $OS = xcs\, a$, а (з $\triangle\, LMP$): $LP = ycs\, a$, тому:

$$x' = (y + x)\, cs\, a \;\ldots\ldots\; (2).$$

Тепер подивимося, який вигляд матиме рівнання гиперболи (взяте що-до старих осей): $b^2 x'^2 - a^2 y'^2 = a^2 b^2$, коли перетворити його до нових координатних осей.

Для цього вставляємо в наше рівнання вартости x' та y' обчислені, взорами переходу (1) і (2) і маємо:

$$b^2 (y + x)^2 cs^2\, a - a^2 (y - x)\, sn^2\, a = a^2 b^2$$

або

$$b^2 y^2 cs^2\, a + b^2 x^2 cs^2\, a + 2b^2 xycs^2\, a - a^2 y^2 sn^2\, a - a^2 x^2 sn^2\, a + \\ + 2a^2 xysn^2\, a = a^2 b^2$$

звідци:

$$x^2 (b^2 cs^2\, a - a^2 sn^2\, a) + y^2 (b^2 cs^2\, a - a^2 sn^2\, a) + \\ + 2xy (b^2 cs^2\, a + a^2 sn^2\, a) = a^2 b^2 \;\ldots\ldots\; (A)$$

Обчислимо тепер вартости многочленів у дужках.

Ми знаємо, що кутовий змінник асимптот що-до старих осей є: $m = \frac{b}{a}$, але $m = tg\, a = \frac{sn\, a}{cs\, a}$, а тому $bcs\, a = asn\, a$.

Звідци:

$$1)\ b^2 cs^2 \alpha - a^2 sn^2 \alpha = O.$$

$$2)\ b^2 cs^2 \alpha + a^2 sn^2 \alpha = 2b^2 cs^2 \alpha = 2a^2 sn^2 \alpha.$$

Вставивши в наше рівнання *(A)* по черзі вартости 1) і 2), матимемо: 1) $x^2.O + y^2.O + 4xyb^2 cs^2 \alpha = a^2 b^2$; 2) $x^2.O + + y.O + 4xya^2 sn^2 \alpha = a^2 b^2$, що дає нам рівнання:

$$4xycs^2 \alpha = a^2$$
$$4xysn^2 \alpha = b^2.$$

Щоб виключити кут α, складаємо ці два рівнання й одержуємо: $$4xy = a^2 + b^2$$

А звідци:

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{e^2}{4} = \frac{a^2\varepsilon^2}{4} = Const \ldots (131)$$

Це й є рівнання гиперболи, віднесене до асимптот її, яко визначних осей.

Визначення. Дві гиперболи що мають спільні асимптоти, але положені в ріжних кутах між ними, звуться здруженими (рис. 162).

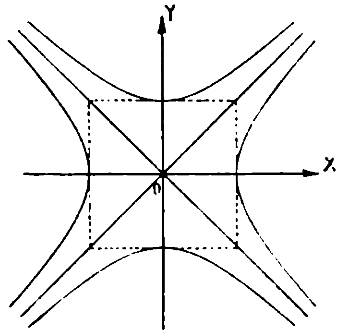


Рис. 162.

Коли напишемо асимптотичне рівнання даної гиперболи так:

$$xy = k^2 \ldots\ldots (132)$$

то рівнання здруженої з нею гиперболи буде:

$$xy = -k^2 \ldots\ldots (133)$$

§ 89. Де-які властивости асимптот гиперболи.

I.

Поле рівнобіжника збудованого на асимптотах.

Коли через яку небудь точку M гиперболи повести прості рівнобіжні до асимптот, то рівнобіжник $MKOL$ (рис. 162-а), замкнений цими рівнобіжними й асимптотами, має назву **рівнобіжника збудованого на асимптотах при точці M.**

Доведемо, що:

Кожний рівнобіжник збудований на асимптотах гиперболи має стале поле рівне з піваздобутком півосей, самої гиперболи.

$$S_{MKOL} = \frac{ab}{2.}$$

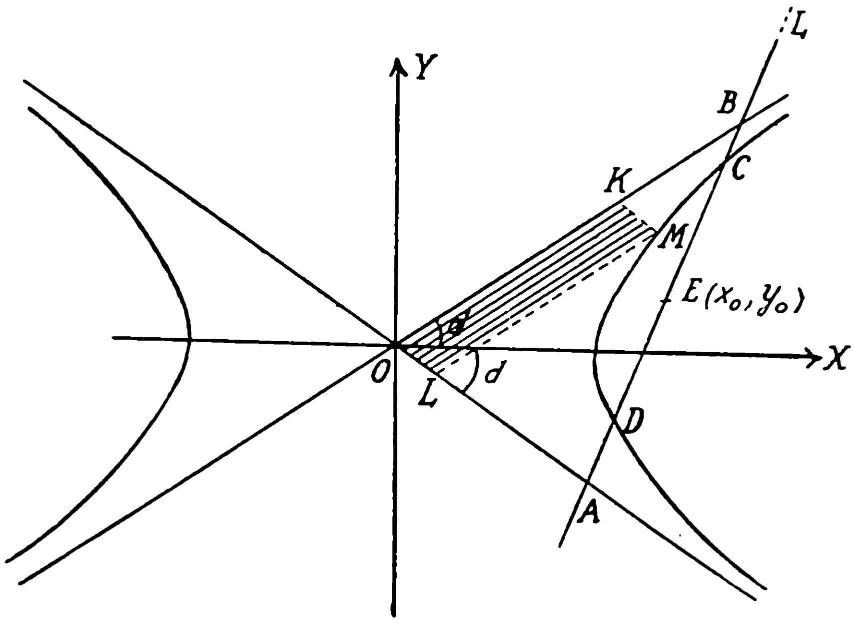


Рис. 162-а.

В попередньому § ми довели що;

$$4xy\,cs^2\,\alpha = a^2$$

$$4xy\,sn^2\alpha = b^2$$

де x і y є значники точки M що-до асимптот, яко координатних осей, себ-то $x = KM = OL$, а $y = ML = OK$.

Взявши здобуток обох частин цих рівнань матимемо:

$$16x^2\,y^2\,sn^2\,\alpha\,cs^2\,\alpha = a^2\,b^2, \text{ або:}$$

$$4xy\,sn\,\alpha\;cs\,\alpha = ab,$$

А звідци;

$$2xy\,sn\,2\,\alpha = ab, \text{ або}$$

$$xy\,sn2x = \frac{ab}{2.}$$

Але здобуток $xy\,sn\,2\alpha$ незалежно від величини x і y є полем рівнобіжника збудованого на асимптотах при точці M, а тому:

$$S_{MKOL} = \frac{ab}{2}$$

Деб ми не брали точку M на гиперболі, завжди прийдемо до висліду:

$$S_{MKOL} = \frac{ab}{2},$$

А тому можно твердити, що поле якогоб не було рівнобіжника, збудованого на асимптотах, має сталу вартість, рівну з піввдобутком півосей гиперболи.

II.

Відтинки кожної січної гиперболи, замкнені між асимптотами і самою кривою, є рівні між собою.

Хай проста L (рис. 162-а) перетинає гиперболу в точках C і D, а її асимптоти в точках A і B.

Означимо рівнання цієї простої $L : y = mx + n$.

Тоді, щоб знайти значники точок C і D, перехрестя простої з гиперболою, треба розвязати систему рівнань:

$$y = mx + n$$

$$\text{і} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В § 83 ми одержали розвязки цієї системи а саме:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2 mn}{b^2 - a^2m^2}$$

$$\text{і} \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{b^2 n}{b^2 - a^2m^2}.$$

Таким чином ми визначили значники точки E середини січної.

Знайдемо тепер значники точок A і B перехрестя простої L з асимптотами.

Рівнання асимптот: $y = \pm \frac{b}{a}$, а тому розвязавши системи:

$$y = mx + n$$

$$\text{і} \quad y = \pm \frac{b}{a} x,$$

одержимо:

$$x_1 = \frac{an}{b - am} \quad x_2 = - \frac{an}{b + am}$$

$$y_1 = \frac{bn}{b - am} \quad y_2 = \frac{bn}{b + am}$$

Звідци, значники середини AB будуть:

$$x'_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{an}{b - am} - \frac{an}{b + am}\right) = \frac{a^2mn}{b^2 - a^2m^2}$$

$$y'_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2}{2}\left(\frac{bn}{b - am} + \frac{bn}{b + am}\right) = \frac{b^2n}{b^2 - a^2m^2}.$$

Порівнюючи значники x_0 і y_0 середини січної CD із значниками x'_0 і y'_0 середини AB, ми переконуємося, що ці відтинки мають спільну середину, а тому:

$$AE = EB$$
$$DE = EC$$

Відлічуючи ці рівности почленно, маємо:

$$AE - DE = EB - EC,$$ або:

$$\mathbf{AD = BC}.$$

Ми брали довільно положену просту L, а тому можно твердити, що доведена властивість належить до кожної січної гиперболи.

Висновок:

Відтинок кожної дотичної до гиперболи, замкнений між її асимптотами, переполовинюеться точкою дотику.

Справді:

Дотичну можно розглядати як межове положення січної при рівнобіжному посуванню її, так щоб точки пересічу наближалися.

Коли доведена нами властивість належить до кожної січної гиперболи, то вона залишатиметься й тоді, коли точки C і D зілляються. Але в цьому випадку січна CD стає дотичною, а відтинки січної замкнені між гиперболою й асимптотами стають відповідніми промінями дотичної з обох боків точки дотику, а тому можно твердити, що відтинок дотичної замкнений між асимптотами переполовинюється точкою дотику.

III.

Трикутники збудовані на асимптотах гиперболи.

Коли через яку небудь точку M гиперболи (рис. 162-b) повести дотичну до кривої то **трикутник** AOB, замкнений цією дотичною і асимптотами, має назву **трикутника, збудованого на асимптотах гиперболи при точці** M.

Доведемо, що:

Поле трикутника, збудованого на асимптотах е величиною сталою для всіх точок гиперболи рівною із здобутком піво сей її, себ-то:

$$S_{ABO} = ab.$$

Візьмім за осі координат гиперболи її асимптоти. Тоді значники точки M (x_1, y_1) будуть:

$$x_1 = KM$$
$$y_1 = LM$$

Але, як доведено, точка M переполовинює дотичну AB, а тому KM і LM є середниками $\Delta\ AOB$, себ-то точка K є серединою OB, а точка L — серединою OA.

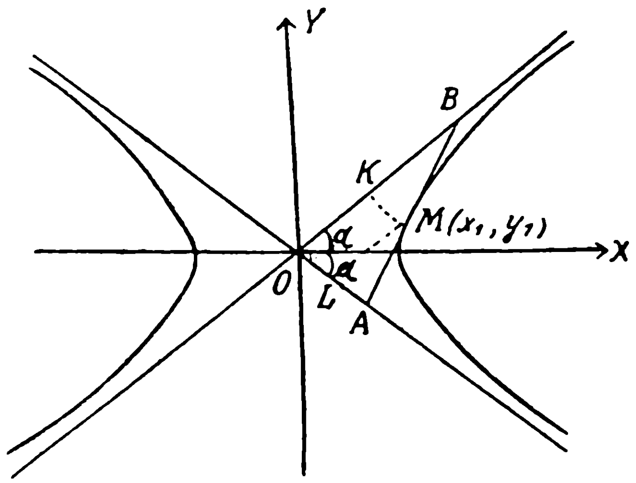


Рис. 262-b.

Отже: $OB = 2OK = 2y_1$
$OA = 2OL = 2x_1$

і поле трикутника AOB буде:

$$S_{AOB} = \frac{OA\ .\ OB\ sn\, 2\alpha}{2} = \frac{2x_1\ .\ 3y_1\ sn\, 2\alpha}{2} = 2x_1y_1 sn\, 2\alpha,$$

Ми довели (теорема I), що здобуток $x_1 y_1 sn\, 2\alpha$, незалежно від вартостей x_1 і y_1, є рівний з піваздобутком півосей гиперболи, а тому:

$$S_{AOB} = 2\ .\ \frac{ab}{2} = ab.$$

§ 90. Рівнобічна гипербола.

Рівнобічною гиперболою будемо звати таку, що має обидві свої осі однакові.

Рівнання її легко одержати, коли вважати $a = b$, тоді:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = \pm 1.$$

Звідци рівнання здружених рівнобічних гипербол буде:

$$x^2 - y^2 = \pm a^2 \ldots\ldots (134)$$

Коли здружені рівнобічні гиперболи віднесені до асимптот, то їх рівнання буде:

$$xy = \pm \frac{a^2 + a^2}{4} = \pm \frac{a^2}{2} \ldots\ldots (135)$$

Розглянемо де-які властивости рівнобічної гиперболи:

1) **Асимптоти рівнобічних гипербол взаємно прямові.**

Справді:

Кутовий змінник асимптот є $m = \pm \frac{b}{a}$; колиж для рівнобічної гиперболи $b = a$, то кутовий змінник її асимитот буде $m = \pm 1$, а це, на підставі умови прямовости двох простих показує, що рівнання асимптот $y = x$ і $y = -x$ є рівнання простих, прямових одна до одної.

2) **Числовий ексцентриситет рівнобічної гиперболи завжди рівний $\sqrt{2}$.**

Справді:

Числовий ексцентриситет кожної гиперболи $\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$,

або $\varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$. В рівнобічній гиперболі $a = b$, а тому

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 + a^2}{a^2} = 2.$$

А звідци: $\varepsilon = \sqrt{2}.$

Вправи.

Ч — 285. *Обчислити відтинки піддотичної, підпрямової, дотичної та прямової, поведених до:*

1) *еліпси:* $4x^2 + 25y^2 = 100$ *в точці* $(4, 1\frac{1}{5})$;

2) *гиперболи:* $4x^2 - 9y^2 = 1$ *в точці* $(9, y > 0)$;

3) *еліпси:* $16x^2 + 25y^2 = 400$ *в точці* $(4, y > 0)$.

Ч — 286. *Написати рівнання й обчислити довжину поперечника, здруженого: 1) з тятивою еліпси* $16x^2 + 25y^2 = 400$, *коли ця тятива має кутовий змінник* $m = \frac{5}{4}$; *2) з тятивою гиперболи* $5x^2 + 9y^2 = 180$, *що має кутовий змінник* $m = -\frac{4}{3}$; *3) з тятивою* $5x - 8y + 25 = 0$ *еліпси* $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$; *4) з тятивою* $y = 2x + 1$ *кривої* $4x^2 + 9y^2 = 36$; *5) з тятивою* $y = \frac{15}{8}x - \frac{11}{2}$ *кривої* $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Ч — 287. *Написати рівняння тятиви: 1) еліпси:* $x^2 + 4y^2 = 36$, *що переполовинюється в точці* $(4,2)$; *2) гиперболи:* $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, *що переполовинюється точкою* $(3,2)$.

Ч — 288. *Користуючись властивістю здружених поперечників, написати рівняння дотичної:*

1) до кривої: $3x^2 + 4y^2 = 300$, *коли ця дотична є рівнобіжною до простої* $y = {}^3/_2\, x - 20$;

2) до кривої: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$, *коли ця дотична є рівнобіжною до простої:* $45x + 4y = 180$.

Ч — 289. *Обчислити поле еліпси, коли відомі: 1)* $a = 8$; $\varepsilon = {}^3/_4$; *2)* $p = 3$; $e = 4$; *3) рівнання еліпси:* $4x^2 + 9y^2 = 36$; *4) рівнання еліпси:* $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

Ч — 290. *Написати рівнання еліпси, що має:* $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$. $S = 6\pi$.

Ч — 291. *Обчислити поле відрізків, обмежених: 1) дугою еліпси:* $9x^2 + 16y^2 = 144$ *та її параметром; 2) дугою еліпси:* $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ *і простою* $x = 4$.

Ч — 292. *Написати рівнання асимптот, а також обчислити кут між ними і поле трикутника, обмеженого асимптотами і дотичною в точці* $(10,y)$ *до гиперболи* $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Ч — 293. *Написати рівнання дотичних, поведених з точки* $({}^3/_2\,, {}^3/_4)$ *до гиперболи:* $x^2 - y^2 = 1$ *і обчислити їх довжину.*

Ч — 294. *Написати рівнання асимптот гиперболи і самої гиперболи зглядно асимптот, коли 1)* $e = 10$; $a = 5$; *2)* $e = 10$, $b = 4$.

§ 91. Криві другого ступіня, як перерізи стіжкової поверхні.

З геометрії нам відомо, що коли взяти вісь P і просту L, що перехрещує дану вісь під якимось кутом α, то при обертанню цієї простої очеркнуться стіжкові поверхні, що матимуть спільний вершок у перехрестю творчої простої з віссю. Розглянемо всі можливі перерізи стіжкової поверхні площею.

Припустім, що якась проста L, перетинає в точці S вісь P під кутом α і обертається навколо цієї осі. Тоді ми одержуємо стіжок з вершком S.

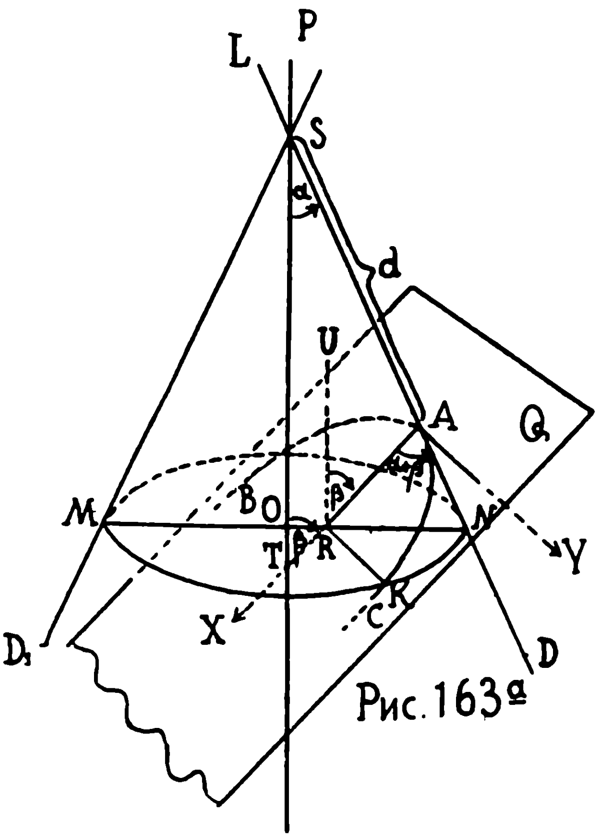


Рис. 163а

Хай головний осьовий переріз цього стіжка буде площа рисунку.

Поведемо тепер якусь площу Q під кутом β до осі P (на рисунку 163а взято її прямово до нашого осьового перерізу) і цим одержимо якусь криву BAC, що буде потрібним нам перерізом стіжкової поверхні.

Візьмім на цій кривій якусь точку K, і поведемо через неї другий переріз, прямовий до осі P. Цей переріз завжди буде колом з центром O на осі P, бо стіжок є обортовим тілом.

Відтинок RK, перехрестя площ MN і Q, прямових до площі нашого осьового перерізу D_1SD, буде прямом до відтинку RA, що лежить в площі цього перерізу.

Тому, візьмемо точку A (перехрестя кривої з творчою SD) за початок вісей, відтинок AR за вісь X—*ів*, а прям до AR, поставлений в точці A, за вісь $У$—*ів*. Тоді значники точки K кривої будуть: $x = AR$, а $y = RK$.

Щоб написати рівнання самої кривої, ми мусимо функціонально звязати ці значники x і y і через те розгляньмо коло MKN; в ньому RK є прямом, спущеним з точки K обводу на поперечник, а тому на основі геометричних властивостей кола, цей прям є середнім геометричним відтинків його поперечника, себ-то:

$$RK^2 = RN \,.\, RM, \text{ або}$$

$$y^2 = RN \,.\, RM \; \ldots\ldots \; (\mathrm{I})$$

З $\triangle\, RAN$, за теоремою синусів, маємо:

$$\frac{RN}{AR} = \frac{sn\, RAN}{sn\, ANR},$$

але: $AR = x$, $\sphericalangle\, RAN = \alpha + \beta$ (яко зовнішній у $\triangle$-у SAT) і $\sphericalangle\, ANR = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (з $\triangle$-а OSN);

тому: $$\frac{RN}{x} = \frac{sn\,(\alpha + \beta)}{cs\,\alpha},$$

або: $$RN = \frac{sn(\alpha + \beta)}{cs\,\alpha}\,x \; \ldots\ldots \; (\text{а}).$$

Далі, $$RM = MN - RN \; \ldots\ldots \; (\text{б}),$$

але, з $\triangle\, OSN$ маємо: $ON = \frac{MN}{2} = SN\, sn\,\alpha$, або $MN = 2SN\, sn\,\alpha$. де $SN = SA + AN = d + AN$.

AN легко обчислити з $\triangle ARN$ за теоремою синусів, а саме:

$$\frac{AN}{AR} = \frac{sn\,ARN}{sn\,ANR}\ .$$

або:
$$\frac{AN}{x} = \frac{cs\,\beta}{cs\,\alpha}\,,$$

(бо, ведучи просту $RU \parallel P$, ми одержимо $\sphericalangle AKU = \beta$, а $\sphericalangle ARN = \frac{\pi}{2} - \beta\Big)$.

Звідци:
$$AN = \frac{cs\,\beta}{cs\,\alpha}x,$$

а тому:
$$SN = d + \frac{cs\,\beta}{cs\,\alpha}x.$$

Таким чином MN буде мати вартість:

$$MN = 2dsn\,\alpha + \frac{2sn\,\alpha\,cs\,\beta}{cs\,\alpha}x \ \ldots\ldots \ (в).$$

Тепер, вставляючи вартости (а) і (в) у рівність (б), матимемо:

$$RM = 2dsn\,\alpha + \frac{2sn\,\alpha\,cs\,\beta - sn(\alpha+\beta)}{cs\,\alpha}x.$$

Розгорнувши $sn(\alpha+\beta)$ і зробивши спрощення, матимемо остаточно:

$$RM = 2dsn\,\alpha + \frac{sn(\alpha-\beta)}{cs\,\alpha}x \ \ldots\ldots \ (д).$$

Нарешті, вставляючи вартости (а) і (д) у рівність (I), одержуємо:

$$y^2 = \frac{2dsn\,\alpha.\,sn(\alpha+\beta)}{cs\,\alpha}x + \frac{sn(\alpha+\beta)sn(\alpha-\beta)}{cs^2\,\alpha}x^2,$$

або, означаючи:

$$\frac{dsn\,\alpha\,sn(\alpha+\beta)}{cs\,\alpha} = p \ \text{ і } \ \frac{sn(\alpha+\beta)sn(\alpha-\beta)}{cs^2\,\alpha} = q,$$

матимемо:

$$y^2 = 2px + qx^2 \; \ldots\ldots \; \text{(II)}.$$

А це, як нам відомо, є **вершковим рівнанням кривої другого ступіня** (еліпси, параболи, або гиперболи).

Проаналізуймо вартість q.

1) Знаменатель її є завжди додатньою величиною (яко квадрат $cs\,\alpha$).

2) $\sphericalangle\,\alpha$ — завжди меншій ніж $\frac{\pi}{2}$, бо колиб $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то у висліді обертання малиб не стіжок, а площу, і $\sphericalangle\,\beta$ — також вважаємо не більшим за $\frac{\pi}{2}$; тому $\alpha + \beta < \pi$ і $sn(\alpha + \beta) > 0$. Таким чином характер вартости q залежить лише від вартости $sn(\alpha - \beta)$.

Отже, коли 1) $\beta > \alpha$, то $sn(\alpha - \beta) < 0$ і $q < 0$.

Переріз є **еліпса;**

2) $\beta < \alpha$, то $sn(\alpha - \beta) > 0$ і $q > 0$.

Переріз є **гипербола;**

і 3) $\beta = \alpha$, то $sn(\alpha - \beta) = 0$ і $q = 0$.

Переріз є **парабола.**

Далі, беручи $\beta = \frac{\pi}{2}$, ми маємо:

$$1)\; p = \frac{d\, sn\,\alpha\, sn\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{cs\,\alpha} = d\, sn\,\alpha$$

$$2)\; q = \frac{sn\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) . \, sn\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{cs^2\,\alpha} = -1.$$

Тому рівнання (II) матимемо вигляд:

$$y^2 = 2dx\, sn\,\alpha - x^2,$$

або:

$$x^2 + y^2 - 2dx\, sn\,\alpha = 0.$$

Це, як бачимо, є **вершкове рівнання кола** з центром на осі X—ів у точці $O_1(d\,sn\,\alpha, O)$.

При $d = 0$ (переріз переходить через точку S) маємо:

$$x^2 + y^2 = 0,$$

що визначає точку.

Розгляньмо заразом і ті перерізи, що переходить через точку S — вершок стіжка.

В цьому разі $d = 0$, а тому:

$$p = \frac{d\,sn\,\alpha\,sn(\alpha + \beta)}{cs\alpha} = 0$$

і рівнання (II) має вигляд:

$$y^2 = qx^2,$$

або:

$$y = \pm\sqrt{q}\,.x \;\ldots\ldots\; \text{(III)}$$

Ми знаємо, що, коли $\beta > \alpha$, то $q < o$, а тому $\sqrt{q}$ — є уявна величина й рівнання $y = \pm\sqrt{q}\,.\,x$ не уявляють жадної геометричної лінійної величини [як доведено перед тим це є точка — сам вершок S, (рис. 163-b, образ a].

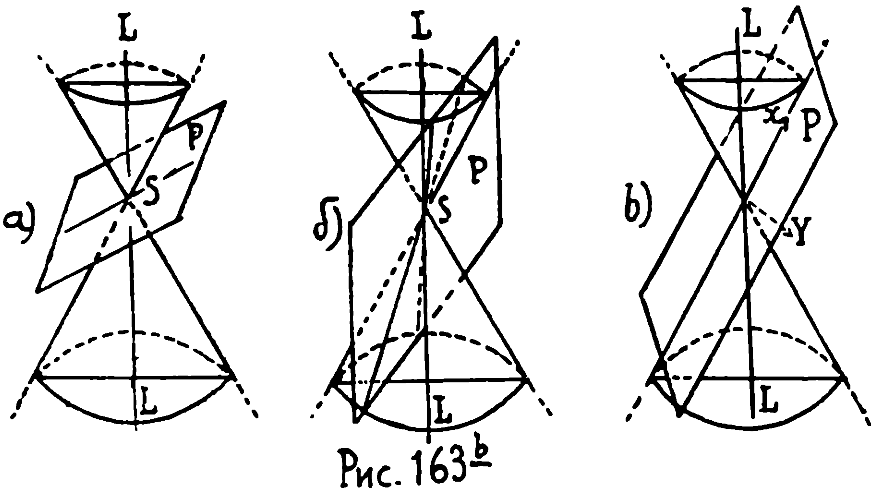


Рис. 163-b

Коли $\beta < \alpha$, то $q > o$ і рівнання:

$$y = \sqrt{q}\,.\,x$$

$$y = -\sqrt{q}\,.\,x$$

визначають дві простих (творчих) стіжка (рис. 163в, образ б).

Колиж $\beta = \alpha$, то $q = o$, а через те рівнання (III) обертаються в:

$$y = 0$$

і визначає одну просту, творчу стіжка (рис. 163-b образ в).

Всі висловлені нами міркування приводять до наступних тверджень:

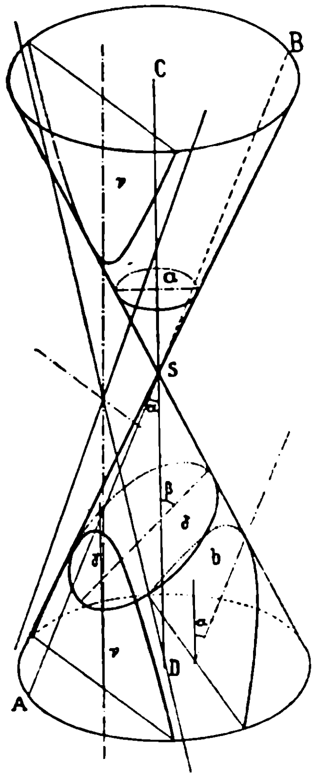


Рис.163.

1) кожний переріз стіжка, прямовий до осі, є **коло** (рис. 163, переріз а). Величина кола залежить від віддалення перерізу від вершка S стіжка. Луч R кола, починаючи від нуля (переріз переходить через вершок) зростає до безмежности.

2) кожний переріз стіжка, нахилений до осі його під кутом, більшим од творчого кута α, себ-то, коли: $\beta > \alpha$, є **еліпса.** Осі еліпси в залежности від віддалення перерізу від вершка S також зростають від нуля до ∞ (Рис. 163, переріз б). Коло є лише частковий випадок еліпси, коли нахил осі стіжка до перерізу є 90^0.

3) кожний переріз стіжка, рівнобіжний до його творчої, є **парабола** (рис. 163, переріз в).

Цей переріз переходить у просту, коли площа перерізу переходить через вершок стіжка й пристає до творчої (дотикається поверхні стіжка).

4) кожний переріз стіжка, нахилений до осі його під кутом $\beta < \alpha$ — є **гипербола.** Коли цей переріз переходить через вершок S, то перетворюється у дві прості, перехресні в точці S.

Звідци бачимо, що, всі розглянені нами, геометричні образи (не виключаючи, навіть, точки й простої) є відповідними перерізами стіжка.

Про те, що криві: коло, еліпса, гипербола й парабола є стіжковими перерізами знали ще в давній Греції. Вже перед 250 роком до Р.-Хр. грецький вчений Аполоній з Пергаму доводив за допомогою лише геометрії, що кожна із згаданих кривих є перерізом стіжка площею.

Тому не буде зайвим подати чисто геометричні доводи цього твердження.

I) Припустім, що маємо стіжок, очеркнутий простою SA, що обертається круг даної осі SL (рис. 163[1]).

Поведім площу P так, щоб вона перетинала всі творчі стіжка. Хай крива MKN буде та замкнена, поки-що невідома, крива, яку ми маємо визначити.

Введемо тепер у стіжок дві кулі: одну згори, щоб дотикалася поверхні стіжка і площі даного перерізу, а другу знизу, так само, щоб дотикалася поверхні стіжка і площі тогож перерізу. Ці кулі будуть мати центри на осі стіжка й дотикатимуться поверхні стіжка вздовж обводів кол UU_1 і VV_1

За площу рисунку ми беремо осьовий переріз стіжка, що переходить через F_1 і F_2 — точки дотику куль до даної площі P.

Хай K є довільна точка на кривій перерізу MKN, а SD — є творча стіжка, що переходить через цю точку K.

Сполучимо точку K з точками дотику F_1 і F_2 і матимемо:

1) $KF_1 = KC$ і 2) $KF_2 = KD$

(яко дотичні, поведені із зовнішньої точки K до куль, в першому випадку до кулі O_1, а у другому — до кулі O).

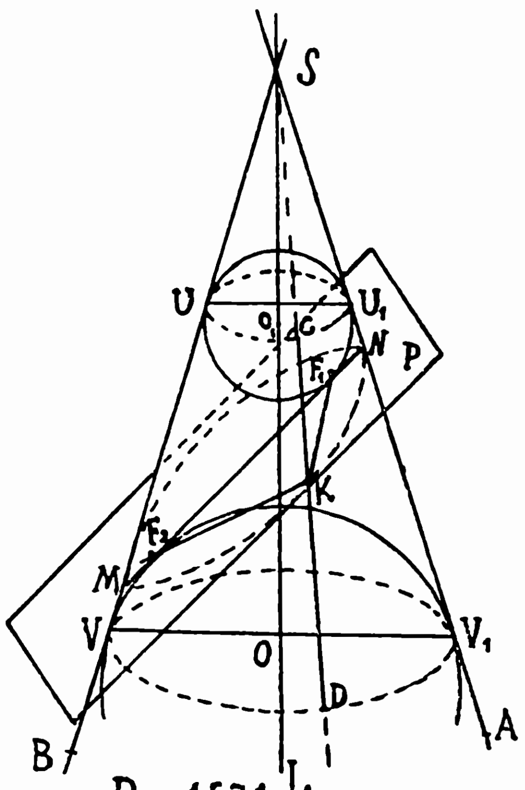


Рис. 163[1]

Таким чином:

$$KF_1 + KF_2 = KC + KD = CD.$$

Але відтинки всіх творчих стіжка, замкнені між колами дотику даних куль до поверхні стіжка, а разом і CD, є рівні між собою, а тому, деб на кривій перерізу ми не взяліб точку K, завжди існуватиме рівність:

$$KF_1 + KF_2 = CD,$$

$$\text{або: } r_1 + r_2 = 2a$$

(де ми заміняли KF_1 — через r_1, KF_2 — через r_2 і CD — через $2a$). Отже, крива даного перерізу стіжка є геометричним осередком точок, що сума їх віддалень від двох загаданих точок F_1 і F_2 є величина стала.

Такий осередок точок, як нам відомо, зветься еліпсою.

II) Припустім тепер, що площа P перетинає обидві поверхні даного стіжка, створеного оборотом простої A_1A круг осі L (рис. 163[2]).

Введемо, як і попереднє, дві кулі, дотичні до поверхні стіжка вздовж обводів кол UU_1 і VV_1 і дотичні до площі P в точках F_1 і F_2.

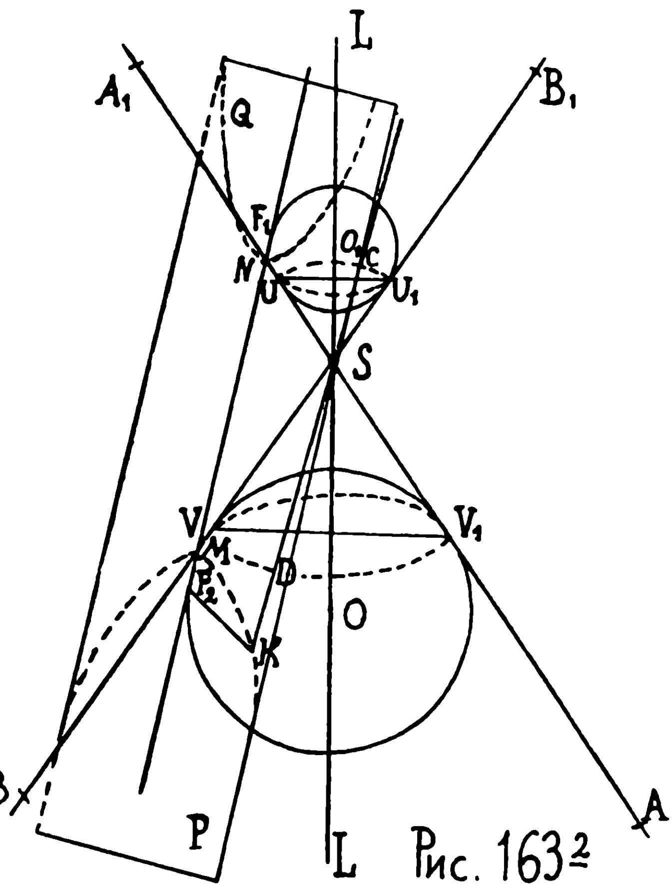


Рис. 163[2]

Коли взяти на кривій перерізу стіжка площею P, якусь точку K і сполучити її з точками F_1 і F_2, а також повести через неї творчу KDC, то матимемо:

$$1)\ KF_2 = KD \text{ і } 2)\ KF_1 = KC$$

(яко дотичні, поведені із зовнішньої точки до куль, в першому випадку — до кулі O, а у другому — до кулі O_1).

Тому: $$KF_1 - KF_2 = KC - KD = DC.$$

З огляду на те, що відтинки всіх творчих стіжках замкнені між колами дотику даних куль до поверхні стіжка, а разом і DC є рівні між собою. то, деб ми не взялиб на кривій перерізу точку K, завжди існуватиме доведена рівність.

[Анальогичні виводи матимемо, взявши яку будь точку Q на другій галузі кривої перерізу].

Таким чином:

$$KF_1 - KF_2 = DC,$$

або:

$$r_1 - r_2 = 2a$$

(де ми заміняли KF_1 — через r_1, KF_2 — через r_2 і DC — через $2a$).

Це покавує, що крива даного перерізу є геометричним осередком точок, що ріжниця їх віддалень від обох загаданих точок F_1 і F_2 є величина стала.

Такий осередок точок, як нам відомо, зветься **гиперболою.**

III) Припустім ще, що дана площа P є рівнобіжна до якої небудь творчої стіжка, створеного обертанням простої AS круг осі LS і перетинає лише одну з його поверхень (рис. 163[3]).

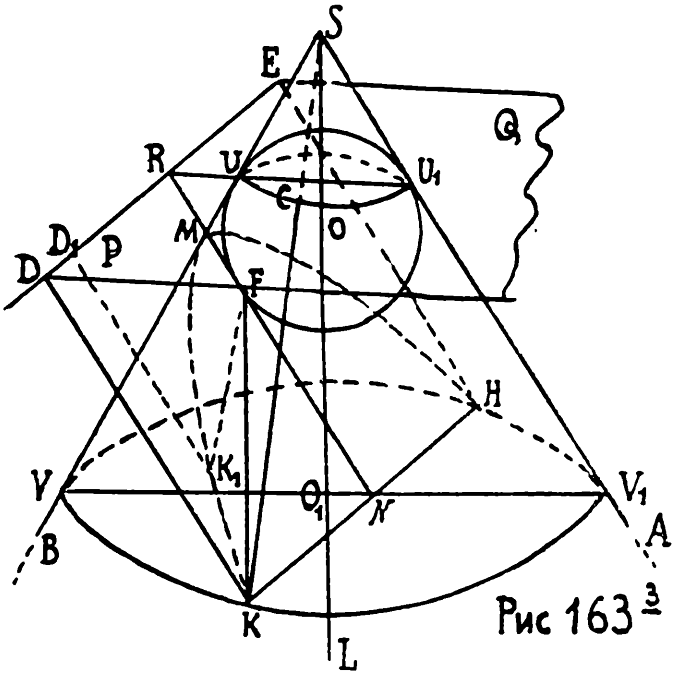


Рис 163[3]

Ведемо, таким чином як і раніш, кулю O, дотичну до поверхні стіжка вздовж обводу кола UU_1 що лежить в площі Q, і дотичну до площі перерізу P в точці F.

Коли взяти на кривій перерізу KMH яку будь точку K і сполучити її з точкою F, а також повести через неї творчу KS, то одержимо дві дотичні KF і KC, поведені до кулі O із зовнішньої точки K.

Тому:

$$KF = KC.$$

Обчислимо відтинок KC.

Коли через точку K повести площу, прямову до осі стіжка, то утвориться коло VV_1 і всі відтинки творчих, замкнені між обводами кол UU_1 і VV_1 (творчі стіжкового пня), будуть між собою рівні.

Тому: $$CK = UV = U_1V_1$$

Але з геометрії відомо, що відтинки рівнобіжних, замкнені між рівнобіжними площами, є рівні, а через те:

$$U_1V_1 = NR = KD.$$

Таким чином: $$CK = KD,$$

а звідці. $$KF = KD.$$

Крива KMN, точка F, проста KD і проста DE лежать в площі P. (при чому $DE \perp RN$, бо площі P і Q прямові до площі рисунку, тому й руб ED, їх перехрестя, є прямовий до тієїж площі й таким чином, мусить бути прямом до простої RN, що лежить в площі рисунку і перетинає DE).

Де-б ми не брали на кривій перерізу точку K, завжди доведемо, що віддалення KF буде рівне з відповіднім відтинком KD (напр. $K_1F = K_1D_1$); а через те крива KMH є геометричним осередком точок рівновіддалених від даної точки F і простої DE.

Такий осередок точок, як ми знаємо, зветься **параболою.**

Всі, тут наведені нами, міркування дають геометричні доводи того, що криві другого ступіня є певного роду перерізами стіжкової поверхні площею.

§ 92. Загальне рівнання другого ступіня від двох змінних (його геометрична интерпретація).

При аналітичному розгляді всіх цих геометричних образів, ми переконалися, що вони визначаються або рівнанням першого ступіня (проста), або рівнанням другого ступіня (еліпса з колом, парабола й гипербола). При цьому ми спостерегли, що всі рівнання другого ступіня, що відзначають розглянені нами геометричні образи (стіжкові перерізи), ніколи не мають члена, що містить у собі здобуток змінних (xy). Таким чином може повстати два припущення: або 1) рівнання другого ступіня з двома змінними в загальному своєму вигляді ніколи не визначає якогось геометричного образу, або 2) таке загальне рівнання не дає нам уяви геометричного образу лише тому, що нами невідповідно бралося положення системи координат, себ-то можна довести, що завжди є можливість вибрати таке положення координатних осей, що загальне алгебричне рівнання другого ступіня визначатиме при тих або инших умовах який небудь із даних стіжкових перерізів.

Припустім, що при повороті координатних осей на якийсь кут a, ми досягли-б того, що загальне алгебричне рівнання набрало форму, що визначає один із стіжкових перерізів (себ-то дане загальне алгебричне рівнання при цьому повороті малоб сочинника при здобуткові xy рівного з нулем).

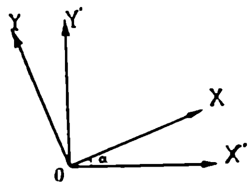


Рис.164.

Тоді питання наше було-б розвязане й лишилося-б нам переконатися, чи існує реально такий кут a і яка його вартість?

Для цього припустім, що при даному положенню системи визначних осей XY, якась крива визначається загальним алгебричним рівнанням другого ступіня:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = O \quad \ldots . \quad (1)$$

Повернемо осі координат навколо свого початку на якийсь кут a. Тоді, як ми вже доводили, взори перетворення будуть:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' cs\, a - y' sn\, a \\ y &= x' sn\, a + y' cs\, a \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad (2)$$

Вставивши вартости x і y з рівнань (2) у рівнання (1), одержуємо:

$$A(x' cs\, a - y' sn\, a)^2 + B(x' sn\, a + y' cs\, a)^2 +$$
$$+ C(x' cs\, a - y' sn\, a)(x' sn\, a + y' cs\, a) +$$
$$+ D(x' cs\, a - y' sn\, a) + E(x' sn\, a + y' cs\, a) + F = O.$$

Після зведення членів і винесення змінних за дужки матимемо:

$$x'^2\,(Asn^2 a + Csn\, a\, cs\, a + Bsn^2 a) + x'y'\,(-Asn2\,a + Ccs2\,a +$$
$$+ Bsn2\,a) + y'^2\,(Asn^2 a - Csn\, a\, csa + Bcs^2 a) +$$
$$+ x'\,(Dcs\, a + Esn\, a) + y'\,(Dsn\, a + Ecs\, a) + F = O.$$

Звідци ми бачимо, що від члена, який містить в собі здобуток невідомих $x'y'$, можемо позбавитися лише тоді, коли підберемо $\sphericalangle\, a$ так, щоб сочинник:

$$-Asn2\,a + Ccs2\,a + Bsn2\,a = O.$$

Тому для визначення потрібної вартости кута a треба розвязати гоніометричне рівняння:

$$-Asn2a + Ccs2a + Bsn2a = O, \text{ або}$$
$$Ccs2a - (A - B)sn2a = O;$$

звідци:

$$Ccs2a = (A - B)sn2a,$$

або:
$$tg2a = \frac{C}{A-B}.$$

Проаналізуємо дріб $\frac{C}{A-B}$:

1) коли $C \neq O$, а $A = B$, то $tg2a = \infty$, кут $2a = 90^0$; $a = 45^0$,

2) колиж $C = O$ і $A \neq B$, то само алгебричне рівняння є вже рівнянням стіжкового перерізу без перетворення, бо:

$$tg2\alpha = \frac{O}{A-B} = O; \quad \alpha = O;$$

3) коли $C = O$ і $A = B$, тоді $tg2a = \frac{O}{O}$ — неозначеність.

Це й справді так, бо при $C = O$ і $A = B$ — алгебричне рівняння вже до перетворення є рівнянням кола. Рівняння ж кола не міняє своеї форми, як би ми не обертали визначні осі.

Нарешті, в загальному випадкові, 4) коли $A \neq O$, $B \neq O$, $C \neq O$ і $A \neq B$, ми завжди знайдемо відповідний $\sphericalangle \alpha$, бо $tg\,\alpha$ може мати ріжні вартости від $-\infty$ до $+\infty$.

Таким чином ми довели, що:

кожне алгебричне рівняння 2-го ступіня від двох змінних завжди визначає який небудь із стіжкових перерізів і може бути зведене до так званої форми алгебричних рівнань стіжкових перерізів звичайним обертанням визначних осей на відповідній кут навколо їх початку.

Отже, кожне загальне алгебричне рівняння другого ступіня вигляду:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = O$$

завжди можна звести до вигляду:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = O$$

А це рівняння, як ми доводили під час проходження курса, завжди визначає який небудь стіжковий переріз, а саме:

I) Коли $A \neq B \neq O$ і знаки у A і B є однакові, то це алгебричне рівнання визначає **еліпсу**.

В окремому випадку, коли $A = B \neq O$, воно є рівнанням **кола**.

II) Коли $A \neq B \neq O$ і знаки у A і B є ріжні, то це алгебричне рівнання визначає **гиперболу**.

В окремому випадку, коли при ріжних знаках $A = B \neq O$, воно є рівнанням **рівнобічної гиперболи**.

III) Коли $A = O$, $B \neq O$, або $A \neq O$, $B = O$, то це алгебричне рівнання визначає **параболу**.

Коли крива визначається рівнанням:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots (P).$$

(без члену їз здобутком змінних xy),

то ці ознаки можна зінтерпретувати, ще так:

Коли здобуток сочинників AB, або їх відношення (з їх знаками) буде:

1) $AB > O$,

крива є е л і п с а;

2) $\frac{A}{B} = 1$

крива є к о л о;

3) $AB < O$,

крива є г и п е р б о л а;

4) $\frac{A}{B} = -1$,

крива є р і в н о б і ч н а г и п е р б о л а;

5) $AB = O$,

крива є п а р а б о л а.

При чому, коли:

6) $\frac{A}{B} = O$

крива є п а р а б о л а з віссю, рівнобіжною до осі X—*ів*

і 7) $\frac{A}{B} = \infty$

крива є п а р а б о л а з віссю, рівнобіжною до осі $У$—*ів*.

Розгляньмо ще де-які можливі випадки змін алгебричного рівнання від перетворення системи координатних осей:

I. Коли при перетворенню до нових координат в алгебричному рівнанню *(P)* сочинники $D = E = F = O$, то рівнання $Ax^2 + By^2 = O$ визначає або точку, бо осі кривої $a = b = o$, або нічого, коли дає уявні вартости x та y.

II. Коли при перетворенню до нових координат рівнання *(P)* обертається в $Ax^2 - By^2 = O$, то воно визначатиме дві перехрещені прості:

$$(x\sqrt{A} + y\sqrt{B})(x\sqrt{A} - y\sqrt{B}) = O;$$

звідци:

$$y = -\sqrt{\frac{A}{B}}\cdot x; \quad y = +\sqrt{\frac{A}{B}}\cdot x.$$

III. Коли при перетворенню до нових координат в алгебричному рівнанню *(P)* одночасно $A = D = O$, або $B = E = O$, то одержані рівнання;

1) $By^2 + Ey + F = O$,

і 2) $Ax^2 + Dx + F = O$

визначають або рівнобіжні прості, або одну просту, або ні одної простої, бо ці квадратові рівняння є здобутком лінійних чинників, а саме, коли будемо вважати α, β, γ і δ за розвязки даних рівнань, то:

1) $B(y - \alpha)(y - \beta) = O$, 2) $A(x - \gamma)(x - \delta) = O$.

А звідци маємо:

1) $y = \alpha$; $y = \beta$; 2) $x = \gamma$; $x = \delta$.

Це є або: 1) дві прості рівнобіжні парами між собою, коли $\alpha \neq \beta$; $\gamma \neq \delta$, або 2) по одній простій, коли: $\alpha = \beta$ і $\gamma = \delta$, або, нарешті, 3) не дають жадної геометричної величини, коли α, β, γ і δ — є уявні величини.

і IV. Коли після перетворення до нових координат алгебричне рівнання обертається в:

$$Cxy + F = O,$$

то це, як ми вже раніш доводили, є рівнання гиперболи зглядно її асимптот, взятих за координатні осі.

§ 93. Виразник (дискрімінант) рівнання другого ступіня.

З аналізи алгебричного рівнання 2-го ступіня ми переконалися, що кожне рівнання другого ступіня з двома змінними завжди визначає який небудь із стіжкових перерізів (крім випадків, коли це рівняння має уявні розвязки). Цілком зрозуміло, що виникає питання: чи не можна відразу без перетворення до нових осей дізнатися, який саме з перерізів стіжка визначає дане алгебричне рівняння в своїй загальній формі:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = O?$$

Для цього зробимо деякі висновки з попередніх аналіз взаємного положення простої і кривої другого ступіня, а саме:

1) **Еліпса** завжди перехрещується з простою на обмеженому віддаленню (не існує точок перехрестя на безмежности);

2) **Парабола** може перехрещуватися на безмежности лише з одною простою (поперечник), що переходить через загадану точку площи, рівнобіжно до осі параболи;

й 3) **Гипербола** може перехрещуватися на безмежности разом з двома простими, що переходять через дану точку площі (центр гиперболи). Ці прості, як ми знаємо, звуться **асимптотами**.

Скористаємося з цих прикмет кривих для нашої мети.

Візьмім якусь криву, що визначається рівнанням:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = O$$

і просту $y = mx$, що переходить через початок осей і знайдемо точки їх перехрестя (для чого мусимо розвязати дані рівнання, яко систему).

Вставляючи з другого рівнання в перше вартість y, одержимо:

$$(A + Cm + Bm^2)x^2 + (D + Em)x + F = O$$

звідци:

$$x = \frac{-(D + Em) \pm \sqrt{(D + Em)^2 - 4F(A + Cm + Bm^2)}}{2(A + Cm + Bm^2)}$$

Щоб дана проста мала перехрестя з кривою на безмежности (хоч в одній точці) треба, щоб знаменатель вартости x рівнявся з O, себ-то:

$$A + Cm + Bm^2 = O.$$

Звідци визначимо кутовий змінник простої m:

$$m = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4AB}}{2B}$$

і розглянемо виразник рівнання:

$$D = C^2 - 4AB.$$

I) Коли: $C^2 - 4AB < O$ — то вартости змінника m є уявні, себ-то простих, що перехрещуються з кривою на безмежности немає.

Тому, згідно з висновком (1) ця крива є **еліпсою.**

II) Коли: $C^2 - 4AB > O$ — тоді кутовий змінник має 2 вартости. Тому існує дві простих, що переходять через початок осей і перехрещуються з кривою на безмежности. Згідно з висновком (3), ця крива є **гиперболою.**

і III) Коли: $C^2 - 4AB = O$ — тоді кутовий змінник має лише одну вартість $\left[m = \frac{-C}{2B}\right]$, тому існує лише одна проста, що переходить через початок осей і перехрещується з кривою на безмежности. Згідно з висновком (2), ця крива є **параболою** (а проста її віссю).

Таким чином:

Ріжниця між квадратом сочинника при здобуткові невідомих і четверним здобутком сочинників при квадратах невідомих ($C^2 - 4AB$) зветься виразником рівнання другого ступіня, бо він означує безпосередньо рід кривої, яку визначає дане алгебричне рівнання.

А саме крива є:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I)} & \textbf{Еліпсою, коли} & C^2 - 4AB < O \\ \text{II)} & \textbf{Гиперболою, коли} & C^2 - 4AB > O \\ \text{III)} & \textbf{Параболою, коли} & C^2 - 4AB = O \end{array}\right\} \quad (136)$$

§ 94. Задачі до розділу III.

Криві другого ступіня.

Ч — 295. *Написати рівнання параболи:*

1) що має вісь рівнобіжну до осі X — ів і переходить через точки: A(0,3), B(1, — 1) і C(4,6), або через точки: M(7,3) N(3,2) і P(1,1);

2) що має вісь рівнобіжну до осі У — ів і переходить через точки: $A(-1, 6^2/_3)$, $B(-4, 17^1/_2)$ *і* $C(-1, 10)$;

[$1)\ 19y^2 - 84x - 59y + 6 = 0;\ (y - {}^1/_2)^2 = (x - {}^3/_4);$ $2)(x-5)^2 = 6\ (y-4)$].

Ч — 296. *Написати рівнання спільної дотичної до парабол:* $y^2 = 6x$ *і* $x^2 = 48y$. [$x + 2y + 6 = 0$].

Ч — 297. *Через точки перехрестя простої* $x + y = 3$ *з параболою* $y^2 = 4x$, *повести дотичні та обчислити поле трикутника, що утворюють ці дотичні з даною простою.*

[$S = 32$ *кв. од.*].

Ч — 298. *Знайти точки перехрестя параболи:* $y^2 = 2x$ *з колами: а)* $x^2 + y^2 = 80$ *і б)* $(x - 10)^2 + y^2 = 100$.

[*а)* $M_1(8,4)$, $M_2(8,-4)$ *б)* $N_1(0,0)$; $N_2(18,6)$ *і* $N_3(18,-6)$].

Ч — 299. *Перехрестя простої* $y = x + 1$ *з параболою* $y^2 = 6x$ *сполучені з вогнищем. Обчислити поле трикутника, замкненого цими простими.* $\left[S = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \text{ кв. од.} \right]$.

Ч — 300. *Вершок параболи, якої вісь є віссю Х—ів, лежить у центрі, а вогнище її на обводі кола:* $x^2 + y^2 = 81$. *Яку дугу кола обіймає парабола?*

[*Точки перехрестя* $x_1 = 9(\sqrt{5} - 2)$, $y_1 = \pm 18 \sqrt{\sqrt{5} - 2}$, *центральний кут* $2\alpha = 152^\circ\ 41'\ 30''$].

Ч — 301. *В точці, що її рядна* $= \dfrac{p}{2}$ *повести до параболи* $y^2 = 12x$ *дотичну й прямову. Обчислити відтинки їх, а також піддотичну й підпрямову їх.*

[$t = n = 6\sqrt{2}$; $S_n = S_t = 6$].

Ч — 302. *1) Правильний трикутник уведено в параболу:* $y^2 = 12x$ *так, що один з його вершків лежить у вершку параболи; 2) теж, — правильний* Δ — *к спирається своїми вершками на вогнище і дуги параболи.*

Обчислити боки цих Δ *— ів.*

[$a = 24\sqrt{3}$ $b_1 = 12(2 + \sqrt{3})$, $b_2 = 12(2 - \sqrt{3})$].

Ч — 303. *Написати рівнання траекторії, що очеркне тіло, кинуте рівнобіжно до позему з початковою скорістю* $v_0 = 200$ *m/sk (за прискорення тягару g прийняти наближену величину 1000 cm. у секунду).* $\left[y^2 = -\dfrac{x^2}{8000} \right]$.

Ч — 304. *Довести, що дотичні, поведені до параболи з якої небудь точки директрити, взаємно прямові і навпаки — довести, що директрита параболи є геометричне місце перехресть взаємно прямових дотичних, поведених до параболи.*

Ч — 305. *Під яким кутом зору видко параболу* $y^2 = 6x$ *з точки* $M(2, 4)$? [$150^\circ\, 15'\, 20''$].

Ч — 306. *Написати рівнання дотичних до параболи:* $9y^2 - 4x = 0$, *рівнобіжної та прямової до простої* $y = 5x + 40$.
[$y = 5x + {}^1/_{45}$].

Ч — 307. *Обчислити відрізки:*

1) *параболи:* $y^2 = 20x$, *відтятий січною:* $3y = 5x + 5$;
2) *параболи:* $y^2 = 24$, *відтятий січною:* $2y - 2x = 9$;
3) *параболи:* $y^2 = 8x$, *відтятий січною:* $2y = x$?
[1) ${}^{64}/_{15}$ *кв. од.* 2) 12 *кв. од.*; 3) 85,(3) *кв. од.*].

Ч — 308. *Яке віддалення від вершка параболи:* $y^2 = 10x$, *здруженої з віссю параболи, тятиви, коли вона утворює відрізок рівний 40 кв. од?* [$x = \sqrt{90}$].

Ч — 309. *Обчислити поле площі, замкненої дугами кола:* $x^2 + y^2 - 2x = 8$, *та параболи:* $y^2 = 2x$.
[S = 8,535 *кв. од.*].

Ч — 310. *Знайти перехрестя кривих з простою:*

1) $\dfrac{x^2}{25} + y^2 = 1$ *і* $3x = 5(4x + 5)$; 2) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ *і* $y = 2x - 10$; 3) $x^2 - 4y^2 = 4$ *і* $y = 2(x - 1)$; 4) $4x^2 + 9y^2 - 24x - 18y + 9 = 0$ *і* $3y - 2x = 3$;

Ч — 311. *Написати рівнання дотичних до еліпси:* $3x^2 + 5y^2 = 75$, *рівнобіжних: 1) до простої* $x - 5y = 10$ *і 2) до* *простої* $2y + x = 0$. *Теж — написати рівнання дотичної в точці* $(x > 0{,}12)$ *до гиперболи* $25x^2 - 36y^2 = 900$.

[1) $\pm (x - 5y) = 20$, 2) $y = -{}^1/_2 x + 5$; $y = -\frac{x}{2} - 7$; $65x - 72y = 150$].

Ч — 312. *Повести через точку* $(-3{,}2, 1{,}8)$ *дотичну й прямову до еліпси:* $9x^2 + 16y^2 = 144$ *і обчислити відтинки їх, а також піддотичну й підпрямову.*

[$t = n = {}^9/_5 \sqrt{2}$; $S_t = S_n = 1{,}8$].

Ч — 313. *В яких точках гиперболи:* $9x^2 - 7y^2 = 63$, *поведені через них, лучі - вектори взаємно прямі.*

[$x = \pm {}^5/_4 \sqrt{7}$; $y = \pm {}^9/_4$].

Ч — 314. *Написати рівнання дотичних до гиперболи:* $4x^2 - 9y^2 = 900$, *1) рівнобіжної і 2) прямової до простої* $6x + 5y = 6$.

Ч — 315. *Через точки перехрестя кола:* $x^2 + y^2 = 16$ *і еліпси:* $9x^2 + 25y^2 = 225$, *повести дотичні й обчислити кут, замкнений ними.* [$a = 61^0 55' 38''$].

Ч — 316. *Написати рівнання дотичних до гиперболи:* $4x^2 - 9y^2 = 36$: *прямових до простої,* $9x + 10y = 0$. *Теж—написати рівнання прямової до гиперболи:* $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{100} = 1$, *рівнобіжної до простої:* $x = 1 - {}^5/_6 y$.

[1) $9y = 10x \pm 24$; 2) $18x + 15y = \pm 650$].

Ч — 317. *Довести, що еліпса:* $9x^2 + 25y^2 = 225$ *і гипербола:* $3x^2 - y^2 = 12$ *перехрещуються під прямим кутом.*

Ч — 318. *Написати рівнання гиперболи, що має головну вісь* $2a = 6$, *а кут між асимптотами:* $2\alpha = 60^0$.

[$x^2 - 3y^2 = 9$].

Ч — 319. *Обчислити кут між асимптотами гиперболи:* $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. [$2\alpha = 67_0 22' 42''$].

Ч — 320. *Обчислити віддалення вогнища гиперболи від асимптот?* [$d = b$].

Ч — 321. *Ексцентриситети гиперболи лінійний: $e = 12$, а числовий $\varepsilon = 3$. Обчислити кут між асимптотами.*

[$2\alpha = 141^0\ 3'\ 26''$].

Ч — 322. *Знайти точки перехрестя кола: $x^2 + y^2 - 10x = 0$ з асимптотами гиперболи: $16x^2 - 9y^2 = 144$.*

[$x_1 = y_1 = 0;\ x = 3{,}6;\ y = \pm 4{,}8$].

Ч — 323. *Для яких точок гиперболи: $x^2 - 16y^2 = 16$ лучі-вектори утворюють прямокутник з полем 52 кв. од.?*

[$x_{1,2} = \pm 8$ і $y_{1,2} = \pm \sqrt{3}$].

Ч — 324. *Знайти геометричний осередок центрів кол, що переходять через дану точку A і дотикаються даного кола з лучем r.*

Розвязок. Початок осей беремо в центрі даного кола, а за вісь X — ів просту, що сполучує центр з даною точкою A. Припустім, що точка загадана віддаленням d від центру даного кола. Тоді значники точки A будуть: $A(d, o)$. Означимо значники центра рухомого кола через $O_1(x_1, y_1)$, а луч його через ϱ.

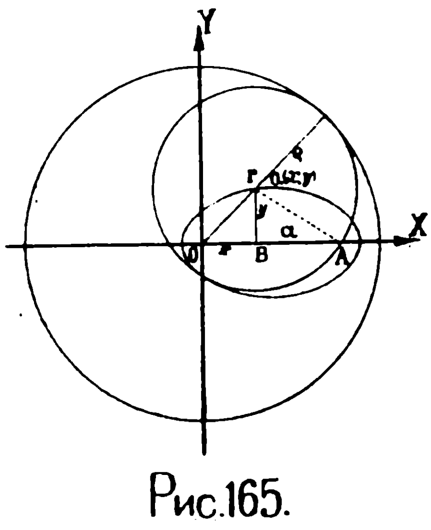


Рис.165.

1-й випадок: $d < r$, тоді з $\triangle\ OO_1B$ маємо: $OO_1^2 = BO_1^2 + OB^2$ або $(r - \varrho)^2 = x^2 + y^2$, але з $\triangle\ BO_1A$ маємо: $O_1A^2 = BO_1^2 + BA^2$ або $\varrho^2 = (d - x)^2 + y^2$. Тому $r - \sqrt{(d-x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, а звідци одержимо рівнання:

$$(r^2 - d^2)\, x^2 + r^2 y^2 - d\,(r^2 - d^2)x - \left(\frac{r^2 - d^2}{2}\right)^2 = 0.$$

Це є рівнання е л і п с и.

(Знайти значники центра, півосі і значники вогнищ).

2-й в и п а д о к, коли $d > r$. Розвязується так само. Геометричний осередок є г и п е р б о л а.

Ч — 325. *Знайти геометричний осередок вершків трикутників, що мають сталий обвід $2p = 24$ і дану основу $a = 8$.*

Ч — 326. *Знайти геометричний осередок точок, що їх віддалення від даної простої і від даної точки мають відношення: 1) 2 : 1 і 2) 1 : 2.*

Ч — 327. *В еліпсу: $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ ввести квадрат і довести, що його бік рівний з висотою рівнобічника, що має свої вершки у вершках еліпси.*

Ч — 328. *Точки перехрестя еліпси: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ з простою: $2x + 5y = 10$ сполучити з центром еліпси й обчислити поле утвореного Δ-ка.* $[S = 8$ *кв. од.*$]$.

Ч — 329. *Точки перехрестя простої: $2y = 3$ з еліпсою: $4x^2 + 9y^2 = 36$ сполучити з кінцямм великої осі й обчислити обсяг тіла, утвореного обертанням одержаного трапезу навколо осі X — ів.* $\left[V = \frac{9\pi(2 + \sqrt{7})}{4}\right]$.

Ч — 330. *Поверхня рівнобічного стіжка рівна з поверхнею еліпси, що має малу вісь: $2b = 12$, а ексцентриситет $e = 2\sqrt{7}$. Обчислити луч основи стіжка.* $\left[r = \sqrt{\frac{b\sqrt{b^2 + e^2}}{3}} = 4\right]$.

Ч — 331. *Еліптичний похилий конус має основу з осями: $2a = 34$ і $2b = 30$. Віддалення вершка конуса від центра основи $t = 10$. Знайти обсяг стіжка, коли висота його падає у вогнище еліпси.* $[V = 1602{,}21$ *куб. од.*$]$.

Ч — 332. *Обчислити висоту h прямого стіжка, що має основою коло: $3x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$, а бічницею поле еліпси: $9y^2 + 4x^2 = 36$.* $\left[h = \sqrt{\frac{2291}{15}} = 3{,}2\right]$.

Ч — 333. *Поле еліпси:* $16x^2 + 25y^2 = 1600$ *рівне з поверхнею прямого стіжкового пня, що має лучами основ:* $R = 5; r = 4$. *Знайти висоту стіжка?*

$$\left[h = \frac{2}{R+r}\sqrt{Rr(R-2r)\,(r-2R)} = \frac{4\sqrt{10}}{3}\right].$$

Ч — 334. *Еліптичний стятий прямий конус має висоту* $h = 10$, *а осі більшої основи:* $2a = 12$ *і* $2b = 8$. *Відношення великих осей основ рівне* $m : n = 2 : 1$. *Обчислити обсяг того конуса.*

$$\left[V = \frac{\pi\, a\, b\, h}{3m^2}\,(m^2 + n^2 + mn) = 140\,\pi\right].$$

РОЗДІЛ IV.

Косокутні й бігунові (полярні) координати.

§ 95. Мет точки, кинений в даному напрямі.

До цього часу під метом точки на яку небудь вісь ми розуміли основу пряма, спущеного на цю просту з даної точки. Такий мет має назву **прямового,** або **ортогонального мету точки.** Теперь ми узагальнимо це розуміння мету точки. Припустім, що ми маємо яку небудь точку P (рис. 166) і просту L, що береться за вісь мету точки P.

Коли до того матимемо ще який небудь визначений напрям MN, то повівши через точку P просту рівнобіжну MN, одержуємо на перехресті цієї рівнобіжної з віссю L точку Q — що є також метом P на L.

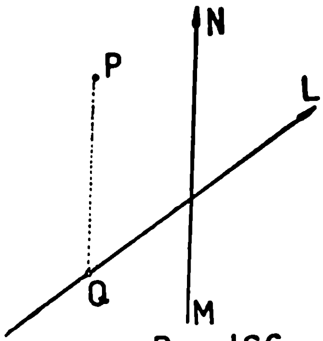


Рис. 166

Такий мет точки P будемо звати метом точки, киненим на вісь в даному напрямі MN.

Ясна річ, що ортогональниий мет точки P, є лише окремим випадком, коли напрям MN є прямовим до вісі L.

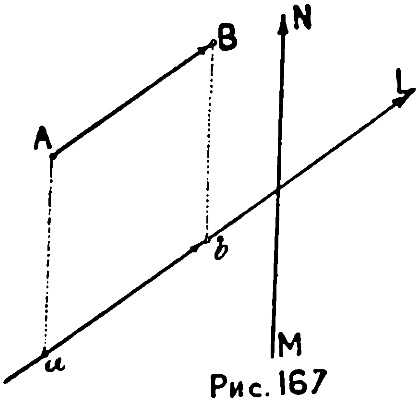


Рис. 167

Коли ми маємо який небудь відтинок AB, то його мет на вісь L, кинений в даному напрямі MN, буде визначатися, як і для ортогонального мету, відаленням, вздовж осі, мету кінця від мету початку відтинка AB. На рис. 167. Метом відтинку AB буде відтинок ab вісі L.

Що до напряму й знака мета ab, то вони підлягають тим самим умовам, що й для ортогонального мету, а саме:

1) За напрям мету відтинка на вісь береться напрям вздовж осі від мету початка відтинку до мету кінця його.

2) Цей напрям вважається за додатній, коли він є однаковий з напрямом метової осі, і — за від'ємний, коли він є противний до напряму цієї осі.

§ 96. Косокутні координати точки.

До цього часу ми користувалися виключно прямокутньою системою координат, себ-то за осі координат брали два взаємно прямових проміня X і Y.

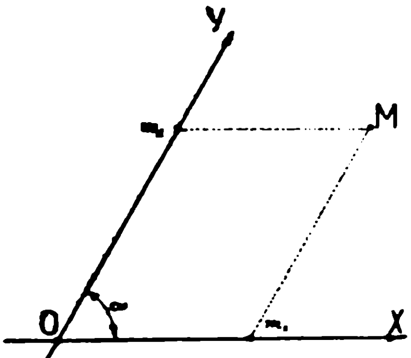


Рис. 168

Тепер за осі координат візьмемо два проміні, що перехрещуються під косим кутом $\omega \neq \frac{\pi}{2}$.

Таку систему координат будемо звати **косокутньою**. Положення кожної точки площі визначатимемо, так як і в прямокутній системі, віддаленнями від початку координат її метів на відповідні осі. Але при косокутній системі (рис. 168), ми будемо користатися не ортогональними метами цієї точки, а метами її, киненими на обидві осі в напрямності їх самих. Так мет m_1 точки M на вісі X — ів, є кинений в напрямі вісі Y — ів, а мет m_2 — навпаки. Таким чином, значниками точки M будуть: відтинковою — Om_1 і рядною — Om_2 (властиво m_1M).

Коли в косокутній системі координат правило знаків для значників, якої бажано, точки будемо вживати теж саме, що й в прямокутній, то положення цієї точки на площі буде цілковито визначеним.

Користування косокутньою системою координат дає в деяких випадках инші взори для визначення геометричних величин, а тому ми й приступимо до розвязання шерегу відповідніх задач.

§ 97. Визначення віддалень в косокутніх координатах.

Задача 1.

Знайти віддалення точки від початку координат.

Припустім, що дана точка M має значниками x і y, тоді (рис. 169), ми одержимо $\triangle\ OMm_1$, де віддалення точки M від початку координат визначається за теоремою Карно, а саме:

$$OM = r = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xycs(180^0 - \omega)}$$

або $r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xycs\omega}$ .... (137)

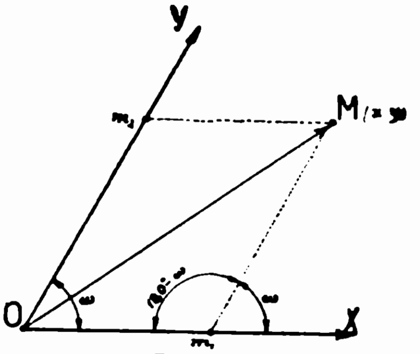


Рис. 169

де ω є координатний кут (кут між осями координат).

В окремому випадку, коли система координат прямокутня, себ-то $\omega = \frac{\pi}{2}$, то $cs\,\omega = o$, і ми одержуємо знайомий взір: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

Задача 2.

Знайти довжину відтинка через значники його кінців.

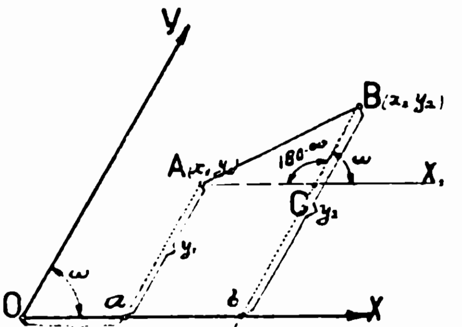


Рис. 170

Припустім, що відтинок AB обмежений точками $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$. Тоді (рис. 170):

$$AC = ab = x_2 - x_1;$$
$$BC = y_2 - y_1.$$

Із трикутника ABC за теоремою Карно маємо:

$$AB = r = \sqrt{AC^2 + BC^2 + 2AC.BCcs\omega},$$

а звідци:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)cs\omega} \quad .... \quad (138)$$

Беручи під увагу, що в косокутній системі координат мети відтинку на координатні осі також визначаються, як ріжниці значників кінця і початку цього відтинка, матимемо: $x_2 - x_1 = AB_x$ і $y_2 - y_1 = AB_y$,

а через те:

$$r = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2 + 2AB_x AB_y cs\omega} \quad .... \quad (139)$$

Що ж торкається вартостей значників точки, що ділить віддалення між двома точками (внутрішньо, або зовнішньо) в певному відношенню, то вони і в косокутній і в прямокутній системах визначаються однаково взорами:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \text{ і } y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

де λ — є кратність відношення частин відтинку.

Проаналізувати причину цього залишаємо самим студіюючим.

§ 98. Рівняння простої в косокутній системі координат і визначення її кутового змінника.

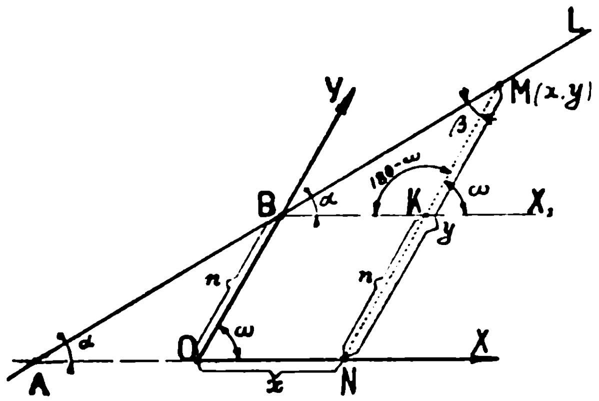


Рис. 171

I) Хай кут спаду простої L буде α (рис. 171). Візьмім на цій простій довільну точку $M(x,y)$ і збудуймо її значники: $x = ON$ і $y = NM$. Через точку B, перехрестя простої L з віссю $У$ — *ів*, поведемо рівнобіжну до осі X — *ів*. Тоді одержимо $\triangle\ BMK$, з якого за теоремою сінусів маємо:

$$\frac{KM}{BK} = \frac{sn\,\alpha}{sn\,\beta};$$

$$\text{але } \beta = \omega - \alpha;\ KM = y - n \text{ і } BK = x.$$

Тому:
$$\frac{y - n}{x} = \frac{sn\,\alpha}{sn(\omega - \alpha)}$$

Означимо відношення $\dfrac{sn\,\alpha}{sn(\omega - \alpha)}$ через m і матимемо:

$$\frac{y - n}{x} = m, \text{ або}$$

$$y = mx + n \quad \ldots . \quad (140)$$

Це є відоме канонічне рівнання простої, але з тою ріжницею, що кутовий змінник її є рівний:

$$m = \frac{sn\,\alpha}{sn(\omega - \alpha)} \;.\,.\,.\,. \;(141)$$

В окремому випадку, коли система координат є прямокутня, кут $\omega = \frac{\pi}{2}$, а тому $sn\,(\omega - \alpha) = cs\,\alpha$. Отже, тоді $m = tg\,\alpha$, що ми й мали раніш.

II) Залишаємо самим студіюючим переконатися, що відтинкове рівнання простої й в косокутній системі координат матиме ту ж форму, що й в прямокутній, а саме:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \;.\,.\,.\,. \;(142)$$

III) Виведемо ще прямову форму рівнання простої в косокутній системі координат. (При чому будемо користатися другого способу, вживаного для цієї мети в прямокутних координатах).

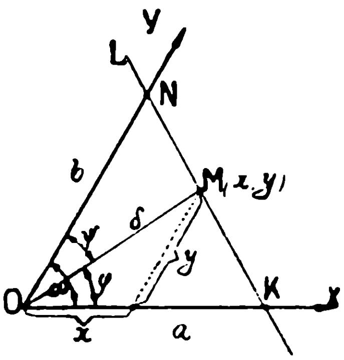


Рис. 172

З $\triangle$ *OMK* (рис. 172), маємо:

$$a = \frac{\delta}{cs\,\varphi},$$

а з $\triangle$ *ONM*, маємо:

$$b = \frac{\delta}{cs\,\psi}, \text{ або } b = \frac{\delta}{cs(\omega - \varphi)}.$$

Тому, вставляючи ці вартости a і b у відтинкове рівнання простої L, одержимо:

$$\frac{x}{\dfrac{\delta}{cs\,\varphi}} + \frac{y}{\dfrac{\delta}{cs(\omega - \varphi)}} = 1, \text{ або:}$$

$$x cs\,\varphi + y cs(\omega - \varphi) = \delta \;.\,.\,.\,. \;(143)$$

В окремому випадку, коли $\omega = \frac{\pi}{2}$, маємо $cs\,(\omega - \varphi) = sn\varphi$, а тому одержуємо знайоме нам в прямокутній системі рівнання:

$$x cs\,\varphi + y sn\,\varphi = \delta.$$

Висновок: Ясна річ, що віддалення точки від простої в косокутній системі координат матиме вартість:

$$d = x_0 cs\,\varphi + y_0 cs(\omega - \varphi) - \delta$$

де x_0 і y_0 є значники даної точки.

§ 99. Прямова форма алгебричного рівнання простої в косокутній системі координат.

Очевидно, що коли рівнання:

$$x cs\,\varphi + y cs(\omega - \varphi) - \delta = 0 \quad \ldots . \; (a)$$

$$\text{і} \qquad Ax + By + C = 0 \quad \ldots \ldots \; (б)$$

визначатимуть одну й ту саму просту, то завжди можна відшукати такий чинник λ, що матимемо тотожність:

$$x cs\varphi + y cs(\omega - \varphi) - \delta = \lambda(Ax + By + C).$$

Але в цьому разі:

$$\left.\begin{aligned} cs\,\varphi &= \lambda A \\ cs(\omega - \varphi) &= \lambda B \\ \text{і} \quad \delta &= -\lambda C \end{aligned}\right\} (в)$$

Чинник λ носить назву **нормувального** і рівности *(в)* дають нам можливість його визначити. А саме:

Другій рівності *(в)* даємо вигляд:

$$cs\omega cs\,\varphi - sn\omega\, sn\,\varphi = \lambda B, \text{ або}$$

$$\lambda(A cs\omega - B) = sn\omega sn\,\varphi$$

і підносимо обидві частини її до квадрату; тоді маємо:

$$\lambda^2(A^2 cs^2\omega + B^2 - 2ABcs\omega) = sn^2\omega sn^2\,\varphi.$$

Але $sn^2\,\varphi = 1 - cs^2\,\varphi = 1 - \lambda^2 A^2$, а тому:

$$\lambda^2(A^2 + B^2 - 2ABcs\omega) = sn^2\omega.$$

Звідци:

$$\lambda = \frac{sn\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcs\omega}} \quad \ldots . \; (144)$$

Отже:

$$\left.\begin{aligned} cs\varphi &= \frac{Asn\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcs\omega}} \\ cs(\omega - \varphi) &= \frac{Bsn\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcs\omega}} \\ \text{і} \qquad \delta &= \frac{-Csn\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcs\omega}} \end{aligned}\right\} \ldots . \; (145)$$

Очевидно, що перед корінем беруть знак противний знакові C (себ-то так, щоб вартість δ була завжди додатньою).

Помножаючи рівнання (б) на нормувального чинника, одержимо, нарешті, алгебричне рівнання простої в прямовій формі, а саме:

$$\frac{Asn\omega \, . \, x}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2ABcs\omega}} + \frac{Bsn\omega \, . \, y}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2ABcs\omega}} +$$

$$+ \frac{Csn\omega}{\pm\sqrt{A^2+B^2-ABcs\omega}} = O \quad \ldots . (146)$$

або:
$$\frac{(Ax+By+C)sn\omega}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2ABcs\omega}} = O, \ldots . (147),$$

де знак перед корінем є противний до знаку C.

$cs\,\omega$ завжди є не більший від одиниці, а тому нормувальний чинник є завжди величиною реальною і перетворення алгебричного рівнання простої в прямову форму завжди можливе.

Висновок. Очевидно, що віддалення точки від даної простої матиме вартість:

$$d = \frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2ABcs\omega}}\, sn\,\omega \ldots . (148)$$

Дослідити, що буде з рівнанням *(147)*, коли вартість координатного куту ω буде рівна з $\frac{\pi}{2}$?

§ 100. Визначення кута спаду простої на вісь X—ів.

Ми знаємо, що канонична рівнання простої буде:

$$y = mx + n$$

$$\text{де } m = \frac{sn\,a}{sn(\omega - a)}$$

Остання рівність дає можливість визначити кут a, як функцію кутового змінника m і координатного куту ω, а саме:

$$msn(\omega - \alpha) = sn a, \text{ або}$$

$$m\, sn\omega cs a - mcs\omega sn\alpha = sn a.$$

Поділимо всі члени на $cs\alpha$, й одержимо:

$$m s \omega - m cs\omega tg\alpha = tg\alpha.$$

А звідци:

$$tg\alpha = \frac{m sn\omega}{1 + m cs\omega} \; .... \; (149)$$

В окремому випадку, коли $\omega = \frac{\pi}{2}$, маємо $sn\omega = 1$ і $cs\omega = 0$, а тому $tg\alpha = m$. Цей взір ми мали в прямокутній системі координат.

§ 101. Визначення куту між даними простими.

Хай рівнання даних простих є:

$$y = m_1 x + n_1 \qquad (a)$$

$$y = m_2 x + n_2 \qquad (б)$$

де $m_1 = \frac{sn\,\alpha_1}{sn(\omega - \alpha_1)}$ і $m_2 = \frac{sn\,\alpha_2}{sn(\omega - \alpha_2)}$

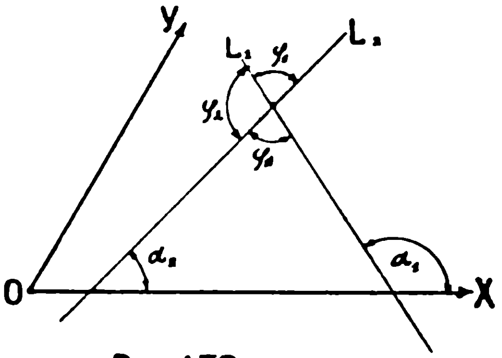


Рис.173

Ці дві прості завжди утворюють одночасно два кути φ_1 і φ_2, взаємного сповнення до π.

При чому (рис. 173) $\varphi_1 = \alpha_1 - \alpha_2$, а $\varphi_2 = 180^0 - (\alpha_1 - \alpha_2)$.

Звідци: $\quad tg\,\varphi_1 = -tg\,\varphi_2 = tg(\alpha_1 - \alpha_2)$, або:

$$tg\,\varphi = \pm\, tg(\alpha_1 - \alpha_2)$$

де „+“ відповідає вартості φ_1, а „—“ відповідає вартості φ_2. Але на підставі тригонометричного взору тангенса ріжниці кутів маємо:

$$tg\,\varphi = \pm \frac{tg\,\alpha_1 - tg\,\alpha_2}{1 + tg\,\alpha_1 tg\,\alpha_2}$$

З попереднього ж § ми знаємо, що:

$$tg\,\alpha_1 = \frac{m_1 sn\omega}{1 + m_1 cs\omega} \text{ і } tg\,\alpha_2 = \frac{m_2 sn\omega}{1 + m_2 cs\omega},$$

а тому:

$$tg\,\varphi = \pm \frac{\frac{m_1\,sn\omega}{1 + m_1\,cs\omega} - \frac{m_2\,sn\omega}{1 + m_2\,cs\omega}}{1 + \frac{m_1\,m_2\,sn^2\,\omega}{(1 + m_1 cs\omega)(1 + m_2 cs\omega)}},$$

або:
$$tg\,\varphi = \pm \frac{(m_1 - m_2) sn\omega}{1 + m_1 m_2 + (m_1 + m_2) cs\omega} \quad \ldots . (150)$$

Висновок 1.

Ясна річ, що, коли прості *(а)* і *(б)* є рівнобіжні, то $tg\,\varphi = o$; себ-то:

$$m_1 = m_2 \quad \ldots . (151)$$

Ця **умова рівнобіжности** двох простих в косокутніх координатах є ідентичною з аналогичною умовою в прямокутніх.

Висновок 2.

Тіж міркування доводять, що **умовою прямовости** двох простих *(а)* і *(б)* в косокутніх координатах є:

$$1 + m_1 m_2 + (m_1 + m_2) cs\omega = 0 \quad \ldots . (152)$$

Примітка. В прямокутніх координатах $\omega = \frac{\pi}{2}$ і $cs\,\omega = 0$, а тому одержуємо відому нам умову прямовости простих:

$$1 + m_1 m_2 = 0.$$

Визначимо кут між двома простими, ще й в тому разі, коли ці прості загадані алгебричними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (b).$$

Звідци ми маємо: $m_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ і $m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$.

Коли вставимо ці вартости у взір $tg\,\varphi$, то одержимо:

$$tg\,\varphi = \pm \frac{(A_1 B_2 - A_2 B_1)\, sn\omega}{(A_1 A_2 + B_1 B_2) - (A_1 B_2 + A_2 B_1)\, cs\omega} \quad \ldots\ldots (153)$$

Звідци маємо:

1) **умову рівнобіжности простих:**

$$A_1B_2 - A_2B_1 = O \;\ldots\ldots\; (154)$$

(та сама, що й в прямокутніх координатах)

2) **умову прямовости простих:**

$$(A_1A_2 + B_1B_2) - (A_1B_2 + A_2B_1)\, cs\omega = O \;\ldots\ldots\; (155)$$

Останньому взору можна дати ще такий вигляд:

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1\, cs\omega - B_1}{A_1 - B_1 cs\omega} \;\ldots\ldots\; (156)$$

Задача 3.

Написати рівнання простої, що переходить через точку $M(x_1, y_1)$ **прямово до простої** $A_1x + B_1y + C_1 = O$.

Рівнання кожної простої, що переходить через точку M буде:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = O, \text{ або:}$$

$$\frac{A}{B}(x - x_1) + (y - y_1) = O \;\ldots\ldots\; (c)$$

Але, коли ця проста є прямова до даної, то має виконуватися умова прямовости, а саме:

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1\, cs\omega - B_1}{A_1 - B_1\, cs\omega}.$$

Отже рівнання (c) матиме вигляд:

$$\frac{A_1\, cs\omega - B_1}{A_1 - B_1\, cs\omega} \cdot (x - x_1) + (y - y_1) = O,$$

або:

$$(A_1\, cs\omega - B_1)(x - x_1) + (A_1 - B_1\, cs\omega)(y - y_1) = O \;\ldots\ldots\; (157)$$

§ 102. Поле трикутника через значники його вершків в косокутніх координатах.

Припустім, що вершки даного трикутника визначаються в косокутній системі координат через значники $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Із геометрії ми знаємо, що поле трикутника ABC (рис. 174) вимірюється здобутком основи AB на пів висоти AD, себ-то:

$$S_{ABC} = \frac{AB.h}{2} \; \ldots\ldots \; (a)$$

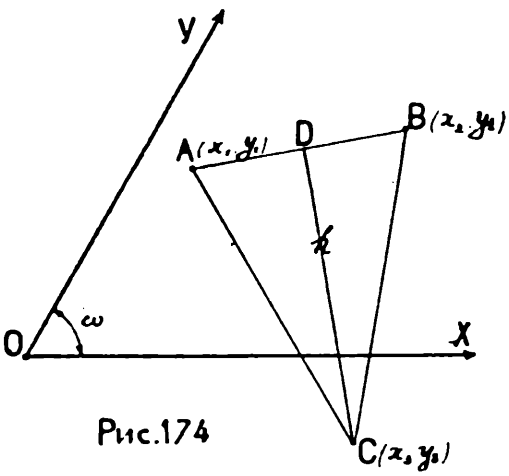


Рис.174

Довжина AB, яко відтинка між двома точками A і B, буде:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\, cs\omega} = r \ldots\ldots (б)$$

А рівняння цього боку, як відомо, має вигляд:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

або: $(x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0$

Це саме рівняння в прямовій формі, буде:

$$\frac{(x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 2(x_2 - x_1)[-(y_2 - y_1)]\, cs\omega}} = 0$$

або: $$\frac{(x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1)}{r} = 0 \ldots (в)$$

де r визначається рівністю *(б)*.

Тому висота трикутника h, яко віддалення точки $C(x_3, y_3)$ від простої *(в)*, визначиться:

$$h = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}{r} \,.\, sn\omega \ldots\ldots (г)$$

Нарешті, вставляючи вартости *(б)* і *(г)* в рівність *(а)*, матимемо:

$$S_{ABC} = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}{2} sn\omega$$

Числителя цього виразу можно перетворити до знайомого вже вам вигляду, а саме:

$$S_{ABC} = \frac{sn\omega}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)] \ldots\ldots (158)$$

На підставі нашого умовного означення цей взір можна написати ще й так:

$$S_{ABC} = \frac{sn\omega}{2} \sum_{k=1,2,3,1} \Delta x_k y_{k+1}$$

Примітка. Ясна річ, що й в косокутніх координатах умова простоположности кількох точок (умова того, що дані точки лежать на простій) лишається, та сама, що й для прямокутніх координат, бо $sn\omega$ — є величина стала і на рівність $\sum = 0$ не впливає.

§ 103. Перетворення косокутніх координат.

I. Очевидно, що, при **рівнобіжному перенесенню косокутніх координат**, взори перетворення будуть ті сами, що й для прямокутніх. (Чому?)

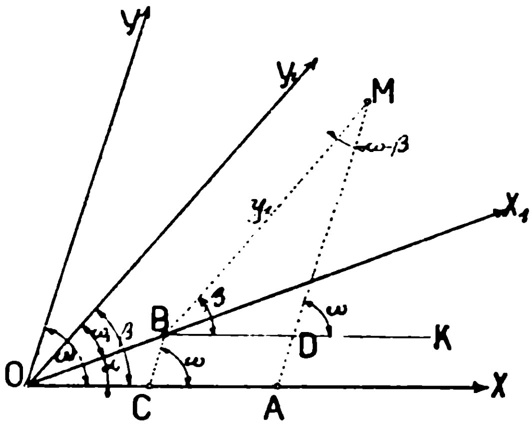


Рис.175

II. **Взори переходу від косокутніх координат до косокутніх, що мають спільний з першими початок.** Припустім, що XOY (рис. 175) є перша координатна система з координатним кутом ω, а X_1OY_1 є нова координатна система з координатним кутом ω_1. Означимо через α і β кути, що нові осі творять з віссю X—ів старої системи.

Звідци очевидно, що $\omega_1 = \beta - \alpha$.

Коли ми збудуємо значники якої небудь довільної точки M і в тих і в других координатах, а також поведемо прості BK і BC, відповідньо рівнобіжні до вісей X—ів та $У$—ів, то матимемо:

$$\left.\begin{aligned} x &= OA = OC + CA = OC + BD \\ y &= AM = AD + DM = DM + BC \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A)$$

$$x_1 = OB$$

$$y_1 = BM$$

Але, з трикутників OBC і MBD маємо:

$$1)\ \frac{OC}{sn(\omega - \alpha)} = \frac{BC}{sn\,\alpha} = \frac{OB}{sn(180^0 - \omega)} = \frac{x_1}{sn\omega}$$

$$2)\ \frac{BD}{sn(\omega - \beta)} = \frac{DM}{sn\,\beta} = \frac{BM}{sn(180^0 - \omega)} = \frac{y_1}{sn\omega}$$

Звідци:

$$1)\ OC = \frac{x_1 sn(\omega - \alpha)}{sn\,\omega}\ ;\ BC = \frac{x_1 sn\,\alpha}{sn\,\omega}$$

$$2)\ BD = \frac{y_1 sn(\omega - \beta)}{sn\,\omega}\ ;\ BM = \frac{y_1 sn\,\beta}{sn\,\omega}$$

Нарешті, вставляючи ці вартости в рівності (A), одержимо **взори перетворення косокутніх координат:**

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 sn(\omega - \alpha) + y_1 sn(\omega - \beta)}{sn\,\omega} \\ y &= \frac{x_1 sn\,\alpha + y_1 sn\,\beta}{sn\,\omega} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (159)$$

III. Взори переходу від прямокутніх координат до косокутніх.

Коли перші осі є прямокутні, то кут $\omega = \frac{\pi}{2}$, а тому в попередніх взорах:

$$1)\ sn\,(\omega - \alpha) = sn\,(90^0 - \alpha) = cs\,\alpha,$$

$$2)\ sn\,(\omega - \beta) = cs\,\beta$$

$$\text{і } 3)\ sn\,\omega = 1.$$

Отже, взори перетворення будуть:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 cs\, \alpha + y_1\, cs\, \beta \\ y &= x_1 sn\, \alpha + y_1 sn\, \beta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (160)$$

IV. Взори переходу від косокутніх осей до прямокутніх.

Коли нові осі прямокутні, то: $\omega_1 = \dfrac{\pi}{2}$;

$$\text{але } \omega_1 = \beta - \alpha, \text{ а тому } \beta = 90^0 + \alpha\,;$$

$$\omega - \beta = \omega - \alpha - 90^0 = -[\,90^0 - (\omega - \alpha)\,]$$

Отже:

$$sin\, \beta = cs\, \alpha\,; sin\,(\omega - \beta) = -sn\,[\,90^0 - (\omega - \alpha)\,] = -cs\,(\omega - \alpha).$$

Таким чином, вставляючи ці вартости в загальні взори перетворення (157), матимемо **взори переходу від косокутніх осей до прямокутніх:**

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 sin\,(\omega - \alpha) - y_1 cs\,(\omega - \alpha)}{sn\, \omega} \\ y &= \frac{x_1 sn\, \alpha + y_1 cs\, \alpha}{sn\, \omega} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (161)$$

Очевидно, що перехід від одної координатної системи до другої, що має з першою й ріжні початки й координатні кути, є комбінацією перетворень I і II (введення помічної координатної системи з новим початком, рівнобіжної до старої системи).

§ 104. Рівнання кола в косокутній системі координат.

На підставі міркувань, що ми прикладали в розділі ,,коло'' до виведення рівнань кола в прямокутній системі координат, можна написати рівнання кола й в косокутній системі, а саме:

I. Центрове рівнання: (рис. 176).

$$x^2 + y^2 + 2xy\, cs\omega = r^2 \;\ldots\ldots\; (162)$$

II. Загальне рівнання кола: (рис. 177).

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)\,(y - b)\, cs\omega = r^2 \;\ldots\ldots\; (163)$$

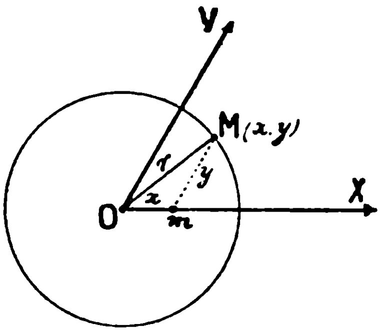


Рис.176

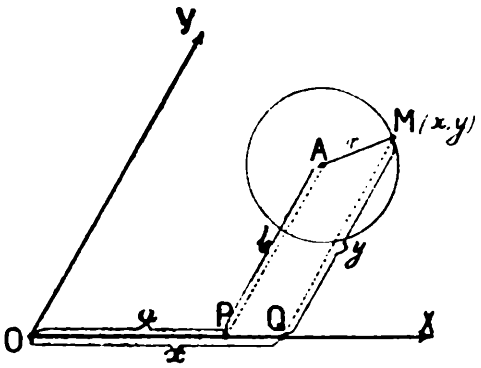


Рис.177

III. Загальне алгебричне рівнання кола.

Зносячи в рівнанню (163), дужки маємо:

$$x^2 + y^2 + 2xy\, cs\omega - 2(a + b cs\omega)\, x - 2(a cs\omega + b)\, y +$$
$$+ (a^2 + b^2 + 2ab cs\omega - r^2) = 0.$$

Помножаючи в загальному випадку на чинника k, одержимо:

$$k(x^2 + y^2 + 2xy cs\omega) - 2k(a + b\, cs\omega)\, x - 2k(a cs\omega + b)\, y +$$
$$+ k\,(a^2 + b^2 + 2ab cs\omega - r^2) = 0$$

Очевидно, загальне алгебричне рівнання 2-го ступіня від двох змінних вигляду:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

буде рівнанням кола тоді, коли вартости a, b і r визначатимуться реально з рівностей:

$$\left.\begin{aligned} &A = B = k; \\ &C = k cs\omega = A cs\omega; \\ &D = -k(a + b cs\omega); \\ &E = -k(a cs\omega + b); \\ \text{і}\;\; &F = k(a^2 + b^2 + 2ab cs\omega - r^2). \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Звідци ми бачимо, що конечною ознакою того, щоб загальне алгебричне рівнання 2-го ступіня від двох змінних було рівнанням кола в косокутніх координатах, є 1) рівність сочинників при квадратах змінних і 2) рівність сочинника при здобутку змінних із здобутком сочинника при квадраті змінних на косінус координатного кута.

Визначимо значники a і b центру кола.

Третє рівнання (I):

$$D = -k(a + bcs\omega), \text{ або } D = -A(a + bcs\omega)$$

за допомогою другого рівнання: $Acs\omega = C$, перетворюється в:

$$Aa + Cb + D = O \;\ldots\ldots\; \text{(II)}$$

Так само четверте рівнання (I):

$$E = -k(acs\omega + b),$$

перетворюється в:

$$Ca + Ab + E = O \;\ldots\ldots\; \text{(III)}.$$

Розвязуючи рівнання (II) і (III) одержимо:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{CD - AE}{A^2 - C^2}; \\ b &= \frac{CE - AD}{A^2 - C^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \;(164)$$

Як бачимо, значники центру кола визначаються цілком реально.

Вартість луча кола одержимо з рівности:

$$F = k(a^2 + b^2 + 2abcs\omega - r^2).$$

Але обчислення цієї вартости залишимо до вивчення теорії визначників (детерминантів).

§ 105. Бігунові, або полярні координати.

Припустім, що ми знаємо положення якої небудь точки P на площі й положення якої будь простої L, що переходить через точку P в певному напрямі (рис. 178).

В цьому разі, як ми вже розглядали, положення кожної иншої точки M буде цілковито визначатися за допомогою: 1) віддалення MP, точки M від даної точки P і 2) куту $MPL = \theta$ утвореного цим віддаленням PM з даною простою PL.

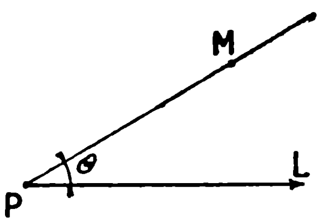


Рис. 178

Нам вже відомо, що P має назву бігуна, або полюса, а проста L — бігунової або полярної осі; віддалення $PM = \varrho$ — зветься напрямним лучем, або лучем - вектором; а кут $MPL = \theta$ — амплітудою, або фазою.

Ми вже розглядали взори переходу від бігунової системи до прямокутної й навпаки, а тепер розвяжемо кілька задач.

Задача 1.

Написати бігункове рівнання простої.

I. Проста переходить через бігун.

Припустім, що проста S має кут спаду α на бігунову вісь L. Очевидно, що ця проста буде зливатися з відповіднім напрямним лучем, і, тому, кожна точка M на ній (рис. 179) матиме сталу фазу однакову з кутом спаду простої на вісь.

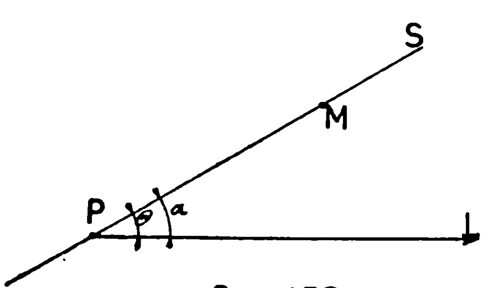


Рис. 179

Через те бігункове рівнання простої, що переходить бігун, матиме вигляд:

$$\theta = \alpha \;\ldots\ldots \quad (165)$$

де α — є кут спаду простої на вісь L.

II. Проста не переходить через бігун.

Припустім, що нам дано просту S, що не переходить через бігун P.

Хай прям, спущений з початку координат на цю просту, буде δ, а кут спаду цього пряму на вісь L буде φ.

Коли ми візьмемо на простій S довільну точку $M(\varrho,o)$, то одержимо трикутник PMK (рис. 180) і з нього матимемо:

$$\varrho = \frac{\delta}{cs\,(\theta - \varphi)} \quad \ldots\ldots (166)$$

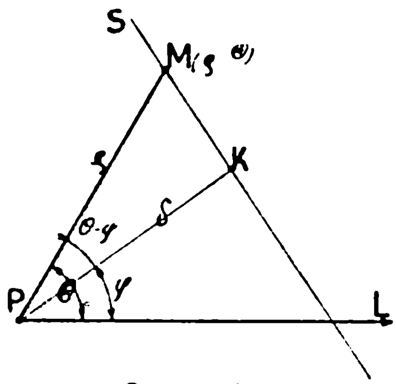


Рис. 180

Це рівнання можна одержати й через перетворення прямового рівнання простої в прямокутніх координатах:

$$x cs\,\varphi + y sn\,\varphi = \delta$$

до полярних координат за допомогою взорів:

$$x = \varrho cs\theta \text{ і } y = \varrho sn\theta.$$

Справді: $\varrho\, cs\theta\, cs\,\varphi + \varrho\, sn\theta\, sn\,\varphi = \delta.$

$$\varrho \,.\, cs\,(\theta - \varphi) = \delta, \text{ або } \varrho = \frac{\delta}{cs\,(\theta - \varphi)}$$

Задача 2.

Знайти віддалення між точками:

$$A\,(\varrho_1,\theta_1) \text{ і } B\,(\varrho_2,\theta_2).$$

За теоремою Карно маємо: (рис. 181).

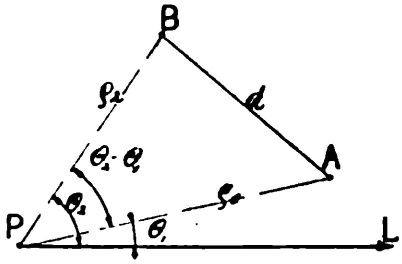


Рис. 181

$$AB^2 = \varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 - 2\varrho_1\varrho_2\, cs(\theta_2 - \theta_1).$$

Звідци:

$$d = \sqrt{\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 - 2\varrho_1\varrho_2 cs\,(\theta_2 - \theta_1)} \quad \ldots\ldots (167)$$

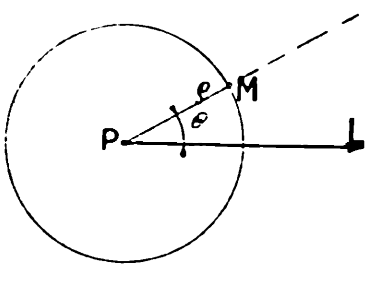


Рис. 182

Задача 3.

Написати рівнання кола в бігунових координатах.

I. Центр кола лежить в бігуні (рис. 182). Прикметною кола, як геометричного осередку буде незмінність величини ϱ. Тому рівнання кола, що має центр в бігуні буде:

$$\varrho = a \text{ (const)} \quad \ldots\ldots\ldots (168\text{-}a)$$

II. Центр кола лежить по-за бігуном.

Хай коло має лучем r, а значники його центра ϱ_1 і θ_1 (рис. 183), Візьмім яку небудь довільну точку M на обводі кола й означимо значники її через ϱ і θ.

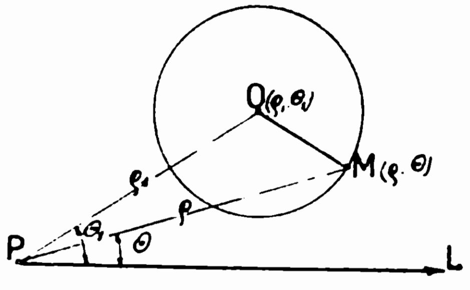


Рис. 183

Тоді за теоремою Карно маємо:

$$\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 cs(\theta_1 - \theta) = r^2$$

або:

$$\varrho^2 - 2\varrho\varrho_1 cs(\theta_1 - \theta) + (\varrho_1^2 - r^2) = O \quad \dots . \quad (168\text{-b})$$

Це й буде потрібне рівнання кола.

§ 106. Рівнання кривої другого ступіня в бігунових координатах.

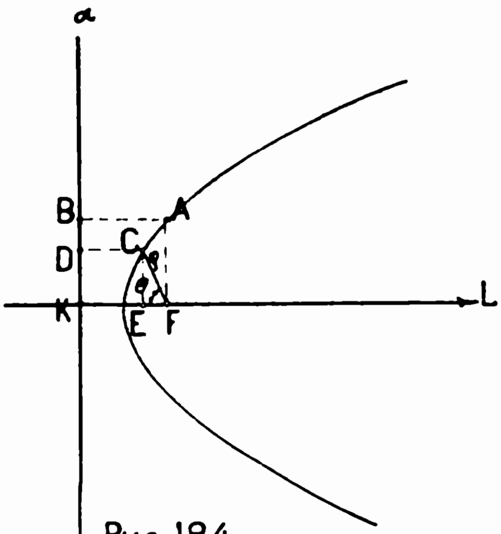


Рис. 184

Візьмім вогнище кривої за бігун, а вісь симетрії кривої, що переходить через вогнище, за бігунову вісь (рис. 184). Колиб з вогнища F поставимо до осі L прям AF, то, як відомо,

$$AF = p.$$

Поведемо директриту aa і спустимо на неї з точки A прям AB.

Як ми вже знаємо, відношення $\frac{AF}{AB} = \varepsilon$ (числовому ексцентриситету). Візьмім тепер на обводі кривої, якусь довільну точку C і спустимо з неї прями: CE — на бігунову вісь, а CD — на директриту. Звідци також матимемо: $\frac{CF}{CD} = \varepsilon$.

Хай бігунові координати точки C будуть ϱ і θ, тоді з $\triangle\, FCE$ маємо: $CF = \varrho$; $EF = \varrho\, cs\theta$. Але $DC = KF - EF$, а тому $DC = AB - EF = \frac{p}{\varepsilon} - \varrho\, cs\theta$ (бо $AF = p$; $\frac{AF}{AB} = \varepsilon$; $AB = \frac{p}{\varepsilon}$):

Таким чином:

$$\frac{CF}{CD} = \frac{\varrho}{\frac{p}{\varepsilon} - \varrho\, cs\theta} = \varepsilon,$$

а звідци:

$$\varrho = p - \varrho\, \varepsilon\, cs\theta, \text{ або}$$

$$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon\, cs\theta} \quad \ldots\ldots \quad (169)$$

Це є потрібне рівнання кривої другого ступіня в бігунових координатах, коли вогнище її взято за бігун, а вісь симетрії, що переходить через це вогнище, за бігунову вісь. З аналізи властивостей директрит цих кривих ми знаємо, що доведене рівнання буде визначати:

1) елипсу, коли $\varepsilon < 1$;

2) гиперболу, коли $\varepsilon > 1$;

і 3) параболу, коли $\varepsilon = 1$.

ДОДАТОК.

Розвиток аналитичної геометрії переносить досілдувачів все в дальші й дальші царини геометричної аналізи.

Дослідження кривих другого ступіня є засадничою лише частиною науки.

Цілком природне, що перед дослідувачем розгортається широке й цікаве поле кривих 3-го й вищих ступінів.

Систематизація таких кривих має довести до всебічної аналізи загальних рівнань третього й инших ступенів, але це є справою майбутньою. Поки-що накоплюється сам сировий матер'ял у вигляді досліджень окремих кривих, порядків, инших ніж другого.

До цього часу вже досліджено богацько таких окремих геометричних осередків і ми вважаємо доцільним подати в своєму курсі найвідоміші з них.

Окремі геометричні осередки.

§ 107. Циклоїда.

Циклоїдою зветься геометричний осередок, що очеркується якою небудь точкою кола, коли воно котиться без сковзання вздовж даної нерухомої простої (рис. 185).

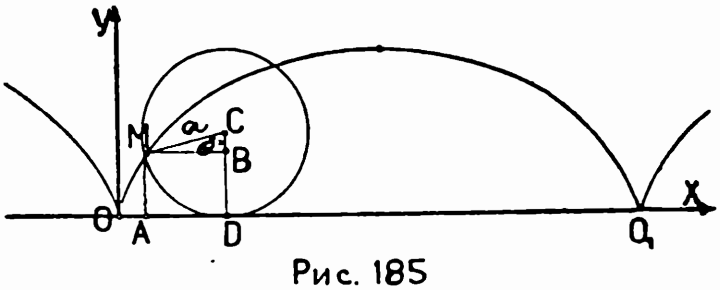


Рис. 185

Візьмім за вісь X—*ів* цю нерухому просту, за початок координат — точку O, попереднє положення, точки M на осі X—*ів*, а за вісь $У$—*ів* — прям до вісі X—*ів*, поставлений в згаданій точці O.

Хай кут, що під час кочення кола зачеркує луч $MC = a$, буде θ (θ виміряне в кругових одиницях, а тому довжина дуги, що відповідає куту θ, буде $s = a\,\theta$).

Вартість значника $x = OA$ є рівна з ріжницею:

$$x = OD - AD.$$

Але коло котиться без сковзання, а тому $OD = \smile MD = a\theta$; крім того з $\triangle\ MCB$ маємо: $AD = MB = a sn\theta$.

Отже:

$$x = a\theta - a sn\theta = a(\theta - sn\theta).$$

З другого боку з тогож $\triangle\ MCB$, одержимо:

$$y = AM = DC - BC = a - a cs\,\theta = a\,(1 - cs\theta).$$

Таким чином, рівнання:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,(\theta - sn\theta) \\ y &= a\,(1 - cs\theta) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (170)$$

Є **рівнаннями** (змінниковими) **циклоїди.** Вилучаючи з цих рівнань змінника θ, одержимо другий вигляд рівнання циклоїди, а саме:

$$x = a\ arc\cos\left(1 - \frac{y}{a}\right) + \sqrt{2ay - y^2} \ \ldots\ldots \quad (171)$$

Ми бачимо, що циклоїда лежить по один бік нерухомої простої і тягнеться на безмежність окремими галузями з тятивою $2\pi a$ кожна. (Чому?)

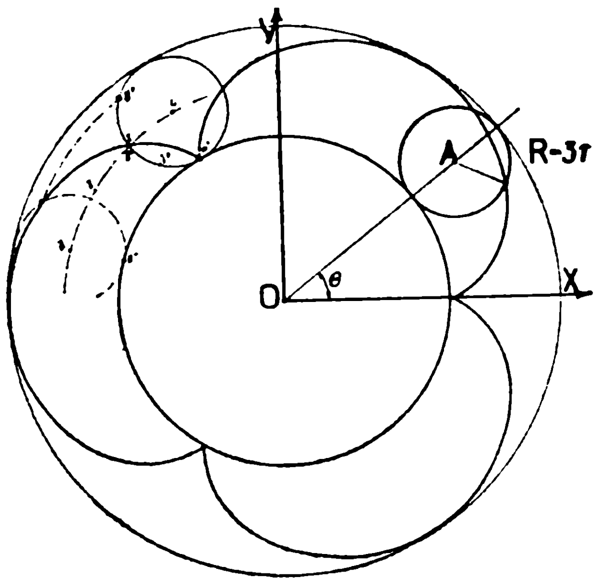


Рис. 186

Коли напрямною (нерухомою) кривою буде не проста, а коло, вздовж обвода якого буде котитися друге коло, то ми одержимо криві:

1) При колі, що котиться зовні обводу напрямного кола — **епициклоїду** (рис. 186).

2) При колі, що котиться у середині по обводі напрямного кола — **гипоциклоїду** (рис. 187).

§ 108. Версієра (чарівниця) Аньезі-Фермата.

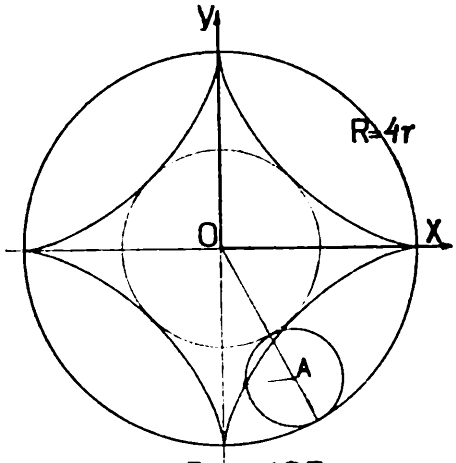


Рис. 187

Ця крива була створена математиком Ферматом і досліджена Аньезі, що й дала їй назву версієри.

Версієра є геометричним осередком кінців прямів, поставлених до поперечника даного кола, такої довжини, щоб їх відношення до відповідних тятив, відтятих колом від цих прямів, було завжди рівне з відношенням цілого поперечника до віддалення основи пряма від початку цього поперечника.

Хай дане коло буде луча $r = a$ (рис. 188). Прямовісниїі його поперечник візьмемо за вісь $У$ — *ів,* и дотичну в нижньому кінці цього поперечника — за вісь X — *ів.*

Будемо шукати геометричний осередок кінців прямів поставлених до цього поперечника, так, щоб існувало відношення:

$$\frac{MP}{KP} = \frac{OL}{OP} \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

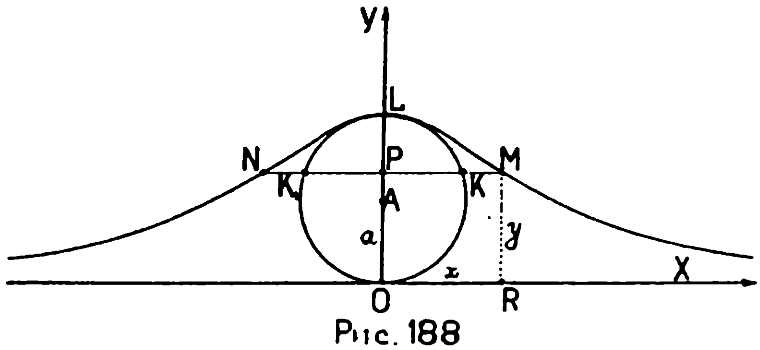


Рис. 188

Припустім, що M є точка, що лежить на кривій, яку ми досліджуємо. Значники цієї точки будуть:

$$\begin{aligned} x &= OR = MP \\ y &= OP \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Із геометрії знаємо, що прям PK є середнє пропорційне між відтинками поперечника, а тому

$$KP^2 = OP \, . \, PL$$

Але на підставі рівностей (II):

$$PL = OL - OP = 2a - y$$

Отже:

$$KP^2 = y(2a - y), \text{ або } KP = \mp \sqrt{y(2a-y)}.$$

Вставляючи знайдені вартости MP і KP в пропорцію (I), **матимемо рівнання версіери:**

$$\frac{x}{\pm\sqrt{y(2a-y)}} = \frac{2a}{y},$$

або:

$$x = \pm 2a \sqrt{\frac{2a-y}{y}} \; \ldots\ldots \; (172)$$

Це рівнання має ще й инший вигляд:

$$x^2 y = 4a^2(2a - y) \; \ldots\ldots \; (173)$$

Перше рівнання показує, що, коли y простує до O, себ-то точка P наближається до осі X—*ів*, то сама крива йде до безмежности, так що вісь X—*ів* стає її асимптотою.

§ 109. Конхоїда (мушля) Никомеда.

Візьмім яку небудь довільну просту X (рис. 189) і точку по-за нею P.

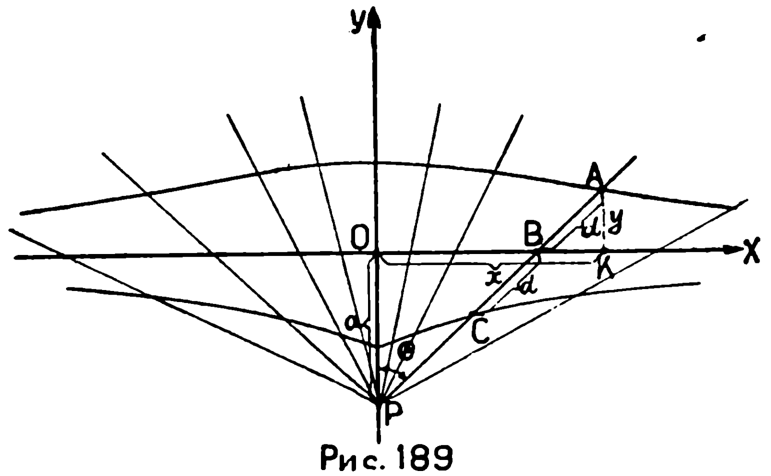


Рис. 189

Коли з точки P, як вузла, повести безліч промінів, що перетинатимуть просту X і від точок перетину їх з цією простою відкласти з обох боків її сталі відтинки, то кінці цих відтинків утворять геометричний осередок, що складається з двох галузів.

Цей геометричний осередок має назву **конхоїди, або мушлі Никомеда.**

Обидві галузі мушлі асимтотично наближуються до вісі XX з обох її кінців.

Вісь XX має назву осі конхоїди, а точка P її бігуна. Віддалення бігуна від осі (прям PO) має назву глибини мушлі, а переріз AC, рівний з подвійним творчим відтинком d — має назву проміру мушлі.

Хай глибина мушлі є $OP = a$, а півпромір (творчий відтинок) $AB = d$. Тоді:

Рівнання мушлі в прямокутніх координатах.

За вісь X—ів беремо вісь мушлі XX, а за вісь $У$—ів продовження в додатній напрямности глибини мушлі (пряму PO).

Візьмім на кривій яку будь точку A. Промінь, що переходитиме через цю точку A, буде PA. Збудувавши значники точки A, матимемо $x = OK$ і $y = KA$.

Трикутники: POB і BAK є схожі,

а тому:
$$\frac{OP}{OB} = \frac{AK}{BK},$$

$$\frac{a}{x \mp \sqrt{d^2 - y^2}} = \frac{y}{\pm \sqrt{d^2 - y^2}}$$

(бо $OB = OK - BK$, а BK, за теоремою Пітагора, рівне $\pm\sqrt{d^2 - y^2}$).

А звідци:
$$x^2 y^2 = (a + y)^2 (d^2 - y^2) \;\ldots\ldots:\; (174).$$

Рівнання мушлі в бігунових координатах.

Візьмім за координатний бігун P бігун самої мушлі, а за бігунову вісь — глибину мушлі PO.

Хай фазою якого будь проміня PA буде θ.

За напрямний луч мушлі буде або PA (верхня галузь), або PC (нижня галузь). Тоді відтинок PB буде рівний:
$$PB = \varrho \mp d.$$

З трикутника POB маємо:
$$OP = OB \, cs\theta,$$

або:
$$a = (\varrho \mp d) \, cs\theta.$$

А звідці:

$$\varrho = a\ sec\,\theta \pm d \ldots\ldots (175).$$

Примітка. У випадку, коли $d > a$, нижня галузь конхоїди робить петлю (рис. 190).

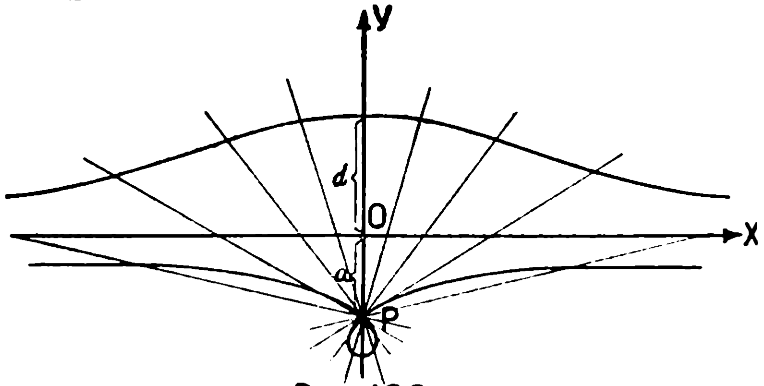


Рис. 190

§ 110. Цисоїда (або кисоїда) Діокля.

Візьмім коло якого будь луча r і через один з кінців B його поперечника, поведемо до кола дотичну, а другий кінець цього поперечника O візьмемо за бігун (вузел) промінів, що перетинають коло. Кожний з цих промінів конечне зустріне обвід кола, а далі, на свому продовженню, й згадану дотичну (рис. 191).

Напр. промінь OC зустрічає обвід кола в точці A, а дотичну в точці C.

Віддалення від перехрестя кожного проміня з колом до перехрестя його з дотичною (відтинок AC) будемо відкладати на томуж промені від бігуна O (відтинок OD). Тоді геометричний осередок кінців таких відтинків на всіх можливих промінях, поведених з O через коло, має назву **Цисоїди Діокля**.

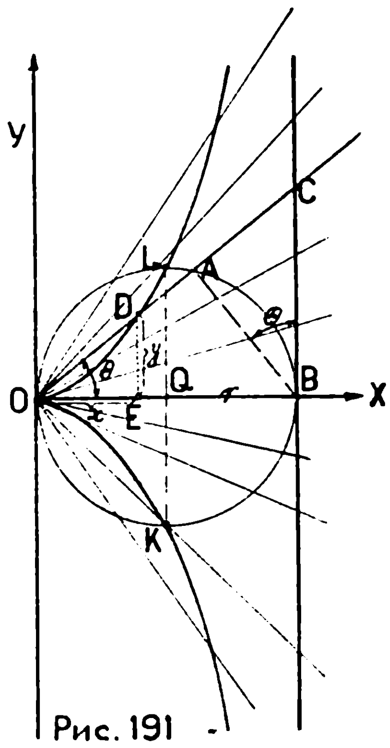


Рис. 191

Знайдемо рівняння цього осередку.

I. Рівняння цисоїди в прямокутніх координатах.

Візьмім за початок координат бігун O, за вісь X—ів — даний поперечник OB; а за вісь $У$—ів — дотичну до кола, поведену через бігун O.

Коли сполучимо точки A і B, то одержимо:

$$\triangle ABC \backsim \triangle ODE$$

(прямокутні, і мають рівні гострі кути: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BOC$).

Звідци маємо: $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{OD}{y}$; але з умови: $AC = OD$, а тому:

$$OD^2 = BC \cdot y \ldots. (A).$$

З $\triangle ODE$, за теоремою Пітагора, маємо:

$$OD^2 = x^2 + y^2,$$

а зі схожости: $\triangle BOC \backsim \triangle EOD$, маємо:

$$\frac{BC}{y} = \frac{2r}{x}, \text{ або } BC = \frac{2ry}{x}.$$

Таким чином, вставляючи знайдені вартости в рівність (A), одержимо **рівнання цисоїди:**

$$x^2 + y^2 = \frac{2ry^2}{x}, \text{ або}$$

$$x^3 = y^2 (2r - x), \ldots\ldots (176)$$

або, визначаючи y, матимемо:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{2r - x}} \ldots\ldots (177)$$

З останнього рівнання видко:

1) цисоїда симетрична зглядно осі X—ів (зглядно головного поперечника творчого кола);

2) цисоїда замкнена між дотичними: $x = o$ і $x = 2r$, поведеними через кінці головного поперечника творчого кола;

3) цисоїда є безмежною кривою, що асимптотично наближується до творчої дотичної (BC) при безмежному наближенню промінів з точки O до полярної дотичної (вісі Y—ів), себ-то, коли кут між творчими промінями і віссю цисоїди (віссю X—ів) наближується до $\dfrac{\pi}{2}$

і 4) цисоїда перетинає творче коло в кінцях поперечника LK, прямового до головного OB, бо, коли $x = r$, то й $y = r$.

II. Рівнання цисоїди в бігунових координатах.

Візьмім за бігун координат бігун O кривої, а за бігунову вісь — головний поперечник OB творчого кола. Візьмім який небудь довільний промінь AC.

Тоді: $\theta = \sphericalangle COB$, а $\varrho = OD = OC - OA$ (бо $OD = AC$).

Але, з $\triangle\ OCB$, маємо: $OC = \dfrac{2r}{cs\theta}$, а з $\triangle\ OAB$ маємо:

$OA = 2rcs\theta$.

Тому:

$$\varrho = \frac{2r}{cs\theta} - 2rcs\theta = \frac{2r}{cs\theta}(1 - cs^2\theta).$$

Звідци:

$$\varrho = 2r\,\frac{sn^2\theta}{cs\theta}, \text{ або}$$

$$\varrho = 2r\,sn\theta\,tg\theta \;\ldots\ldots\; (178)$$

Це й буде **рівнання цисоїди в бігунових координатах.**

Розглянемо ще одну цікаву властивість цисоїди.

Візьмім яку небудь просту, що переходить через початок вісей, напр., $y = kx$ і будемо шукати точку перехрестя її з кривою.

Розвязуємо рівнання:

$$x^3 = y^2(2r - x)$$

$$\text{і} \quad y = kx,$$

яко систему й одержуємо: 1) $x_1 = o;\ y_1 = o;$

2) $x_2 = o;\ y_2 = o;$

3) $x_3 = \dfrac{2rk^2}{1 + k^2};\ y_3 = \dfrac{2rk^3}{1 + k^2}.$

Дана проста має три спільних точки з цисоїдою, але дві з них зливаються в початку осей. Тому ця точка зветься **подвійною.**

Щоб проста: $y = kx$ була дотичною до цисоїди, треба щоб і точка (x_3, y_3) зливалася з першими двома, а це можливо, коли $k = O$. Тоді одержуємо **єдину** дотичну до цисоїди: $y = O$ в подвійній точці кривої. Через те подвійна точка O цисоїди є її **шпилем.**

§ 111. Лемніската Бернулі.

Лемніскатою зветься геометричний осередок точок, здобуток віддалень яких від двох даних точок (вогнищ) є величина стала, рівна з квадратом піввіддалення між цими точками.

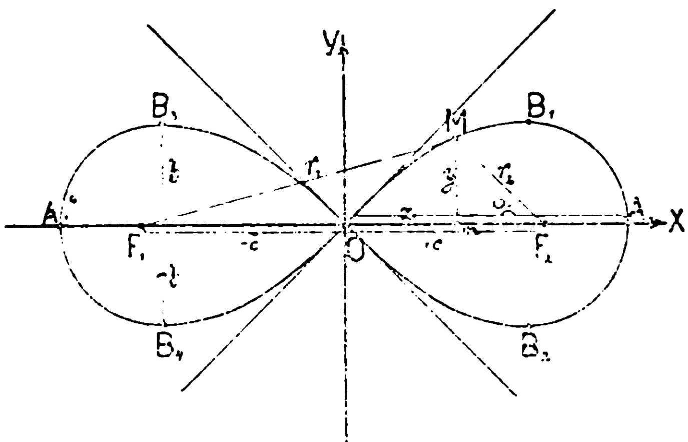


Рис. 192

Означимо віддалення між даними точками F_1 і F_2 (рис. 192) через $2c$. За початок осей візьмемо середину між F_1 і F_2 (центр кривої), за вісь X — *ів* — просту, що сполучає вогнища F_1 і F_2 (велика вісь) а за вісь $У$ — *ів* — прям до вісі X — *ів* в точці O (мала вісь).

Хай $M(x,y)$ яка небудь точка кривої, тоді на підставі визначення кривої:

$$r_1 . r_2 = c^2; \text{ або } r_1^2 r_2^2 = c^4.$$

Але, 1) r_1, яко віддалення між точками $M(x, y)$ і $F_1(-c, o)$, буде:

$$r_1^2 = (x + c)^2 + y^2$$

2) Так само r_2, яко віддалення між точками M і F_2 (c, o) буде:

$$r_2^2 = (x - c)^2 + y^2$$

Отже, $[(x + c)^2 + y^2]\,[(x - c)^2 + y^2] = c^4$, або:

$$(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)\,(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = c^4, \text{ або:}$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = c^4 - c^4 = O.$$

Таким чином, рівнання лемніскати буде:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = O \quad \ldots\ldots \quad (179).$$

Аналіза рівнання:

1) Будова рівнання лемніскати показує, що кожній даній вартості x відповідає по 2 вартости y й, навпаки, кожній вартості y відповідає по 2 вартости x. Отже, лемніската є симетричною зглядно обох вісей, а тому й зглядно центру.

2) Щоб знайти точки перехрестя кривої віссю X — *ів*, беремо $y = O$; тоді одержуємо рівнання:

$$x^4 - 2c^2x^2 = O,$$

що має розвязки: $x_1 = x_2 = O$; $x_{3,4} = \pm c\sqrt{2}$.

Це свідчить, що крива має в початку координат **подвійну точку** і перетинає вісь X — *ів* в точках $\pm c\sqrt{2}$;

Щоб знайти точки перехрестя кривої з віссю $У$ — *ів*, беремо $x = O$ й одержуємо рівнання:

$$y^4 + 2c^2x_1^2 = O,$$

що має розвязками: $y_1 = y_2 = O$; $y_{3,4} = \pm ci\sqrt{2}$.

Таким чином вісь $У$ — *ів* також зустрічає криву в початку координат (теж подвійна точка), але більш точок перетину з нею не має.

4) Розвязавши рівнання лемніскати зглядно y^2, маємо:

$$y^2 = -(x^2 + c^2) \pm c\sqrt{4x^2 + c^2}.$$

Щоб y було реальним, є конечним: 1) щоб знак перед $\sqrt{}$ був + і 2) щоб $x^2 + c^2 \leqq c\sqrt{4x^2 + c^2}$, або (розвязавши нерівнання через x) $x^2 \leqq 2c^2$, а звідци: $|x| \leqq c\sqrt{2}$.

Це свідчить, що крива лежить між вартостями значника $x = c\sqrt{2}$ і $x = -c\sqrt{2}$, себ-то точки: $A(c\sqrt{2}, o)$ і $A_1(-c\sqrt{2}, o)$ є вершками лемніскати. Коли означимо велику вісь лемніскати через $2a$, то $a = c\sqrt{2}$, або $a^2 = 2c^2$. Тому рівнанню лемніскати дають часто ще другий вигляд:

$$(x^2 + y^2)^2 + a^2(y^2 - x^2) = O,$$

або:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad \ldots\ldots \quad (180)$$

Перетворюючи це рівнання до бігунових координат (заміною $x = \varrho\, cs\theta$ і $y = \varrho\, sn\theta$), ми одержимо:

$$\varrho^2 = a^2 cs2\theta \quad \ldots\ldots \quad (181)$$

рівнання лемніскати в бігунових координатах.

5) Розвязавши рівнання лемніскати зглядно x^2, маємо:

$$x^2 = c^2 - y^2 \pm c\sqrt{c^2 - 4y^2}.$$

Щоб x було реальне, конечне мусить бути:

$$c^2 \geqq 4y^2 \text{ або } |y| \leqq \frac{c}{2} \quad \text{(рис. 193).}$$

Крива лежить з обох боків вісі X—ів в пасі між рівнобіжними: $y = \frac{c}{2}$ і $y = -\frac{c}{2}$ (рис. 193).

Вставляючи в рівнання лемніскати вартости $y = \pm\frac{c}{2}$, ми одержимо відповідні відтинкові, а саме: $\pm\frac{c}{2}\sqrt{3}.$

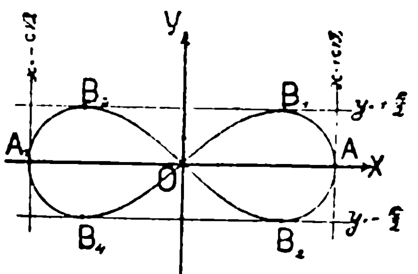


Рис. 193

Очевидно, існує 4 точки:

$$B_1\left(\frac{c}{2}\sqrt{3}, \frac{c}{2}\right), B_2\left(\frac{c}{2}\sqrt{3}, -\frac{c}{2}\right), B_3\left(-\frac{c}{2}\sqrt{3}, \frac{c}{2}\right)$$

$$\text{і } B_4\left(-\frac{c}{2}\sqrt{3}, -\frac{c}{2}\right),$$

що є вершками лемніскати зглядно осі X—ів. Таким чином лемніската має 6 вершків: два зглядно осі $У$—ів і 4 зглядно осі X—ів (два ж инші вершка зглядно осі $У$—ів зливаються в початку координат і дають подвійну точку).

Поведемо через початок осей яку небудь просту рівнання $y = kx$.

Розвязавши систему рівнань:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

$$\text{і} \quad y = kx$$

одержимо: $x_1 = x_2 = 0, \ y_1 = y^2 = 0;$

$$x_{3,4} = \pm\frac{a}{1+k^2}\sqrt{1-k^2}\,; \quad y_{3,4} = \pm\frac{ak}{1+k^2}\sqrt{1-k^2}.$$

Кожна проста, що переходить через центр лемніскати перетикає її в 4 точках, при чому дві з них зливаються в центрі в подвійну. Щоб ця проста була дотичною, треба, щоб точки (x_3,y_3) і (x_4,y_4) зливалася з першими двома (себ-то з центром).

А це можливе, коли $k = \pm 1$.

Таким чином, через центр O, подвійну точку, переходить **дві дотичні:**

$$y = x$$
$$y = -x$$

й тому точка O, центр кривої є її **вузлом.**

§ 112. Крива Кассіні.

У 17-му сторіччу астроном Кассіні висловив гадку, що орбіта землі не еліпса, а инша крива, що її назвали кривою Кассіні.

Кривою Кассіні зветься геометричний осередок точок, здобуток віддалень яких від двох даних точок (вогнищ) є довільна стала додатня величина.

Отже, прикметою геометричного осередку є:

$$r_1 . r_2 = s^2,$$

де s є довільна стала величина (рис. 194).

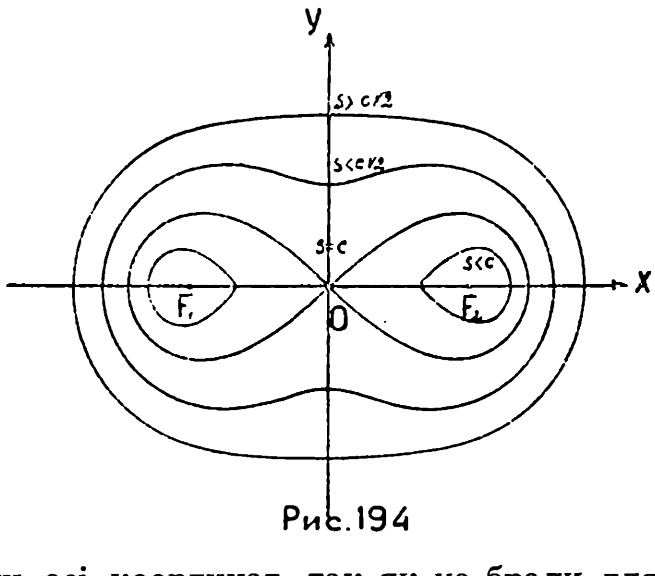


Рис.194

Взявши осі координат, так як це брали для лемніскати, ми тим же шляхом дійдемо до рівнання:

$$(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)\,(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = s^4,$$

а звідци:

$$(x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)=s^4-c^4,$$

або:

$$(x^2+y^2)^2+2c^2(y^2-x^2)=\pm p^2 \;\ldots\ldots\; (192)$$

$$\text{де} \;\pm\; p^2=s^4-c^4;\; (const).$$

Це й буде загальне **рівнання кривої Кассіні.**

Очевидно, що крива Кассіні є симетричною зглядно обох осей і початку координат (центру).

1) Беручи $y=O$, одержимо рівнання:

$$x^4-2c^2x^2-(s^4-c^4)=O,$$

що має розвязки:

$$x=\pm\sqrt{c^2\pm s^2}$$

Коли $s<c$, то реальних розвязків, а тому й перехресть кривої з віссю X—ів, існує чотирі.

Коли ж $s>c$, то реальних розвязків, а тому і перехресть кривої з віссю X—ів, існує лише два: $y=\pm\sqrt{c^2+s^2}$ (решта двоє розвязків є уявні).

2) Беручи $x=O$, одержимо рівнання:

$$y^4+2c^2y^2-(s^4-c^4)=O,$$

що має розвязки:

$$y=\pm\sqrt{-c^2\pm s^2}$$

Коли $s>c$, то реальних розвязків, а тому й перехресть кривої з віссю $У$—ів, існує два: $y=\pm\sqrt{s^2-c^2}$ (решта двоє розвязків: $y\pm\sqrt{-c^2-s^2}$ —уявні).

Коли $s<c$, то немає жадного реального розвязку й крива не зустрічає віci $У$—ів.

3) Розвязуючи рівнання кривої через y^2, маємо:

$$y^2=-(x^2+c^2)\;\pm\sqrt{4c^2x^2+s^4}$$

Для y реальним розвязком може бути лише той, що має перед $\sqrt{}$ знак плюс:

$$y^2=-(x^2+c^2)\;+\sqrt{4c^2x^2+s^4}$$

Крім того, для реальности y має бути:

$$x^2 + c^2 \leqq \sqrt{4c^2 x^2 + s^4}$$

Звідці:

$$x^2 - c^2 \leqq \pm s^2 \; ; \; x^2 \leqq c^2 \pm s^2,$$

або:
$$|x| \leqq \sqrt{c^2 \pm s^2}$$

Коли $s > c$, має бути:

$$|x| \leqq \sqrt{c^2 + s^2}$$

Колиж $s < c$, то:

$$\sqrt{c^2 - s^2} \leqq |x| \leqq \sqrt{c^2 + s^2}$$

Отже, крива:

а) в разї $s > c$ має два вершки (зглядно осі $У$—ів).

б) в разі $s < c$ має 4 вершки (зглядно осі $У$—ів).

При чому всі вони лежатимуть на осі X—ів.

4) Розвязуючи рівнання кривої через x^2, одержимо:

$$x^2 = (c^2 - y^2) \pm \sqrt{s^4 - 4c^2 y^2}\,.$$

Шляхом аналізи, подібної до попередньої, маємо:

$$|y| \leqq \frac{s^2}{2c} \text{ і } |y| \geqq \sqrt{s^2 - c^2}$$

Коли $s > c$, знову маємо 2 випадки:

1) коли $s < c\sqrt{2}$ — існує 4 вершки (по-за віссю $У$—ів).

2) коли $s \geqq c\sqrt{2}$ — існує 2 вершки (на вісі $У$—ів).

Коли $s < c$, крива має завжди 4 вершки (взглядно вісі X—ів), що лежать по-за віссю $У$—ів. Тоді крива складається з двох окремих частин (овалів).

Ми бачимо, що криві Кассіні є двох типів [1) $s < c$ 2) $s > c$]; лемніската-ж є граничною кривою $(s = c)$, як би переходовим випадком між першим і другим типами (рис. 194).

§ 113. Спіраля Архимеда.

Спіраля Архимеда є кривою, очеркнутою точкою, що рівномірно посувається здовж вектора, що у свою чергу рівномірно обертається (кутова скорість $\omega = const$) **навколо однієї з своїх точок.**

Очевидно, що при цій умові пересунення точки вздовж вектора є пропорційним куту обертання, себ-то: $\varrho = a\theta$, коли рухома точка почала своє посування від бігуна P (рис. 195).

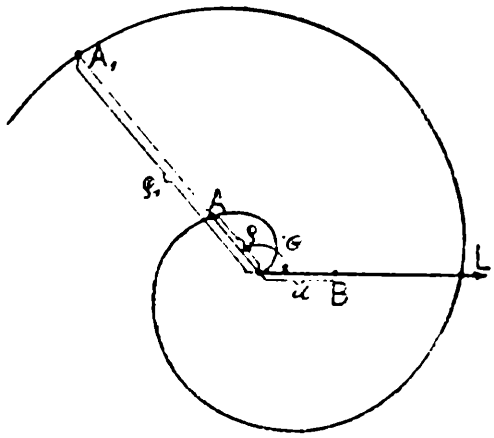


Рис. 195

Тому **рівнання спіралі Архимеда матиме вигляд:**

$$\varrho = a\theta \ldots\ldots (183)$$

(де a є сочинник пропорційности, рівний віддаленню, на яке просунеться творча точка за час, коли кут θ з нуля зросте до дугової одиниці міри).

Колиб творча точка на початок руху була в положенню B, себ-то на віддаленню від бігуна P рівному d, то **рівнання спіралі Архимеда**, буде:

$$\varrho = d + a\theta \ldots\ldots (184)$$

Перетворюючи ці рівнання до прямокутніх осей за допомогою взорів $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $tg\theta = \frac{y}{x}$, ми одержимо **рівнання спіралі Архимеда** в такому вигляді:

$$1) \; x^2 + y^2 = a^2 . arc\,tg^2 \frac{y}{x} \ldots\ldots (185)$$

$$2) \; \sqrt{x^2 + y^2} = d + a . arc\,tg \frac{y}{x} \ldots\ldots (186)$$

§ 114. Слимак Паскаля й Кардіоїда.

Коли з довільної точки обводу кола повести жмут січних і на кожній з них з обох боків обводу відкласти один і той самий (для всіх січних) відтинок, то геометричний осередок всіх кінців цих відтинків має назву Слимака Паскаля.

Візьмім за бігун точку O, що з неї ведемо жмут січних, а за бігунову вісь поперечник кола, що переходить точку O (рис. 196).

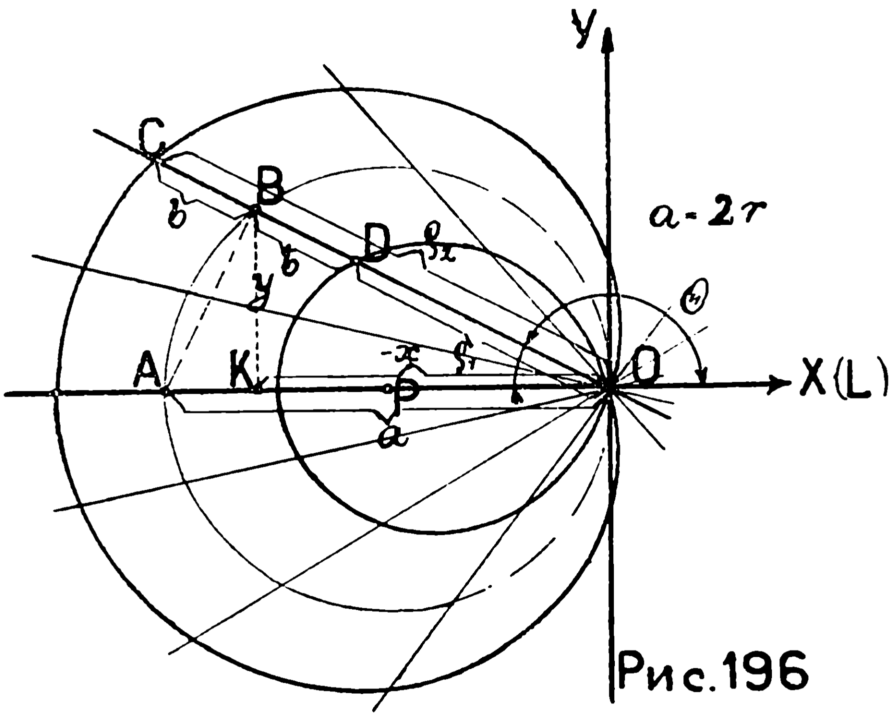


Рис. 196

Тоді $\varrho_1 = OB - b$ і $\varrho_2 = OB + b$, а загалом $\varrho = OB \pm b$, де b є даний відтинок, що його відкладаємо на січних по обидва боки обводу кола.

Означимо поперечник творчого кола через a і сполучимо точку B перехрестя даного проміня і кола з кінцем A поперечника OA.

Тоді з $\triangle\, ABO$ маємо:

$$OB = a\, cs(180^0 - \theta) = -a cs\theta$$

Тому, **рівнання Слимака Паскаля** в бігунових координатах має вигляд:

$$\varrho = \pm\, b - a\, cs\theta \;\ldots\ldots\; (187)$$

де «$+$» відповідає зовнішній галузі, а «$-$» — внутрішній.

Щоб одержати **рівнання Слимака в прямокутніх координатах,** ми візьмемо за вісь X — ів бігунову вісь, а за вісь $У$—ів прям до неї, поведений через вузел жмута січних.

Взори перетворення: $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $cs\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ дають:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \pm b - \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

або:
$$x^2 + y^2 = \pm b\sqrt{x^2+y^2} - ax.$$

А звідци, потрібне **рівнання Слимака Паскаля** буде:

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = b^2(x^2 + y^2) \; \ldots\ldots \; (188)$$

Розгляньмо тепер окремий випадок, коли b = a (творчий відтинок b рівний з поперечником творчого кола).

В цьому разі ми одержимо криву, що складається з однієї петлі й має форму, подібну до серця. (Рис. 197).

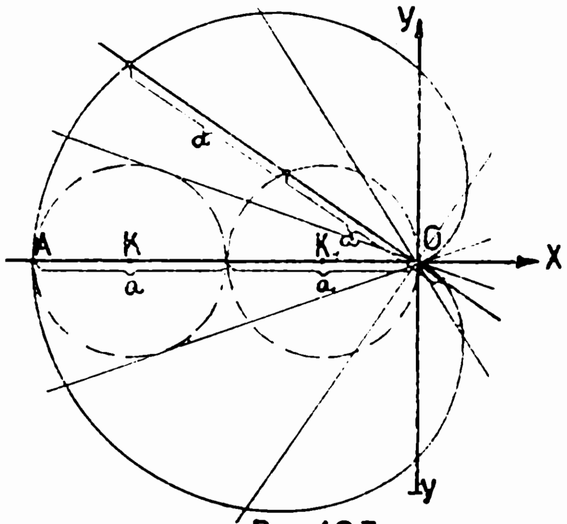


Рис. 197

Тому ця крива має окрему назву **Кардіоїди** (*κάρδιος* = серце).

Очевидно, що її рівнання одержимо з рівнання слимака, беручи в ньому $b = a$.

При чому, можна обмежитися лише одним знаком $+$ перед b, бо, як доводить дослідження, рівнання з обома знаками визначає одну й ту саму криву (знак залежить лише від того, звідки очеркується крива, чи починаючи з точки O, чи з точки A).

Таким чином, **рівняння Кардіоїди** в бігунових координатах буде:

$$\varrho = a\,(1 - cs\theta)\ \ldots\ldots\ (189)$$

Рівняння тієї самої простої в прямокутніх координатах матиме вигляд:

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2\,(x^2 + y^2)\ \ldots\ldots\ (190)$$

§ 115. Розета чотирілиста, або квадратова розета.

Припустім, що відтинок AB даної величини $2a$ тягло посувається своїми кінцями вздовж двох перехрещених, взаємно прямових, напрямних простих (рис. 198).

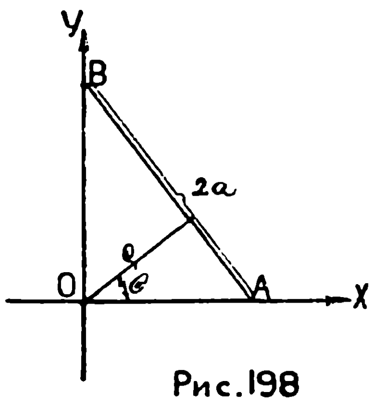


Рис.198

Коли з точки перехрестя цих простих спускати прями на дану просту AB в кожному з її положень у всіх чотирьох кутах, то геометричний осередок основ цих прямів має назву **чотирілистої, або квадратової розети** (рис. 199).

Візьмім за бігунову вісь одну з напрямних простих напр. OX, а за бігун їх перехрестя.

Тоді: $OC = \varrho$ і $< COA = \theta$;

Отже: $\varrho = OA\ cs\theta$;

Але з $\triangle\ OBA$ маємо:

$$OA = 2asn\theta.$$

Тому: $\varrho = 2a\ sn\theta\ cs\theta = asn\ 2\theta.$

Таким чином **бігунове рівняння розети** буде:

$$\varrho = a\ sn2\theta\ \ldots\ldots\ (191)$$

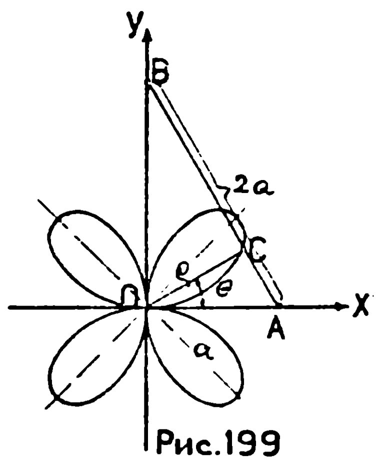


Рис.199

Переходячи до прямокутньої системи координат за допомогою взорів:

$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $sin\,\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ і $cos\,\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, одержимо **рівняння розети** в такому вигляді:

$$(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 2axy,$$

або:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2\ \ldots\ldots\ (192).$$

Досліджуючи бігунове рівняння розети, ми бачимо, що ϱ досягає найбільшої вартости коли $sn\ 2\theta = 1$, себ-то, коли $\theta = 45^0$, 225^0 і тд. При цьому максимальна вартість $\varrho = a$. Найменшої своєї вартости ϱ досягає, коли $sn\,2\theta = -1$, себ-то, коли $\theta = 135^0, 315^0$ і тд. При цьому мінімальна вартість $\varrho = -a$. При вартостях $\theta = 0^0$, 90^0, 180^0 270^0 і т. д. луч ϱ обертається в нуля.

Отже крива складається з чотирьох окремих петель, що вміщаються в чотирьох кутах між напрямними простими й мають свої осі на рівнодільних (симетральних) цих кутів (рис. 199).

Досліджуємо рівняння розети в прямових координатах, а саме:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2.$$

1) Ми бачимо, що заміна в цьому рівнанню x на $-x$ і y на $-y$ не змінює його, а тому можно твердити, що крива є симетричною й зглядно своїх осей і зглядно початку їх.

2) Крива переходить через початок осей (центр), бо вартости: $x = 0$, $y = 0$ обертають рівнання її в тотожність.

3) Беручи $y = 0$, одержуємо рівнання:

$$x^4 = 0$$

Отже, крива не має инших точок, спільних з віссю X—ів, крім початку координат.

Теж саме, ми одержуємо для осі $У$—ів при $x = 0$.

Початок осей є **четверною** точкою.

4) Коли візьмемо яку небудь просту, що переходить через початок осей, то вона зустріне криву в **шости** точках, бо розвязавши систему рівнань:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$$

$$\text{і} \quad y = kx$$

матимемо розвязки: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$;

$$x_{5,6} = \pm \frac{4ak^2}{(1 + k^2)^3} \text{ і } y_{5,6} = \pm \frac{4ak^3}{(1 + k^2)^3}.$$

З цих шости точок чотирі зіллються з початком осей в четверну точку.

Щоб одержати дотичні до розети конче, треба дібрати вартість k так, щоб точки (x_5, y_5) і (x_6, y_6) зливалися з початком осей,

А це є можливим, коли $k = 0$, або $k = \infty$

$$\left[x_{5,6} = \pm \frac{4ak^2}{(1 + k^2)^3} = \frac{4a}{\frac{1}{k^2} + 3 + 3k^2 + k^4} \right.$$

при $k = \infty$ обертається в 0, те саме:

$$\left. y_{5,6} = \pm \frac{4ak^3}{(1 + k^2)^3} = \frac{4a}{\left(\frac{1}{k} + k\right)^3} \right]$$

Таким чином дотичних є дві, що мають рівняння: $y = 0$; $x = 0$, себ-то дотичними є самі осі симетрії. Отже, четверна точка в початку вісей є вузлом для всіх галузів кривої (рис 200).

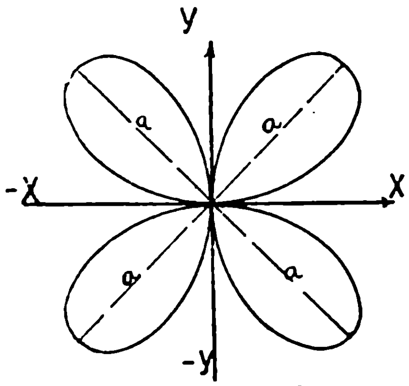


Рис.200

5) Розвязуючи рівняння почерзі зглядно x і y, ми переконаємося, що крива має 4 вершки, що визначаються значниками $(\pm a\sqrt{2},\ \pm a\sqrt{2})$.

В нашому курсі ми не зможемо розглянути всіх окремих геометричних осередків, а тому зупинилися на цих головніших з них.

Покажчик
основних взорів аналітичної геометрії.

I Відтинок.

1. Мет відтинка на координатні осі 9

$$AB_x = \pm p_x = x_2 - x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$AB_y = \pm p_y = y_2 - y_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

2. Довжина відтинка (віддалення між двома точками на площі) 10

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ldots\ldots \quad (3)$$

3. Віддалення точки від початку координат 10

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

4. Кут спаду відтинка на вісь X — ів ...... 11—12

$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

5. Значники точки, що переділює відтинок у даному відношенню λ .... 12—14

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

6. Значники середини відтинка 13

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

7. Значники центру ваги трикутника 16

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_0 &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

8. Кут між відтинками (простими) 17

$$tg\varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

(де $m_1 = tg\,\alpha_1$; $m_2 = tg\,\alpha_2$, а α_1 і α_2 — відповідні кути спаду відтинків на вісь X — ів).

9. Умова рівнобіжности відтинків (простих) 18

$$m_1 = m_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

10. Умова прямовости відтинків (простих).... 18

$$\left.\begin{aligned} & m_1 m_2 + 1 = 0, \\ \text{або:} \quad & m_1 = -\frac{1}{m_2} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

11. Поле трикутника через значники вершків. 19

$$\left.\begin{aligned} &1)\ S_{ABC} = \tfrac{1}{2}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\right], \\ &\text{або:} \quad S_{ABC} = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1,2,3,1.} \Delta x_k\, y_{k+1}. \end{aligned}\right\} \quad 11\,(a)$$

$$2)\ S_{ABC} = \tfrac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right] \ldots 11\,(b)$$

12. Умова простоположности кількох (не менш 3-х) точок 21

$$\sum_{k=1......n,1} \Delta x_k \, y_{k+1} = 0 \ldots\ldots (11b).$$

II. Проста лінія.

13. Рівнання осей координат................ 24

а) рівнання осі X—ів:

$$y = 0 \ldots\ldots (12)$$

б) рівнання осі $У$—ів:

$$x = 0 \ldots\ldots (13)$$

14. Рівнання простих, рівнобіжних до осей координат 25

а) рівнання простої рівнобіжної до осі X—ів:

$$y = b \ldots\ldots (14)$$

б) рівнання простої рівнобіжної до осі $У$—ів:

$$x = a \ldots\ldots (15)$$

15. Рівнання простої, що переходить через початок координат 26

$$y = mx \ldots\ldots (16)$$

(де $m = tg\,\alpha$ — тангенс кута спаду простої на вісь X—ів).

16. Рівнання довільної простої (канонична рівнання простої) 30

$$y = mx + n \ldots\ldots (17)$$

17. Рівнання простої, що переходить через дану точку.................................... 33

$$y - y_1 = m(x - x_1) \ldots\ldots (18)$$

18. Рівнання простої, що переходить через дві точки 34

$$\left.\begin{array}{l} y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1), \\ \text{або: } \dfrac{x - x_1}{x - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y - y_2} \end{array}\right\} \ldots\ldots (19)$$

19. Умова того, що 3 точки лежать на одній простій (простоположені) 36

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \;\ldots\ldots \quad (20)$$

20. Рівнання простої, що переходить через точку $A(a, b)$, **рівнобіжно** до простої $y = kx + l$.. 37

$$y = kx + (b - ak) \;\ldots\ldots \quad (21)$$

21. Рівнання простої, що переходить через точку $A(a,b)$, **прямово** до простої $y = kx + l$ 38

$$y = -\frac{x}{k} + \left(b + \frac{a}{k}\right) \ldots\ldots \quad (22)$$

22. Алгебричне рівнання простої........... 40—41

1) рівнання кожної простої:

$$Ax + By + C = O;$$

2) рівнання простої, що переходить через початок координат:

$$Ax + By = O;$$

3) рівнання простої, рівнобіжної до осі X—ів:

$$By + C = O;$$

4) рівнання простої, рівнобіжної до осі $У$—ів:

$$Ax + C = O;$$

5) рівнання осей, X—ів і $У$—ів:

$$By = O \text{ і } Ax = O.$$

23. Рівнання простої, що переходить через загадану точку $M(x_1, y_1)$ 42

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = O \;\ldots\ldots \quad (23)$$

(де A і B є довільні сочинники)

24. Рівнання простої, що переходить через точку $M(x_1, y_1)$, рівнобіжно до простої: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ 42

$$A_1(x - x_1) + B_1 (y - y_1) = 0 \; \ldots\ldots \; (24)$$

(де A_1 і B_1 є відповідні сочинники змінних рівнання даної простої)

25. Рівнання простої, що переходить через точку $M(x_1, y_1)$ прямово до даної простої: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ 42

$$B_1 (x - x_1) - A (y - y_1) = 0 \; \ldots\ldots \; (25)$$

(де A_1 і B_1 є відповідні сочинники змінних рівнання даної простої)

26. Відтинкове рівнання простої............ 45

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \; \ldots\ldots \; (26)$$

(де a і b — відтинки, що творить проста відповідно на осях X—ів та $У$—ів).

27. Прямове́ (або нормальне) рівнання простої 47

$$x\,cs\,\varphi + ysny = \delta \; \ldots\ldots \; (27)$$

(де δ — прям спущений з початку координат на просту, а φ — кут спаду цього пряму па вісь X—ів).

28. Прямова (або нормальна) форма алгебричного рівнання простої 52

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \ldots\ldots \; (28)$$

(де знак перед корінем береться противний знакові сочинника C).

29. Взори перетворення алгебричної форми рівнання простої у нормальну: .... 53—54

$$sin\,\varphi = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad cs\,\varphi = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{і} \quad \delta = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(де знак „+“ чи „—“ береться так, щоб вартість δ була додатньою).

30. Умова рівнобіжности простих, даних рівнаннями: $A_1x+B_1y+C_1=O$ і $A_2x+B_2y+C_2=O$, в алгебричній формі: 57

$$A_1B_2 - A_2B_1 = O \;\ldots\ldots\; (29)$$

31. Умова прямовости простих, данних рівнаннями: $A_1x+B_1y+C_1=O$ і $A_2x+B_2y+C_2=O$, в алгебричній формі: 59

$$A_1A_2 + B_1B_2 = O \;\ldots\ldots\; (30)$$

32. Кут між простими, визначеними рівнаннями в алгебричній формі 64

$$tg\,\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \;\ldots\ldots\; (31)$$

33. Віддалення точки (x_0, y_0) від простої, коли остання визначається рівнанням.................. 65—67

а) в прямовій формі:

$$d = x_0\, cs\,\varphi + y_0\, sn\,\varphi - \delta \;\ldots\ldots\; (32)$$

б) в алгебричній формі:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \;\ldots\ldots\; (33)$$

34. Мет точки на просту 71

$$(1)\quad \left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 - d\, cs\,\varphi \\ y_1 &= x_0 - d\, sn\,\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\; (34)$$

або:

$$(2)\quad \left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 - (x_0\, cs\,\varphi + y_0\, sn\,\varphi - \delta)\, cs\,\varphi \\ y_1 &= y_0 - (x_0\, cs\,\varphi + y_0\, sn\,\varphi - \delta)\, sn\,\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\; (35)$$

і

$$(3)\quad \left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{A(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2+B^2} \\ y_1 &= y_0 - \frac{B(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2+B^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\; (36)$$

(де x_0 і y_0 — значники даної точки, а x_1 і y_1 значники основи пряму спущеного з цієї точки на просту).

35. Рівнання жмутка простих .... 73—75

1) $(x\, cs\, \varphi_1 + y\, sn \varphi_1 - \delta_1) -$
$- \lambda\, (x\, cs\, \varphi_2 + y\, sn\, \varphi_2 - \delta_2) = O$ ...... *(37)*

(де $x cs \varphi_1 + y sn \varphi_1 - \delta_1 = O$ і $x cs \varphi_2 + y sn \varphi_2 - \delta_2 = O$ — є рівнання напрямних простих жмутка, а довільний чинник $\lambda = \frac{sn\, \alpha}{sn\, \beta}$, де α і β — є кути, що творить довільна проста жмутка з напрямними простими).

2) $(A_1 x + B_1 y + C_1) -$
$k(A_2 x + B_2 y + C_2) = O$ ...... *(39)*

(де $A_1 x = B_1 y + C_1 = O$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = O$ — є рівнання напрямних простих жмутка, а довільний чинник:

$$k = \lambda \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\Bigg).$$

3) $P_1 - \lambda\, P_2 = O$ ...... *(38)*

(Плюкеровське означення рівнання, де P_1 і P_2 — ліві частини знульованих рівнань напрямних простих жмутка, а λ — довільний чинник).

36. Рівнання симетральної (рівнодільної) кута 76

$P_1 \mp P_2 = O$ ...... *(40)*

(де P_1 і P_2 — є ліві частини знульованих рівнань рамен кута; знак „—" вживаємо тоді, коли початок координать лежить в полі кута, а „+" — коли початок координат лежить в полі, суміжною даному, кута).

37. Умова переходження трьох простих через спільну точку 79

$\lambda\, P_1 + \mu\, P_2 + \nu\, P_3 = O$ ...... *(41)*

(де λ, μ і ν — є довільні чинники, P_1, P_2 і P_3 — є ліві частини знульованих рівнань даних простих).

III. Перетворення координатних осей.

38. Взори переходу 93

1) рівнобіжне пересунення осей:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (42)$$

і вворотнє: $$\left.\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (43).$$

2) Обертання осей навколо початку 94

$$\left.\begin{aligned} x' &= y\,sn\,\varphi + x\,cs\,\varphi \\ y' &= y\,cs\,\varphi - x\,sn\,\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (45)$$

і зворотнє: $$\left.\begin{aligned} x &= x'cs\,\varphi - y'sn\,\varphi \\ y &= x'sn\,\varphi + y'cs\,\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (44)$$

(де φ — е кут, на якого повернено осі).

3) Довільне перенесення осей 95

$$\left.\begin{aligned} x' &= (y-b)\,sn\,\varphi + (x-a)\,cs\,\varphi \\ y' &= (y-b)\,cs\,\varphi - (x-a)\,sn\,\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (46)$$

і зворотнє: $$\left.\begin{aligned} x &= a + x'cs\,\varphi - y'\,sn\,\varphi \\ y &= b + x'sn\,\varphi + y'\,cs\,\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (46a)$$

4) Взори переходу від бігунових координат до прямокутніх і навпаки .... 96—97

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ sn\,\varphi &= \frac{y}{\varrho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ cs\,\varphi &= \frac{x}{\varrho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ tg\,\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (48)$$

і зворотнє: $$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\,cs\,\varphi \\ y &= \varrho\,sn\,\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (47)$$

IV. Коло.

39. Основне рівняння кола 99

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots (50)$$

40. Центрове рівняння кола 104

$$x^2 + y^2 = r^2 \ldots\ldots (51)$$

41. Загальне обводове (вершкове) рівняння кола 104—105

$$x\,(x-2a) + y\,(y-2b) = 0 \ldots\ldots (52)$$

42. Обводові рівнання кола, віднесені до осей 105

1) до осі X—ів:

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0 \ldots\ldots (53)$$

2) до осі Y—ів:

$$x^2 - 2bx + y^2 = 0 \ldots\ldots (54)$$

43. Алгебричне рівнання кола .... 107—110

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots (55)$$

де $A = B$.

Це рівнання визначає:

а) реальне коло, коли:

$$\Delta = D^2 + E^2 - 4AF > 0$$

б) точку, коли: $\Delta = 0$

і в) уявне коло (жадного геометричного образу), коли $\Delta < 0$.

44. Упорядковане алгебричне рівнання кола 111

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0 \ldots\ldots (56)$$

45. Взори перетворення алгебричного рівнання в основне .... 110—112

1) для загального рівнання:

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{D}{2A},\ b = -\frac{E}{2A} \\ r &= \frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (57a)$$

2) для упорядкованого рівнання:

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{M}{2},\ b = -\frac{N}{2} \\ r &= {}^1/_2\sqrt{M^2 + N^2 - 4P} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (57b)$$

46. Рівнання поперечника кола, здруженого з шерегом даних рівнобіжних тятив 119

$$y = -\frac{1}{m}x \ldots\ldots \quad (58)$$

(де m — є кутовий змінник даних тятив).

47. Рівнання дотичної до кола.............. 120—125

1) коли коло визначене центровим рівнанням:

$$xx_1 + yy_1 = r^2 \ldots\ldots \quad (59)$$

2) коли коло визначене основним рівнанням:

$$(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2 \ldots\ldots \quad (60)$$

3) коли коло визначене алгебричним рівнанням.. 165

$$\left.\begin{array}{l} Axx_1 + Ayy_1 + \dfrac{D}{2}(x+x_1) + \\ \quad + \dfrac{E}{2}(y+y_1) + F = 0, \\ \text{або (для упорядкованої форми):} \\ xx_1 + yy_1 + \dfrac{M}{2}(x+x_1) + \\ \quad + \dfrac{N}{2}(y+y_1) + P = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (75)$$

У всіх цих рівнаннях x_1 і y_1 — є значники точки дотику.

48. Рівнання прямової (нормалі) до кола .. 125—126

Коли дано:

1) центрове рівнання кола:

$$xy_1 = x_1y \ldots\ldots \quad (61)$$

або: $$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \ldots\ldots \quad (62)$$

2) основне рівнання кола:

$$\left.\begin{aligned} &(x-a)(y_1-b)=(x_1-a)(y-b) \\ &\text{або: } \frac{x-a}{x_1-a}=\frac{y-b}{y_1-b} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (63)$$

3) алгебричне рівнання кола:

$$\left.\begin{aligned} &y-y_1=\frac{2Ay_1+E}{2Ax_1+D}(x-x_1) \\ &\text{або: } \frac{2Ax+D}{2Ax_1+D}=\frac{2Ay+E}{2Ay_1+E} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (64a)$$

4) упорядковане алгебричне рівнання кола:

$$\left.\begin{aligned} &y-y_1=\frac{2y_1+N}{2x_1+M}(x-x_1) \\ &\text{або: } \frac{2x+M}{2x_1+M}=\frac{2y+N}{2y_1+N} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (64b)$$

49. Рівнання бігункової до кола .... 132—133

Ці рівнання мають вигляд рівнань *(59)*, *(60)* і *(75)*, з тією лише ріжницею, що x_1 і y_1 є значниками бігуна.

50. Довжини відтинків дотичної, піддотичної, прямової й підпрямової 134

1) Довжина дотичної: $t = r\frac{y_1}{x_1}$ ...... *(68)*

2) ,, піддотичної: $S_t = \frac{y_1^2}{x_1}$ ...... *(69)*

3) ,, прямової: $n = r$ .... *(66)*

4) ,, підпрямової: $S_n = x_1$ .... *(67)*

Ці вартости доведені для кола, що має центр у початку осей координат. Вартости x_1 і y_1 — є значники точки дотику.

51. Рівнання степенної (радикальної) осі ....

$$K_1 - K_2 = O \ldots\ldots (72)$$

де K_1 і K_2 — є ліві частини знульованих рівнань даних кол.

52. Рівнання жмутка кол 147

$$K_1 - \lambda K_2 = 0 \;\ldots\ldots\; (72a)$$

де K_1 і K_2 — є ліві частини знульованих рівнань даних кола, а λ — довільний чинник.

V. Парабола.

53. Вершкове рівнання параболи .... 167—168

1) парабола спрямована в бік додатніх x—*ів*: 174

$$y^2 = 2px \;\ldots\ldots\; (77)$$

2) парабола спрямована в бік від'ємних x — *ів*:

$$y^2 = -2px \;\ldots\ldots\; (79)$$

3) теж, коли парабола за свою вісь має вісь Y—ів:

$$x^2 = \pm 2py \;\ldots\ldots\; (80)$$

57. Рівнання параболи, що мають осі рівнобіжні до якої будь осі координат, а вершок у довільній точці 175

$$(y-b)^2 = \pm 2p(x-a) \;\ldots\ldots\; (82)$$

$$(x-a)^2 = \pm 2p(y-b) \;\ldots\ldots\; (82a)$$

55. „Елеваційне" рівнання параболи........ 176—177

$$x^2 - 2ax + 2py = 0 \;\ldots\ldots\; (83)$$

або: $(x-a)^2 = a^2 - 2py \;\ldots\ldots\; (84)$

56. Відтинкове рівнання параболи 182

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \frac{x}{a} = 1 \;\ldots\ldots\; (85)$$

57. Алгебричне рівнання параболи, що має вісь рівнобіжну до однієї з осей координат...... 183—187

1) вісь рівнобіжна до осі X — *ів:*

$$\left.\begin{array}{l} By^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ \text{2) вісь рівнобіжна до осі } Y\text{—ів:} \\ Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\; (86)$$

58. Упорядковані алгебричні рівнання параболи:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ y^2 + Mx + Ny + P = O \\ 2)\ x^2 + Mx + Ny + P = O \end{array}\right\} \ldots\ldots (86a)$$

59. Рівнання кожного поперечника параболи 198

$$y = n \ldots\ldots (87)$$

де n — рядна перехрестя поперечника з параболою.

Коли цей поперечник здружений з шерегом рівнобіжних тятив, то:

$$y = \frac{p}{m} \ldots\ldots (88)$$

де m — кутовий змінник цих тятив.

60. Поле відрізка параболи, утвореного тятивою прямовою до осі параболи .... 201—203

$$S = \frac{4}{3}ab, \ldots\ldots (89)$$

а піввідрізка, обмеженого віссю параболи:

$$S_1 = \frac{2}{3}a.b \ldots\ldots (90)$$

(де a і b — значники кінця тятиви)

61. Поле відрізку, утвореного тятивою непрямовою до осі параболи 207

$$S = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p} \ldots\ldots (93)$$

(де y_1 і y_2 — рядні кінців тятиви)

62. Рівнання дотичної й бігункової до параболи .... 209—213 і 220

1) Парабола визначена вершковим рівнанням:

$$yy_1 = p(x + x_1) \ldots\ldots (95)$$

2) Парабола визначена основним рівнянням:

$$(y-b)(y_1-b)=p[(x-a)+(x_1-a)] \;\ldots\ldots\; (95a)$$

3) Парабола визначена алгебричним рівнянням:

$$\left.\begin{array}{l} Byy_1+\dfrac{D}{2}(x+x_1)+\dfrac{E}{2}(y+y_1)+F=0 \\ \text{або:} \\ yy_1+\dfrac{M}{2}(x+x_1)+\dfrac{N}{2}(y+y_1)+P=0 \end{array}\right\}\ldots (95b)$$

Коли згадані рівняння є рівняння дотичної, то x_1 і y_1 — є значники точки дотику, а коли це є рівняння бігункової, то x_1 і y_1 — є значники бігуна.

63. Рівняння прямової до параболи 215

1) Коли парабола визначається вершковим рівнянням:

$$y--y_1=-\frac{y_1}{p}(x-x_1) \;\ldots\ldots\; (96)$$

або: $$\frac{y-y_1}{y_1}+\frac{x-x_1}{p}=0$$

2) Коли парабола визначається основним рівнянням:

$$\frac{y-y_1}{y_1-b}+\frac{x-x_1}{p}=0 \;\ldots\ldots\; (96a)$$

3) Коли парабола визначається алгебричним рівнянням:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y-y_1}{2By_1+E}=\dfrac{x-x_1}{D} \\ \text{або: } \dfrac{y-y_1}{2y_1+N}=\dfrac{x-x_1}{M} \end{array}\right\}\ldots\ldots (96b)$$

64. Довжини відтинків дотичної, піддотичної, прямової й підпрямової до параболи, визначеної рівнянням $y^2 = 2px$ 216

Відтинки:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1) дотичної:} & t = \sqrt{4x_1^2 + y_1^2} \\ \text{2) прямової:} & n = \sqrt{p^2 + y_1^2} \\ \text{3) піддотичної} & S_t = 2x_1 \\ \text{4) підпрямової:} & S_n = p \end{array}\right\} \ldots\ldots \mathit{(97—99)}$$

де x_1 і y_1 — значиньи точки дотику.

VI. Еліпса й гипербола.

65. Рівнання еліпси й гиперболи 226

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1) центрові:} & b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2 \\ \text{2) каноничні:} & \dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots \mathit{(104)}$$

де „+“ відповідає еліпсі, а „—“ гиперболі.

66. Лінійний центровідступ (екцентрисистет) еліпси 228

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \;\ldots\ldots\; \mathit{(106)}$$

67. Числовий (астрономичний) центровідступ, або ексцентриситет еліпси 229

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \ldots\ldots \mathit{(107)}$$

68. Лінійний центровідступ (екцентриситет) гиперболи 231

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} \;\ldots\ldots\; \mathit{(108)}$$

69. Числовий центровідступ (екцентриситет) гиперболи 231

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} \ldots\ldots \mathit{(109)}$$

70. Рівнання рівноосьової, або рівнобічної гиперболи 232

$$x^2 - y^2 = a^2 \;\ldots\ldots\; \mathit{(110)}$$

71. Вартість напрямних лучів (лучів-векторів) еліпси 234

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= a + \frac{ex}{a} \\ r_2 &= a - \frac{ex}{a} \\ \text{або:}\quad r_1 &= a + \varepsilon x \\ r_2 &= a - \varepsilon x \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (111)$$

72. Вартість напрямних лучів гиперболи 234

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{ex}{a} + a \\ r_2 &= \frac{ex}{a} - a \\ \text{або:}\quad r_1 &= \varepsilon x + a \\ r_2 &= \varepsilon x - a \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\; (112)$$

73. Центрове віддалення (центровий луч) якої будь точки еліпси або гиперболи 235

$$R_{ел.} = \sqrt{\varepsilon^2 x^2 + b^2} \;\ldots\ldots\; (113)$$

$$R_{гип.} = \sqrt{\varepsilon^2 x^2 - b^2} \;\ldots\ldots\; (114)$$

74. Змінник (параметер) еліпси або гиперболи 237

$$2p = 2\,\frac{b^2}{a} \;\ldots\ldots\; (115)$$

75. Вершкове рівнання кривої другого ступіня 238—239

$$y^2 = 2px + qx^2 \;\ldots\ldots\; (118)$$

де: 1) при $q < 0$ — буде рівнання еліпси

2) при $q > 0$ — буде рівнання гиперболи

і 3) при $q = 0$ — буде рівнання параболи.

76. Рівнання директрити (напрямної) кривої другого ступіня . . . . 241—242

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\varepsilon} \\ \text{або: } x &= \frac{a^2}{e} \end{aligned}\right\} \dots\dots (118a)$$

77. Загальне рівнання еліпси або гиперболи (що мають головні осі рівнобіжні до осі X—ів) 247—248

$$\left.\begin{aligned} & b^2(x-m)^2 \pm a^2(y-n)^2 = a^2 b^2 \\ \text{або: } & \frac{(x-m)^2}{a^2} \pm \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \end{aligned}\right\} \dots (119)$$

де „+“ відповідає еліпсі, а „—“ — гиперболі.

78. Алгебричне рівнання еліпси й гиперболи 249

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \; \dots\dots \; (119a)$$

де $A \neq B$, при чому для еліпси A і B одного знаку, а для гиперболи A і B ріжного знаку.

79. Значники центра й вартість півосей еліпси й гиперболи, визначених алгебричним рівнанням . . 250

1) Значники центра:

$$m = -\frac{D}{2A}; \; n = -\frac{E}{2B}$$

2) Вартости півосей:

$$\left.\begin{aligned} a &= {}^1/_2 \sqrt{\frac{BD^2 + AE^2 - 4ABF}{AB^2}} \\ b &= {}^1/_2 \sqrt{\frac{BD^2 + AE^2 - 4ABF}{AB^2}} \end{aligned}\right\} \dots\dots (118b)$$

де в залежности від вартости виразника:

$$\Delta = BD^2 + AE^2 - 4ABF \gtreqless 0$$

дані еліпса або гипербола будуть:

1) $\Delta > 0$ — реальними
2) $\Delta = 0$ — обертатимуться в точку
і 3) $\Delta < 0$ — уявними.

80. Рівнання дотичної та бігункової до еліпси або гиперболи 259

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ b^2 xx_1 \pm a^2 yy_1 = a^2 b^2 \\ 3)\ \dfrac{xx_1}{a^2} \pm \dfrac{yy_1}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots (121)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ b^2 (x-m)(x_1-m) \pm \\ \pm a^2 (y-n)(y_1-n) = a^2 b^2 \\ 4)\ \dfrac{(x-m)(x_1-m)}{a^2} \pm \\ \pm \dfrac{(y-n)(y_1-n)}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots (122)$$

$$5)\ yy_1 = p(x+x_1) \pm \frac{p}{a} xx_1 \ldots\ldots (123)$$

де верхній знак належить еліпсі, а нижчий — гиперболі. При чому вартости x_1 і y_1 є: для дотичної — значниками точки дотику, а для бігункової — значниками бігуна.

81. Рівнання дотичної або бігункової до кривої 2-го ступіня, визначеної рівнянням: 261

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} Axx_1 + Byy_1 + \dfrac{D}{2}(x+x_1) + \\ + \dfrac{E}{2}(y+y_1) + F = 0 \\ \text{або:} \\ 2Axx_1 + 2Byy_1 + D(x+x_1) + \\ + E(y+y_1) + 2F = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (123a)$$

При чому вартости x_1 і y_1 є: для дотичної — значниками точки дотику, а для бігункової — значниками бігуна.

82. Рівнання прямової (нормалі) еліпси, або **гиперболи** 265

$$y - y_1 = \pm \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1) \; \ldots\ldots \; (124),$$

або:

$$\frac{a^2}{e^2} \cdot \frac{x}{x_1} \mp \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{y}{y_1} = \; \ldots\ldots\ldots \; (125)$$

де верхній знак належить еліпсі, а нижчий — гиперболі,

83. Величини дотичности еліпси й гиперболи 275

Довжина відтинку:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{1) дотичної:} & t = & \dfrac{y_1}{b^2 x_1^2}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} \\[2ex] \text{2) піддотичної:} & S_t = \pm & \dfrac{a^2 - x_1^2}{x_1} \\[2ex] \text{3) прямової:} & n = & \dfrac{1}{a^2}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} \\[2ex] \text{4) підпрямової:} & S_n = & \dfrac{b^2 x_1}{a^2} \end{array}\right\} (126)$$

де подвійний знак $\pm$ відповідає: „+“ для еліпси, а „—“ для гиперболи.

84. Рівнання поперечника еліпси й гиперболи, здруженого з шерегом тятив їх, визначених кутовим змінником m 278

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2 m} x \; \ldots\ldots \; (127)$$

де „—“ — відповідає еліпсі, а „+“ — гиперболі.

85. Умова взаємної здружености двох поперечників еліпси або гиперболи 280

$$m . m_1 = \mp \frac{b^2}{a^2} \; \ldots . \; (128)$$

де m і m_1 — є кутові змінники поперечників.

86. Поле еліпси 295

$S = \pi ab$ ...... *(130)*

87. Рівнання асимптот (доторкальних) гиперболи 295

$$\left.\begin{array}{ll} & y = \pm \dfrac{b}{a} x \\ \text{або:} & ay \mp bx = 0 \end{array}\right\} \ldots . (131)$$

88. Асимптотичне рівнання гиперболи 298

$xy = k^2$ ...... *(132)*

де $k = \dfrac{a^2 \varepsilon^2}{4.}$

89. Асимптотичне рівнання рівнобічної гиперболи 302

$xy = \dfrac{a^2}{2}$ ..... *(135)*

90. Числовий ексцентрисистет (центровідступ) рівнобічної гиперболи 303

$\varepsilon = \sqrt{2}$ ..... *(135-a)*

91. Визначення роду кривої через сочинники її рівнання: $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ 317

Правило: коли здобуток AB, або відношення $\frac{A}{B}$, сочинників при квадратах змінних буде:

1) $AB > 0$ — крива є е л і п с а;

2) $\frac{A}{B} = 1$ — крива — к о л о;

3) $AB < 0$ — крива — г и п е р б о л а

4) $\frac{A}{B} = -1$ — крива — р і в н о б і ч н а гипербола

5) $AB = 0$ — крива — п а р а б о л а, при чому:

6) $\frac{A}{B} = 0$ — вісь параболи рівнобіжна до осі X—ів

7) $\frac{A}{B} = \infty$ — вісь параболи рівнобіжна до осі $У$—ів

92. Виразник (дискрімінант) рівнання 2-го ступіня з двома змінними:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$ 320

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = C^2 - 4AB \lesseqgtr 0 \\ \text{При чому, коли:} \\ \Delta < 0 \text{ — крива є еліпса} \\ \Delta > 0 \text{ — крива є гипербола} \\ \Delta = 0 \text{ — крива є парабола} \end{array}\right\} \ldots\ldots (136)$$

VII. Косокутні координати.

93. Віддалення точки від початку координат 329

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\,cs\omega} \ldots\ldots (137)$$

94. Довжина відтинку, через значники кінців 329

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)cs\omega} \ldots (138)$$

95. Рівнання простої........................ 330

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ y = mx + n \\ \text{де } m = \dfrac{sn\,\alpha}{sn\,(\omega - \alpha)} \end{array}\right\} \ldots\ldots (140)$$

$$2)\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots\ldots (142)$$

$$3)\ x\,cs\,\varphi + y\,cs\,(\omega - \varphi) = \delta \ldots\ldots (143)$$

96. Перетворення алгебричного рівнання простої в прямову форму 332

1) нормувальний чинник:

$$\lambda = \frac{sn\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - A2Bcs\omega}} \ldots\ldots (144)$$

2) взори переходу:

$$\left.\begin{aligned} cs\varphi &= \frac{A sn\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcs\omega}} \\ cs(\omega - \varphi) &= \frac{B sn\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcs\omega}} \\ \delta &= \frac{-C sn\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcs\omega}} \end{aligned}\right\} \ldots . (145)$$

3) Прямова форма алгебричного рівнання простої:

$$\frac{(Ax + By + C)sn\omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcs\omega}} = 0 \ldots .. (147)$$

97. Кут спаду простої на вісь X—ів 334

$$ty\,\alpha = \frac{m\,sn\,\omega}{1 + m\,cs\,\omega} \ldots\ldots (149)$$

98. Кут між простими 335

1) рівнання простих в каноничній формі:

$$tg\,\varphi = \pm \frac{(m_1 - m_2)\,sn\,\omega}{1 + m_1m_2 + (m_1 + m_2)\,cs\,\omega} \ldots\ldots (150)$$

2) рівнання простих в алгебричній формі:

$$ty\,\varphi = \pm \frac{(A_1B_2 - A_2B_1)\,sn\omega}{(A_1A_2 + B_1B_2) - (A_1B_2 + A_2B_1)\,cs\omega} \ldots (153)$$

99. Умова рівнобіжности простих 336

$$m_1 = m_2 \ldots\ldots (151)$$

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \ldots\ldots (154)$$

100. Умова прямовости простих 336

$$1 + m_1m_2 + (m_1 + m_2)cs\,\omega = 0 \ldots\ldots (152)$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1\,cs\,\omega - B_1}{A_1 - B_1\,cs\,\omega} \ldots\ldots (156).$$

101. Рівнання простої, що переходить через дану точку прямово до простої: $A_1x + By_1 + C_1 = 0$ 336

$$(A_1 cs\,\omega - B_1)(x - x_1) + \\ + (A_1 - B_1 cs\,\omega)(y - y_1) = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (157).$$

102. Поле трикутника 338

$$S_{ABC} = \frac{sn\,\omega}{2}\,[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \\ + (x_3y_1 - x_1y_3)] \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (158)$$

103. Взори перетворення координат 338

1) перехід від косокутніх до косокутніх координат, що мають спільний з першими початок:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1\,sn(\omega - a) + y_1\,sn(\omega - \beta)}{sn\,\omega} \\ y &= \frac{x_1\,sn\,a + y_1\,sn\,\beta}{sn\,\omega} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (159)$$

2) перехід від прямокутніх до косокутніх координат:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1\,cs\,\alpha + y_1\,cs\,\beta \\ y &= x_1\,sn\alpha + y_1\,sn\beta \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (160)$$

3) перехід від косокутніх до прямокутніх координат:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1\,sn\,(\omega - a) - y_1\,cs\,(\omega - a)}{sn\,\omega} \\ y &= \frac{x_1\,sn\,a + y_1\,cs\,\alpha}{sn\,\omega} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (161)$$

104. Рівнання кола 340

$$x^2 + y^2 + 2xy\,cs\,\omega = r^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (162)$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\,cs\omega = r^2 \;.\;.\;.\; (163)$$

VIII. Бігунові координати.

105. Рівнання простої, що переходить через бігун.. 343

$$\theta = a$$

де θ — означає фазу бігунових координат а α — кут спаду простої на бігунову вісь.

106. Загальне рівнання простої в бігунових координатах 344

$$\varrho = \frac{\delta}{cs(\theta - \varphi)} \;\ldots\ldots\; (166)$$

де δ — довжина пряму спущеного з бігуна на просту, а φ — кут спаду цього пряма на бігунову вісь.

107. Віддалення між двома точками 344

$$d = \sqrt{\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 - \varrho_1\varrho_2\, cs(\theta_1 - \theta_2)} \;\ldots\ldots\; (167)$$

108. Центрове рівнання кола................ 344

$$\varrho = a \;\ldots\ldots\; (168\text{-}a)$$

109. Загальне рівнання кола................ 345

$$\varrho^2 - 2\varrho\varrho_1\, cs(\theta_1 - \theta) + (\varrho_1{}^2 - r^2) = 0 \;\ldots\ldots\; (168\text{-}б)$$

110. Рівнання кривої 2-го ступіня 345

$$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon\, cs\theta} \;\ldots\ldots\; (169)$$

де, при $\varepsilon < 1$ — є еліпса; при $\varepsilon > 1$ — гипербола й при $\varepsilon = 1$ — парабола.

XI. Окремі геометричні осередки.

111. Рівнання циклоїди 348

$$1)\quad \left.\begin{aligned} x &= a(\theta - sn\theta) \\ y &= a(1 - cs\theta) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\; (170)$$

$$2)\quad x = a\ \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) + \sqrt{2ay - y^2} \;..\; (171)$$

112. Рівнання Версієри Аньезі — Фермата.... 350

$$x = \pm 2a \sqrt{\frac{2a-y}{y}} \ldots\ldots (172),$$

або: $$x^2y = 4a^2(2a-y) \ldots\ldots (173)$$

113. Рівнання Конхоїди Никомеда 351

1) в прямокутніх координатах:

$$x^2y^2 = (a+y)^2(d^2-y^2) \ldots\ldots (174)$$

2) в бігунових координатах:

$$\varrho = a \sec \theta \pm d \ldots\ldots (175)$$

114. Рівнання Цисоїди Діокля 353

1) $x^3 = y^2(2r-x) \ldots\ldots (176)$

2) $y = \pm x \sqrt{\frac{x}{2r-x}} \ldots\ldots (177)$

3) $\varrho = 2r \, sn\, \theta \, tg\, \theta \ldots\ldots (178)$

115. Рівнання Лемніскати Бернулі 355

1) $(x^2+y^2)^2 + 2c^2(y^2-x^2) = 0 \ldots\ldots (179)$

2) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \ldots\ldots (180)$

3) $\varrho^2 = a^2 \, cs\, 2\theta \ldots\ldots (181)$

116. Рівнання кривої Кассіні 358

$$(x^2+y^2)^2 + 2c^2(y^2-x^2) = s^4 - c^4 \ldots\ldots (192)$$

117. Рівнання Спіралі Архимеда............

1) $\varrho = a\theta \ldots\ldots (183)$

2) $x^2 + y^2 = a^2 \, arctg^2 \frac{y}{x} \ldots\ldots (185)$

118. Рівнання Слимака Паскаля............ 362

1) $\varrho = \pm b - a\, cs\theta$ ...... (187)

2) $(x^2 + y^2 + ax)^2 = b^2 (x^2 + y^2)$ ...... (188)

119. Рівнання Кардіоїди 364

1) $\varrho = a(1 - cs\,\theta)$ ...... (189)

2) $(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2)$ ...... (190)

120. Рівнання квадратової Розети............ 364

1) $\varrho = a. sn\, 2\theta$ ...... (191)

2) $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$ ...... (192)

АБЕТКОВИЙ ПОКАЖЧИК ЗМІСТУ КНИГИ.

Скороченння: Алгб. — алгебричний; власт. — властивість; рвн-я — рівнання; ПРК — прямокутні координати; КСК — косокутні координати; БК — бігунові координати.

А

Алгебричне рівнання: простої в ПРК — 39; простої в КСК 332; простої в прямовій (нормальній) формі — 52; пряму до простої — 42; рівнобіжної до простої — 42; кола — 107; параболи — 183; еліпси й гиперболи — 249; перетворення їх у загальну форму — 251; загальне рівнання другого ступіня від двох змінних (його геометрична интерпретація) — 314; виразник (дискрімінат) рівнання другого ступіня — 318.

Аналіза рівнання: канонічного простої — 31, 32;, алгб. простої — 40, 41; основного кола — 101; вершкового параболи — 169; канонічного: а) еліпси — 227, б) гиперболи — 230; вершкового кривих другого ступіня — 239.

Аналіза стіжкових перерізів — 305.

Аполонія теореми — 290.

Архимедова спіраля — 361.

Асимптоти (доторкальні) гиперболи — 257; рівнання їх — 295; креслення їх — 296; рівнання гиперболи, віднесеної до асимптот, яко координатних осей — 296; поле рівнобіжника, збудованого на асимптотах гиперболи — 298; відтинки січної й дотичної гиперболи, замкнені поміж асимптотами — 300; асимптоти рівнобічної гиперболи—302.

Б

Бігункова: до кола — 132; до параболи — 220; до еліпси й гиперболи — 268.

Бігунова: вісь — 96; координати — 96, 343.

Будування: степенної осі — 147; параболи — 170; дотичних до параболи — 219; еліпси — 243; гиперболи — 244; дотичних та прямових до еліпси й гиперболи — 266, 268; поперечника еліпси та гиперболи, здруженого з даним — 285; осей симетрії еліпси й гиперболи — 286.

В

Вектор-луч: еліпси — 233; гиперболи — 234.

Версієра Аньезі-Фермата — 349.

Вершкове рівняння: кола 104; параболи — 167, 174; еліпси — 238; гиперболи — 238; загальне вершкове рівняння кривих другого ступіня — 239.

Віддалення: точок на простій — 5; між двома точками на площі — 10; точки від простої — 64; точки від кола — 136; вогнищеве у параболи — 168; центрове еліпси й гиперболи — 235; точок в КСК — 329; точки від простої в КСК — 333; між двома точками в БК — 344.

Відрізок: параболи — 201; еліпси — 295.

Відтинкове рівняння: простої — 45; кола — 166; параболи — 181; осьове еліпси й гиперболи — 226.

Відтинкове визначення положення простої що-до координатних осей — 44.

Визначні осі: їх рівняння — 23, 24; рівнобіжне перенесення (пересування) їх — 93; обертання круг початку їх — 94; довільне перенесення (пересування) їх — 95; бігунові визначні осі — 96, 343; косокутні визначні осі — 327; перетворення косокутніх координат — 338, 339, 340.

Виразник (дискрімінант) **рівняння другого ступіня** — 318.

Властивости: степенної осі — 146; дотичної до параболи — 213; дотичної до еліпси — 262; дотичної до гиперболи — 263; тятив сповнення еліпси, або гиперболи — 285.

Г

Геометричні осередки: циклоїда — 347; епициклоїда — 348; гипоциклоїда — 349; версієра Аньезі-Фермата — 349; конхоїда Никомеда — 350; цисоїда Діокля — 352; лемніската Бернулі — 355; крива Кассіні — 358; спіраля Архимеда — 361; слимак Паскаля — 362; кардіоїда — 363; розета чотирілиста (квадратова) — 364.

Гипербола: *Рівнання:* центрове — 223; канонична — 226; аналіза цих рівнань — 230; вершкове — 238; загальне — 247; алгебраїчне — 249; перетворення останнього рівнання в загальне — 251; рівнання в БК — 346.

Первні кривої: меживогнище — 231; центровідступ (ексцентриситет) — 231; обчислення: лучів-векторів — 234; центрового віддалення (луча) — 235; змінника (параметра) — 236; директрита (напрямна) й инше трактування кривої, яко геометричного осередку — 239.

Креслення гиперболи — 232; будування точок гиперболи — 244.

Рівнобічна гипербола — 232, 302.

Гипербола й проста — 252; дотична й доторкальна (асимптота) — 257, 266; властивости дотичної — 263; напрямне коло й зеркальна точка — 264; прямова (нормаля) — 265; будування дотичної та прямової — 266, 268; обчислення довжин відтинків дотичної, піддотичної, прямової та підпрямової — 272.

Поперечники — 275; здружені поперечники — 279; уявні поперечники — 281, 282; тятиви сповнення — 284; поперечники рівнобіжні до тятив сповнення — 284; будування поперечника, здруженого з даним — 285; властивість тятив сповнення, що обіймають прямий кут — 285; будування осей симетрії — 286; звязок між значниками кінців здружених поперечників — 287; поле трикутника, збудованого на здружених півпоперечниках — 289; звязок між здруженими поперечниками й осями симетрії (1-ша теорема Аполонія) — 290.

Здружені гиперболи — 248, 282, 298; поле рівнобіжника, обведеного на здружених гиперболах (2-га теорема Аполонія) — 291.

Асимптоти (доторкальні) гиперболи — 257; рівняння їх — 295; креслення їх — 296; рівняння гиперболи, віднесеної до асимптот, яко координатних осей — 296; поле рівнобіжника, збудованого на асимптотах — 298; відтинки січної та дотичної, замкнені між кривою та асимптотами — 300; трикутники, збудовані на асимптотах — 301.

Гипоциклоїда — 349.

Д

Директрита: параболи — 168; еліпси й гиперболи — 239.

Дискрімінант — див. виразник.

Довжина: відтинку простої — 10; пряму, спущеного на просту — 64, 332, 333. Довжина відтинків дотичної, піддотичної, прямової та підпрямової: до кола — 134; до параболи — 215; до еліпси й гиперболи — 272.

Дотична: до кола — 120; 126, 164; до двох кол — 149; до параболи — 209, 213; креслення її — 216, 219; до еліпси й гиперболи — 257,266; дотична до кожної кривої 2-го ступіня—260.

Властивости дотичної: до еліпси — 262; до гиперболи — 264; будування їх до еліпси й гиперболи — 266, 268; обчислення довжин дотичних: до кола — 134; до параболи — 215; до еліпси й гиперболи — 272; відтинки дотичної гиперболи між її асимптотами — 301.

Доторкальна — див. асимптота.

Е

Ексцентриситет (центровідступ): еліпси — 228; гиперболи — 221; рівнобічної гиперболи — 302.

Елеваційний: рух тіла — 177; рівняння параболи — 176.

Еліпса:

Рівняння: центрове — 223; канонічне — 226; аналіза цих рівнань — 227; вершкове — 238; загальне — 247; алгебричне — 249; перетворення алгебричного в загальне — 251; рівнання еліпси в БК — 346.

Первні кривої: меживогнище — 228; центровідступ (ексцентриситет) — 229; обчислення: лучів-векторів — 233;

центрового віддалення (луча) — 235; змінника (параметра) — 236; директрита (напрямна) й инше трактування кривої, як геометричного осередку — 239.

Креслення еліпси — 230; будування точок еліпси —243;

Еліпса й проста — 252; дотична до еліпси — 257, 266; властивости цієї дотичної — 262; напрямне коло й зеркальна точка — 262; прямова (нормаля) — 265; будування дотичної та прямової — 266, 268; обчислення довжин відтинків дотичної, піддотичної, прямової та підпрямової — 272.

Поперечники — 275; здружені поперечники — 279; властивість косин, обведеного на еліпсі, прямокутника — 283; тятиви сповнення — 284; поперечники рівнобіжні до тятив сповнення — 284; будування поперечника, здруженого з даним — 285; властивість тятив сповнення, що обіймають прямий кут — 285; будування осей симетрії — 286; звязок між значниками кінців здружених поперечників — 287; поле трикутника, збудованого на здружених півпоперечниках — 289; звязок між здруженими поперечниками й осями симетрії (1-ша теорема Аполонія) — 290.

Поле еліпси — 292.

Епициклоїда — 348.

Ж

Жмут(ок): простих — 72, 79; кол — 147.

З

Здружені: гиперболи — 248, 282, 298; поперечники — 199, 279 (див. парабола, еліпса, гипербола).

Зеркальна точка вогнища: еліпси — 262; гиперболи — 264.

Змінник: кутовий — 12,27, 331; параболи — 168; еліпси й гиперболи — 236.

К

Канонічне рівнання: простої — 30; еліпси й гиперболи — 226.

Кардіоїда — 363.

Кассінієва крива — 358.

Квадратова розета — 364.

Кисоїда (цисоїда) Діокля — 352.

Коло:

Рівнання: основне — 99; центрове — 104; обводове, або вершкове — 105; алгебричне — 107; упорядковане алгбр. — 111; відтинкове — 166; рівнання кола в КСК — 340; рівнання кола в БК — 344, 345; рівнання кола, що переходить через три точки — 113.

Коло й проста — 115; поперечник — 118; дотична — 120, 126, 164; прямова — 125; бігункова — 132; кут січної з колом — 134.

Степень точки що-до кола — 136; взаємне положення кол — 142; степенна, або радикальна вісь — 143; степенна точка (радикальний центр) — 145.

Жмут (ок) кол — 147; кут двох кол — 148; спільна дотична двох кол — 149;

Обчислення довжин дотичної, піддотичної, прямової та підпрямової до кола — 135.

Коло напрямне: еліпси — 262; гиперболи — 264; **прикметне** — 253, 254.

Конхоїда (мушля) Никомеда — 350;

Координатні осі див. визначні осі.

Креслення: параболи — 170; дотичної та прямової до параболи — 216; еліпси — 230; гиперболи — 232; дотичної до еліпси й гиперболи — 266; асимптот гиперболи — 296.

Крива 2-го ступіня в БК — 345, 346.

Кут: спаду відтинку, або простої — 10; між простими — 17, 64 (зад. Ч. 62); січної з колом — 134; двох кол — 147; елеваційний — 177; спаду простої в КСК — 333; кут між простими в КСК — 334.

Кутовий змінник простої — 12, 27, 331.

Л

Лемніската Бернулі — 335.

Луч: вектор еліпси й гиперболи — 233, 234; центровий луч еліпси й гиперболи — 235.

М

Меживогнище: еліпси — 228; гиперболи — 231.

Мет: відтинку на осі — 9; точки на просту — 70, 71; косий мет точки й відтинка на вісь — 327, 328.

Мушля (конхоїда) Никомеда — 350.

Многокутник: поле — 18.

Н

Напрямна (вісь) див. директрита.

Напрямне коло див. коло напрямне.

Напрямність відтинка — 10.

Нормальні: положення простої що-до координатних осей — 44; рівнання простої — 46; нормальна форма алгбр. рівнання простої — 51.

Нормаля: до кола — 125; до параболи — 215; до еліпси й гиперболи — 265.

Нормувальний чинник алгбр. рівнання в КСК — 332.

О

Обводове рівнання див. вершкове рівнання.

Осередні трикутника: перехрещення їх в одній точці — 82;

Осі координат див. визначні осі.

Основа пряму, спущеного на просту (мет точки на просту) — 70.

Основні рівнання: простої — 30; кола — 99; параболи — 167; еліпси й гиперболи — 226.

Основні задачі на просту — 33.

П

Парабола:

Рівнання: вершкове — 167, 174; загальне — 175; елеваційне — 176; відтинкове — 181; алгебричне — 183; вогнищеве в БК — 365, 366.

Креслення параболи — 170.

Поле відрізка параболи — 201.

Парабола й проста — 191; поперечники параболи —197, дотична — 209, 213; прямова — 215; довжина відтинків дотичної, піддотичної, прямової та підпрямової — 215; креслення дотичної та прямової — 216; будування дотичних — 219; бігункова — 221.

Параметер див. змінник.

Перетворення: рівнань: простої — 48-56; кола — 109, 112; параболи — 189; еліпси й гиперболи — 251.

Координатних осей: ПРК — 93-95; БК — 97; КСК — 338—340.

Перехрестя: двох простих — 56; простої з осями координат — 59; простої з прямом, спущеним на неї — 70; двох кол — 147; параболи з простою — 191; еліпси й гиперболи з простою — 252.

Піддотична й підпрямова: до кола — 144; до параболи — 215; до еліпси й гиперболи — 272.

Поділ відтинка на частини — 12, 13, 14.

Поле: трикутника й многокутника в ПРК — 18, 21; теж — в КСК — 336; відрізка параболи — 201; трикутника, збудованого на здружених півпоперечниках еліпси й гиперболи — 289; рівнобіжника, обведеного на здружених гиперболах — 291; поле еліпси — 292; рівнобіжника, збудованого на асимптотах гиперболи — 298; теж — трикутника — 301.

Положення: точки на простій — 5; точки на площі — 6; відтинку на площі — 8; простої, що-до координ. осей — 43, 59; простої, що-до кола — 115; простої, що-до: параболи — 191, еліпси й гиперболи — 253.

Поляра див. бігункова.

Полярні координати див. бігунові координати.

Поперечник: кола — 118; параболи — 197; еліпси й гиперболи — 275; здружені у еліпсі й гиперболі — 279; уявні у гиперболі — 281, 282; поперечники й тятиви сповнення — 284; будування поперечника еліпси й гиперболи, здруженого з даним — 285; звязок між значниками кінців здружених поперечників — 287; поле трикутника, збудованого на здружених півпоперечниках — 289; звязок між здруженими поперечниками й осями симетрії — 290.

Прикметне коло, див. коло прикметне.

Проста: умова прямовости — 18, 58, 59; в КСК — 335, 336; умова рівнобіжности — 18, 57; в КСК — 335, 336; рівнобіжна до осей координат — 24; —, що переходить через початок координат — 26, 27, 28; БК — 343; —, що переходить через початок осей і дану точку — 29; —, що довільно лежить на площі — 30, 31; —, що переходить через загадану точку — 33, 42, 79; —, що переходить через дві загадані точки — 34; —, що переходить через загадану точку: 1) рівнобіжно до даної простої — 36, 42; — 2) прямово до тієї ж простої — 37, 42.

Рівнання: канонично — 30; простої, що переходить через дану точку — 33, 42, 79; простої, визначеної двома точками — 34; алгебричне — 39; в КСК — 330, 332; в БК — 343; відтинкове — 45; прямове (нормальне) — 46; перетворення однієї форми рівнання простої в инші — 48 - 56; кут спаду простої — 10; в КСК — 333.

Жмут(ок) простих — 72; умова переходження простої через перехрестя двох даних — 73.

Проста й коло — 115; проста й парабола — 191; проста й еліпса, або гипербола — 252.

Прямова (нормаля): до кола — 125; до параболи — 215, 216; до еліпси, або гиперболи — 265; будування її: до параболи — 217; до еліпси й гиперболи — 266; довжина відтинка її: у кола — 135; у параболи — 215; у еліпси й гиперболи — 272.

Прямові див. нормальні.

Р

Радикальна (степенна) вісь — 143.

Радикальний центр (степенна точка) — 145.

Рівнання:

Простої: координатних осей — 23; рівнобіжної до цих осей — 24; простої, що переходить через початок координатних осей — 26, 27; канонічне простої — 30; простої, що переходить: 1) взагалі через дану точку — 33, 42; 2) через дану точку, рівнобіжно до даної простої — 36, 42; 3) теж, — прямово до даної простої — 37, 42; 4) через дві точки — 34; простої в КСК — 330; алгебричне простої в ПРК — 39, 40; теж — в КСК – 332; відтинкове простої – 45; прямове, або нормальне простої — 46; перетворення однієї форми рівнання простої в инші — 48 - 56; прямова, або нормальна форма алгебричного рівнання простої — 51; рівнання простої в БК — 343.

Жмутка простих — 73 - 79. Симетральної кута — 77.

Кола: основне — 99; центрове — 104; вершкове — 104; 105; алгебричне — 107, 111; відтинкове — 166; — в КСК — 340; — в БК — 344, 345.

Параболи: вершкове — 167, 174; загальне — 175; елеваційне — 176; відтинкове — 181; алгебричне — 183.

Еліпси й гиперболи: центрове — 223; каноничне — 226; вершкове — 238; загальне — 247; алгебричне — 249; перетворення одних форм рівнань в инші — 251; гиперболи, віднесеної до асимптот, яко коорд. осей — 296.

Загальне алгебричне рівнання кривої другого ступіня: алгбр. рівнання другого ступіня від двох змінних та його геометрична інтерпретація — 314; виразник (дискрімінант) рівнання другого ступіня — 318; рівнання кривої другого ступіня в БК — 345.

Дотичних й асимптот: дотичні: до кола — 120, 126; до параболи — 209, 213; до еліпси й гиперболи — 257; до кожної кривої другого ступіня — 260; асимптот гиперболи — 295.

Прямових: до кола — 125; до параболи — 215; до еліпси й гиперболи — 265.

Рівнобіжність простих: в ПРК — 18, 57; в КСК — 335, 336.

Рівнобіжні до координатних осей — 24, 25.

Рівнобіжне перенесення коорд. осей — 93, 338.

Рівнодільна (симетральна) куту — 77, 78, 80.

Розета чотирилиста (квадратова) — 364.

С

Середина відтинку — 13.

Січна кола (кут між ними) — 134.

Симетральна: куту — 77, 78; трикутника: перехрещення симетральних кутів його — 80; перехрещення симетральних боків — 83.

Слимак Паскаля — 362.

Спіраля Архимеда — 316.

Степенна (радикальна) вісь — 143.

Степенна точка (радикальний центр) — 145.

Степень точки — 134.

Стіжкові перерізи: вершкові їх рівнання — 239; рівнання дотичної до них — 260; довід форм стіжкових перерізів: аналітичний — 305; геометричний — 311.

Т

Тангенс кута спаду відтинка на вісь — 10.

Точка: її положення: 1) на простій — 5; 2) на площі — 6; перехрестя простих — 56; перехрестя простої з координатними осями — 59; перехрестя простої з прямом, на неї спущеним — 70; віддалення точки від простої — 64, 68; три простоположені точки — 35; степенна точка — 145; зеркальна точка вогнища: еліпси — 262; гиперболи — 264; віддалення двох точок: в ПРК — 10; в КСК — 329.

Трикутник:

Властивости його: висот — 81; осередніх — 82; симетральних його кутів — 80; симетральних боків — 83.

Поле: трикутника через значники вершків у ПРК — 18, в КСК — 336; трикутника, збудованого на здружених півпоперечниках еліпси та гиперболи — 289; трикутника, збудованого на асимптотах гиперболи — 301.

Тятиви сповнення в еліпсі та в гиперболі — 284 поперечники рівнобіжні до тятив сповнення — 284; тятиви, що обіймають прямий кут — 285.

У

Умова: рівнобіжности простих: у ПРК — 18, 57; у КСК — 335, 336; прямовости простих: у ПРК — 18, 58; у КСК— 335, 336; того, що три точки лежать на одній простій — 21, 35; того, що три прості переходять через дану точку — 79; того, що дане алгебричне рівнання другого ступіня від двох змінних визначає певну криву 2-го порядку — 317.

Упорядкована форма алгебричного рівнання: кола — 111; параболи — 188.

Уявні поперечники гиперболи — 281, 282.

Ф

Фокус (вогнище): параболи — 168; фокусове віддалення 168; еліпси й гиперболи — 228.

Ц

Центр ваги трикутника — 16.

Центрове віддалення (ц-ий луч) еліпси її гиперболи — 235.

Центрове рівнання: кола — 104; еліпси її гиперболи — 223.

Центровідступ див. ексцентриситет.

Циклоїда — 347.

Цисоїда Діокля — 352.

Де-які з термінів, що вживалися у книзі.

Ми не ставимо собі завдання зібрати тут цілий термінологичний матеріял, а подаємо лише ті окремі вислови й визначення, що вживалися у книзі не так, як у инших авторів.

А

Абсциса, або відтинкова — Abszisse (нім), абсцисса (моск.), úsečka (чеськ.), odcięta (польськ.) і abscissa (лат.).

Аргумент, або незалежник — Argument (нім.).

Асимптота, або доторкальна — Asimptote (н.), асимптота (м.), asymptota (п., ч.).

Б

Безмежний (безмежно зростаючий, б. спадаючий, б. великий і б. малий) Unbegrenzt, unendlich (н.), безконечный, б. возростающий, убывающий (м), nieskończony (п.), nekonečný (ч.).

Бігункова, або поляра — Polare (н.), поляра (м.), biegunova (п.), polára (dotyková) (ч.).

Бігунові, або полярні висі: Polarwinklig (н.), полярныя координатныя оси (м.), współrzędne biegunowe (п.), souřadnice polárne (ч).

а) **бігун, або полюс**
б) **бігунова вісь**
в) **бігуновий росхил, або кут, фаза, азимут**
г) **напрямний луч, або луч-вектор.**

В

Валец, є окремий випадок циліндра, що має напрямною кривою коло.

Визначні осі; система (або уклад) визначних, або координатних осей: Koordinate, rechtwinklig, schiefwinklig (н.), система координатных осей, прямолинейная, прямоугольная, косоугольная системы (м.),

а) **вісь іксів, або перша вісь;**

б) **вісь ігреків, або друга вісь;**
в) **початок системи визначних, або координатних осей; початок координат;**
г) **значники** (координати) точки;
д) **відтинкова** (абсциса) точки;
е) **рядна** (ордината) точки;
ж) **простолінійні, прямокутні, косокутні** координатні осі.

układ współrzędnych, współrzędne prostokątne i т. д.; współrzędne punktu (п.), soustav souřadnic; rovnoběkové, pravoúhlé, kosoúhlé souřadnice (ч.)

Відтинкова див. **абсциса.**

Відтинкове рівнання кривої (простої) — Рівнання простої через відтинки на осях координат.

Виразник (гал. виріжник) — Diskriminante. Дискриминант.

Введений у... Eingeschrieben (н.), вписанный (м.), vpisany (п.), vepsaný (ч.).

Вистарчальний: Hinreichend (н.), достаточный (м.), dostateczný (п., ч.).

а) вистарчальна умова, або ознака; напр.; це є конечною й вистарчальною умовою того, щоб...

Г

Гипербола (народн. рогуля) — Hyperbel (н.), гипербола (м.), hyperbola (п.), hyperbola (ч.).

Границя — Граница (м.).

Напр.: a і b є границями вартостей змінної x; x змінюється в интервалі між границями a і b.

Д

Директрита, або напрямна — Direktrix (н.), директрисса (м.), kierownica (п.), řidici přímka (ч.).

Дотичина — Tangente (н.), касательная (м.), styczna (п.), tečna (ч).

Піддотична — Subtangente (нім).

Доторкальна (див. асимптота).

Дуга (= частина обводу кривої) Bogen (н.), дуга (м.).

Е

Еліпса (народн. довгокол, довгокруг). Ellipse (н.), эллипсис (м.), elipsa (п., ч.)

Ексцентриситет, або центровідступ (центрове удовження) —	Exzentrizität (н.), ексцентриситет (м.), mimośród (п.), výstřednost (ч.).

З

Здружений, взаємно здружений—	Konjugiert (н.), сопряженный (м.), sprzężony (п.), združený (ч.).
Злучне (**злучно-уявне**), або **комплексне число** — а) **здружені злучні** числа; б) **реальна частина, уявна частина злучного числа.**	Imaginär (н.), мнимое, комплексное число (м.), urojona liczba (п.), imaginární neb komplexní číslo (ч.).
Знульоване рівнання —	Це є рівнання, що має в одній своїй частині нуля.
Знулювати рівнання —	Перенести всі члени його в одну частину.
Змінник, або параметер (Змінниковий, або параметричний) —	Parameter (н.), параметр (м.), parametr (п.,ч.).

К

Кидати мет, або метувати (метування) —	Projizieren (н.), проектировать (**м.**)
Комплексне число (див. злучне число).	
Конечний: напр. конечна умова того, що...	Notwendig (н.), необходимый (м.), určitý (ч.).
Конус (стіжком зветься конус, що має за напрямний контур коло) —	Kegel (н.), конус (м.), stożek (п.), kužel (ч.).
Кут (гострий, прямий, тупий) 1. **Кути в колі:** а) **центровий** (вершок у центрі); б) **обводовий** (верш. на обводі); в) **круговий** (вершок лежить в полі круга); г) **позакруговий** (вершок лежить поза кругом); д) **введений у коло кут;** е) **обведений на колі кут;** ж) **рівнобіжнораменні кути** (що мають рамена рівнобіжні); з) **прямовораменні кути** (що мають взаємно прямові рамена).	Winkel (н.); угол (м.), kąt (п.), úhel (ч.).

Кут спаду, або спад простої — Це, кут що творить проста з віссю X-ів.

Кутовий змінник — Winkelkoeffizient (н.), угловой коэфициент (м.), współczynnik kierunkowy (п.), směrnice přímky.

Кратність поступу — Відношення наступного члена геометр. поступу до попереднього (моск: знаменатель прогрессии).

Л

Лук (напр. лук дуги, лук кривої) Krümmung (н.), кривизна (м.).

Луч — Radius (н.), радиус (м.), promień (п.), poloměr (ч.).

Лучник — Відтинок простої, що лучить центри двох кол.

М

Межа — Grenze (н.), предел (м.), limita (ч.).

(Межою зветься величина, до якої при даних умовах простує змінна і якої ніколи не досягае, хоч ріжниця між ними стає меншою від кожної, наперед загаданої, як бажано малої, величини).

Меживогнище — Віддалення між вогнищами (фокусами) кривої.

Н

Напрямна крива (контур) — Leitlinie (н.), управляющая кривая (м.).

Напрямний луч — Radius vector.

Напрямна (див. директрита).

Незалежник (див. аргумент).

О

Обведений на — Umschrieben (н.), описанный (м.), opisany (п). opsaný (г).

Обводове рівнання (в окремому випадку — **вершкове** р.) — Рівнання кривої, що переходить обводом через початок координат.

Обмежний — Endlich (н.), конечный (м.), skończony (п.), konečný (ч.).

Обмежений —	Begrenzt (н.), ограниченный (м).
Ордината, або рядна —	Ordinate (н.), ордината (м.), rzędna (п.), pořadnice (ч.).
Осередня —	Mediane (н.), медиана (м.), dośrodkowa (п.), spojnice (ч.).
Осередок геометричний (geometrischer)	Сполучення точок, що всі до одної підлягають якомусь певному закону.

П

Парабола (народн. кривоспадка)	Parabel (н.), парабола (м.), parabola (ч.).
Переріз (напр. стіжковий) —	Фігура, що одержується від перетину ч. тіла площею.
Перетин —	Процес чину перетинання.
Перехрещуватися (**перехрещення, точка перехрещення, або перехрестя**).	Schneiden (н.), пересекаться (м.), se protinati (ч.).
Перетинати, себ-то перерізувати на дві частині (напр. рівнодільна куту трикутника перетинає протилежний бік на частині пропорційні...).	
Позавимірний —	Transzendent (н.), трансцендентный (м.).
Поперечник —	Durchmesser (н.), диаметр (м.), średnica (п.), průměr (ч.).
Простоположені точки —	Це точки, що лежать на одній простій.
Прямова, або нормаля —	Normale (н.), нормаль (м.), normala (ч.).
Підпрямова —	Subnormale.

Р

Реальна вартість (число) —	Reell (н.), вещественный (м)., réalný (ч.).
Рівнання знульоване (див. знульоване р.).	
Рівнодільна, або симетральна (куту, відтинку) —	Halbbierende (н.), биссектрисса (м.), symetralna (п.), osy úhlů (ч.).
Рівнопільний, рівнообсяжний —	Фигури, або тіла, що мають рівні або поля, або обсяги.

Ріг = кут > π; **прямий ріг** = $^3/_2\pi$.
Рядна див. ордината.

С

Середник — Проста, що сполучує середини боків многокутника.

Симетральна — див. рівнодільна.

Спадати — зменшуватися.

Спад простої див. кут спаду.

Схожість — Ähnlich (н.), подобность (м.), podobieństwo (п.).

У

Удовження центрове — див. ексцентриситет.

Уявне число — див. злучне число.

ЗМІСТ.

ПЕРЕДНЄ СЛОВО.

Вступ.

§ 1. Вимір віддалень на простій 5
§ 2. Положення точки на площі 6
а) значники точки — 6; мнемонична схема — 7.
§ 3. Положення відтинку на площі 8
а) мет відтинку на координатні осі — 8; б) довжина відтинка — 10; в) напрямність відтинка: кут спаду його — 11; г) поділ відтинку на пропорційні частини — 12-14.
Вправи до § 1—3 (задачи чч. 1—20) 15
Значники центра ваги трикутника 16
§ 4. Кут між простими 17
а) тангенс кута між простими — 17; б) умова рівнобіжности простих — 18; г) умова прямовости простих — 18.
§ 5. Поле трикутника й многокутника 18
а) поле трикутника — 18-19; б) поле многокутника — 20-21.
Вправи до § 4—5 (задачи чч. 21—29) 21

РОЗДІЛ I

Проста лінія.

§ 6. Рівнання координатних осей 23
§ 7. Рівнання простих рівнобіжних до координатних осей 24
Вправи до § 6—7 (задачи чч. 30—33) 26
§ 8. Рівнання простої, що переходить через початок координатних осей 26
Вправи до § 8 (задачи 34—41) 28
§ 9. Загальне рівнання простої 30
а) канонична форма рівнання — 30-31; б) аналіза канонічного рівнання простої — 31-32.

§ 10. Основні задачі на просту 33

а) рівнання простої, що переходить через загадану точку — 33; б) рівнання простої, що переходить через дві загадані точки — 34; в) умова простоположенности трох точок — 35 - 36. г) рівнання простої, поведеної через дану точку рівнобіжно до другої простої — 36; д) рівнання простої, поведеної через дану точку прямово до другої простої — 37.

§ 11. Алгебричне рівнання простої 39

а) загальне алгебричне рівнання 1-го ступіня від двох змінних — 39; б) аналіза алгебричного рівнання простої — 40;

§ 12. Алгебрична форма рівнань пряму та рівнобіжної до даної простої 41

а) алгебричне рівнання простої, що взагалі переходить через загадану точку — 42; б) рівнання простої, що переходить через загадану точку рівнобіжно до другої простої — 42; в) рівнання простої, що переходить через загадану точку, прямово до другої простої — 42;

§ 13. Первні, що визначають положення простої що-до визначних осей 43

а) роля кута спаду простої на вісь X-ів і відтинку, відтятого простою на осі $У$-ів — 43; б) відтинкове визначення положення простої — 44; в) прямове (нормальне) визначення положення простої — 44.

§ 14. Відтинкове рівнання простої.................. 45

§ 15. Прямовé (або нормальне) рівнання простої 46

§ 16. Перетворення однієї форми рівнання простої у другу 48

а) перетворення канонічного рівнання в инші форми — 48; б) перетворення відтинкового рівнання — 50; в) перетворення алгебричної форми у прямову — 51; г) перетворення инших форм рівнання у прямову — 53; д) перетворення прямової форми рівнання в инші — 55.

§ 17. Перехрещення двох простих 56

а) значники перехрестя — 56; б) умова рівнобіжности простих — 57; в) ознака того, що перехрестя лежить на осі координат — 57; г) умова прямовости простих — 59.

§ 18. Точки перехрещення простої з осями 59

Вправи до § 9—18 (задачи чч. 42—65) 61

§ 19. Віддалення точки від простої 64

Вправи до § 19 (задачи чч. 66—71) 69

§ 20. Мет точки на просту 70

§ 21. Жмуток простих 72

а) Основна теорема — 72; б) рівнання кожної простої, що переходить через перехрестя двох даних — 73—75; в) знак жмуткового змінника λ — 76; г) рівнання симетральних трикутника — 77.

§ 22. Умова того, що три дані прості переходять через загадану точки 79

а) доведення умови — 79; б) перехрещення всіх симетральних кутів трикутника в одній точці — 80; в) перехрещення висот трикутника в спільній точці — 81; г) перехрещення осередніх трикутника в одній точці — 82; д) перехрещення симетральних боків $\triangle$ — ка — 83.

§ 23. Задачи до розділу I (задачи чч. 72—124) 84

§ 24. Перетворення координатних осей 93

а) рівнобіжне пересування осей — 93; б) обертання осей круг початку — 94; в) довільне перенесення осей — 95;

Бігунові визначні осі 96

Перетворення прямокутних координат у бігунові й навпаки — 97.

Вправи до § 24 (задачи ч.ч. 125—132) 98

РОЗДІЛ II.

Коло.

§ 25. Коло та його рівнання 99

§ 26. Аналіза основного рівнання кола 101

§ 27. Центрове рівнання й инші форми рівнання кола 104

а) центрове рівнання — 104; б) обводове (вершкове) рівнання — 104; в) обводове рівнання, віднесене до осей координат — 105.

Вправи до § 25—27 (задачи чч. 133—140) 105

§ 28. Алгебрична форма рівнання кола 107

а) загальне алгебричне рівнання кола — 107; б) взори переходу від алгебричного рівнання до основного — 109—110; в) упорядковане алгебричне рівнання кола — 111.

Рівнання кола, що переходить через три загадані точки 113

Вправи до § 28 (задачи чч. 141—143) 114

§ 29. Взаємне положення кола й простої 115

а) Умови, коли проста є січною, дотичною, або мимобіжною до кола — 115; б) геометричний осередок середин рівнобіжних тятив — 118; в) рівнання поперечника кола, здруженого з шерегом рівнобіжних тятив — 119.

Вправи до § 29 (задачи чч. 144—147) 120

§ 30. Дотична до кола (дано точку дотику) 120
§ 31. Прямовá, або нормаля до кола 125
§ 32. Рівнання дотичної до кола, поведеної з точки по-за колом 126
§ 33. Бігункова, або поляра 132
§ 34. Кут січної з колом 134
§ 35. Піддотична й піднормаль 134
§ 36. Положення точки зглядно кола 136
а) Степень точки зглядно кола — 136. б) Задача. Геометричний осередок точок, що мають однаковий степень зглядно кола — 139.

Вправи до § 30—36 (задачи чч. 148—157) 140

§ 37. Взаємне положення кол 142
§ 38. Степенна, або радикальна вісь 143
§ 39. Степенна точка трьох кол 145
§ 40. Жмуток кол 147

Задачи 148
а) Обчислити кут між двох кол — 148; б) написати рівнання спільної дотичної до 2-х кол — 149

Вправи до § 37—40 (задачи чч. 158—162) 151

§ 41. Задачи до розділу II (задачи чч. 163—226)..... 151

§ 42. Де-які зауваження до другого розділу 164
а) рівнання дотичної до кола, визначеного алгебричним рівнанням — 164; б) відтинкове рівнання кола — 166

РОЗДІЛ III.

Криві другого ступіня.

I ПАРАБОЛА.

§ 43. Парабола, яко геометричний осередок точок і основне її рівнання 167
а) вершкове рівнання параболи — 167; б) аналіза рівнання параболи — 169.

§ 44. Визначення точок параболи та її креслення 170

§ 45. Инші форми рівнання параболи 174
а) зміна осі параболи — 174; б) загальне рівнання параболи — 175; в) елевацийне рівнання параболи — 176; г) траєкторія тіла, кинутого під кутом до позему — 177; д) відтинкове рівнання параболи — 181.

§ 46. Алгебричне рівнання параболи 183
а) умови, коли алгебричне рівнання 2-го ступіня від двох змінних є рівнанням параболи — 183; б) упорядковане алгебричне рівнання параболи — 187—188; в) перетворення загального рівнання параболи в алгебричне й навпаки — 189.

Вправи до § 43—46 (задачи чч. 227—238) 189
§ 47. Взаємне положення простої та параболи 191
§ 48. Здружені поперечники параболи 197
§ 49. Поле відрізку параболи 201
Вправи до § 47—49 (задачи чч. 239—247) 208
§ 50. Рівнання дотичної, поведеної через дану точку параболи 209
§ 51. Властивости дотичної до параболи 213
§ 52. Прямова до параболи 215
§ 53. Довжина відтинків дотичної, прямової, піддотичної та підпрямової 215
§ 54. Креслення дотичної та прямової до параболи 216
§ 55. Дотична до параболи, поведена через точку по-за нею 218
§ 56. Будування дотичних, поведених з точки по-за параболою 219
§ 57. Бігункова до параболи 220
Вправи до § 50—57 (задачи ч.ч. 248—256) 222

II ЕЛІПСА ТА ГИПЕРБОЛА.

§ 58. Центрові рівнання еліпси та гиперболи 223
§ 59. Канонична форма рівнань еліпси й гиперболи 226
§ 60. Аналіза каноничного рівнання еліпси 227
а) форма кривої — 227; б) осі симетрії — 228; в) ексцентриситет — 229.

§ 61. Креслення еліпси 230
§ 62. Аналіза каноничного рівнання гиперболи 230
а) форма кривої — 230; б) осі симетрії — 231; в) ексцентриситет — 231.

§ 63. Креслення гиперболи 232
§ 64. Порівнання рівнань еліпси й гиперболи 233
§ 65. Обчислення первнів еліпси й гиперболи 233
а) обчислення лучів-векторів — 233; б) обчислення центрових віддалень (лучів) — 235; в) обчислення змінника (параметра) — 235.

§ 66. Вершкові рівняння еліпси й гиперболи 237
а) вершкове рівняння еліпси — 238; б) вершкове рівняння гиперболи — 238.

§ 67. Узагальнення вершкового рівняння для всіх кривих другого ступіня 239

§ 68. Инший спосіб трактування еліпси й гиперболи 239
(директрита цих кривих)

§ 69. Будування еліпси 243

§ 70. Будування гиперболи 244

Вправи до § 58—70 (задачи чч. 257—268) 246

§ 71. Загальні рівняння еліпси й гиперболи 247

§ 72. Алгебричні рівняння еліпси й гиперболи.......... 249

§ 73. Механичний спосіб перетворення алгебричного рівняння еліпси, або гиперболи в загальну форму 251

§ 74. Положення простої що-до еліпси або гиперболи .. 252

§ 75. Дотична до еліпси та гиперболи 257
Рівняння дотичної до кожної кривої другого порядку 260

§ 76. Властивости дотичної до еліпси 262

§ 77. Властивости дотичної до гиперболи 263

§ 78. Рівнання прямової (нормалі) до еліпси або гиперболи 265

§ 79. Будування дотичних та прямових до еліпси й гиперболи 266

§ 80. Дотична до еліпси або до гиперболи, поведена з точки по-за кривою 266

§ 81. Збудування дотичної до еліпси та гиперболи, поведеної з точки по-за ними 268
Вправи до § 71—81 (задачи 269—284) 270

§ 82. Обчислення дотичної, піддотичної, прямової та підпрямової у еліпси й гиперболи 272
а) еліпса — 272; б) гипербола — 274.

§ 83. Поперечники еліпси й гиперболи 275
а) властивість поперечника кривих з центром — 275; б) дотичні, поведені через кінці поперечника — 276; в) поперечник здружений з шерегом тятив — 277; г) взаємно здружені поперечники — 279; д) умова взаємної здружености поперечників — 280, е) уявні (зовнішні) поперечники гиперболи — 281.

§ 84. Де-які властивости поперечників еліпси й гиперболи 283
а) косини прямокутника, обведеного на еліпсі — 283; б) тятиви сповнення — 284; в) будування поперечника, здруженого з даним — 284; г) властивість взаємно прямових тятив сповнення — 285; д) прямокутник введений в еліпсу або гиперболу — 286; е) будування осей симетрії еліпси й гиперболи — 286; ж) звязок між значниками кінців здружених поперечників — 287; Поле трикутника, збудованого на здружених півпоперечниках — 289; здобуток здружених півпоперечників — 290.

§ 85. Теореми Аполонія 290
а) перша теорема — 290; б) друга теорема — 291;

§ 86. Поле еліпси 292

§ 87. Асимтоти гиперболи 295
а) рівнання асимптот — 295; б) креслення асимптот — 296;

§ 88. Асимтотичне рівнання гиперболи 296

Здружені гиперболи 298

§ 89. Де-які властивости асимтот гиперболи 298
а) поле рівнобіжника, збудованого на асимптотах — 298; б) відтинки січної між обводом гиперболи та її асимтотами — 300; в) відтинок дотичної, замкнений поміж її асимтотами — 301; г) трикутники, збудовані на асимтотах — 301.

§ 90. Рівнобічна гипербола 302
а) її рівнання — 302; б) її асимптоти — 303; в) числовий її ексцентриситет — 303.

Вправи до § 82—90 (задачи чч. 285—294) 303

§ 91. Криві другого ступіня, як перерізи стіжкової поверхні 305
а) аналітичний довід — 305; б) геометричні доводи: еліптичний переріз — 311; гиперболичний переріз — 312; параболичний переріз — 312.

§ 92. Загальне рівнання другого ступіня від двох змінних (його геометрична інтерпретація) 314

Ознаки, що дають спроможність через сочинники рівнання $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=O$, судити про рід кривої, що це рівнання визначає 316

§ 93. Виразник (дискрімінант) рівнання другого ступіня 318

§ 94. Задачі до розділу III (чч. 295—334)............ 320

РОЗДІЛ IV.

Косокутні й бігунові координати.

§ 95. Мет точки, кинений в даному напрямі 327
§ 96. Косокутні координати точки 328
§ 97. Віддалення в косокутніх координатах 329
а) Задача 1: віддалення від початку координат — 329; б) Задача 2: віддалення між двома точками — 329.

§ 98. Рівнання простої в косокутній системі ко-нат 330
а) канонічне рівнання — 330; б) кутовий змінник канонічного рівнання — 331; в) відтинкове рівнання — 331; г) прямове (нормальне) рівнання — 331; д) віддалення точки від простої — 332.

§ 99. Прямова форма алгебричного рівнання простої в косокутній системі координат 332
§ 100. Визначення кута спаду простої на вісь 333
§ 101. Кут між даними простими 334
а) коли рівнання простої дано в канонічній формі — 334; б) коли рівнання простої в алгебричній формі — 335; в) умови рівнобіжности й прямовости простих — 336; г) рівнання простої, що переходить через дану точку, прямово до даної простої — 336.

§ 102. Поле трикутника через значники його вершків .. 336
§ 103. Перетворення косокутніх координат 338
а) рівнобіжне перенесення — 338; б) перехід від косокутніх до косокутніх із спільним початком — 338; в) перехід від прямокутніх до косокутніх — 339; г) перехід від косокутніх до прямокутніх — 340.

§ 104. Рівнання кола в косокутній системі координат. .. 340
а) центрове рівнання — 340; б) загальне рівнання — 341; в) алгебричне рівнання — 341.

§ 105. Бігунові координати 343
а) рівнання простої — 343; б) віддалення поміж двома точками — 344; в) центрове рівнання кола — 344. г) загальне рівнання кола — 345.

§ 106. Рівнання кривої другого ступіня в бігунових координатах 345

ДОДАТОК.

Окремі геометричні осередки.

§ 107. Циклоїда 347
§ 108. Версієра Аньезі-Фермата 349

§ 109. Конхоїда (мушля) Никомеда 350
§ 110. Цісоїда Діокля 352
§ 111. Лемніската Бернулі 355
§ 112. Крива Кассіні 358
§ 113. Спіраля Архимеда 361
§ 114. Слимак Паскаля 362
Кардіоїда 363
§ 115. Розета чотирилиста (квадратова) 364
Покажчик взорів 367
Абетковий покажчик змісту книги 393
Короткий термінологичний покажчик 405
Зміст книги **411**

Помилки, що їх зауважено після друку книги.

Стр.	Ряд.	Згори чи здолу	Як надруковано:	Як треба виправити:
12	8	згори	в данному відношеню	в даному відношенню.
18	5	здолу	зворотні і протилежні знаками	зворотні й противних знаків
24	рис. 17а на рядній відтинкової x не помічено на горі точку N_1, а здолу точку N_2.			
31	13	здолу	кутовий змінник m	кутовий змінник m
33	3	згори	що проходить	що переходить
33	5	здолу	$AM^x = x - a$	$AM_x = x - a$
35	2	здолу	рівнання (19)	рівнання (19^a)
36	13	згори	що проходить	що переходить
41	7	здолу	і 6) $Bx = 0$	і 6) $By = 0$
43	14	згори	(рис. 34)	(рис. 30)
65	рис. 44 точку L (відтинок KL) треба заміняти на точку N (відтинок KN)			
65	6	здолу	(рис. 49)	(рис. 45)
69	6	здолу	$p = 4$	$d = 4$
70	рис. 48 є недобрий, що до правдивости положення точок A і B, але дає загальну уяву змісту задачи. Виправлення його залишаємо самим читачам.			
76	13	згори	на простій L_1	на простій L'
76	6	здолу	для простої L_1	для простої L'
77	4	здолу	$P_1 - (-) P_2 = 0$	$P_1 - (-1) P_2 = 0$
86	5	згори	1) $13^{44}/_{75}$	1) $13^{22}/_{75}$.
87	2	згори	$\left(d = \frac{3\sqrt{82}}{41} \right)$	$\left(d = \frac{4\sqrt{82}}{41} \right)$
88	6	згори	$c(-2, -1)$	$c(-4, -1)$
93	17	,,	$x' = AK; = PK$	$x' = AK = PK$
93	4	здолу	$A(2, -3)$	$A(3, -2)$
93	3	здолу	$0_1(1-5)$	$0_1(-1,5)$
100	14	згори	$r^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)_2$	$r^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2$
106	8	здолу	3) $x^2 - y^2 - 3y - 4 = 0$.	3) $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$.
107	7	,,	$x^2 - 2x - 1 + y^2 + 4y + 4 - {}^{25}/_4 = 0$	$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - {}^{25}/_4 = 0$

Стр.	Ряд.	Згори чи здолу	Як надруковано:	Як треба виправити:
120	13	здолу	$x^2+y^2-5x-7y+6+0.$	$x^2+y^2-5x-7y+6=0.$
121	3	згори	умовам дотичної.	умовам дотичности (2) попереднього §.
138	7	здолу	$d^2+r^2=-p^2.$	$d^2-r^2=-p^2.$
154	6	згори	1) $(x-2)^2+(y-5)^2+25$	1) $(x-2)^2+(y-5)^2=25.$
154	10	,,	$4x+3y+70$	$4x+3y=70$
156	13	,,	$2x+5y=2$	$2x+3y=2$
158	4	,,	$(b+2)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$	$(\varrho+2)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$
163	9	здолу	$x^2+y^2-16x+39+0$	$x^2+y^2-16x+39=0$
180	13	,,	тоді $l=\frac{v^2}{2g}$	тоді $h=\frac{v^2}{2g};$
180	12	,,	тоді $h=\frac{v^2}{g}$	тоді $l=\frac{v^2}{g}.$
191	4	,,	$x=\frac{p-mn\pm\sqrt{(p-2mn)}}{m^2}$	$x=\frac{p-mn\pm\sqrt{p(p-2mn)}}{m^2}$
200	6	,,	зміного	змінною
201	5	,,	(зментуватися)	(зменшуватися)
203	2	,,	$DN=x_2-x_4$	$DN=x_3-x_4.$
211	14	згори	$y-\frac{y_1}{2}=\frac{y_1-\frac{y_1}{2}}{x_1},$	$y-\frac{y_1}{2}=\frac{y_1-\frac{y_1}{2}}{x_1}x,$
215	7	,,	$y-y_1=\frac{p}{y_1}(y-x_1)$	$y-y_1=\frac{p}{y_1}(x-x_1)$
219	10	,,	$y_0{}^2=2px_0\gtreqless 0$	$y_0{}^2-2px_0\gtreqless 0$
222	12	здолу	$C\Vert M_2M_1$	$CD\Vert M_2M_1$
224	14	згори	1)	2)
224	10	здолу	очередки	осередки
238	14	згори	$y^2=2py-\frac{px^2}{a}$ . . . .(116)	$y^2=2px-\frac{px^2}{a}$ . . . (116)
239	3	,,	$y^2=2py+\frac{px^2}{a}$ . . . .(117)	$y^2=2px+\frac{px^2}{a}$ . . . (117)
239	9	,,	$y^2=2py+qx^2$ . . . (118)	$y^2=2px+qx^2$ . . . (118)
246	1	здолу	гиперболи: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}-$	гиперболи: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$
253	12	згори	але $e^2=a\pm b^2$	але $e^2=a^2\pm b^2$
253	13-14	,,	$\pm(a^2-e^2)\mathrm{cs}^2\alpha\pm a^2\mathrm{sn}^2\alpha\pm$ $\pm n^2\mathrm{cs}^2\alpha\gtreqless 0$	$\pm(a^2-e^2)\mathrm{cs}^2\alpha\pm a^2\mathrm{sn}^2\alpha\mp$ $\mp n^2\mathrm{cs}^2\alpha\gtreqless 0$
256	7	здолу	$x_{1,2}=\frac{a(n^2+b^2)}{-amn\mp\sqrt{b^2-a^2m^2+n^2}}$	$x_{1,2}=\frac{a(n^2+b^2)}{-amn\mp b\sqrt{b^2-a^2m^2+n^2}}$
270	14	згори	2) $9x^2+16x+36+96y+36=0$	2) $9x^2+16y^2+36x+96y+36=0$
272	5	,,	2) $9x^2+9y^2=544$	2) $16x^2+34y^2=544.$

Стр.	Ряд.	Згори чи здолу	Як надруковано:	Як треба виправити:
275	5	згори	$s_t = \pm \frac{a^2-x_1^2}{x_1^2} \dots (126)$	$s_t = \pm \frac{a^2-x_1^2}{x_1} \dots (126)$
281	6	,,	гиберболи	гиперболи
289	2	,,	$\frac{x_1}{a} : \frac{y^2}{b} = \frac{y_1}{b} : \frac{x^2}{\mp a} = \pm 1$	$\frac{x_1}{a} : \frac{y_2}{b} = \frac{y_1}{b} : \frac{x_2}{\mp a} = \pm 1$
290	5	,,	Коли візьиемо поле ΔOBC	**Коли візьмемо поле ΔOBC,**
290	2	здолу	$AM^2=\alpha^2$	$OM^2=\alpha^2$
302	16	,,	$=\frac{2x_1.3y_1.\mathrm{sn}2\alpha}{2}=$	$=\frac{2x_1.2y_1.\mathrm{sn}2\alpha}{2}=$
306	1	,,	$=2SN\mathrm{sn}\alpha$. де $SN=$	$=2SN\mathrm{sn}\alpha$, де $SN=$
312	Рис. 163[2]		В рисунку 163[2] треба точки K і F_1	сполучити простою KF_1
318	4	згори	або нічого, коли	або нічого, бо
334	2	,,	$ms\omega - m\mathrm{cs}\,\omega tg\alpha$	$msn\omega - m\mathrm{cs}\,\omega\, tg\alpha$
344	5	здолу	Прикметною кола.	Прикметою кола,
351	2	,,	$OP=OB\mathrm{cs}\theta$.	$OP=PB\mathrm{cs}\theta$,
357	2	,,	$y_1=y^2=0$;	$y_1=y_2=0$;
371	10	згори	$B_1(x-x_1)-A(y-y_1)=$ $=0\ .\ .\ .\ (25)$	$B_1(x-x_1)-A_1(y-y_1)=$ $=0\ .\ .\ .\ (25)$
371	14	здолу	$x\mathrm{cs}\varphi+y\mathrm{sn}y=\delta\dots(27)$	$x\mathrm{cs}\varphi+y\mathrm{sn}\varphi=\delta\dots(27)$
375	5	згори	$x^2-2bx+y^2=0\ .\ .\ .\ (54)$	$x^2-2by+y^2=0\ .\ .\ .\ (54)$
375	8	здолу	алгебричного рівняння	алгебричного рівняння кола
387	1		$\lambda = \frac{\mathrm{sn}\omega}{\pm\sqrt{A^2+B^2-A2B\mathrm{cs}\omega}} \dots(144)$	$\lambda = \frac{\mathrm{sn}\omega}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\mathrm{cs}\omega}} \dots(144)$

УКРАЇНЬСКИЙ ГРОМАДСЬКИЙ ВИДАВНИЧИЙ ФОНД.

1. С. РИНДИК — **Міцність матеріялів,** курс високих технічних шкіл: технологічних інститутів, механічних та інженірних відділів політехнікумів. **Зміст:** Розтяг, стиск, скіс, кручення, гнуття, динамічний обтяж. 364 ст., 8°. З додатком термінологічного словника та 214 рисунками. Ц. $ 3.00
2. С. РУСОВА — **Теорія і практика дошкільного виховання.** 128 ст., 8°. Ц. $ 0.60.
3. Проф. Др. В. ЯНОВСЬКИЙ — **Сучасне лікування венеричних хороб,** з чеської мови перекл. Др. А. Гончаренко. 118 ст. Ц. $ 0.50.
4. Др. Ф. БУРІАН — **Пластична хірурґія,** з 24 ілюстр., з чеської мови перекл. Др. А. Гончаренко. 16 ст. Ц. $ 0.30.
5. Проф. О. ШУЛЬГИН — **Нариси з нової історії Європи.** 220 ст. Ц. $1.00.
6. Др. А. ГОНЧАРЕНКО — **Загальна гігієна.** 204 ст. Ц. $ 1.00.
7. Проф. Ф. ЯКИМЕНКО — **Практичний курс науки гармонії в 2-х част.,** підручник для шкіл ріжних типів. **З задачником.** 132 ст.
8. І. ІВАСЮК — **Кубань,** економічно-статистичний нарис. 120 ст. Ц. $ 0.75.
9. М. ПАВЛІЧУК — **Коротка анатомія** для студентів медицини. З передмовою акад. А. Старкова. 116ст. Ц. $ 0.75.
10. Проф. Д. АНТОНОВИЧ — **Триста років українського театру** (нарис історії українського театру). 270 ст.
11. Др. ЯКИМ ЯРЕМА — **Провідні ідеї філософії Т. Г. Масарика.** Ц. $ 0.30.
12. Проф. Є. ІВАНЕНКО — **Аналітична геометрія.** 324 ст.
13. Проф. Ф. ЩЕРБИНА — **Історія статистики і статистичних установ.** 288 ст. Ц. $ 1.50.
14. К. МИХАЙЛЮК — **Підручник молочарства** для вищих сільсько-господарських шкіл. Ч. І. Молокознавство. З 62 мал.
15. Акад. А. СТАРКОВ — **Загальна біологія.**
16. Проф. М. ЧАЙКІВСЬКИЙ — **Алгебра,** курс середньої школи і для самонавчання.
17. Проф. С. БОРОДАЄВСЬКИЙ — **Історія кооперації.**
18. Проф. Л. БІЛЕЦЬКИЙ — **Основи української літературно-наукової критики.**
19. Акад. А. СТАРКОВ — **Остеологія.**
20. Др. В. ГАРМАШОВ — **Шкільна гігієна,** з малюнками.
21. Др. Д. ЧИЖЕВСЬКИЙ — **Логіка,** курс формальної логіки для середніх шкіл і самоосвіти, зі збірником вправ.
22. М. РАШЕВСЬКИЙ — **Рафінація цукру,** під редакцією і з додатками інж. Л. Фролова.
23. Проф. Д. ДОРОШЕНКО — **Нарис історії чеської літератури.**
24. Гр. ЧУПРИНКА — **Збірник творів,** під редакцією П. Богацького (коштом фундації ім. Гр. Чупринки).
25. Проф. М. ТУГАН-БАРАНОВСЬКИЙ — **Політична економія.**
26. ЄВ. ОНАЦЬКИЙ — **Класична мітологія.**
27. Др. В. ЛАЙ — **Школа чину.**
28. О. ОЛЕСЬ — **Поезії,** т. 8-й.

Серія: **Модерне українське мистецтво:**

29. **Вип. І:** Проф. **Д. Антонович — Група празької Студії.** Франц. і укр. текст. З 32 репродукціями. Ц. $ 0.90.

Готуються до друку:

30. Доц. Л. ГРАБИНА — **Ґеодезія.** Підручник для вищих технічних шкіл та для самоосвіти.
31. Доц. В. ЧЕРЕДІЇВ — **Ботаніка.**
32. Доц. О. МИХАЙЛОВСЬКИЙ — **Графостатика.**
33. Інж. Л. ФРОЛОВ — **Цукроварство.**
34. **Франц.-україн. словник. Англ.-україн. словник.**
35. О. САЛІКОВСЬКИЙ — **Що треба знати кожному.** Енціклопедія для дітей та для самоосвіти. 520 статей, 550 мал.

№№ 1—13 і 29 вийшли з друку перед кінцем 1924 року.

Адреса: Ukr. Hrom. Vyd. Fond, Praha-Vršovice, 665. Československo.

ДРУКАРНЯ „ЛЕГІОГРАФІЯ“,
Praha-Vršovice, Sámova ul. č. 665